

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica
Wydział Matematyki Stosowanej
Katedra Analizy Matematycznej, Matematyki Obliczeniowej
i Metod Probabilistycznych

Rozprawa doktorska

METODY RESAMPLINGOWE W DZIEDZINIE CZASU
DLA NIESTACJONARNYCH SZEREGÓW CZASOWYCH
O STRUKTURZE OKRESOWEJ I PRAWIE OKRESOWEJ

Rafał Synowiecki

dr hab. Jacek Leśkow

Kraków 2008

Spis treści

Podziękowania	2
Streszczenie	3
Abstract	5
Wstęp	7
Rozdział 1. Dane o strukturze okresowej i prawie okresowej	9
1.1. Szeregi czasowe stacjonarne i okresowe	9
1.2. Funkcje i szeregi czasowe prawie okresowe	11
1.3. Przykłady danych	13
Rozdział 2. Rezultaty asymptotyczne i pomocnicze	16
2.1. Własność α -mieszania	16
2.2. Nierówności Rosenthala	18
2.3. Słabe prawa wielkich liczb	19
2.4. Centralne twierdzenia graniczne	23
2.5. Jednostajna zbieżność wariancji dla sum szeregów APC	25
2.6. Problem estymacji	27
Rozdział 3. Metody resamplingowe i ich zgodność	35
3.1. Procedury resamplingowe	35
3.2. Zgodność subsamplingu	38
3.3. Zgodność bootstrapu ruchomych bloków (MBB) dla średniej próbkowej	46
3.4. Zgodności MBB dla przypadku wielowymiarowego i gładkich funkcji średniej	56
3.5. Zgodność bootstrapu sezonowych bloków (SBB)	61
3.6. Zgodność bootstrapu okresowych bloków (PBB)	63
Rozdział 4. Zastosowania i porównania	78
4.1. Test graficzny na stacjonarność i identyfikację częstotliwości	78
4.2. Test na odróżnianie okresów	82
4.3. Przykład dla danych rzeczywistych	88
4.4. Porównanie błędu średniokwadratowego dla metod bootstrap	90
4.5. Porównanie subsamplingu i bootstrapu	94
Wnioski końcowe	96
Bibliografia	97
Oznaczenia i skróty	101

Podziękowania

Składam serdeczne podziękowania mojemu Promotorowi, Prof. Jackowi Leśkowowi, za czteroletnią intensywną współpracę naukową oraz za wszelkiego rodzaju pomoc.

Dziękuję Prof. Dominikowi Dehay, Prof. Antoniowi Napolitano, mgr Łukaszowi Lenartowi oraz Prof. Dimitrisowi Politisowi za owocne dyskusje w Krakowie, Limanowej, Nowym Sączu, Toruniu, Rennes i San Diego.

Dziękuję zespołowi Laboratoire de Statistique w Université de Rennes 2 oraz Prof. Zbigniewowi Szkutnikowi z Wydziału Matematyki Stosowanej AGH za zadanie bardzo wartościowych pytań podczas moich referatów.

Dziękuję moim Rodzicom, Żonie Oleńce i Siostrze Patrycji.

Streszczenie

W przypadku danych zależnych (szeregów czasowych) wnioskowanie statystyczne oparte na rozkładach asymptotycznych nie zawsze może być podstawą efektywnych procedur statystycznych. Nieznany rozkład statystyk lub estymatorów można jednak przybliżać bezpośrednio za pomocą procedur zwanych ogólnie resamplingiem. Ideą tych metod jest otrzymywanie (w różny sposób) replikacji estymatora, a następnie obliczanie z tych replikacji rozkładu empirycznego. Podstawowym zagadnieniem teoretycznym jest tutaj problem zgodności, tzn. odpowiedź na pytanie, czy ten rozkład empiryczny, zwany rozkładem resamplingowym, jest bliski prawdziwemu rozkładowi. Do tej pory procedury resamplingowe zostały dobrze zbadane w przypadku danych niezależnych i szeregów czasowych stacjonarnych. Od niedawna natomiast prowadzone są intensywne badania w tym zakresie w dziedzinie niestacjonarnych szeregów czasowych.

Głównym celem rozprawy jest zbadanie warunków zgodności metod resamplingowych w dziedzinie czasu dla α -mieszających szeregów czasowych o szczególnym rodzaju niestacjonarności - tzn. o strukturze okresowej i prawie okresowej. Takie dane pojawiają się naturalnie w wielu dziedzinach, przykładowo w klimatologii, ekonomii i telekomunikacji. Zakładając, że rozpatrywany proces ma strukturę (prawie) okresową, problemy wnioskowania statystycznego o np. funkcji autokowariancji możemy sprowadzić do wnioskowania o współczynnikach Fouriera funkcji prawie okresowej.

W pracy zbadano cztery możliwe sposoby resamplingowania. Sposoby te znane są z literatury, ale wcześniej nie były stosowane w ogóle do danych (prawie) okresowych, albo jedynie do bardzo wąskich modeli. Pierwsza procedura zwana subsamplingiem polega na wyborze wszystkich możliwych podszeregów o pewnej długości i przeliczeniu estymatora na tych podszeregach. Okazało się, że potrzebna jest pewna modyfikacja estymatora współczynników Fouriera, aby zachodziła zgodność. Drugą badaną procedurą jest bootstrap bloków ruchomych. W tym przypadku punkt wyjścia stanowi średnia próbkowa. Sformułowano także wnioski dotyczące zgodności dla przypadku wielowymiarowego, gładkich funkcji średniej oraz estymatorów współczynników Fouriera. Ostatnie dwie badane procedury, bootstrap bloków sezonowych i okresowych, wymagają znajomości długości bloku. Pierwsza z nich jest zgodna w równie uniwersalnych sytuacjach jak bootstrap bloków ruchomych. W pracy udowodniono, że druga z tych metod działa dobrze tylko w przypadku tablic zmiennych losowych, dla których długość okresu rośnie wraz z numerem wiersza.

W drugiej kolejności rozprawa koncentruje się na zastosowaniach i wynikach użycia wyżej opisanych technik resamplingowych do danych symulowanych i rzeczywistych. Sformułowano następujące zagadnienia praktyczne, w których stosowany może być resampling: identyfikacja istotnych częstotliwości, odróżnianie dwóch okresów, testowanie stacjonarności. Przedstawiono przykłady dla tych problemów oraz porównania metod resamplingowych.

Słowa kluczowe

bootstrap blokowy, okresowo i prawie okresowo skorelowane szeregi czasowe, prawie okresowe funkcje, reprezentacja Fouriera, subsampling, test stacjonarności, własność α -mieszania, zgodność

Abstract

Statistical inference for time series data based on asymptotic distribution frequently leads to statistical procedures that are very hard to apply in practice. However, the unknown distribution of various statistics and estimators may be directly approximated by resampling procedures. The main idea is to obtain some replications of the estimator. On the basis of these replications, empirical distribution is calculated. The main theoretical challenge here is to prove that this empirical distribution tends to the real one. Up until now resampling methods have been thoroughly investigated for identically distributed independent data and stationary time series. Researchers' efforts have recently been directed to investigate this problem for nonstationary time series.

The main objective of the thesis is to establish conditions for consistency of resampling methods in the area of α -mixing time series with periodic and almost periodic structure. This kind of nonstationary data are gathered in many areas such as climatology, economy or telecommunications. For (almost) periodic time series statistical inference regarding e.g. autocovariance function is based on its Fourier representation.

This thesis considers four types of resampling techniques, known in the literature. The focus here is to investigate these techniques in the general almost periodic setup. The first procedure is called subsampling. It consists in recalculating estimator over every possible subseries of some length. It is shown that the estimator of Fourier coefficient needs some modification for the subsampling to be consistent. The second method is moving block bootstrap. For this method sample mean is the starting point. Then some corollaries are evaluated. They regard multivariate case, smooth functions of the mean and estimators of Fourier coefficients. The two remaining procedures are seasonal block bootstrap and periodic block bootstrap. In order to apply them one needs to know the exact length of the period. The first of the two aforementioned methods is consistent under general assumptions similar to moving block bootstrap context. The other is shown to work only in the case of triangular random arrays with the period increasing row-wise.

The second objective of the thesis are applications and comparisons of resampling methods for simulated and real (almost) periodic data. These methods are successfully applied in the problem of significant frequencies identification, testing for period and stationarity. Some illustrative examples are presented.

Key words

α -mixing property, almost periodic functions, block bootstrap, consistency, Fourier representation, periodically and almost periodically correlated time series, stationarity test, subsampling

Wstęp

W obecnych czasach obserwujemy ogromny rozwój metod wspomaganych komputerowo w rozwiązywaniu różnego typu problemów. Należą do nich metody resamplingowe, czyli ponownego losowania, które stosowane są w statystyce matematycznej. Do metod resamplingowych zaliczamy m.in. testy permutacyjne, jackknife, metody bootstrapowe i subsampling. Metody te umożliwiają automatyczne przybliżanie nieznanych rozkładów (lub ich charakterystyk) statystyk i estymatorów, bez odwoływania się do postaci tych rozkładów. Przybliżenia te używane są później do konstrukcji przedziałów ufności dla parametrów oraz do różnych problemów testowania hipotez statystycznych. Można stwierdzić, że rozwój resamplingu zaczął się w latach osiemdziesiątych XX wieku od pracy Efrona (1979) poświęconej bootstrapowaniu danych niezależnych. Pod koniec tej dekady zaczęto interesować się danymi zależnymi. Główną ideą resamplingu jest próbkowanie z pewnego rozkładu \hat{P}_n , który konstruujemy w oparciu o próbkę (X_1, \dots, X_n) . W przypadku danych niezależnych i o tym samym rozkładzie było dosyć jasne w jaki sposób należy konstruować \hat{P}_n . Dla danych zależnych (szeregów czasowych) konstrukcja ta staje się znacznie trudniejsza i bardziej skomplikowana. W przełomowych pracach Singh (1981); Liu i Singh (1992); Künsch (1989) pokazano, że konieczne jest wtedy tworzenie rozkładu \hat{P}_n nie na podstawie pojedynczych danych, ale ich bloków. Mimo tych trudności możliwość otrzymywania bezpośrednio estymatorów rozkładów w przypadku szeregów czasowych jest bardzo istotna. Dzieje się tak dlatego, że tradycyjne wnioskowanie statystyczne oparte na rozkładach asymptotycznych nie zawsze może być podstawą efektywnych procedur statystycznych. Po pierwsze, zbieżność rozkładu estymatora do rozkładu granicznego jest wolna i wymaga bardzo długich próbek. W praktyce nie zawsze mamy możliwość otrzymania tak wielu danych z powodu kosztu ich uzyskiwania lub ograniczeń technicznych. Po drugie, rozkład asymptotyczny bywa często skomplikowany lub zależy od nieznanymi parametrów, które w przypadku danych zależnych są trudne do estymowania.

W latach dziewięćdziesiątych zbadano dosyć dokładnie przypadek szeregów stacjonarnych. Obecnie wysiłki badaczy przenoszą się w kierunku szeregów niestacjonarnych (Fitzenberger, 1997; Gonçalves i White, 2002). Jedną ze specyficznych postaci niestacjonarności jest okresowość i prawie okresowość. Rozwój tej gałęzi, zapoczątkowany przez pracę Gładysheva (1961), zaowocował wieloma rezultatami teoretycznymi i różnorodnymi zastosowaniami praktycznymi (Gardner i in., 2006). Jak do tej pory nie połączono w wystarczającym stopniu dwóch powyższych dziedzin. Aby uzasadnić, że

tematyka metod resamplingowych dla danych (prawie) okresowych jest słabo zbadana podajmy, że do niedawna ukazały się tylko dwie publikacje poruszające ten problem: Politis (2001) oraz Chan i in. (2004). Obie dotyczą bardzo wąskich modeli, a praca Chan i in. (2004) jest dodatkowo bardzo nieformalna. Zacytujmy tutaj zdanie pochodzące z tej pracy:

”Despite the volume of literature on the use of block bootstrap for time series data, we know of no work that deals with periodic dependent data.”

(Pomimo dużej objętości literatury na temat bootstrapu, nie znamy żadnej pracy, która zajmuje się okresowymi danymi zależnymi).

Panuje wręcz opinia, że podstawowe metody resamplingowe nie mogą być bezpośrednio używane do modeli okresowych i prawie okresowych. Przytoczmy fragment z pracy Politis (2001):

”The Block Bootstrap (BB) method of Künsch (1989) is not directly applicable [to periodic models], and the same is true for the different BB variations; see e.g. Lahiri (1999) and the references therein.”

(Metoda bootstrapu blokowego Künscha (1989) nie jest bezpośrednio stosowalna [do modeli okresowych] i to samo dotyczy innych metod bootstrapu blokowego; patrz np. Lahiri (1999) wraz z bibliografią.)

Głównym celem niniejszej rozprawy jest powiązanie teorii okresowych i prawie okresowych szeregów czasowych z teorią nieparametrycznych metod resamplingowych. Będziemy chcieli przede wszystkim przedstawić fundamentalne rezultaty teoretyczne dotyczące zgodności metod resamplingowych oraz sposób ich wykorzystania do praktycznego wnioskowania w tej klasie modeli. Zajmiemy się kilkoma rodzajami resamplingowania, tzn. subsamplingiem, bootstrapem bloków ruchomych, sezonowych i okresowych.

W pierwszym rozdziale pracy przedstawimy jednolite definicje rozważanych klas szeregów czasowych wraz z kilkoma przykładami modeli. Zaprezentujemy także własności funkcji prawie okresowych oraz podamy przykłady dziedzin, w których mają zastosowanie modele okresowe i prawie okresowe. Celem drugiego rozdziału jest dostarczenie narzędzi, które będą używane w dowodzeniu zgodności metod resamplingowych. Są to nierówności Rosenthala, centralne twierdzenia graniczne oraz prawa wielkich liczb. W drugiej części tego rozdziału podajemy podstawowe własności estymatorów współczynników Fouriera dla szeregów prawie okresowo skorelowanych. Rozdział trzeci zawiera nasze główne rezultaty teoretyczne dotyczące zgodności subsamplingu, bootstrapu bloków ruchomych, okresowych i sezonowych. Otrzymano zgodność dla średniej próbkowej jednowymiarowej, wielowymiarowej, gładkich funkcji średniej oraz estymatorów współczynników Fouriera. Ostatni, czwarty, rozdział zawiera przykładowe zastosowania metod resamplingowych w problemie identyfikacji częstotliwości oraz testowania okresu i stacjonarności. Ponadto przedstawiono w nim symulacyjne wyniki porównań różnych sposobów resamplingowania.

Przedstawione w pracy dowody pochodzą od Autora oraz jego współpracowników zgodnie z zamieszczonym spisem literatury.

Dane o strukturze okresowej i prawie okresowej

Celem niniejszego rozdziału jest zaprezentowanie klas szeregów czasowych, które będą rozważane w dalszej części. Podajemy ujednoczone definicje szeregów czasowych stacjonarnych, okresowych i prawie okresowych oraz podstawowe własności funkcji prawie okresowych. Paragraf 1.3 opisuje natomiast przykłady danych, które mogą być modelowane za pomocą szeregów czasowych o strukturze okresowej i prawie okresowej.

1.1. Szeregi czasowe stacjonarne i okresowe

W pierwszej kolejności przedstawiamy definicje szeregów stacjonarnych w sensie węższym i szerszym. Stacjonarność jest założeniem o niezmienniczości rozkładów lub momentów odpowiedniego rzędu. W poniższych definicjach długość okresu T i parametr rzędu r są liczbami naturalnymi.

Definicja 1.1. Szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ nazywamy ściśle stacjonarnym rzędu r (*strictly stationary of order r , $SS(r)$*), jeśli dla każdego $t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{r-1} \in \mathbb{Z}$ i dla każdego $h \in \mathbb{Z}$,

$$\left(X_t, X_{t+\tau_1}, \dots, X_{t+\tau_{r-1}}\right) \stackrel{d}{=} \left(X_{t+h}, X_{t+\tau_1+h}, \dots, X_{t+\tau_{r-1}+h}\right).$$

Definicja 1.2. Szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ nazywamy ściśle stacjonarnym (*SS*), jeśli jest on $SS(r)$ dla każdego $r \in \mathbb{N}$.

Definicja 1.3. Szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ nazywamy stacjonarnym w sensie szerszym rzędu r (*weakly stationary of order r , $WS(r)$*), jeśli $E|X_t|^r < \infty$ i dla każdych $t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{r-1} \in \mathbb{Z}$ i dla każdego $h \in \mathbb{Z}$,

$$E\left(X_t X_{t+\tau_1} \cdots X_{t+\tau_{r-1}}\right) = E\left(X_{t+h} X_{t+\tau_1+h} \cdots X_{t+\tau_{r-1}+h}\right).$$

W dalszej kolejności podajemy definicję okresowych szeregów czasowych.

Definicja 1.4. Szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ nazywamy ściśle okresowym rzędu r (strictly periodic of order r , $SP(r)$) z okresem T , jeśli r -wymiarowe łączne rozkłady są okresowe, czyli dla każdego $t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{r-1} \in \mathbb{Z}$,

$$(X_t, X_{t+\tau_1}, \dots, X_{t+\tau_{r-1}}) \stackrel{d}{=} (X_{t+T}, X_{t+\tau_1+T}, \dots, X_{t+\tau_{r-1}+T}).$$

Definicja 1.5. Szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ nazywamy ściśle okresowym (SP) z okresem T , jeśli jest on $SP(r)$ z okresem T dla każdego $r \in \mathbb{N}$.

Następujący rezultat pokazuje, że klasa szeregów SP jest dosyć obszerna.

Twierdzenie 1.1 (Synowiecki, 2007b). Niech szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ posiada następującą strukturę

$$X_t = F(Z_t, f(t)),$$

gdzie funkcja f jest okresowa z okresem $T \in \mathbb{N}$, szereg czasowy $\{Z_t\}$ jest $SS(r)$ i funkcja $F(\cdot, f(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest borelowsko mierzalna dla każdego t . Wtedy szereg $\{X_t\}$ jest $SP(r)$ z okresem T .

Dowód. Weźmy dowolne $t, \tau_1, \dots, \tau_{r-1} \in \mathbb{Z}$. Korzystając z własności ścisłej stacjonarności szeregu $\{Z_t\}$ mamy

$$(Z_t, Z_{t+\tau_1}, \dots, Z_{t+\tau_{r-1}}) \stackrel{d}{=} (Z_{t+T}, Z_{t+\tau_1+T}, \dots, Z_{t+\tau_{r-1}+T}).$$

Korzystając z mierzalności funkcji $F(\cdot, f(t))$ dostajemy natychmiast

$$\begin{aligned} & (F(Z_t, f(t)), F(Z_{t+\tau_1}, f(t + \tau_1)), \dots, F(Z_{t+\tau_{r-1}}, f(t + \tau_{r-1}))) \\ & \stackrel{d}{=} (F(Z_{t+T}, f(t)), F(Z_{t+\tau_1+T}, f(t + \tau_1)), \dots, F(Z_{t+\tau_{r-1}+T}, f(t + \tau_{r-1}))). \end{aligned}$$

Z okresowości funkcji f otrzymujemy

$$\begin{aligned} & (F(Z_t, f(t)), F(Z_{t+\tau_1}, f(t + \tau_1)), \dots, F(Z_{t+\tau_{r-1}}, f(t + \tau_{r-1}))) \\ & \stackrel{d}{=} (F(Z_{t+T}, f(t + T)), F(Z_{t+\tau_1+T}, f(t + \tau_1 + T)), \dots, F(Z_{t+\tau_{r-1}+T}, f(t + \tau_{r-1} + T))). \end{aligned}$$

co daje nam, że $(X_t, X_{t+\tau_1}, \dots, X_{t+\tau_{r-1}}) \stackrel{d}{=} (X_{t+T}, X_{t+\tau_1+T}, \dots, X_{t+\tau_{r-1}+T})$. ■

Definicja 1.6. Szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ nazywamy okresowym w sensie szerszym rzędu r (weakly periodic of order r , $WP(r)$) z okresem T , jeśli $E|X_t|^r < \infty$ i dla każdego $t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{r-1} \in \mathbb{Z}$,

$$E(X_t X_{t+\tau_1} \cdots X_{t+\tau_{r-1}}) = E(X_{t+T} X_{t+\tau_1+T} \cdots X_{t+\tau_{r-1}+T}).$$

Łatwo widać, że dla dwóch liczb naturalnych takich, że $r_1 < r_2$, mamy $SP(r_1) \subset SP(r_2) \subset SP$. Ponadto okresowość (stacjonarność) w sensie szerszym jest implikowana przez okresowość (stacjonarność) w sensie węższym pod warunkiem istnienia momentów odpowiedniego rzędu. Dodajmy, że klasa szeregów czasowych, które są $WP(1)$

i WP(2) jest identyczna z klasą szeregów okresowo skorelowanych (*periodically correlated*, PC) w sensie Gladyszewa (1961). Przykładem jest model PARMA (model ARMA z okresowymi współczynnikami) postaci

$$X_t - \sum_{k=1}^p a_k(t)X_{t-k} = \sum_{k=0}^{q-1} b_k(t)\epsilon_{t-k},$$

gdzie $a_k(t) = a_k(t + T)$ i $b_k(t) = b_k(t + T)$. Szereg powyższy jest PC przy pewnych warunkach ograniczoności na współczynniki a_k i b_k (Wyłomańska, 2005). Innymi często spotykanymi w zastosowaniach modelami są tzw. modulacja amplitudy $X_t = f(t)Z_t$ oraz modulacja fazy $X_t = Z_{t+f(t)}$, które posiadają własność PC, o ile szereg czasowy $\{Z_t\}$ jest WS(1) i WS(2), a funkcja f jest funkcją okresową.

1.2. Funkcje i szeregi czasowe prawie okresowe

Zaczynamy ten paragraf od formalnej definicji funkcji prawie okresowej.

Definicja 1.7 (Besicovitch, 1932; Corduneanu, 1989). *Niech $A \subset \mathbb{R}$. Funkcję $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy prawie okresową (almost periodic, a.p.), jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje liczba dodatnia l_ϵ taka, że w każdym przedziale o długości większej niż l_ϵ istnieje liczba p_ϵ , że*

$$\sup_{t \in A} |f(t + p_\epsilon) - f(t)| < \epsilon.$$

Funkcje prawie okresowe stanowią istotne uogólnienie funkcji okresowych przy zachowaniu podobnych własności takich jak jednostajna ograniczoność czy reprezentacja Fouriera. Jako przykład rozpatrzmy funkcję

$$f(t) = \cos(\lambda t).$$

Jeśli $A = \mathbb{R}$, jest ona okresowa z okresem $T = 2\pi/\lambda$. Jeśli jednak $A = \mathbb{Z}$ i $\lambda \neq 2\pi m_1/m_2$, gdzie $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, to funkcja f nie jest okresowa, ale jest prawie okresowa. Następujący fakt podaje relację między funkcjami prawie okresowymi argumentu dyskretnego i ciągłego.

Twierdzenie 1.2 (Corduneanu, 1989). *Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ jest prawie okresowy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje prawie okresowa funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f(n) = a_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.*

Przestrzeń funkcji a.p. jest zamknięta ze względu na sumy, iloczyny oraz jednostajne granice. Ponadto dla każdej funkcji z tej klasy możemy zdefiniować jej wartość średnią, czyli wielkość

$$M_t(f(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=s}^{s+n-1} f(j).$$

Powyższa granica istnieje i jest jednakowa jednostajnie ze względu na s (Besicovitch, 1932; Corduneanu, 1989). Indeks dolny t w symbolu M_t wskazuje nam na zmienną względem której następuje uśrednianie.

Kolejnym ważnym faktem dotyczącym tej klasy funkcji jest to, że zbiór

$$\Lambda_f = \{\lambda \in [0, 2\pi) : M_t(f(t)e^{-i\lambda t}) \neq 0\}$$

jest przeliczalny. Jeśli zbiór Λ_f jest skończony, to funkcja f posiada dodatkowe požądane własności. Po pierwsze, (uogólniona) reprezentacja Fouriera jest wtedy równością (Besicovitch, 1932; Corduneanu, 1989), tzn.

$$f(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda_f} a(\lambda) e^{i\lambda t},$$

gdzie $a(\lambda) = M_t(f(t)e^{-i\lambda t})$. Tożsamość ta jest bardzo ważna we wnioskowaniu statystycznym dla klas szeregów czasowych przez nas rozważanych. Po drugie, zachodzi poniższy lemat, który jest dyskretną wersją Lematu 2 z pracy Cambanis i in. (1994).

Lemat 1.1. *Jeśli funkcja $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ jest prawie okresowa i zbiór $\Lambda_f = \{\lambda \in [0, 2\pi) : M_t(f(t)e^{-i\lambda t}) \neq 0\}$ jest skończony, wtedy*

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{b} \sum_{t=j}^{j+b-1} f(t) - M_t(f(t)) \right| \leq \frac{1}{b} \left(\max_{\lambda \in \Lambda_f \setminus \{0\}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{2(1 - \cos \lambda)}} \right\} \cdot \sum_{\lambda \in \Lambda_f \setminus \{0\}} |a(\lambda)| \right).$$

Dowód. Ponieważ zbiór Λ_f jest skończony, mamy

$$f(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda_f} a(\lambda) e^{i\lambda t}$$

i dlatego

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b} \sum_{t=j}^{j+b-1} f(t) - M_t(f(t)) \right| &= \left| \frac{1}{b} \sum_{t=j}^{j+b-1} \sum_{\lambda \in \Lambda_f} a(\lambda) e^{i\lambda t} - M_t(f(t)) \right| \\ &= \left| \frac{1}{b} \sum_{t=j}^{j+b-1} \sum_{\lambda \in \Lambda_f \setminus \{0\}} a(\lambda) e^{i\lambda t} \right| \\ &= \left| \frac{1}{b} \sum_{\lambda \in \Lambda_f \setminus \{0\}} a(\lambda) \sum_{t=j}^{j+b-1} e^{i\lambda t} \right| \\ &\leq \frac{1}{b} \sum_{\lambda \in \Lambda_f \setminus \{0\}} |a(\lambda)| \left| e^{i\lambda j} \frac{1 - e^{i\lambda b}}{1 - e^{i\lambda}} \right| \\ &\leq \frac{1}{b} \sum_{\lambda \in \Lambda_f \setminus \{0\}} \frac{2|a(\lambda)|}{\sqrt{2(1 - \cos \lambda)}} \\ &\leq \frac{1}{b} \left(\max_{\lambda \in \Lambda_f \setminus \{0\}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{2(1 - \cos \lambda)}} \right\} \cdot \sum_{\lambda \in \Lambda_f \setminus \{0\}} |a(\lambda)| \right). \end{aligned}$$

■

Zauważmy, że dla funkcji okresowej z okresem T

$$\Lambda_f \subset \left\{ \frac{2\pi k}{T} : k = 0, \dots, T-1 \right\},$$

i ten zbiór jest zawsze skończony. Podajemy jeszcze jedną prostą własność omawianej klasy funkcji.

Lemat 1.2. Niech funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ będzie prawie okresowa. Załóżmy, że zbiór $\Lambda_f = \{\lambda \in [0, 2\pi) : M_t(f(t)e^{-i\lambda t}) \neq 0\}$ jest skończony. Jeśli mamy

$$M_t(f^2(t)) = M_t^2(f(t)),$$

to funkcja f jest stała.

Dowód. Korzystając z reprezentacji Fouriera dla funkcji prawie okresowych możemy napisać

$$f(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda_f} a(\lambda) e^{i\lambda t}.$$

Dlatego mamy

$$M_t(f^2(t)) = \sum_{\lambda \in \Lambda_f} a(\lambda) a(2\pi - \lambda).$$

Ponieważ $a(2\pi - \lambda) = \overline{a(\lambda)}$, założenie implikuje, że $a^2(0) = \sum_{\lambda \in \Lambda_f} |a(\lambda)|^2$, więc $\Lambda_f = \{0\}$. ■

Definicja 1.8. Szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ nazywamy prawie okresowym w sensie szerszym rzędu r (weakly almost periodic of order r , WAP(r)), jeśli $E|X_t|^r < \infty$ oraz dla każdych $t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{r-1} \in \mathbb{Z}$ funkcja

$$E(X_t X_{t+\tau_1} \cdots X_{t+\tau_{r-1}})$$

jest prawie okresowa względem zmiennej t .

Łatwo widać, że $WP(r) \subset WAP(r)$. Ponadto, szereg czasowy, który jest jednocześnie WAP(1) i WAP(2) nazywamy prawie okresowo skorelowanym (*almost periodically correlated*, APC). Pojęcie to zostało wprowadzone w pracy Hurd (1991). Jako przykład można podać szereg autoregresyjny postaci

$$X_t = a_t X_{t-1} + \epsilon_t,$$

gdzie zmienne $\{\epsilon_t\}$ są niezależne, mają zerowe wartości oczekiwane i skończone wariancje, a ciąg $\{a_t\}$ jest prawie okresowy (patrz Hurd i in., 2002). Innymi często spotykanymi w zastosowaniach modelami są modulacja amplitudy $X_t = f(t)Z_t$ i modulacja fazy $X_t = Z_{t+f(t)}$, które posiadają własność APC, o ile szereg czasowy $\{Z_t\}$ jest PC, a funkcja f jest funkcją prawie okresową. Podstawy wnioskowania statystycznego dla procesów APC zostały opracowane m.in. w publikacjach: Hurd i Leśkow (1992b); Dehay i Leśkow (1996a,b); Leśkow (2001).

1.3. Przykłady danych

Wiele zjawisk można opisać za pomocą wzorca, który jest zaburzany losowo i pojawia się okresowo lub prawie okresowo. Obserwując takie zjawisko zbieramy dane o (prawie) okresowych charakterystykach jak momenty czy rozkłady. Można je zatem modelować za pomocą szeregów czasowych (prawie) okresowo skorelowanych lub ściśle okresowych. Wyróżnimy trzy kategorie takich danych:

- **dane pochodzące ze zjawisk naturalnych**

Źródłem okresowości jest tutaj ruch postępowy i obrotowy Ziemi. Powoduje on kolejne następowanie po sobie dnia i nocy oraz pór roku. Przykładem danych związanych z tym zjawiskiem są dane meteorologiczne. Interesujące analizy poziomu ozonu atmosferycznego mierzonych przez stację Arosa w Szwajcarii można znaleźć w pracach Bloomfield i in. (1994) oraz Lund i in. (1995). W pracy Bayandin (1991) modelowano pływy morskie za pomocą szeregów PC. Pisarenko i in. (2001) modelowali i prognozowali natomiast przepływy w dużych rzekach europejskich i azjatyckich. Pokazano tutaj, że modele PC z powodzeniem mogą konkurować z sieciami neuronowymi.

- **dane ekonomiczne**

Sezonowość występuje w wielu zjawiskach ekonomicznych. Rozważmy przykładowo sprzedaż detaliczną. Zwykle obserwujemy wzrost od sierpnia do września z maksymalnymi wartościami w okolicach Świąt Bożego Narodzenia. Innym przykładem są chwilowe ceny energii elektrycznej (tzw. spot prices). Zwykle w nocy ceny spadają, a w godzinach szczytu rosną. Dzięki temu zarabiać mogą elektrownie szczytowo-pompowe, które pobierają energię w nocy i wytwarzają w dzień. Ceny energii elektrycznej były modelowane za pomocą szeregów PARMA w pracy Broszkiewicz-Suwaj i Wyłomańska (2004), a pewne wyniki symulacyjne zawiera też praca Broszkiewicz-Suwaj i in. (2004).

- **dane mechaniczne i telekomunikacyjne**

Źródłem okresowości w danych mechanicznych może być na przykład praca silników. W publikacji Capdessus i in. (2000) na podstawie teorii losowych procesów okresowych opracowano metodę wczesnej diagnostyki urządzeń. Bardzo dużo zastosowań modeli okresowych i prawie okresowych pojawia się w teorii sygnałów (urządzenia telekomunikacyjne, telemetria, radary, sonary). Związane jest to z modulacjami, próbkowaniem (sampling) czy kodowaniem (Gardner i in., 2006). Jako przykład podajmy sygnał filtrowany postaci

$$X_t = \int_{\mathbb{R}} h(t, u) Z_u du.$$

Jeśli proces stochastyczny $\{Z_t : t \in \mathbb{R}\}$ jest stacjonarny, a funkcja h jest okresowa, tzn. $h(t+T, u+T) = h(t, u)$, to proces lub szereg $\{X_t\}$ będzie okresowo skorelowany. Specjalnym przypadkiem filtrowania jest efekt Dopplera, który powstaje w przypadku kiedy źródło sygnału i odbiornik poruszają się względem siebie. Niech $D(t)$ oznacza opóźnienie w chwili t między tymi dwoma ciałami. Wtedy w wyniku efektu Dopplera powstaje sygnał filtrowany z funkcją

$$h(t, u) = \delta(u - t + D(t)),$$

gdzie δ jest deltą Diraca. W pracy Izzo i Napolitano (2002) pokazano, że dla przypadku stałej prędkości względnej, czyli

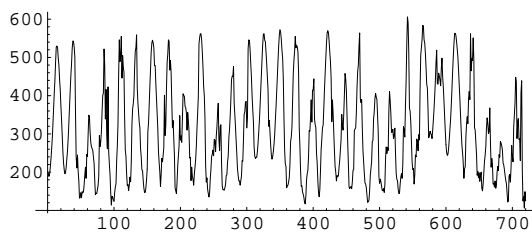
$$D(t) = d_0 + d_1 t,$$

jeśli nadajnik wysyła sygnał APC, to odbiornik odbiera nieco przekształcony sygnał APC. W przypadku, gdy względny ruch jest jednostajnie przyspieszony, czyli

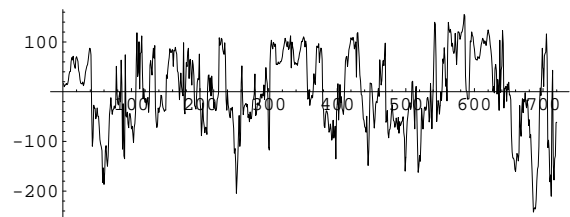
$$D(t) = d_0 + d_1t + d_2t^2,$$

obierany sygnał należy do szerszej klasy uogólnionych sygnałów APC. Obserwując jednak taki sygnał (proces stochastyczny) w czasie dyskretnym, otrzymujemy szereg czasowy APC.

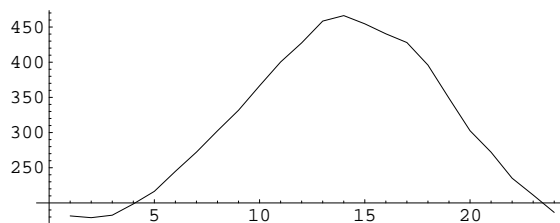
Aby zrozumieć jak głęboką własnością danych statystycznych jest okresowość rozważmy następujący przykład (Synowiecki, 2005). Rysunek 1.1(a) przedstawia wilgotność



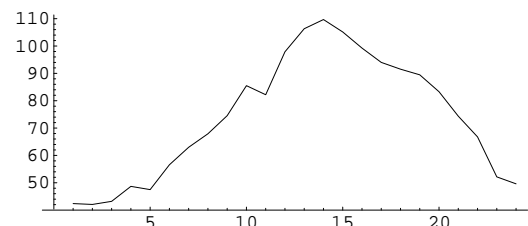
(a) Dane źródłowe.



(b) Dane po eliminacji średnich sezonowych.



(c) Średnie próbkowe dla każdej godziny.



(d) Odchylenia standardowe dla każdej godziny.

Rysunek 1.1. Wilgotność powietrza. Pomiary dokonywano co godzinę od 24-tego maja 1991 do 22-go czerwca 1991 (30 okresów, 720 danych). Dane pochodzą ze strony internetowej instytutu Taconite Intel Project Site.

powietrza. Pomiary przeprowadzano co godzinę przez 30 dni. Możemy przyjąć, że długość okresu wynosi $T = 24$, co związane jest ze zmianą nasłonecznienia i temperatury. Rysunek 1.1(c) obrazuje średni poziom wilgotności dla każdej godziny. Podobnie jak odchylenie standardowe (Rysunek 1.1(d)), ma on przebieg okresowy. Zatem możemy przypuszczać, że w danych tych okresowość występuje na poziomie pierwszych i drugich momentów. Oczywiście w tym momencie nie możemy stwierdzić, czy różnice pomiędzy poszczególnymi godzinami są istotne. Statystyczna ocena będzie możliwa natomiast dzięki technikom opartym na metodach resamplingowych, które zaprezentujemy w dalszej części pracy.

Rezultaty asymptotyczne i pomocnicze

W tym rozdziale przedstawimy główne narzędzia potrzebne do analizy zgodności metod resamplingowych. Zaczniemy od pojęcia α -mieszania oraz podstawowych własności szeregów α -mieszających. Następnie podamy cztery różne wersje nierówności Rosenthala znane z literatury oraz nowe sformułowania praw wielkich liczb dla tablic α -mieszających. Sformułowania te oparte są na pracach Synowiecki (2007a); Leśkow i Synowiecki (2008). Paragraf 2.4 cytuje natomiast centralne twierdzenia graniczne, które będą stosowane do estymatorów oraz w dowodach zgodności metod resamplingowych. Paragrafy 2.5 i 2.6 poświęcone są szeregom czasowym PC i APC. Przedstawiają jednostajną zbieżność wariancji sum tych szeregów oraz centralne twierdzenia graniczne dla estymatorów współczynników Fouriera. Wyniki te oparte są na pracach Leśkow i Synowiecki (2006) oraz Lenart i in. (2008a,b).

2.1. Własność α -mieszania

Założenia mieszania są formalizacją intuicyjnego pojęcia "zapominania" w szeregu czasowym. Oznacza to, że dalekie obserwacje są zmiennymi losowymi niemal niezależnymi. Dzięki takim założeniom możliwe jest otrzymywanie rezultatów granicznych. W literaturze znane są różne pojęcia mieszania, m.in. α , β , φ , ψ -mieszanie (Doukhan, 1994; Bradley, 2005). Najbardziej rozpowszechnionym i najsłabszym jest α -mieszanie. W poniższej definicji oznaczamy jako $\mathcal{F}(t_1, t_2)$ σ -ciało generowane przez obserwacje $\{X_t : t_1 \leq t \leq t_2\}$.

Definicja 2.1 (Doukhan, 1994). *Dla szeregu czasowego $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ definiujemy funkcję (ciąg) α -mieszania jako*

$$\alpha_X(\tau) = \sup_{t \in \mathbb{Z}} \sup_{\substack{A \in \mathcal{F}_X(-\infty, t) \\ B \in \mathcal{F}_X(t+\tau, \infty)}} |P(A \cap B) - P(A)P(B)|,$$

gdzie $\tau \in \mathbb{N}$. Szereg czasowy $\{X_t\}$ nazywamy α -mieszającym, gdy $\alpha_X(\tau) \rightarrow 0$ dla $\tau \rightarrow \infty$.

Szczególnym przypadkiem szeregów α -mieszających są szeregi m -zależne, czyli takie, dla których obserwacje odległe o więcej niż m jednostek czasowych są niezależne. Jako przykład podajmy szereg postaci

$$X_t = g(U_t, U_{t+1}, \dots, U_{t+m}),$$

gdzie $g : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją borelowsko mierzalną i deterministyczną, a ciąg zmiennych losowych $\{U_t\}$ jest i.i.d. W pracy Kolmogorov i Rozanov (1960) pokazano natomiast, że jeśli dowolny szereg $\{X_t\}$ jest gaussowski i stacjonarny, to warunkiem wystarczającym α -mieszania jest ciągłość i dodatniość gęstości spektralnej. Interesującym aspektem badań jest następujący problem: pod jakimi warunkami model autoregresyjny

$$X_t = aX_{t-1} + \epsilon_t, \quad (2.1)$$

gdzie $|a| < 1$ i reszty $\{\epsilon_t\}$ są i.i.d., jest α -mieszający? Zgodnie z rezultatami pracy Andrews (1983) wiadomo, że o własnościach α -mieszania tego modelu AR(1) decyduje gęstość f względem miary Lebesgue'a rozkładu reszt $\{\epsilon_t\}$. Wystarczy, aby gęstość f była ograniczona oraz musi istnieć taki skończony podział \mathbb{R} na przedziały, że gęstość f jest (słabo) monotoniczna na każdym z przedziałów (Twierdzenie 2, Andrews, 1983). Warunki te spełnia większość ze standardowych rozkładów ciągłych na prostej, m.in. rozkład normalny, wykładniczy, czy jednostajny. Gdy jednak rozkład innowacji ma atomy, własność α -mieszania może nie zachodzić. W pracach Andrews (1983, 1984) pokazano, że jeśli reszty mają rozkład dwupunktowy na zbiorze $\{0, 1\}$, to model (2.1) nie jest α -mieszający dla $a \in (0, 0.5]$. W pracy Liebscher (2005) badano natomiast α -mieszanie dla innych modeli niż (2.1), m.in. dla modeli typu ARCH.

Własność α -mieszania daje oszacowania dla autokowariancji szeregu, które przedstawiamy w dwóch poniższych lematkach. Zdefiniujemy p -tą normę zmiennej losowej jako $\|X\|_p = (E|X|^p)^{\frac{1}{p}}$, gdzie $0 < p < \infty$.

Lemat 2.1 (Doukhan, 1994). *Niech $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie szeregiem czasowym o funkcji α -mieszania $\alpha_X(\cdot)$ i niech zmienne losowe ξ, η będą odpowiednio $\mathcal{F}_X(-\infty, t)$ i $\mathcal{F}_X(t + \tau, \infty)$ mierzalne. Załóżmy, że $E|\xi|^p < \infty$ i $E|\eta|^q < \infty$, gdzie $\min\{p, q\} > 1$ oraz $1/p + 1/q < 1$. Wtedy*

$$|Cov(\xi, \eta)| \leq 8\|\xi\|_p\|\eta\|_q \alpha_X^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(\tau).$$

Lemat 2.2 (Doukhan, 1994). *Niech $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie szeregiem czasowym o funkcji α -mieszania $\alpha_X(\cdot)$ i niech zmienne losowe ξ, η będą odpowiednio $\mathcal{F}_X(-\infty, t)$ i $\mathcal{F}_X(t + \tau, \infty)$ mierzalne. Załóżmy, że $|\xi| \leq C_1$ i $|\eta| \leq C_2$ prawie na pewno. Wtedy*

$$|Cov(\xi, \eta)| \leq 4C_1C_2 \alpha_X(\tau).$$

Główną wadą α -mieszania jest to, że nie można w praktyce sprawdzić czy dane posiadają tę własność. Założenie to pozwala jednak na udowadnianie wielu rezultatów dla danych zależnych takich jak centralne twierdzenie graniczne, prawa wielkich liczb, iterowanego logarytmu i wreszcie zgodność metod resamplingowych.

2.2. Nierówności Rosenthala

Rosenthal (1970) po raz pierwszy udowodnił, że dla ciągu niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie zachodzi następujące oszacowanie $E|\sum_{t=1}^n X_t|^{2r} = O(n^r)$ dla $r \in \mathbb{N}$. Odtąd nierówności tego typu nazywane są w literaturze nierównościami Rosenthala. Opracowano wiele wersji tych nierówności. Badania szły w kierunku poprawiania stałych (np. Ibragimov i Sharakhmetov, 2001; Latała, 1997) oraz zmiennych zależnych (np. Doukhan, 1994; Kim, 1994; Fazekas i in., 2000). W niniejszym paragrafie skoncentrujemy się nad nierównością Rosenthala dla zmiennych α -mieszających.

Lemat 2.3 (Fazekas i in., 2000). *Niech $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie α -mieszającym szeregiem czasowym o zerowej wartości oczekiwanej ($EX_t = 0$ dla każdego $t \in \mathbb{Z}$). Załóżmy, że dla pewnego $l > 1$ i $\delta > 0$*

- (i) $\sup_{t \in \mathbb{Z}} E|X_t|^{l+\delta} < \infty$,
- (ii)

$$\sum_{\tau=1}^{\infty} \tau^{h-2} \alpha_X^{\frac{\delta}{h+\delta}}(\tau) < \infty,$$

gdzie h jest najmniejszą liczbą całkowitą parzystą taką, że $h \geq l$.
Wtedy dla każdego ciągu liczb naturalnych $\{k_n\}$ i dla każdego $t \in \mathbb{Z}$,

$$E \left| \sum_{j=t}^{t+k_n-1} X_j \right|^l < C \cdot D(l, \delta),$$

gdzie

$$D(l, \delta) = \begin{cases} L(l, 0), & \text{dla } l \in (0, 1], \\ L(l, \delta), & \text{dla } l \in (1, 2], \\ \max\{L(l, \delta), L^{l/2}(2, \delta)\}, & \text{dla } l > 2. \end{cases}$$

oraz $L(l, \delta) = (\sup_{t \in \mathbb{Z}} \|X_t\|_{l+\delta}^l) k_n$. Stała C zależy tylko od ciągu $\{\alpha_X(\tau)\}$ oraz l .

Nieco inne oszacowanie zostało uzyskane w pracy Kim (1994). Założenie dotyczące tempa α -mieszania jest słabsze, ale oszacowanie to dotyczy tylko momentów parzystych.

Lemat 2.4 (Kim, 1994). *Niech $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie α -mieszającym szeregiem czasowym o zerowej wartości oczekiwanej. Niech $r \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że dla pewnego $\delta > 0$*

- (i) $\sup_{t \in \mathbb{Z}} E|X_t|^{2r+\delta} < \infty$,
- (ii) $\sum_{\tau=1}^{\infty} \tau^{r-1} \alpha_X^{\frac{\delta}{2r+\delta}}(\tau) < \infty$.

Wtedy dla każdego ciągu liczb naturalnych $\{k_n\}$ i dla każdego $t \in \mathbb{Z}$,

$$E \left| \frac{1}{\sqrt{k_n}} \sum_{j=t}^{t+k_n-1} X_j \right|^{2r} < C \left(1 + \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau^{r-1} \alpha_X^{\frac{\delta}{2r+\delta}}(\tau) \right) \sup_{t \in \mathbb{Z}} \|X_t\|_{2r+\delta}^{2r},$$

gdzie stała C zależy tylko od r .

Następny lemat dotyczy zmiennych losowych ograniczonych prawie na pewno.

Lemat 2.5 (Twierdzenie 2.2, Rio, 2000). *Niech $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie α -mieszającym szeregiem czasowym o zerowej wartości oczekiwanej. Załóżmy, że*

- (i) *zmiennne X_t są prawie na pewno jednostajnie względem t ograniczone,*
- (ii) *$\alpha_X(\tau) = O(\tau^{-r})$.*

Wtedy dla każdego ciągu liczb naturalnych $\{k_n\}$ i dla każdego $t \in \mathbb{Z}$,

$$E \left| \frac{1}{\sqrt{k_n}} \sum_{j=t}^{t+k_n-1} X_j \right|^{2r} < C,$$

gdzie stała C zależy od r i ciągu $\{\alpha_X(\tau)\}$.

Zauważmy że dla $\delta = \infty$ Lemat 2.4 wymaga, aby $\sum_{\tau=1}^{\infty} \tau^{r-1} \alpha(\tau) < \infty$, zatem Lemat 2.5 daje słabsze ograniczenie na tempo mieszania dla szeregów czasowych jednostajnie ograniczonych prawie na pewno.

W ostatniej kolejności prezentujemy oszacowanie dla szeregu czasowego m -zależnego.

Lemat 2.6 (Romano i Wolf, 2000). *Niech $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie szeregiem czasowym m -zależnym o zerowej wartości oczekiwanej. Załóżmy, że $\sup_{t \in \mathbb{Z}} E|X_t|^l < \infty$ dla pewnego $l \geq 2$. Wtedy dla każdego ciągu liczb naturalnych $\{k_n\}$ takiego, że $k_n \geq 2m$ i dla każdego $t \in \mathbb{Z}$,*

$$E \left| \frac{1}{\sqrt{k_n}} \sum_{j=t}^{t+k_n-1} X_j \right|^l < C m^{\frac{l}{2}} \cdot \sup_{t \in \mathbb{Z}} E|X_t|^l,$$

gdzie stała C zależy tylko od l .

Nierówności Rosenthala są wykorzystywane w dowodach różnych wersji centralnego twierdzenia granicznego oraz, co będzie dokładnie pokazane w Rozdziale 3, w dowodach zbieżności bootstrapu.

2.3. Słabe prawa wielkich liczb

Rozważmy tablicę zmiennych losowych $\{X_{n,t} : t = 1, \dots, d_n\}$, gdzie $\{d_n\}$ będzie zawsze ciągiem liczb naturalnych rozbieżnym do nieskończoności. W tym paragrafie podajemy dwa nowe sformułowania prawa wielkich liczb dla takich tablic. Będą one użyteczne w Rozdziale 3 w dowodach zgodności metod resamplingowych. Pierwszy lemat dotyczy tablic trójkątnych ściśle okresowych. Jest to rozszerzenie Lematu 1 z pracy Radulović (1996). Drugi lemat dotyczy natomiast ogólnych tablic niestacjonarnych. Przypomnijmy, że rodzinę zmiennych losowych $\{X_t : t \in \mathbb{I}\}$, gdzie \mathbb{I} jest dowolnym zbiorem indeksów, nazywamy jednostajnie całkowalną, jeśli

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{I}} E \left(|X_t| \mathbf{1}_{|X_t| > C} \right) = 0,$$

gdzie $\mathbf{1}_S$ jest indykátorem zdarzenia S .

Lemat 2.7. *Niech $\{X_{n,t} : t = 1, \dots, d_n\}$ będzie tablicą trójkątną zmiennych losowych, która jest wierszowo $SP(1)$ z tym samym okresem T . Załóżmy, że:*

- (i) dla $t = 1, \dots, T$ szeregi czasowe $\{X_{n,t}\}_{n=n_t}^\infty$ są jednostajnie całkowlalne (oznaczamy X_{n,n_t} jako pierwszy element w t -tej kolumnie tablicy $\{X_{n,t}\}$),
(ii) istnieją skończone granice

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} EX_{n,1}, \\ \mu_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} EX_{n,2}, \\ &\dots \\ \mu_T &= \lim_{n \rightarrow \infty} EX_{n,T},\end{aligned}$$

- (iii) istnieje tablica trójkątna $\{a_{n,\tau} : \tau = 0, \dots, d_n - 1\}$ złożona z nieujemnych liczb taka, że

$$\frac{1}{d_n} \sum_{\tau=0}^{d_n-1} a_{n,\tau} \rightarrow 0 \text{ dla } n \rightarrow \infty$$

i dla każdego $A \in \mathbb{R}$, $t = 1, \dots, T$ i $\tau = 0, 1, \dots, d_n - t$,

$$\left| \text{Cov}(X_{n,t} \mathbf{1}_{|X_{n,t}| < A}, X_{n,t+\tau} \mathbf{1}_{|X_{n,t+\tau}| < A}) \right| \leq A^2 a_{n,\tau}.$$

Wtedy mamy

$$\frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} X_{n,t} \xrightarrow{P} \mu,$$

gdzie $\mu = (1/T) \sum_{t=1}^T \mu_t$.

Dowód. Zaczniemy od następującego lematu.

Lemat 2.8. Jeśli szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ jest SP (lub $SP(r)$) z okresem T , a funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest borelowsko-mierzalna, wtedy szereg czasowy $\{f(X_t) : t \in \mathbb{Z}\}$ jest również SP (lub $SP(r)$) z tym samym okresem T .

Dowód. Dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy funkcję $g : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ jako

$$g(x_1, \dots, x_r) = (f(x_1), \dots, f(x_r)).$$

Ponieważ dla każdych $t, \tau_1, \dots, \tau_{r-1} \in \mathbb{Z}$

$$(X_t, X_{t+\tau_1}, \dots, X_{t+\tau_{r-1}}) \stackrel{d}{=} (X_{t+T}, X_{t+\tau_1+T}, \dots, X_{t+\tau_{r-1}+T}),$$

obliczając wartości tych wektorów względem mierzalnego odwzorowania g otrzymujemy, że

$$(f(X_t), f(X_{t+\tau_1}), \dots, f(X_{t+\tau_{r-1}})) \stackrel{d}{=} (f(X_{t+T}), f(X_{t+\tau_1+T}), \dots, f(X_{t+\tau_{r-1}+T})).$$

■

Oznaczmy $Y_{n,t} = X_{n,t} - EX_{n,t}$. Dzięki okresowości $EX_{n,t}$ wystarczy pokazać, że

$$\frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} Y_{n,t} \xrightarrow{P} 0.$$

Niech $\tilde{Y}_{n,t} = Y_{n,t}\mathbf{1}_{|Y_{n,t}| < A_n}$ i $\bar{Y}_{n,t} = Y_{n,t}\mathbf{1}_{|Y_{n,t}| \geq A_n}$, gdzie $\{A_n\}$ jest dowolnym ciągiem. Powyższa zbieżność wynika z następujących dwóch zbieżności:

$$\frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} (\tilde{Y}_{n,t} - E\tilde{Y}_{n,t}) \xrightarrow{P} 0 \quad (2.2)$$

oraz

$$\frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} (\bar{Y}_{n,t} - E\bar{Y}_{n,t}) \xrightarrow{P} 0. \quad (2.3)$$

Aby udowodnić (2.2) zauważamy, że dla każdego $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} P \left(\left| \frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} (\tilde{Y}_{n,t} - E\tilde{Y}_{n,t}) \right| > \epsilon \right) &\leq \frac{1}{d_n^2 \epsilon^2} \text{Var} \left(\sum_{t=1}^{d_n} (\tilde{Y}_{n,t} - E\tilde{Y}_{n,t}) \right) \\ &\leq \frac{2}{d_n^2 \epsilon^2} \sum_{t=1}^{d_n} \sum_{\tau=0}^{d_n-t} |\text{Cov}(\tilde{Y}_{n,t}, \tilde{Y}_{n,t+\tau})| \\ &\leq \frac{2}{d_n^2 \epsilon^2} \sum_{t=1}^{d_n} \sum_{\tau=0}^{d_n-1} A_n^2 a_{n,\tau} = \frac{2}{d_n \epsilon^2} \sum_{\tau=0}^{d_n-1} A_n^2 a_{n,\tau}. \end{aligned}$$

Kładąc

$$A_n = \left(\frac{1}{d_n} \sum_{\tau=0}^{d_n-1} a_{n,\tau} \right)^{-\frac{1}{4}},$$

widzimy, że $A_n \rightarrow \infty$ oraz

$$P \left(\left| \frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} (\tilde{Y}_{n,t} - E\tilde{Y}_{n,t}) \right| > \epsilon \right) \leq \frac{2}{\epsilon^2} \left(\frac{1}{d_n} \sum_{\tau=0}^{d_n-1} a_{n,\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ dla } n \rightarrow \infty.$$

Aby udowodnić (2.3), zauważmy, że z Lematu 2.8 z funkcją $f(x) = x\mathbf{1}_{|x| \geq A}$ mamy dla każdego $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} P \left(\left| \frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} (\bar{Y}_{n,t} - E\bar{Y}_{n,t}) \right| > \epsilon \right) &\leq \frac{1}{d_n \epsilon} E \left| \sum_{t=1}^{d_n} (\bar{Y}_{n,t} - E\bar{Y}_{n,t}) \right| \\ &\leq \frac{2}{d_n \epsilon} \sum_{t=1}^{d_n} E |\bar{Y}_{n,t}| \\ &\leq \frac{2 \left(\left\lfloor \frac{d_n}{T} \right\rfloor + 1 \right)}{d_n \epsilon} \sum_{t=1}^T E |Y_{n,t}| \mathbf{1}_{|Y_{n,t}| \geq A_n}. \end{aligned}$$

Korzystając teraz z jednostajnej całkowalności ciągów $\{X_{n,t}\}_{n=n_t}^\infty$ dla $t = 1, \dots, T$, otrzymujemy wymaganą zbieżność do zera. \blacksquare

Lemat 2.9. Niech $\{X_{n,t} : t = 1, \dots, d_n\}$ będzie tablicą zmiennych losowych. Załóżmy, że

(i) istnieje $\zeta > 0$ taka, że $\sup_{t,n} E|X_{n,t}|^{1+\zeta} < \infty$,

(ii) $\{X_{n,t}\}$ jest wierszowo α -mieszająca, przy czym

$$\frac{1}{d_n} \sum_{\tau=0}^{d_n-1} \alpha_n(\tau) \rightarrow 0,$$

(iii)

$$\frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} EX_{n,t} \rightarrow L.$$

Wtedy,

$$\frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} X_{n,t} \xrightarrow{P} L.$$

Dowód. Niech $\tilde{X}_{n,t} = X_{n,t} \mathbf{1}_{|X_{n,t}| < A_n}$ i $\bar{X}_{n,t} = X_{n,t} \mathbf{1}_{|X_{n,t}| \geq A_n}$, gdzie $\{A_n\}$ jest dowolnym ciągiem. Teza lematu wynika łatwo z następujących dwóch zbieżności:

$$\frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} (\tilde{X}_{n,t} - E\tilde{X}_{n,t}) \xrightarrow{P} 0 \quad (2.4)$$

oraz

$$\frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} (\bar{X}_{n,t} - E\bar{X}_{n,t}) \xrightarrow{P} 0. \quad (2.5)$$

Korzystając z Lematu 2.2, otrzymujemy

$$\begin{aligned} P \left(\left| \frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} (\tilde{X}_{n,t} - E\tilde{X}_{n,t}) \right| > \epsilon \right) &\leq \frac{1}{d_n^2 \epsilon^2} \text{Var} \left(\sum_{t=1}^{d_n} (\tilde{X}_{n,t} - E\tilde{X}_{n,t}) \right) \\ &\leq \frac{2}{d_n^2 \epsilon^2} \sum_{t=1}^{d_n} \sum_{\tau=0}^{d_n-t} |\text{Cov}(\tilde{X}_{n,t}, \tilde{X}_{n,t+\tau})| \\ &\leq \frac{8}{d_n^2 \epsilon^2} \sum_{t=1}^{d_n} \sum_{\tau=0}^{d_n-1} A_n^2 \alpha_n(\tau) = \frac{8}{d_n \epsilon^2} \sum_{\tau=0}^{d_n-1} A_n^2 \alpha_n(\tau). \end{aligned}$$

Kładąc

$$A_n = \left(\frac{1}{d_n} \sum_{\tau=0}^{d_n-1} \alpha_n(\tau) \right)^{-\frac{1}{4}},$$

widzimy, że $A_n \rightarrow \infty$ oraz

$$P \left(\left| \frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} (\tilde{X}_{n,t} - E\tilde{X}_{n,t}) \right| > \epsilon \right) \leq \frac{8}{\epsilon^2} \left(\frac{1}{d_n} \sum_{\tau=0}^{d_n-1} \alpha_n(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ dla } n \rightarrow \infty.$$

Pokazaliśmy zatem, że zachodzi zbieżność (2.4). Aby pokazać zbieżność (2.5), stosujemy nierówności Höldera i Czebyszewa

$$\begin{aligned} P \left(\left| \frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} (\bar{X}_{n,t} - E\bar{X}_{n,t}) \right| > \epsilon \right) &\leq \frac{1}{d_n \epsilon} E \left| \sum_{t=1}^{d_n} (\bar{X}_{n,t} - E\bar{X}_{n,t}) \right| \\ &\leq \frac{2}{d_n \epsilon} \sum_{t=1}^{d_n} E |\bar{X}_{n,t}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2}{d_n \epsilon} \sum_{t=1}^{d_n} (\|X_{n,t}\|_{1+\zeta}) \left(\|\mathbf{1}_{|X_{n,t}| \geq A_n}\|_{\frac{1+\zeta}{\zeta}} \right) \\
&\leq \frac{2 \sup_{t,n} \|X_{n,t}\|_{1+\zeta}}{d_n \epsilon} \sum_{t=1}^{d_n} P^{\frac{\zeta}{1+\zeta}}(|X_{n,t}| \geq A_n) \\
&\leq \frac{2 \sup_{t,n} \|X_{n,t}\|_{1+\zeta}}{d_n \epsilon} \sum_{t=1}^{d_n} \left(\frac{E|X_{n,t}|^{1+\zeta}}{A_n^{1+\zeta}} \right)^{\frac{\zeta}{1+\zeta}} \\
&= O\left(\frac{1}{A_n^\zeta}\right) \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

■

2.4. Centralne twierdzenia graniczne

W dalszych rozważaniach będziemy korzystali z kilku typów centralnego twierdzenia granicznego (CTG) dla sum zmiennych losowych. Pierwszy rezultat dotyczy niestacjonarnych szeregów czasowych.

Twierdzenie 2.1 (Twierdzenie 3.3.1, Guyon, 1995). *Niech $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie szeregiem czasowym α -mieszającym o zerowej wartości oczekiwanej. Załóżmy, że dla pewnego $\delta > 0$*

- (i) $\sup_t E|X_t|^{2+\delta} < \infty$,
- (ii) $\sum_{\tau=1}^{\infty} \alpha_X^{\frac{\delta}{2+\delta}}(\tau) < \infty$,
- (iii)

$$\text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n X_t \right) \rightarrow \sigma^2 \text{ dla } n \rightarrow \infty,$$

gdzie $\sigma^2 > 0$.

Wtedy zachodzi CTG, tzn.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n X_t \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Kolejne twierdzenie graniczne mówi o zbieżności sum wyrazów ogólnych tablic zmiennych losowych. Założenie dotyczące tempa α -mieszania jest nieco silniejsze niż w Twierdzeniu 2.1. Poza tym występuje dodatkowe założenie o jednostajnej zbieżności wariancji.

Twierdzenie 2.2 (Twierdzenie B.0.1, Politis i in., 1999). *Niech $\{X_t : t = 1, \dots, d_n\}$ będzie tablicą zmiennych losowych o zerowej wartości oczekiwanej. Załóżmy, że dla pewnego $\delta > 0$*

- (i) $\sup_{t,n} E|X_{n,t}|^{2+2\delta} < \infty$,
- (ii) $\sum_{\tau=1}^{\infty} \tau^2 \alpha_n^{\frac{\delta}{4+\delta}}(\tau) < \infty$,
- (iii) *wariancja jest zbieżna jednostajnie, tzn. dla każdego ciągu $\{k_n\}$ rozbieżnego do nieskończoności i takiego, że $k_n \leq d_n$ mamy*

$$\sup_{s=1, \dots, d_n - k_n + 1} \text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{k_n}} \sum_{t=s}^{s+k_n-1} X_{n,t} \right) \rightarrow \sigma^2,$$

gdzie $\sigma^2 > 0$.

Wtedy zachodzi CTG, tzn.

$$\frac{1}{\sqrt{d_n}} \sum_{t=1}^{d_n} X_{n,t} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Uwaga 2.1. Korzystając z Lematu 2.4 w powyższym twierdzeniu założenia (i) oraz (ii) można zastąpić założeniem, że dla pewnego $\delta > 0$

$$\sup_{t,n} E|X_{n,t}|^{4+\delta} \text{ oraz } \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau \alpha_n^{\frac{\delta}{4+\delta}}(\tau) < \infty.$$

Twierdzenie 2.3 (Berk, 1973). Niech $\{X_{n,t} : t = 1, \dots, d_n\}$ będzie tablicą zmiennych losowych o zerowej wartości oczekiwanej. Niech tablica ta będzie wierszowo m_n -zależna. Załóżmy, że dla pewnego $\delta > 0$

(i) $\sup_{t,n} E|X_{n,t}|^{2+\delta} < \infty$,

(ii) wariancja jest jednostajnie ograniczona, tzn. dla każdego ciągu $\{k_n\}$ takiego, że $k_n \leq d_n$

$$\sup_{s=1, \dots, d_n - k_n + 1} \text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{k_n}} \sum_{t=s}^{s+k_n-1} X_{n,t} \right) \leq C,$$

gdzie stała C nie zależy od n ,

(iii) $m_n^{2+\frac{2}{\delta}}/d_n \rightarrow 0$,

(iv)

$$\text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} \sum_{t=1}^{d_n} X_{n,t} \right) \rightarrow \sigma^2.$$

Wtedy zachodzi CTG, tzn.

$$\frac{1}{\sqrt{d_n}} \sum_{t=1}^{d_n} X_{n,t} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Ostatnie twierdzenie nie jest związane z α -mieszaniami, lecz z pojęciem infinitezmalnych tablic zmiennych losowych (patrz założenie (iii)). Rezultat ten będzie miał kluczowe znaczenie przy udowadnianiu zgodności bootstrapu.

Twierdzenie 2.4 (Wniosek 4.8, Araujo i Giné, 1980). Niech $\{X_{n,t} : t = 1, \dots, d_n\}$ będzie tablicą zmiennych losowych wierszowo niezależnych taką, że istnieją liczby $a, \sigma \in \mathbb{R}$ oraz $\nu > 0$ takie, że

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{t=1}^{d_n} E \left(X_{n,t} \mathbf{1}_{|X_{n,t}| \leq \nu} \right) - a_n \right) = a,$$

(ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^{d_n} \text{Var} \left(X_{n,t} \mathbf{1}_{|X_{n,t}| \leq \nu} \right) = \sigma^2,$$

(iii) dla każdego $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^{d_n} P(|X_{n,t}| > \epsilon) = 0.$$

Wtedy

$$\sum_{t=1}^{d_n} X_{n,t} - a_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(a, \sigma^2).$$

2.5. Jednostajna zbieżność wariancji dla sum szeregów APC

Celem tej części jest pokazanie bardzo ważnej własności wariancji sum szeregów APC, tzn. jej jednostajnej zbieżności do wariancji granicznej. Własność ta będzie kluczowa w uzyskaniu CTG oraz zgodności metod resamplingowych. Oznaczmy funkcję autokowariancji szeregu $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ jako $B(t, \tau) = \text{Cov}(X_t, X_{t+\tau})$.

Lemat 2.10. *Niech szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie APC. Załóżmy, że funkcja autokowariancji jest jednostajnie sumowalna, tzn. istnieje sumowalny ciąg $\{c_\tau\}$ liczb rzeczywistych taki, że $|B(t, \tau)| \leq c_\tau$. Wtedy istnieje liczba $\sigma^2 = M_t(\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} B(t, \tau))$ taka, że dla każdego ciągu $\{b_n\}$ rozbieżnego do nieskończoności*

$$\sup_{t \in \mathbb{Z}} \left| \text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} \sum_{j=t}^{b_n+t-1} X_j \right) - \sigma^2 \right| \rightarrow 0 \text{ dla } n \rightarrow \infty.$$

Dowód. W poniższym dowodzie opuszczamy indeks n w b_n . Przypomnijmy, że sumy i jednostajne granice funkcji prawie okresowych są prawie okresowe. Dlatego funkcja

$$L(j) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} B(j, \tau)$$

jest dobrze zdefiniowana i a.p. oraz istnieje jej wartość średnia czyli liczba $\sigma^2 = M_j(L(j))$. Zmieniając kolejność sumowania otrzymujemy

$$\text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \sum_{j=t}^{b+t-1} X_j \right) = \frac{1}{b} \sum_{j_1=t}^{b+t-1} \sum_{j_2=t}^{b+t-1} \text{Cov}(X_{j_1}, X_{j_2}) = \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-1} \sum_{\tau=t-j}^{b+t-1-j} B(j, \tau)$$

oraz

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-1} \sum_{\tau=t-j}^{b+t-1-j} B(j, \tau) - \sigma^2 \right| &\leq \left| \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-1} \sum_{\tau=t-j}^{b+t-1-j} B(j, \tau) - \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-1} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} B(j, \tau) \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-1} L(j) - \sigma^2 \right|. \end{aligned}$$

Drugi składnik zbiega jednostajnie względem t do 0. Dla pierwszego składnika mamy natomiast ($j' = b - j$ w ostatnim oszacowaniu)

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-1} \sum_{\tau=t-j}^{b+t-1-j} B(j, \tau) - \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-1} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} B(j, \tau) \right| \\ &\leq \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-1} \sum_{\tau=-\infty}^{t-j-1} |B(j, \tau)| + \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-1} \sum_{\tau=b+t-j}^{\infty} |B(j, \tau)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{b} \sum_{j=0}^{b-1} \sum_{\tau=-\infty}^{-j-1} |B(j+t, \tau)| + \frac{1}{b} \sum_{j=0}^{b-1} \sum_{\tau=b-j}^{\infty} |B(j+t, \tau)| \\ &\leq \frac{1}{b} \sum_{j=0}^{b-1} \sum_{\tau=-\infty}^{-j-1} c_{\tau} + \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \sum_{\tau=j}^{\infty} c_{\tau}. \end{aligned}$$

Korzystając z sumowalności ciągu $\{c_{\tau}\}$ i Lematu Toeplitza otrzymujemy wymaganą zbieżność jednostajną do zera. \blacksquare

Wprowadzimy teraz własność łącznej prawie okresowej korelacji oraz udowodnimy jednostajną zbieżność aukowariancji sum takich szeregów.

Definicja 2.2. Dwa szeregi czasowe $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$, $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$ nazywamy łącznie okresowo skorelowanymi (jointly almost periodically correlated, JAPC), jeśli dla każdego $t \in \mathbb{Z}$, $E|X_t|^2 < \infty$, $E|Y_t|^2 < \infty$, oraz funkcja $B_{XY}(t, \tau) = \text{Cov}(X_t, Y_{t+\tau})$ jest prawie okresowa względem t dla każdego ustalonego $\tau \in \mathbb{Z}$.

Zauważmy, że jeśli $f(\cdot)$ jest a.p., to funkcja $f(\cdot + c)$ jest także a.p. dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$. Dlatego, ponieważ $B_{XY}(t, \tau) = B_{YX}(t+\tau, -\tau)$, kolejność szeregów w powyższej definicji nie ma znaczenia.

Lemat 2.11. Niech szeregi czasowe $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$, $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będą JAPC. Załóżmy, że funkcja łącznej kowariancji jest jednostajnie sumowalna, tzn. istnieje sumowalny ciąg $\{c_{\tau}\}$ liczb rzeczywistych taki, że $|B_{XY}(t, \tau)| \leq c_{\tau}$. Wtedy istnieje liczba $\sigma_{XY} = M_t(\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} B_{XY}(t, \tau))$ taka, że dla każdego ciągu $\{b_n\}$ rozbieżnego do nieskończoności

$$\sup_{t \in \mathbb{Z}} \left| \text{Cov} \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} \sum_{j=t}^{b_n+t-1} X_j, \frac{1}{\sqrt{b_n}} \sum_{j=t}^{b_n+t-1} Y_j \right) - \sigma_{XY} \right| \rightarrow 0 \text{ dla } n \rightarrow \infty.$$

Dowód. Podobnie jak w dowodzie Lematu 2.10, funkcja

$$L(j) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} B_{XY}(j, \tau)$$

jest dobrze zdefiniowana i a.p. Dlatego liczba $\sigma_{XY} = M_j(L(j))$ istnieje. Zmieniając kolejność sumowania otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} \sum_{j=t}^{b_n+t-1} X_j, \frac{1}{\sqrt{b_n}} \sum_{j=t}^{b_n+t-1} Y_j \right) &= \frac{1}{b} \sum_{j_1=t}^{b+t-1} \sum_{j_2=t}^{b+t-1} \text{Cov}(X_{j_1}, Y_{j_2}) \\ &= \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-1} \sum_{\tau=t-j}^{b+t-1-j} B_{XY}(j, \tau) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-1} \sum_{\tau=t-j}^{b+t-1-j} B_{XY}(j, \tau) - \sigma^2 \right| &\leq \left| \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-1} \sum_{\tau=t-j}^{b+t-1-j} B_{XY}(j, \tau) - \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-1} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} B_{XY}(j, \tau) \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-1} L(j) - \sigma_{XY} \right|. \end{aligned}$$

Drugi składnik zbiega jednostajnie względem t do 0. Dla pierwszego składnika mamy natomiast

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-1} \sum_{\tau=t-j}^{b+t-1-j} B_{XY}(j, \tau) - \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-1} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} B_{XY}(j, \tau) \right| \\
& \leq \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-1} \sum_{\tau=-\infty}^{t-j-1} |B_{XY}(j, \tau)| + \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-1} \sum_{\tau=b+t-j}^{\infty} |B_{XY}(j, \tau)| \\
& \leq \frac{1}{b} \sum_{j=0}^{b-1} \sum_{\tau=-\infty}^{-j-1} |B_{XY}(j+t, \tau)| + \frac{1}{b} \sum_{j=0}^{b-1} \sum_{\tau=b-j}^{\infty} |B_{XY}(j+t, \tau)| \\
& \leq \frac{1}{b} \sum_{j=0}^{b-1} \sum_{\tau=-\infty}^{-j-1} c_{\tau} + \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \sum_{\tau=j}^{\infty} c_{\tau}.
\end{aligned}$$

Korzystając z sumowalności ciągu $\{c_{\tau}\}$ i Lematu Toeplitza otrzymujemy wymaganą zbieżność jednostajną do zera. ■

Założenia Lematów 2.10 i 2.11 są spełnione przy standardowych warunkach momentów-mieszania, tzn.

$$\sup_{t \in \mathbb{Z}} E|X_t|^{2+\delta} < \infty \text{ oraz } \sum_{\tau=1}^{\infty} \alpha_X^{\frac{\delta}{2+\delta}}(\tau) < \infty$$

dla pewnego $\delta > 0$. Wtedy korzystając z Lematu 2.1 mamy

$$|B(t, \tau)| \leq 8 \left(\sup_{t \in \mathbb{Z}} \|X_t\|_{2+\delta}^2 \right) \alpha_X^{\frac{\delta}{2+\delta}}(\tau).$$

2.6. Problem estymacji

Jeśli nie zakładamy żadnego konkretnego modelu dla szeregu czasowego APC, wnioskowanie statystyczne oparte jest na reprezentacji Fouriera funkcji wartości oczekiwanej $\mu(t) = EX_t$ i funkcji autokowariancji $B(t, \tau) = Cov(X_t, X_{t+\tau})$, tzn.

$$\mu(t) \sim \sum_{\gamma \in \Gamma} b(\gamma) e^{i\gamma t} \quad (2.6)$$

oraz

$$B(t, \tau) \sim \sum_{\lambda \in \Lambda_{\tau}} a(\lambda, \tau) e^{i\lambda t}. \quad (2.7)$$

Zbiory $\Gamma = \{\gamma : b(\gamma) \neq 0\}$ oraz $\Lambda_{\tau} = \{\lambda : a(\lambda, \tau) \neq 0\}$ są przeliczalne oraz

$$b(\gamma) = M_t \left(\mu(t) e^{-i\gamma t} \right), \quad a(\lambda, \tau) = M_t \left(B(t, \tau) e^{-i\lambda t} \right).$$

W dalszej części będziemy zakładać, że zbiory Γ i Λ_{τ} są skończone. Wtedy reprezentacje (2.6) i (2.7) stają się równościami. Jeżeli dysponujemy próbką (X_1, X_2, \dots, X_n) z szeregu czasowego $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$, który jest APC, naturalne estymatory parametrów $b(\gamma)$ oraz $a(\lambda, \tau)$ są następujące (Hurd, 1989; Hurd i Leśkow, 1992a,b):

$$\hat{b}_n(\gamma) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t e^{-i\gamma t}$$

oraz

$$\hat{a}_n(\lambda, \tau) = \frac{1}{n} \sum_{t=1-\min\{\tau,0\}}^{n-\max\{\tau,0\}} (X_t - \hat{\mu}_n(t))(X_{t+\tau} - \hat{\mu}_n(t+\tau))e^{-i\lambda t}, \quad (2.8)$$

gdzie

$$\hat{\mu}_n(t) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \hat{b}_n(\gamma) e^{i\gamma t}$$

jest estymatorem wartości oczekiwanej $\mu(t)$. Oczywiście, jeśli wiadomo, że $EX_t \equiv 0$, to

$$\hat{a}_n(\lambda, \tau) = \frac{1}{n} \sum_{t=1-\min\{\tau,0\}}^{n-\max\{\tau,0\}} X_t X_{t+\tau} e^{-i\lambda t}.$$

W całej pracy będziemy zakładać bez straty ogólności, że $\tau \geq 0$.

Podkreślmy, że estymator (2.8) może być obliczony jeśli znamy zbiór Γ . Taka sytuacja ma przykładowo miejsce jeśli wartość oczekiwana ma silną okresowość (fakt ten można łatwo zaobserwować z wykresu danych), ale nie wiemy nic na temat struktury prawie okresowej kowariancji. Struktury tej nie można wywnioskować z wykresu danych. Problem identyfikacji częstotliwości jest kolejnym ważnym problemem we wnioskowaniu statystycznym dla szeregów APC (np. Hurd i Dehay, 1996). W Rozdziale 4 podamy przykład testu graficznego na wykrywanie istotnych częstotliwości.

Zaprezentujemy teraz wielowymiarowe centralne twierdzenie graniczne dla estymatorów \hat{a}_n i \hat{b}_n . Podobne rezultaty prezentowane były w pracach Hurd i Leśkow (1992b) oraz Dehay i Leśkow (1996a) dla przypadku φ -mieszających procesów stochastycznych o zerowej wartości oczekiwanej. Wprowadźmy następujące oznaczenia $b^R(\gamma) = \text{Re}(b(\gamma))$, $b^I(\gamma) = \text{Im}(b(\gamma))$, $a^R(\lambda, \tau) = \text{Re}(a(\lambda, \tau))$, $a^I(\lambda, \tau) = \text{Im}(a(\lambda, \tau))$ i analogicznie $\hat{b}_n^R(\gamma) = \text{Re}(\hat{b}_n(\gamma))$, $\hat{b}_n^I(\gamma) = \text{Im}(\hat{b}_n(\gamma))$, $\hat{a}_n^R(\lambda, \tau) = \text{Re}(\hat{a}_n(\lambda, \tau))$, $\hat{a}_n^I(\lambda, \tau) = \text{Im}(\hat{a}_n(\lambda, \tau))$. Oznaczmy teraz

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_K \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_K \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_K \end{bmatrix}, \quad b(\boldsymbol{\gamma}) = \begin{bmatrix} b^R(\gamma_1) \\ b^I(\gamma_1) \\ b^R(\gamma_2) \\ b^I(\gamma_2) \\ \vdots \\ b^R(\gamma_K) \\ b^I(\gamma_K) \end{bmatrix}, \quad a(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) = \begin{bmatrix} a^R(\lambda_1, \tau_1) \\ a^I(\lambda_1, \tau_1) \\ a^R(\lambda_2, \tau_2) \\ a^I(\lambda_2, \tau_2) \\ \vdots \\ a^R(\lambda_K, \tau_K) \\ a^I(\lambda_K, \tau_K) \end{bmatrix}.$$

Analogicznie definiujemy wielowymiarowe estymatory $\hat{b}_n(\boldsymbol{\gamma})$ oraz $\hat{a}_n(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})$.

Twierdzenie 2.5. Niech szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie APC i α -mieszający. Załóżmy, że zbiór Γ jest skończony i istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$(i) \sup_{t \in \mathbb{Z}} E|X_t|^{2+\delta} < \infty,$$

$$(ii) \sum_{\tau=1}^{\infty} \alpha_X^{\frac{\delta}{2+\delta}}(\tau) < \infty.$$

Wtedy zachodzi wielowymiarowa zbieżność

$$\sqrt{n} (\hat{b}_n(\boldsymbol{\gamma}) - b(\boldsymbol{\gamma})) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_{2K}(0, \Sigma(\boldsymbol{\gamma})).$$

Elementy asymptotycznej macierzy kowariancji

$$\Sigma(\boldsymbol{\gamma}) = [\sigma_{k,l}]_{k,l=1,\dots,2K}$$

są następujące

$$\sigma_{k,l} = \begin{cases} M_t \left(\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sin(\gamma_k t) \sin(\gamma_l(t+\tau)) B_X(t, \tau) \right) & \text{dla } k = 2r, l = 2s, \\ M_t \left(\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \cos(\gamma_k t) \cos(\gamma_l(t+\tau)) B_X(t, \tau) \right) & \text{dla } k = 2r-1, l = 2s-1, \\ -M_t \left(\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sin(\gamma_k t) \cos(\gamma_l(t+\tau)) B_X(t, \tau) \right) & \text{dla } k = 2r, l = 2s-1, \\ -M_t \left(\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \cos(\gamma_k t) \sin(\gamma_l(t+\tau)) B_X(t, \tau) \right) & \text{for } k = 2r-1, l = 2s, \end{cases}$$

gdzie $k, l \in \{1, 2, \dots, K\}$.

Dowód. Weźmy dowolny wektor $\mathbf{c}^{\text{TR}} = [c_1, c_2, \dots, c_{2K}]$, gdzie $c_i \in \mathbb{R}$. Korzystając z twierdzenia Craméra-Wolda wystarczy pokazać, że

$$\sqrt{n} \mathbf{c}^{\text{TR}} (\hat{b}_n(\boldsymbol{\gamma}) - b(\boldsymbol{\gamma})) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \mathbf{c}^{\text{TR}} \Sigma(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{c}).$$

Rozważmy następującą dekompozycję

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \mathbf{c}^{\text{TR}} (\hat{b}_n(\boldsymbol{\gamma}) - b(\boldsymbol{\gamma})) &= \sqrt{n} \mathbf{c}^{\text{TR}} (\hat{b}_n(\boldsymbol{\gamma}) - E\hat{b}_n(\boldsymbol{\gamma})) + \sqrt{n} \mathbf{c}^{\text{TR}} (E\hat{b}_n(\boldsymbol{\gamma}) - b(\boldsymbol{\gamma})) \\ &= S_n(\boldsymbol{\gamma}) + \epsilon_n(\boldsymbol{\gamma}). \end{aligned}$$

Stosując Lemat 1.1 po współrzędnych otrzymujemy, że $\|\epsilon_n(\boldsymbol{\gamma})\| \rightarrow 0$. Dlatego wystarczy pokazać asymptotyczną normalność wielkości $S_n(\boldsymbol{\gamma})$. Można zapisać, że

$$S_n(\boldsymbol{\gamma}) = \sqrt{n} \mathbf{c}^{\text{TR}} (\hat{b}_n(\boldsymbol{\gamma}) - E\hat{b}_n(\boldsymbol{\gamma})) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \phi_{\boldsymbol{\gamma}}(t) Y_t,$$

gdzie

$$\phi_{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \sum_{k=1}^K (c_{2k-1} \cos(\gamma_k t) - c_{2k} \sin(\gamma_k t)),$$

oraz $Y_t = X_t - \mu(t)$. Zauważmy, że

$$\text{Var}(S_n(\boldsymbol{\gamma})) = \mathbf{c}^{\text{TR}} \text{Var} \left(\sqrt{n} (\hat{b}_n(\boldsymbol{\gamma}) - E\hat{b}_n(\boldsymbol{\gamma})) \right) \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{c}^{\text{TR}} \Sigma(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{c}.$$

Powyższa zbieżność wynika z Lematów 2.10 oraz 2.11, które można zastosować z racji jednostajnej sumowalności funkcji autokowariancji dla składowych wektora $S_n(\boldsymbol{\gamma})$. Sumowalność ta wynika z oszacowania (Lemat 2.1)

$$|B_X(t, \tau)| \leq 8 \left(\sup_t |X_t|^{2+\delta} \right)^{\frac{2}{2+\delta}} \alpha_X^{\frac{\delta}{2+\delta}}(\tau).$$

Asymptotyczna normalność wielkości $S_n(\boldsymbol{\gamma})$ wynika zatem z Twierdzenia 2.1 zastosowanego do szeregu czasowego $\{\phi_{\boldsymbol{\gamma}}(t) Y_t : t \in \mathbb{Z}\}$, który ma zerową wartość oczekiwaną. ■

Twierdzenie 2.6. *Niech szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie APC, WAP(3), WAP(4) i α -mieszający. Załóżmy, że zbiory Γ i Λ_{τ} są skończone i istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że*

$$(i) \sup_{t \in \mathbb{Z}} E|X_t|^{4+2\delta} < \infty,$$

$$(ii) \sum_{\tau=1}^{\infty} \alpha_X^{\frac{\delta}{2+\delta}}(\tau) < \infty.$$

Wtedy zachodzi wielowymiarowa zbieżność

$$\sqrt{n}(\hat{a}_n(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) - a(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_{2K}(0, \Sigma(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})).$$

Elementy asymptotycznej macierzy kowariancji

$$\Sigma(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) = [\sigma_{k,l}]_{k,l=1,\dots,2K}$$

są następujące

$$\sigma_{k,l} = \begin{cases} M_t \left(\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \sin(\lambda_k t) \sin(\lambda_l(t+\kappa)) \text{Cov}(Y_t Y_{t+\tau_k}, Y_{t+\kappa} Y_{t+\tau_l+\kappa}) \right) & \text{dla } k=2r, l=2s, \\ M_t \left(\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \cos(\lambda_k t) \cos(\lambda_l(t+\kappa)) \text{Cov}(Y_t Y_{t+\tau_k}, Y_{t+\kappa} Y_{t+\tau_l+\kappa}) \right) & \text{dla } k=2r-1, l=2s-1, \\ -M_t \left(\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \sin(\lambda_k t) \cos(\lambda_l(t+\kappa)) \text{Cov}(Y_t Y_{t+\tau_k}, Y_{t+\kappa} Y_{t+\tau_l+\kappa}) \right) & \text{dla } k=2r, l=2s-1, \\ -M_t \left(\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \cos(\lambda_k t) \sin(\lambda_l(t+\kappa)) \text{Cov}(Y_t Y_{t+\tau_k}, Y_{t+\kappa} Y_{t+\tau_l+\kappa}) \right) & \text{dla } k=2r-1, l=2s, \end{cases}$$

gdzie $k, l \in \{1, 2, \dots, K\}$ oraz $Y_t = X_t - EX_t$.

Dowód. Zaczniemy od następującego lematu.

Lemat 2.12. Niech $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie α -mieszającym szeregiem czasowym o zerowej wartości oczekiwanej. Załóżmy, że dla pewnego $\delta > 0$

$$(i) \sup_{t \in \mathbb{Z}} E|X_t|^{2+\delta} < \infty,$$

$$(ii) \sum_{\tau=1}^{\infty} \alpha_X^{\frac{\delta}{2+\delta}}(\tau) < \infty.$$

Zdefiniujmy wielkość

$$S_{b_1, b_2, t}(\nu, \omega) = \frac{1}{\sqrt{b_1 b_2}} \sum_{j=t}^{t+b_1-1} \sum_{k=t}^{t+b_2-1} X_j X_k e^{i\nu j} e^{i\omega k}.$$

Wtedy dla każdego $\nu, \omega \in \mathbb{R}$,

$$\sup_{b_1, b_2 \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Z}} E|S_{b_1, b_2, t}(\nu, \omega)| \leq C,$$

gdzie stała C zależy tylko od $\sup_t E|X_t|^{2+\delta}$ oraz ciągu $\{\alpha_X(\tau)\}$.

Dowód. Z nierówności Schwartza mamy następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} E|S_{b_1, b_2, t}(\nu, \omega)| &= \frac{1}{\sqrt{b_1 b_2}} E \left| \sum_{j=t}^{t+b_1-1} X_j e^{i\nu j} \sum_{k=t}^{t+b_2-1} X_k e^{i\omega k} \right| \\ &\leq \left\| \frac{1}{\sqrt{b_1}} \sum_{j=t}^{t+b_1-1} X_j e^{i\nu j} \right\|_2 \left\| \frac{1}{\sqrt{b_2}} \sum_{k=t}^{t+b_2-1} X_k e^{i\omega k} \right\|_2 \\ &\leq \left(\left\| \frac{1}{\sqrt{b_1}} \sum_{j=t}^{t+b_1-1} X_j \cos(\nu j) \right\|_2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{b_1}} \sum_{j=t}^{t+b_1-1} X_j \sin(\nu j) \right\|_2 \right) \\ &\quad \left(\left\| \frac{1}{\sqrt{b_2}} \sum_{k=t}^{t+b_2-1} X_k \cos(\omega k) \right\|_2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{b_2}} \sum_{k=t}^{t+b_2-1} X_k \sin(\omega k) \right\|_2 \right). \end{aligned}$$

Aby otrzymać tezę wystarczy zastosować oddzielnie dla każdej sumy Lemat 2.4. ■

Zacznijmy od następującej dekompozycji

$$\hat{a}_n(\lambda, \tau) = \hat{a}_n^\Delta(\lambda, \tau) - T_n(\lambda, \tau) - U_n(\lambda, \tau) + W_n(\lambda, \tau),$$

gdzie

$$\begin{aligned} T_n(\lambda, \tau) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-\tau} (X_t - \mu(t)) (\hat{\mu}_n(t+\tau) - \mu(t+\tau)) e^{-i\lambda t}, \\ U_n(\lambda, \tau) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-\tau} (X_{t+\tau} - \mu(t+\tau)) (\hat{\mu}_n(t) - \mu(t)) e^{-i\lambda t}, \\ W_n(\lambda, \tau) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-\tau} (\mu(t+\tau) - \hat{\mu}_n(t+\tau)) (\mu(t) - \hat{\mu}_n(t)) e^{-i\lambda t}, \end{aligned}$$

oraz

$$\hat{a}_n^\Delta(\lambda, \tau) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-\tau} (X_t - \mu(t)) (X_{t+\tau} - \mu(t+\tau)) e^{-i\lambda t}.$$

Pokażemy najpierw, że $T_n(\lambda, \tau) + U_n(\lambda, \tau) + W_n(\lambda, \tau) = o_P(n^{-1/2})$. Dla T_n mamy

$$\begin{aligned} T_n(\lambda, \tau) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-\tau} (X_t - \mu(t)) \sum_{\gamma \in \Gamma} (\hat{b}_n(\gamma) - b(\gamma)) e^{i\gamma(t+\tau)} e^{-i\lambda t} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{t=1}^{n-\tau} (X_t - \mu(t)) (\hat{b}_n(\gamma) - E\hat{b}_n(\gamma)) e^{i\gamma(t+\tau)} e^{-i\lambda t} \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{t=1}^{n-\tau} (X_t - \mu(t)) (E\hat{b}_n(\gamma) - b(\gamma)) e^{i\gamma(t+\tau)} e^{-i\lambda t} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{t=1}^{n-\tau} (X_t - \mu(t)) \sum_{u=1}^n (X_u - \mu(u)) e^{-i\gamma u} e^{i(\gamma-\lambda)t} e^{i\gamma\tau} \\ &\quad + \sum_{\gamma \in \Gamma} O\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-\tau} (X_t - \mu(t)) e^{i(\gamma-\lambda)t} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\gamma \in \Gamma} S_{n, n-\tau, 1}(-\gamma, \gamma - \lambda) e^{i\gamma\tau} + o_P(n^{-1/2}), \end{aligned}$$

gdzie

$$S_{n, n-\tau, 1}(-\gamma, \gamma - \lambda) = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^{n-\tau} X_s X_t e^{-i\gamma s} e^{i(\gamma-\lambda)t}.$$

Korzystając z Lematu 2.12 otrzymujemy, że $T_n(\lambda, \tau) = o_P(n^{-1/2})$. W taki sam sposób udowodnimy, że $U(\lambda, \tau) = o_P(n^{-1/2})$. Dla W_n mamy natomiast

$$\begin{aligned} |W_n(\lambda, \tau)| &\leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-\tau} \left| \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} (\hat{b}_n(\gamma) - b(\gamma)) e^{i\gamma(t+\tau)} \right) \left(\sum_{\gamma' \in \Gamma} (\hat{b}_n(\gamma') - b(\gamma')) e^{i\gamma't} \right) \right| \\ &\leq O\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{\gamma' \in \Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} |\sqrt{n}(\hat{b}_n(\gamma) - b(\gamma))| |\sqrt{n}(\hat{b}_n(\gamma') - b(\gamma'))|. \end{aligned}$$

Korzystając z Twierdzenia 2.5 mamy, że $W_n(\lambda, \tau) = o_P(n^{-1/2})$. Zauważmy teraz, że ponieważ $\{X_t\}$ jest WAP(4) i α -mieszający, to szereg $Y_t(\tau) = (X_t - \mu(t))(X_{t+\tau} - \mu(t + \tau))$ jest APC i α -mieszający ze współczynnikami $\alpha_Y(\tau) = \alpha_X(t - \tau)$. Ponadto dla każdych $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{Z}$ szeregi $\{Y_t(\tau_1)\}$ oraz $\{Y_t(\tau_2)\}$ są JAPC. Z założenia (i) i nierówności Schwartza otrzymujemy natomiast, że $\sup_t E|Y_t(\tau)|^{2+\delta} < \infty$. Dlatego asymptotyczna normalność estymatora $\hat{a}_n^{\Delta}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})$ wynika z twierdzenia Cramera-Wolda i Twierdzenia 2.1 zastosowanych w podobny sposób jak w dowodzie Twierdzenia 2.5. ■

Pewna trudność związana jest też z tym, że wariancja asymptotyczna może być równa zero, czyli następuje degenerowanie rozkładu asymptotycznego. Pokażemy przykład takiej sytuacji.

Przykład 2.1. Niech szereg $\{X_t : t \in \mathbb{N}\}$, który jest PC, składa się z niezależnych trójek zmiennych losowych, tzn. ma następującą strukturę

$$X_t = Y_{\text{mod}(t,3),r(t,3)},$$

gdzie $\text{mod}(t, 3)$ oznacza wynik z dzielenia całkowitoliczbowego $t : 3$, a $r(t, 3)$ jest resztą z tego dzielenia. Załóżmy, że trójki $(Y_{t,1}, Y_{t,2}, Y_{t,0})$ dla $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ są niezależne z tego samego trójwymiarowego rozkładu z następującą macierzą kowariancji

$$\Gamma(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{bmatrix}.$$

Prześledzimy teraz wartości asymptotycznej wariancji unormowanego estymatora \hat{b} , która z Twierdzenia 2.5 posiada następującą wartość graniczną

$$\text{Var}(\sqrt{n} \hat{b}_n(\gamma)) = \text{Var}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n X_t e^{-i\gamma t}\right) \rightarrow \Sigma(\gamma),$$

gdzie

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(\gamma) &= M_t \left(\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \cos(\gamma t) \cos(\gamma(t + \tau)) \text{Cov}(X_t, X_{t+\tau}) \right), \\ \sigma_{12}(\gamma) &= \sigma_{21}(\gamma) = -M_t \left(\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sin(\gamma t) \cos(\gamma(t + \tau)) \text{Cov}(X_t, X_{t+\tau}) \right), \\ \sigma_{22}(\gamma) &= M_t \left(\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sin(\gamma t) \sin(\gamma(t + \tau)) \text{Cov}(X_t, X_{t+\tau}) \right). \end{aligned}$$

Funkcja $\text{Cov}(X_t, X_{t+\tau})$ jest okresowa z okresem $T = 3$ i jej wartości przedstawiamy w poniższej tabeli

	$\tau = -2$	$\tau = -1$	$\tau = 0$	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$ \tau > 2$
$t = 1$	0	0	1	a	b	0
$t = 2$	0	a	1	c	0	0
$t = 3$	b	c	1	0	0	0
...

Dlatego mamy

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \cos(\gamma t) \cos(\gamma(t+\tau)) \text{Cov}(X_t, X_{t+\tau}) \\ &= \begin{cases} \cos^2(\gamma t) + a \cos(\gamma t) \cos(\gamma(t+1)) + b \cos(\gamma t) \cos(\gamma(t+2)) & \text{dla } t = 1, 4, 7, \dots \\ \cos^2(\gamma t) + a \cos(\gamma t) \cos(\gamma(t-1)) + c \cos(\gamma t) \cos(\gamma(t+1)) & \text{dla } t = 2, 5, 8, \dots \\ \cos^2(\gamma t) + b \cos(\gamma t) \cos(\gamma(t-2)) + c \cos(\gamma t) \cos(\gamma(t-1)) & \text{dla } t = 3, 6, 9, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Weźmy teraz dwa specjalne rozkłady $\Gamma_1 = \Gamma(1, 1, 1)$ oraz $\Gamma_2 = \Gamma(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Przypadek Γ_1 może być łatwo uzyskany, jeśli weźmiemy $Y_{t,1}$ jako i.i.d. z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, \sqrt{12}]$ oraz $Y_{t,0} = Y_{t,2} = Y_{t,1}$. Aby otrzymać rozkład z macierzą kowariancji Γ_2 weźmy $U_{t,1}, U_{t,2}$ i $U_{t,3}$ jako trzy niezależne ciągi i.i.d. zmiennych losowych z rozkładów jednostajnych na przedziale $[0, \sqrt{12}]$. Zdefiniujmy

$$\begin{aligned} Y_{t,1} &= \frac{\sqrt{2}}{2} U_{t,1} + \frac{\sqrt{2}}{2} U_{t,3}, \\ Y_{t,2} &= \frac{\sqrt{2}}{2} U_{t,2} + \frac{\sqrt{2}}{2} U_{t,3}, \\ Y_{t,0} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} U_{t,1} + \frac{\sqrt{2}}{2} U_{t,2}. \end{aligned}$$

Model ten wykorzystamy do symulacji w następnym rozdziale.

Weźmy $\gamma_0 = 2\pi/3$. Dla Γ_1 mamy

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3}(t+\tau)\right) \text{Cov}(X_t, X_{t+\tau}) \\ &= \begin{cases} \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3}(t+1)\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3}(t+2)\right) & \text{dla } t = 1, 4, 7, \dots \\ \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3}(t-1)\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3}(t+1)\right) & \text{dla } t = 2, 5, 8, \dots \\ \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3}(t-2)\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3}(t-1)\right) & \text{dla } t = 3, 6, 9, \dots \end{cases} \\ &= 0. \end{aligned}$$

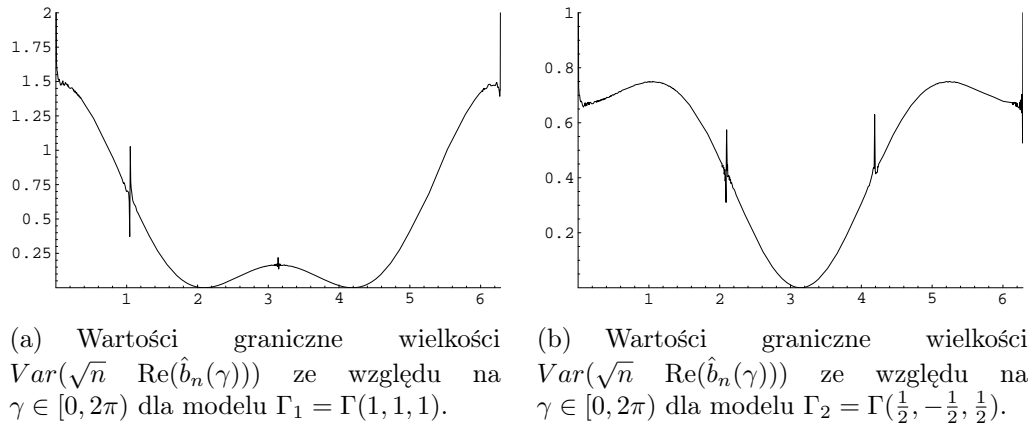
Weźmy $\gamma_0 = \pi$. Dla Γ_2 mamy

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \cos(\pi t) \cos(\pi(t+\tau)) \text{Cov}(X_t, X_{t+\tau}) \\ &= \begin{cases} \cos^2(\pi t) + \frac{1}{2} \cos(\pi t) \cos(\pi(t+1)) - \frac{1}{2} \cos(\pi t) \cos(\pi(t+2)) & \text{dla } t = 1, 4, 7, \dots \\ \cos^2(\pi t) + \frac{1}{2} \cos(\pi t) \cos(\pi(t-1)) + \frac{1}{2} \cos(\pi t) \cos(\pi(t+1)) & \text{dla } t = 2, 5, 8, \dots \\ \cos^2(\pi t) - \frac{1}{2} \cos(\pi t) \cos(\pi(t-2)) + \frac{1}{2} \cos(\pi t) \cos(\pi(t-1)) & \text{dla } t = 3, 6, 9, \dots \end{cases} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Łatwo zatem widać, że zarówno dla Γ_1 jak i Γ_2

$$\sigma_{11}(\gamma_0) = \sigma_{12}(\gamma_0) = \sigma_{21}(\gamma_0) = \sigma_{22}(\gamma_0) = 0,$$

zatem asymptotyczna wariancja jest równa 0 i rozkład asymptotyczny z ciągiem normującym \sqrt{n} degeneruje się. Rysunek 3.3 pokazuje zachowanie asymptotycznej warian-



Rysunek 2.1. Przykładowe zachowanie asymptotycznej wariancji.

cji normalizowanego estymatora $\hat{b}_n(\gamma)$ jako funkcję częstotliwości γ . Wartości wariancji zostały obliczone numerycznie. Aby wyłączyć niepożądaną sytuację degeneracji rozkładu asymptotycznego musielibyśmy wprowadzić dodatkowe założenia o strukturze wyższego rzędu szeregu $\{X_t\}$. Niestety, byłyby one bardzo trudno weryfikowalne w praktyce.

Podsumujmy ten paragraf stwierdzeniem, że postać asymptotycznej wariancji estymatorów \hat{b} oraz \hat{a} jest skomplikowana i zależy od struktury drugich bądź czwartych momentów. Dlatego trudno byłoby stosować rozkład asymptotyczny w praktyce. To uzasadnia badania nad metodami resamplingowymi, które umożliwiają bezpośrednią konstrukcję przedziałów ufności bez odwoływania się do postaci rozkładu asymptotycznego.

Metody resamplingowe i ich zgodność

Niniejszy rozdział zawiera najważniejsze rezultaty dotyczące zgodności metod resamplingowych. Paragraf 3.2 poświęcony jest subsamplingowi i oparto go na pracach Synowiecki (2007b); Lenart i in. (2008a,b). Paragrafy 3.3 i 3.5 dotyczą zgodności odpowiednio bootstrapu bloków ruchomych i okresowych, przy czym zawierają wyniki z prac Synowiecki (2007a) oraz Leśkow i Synowiecki (2008).

3.1. Procedury resamplingowe

Metody resamplingowe polegają na wielokrotnym przeliczaniu otrzymanej próbki w celu uzyskania przybliżeń rozkładu estymatora. Implementacja tych metod wymaga użycia zaawansowanych narzędzi obliczeniowych. Dlatego powstanie i rozwój metod resamplingowych jest ściśle związane z rozwojem komputerów.

Niech $x_n = (X_1, \dots, X_n)$ będzie próbka z szeregu czasowego $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$, który ma łączny rozkład P . Na podstawie próbki x_n obliczamy wielkość losową $T_n = t_n(x_n, P)$, przykładowo $T_n = v_n(\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) - \theta(P))$, gdzie v_n jest pewnym ciągiem normującym. Naszym celem jest aproksymowanie rozkładu $G_n = \mathcal{L}(T_n)$ lub jego charakterystyk, np. momentów. Wersja bootstrapowa T_n ma postać $T_{m,n}^* = t_m(x_m^*, F_n)$, gdzie F_n jest rozkładem w oparciu o który powstaje próbka x_m^* . Estymatorem G_n jest zaś $\hat{G}_n = G_{m,n}^* = \mathcal{L}^*(T_{m,n}^*)$. W metodzie bootstrap po raz pierwszy przedstawionej w pracy Efron (1979) przyjęto, że F_n jest rozkładem jednostajnym na zbiorze $\{X_1, \dots, X_n\}$ i $m = n$. Ponieważ znamy x_n , to rozkład F_n zmiennych X_i^* jest też znany i można teoretycznie otrzymać rozkład \hat{G}_n . Jednakże praktyczne wyznaczenie \hat{G}_n jest trudne, ponieważ liczba możliwych prób bootstrapowych x_m^* rośnie bardzo szybko (dla bootstrapu i.i.d. w tempie $O(n^m)$). Dlatego rozkład $T_{m,n}^*$ aproksymujemy zwykle za pomocą Monte Carlo próbkując pewną ilość razy z rozkładu F_n .

Lata osiemdziesiąte ubiegłego wieku były czasem intensywnego badania metod resamplingowych dla danych i.i.d. Dla kontrastu, w latach dziewięćdziesiątych główny

nacisk w metodach resamplingowych został położony na dane zależne. Należy podkreślić istotną różnicę między metodami resamplingowymi dla danych zależnych i niezależnych. Bardziej formalne rozważania zaczynamy od omówienia przykładu, który pokazuje tę różnicę. Przykład ten pojawił się w po raz pierwszy w pracy Singh (1981).

Przykład 3.1. Niech (X_1, \dots, X_n) będzie próbką z szeregu czasowego $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$, który jest o zerowej średniej, m -zależny i WS(2). Załóżmy, że próbka (X_1^*, \dots, X_n^*) została wygenerowana za pomocą losowania ze zwracaniem pojedynczych obserwacji (bootstrap Efrona). Możemy napisać, że

$$\begin{aligned} \text{Var}^*(\sqrt{n} \bar{X}_n^*) &= \frac{1}{n} \text{Var}^* \left(\sum_{j=1}^n X_j^* \right) \\ &= \text{Var}^* X_1^* = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \right)^2 \xrightarrow{P} \text{Var}(X_1). \end{aligned}$$

Tymczasem łatwo sprawdzić, że $\text{Var}(\sqrt{n} \bar{X}_n) \rightarrow \sum_{\tau=-m}^m \text{Cov}(X_1, X_{1+\tau})$, zatem estymator bootstrapowy nie estymuje prawdziwej wariancji asymptotycznej.

Powyższy przykład pokazuje, że resampling dla danych zależnych musi być inaczej zdefiniowany. Aby otrzymać zgodność należy resamplingować nie pojedyncze dane, ale bloki danych o długości zwiększającej się wraz ze zwiększającą się długością próbki.

W pierwszej kolejności omówimy procedurę subsamplingu.

Procedura 3.1.1. Subsampling

Niech (X_1, \dots, X_n) będzie obserwowaną próbką. Wersję subsamplingową estymatora $\hat{\theta}_n$ jest obliczana na podszeroku (X_t, \dots, X_{t+b-1}) , najczęściej jako $\hat{\theta}_{n,b,t} = \hat{\theta}_b(X_t, \dots, X_{t+b-1})$. Rozkład empiryczny

$$L_{n,b}(x) = \frac{1}{n-b+1} \mathbf{1}_{v_b(\hat{\theta}_{n,b,t} - \hat{\theta}_n) \leq x}$$

stosujemy jako aproksymację rozkładu wielkości $T_n = v_n(\hat{\theta}_n - \theta)$.

Piękno subsamplingu polega na jego dużej ogólności. Musimy wiedzieć jedynie, że istnieje niezdegenerowany rozkład graniczny wielkości $v_n(\hat{\theta} - \theta)$ i nie musimy znać dokładnie jego postaci. Ogólne warunki zgodności tej metody zostały opublikowane w pracy Politis i Romano (1994), a wyczerpujący opis zawiera monografia Politis i in. (1999)

Aby omówić metody bootstrapowe, oznaczmy blok b kolejnych danych jako $B(j, b) = (X_j, \dots, X_{j+b-1})$.

Procedura 3.1.2. Bootstrap ruchomych bloków (*moving block bootstrap*, MBB)

Niech (X_1, \dots, X_n) będzie obserwowaną próbką. Wybieramy pewną długość bloku $b = b_n$ i zakładamy bez straty ogólności, że $k = n/b \in \mathbb{N}$.

- Zdefiniujmy zmienne losowe i_1, i_2, \dots, i_k jako i.i.d. z następującego rozkładu

$$P(i_j = t) = \frac{1}{n-b+1} \text{ dla } t = 1, \dots, n-b+1.$$

- Łącząc bloki

$$(B(i_1, b), B(i_2, b), \dots, B(i_k, b))$$

otrzymujemy próbkę MBB w postaci $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$.

Pionierem w dziedzinie bootstrapu dla danych zależnych był Carlstein (1986), który udowodnił zgodność dla bloków nie nasuwających się (*non-overlapping*). Procedurę MBB wprowadzono niezależnie w pracach Liu i Singh (1992) oraz Künsch (1989).

Procedura 3.1.3. Bootstrap sezonowych bloków (*seasonal block bootstrap*, SBB)

Niech (X_1, \dots, X_n) będzie obserwowaną próbką, która jest okresowa (np. w sensie momentów) z okresem T . Wybieramy pewną długość bloku $b = b_n$ i zakładamy bez straty ogólności, że $n = bTk$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

- Zdefiniujemy zmienne losowe i_1, i_2, \dots, i_k jako i.i.d. z następującego rozkładu

$$P(i_j = 1 + tT) = \frac{1}{(k-1)b+1} \text{ dla } t = 0, \dots, (k-1)b.$$

- Łącząc bloki

$$(B(i_1, bT), B(i_2, bT), \dots, B(i_k, bT))$$

otrzymujemy próbkę SBB w postaci $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$.

Jak widać SBB jest modyfikacją procedury MBB polegającą na tym, że bierzemy pod uwagę bloki o długości i początkach będącymi wielokrotnością długości okresu. Przedstawiamy teraz metodę sformułowaną w pracy Chan i in. (2004). Dla ułatwienia ilustrujemy ideę tej metody na Rysunku 3.1.

Procedura 3.1.4. Bootstrap okresowych bloków (*periodic block bootstrap*, PBB)

Niech (X_1, \dots, X_n) będzie obserwowaną próbką, która pochodzi z okresowego (w sensie momentów lub rozkładów) z okresem T szeregu czasowego. Dzielimy okres T na $L \in \mathbb{N}$ przedziałów o długości b . Jeśli T nie jest podzielne przez b , wtedy zostawiamy ostatni przedział krótszy, dlatego możemy założyć dla uproszczenia, że $T = Lb$. Bez straty ogólności zakładamy też, że $n = rT$, gdzie $r \in \mathbb{N}$.

- Zdefiniujemy zmienne losowe $i_{u,1}, i_{u,2}, \dots, i_{u,r}$ jako i.i.d. (i jako niezależne dla każdego u) z następującego rozkładu

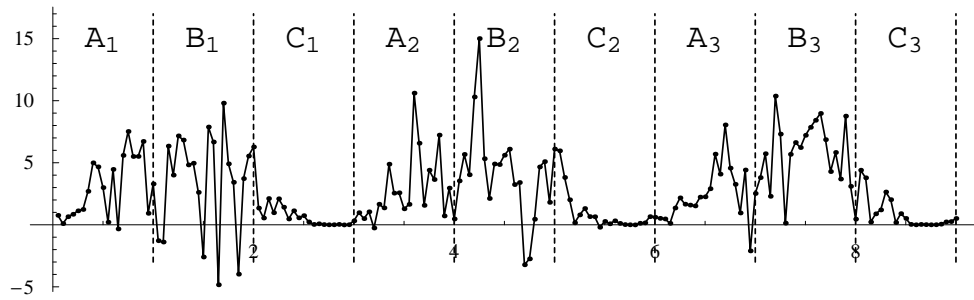
$$P(i_{u,j} = bu + tT + 1) = \frac{1}{r} \text{ dla } t = 0, \dots, r-1,$$

gdzie $u = 0, \dots, L-1$.

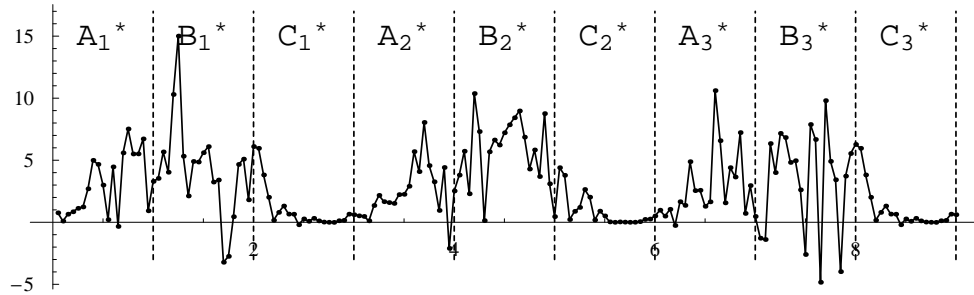
- Łącząc bloki

$$(B(i_{0,1}, b), B(i_{1,1}, b), \dots, B(i_{L-1,1}, b), B(i_{0,2}, b), B(i_{1,2}, b), \dots, B(i_{L-1,2}, b), \\ \dots, B(i_{0,r}, b), B(i_{1,r}, b), \dots, B(i_{L-1,r}, b))$$

otrzymujemy próbkę PBB w postaci $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_T^*, \dots, X_n^*)$.



(a) Dane źródłowe. Dzielimy każdy okres na odpowiadające i nie zazębiające się na siebie bloki A, B i C.



(b) Próbką bootstrapowa; $A_i^* \sim \text{Uniform}\{A_1, A_2, A_3\}$, $B_i^* \sim \text{Uniform}\{B_1, B_2, B_3\}$, $C_i^* \sim \text{Uniform}\{C_1, C_2, C_3\}$.

Rysunek 3.1. Idea bootstrapu okresowych bloków.

Procedura PBB została wprowadzona w pracy Chan i in. (2004), a jej zgodność przedstawia opracowanie Leśkow i Synowiecki (2008). Wyniki te zaprezentujemy szczegółowo w Paragrafie 3.4. Bardzo ważne jest to, że metody PBB i SBB wymagają precyzyjnej znajomości długości okresu i nie mogą być stosowane dla danych prawie okresowych. Natomiast procedury subsamplingu i ruchomych bloków nie wymagają znajomości długości okresu i mogą też być stosowane do danych prawie okresowych.

3.2. Zgodność subsamplingu

Zacznijmy od precyzyjnego wyjaśnienia (na podstawie Politis i in., 1999) co oznacza zgodność subsamplingu. Oznaczmy J jako rozkład asymptotyczny wielkości $v_n(\hat{\theta}_n - \theta)$, a przez $J(x)$ dystrybuantę tego rozkładu w punkcie $x \in \mathbb{R}$. Przypomnijmy, że subsampling polega na obliczeniu rozkładu empirycznego

$$L_{n,b}(x) = \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \mathbf{1}_{v_b(\hat{\theta}_{n,b,t} - \hat{\theta}_n) \leq x},$$

gdzie $\hat{\theta}_{n,b,t}$ jest wersją estymatora $\hat{\theta}_n$ obliczoną na podszeręgu (X_t, \dots, X_{t+b-1}) . Mówimy, że subsampling jest zgodny jeśli zachodzą następujące warunki:

(C1) Jeśli x jest punktem ciągłości $J(\cdot)$, wtedy

$$L_{n,b}(x) \xrightarrow{P} J(x).$$

(C2) Jeśli $J(\cdot)$ jest ciągła, wtedy

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |L_{n,b}(x) - J(x)| \xrightarrow{P} 0.$$

(C3) Jeśli $J(\cdot)$ jest ciągła w $c(1 - \alpha)$, wtedy

$$P\left(v_n(\hat{\theta}_n - \theta) \leq c_{n,b}(1 - \alpha)\right) \rightarrow 1 - \alpha,$$

gdzie $\alpha \in (0, 1)$ oraz

$$\begin{aligned} c_{n,b}(1 - \alpha) &= \inf\{x : L_{n,b}(x) \geq 1 - \alpha\}, \\ c(1 - \alpha) &= \inf\{x : J(x) \geq 1 - \alpha\}. \end{aligned}$$

Aby sformułować zgodność subsamplingu dla parametru i estymatora k -wymiarowego, zdefiniujmy wektory losowe Z_n i Z jako $\mathcal{L}(Z_n) = L_{n,b}$ oraz $\mathcal{L}(Z) = J$. Zgodność oznacza, że dla każdej J -prawie wszędzie ciągłej funkcji $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ i dla każdej metryki ρ metryzującej słabą zbieżność na \mathbb{R} mamy

$$\rho(\mathcal{L}(f(Z_n)), \mathcal{L}(f(Z))) \xrightarrow{P} 0.$$

Zbieżność ta pozwala otrzymywać subsamplingowe przybliżenia kwantyli wielkości $\|v_n(\hat{\theta}_n - \theta)\|$ za pomocą kwantyli z rozkładu empirycznego

$$L_{n,b,\|\cdot\|}(x) = \frac{1}{n - b + 1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \mathbf{1}_{\|v_b(\hat{\theta}_{n,b,t} - \hat{\theta}_n)\| \leq x}.$$

W celu udowodnienia zgodności subsamplingu używać będziemy ogólnego warunku wystarczającego, który został sformułowany dla niestacjonarnych szeregów czasowych w Twierdzeniu 4.2.1, Politis i in. (1999). Załóżmy, że szereg $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ jest α -mieszający, $b = b_n \rightarrow \infty$ ale $b/n \rightarrow 0$ oraz $v_b/v_n \rightarrow 0$. Warunek wystarczający zgodności subsamplingu jest następujący: dla każdego punktu ciągłości x dystrybuanty granicznej $J(x)$ i dla każdego ciągu $\{t_b\}$ liczb naturalnych takich, że $t_b \leq n - b + 1$,

$$J_{n,b,t_b}(x) \rightarrow J(x) \text{ dla } n \rightarrow \infty, \quad (3.1)$$

gdzie

$$J_{n,b,t_b}(x) = P(v_b(\hat{\theta}_{n,b,t} - \theta) \leq x).$$

Powyższy warunek jest bardzo ogólny i dotyczy estymatorów dowolnej postaci. W dalszej części paragrafu odpowiemy na pytanie, czy zachodzi on dla współczynników Fouriera funkcji autokowariancji.

W poniższych rozważaniach aż do odwołania zakładamy dla uproszczenia, że $EX_t = 0$. Sugerując się wskazówkami z monografii Politis i in. (1999) subsamplingową wersję estymatora $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$ definiujemy jako $\hat{\theta}_{n,b,t} = \hat{\theta}_b(X_t, \dots, X_{t+b-1})$, czyli

$$\hat{\alpha}_{n,b,t}(\lambda, \tau) = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b-\tau} X(t-1+j+\tau)X(t-1+j)e^{-i\lambda j}. \quad (3.2)$$

Okazuje się jednak, że tak zdefiniowana wersja subsamplingowa prowadzi do niezgodności procedury. W pracy Synowiecki (2007b) pokazano, że dla tego estymatora warunek (3.1) nie zachodzi, a wykonane symulacje sugerują brak zgodności. Poniżej podajemy dokładne wyjaśnienie tej sytuacji.

Zaczynamy od rezultatu dotyczącego asymptotyki estymatora $\hat{a}_{n,b,t}(\lambda, \tau)$ dla ustalonego t .

Lemat 3.1. *Niech $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie szeregiem czasowym APC spełniającym założenia Twierdzenia 2.6. Wtedy dla każdego $\lambda \in [0, 2\pi)$, $\tau \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{N}$ oraz dowolnego ciągu $\{b_n\}$ rozbieżnego do nieskończoności i takiego, że $b = b_n \leq n$,*

$$\sqrt{b} \left(\hat{a}_{n,b,t}(\lambda, \tau) - e^{i\lambda(t-1)} a(\lambda, \tau) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma_t(\lambda, \tau)),$$

gdzie $\Sigma_t(\lambda, \tau) = E_t(\lambda) \Sigma(\lambda, \tau) E_t^{TR}(\lambda)$,

$$E_t(\lambda) = \begin{bmatrix} \cos(\lambda(t-1)) & -\sin(\lambda(t-1)) \\ \sin(\lambda(t-1)) & \cos(\lambda(t-1)) \end{bmatrix},$$

a macierz $\Sigma(\lambda, \tau)$ jest asymptotyczną wariancją wielkości $\sqrt{n} (\hat{a}_n(\lambda, \tau) - a(\lambda, \tau))$.

Dowód. W pierwszym kroku

$$\begin{aligned} & \sqrt{b} \left(\hat{a}_{n,b,t}(\lambda, \tau) - e^{i\lambda(t-1)} a(\lambda, \tau) \right) \\ &= e^{i\lambda(t-1)} \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-\tau} X(t-1+j+\tau) X(t-1+j) e^{-i\lambda(t-1+j)} - a(\lambda, \tau) \right) \\ &= e^{i\lambda(t-1)} R_n(\lambda, \tau). \end{aligned}$$

Z Twierdzenia 2.6 mamy

$$R_n(\lambda, \tau) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_2(0, \Sigma(\lambda, \tau)).$$

Wystarczy teraz zauważyć, że

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(e^{i\lambda(t-1)} R_n(\lambda, \tau) \right) &= \text{Var} \left(\begin{bmatrix} \cos(\lambda(t-1)) & -\sin(\lambda(t-1)) \\ \sin(\lambda(t-1)) & \cos(\lambda(t-1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re}(R_n(\lambda, \tau)) \\ \text{Im}(R_n(\lambda, \tau)) \end{bmatrix} \right) \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} \cos(\lambda(t-1)) & -\sin(\lambda(t-1)) \\ \sin(\lambda(t-1)) & \cos(\lambda(t-1)) \end{bmatrix} \Sigma(\lambda, \tau) \begin{bmatrix} \cos(\lambda(t-1)) & -\sin(\lambda(t-1)) \\ \sin(\lambda(t-1)) & \cos(\lambda(t-1)) \end{bmatrix}^{\text{TR}} \\ &= \Sigma_t(\lambda, \tau) \text{ dla } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

■

Powyższy wniosek pokazuje, że pojedyncza replikacja estymatora $\hat{a}_n(\lambda, \tau)$ nie jest zgodna do parametru $a(\lambda, \tau)$. Efekt ten powoduje niezgodność subsamplingu.

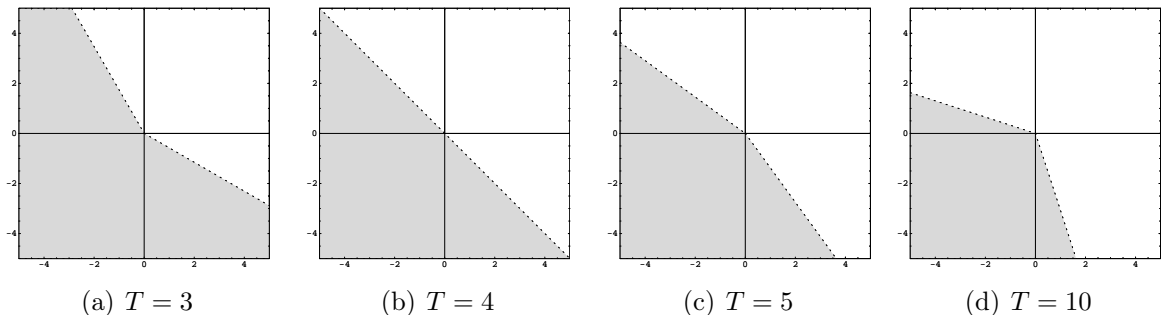
Wniosek 3.1. *Niech $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie α -mieszającym szeregiem czasowym, który jest SP z okresem $T > 1$. Załóżmy, że dla estymatora $\hat{a}_n(\lambda, \tau)$ zachodzi CTG, tzn.*

$$\sqrt{n} (\hat{a}_n(\lambda, \tau) - a(\lambda, \tau)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_2(0, \Sigma)$$

i dla każdego $t = 2, 3, \dots, T - 1$ mamy (patrz Rysunek 3.2)

$$\operatorname{Re}(a(\lambda, \tau)(e^{i\lambda(t-1)} - 1)) > 0 \text{ lub } \operatorname{Im}(a(\lambda, \tau)(e^{i\lambda(t-1)} - 1)) > 0. \quad (3.3)$$

Wtedy dla każdego ciągu $\{b_n\}$ takiego, że $b \rightarrow \infty$, ale $b = o(n)$, subsampling dla estymatora $\hat{a}_n(\lambda, \tau)$ z replikacjami (3.2) jest niezgodny.



Rysunek 3.2. Stożki na płaszczyźnie $(\operatorname{Re}(a(\lambda, \tau)), \operatorname{Im}(a(\lambda, \tau)))$, w których subsampling jest niezgodny dla szeregów czasowych ściśle okresowych.

Dowód. Nierówności między liczbami zespolonymi będziemy rozumieć jako nierówności między częściami rzeczywistymi i urojonymi (po współrzędnych). Dla dowolnego $x \in \mathbb{C}$ zdefiniujmy wielkość

$$U_{n,b}(x) = \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \mathbf{1}_{\sqrt{b}(\hat{a}_{n,b,t}(\lambda, \tau) - a(\lambda, \tau)) \leq x}.$$

Korzystając z własności α -mieszania i dowodu Twierdzenia 4.2.1 z monografii Politis i in. (1999) mamy, że

$$\operatorname{Var}(U_{n,b}(x)) \rightarrow 0 \text{ dla } n \rightarrow \infty.$$

Oznaczmy teraz $L = \lfloor (n-b+1)/T \rfloor$. Łatwo widać, że $L/(n-b+1) \rightarrow 1/T$ dla $n \rightarrow \infty$. Korzystając z własności SP możemy napisać

$$\begin{aligned} E(U_{n,b}(x)) &= \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} P(\sqrt{b}(\hat{a}_{n,b,t}(\lambda, \tau) - a(\lambda, \tau)) \leq x) \\ &= \frac{L}{n-b+1} \sum_{s=1}^T P(\sqrt{b}(\hat{a}_{n,b,s}(\lambda, \tau) - a(\lambda, \tau)) \leq x) \\ &\quad + \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=LT+1}^{n-b+1} P(\sqrt{b}(\hat{a}_{n,b,t}(\lambda, \tau) - a(\lambda, \tau)) \leq x) \\ &= \frac{L}{n-b+1} P(\sqrt{b}(\hat{a}_{n,b,1}(\lambda, \tau) - a(\lambda, \tau)) \leq x) \\ &\quad + \frac{L}{n-b+1} \sum_{s=2}^T P(\sqrt{b}(\hat{a}_{n,b,s}(\lambda, \tau) - e^{i\lambda(s-1)}a(\lambda, \tau)) \leq x - \sqrt{b}a(\lambda, \tau)(e^{i\lambda(s-1)} - 1)) \\ &\quad + o(1) = W_b(x) + V_b(x) + o(1) \end{aligned}$$

Z Lematu 3.1 otrzymujemy, że

$$W_b(x) \rightarrow \frac{1}{T} J(x, P) \text{ dla } n \rightarrow \infty.$$

Ponadto, korzystając z założenia (3.3) mamy, że $V_b(x) \rightarrow 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{C}$. Stąd wynika zbieżność $U_{n,b}(x) \xrightarrow{P} \frac{1}{T} J(x)$, która implikuje (patrz dowód Twierdzenia 4.2.1, Politis i in., 1999), że $L_{n,b}(x) \xrightarrow{P} \frac{1}{T} J(x, P) \neq J(x, P)$. Zbieżność ta wyklucza zgodność subsamplingu. ■

W poniższym przykładzie pokażemy, że zbiór szeregów czasowych spełniających założenie (3.3) jest niepusty.

Przykład 3.2. Rozważmy szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ postaci $X_t = \cos(\gamma t) Z_t$, gdzie szereg czasowy $\{Z_t : t \in \mathbb{Z}\}$ jest SS, α -mieszający i ma zerową wartość oczekiwaną. Jeśli wybierzemy częstotliwość $\gamma = 2\pi k/T$, gdzie $k, T \in \mathbb{N}$, wtedy szereg $\{X_t\}$ jest SP z okresem T . Zauważmy, że

$$\begin{aligned} a(\lambda, \tau) &= M_t \left(\cos(\gamma t) \cos(\gamma(t + \tau)) B_Z(\tau) e^{-i\lambda t} \right) \\ &= \frac{B_Z(\tau)}{4} M_t \left((e^{i\gamma t} + e^{-i\gamma t}) (e^{i\gamma(t+\tau)} + e^{-i\gamma(t+\tau)}) e^{-i\lambda t} \right) \\ &= \frac{B_Z(\tau)}{4} \left(e^{i\gamma\tau} M_t \left(e^{it(2\gamma-\lambda)} \right) + (e^{-i\gamma\tau} + e^{i\gamma\tau}) M_t(e^{-i\lambda t}) + e^{-i\gamma\tau} M_t \left(e^{-it(2\gamma+\lambda)} \right) \right). \end{aligned}$$

Zatem mamy, że $a(2\gamma, \tau) = e^{i\gamma\tau} B_Z(\tau)/4$. Możemy tak dobrać parametr γ oraz τ , żeby liczba ta należała do dowolnie wybranego stożka.

Powyższe rozważania pokazują, że wybierając replikacje estymatora zgodnie z (3.2) nasza procedura nie będzie zgodna. Replikacje te można użyć natomiast, aby otrzymać zgodność (patrz Lenart i in., 2008a) dla estymatora $|\hat{a}_n(\lambda, \tau)|$. Rozkład subsamplingowy ma wtedy postać

$$L_{n,b}(x) = \frac{1}{n-b+1} \mathbf{1}_{\sqrt{b}(|\hat{a}_{n,b,t}(\lambda, \tau)| - |\hat{a}_n(\lambda, \tau)|) \leq x}.$$

Okazuje się jednak, że możliwe jest zmodyfikowanie estymatora w taki sposób, aby zgodność zachodziła nawet bez wartości bezwzględnych. Dla dowolnego (niekoniecznie o zerowej średniej) szeregu APC wprowadźmy następujące oznaczenia

$$\hat{a}_{n,b,t}^S(\lambda, \tau) = \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-\tau} (X_j - \hat{\mu}_{n,b,t}^S(j))(X_{j+\tau} - \hat{\mu}_{n,b,t}^S(j+\tau)) e^{-i\lambda j},$$

gdzie

$$\mu_{n,b,t}^S(j) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \hat{b}_{n,b,t}^S(\gamma) e^{i\gamma j} \quad \text{oraz} \quad \hat{b}_{n,b,t}^S(\gamma) = \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-\tau} X_j e^{-i\gamma j}$$

i analogicznie dla $x \in \mathbb{R}$

$$L_{n,b,\|\cdot\|}^S(x) = \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \mathbf{1}_{\|\sqrt{b}(\hat{a}_{n,b,t}^S(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) - \hat{a}_n(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}))\| \leq x}.$$

Różnica w stosunku do estymatora (3.2) polega na tym, że teraz wykładnik eksponenty jest zgodny z indeksem sumowania.

Twierdzenie 3.1. Niech $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie szeregiem czasowym APC, który spełnia założenia Twierdzenia 2.6. Załóżmy ponadto, że dla pewnego $\delta > 0$

$$(i) \sup_{t \in \mathbb{Z}} E|X_t|^{4+4\delta} < \infty,$$

$$(ii) \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau^2 \alpha_X^{\frac{\delta}{4+\delta}}(\tau) < \infty,$$

oraz, że rozkład asymptotyczny wielkości $\sqrt{n}(\hat{a}_n(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) - a(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}))$ nie degeneruje się do wektora zerowego. Weźmy blok o długości $b \rightarrow \infty$ ale $b = o(n)$. Wtedy subsampling oparty o replikacje $\hat{a}_{n,b,t}^S(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})$ jest zgodny.

Dowód. W oparciu o Twierdzenie 4.2.1 z monografii Politis i in. (1999) wystarczy pokazać warunek (3.1) czyli, że

$$\sqrt{b}(\hat{a}_{n,b,t_b}^S(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) - a(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})),$$

gdzie $\{t_b\}$ jest dowolnym ciągiem liczb naturalnych. Podobnie jak przy dowodzie Twierdzenia 2.6 korzystając z Lematu 2.12 możemy napisać, że

$$\sqrt{b}(\hat{a}_{n,b,t_b}^S(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) - a(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})) = \sqrt{b}(\hat{a}_{n,b,t_b}^{S,\Delta}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) - a(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})) + o_P(1),$$

gdzie wektor losowy $\hat{a}_{n,b,t_b}^{S,\Delta}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})$ jest złożony z części rzeczywistych i urojonych zmiennych losowych

$$\hat{a}_{n,b,t}^{S,\Delta}(\lambda_k, \tau_k) = \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{b+t-\tau_k} (X_j - \mu(j))(X_{j+\tau_k} - \mu(j + \tau_k))e^{-i\lambda_k j}.$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\tau_{max} = \max\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{2K}\},$$

$$\mathbf{Y}_j(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) = \begin{bmatrix} Y_{j,1} \\ Y_{j,2} \\ \vdots \\ Y_{j,2K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_j(\tau_1) \cos(\lambda_1 j) \\ -Z_j(\tau_1) \sin(\lambda_1 j) \\ Z_j(\tau_2) \cos(\lambda_2 j) \\ -Z_j(\tau_2) \sin(\lambda_2 j) \\ \vdots \\ Z_j(\tau_K) \cos(\lambda_K j) \\ -Z_j(\tau_K) \sin(\lambda_K j) \end{bmatrix},$$

$$T_{n,k_n,a}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{\sqrt{k_n}} \sum_{j=a}^{a+k_n-1} \mathbf{Y}_j(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}),$$

gdzie $Z_j(\tau) = (X_j - \mu(j))(X_{j+\tau} - \mu(j + \tau)) - B_X(j, \tau)$ oraz $1 \leq a \leq n - k_n - \tau_{max} + 1$. Z ograniczoności momentów szeregu $\{Z_j(\tau)\}$ oraz z Lematu 1.1 mamy, że

$$\sqrt{b}(\hat{a}_{n,b,t_b}^S(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) - a(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})) = T_{n,b,t_b} + o_P(1).$$

Za pomocą twierdzenia Craméra-Wolda pokażemy teraz zbieżność

$$T_{n,b,t_b}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})) \text{ dla } n \rightarrow \infty, \quad (3.4)$$

gdzie $\Sigma(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) = [\sigma_{k,l}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})]_{k,l=1,2,\dots,2K}$ jest odpowiednią asymptotyczną macierzą kowariancji o elementach

$$\sigma_{k,l}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_t \text{Cov} \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} \sum_{j=t}^{t+b_n-1} Y_{j,k}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} \sum_{j=t}^{t+b_n-1} Y_{j,l} \right).$$

W tym celu weźmy dowolny $2K$ wymiarowy wektor $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_{2K}]^{\text{TR}}$ złożony z liczb rzeczywistych i oznaczmy macierz

$$\Sigma_{n,k_n,a}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) = \text{Var}(\mathbf{c}^{\text{TR}} T_{n,k_n,a}).$$

Korzystając z naszych założeń szeregi czasowe $\{Y_{j,k} : j \in \mathbb{Z}\}$ oraz $\{Y_{j,l} : j \in \mathbb{Z}\}$ są JAPC dla dowolnych $k, l = 1, \dots, 2K$. Z nierówności Schwartza otrzymujemy natychmiast, że $\sup_{j,k} E|Y_{j,k}|^{2+2\delta} < \infty$, a z Lematu 2.1 mamy, że

$$|\text{Cov}(Y_{j,k}, Y_{j+\tau,l})| \leq 8 \left(\sup_{j,k} E|Y_{j,k}|^{2+2\delta} \right)^{\frac{2}{2+\delta}} \alpha_X^{\frac{\delta}{2+\delta}} (\tau - \tau_{max}).$$

Korzystając z sumowalności ciągu α -mieszania możemy skorzystać z Lematów 2.10 i 2.11, aby otrzymać zbieżność dla dowolnego rozbieżnego do nieskończoności ciągu liczb naturalnych $\{k_n\}$

$$\begin{aligned} \Sigma_{n,k_n,a}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) &= \sum_{k=1}^{2K} \sum_{l=1}^{2K} c_k c_l \text{Cov} \left(\frac{1}{\sqrt{k_n}} \sum_{j=t}^{t+k_n-1} Y_{j,k}, \frac{1}{\sqrt{k_n}} \sum_{j=t}^{t+k_n-1} Y_{j,l} \right) \\ &\rightarrow \sum_{k=1}^{2K} \sum_{l=1}^{2K} c_k c_l \sigma_{k,l}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{c}^{\text{TR}} \Sigma(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Powyższa zbieżność jest jednostajna względem punktu startu t . Zauważmy, że szereg czasowy $\{\mathbf{c}^{\text{TR}} \mathbf{Y}_j\}$ jest α -mieszający ze współczynnikami $\{\alpha_X(\tau - \tau_{max})\}$ oraz ma jednostajnie ograniczone momenty rzędu $2+2\delta$. Dlatego zbieżność (3.4) wynika bezpośrednio z Twierdzenia 2.2. ■

Upraszczając odpowiednio powyższy dowód możemy otrzymać łatwo zgodność subsamplingu dla estymatora $\hat{b}_n(\gamma)$ z replikacjami

$$\hat{b}_{n,b,t}^S(\gamma) = \frac{1}{b} \sum_{j=t}^{t+b-1} X_j e^{-i\gamma j}.$$

Na koniec paragrafu chcielibyśmy powrócić do problemu degenerowania się asymptotycznej wariancji. W takim przypadku nie możemy stosować procedury subsamplingu. Powstaje zatem pytanie: jak w praktyce sprawdzać, że wariancja asymptotyczna jest większa od zera? W pracy Dehay i Leśkow (1996b) zaproponowano pewne estymatory wariancji asymptotycznej estymatorów $\hat{b}_n(\gamma)$ i $\hat{a}_n(\lambda, \tau)$. My jednak chcemy się tutaj skoncentrować na metodzie resamplingowej omówionej w pracy Carlstein

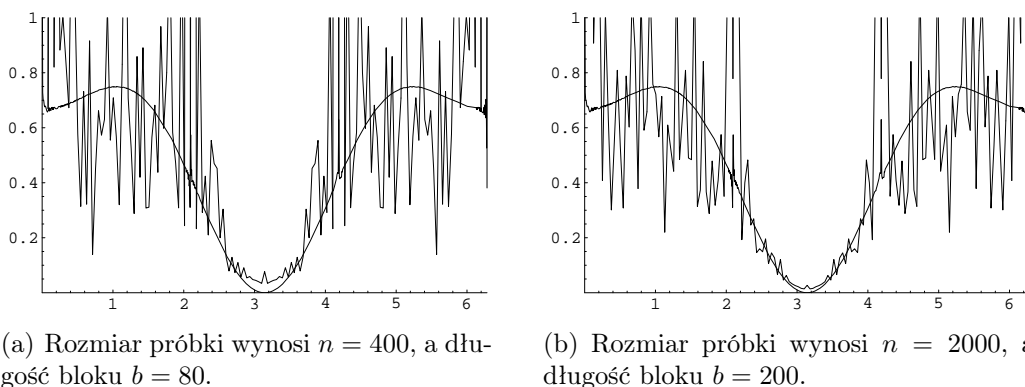
(1986) oraz Fukuchi (1999). Dla uproszczenia zajmiemy się częścią rzeczywistą estymatora. Nasz punktowy estymator wariancji ma postać

$$\hat{\sigma}_{n,b}^2(\gamma) = \frac{b}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \left(\operatorname{Re} \left(\hat{b}_{n,b,t}^S(\gamma) \right) - \operatorname{Re} \left(\hat{b}_{n,b,\cdot}^S(\gamma) \right) \right)^2,$$

gdzie

$$\hat{b}_{n,b,\cdot}^S(\gamma) = \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \hat{b}_{n,b,t}^S(\gamma).$$

Warunki wystarczające zgodności w sensie L^2 dla niestacjonarnych szeregów czasowych zostały sformułowane w Twierdzeniu 1 w pracy Fukuchi (1999) (patrz również Lemat 4.6.1, Politis i in., 1999).



Rysunek 3.3. Estymator Carlsteina-Fukuchi wariancji asymptotycznej estymatora współczynnika Fouriera jako funkcja częstotliwości $\gamma \in [0, 2\pi)$. Dane pochodzą z modelu opisanego w Przykładzie 2.1 dla $\Gamma_2 = \Gamma(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Wniosek 3.2. Niech $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie szeregiem czasowym, który jest APC i spełnia założenia Twierdzenia 2.5. Załóżmy dodatkowo, że dla pewnego $\delta > 0$ i $\zeta > 0$

(i) $\sup_{t \in \mathbb{Z}} E|X_t|^{4+\delta+\zeta} < \infty$,

(ii) $\sum_{\tau=1}^{\infty} \tau^4 \alpha_X^{\frac{\delta}{6+\delta}} < \infty$.

Wtedy estymator wariancji estymatora $\hat{a}_n(\lambda, \tau)$ jest zgodny w sensie L^2 , tzn.

$$\hat{\sigma}_{n,b}^2(\gamma) \xrightarrow{L^2} \sigma_{1,1}(\gamma),$$

gdzie $\sigma_{1,1}(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Var}(\sqrt{n} \operatorname{Re}(\hat{b}_n(\gamma)))$.

Dowód. Aby skorzystać z Twierdzenia 1 z pracy Fukuchi (1999) musimy udowodnić, że

$$\frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \operatorname{Var}(\sqrt{b} \operatorname{Re}(\hat{b}_{n,b,t}^S(\gamma))) \rightarrow \sigma_{1,1}(\gamma) \quad (3.5)$$

oraz, że ciąg zmiennych losowych

$$\{A_n\} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n (X_t \cos(\lambda t) - EX_t \cos(\lambda t)) \right)^4 \right\}$$

jest jednostajnie całkowny. Zbieżność (3.5) wynika natychmiast z Lematu 2.10. Ponieważ zachodzi CTG (w przypadku, gdy $\sigma_{1,1} = 0$ mamy najwyżej zbieżność do 0), wystarczy zauważyć, że $\sup_n E|A_n|^{1+\frac{\zeta}{4}} < \infty$, co wynika z Lematu 2.3. ■

Okazuje się zatem, że do estymacji wariancji estymatora potrzebujemy nieco silniejszych założeń niż do aproksymacji jego rozkładu. Część tę kończymy podając na Rysunku 3.3, w odniesieniu do Przykładu 2.1, wykres estymatora wariancji $\sqrt{n} \hat{b}_n(\gamma)$ jako funkcji częstotliwości γ w porównaniu z jego teoretyczną wartością. Wykresy takie mogą pomóc w zlokalizowaniu punktów, w których rozkład się degeneruje.

3.3. Zgodność bootstrapu ruchomych bloków (MBB) dla średniej próbkowej

Literatura dotycząca bootstrapu blokowego jest dosyć bogata. Po raz pierwszy idea ta pojawiła się w pracy Carlsteina (1986), w której zaproponowano losowanie z bloków rozłącznych, czyli $\tilde{B}(i, b) = (X_{ib+1}, \dots, X_{(i+1)b})$, $i = 0, \dots, n/b - 1$. Procedura taka nazwana została bootstrpem bloków nienakładających się (*nonoverlapping block bootstrap*). Dzięki результатам pracy Lahiri (1999) wiadomo, że dopuszczenie nakładania się bloków poprawia efektywność bootstrapu blokowego, a MBB dopuszcza właśnie bloki z maksymalnym możliwym nakładaniem się. Bootstrap bloków ruchomych został wprowadzony niezależnie w pracach Künsch (1989) oraz Liu i Singh (1992). Obydwie prace dotyczą średniej próbkowej szeregu ściśle stacjonarnego. Rezultatem Liu i Singha (1992) była zgodność dla m -zależnych szeregów czasowych o ograniczonych momentach rzędu wyższego niż cztery i długości bloku $b = o(n^{1/2})$. Künsch (1989) przedstawił natomiast rezultaty zgodności dla α -mieszających szeregów czasowych zakładając dla pewnego $\delta > 0$

$$E|X_1|^{6+\delta} < \infty \text{ oraz } \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau^2 \alpha_X^{\frac{\delta}{6+\delta}}(\tau) < \infty. \quad (3.6)$$

Lahiri (1992) otrzymał takie rezultaty dla niestacjonarnych szeregów, jednakże z pewnymi dodatkowymi założeniami na rozkłady, wykładniczo zanikającym ciągiem α -mieszania i blokiem $b = o(n^{1/4})$. Kolejną ważną pracą była praca Radulovića (1996) dotycząca także przypadku α -mieszającego i ściśle stacjonarnego, w której pokazano, że dla szeregów, które spełniają centralne twierdzenie graniczne dla średniej, zachodzi także CTG w przestrzeni bootstrapowej. Stąd już blisko do uzyskania użytecznej w praktyce zgodności MBB. Rezultat z pracy Radulović (1996) pozwolił polepszyć warunki (3.6) do założenia

$$E|X_1|^{2+\delta} < \infty \text{ oraz } \sum_{\tau=1}^{\infty} \alpha_X^{\frac{\delta}{2+\delta}}(\tau) < \infty.$$

Można powiedzieć, że w tym momencie procedura MBB została dobrze zbadana dla przypadku ściśle stacjonarnego. Od końca lat dziewięćdziesiątych XX wieku zaczęło się pojawiać coraz więcej rezultatów dotyczących niestacjonarnych szeregów czasowych. Fitzenberger (1997) otrzymał następujące warunki zgodności dla $b = o(n^{1/2})$

$$\sup_t E|X_t|^{4+\delta+\epsilon} < \infty \text{ oraz } \alpha_X(\tau) = O(\tau^{-\lambda}), \text{ gdzie } \lambda > \frac{4+\delta}{\delta},$$

przy czym nie zakładał stacjonarności, ale stałą wartość oczekiwaną. Podobnym przypadkiem zajmował się Politis i in. (1999) (Twierdzenie 4.4.2), który otrzymał zgodność przy założeniu

$$\sup_t E|X_t|^{4+2\delta} < \infty \text{ oraz } \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau^2 \alpha_X^{\frac{\delta}{4+\delta}}(\tau) < \infty.$$

Sjöstedt (2000) badała natomiast przypadek tablic zmiennych losowych wierszowo m -zależnych ze stałym m , dopuszczając zmienną wartość oczekiwaną (asymptotycznie równa i gładko zmieniająca się średnia). Zakładała $\sup_{t,n} E|X_{n,t}|^{2+\delta} < \infty$ oraz $b = o(n/\ln n)$. Rezultaty te dopuszczają przypadek okresowy i prawie okresowy dla zmodyfikowanego MBB, który polega na generowaniu próbki nb elementowej. Wreszcie Gonçalves i White (2002) rozważali nieco ogólniejsze założenie niż α -mieszanie, tzn. *near epoch dependence*, które dopuszcza też szeregi czasowe, które są funkcjami procesów α -mieszających. Ich rezultaty wymagają jednostajnej ograniczoności momentów rzędu wyższego niż sześć oraz tego, że

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(EX_t - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n EX_t \right)^2 \rightarrow 0 \text{ dla } n \rightarrow \infty.$$

Jednakże,

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(EX_t - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n EX_t \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (EX_t)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n EX_t \right)^2,$$

i jeśli wartość oczekiwana jest funkcją prawie okresową, nie mamy wymaganej zbieżności do zera (patrz Lemat 1.2).

Zastosowane poniżej techniki rozwijają metodologię dowodu zgodności bootstrapu zaproponowaną przez Giné i Zinn (1989); Arcones i Giné (1989) oraz Radulović (1996). Uściślijmy, że naszym parametrem zainteresowania będzie $M_t(EX_t)$ szeregu czasowego $\{X_t\}$, który jest przynajmniej WAP(1). Parametr $M_t(EX_t)$ jest estymowany przez $\bar{X}_n = (1/n) \sum_{t=1}^n X_t$. Następnie przeniesiemy rezultat zgodności na estymatory współczynników Fouriera.

Pierwsze twierdzenie dotyczy przypadku ściśle okresowego.

Twierdzenie 3.2. *Niech $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie ściśle okresowym z okresem T , α -mieszającym szeregiem czasowym. Niech X_t^* będą obserwacjami generowanymi za pomocą procedury MBB przy użyciu bloków o długości $b \rightarrow \infty$, ale $b = o(n)$. Załóżmy, że*

(i) *funkcja kowariancji jest sumowalna, czyli*

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} |Cov(X_t, X_{t+\tau})| < \infty$$

dla wszystkich $t = 1, \dots, T$,

(ii) *zachodzi centralne twierdzenie graniczne, czyli*

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad (3.7)$$

gdzie $\mu = M_t(EX_t)$ i $\sigma^2 > 0$.

Wtedy procedura MBB jest zgodna, czyli

$$\text{Var}^* \left(\sqrt{n} \bar{X}_n^* \right) \xrightarrow{P} \sigma^2$$

oraz

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P \left(\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu) < x \right) - P^* \left(\sqrt{n} (\bar{X}_n^* - E^* \bar{X}_n^*) < x \right) \right| \xrightarrow{P} 0.$$

Dowód. Zaczniemy od następującego lematu.

Lemat 3.2. Niech (X_1, \dots, X_n) będzie próbką z szeregu czasowego $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$, który jest SP z okresem T . Wtedy tablica $\{Y_{n,t} : t = 1, \dots, n - b + 1\}$, gdzie $Y_{n,t} = X_t + \dots + X_{t+b-1}$ jest wierszowo SP z tym samym okresem T dla każdego ciągu liczb naturalnych $\{b_n\}$ takiego, że $b = b_n \leq n$.

Dowód. Zauważmy, że dla każdych $r \in \mathbb{N}$, $t, \tau_1, \dots, \tau_{r-1} \in \mathbb{Z}$ mamy

$$\begin{aligned} & (X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+b-1}, X_{t+\tau_1}, X_{t+\tau_1+1}, \dots, X_{t+\tau_1+b-1}, \\ & \dots, X_{t+\tau_{r-1}}, X_{t+\tau_{r-1}+1}, \dots, X_{t+\tau_{r-1}+b-1}) \\ & \stackrel{d}{=} (X_{t+T}, \dots, X_{t+T+b-1}, X_{t+\tau_1+T}, \dots, X_{t+\tau_1+T+b-1}, \dots, X_{t+\tau_{r-1}+T}, \dots, X_{t+\tau_{r-1}+T+b-1}). \end{aligned}$$

Wobec powyższego, obliczając na tych wektorach wartości odwzorowania borelowsko mierzalnego, które sumuje b kolejnych elementów wektora rb elementowego otrzymujemy, że

$$(Y_{n,t}, Y_{n,t+\tau_1}, \dots, Y_{n,t+\tau_{r-1}}) \stackrel{d}{=} (Y_{n,t+T}, Y_{n,t+\tau_1+T}, \dots, Y_{n,t+\tau_{r-1}+T}).$$

■

Na początku zauważmy, że bez straty ogólności można założyć, że $\mu = 0$. Oczywiście nie oznacza to, że $EX_t \equiv 0$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $t = 1, \dots, n - b + 1$ (pamiętajmy, że $b = b_n$) oznaczymy $Z_{t,b} = X_t + \dots + X_{t+b-1}$. Zmienne losowe $Z_{j,b}^*$ są warunkowo pod warunkiem próby niezależne o tym samym rozkładzie dyskretnym

$$P^*(Z_{j,b}^* = Z_{t,b}) = \frac{1}{n - b + 1} \quad \text{dla } t = 1, \dots, n - b + 1.$$

Korzystając z Twierdzenia 2.4 wystarczy pokazać, że

$$\sum_{j=1}^k P^* \left(\frac{1}{\sqrt{n}} |Z_{j,b}^*| > \nu \right) \xrightarrow{P} 0, \quad (3.8)$$

$$\sum_{j=1}^k E^* \left(\frac{1}{\sqrt{n}} Z_{j,b}^* \mathbf{1}_{|Z_{j,b}^*| \leq \sqrt{n}\nu} \right) - \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} E^*(Z_{j,b}^*) \xrightarrow{P} 0, \quad (3.9)$$

oraz

$$\sum_{j=1}^k \text{Var}^* \left(\frac{1}{\sqrt{n}} Z_{j,b}^* \mathbf{1}_{|Z_{j,b}^*| \leq \sqrt{n}\nu} \right) \xrightarrow{P} \sigma^2, \quad (3.10)$$

gdzie ν jest dowolną liczbą dodatnią. W poniższym rozważaniu wyjaśnimy dokładnie dlaczego wystarczy udowodnić powyższe zbieżności.

Wiemy, że ciąg zmiennych losowych $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbiega wg. prawdopodobieństwa do pewnej zmiennej losowej X wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego rozbieżnego do nieskończoności ciągu liczb naturalnych $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ istnieje taki podciąg $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, że ciąg zmiennych losowych $\{X_{d_n}\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny prawie na pewno do X . Naszym celem jest udowodnienie zbieżności

$$d\left(\mathcal{L}^*(\sqrt{n}(\bar{X}_n^* - E^*\bar{X}_n^*)), \mathcal{N}(0, \sigma^2)\right) \xrightarrow{P} 0, \quad (3.11)$$

gdzie d jest dowolną metryką metryzującą słabą zbieżność rozkładów określonych na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. W tezie Twierdzenia 3.2 zgodność zapisaliśmy za pomocą metryki supremum. Weźmy zatem dowolny rozbieżny do nieskończoności ciąg liczb naturalnych $\{c_n\}$. Mając zbieżności (3.9), (3.10) i (3.8) możemy wybrać do ciągu $\{c_n\}$ podciąg $\{d_n\}$ taki, że

$$\sum_{j=1}^{k(d_n)} P^* \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} |Z_{j,b(d_n)}^*| > \nu \right) \xrightarrow{p.n.} 0,$$

$$\sum_{j=1}^{k(d_n)} E^* \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} Z_{j,b(d_n)}^* \mathbf{1}_{|Z_{j,b(d_n)}^*| \leq \sqrt{d_n}\nu} \right) - \sum_{j=1}^{k(d_n)} \frac{1}{\sqrt{d_n}} E^*(Z_{j,b(d_n)}^*) \xrightarrow{p.n.} 0,$$

oraz

$$\sum_{j=1}^{k(d_n)} Var^* \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} Z_{j,b(d_n)}^* \mathbf{1}_{|Z_{j,b(d_n)}^*| \leq \sqrt{d_n}\nu} \right) \xrightarrow{p.n.} \sigma^2.$$

Korzystając teraz z Twierdzenia 2.4 wnioskujemy, że

$$d\left(\mathcal{L}^* \left(\sqrt{d_n}(\bar{X}_{d_n}^* - E^*\bar{X}_{d_n}^*) \right), \mathcal{N}(0, \sigma^2)\right) \xrightarrow{p.n.} 0,$$

co oznacza, że (3.11) zachodzi.

Aby udowodnić (3.8) zauważmy, że ponieważ rozkład zmiennych losowych $Z_{j,b}^*$ jest dyskretnym rozkładem jednostajnym, to:

$$\sum_{j=1}^k P^* \left(\frac{1}{\sqrt{n}} |Z_{j,b}^*| > \nu \right) = \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} k \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| > \sqrt{n}\nu}.$$

Oznaczmy przez

$$U_{n,t} = k \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| > \sqrt{n}\nu}$$

i rozważmy tablicę $\{U_{n,t} : t = 1, \dots, n-b+1\}$. Korzystając z Lematu 3.2 oraz Lematu 2.8 z funkcją $f(x) = k \mathbf{1}_{|x| > c}$ otrzymujemy, że ta tablica jest wierszowo SP. Aby pokazać, że spełnia ona założenia Lematu 2.7, zdefiniujmy drugą tablicę $\{V_{n,t} : t = 1, \dots, n-b+1\}$ jako

$$V_{n,t} = \frac{1}{b} Z_{t,b}^2.$$

Łatwo widać, że dla każdego ustalonego $t = 1, \dots, T$

$$\frac{1}{\sqrt{b}} Z_{t,b} = \frac{Z_{1,b+t-1}}{\sqrt{b+t-1}} \frac{\sqrt{b+t-1}}{\sqrt{b}} - \frac{Z_{1,t-1}}{\sqrt{b}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

oraz

$$E\left(\frac{1}{b}Z_{t,b}^2\right) = Var\left(\frac{1}{\sqrt{b}}Z_{t,b}\right) + E^2\left(\frac{1}{\sqrt{b}}Z_{t,b}\right).$$

Zbieżność $E^2((1/\sqrt{b})Z_{t,b}) \rightarrow 0$ wynika z Lematu 1.1 - przypomnijmy tylko, że $\mu = 0$. Zbieżność $Var((1/\sqrt{b})Z_{t,b})$ do σ^2 wynika natomiast z Lematu 2.10. Dlatego ciągi

$$\{V_{n,1}\}_{n=n_1}^\infty, \dots, \{V_{n,T}\}_{n=n_T}^\infty$$

są jednostajnie całkowlane. Zauważmy teraz, że ponieważ $Z_{t,b}^2 > n\nu^2$ dla $U_{n,t} \neq 0$, otrzymujemy następujące oszacowanie

$$0 \leq |U_{n,t}| = k\mathbf{1}_{|Z_{t,b}| > \sqrt{n}\nu} \leq \frac{Z_{t,b}^2}{\nu^2 b} \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| > \sqrt{n}\nu} \leq \frac{1}{\nu^2} |V_{n,t}|,$$

z którego wynika, że ciągi

$$\{U_{n,1}\}_{n=n_1}^\infty, \dots, \{U_{n,T}\}_{n=n_T}^\infty$$

są także jednostajnie całkowlane. Korzystając następnie z jednostajnej całkowlaności ciągu $\{V_{n,t}\}$ i oszacowania

$$0 \leq E|U_{n,t}| = E\left(k\mathbf{1}_{|Z_{t,b}| > \sqrt{n}\nu}\right) \leq E\left(\frac{Z_{t,b}^2}{\nu^2 b} \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| > \sqrt{n}\nu}\right) = \frac{1}{\nu^2} E|V_{n,t}| \mathbf{1}_{|V_{n,t}| > k\nu^2}$$

otrzymujemy, że $EU_{n,t} \rightarrow 0$ dla $n \rightarrow \infty$ i ustalonego $t = 1, \dots, T$. W ten sposób pokazaliśmy, że dla tablicy $\{U_{n,t}\}$ spełnione jest założenie (ii) Lematu 2.7. Wykorzystując własność α -mieszania szeregu czasowego $\{X_t\}$ pokażemy teraz, że zachodzi również założenie (iii). Zauważmy, że tablica $\{U_{n,t}\}$ jest wierszowo α -mieszająca ze współczynnikami $\alpha_{U_n}(\tau) = \alpha_X(\max\{\tau - b + 1, 0\})$, gdzie α_X jest funkcją mieszania szeregu $\{X_t\}$. Z Lematu 2.2 mamy oszacowanie

$$\left|Cov(U_{n,t}\mathbf{1}_{|U_{n,t}| < A}, U_{n,t+\tau}\mathbf{1}_{|U_{n,t+\tau}| < A})\right| \leq 4A^2\alpha_{U_n}(\tau),$$

a ponieważ

$$\frac{1}{n-b+1} \sum_{\tau=0}^{n-b} \alpha_{U_n}(\tau) \leq \frac{b}{n-b+1} + \frac{1}{n-b+1} \sum_{\tau=0}^{n-b} \alpha_X(\tau) \rightarrow 0 \text{ dla } n \rightarrow \infty,$$

założenie (iii) Lematu 2.7 jest spełnione ze współczynnikami $a_{n,\tau} = 4\alpha_{U_n}(\tau)$.

Aby udowodnić (3.9) zauważmy, że

$$\sum_{j=1}^k E^*\left(\frac{1}{\sqrt{n}}Z_{j,b}^* \mathbf{1}_{|Z_{j,b}^*| \leq \sqrt{n}\nu}\right) - \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} E^*(Z_{j,b}^*) = \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} k \frac{1}{\sqrt{n}} Z_{t,b} \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| > \sqrt{n}\nu}.$$

Oznaczmy

$$U'_{n,t} = k \frac{1}{\sqrt{n}} Z_{t,b} \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| > \sqrt{n}\nu}$$

i rozważmy tablicę $\{U'_{n,t} : t = 1, \dots, n - b + 1\}$. Z Lematu 3.2 oraz Lematu 2.8 z funkcją $f(x) = (k/\sqrt{n})x\mathbf{1}_{|x|>C}$, otrzymujemy, że jest ona wierszowo SP. Ponadto, ponieważ $Z_{t,b}^2 > n\nu^2$ dla $U'_{t,b} \neq 0$,

$$0 \leq |U'_{n,t}| = k \frac{1}{\sqrt{n}} |Z_{t,b}| \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| > \sqrt{n}\nu} \leq k \frac{1}{n\nu} Z_{t,b}^2 = \frac{1}{\nu} \frac{Z_{t,b}^2}{b} = \frac{1}{\nu} V_{n,t},$$

czyli ciągi

$$\{U'_{n,1}\}_{n=n_1}^\infty, \dots, \{U'_{n,T}\}_{n=n_T}^\infty$$

są jednostajnie całkowlalne. Ponieważ zachodzi oszacowanie

$$0 \leq E|U'_{n,t}| = E \left(k \frac{1}{\sqrt{n}} |Z_{t,b}| \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| > \sqrt{n}\nu} \right) \leq \frac{1}{\nu} E \left(|V_{n,t}| \mathbf{1}_{|V_{n,t}| > k\nu^2} \right),$$

mamy, że $EU'_{n,t} \rightarrow 0$ dla $n \rightarrow \infty$ i ustalonego $t = 1, \dots, T$. Stosując te same kroki jak w ostatniej części dowodu zbieżności (3.8), wnioskujemy, że można zastosować Lemat 2.7 do tablicy $\{U'_{n,t}\}$ i otrzymujemy zbieżność (3.9).

Aby udowodnić (3.10) zauważmy, że

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^k \text{Var}^* \left(\frac{1}{\sqrt{n}} Z_{j,b}^* \mathbf{1}_{|Z_{j,b}^*| \leq \sqrt{n}\nu} \right) \\ &= \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \frac{1}{b} Z_{t,b}^2 \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| \leq \sqrt{n}\nu} - \left(\frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \frac{1}{\sqrt{b}} Z_{t,b} \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| \leq \sqrt{n}\nu} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dla pierwszego składnika mamy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \frac{1}{b} Z_{t,b}^2 \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| \leq \sqrt{n}\nu} \\ &= \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \frac{1}{b} Z_{t,b}^2 - \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \frac{1}{b} Z_{t,b}^2 \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| > \sqrt{n}\nu} \\ &= \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} V_{n,t} - \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} V'_{n,t}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\{V'_{n,t} : t = 1, \dots, n - b + 1\} = \left\{ \frac{1}{b} Z_{t,b}^2 \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| > \sqrt{n}\nu} : t = 1, \dots, n - b + 1 \right\}.$$

Zauważmy, że z jednostajnej całkowlności ciągów

$$\{V_{n,1}\}_{n=n_1}^\infty, \dots, \{V_{n,T}\}_{n=n_T}^\infty,$$

zbieżności $EV_{n,t} \rightarrow \sigma^2$ dla każdego ustalonego $t = 1, \dots, T$, oraz równości

$$V'_{n,t} = V_{n,t} \mathbf{1}_{|V_{n,t}| > k\nu^2},$$

otrzymujemy także zbieżność $EV'_{n,t} \rightarrow 0$ dla $n \rightarrow \infty$ i każdego ustalonego t . Na podstawie Lematu 2.7 zastosowanego do tablic $\{V_{n,t}\}$ oraz $\{V'_{n,t}\}$ możemy stwierdzić,

że pierwszy składnik prawej strony równania (3.12) dąży wg. prawdopodobieństwa do σ^2 . Dla drugiego składnika mamy natomiast

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \frac{1}{\sqrt{b}} Z_{t,b} \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| \leq \sqrt{nb}} \\ &= \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \frac{1}{\sqrt{b}} Z_{t,b} - \frac{1}{n-b+1} \sum_{j=1}^{n-b+1} \frac{1}{\sqrt{b}} Z_{t,b} \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| > \sqrt{nb}}. \end{aligned}$$

Rozważmy teraz tablice

$$\{T_{n,t} : t = 1, \dots, n-b+1\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{b}} Z_{t,b} : t = 1, \dots, n-b+1 \right\}$$

oraz

$$\{T'_{n,t} : t = 1, \dots, n-b+1\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{b}} Z_{t,b} \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| > \sqrt{nb}} : t = 1, \dots, n-b+1 \right\}.$$

Ponieważ przyjęliśmy, że $\mu = 0$, korzystając z Lematu 1.1 mamy

$$E(T_{n,t}) = \frac{1}{\sqrt{b}} (X_t + \dots + X_{t+b-1}) = O\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right) \rightarrow 0 \text{ dla } n \rightarrow \infty.$$

Z nierówności Cauchy-Schwartza otrzymujemy, że ciągi

$$\begin{aligned} & \{T_{n,1}\}_{n=n_1}^{\infty}, \dots, \{T_{n,T}\}_{n=n_T}^{\infty}, \\ & \{T'_{n,1}\}_{n=n_1}^{\infty}, \dots, \{T'_{n,T}\}_{n=n_T}^{\infty}, \end{aligned}$$

są także jednostajnie całkowalne. Stosując Lemat 2.7 mamy, że

$$\frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \frac{1}{\sqrt{b}} Z_{t,b} \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| \leq \sqrt{nb}} \xrightarrow{P} 0.$$

Uwaga ta kończy dowód zbieżności (3.10). ■

Powyższe twierdzenie jest uogólnieniem Twierdzenia 2 z pracy Radulović (1996) z przypadku ściśle stacjonarnych na ściśle okresowe szeregi czasowe. Zakładamy okresową strukturę wszystkich łącznych rozkładów, ale nie wymagamy żadnego konkretnego tempa zbieżności funkcji α -mieszającej. W tym kontekście założenia te można określić jako minimalne.

Wniosek 3.3. *Niech $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie α -mieszającym szeregiem czasowym, który jest ściśle okresowy z okresem T . Niech X_t^* będą obserwacjami generowanymi za pomocą procedury MBB przy użyciu bloków o długości $b \rightarrow \infty$, ale $b = o(n)$. Załóżmy, że dla pewnego $\delta > 0$*

(i) $E|X_t|^{2+\delta} < \infty$ dla $t = 1, \dots, T$,

(ii) $\sum_{\tau=1}^{\infty} \alpha_X^{\frac{\delta}{2+\delta}}(\tau) < \infty$.

Wtedy zachodzi centralne twierdzenie graniczne (3.7) oraz procedura MBB jest zgodna w sensie Twierdzenia 3.2.

Dowód. CTG jest zagwarantowane w tym przypadku dzięki Twierdzeniu 2.1. Korzystając z okresowości mamy

$$\sup_{t \in \mathbb{Z}} E|X_t|^{2+\delta} < \infty,$$

a korzystając z Lematu 2.2

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} |\text{Cov}(X_t, X_{t+\tau})| \leq 8 \left(\sup_t E|X_t|^{2+\delta} \right)^{\frac{2}{2+\delta}} \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha_X^{\frac{\delta}{2+\delta}}(\tau) < \infty.$$

Teza wynika zatem z Twierdzenia 3.2. ■

Następnym krokiem będzie sformułowanie ogólnego twierdzenia dotyczącego zgodności bootstrapu bloków ruchomych dla niestacjonarnych szeregów czasowych z prawie okresową funkcją wartości oczekiwanej.

Twierdzenie 3.3. *Niech szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie APC i α -mieszający. Niech X_t^* będą obserwacjami generowanymi za pomocą procedury MBB przy użyciu bloków o długości $b \rightarrow \infty$, ale $b = o(n)$. Załóżmy, że*

- (i) *zbiór istotnych częstotliwości $\Gamma = \{\gamma \in [0, 2\pi) : M_t(EX_t e^{-i\gamma t}) \neq 0\}$ jest skończony,*
- (ii) *funkcja autokowariancji jest jednostajnie sumowalna, czyli istnieje sumowalny ciąg $\{c_\tau\}_{\tau=0}^{\infty}$ taki, że $|\text{Cov}(X_t, X_{t+\tau})| < c_\tau$,*
- (iii) *istnieje $\zeta > 0$ taka, że*

$$\sup_{t=1, \dots, n-b+1} E \left| \frac{1}{\sqrt{b}} \sum_{j=t}^{t+b-1} (X_j - EX_j) \right|^{2+\zeta} \leq K, \quad (3.13)$$

gdzie stała K nie zależy od b i n .

- (iv) *zachodzi centralne twierdzenie graniczne*

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad (3.14)$$

gdzie $\mu = M_t(EX_t)$.

Wtedy procedura MBB jest zgodna, czyli

$$\text{Var}^* \left(\sqrt{n} \bar{X}_n^* \right) \xrightarrow{P} \sigma^2$$

oraz

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P \left(\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu) < x \right) - P^* \left(\sqrt{n} (\bar{X}_n^* - E^* \bar{X}_n^*) < x \right) \right| \xrightarrow{P} 0.$$

Dowód. Stosując te same kroki, co w dowodzie Twierdzenia 3.2, wystarczy pokazać następujące słabe prawa wielkich liczb:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} U_{n,t} &\xrightarrow{P} 0, \\ \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} U'_{n,t} &\xrightarrow{P} 0, \\ \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} V_{n,t} &\xrightarrow{P} \sigma^2 + \mu^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} V'_{n,t} &\xrightarrow{P} 0, \\ \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} T_{n,t} &\xrightarrow{P} \mu, \\ \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} T'_{n,t} &\xrightarrow{P} 0,\end{aligned}$$

gdzie wszystkie tablice są takie, jak w dowodzie Twierdzenia 3.2. Będziemy stosować Lemat 2.9. Zauważmy, że każda z tych tablic jest wierszowo α -mieszająca przy czym

$$\alpha_n(\tau) \leq \alpha_X(\max\{\tau - b + 1, 0\}),$$

dlatego założenie (ii) Lematu 2.9 jest spełnione. Wystarczy zatem pokazać ograniczoność i zbieżność momentów. Będziemy korzystać z nierówności Czebyszewa i Höldera otrzymując oszacowania jednostajne ze względu na n i t . Dla tablicy $\{U_{n,t}\}$ mamy

$$\begin{aligned}E|U_{n,t}|^{1+\frac{\zeta}{4}} &= E\left(k^{1+\frac{\zeta}{4}} \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| > \nu\sqrt{n}}\right) \\ &= k^{1+\frac{\zeta}{4}} P(|Z_{t,b}| > \nu\sqrt{n}) \\ &\leq \frac{1}{k^{\frac{\zeta}{4}}} \frac{1}{\nu^{2+\zeta}} E\left|\frac{1}{\sqrt{b}} Z_{t,b}\right|^{2+\zeta} = o(1).\end{aligned}$$

Dla tablicy $\{U'_{n,t}\}$ mamy

$$\begin{aligned}E|U'_{n,t}|^{1+\frac{\zeta}{4}} &= k^{\frac{1}{2}+\frac{\zeta}{8}} E\left|\frac{1}{\sqrt{b}} Z_{t,b} \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| > \nu\sqrt{n}}\right|^{1+\frac{\zeta}{4}} \\ &\leq k^{\frac{1}{2}+\frac{\zeta}{8}} \left(E\left|\frac{1}{\sqrt{b}} Z_{t,b}\right|^{2+\zeta}\right)^{\frac{1+\frac{\zeta}{4}}{2+\zeta}} \left(P(|Z_{t,b}| > \nu\sqrt{n})\right)^{\frac{1+\frac{3\zeta}{4}}{2+\zeta}} \\ &\leq \frac{1}{k^{\frac{\zeta}{4}}} \frac{1}{\nu^{1+\frac{3\zeta}{4}}} E\left|\frac{1}{\sqrt{b}} Z_{t,b}\right|^{2+\zeta} = o(1).\end{aligned}$$

Dla tablicy $\{V_{n,t}\}$ mamy

$$E|V_{n,t}|^{1+\frac{\zeta}{2}} = E\left|\frac{1}{\sqrt{b}} Z_{t,b}\right|^{2+\zeta} = O(1).$$

Dla tablicy $\{V'_{n,t}\}$ mamy

$$\begin{aligned}E|V'_{n,t}|^{1+\frac{\zeta}{4}} &= E\left|\frac{1}{b} Z_{t,b}^2 \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| > \nu\sqrt{n}}\right|^{1+\frac{\zeta}{4}} \\ &\leq \left(E\left|\frac{1}{\sqrt{b}} Z_{t,b}\right|^{2+\zeta}\right)^{\frac{2+\frac{\zeta}{2}}{2+\zeta}} \left(P(|Z_{t,b}| > \nu\sqrt{n})\right)^{\frac{\frac{1}{2}\zeta}{2+\zeta}} \\ &= \frac{1}{k^{\frac{\zeta}{4}}} \frac{1}{\nu^{\frac{\zeta}{2}}} E\left|\frac{1}{\sqrt{b}} Z_{t,b}\right|^{2+\zeta} = o(1).\end{aligned}$$

Dla tablicy $\{T_{n,t}\}$ mamy

$$E|T_{n,t}|^{2+\zeta} = E \left| \frac{1}{\sqrt{b}} Z_{t,b} \right|^{2+\zeta} = O(1).$$

Dla tablicy $\{T'_{n,t}\}$ mamy

$$\begin{aligned} E|T'_{n,t}|^{1+\frac{\zeta}{4}} &= E \left| \frac{1}{\sqrt{b}} Z_{t,b} \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| > \nu\sqrt{n}} \right|^{1+\frac{\zeta}{4}} \\ &= \frac{1}{k^{\frac{1}{2}+\frac{\zeta}{8}}} E|U'_{n,t}| = o(1). \end{aligned}$$

Zatem dla wszystkich tablic założenie (i) Lematu 2.9 jest spełnione. Zauważmy, że powyższe oszacowania implikują następujące zbieżności

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} EU_{n,t} &\rightarrow 0, \\ \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} EU'_{n,t} &\rightarrow 0, \\ \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} EV'_{n,t} &\rightarrow 0, \\ \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} ET'_{n,t} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dla tablicy $\{T_{n,t}\}$ zachodzi

$$\frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} ET_{n,t} = \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \frac{1}{\sqrt{b}} EZ_{t,b} \rightarrow 0,$$

co wynika z Lematu 1.1. Natomiast dla tablicy $\{V_{n,t}\}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} EV_{n,t} &= \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \frac{1}{b} EZ_{t,b}^2 \\ &= \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \left(\text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{b}} (X_t + \dots + X_{t+b-1}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b} (EX_t + \dots + EX_{t+b-1})^2 \right) \rightarrow \sigma^2, \end{aligned}$$

co wynika z Lematów 1.1 i 2.10. ■

Założenia Twierdzenia 3.3 dotyczące ograniczoności momentów (założenie (iii)) oraz CTG (założenie (iv)) mogą być zagwarantowane poprzez odpowiednie tempo funkcji α -mieszania (warunki typu moment-mieszanie). Korzystając z Lematów 2.3, 2.4, 2.5 oraz Twierdzenia 2.1 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 3.4. Niech szereg $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie APC i α -mieszający dla którego zbiór istotnych częstotliwości $\Gamma = \{\gamma \in [0, 2\pi) : M_t(EX_t e^{-i\gamma t}) \neq 0\}$ jest skończony. Niech X_t^* będą obserwacjami generowanymi za pomocą procedury MBB przy użyciu bloków o długości $b \rightarrow \infty$, ale $b = o(n)$. Załóżmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\sqrt{n} \bar{X}_n) > 0$ oraz, że zachodzi jeden z trzech poniższych warunków:

$$(i') \sup_{t \in \mathbb{Z}} E|X_t|^{2+\zeta+\delta} < \infty \text{ oraz } \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau^2 \alpha_X^{\frac{\delta}{4+\delta}}(\tau) < \infty, \text{ gdzie } \zeta > 0 \text{ i } \delta > 0,$$

$$(i'') \sup_{t \in \mathbb{Z}} E|X_t|^{4+\delta} < \infty \text{ oraz } \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau \alpha_X^{\frac{\delta}{4+\delta}}(\tau) < \infty, \text{ gdzie } \delta > 0,$$

$$(i''') \sup_{t \in \mathbb{Z}} |X_t| < \infty \text{ prawie na pewno oraz } \alpha_X(\tau) = O(\tau^{-2}).$$

Wtedy procedura MBB jest zgodna w sensie Twierdzenia 3.3.

Powyższy wniosek jest także ulepszeniem istniejących w literaturze twierdzeń dotyczących przypadku stałej funkcji wartości oczekiwanej. Zakładając (i') oraz dowolną strukturę niestacjonarną taką, że

$$\sup_{t=1, \dots, n-b+1} \text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{b}} \sum_{j=t}^{t+b-1} X_j \right) \rightarrow \sigma^2,$$

otrzymujemy zgodność MBB przy założeniu jednostajnej ograniczoności momentów rzędu wyższego niż dwa. Dotychczasowe rezultaty dla takiego przypadku wymagają założenia ograniczoności momentów rzędu przynajmniej wyższego niż cztery (Lahiri, 1992; Fitzenberger, 1997; Politis i in., 1999; Gonçalves i White, 2002). Przy założeniu (ii') Wniosek 3.4 polepsza natomiast tempo zbieżności α -mieszania w Twierdzeniu 4.4.2, Politis i in. (1999).

3.4. Zgodności MBB dla przypadku wielowymiarowego i gładkich funkcji średniej

Zgodność MBB można łatwo przenieść na wektorowy szereg czasowy oraz parametry wielowymiarowe, o ile przypadek jednowymiarowy jest już zbadany. Niech $\{\mathbf{X}_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie takim szeregiem, tzn. $\mathbf{X}_t = (X_{1,t}, \dots, X_{r,t})$, gdzie $\{X_{j,t} : t \in \mathbb{Z}\}$ są jednowymiarowymi szeregami czasowymi. Jeśli dostępne są obserwacje $(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$, to próbka bootstrapowa powstaje poprzez próbkowanie z odpowiednich bloków złożonych z tych wektorów. Nierówności typu $x < y$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}^p$, będziemy traktować zawsze jako nierówności po współrzędnych.

Twierdzenie 3.4. Niech $\{\mathbf{X}_t : t \in \mathbb{Z}\}$, gdzie $\mathbf{X}_t \in \mathbb{R}^r$, będzie α -mieszającym wektorowym szeregiem czasowym. Niech każda składowa $\{X_{j,t} : t \in \mathbb{Z}\}$ spełnia wszystkie założenia Twierdzenia 3.3. Załóżmy też, że dowolne dwie składowe $\{X_{j_1,t} : t \in \mathbb{Z}\}$, $\{X_{j_2,t} : t \in \mathbb{Z}\}$, gdzie $j_1, j_2 = 1, \dots, r$, są JAPC i spełniają założenia Lematu 2.11, oraz, że zachodzi wielowymiarowe CTG, czyli

$$\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_r(0, \Sigma).$$

Niech \mathbf{X}_t^* będą obserwacjami generowanymi za pomocą procedury MBB przy użyciu bloków o długości b , gdzie $b \rightarrow \infty$, ale $b = o(n)$. Wtedy procedura MBB jest zgodna, czyli

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^r} \left| P^* \left(\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n^* - E^* \bar{\mathbf{X}}_n^*) < x \right) - P \left(\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) < x \right) \right| \xrightarrow{P} 0.$$

Dowód. Idea dowodu polega na zastosowaniu warunkowego twierdzenia Craméra-Wolda i wykorzystaniu zgodności jednowymiarowej. Będziemy potrzebować następującego rezultatu, który jest rozszerzeniem twierdzenia Lévy'ego-Craméra o ciągłości.

Lemat 3.3 (Twierdzenie A, Athreya, 1987). *Niech $\{H_n(x, \omega)\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem losowych dystrybuant związanych z przestrzenią probabilistyczną (Ω, \mathcal{F}, P) . Oznacza to, że dla każdego zdarzenia $\omega \in \Omega$, $H_n(x, \omega)$ jest dystrybuantą na \mathbb{R}^r . Załóżmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $x \in \mathbb{R}^r$ $H_n(x, \cdot)$ jest odwzorowaniem mierzalnym z przestrzeni (Ω, \mathcal{F}) na przestrzeń $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$. Niech $\phi_n(t, \omega) = \int e^{it^{\text{TR}}x} H_n(dx, \omega)$ będzie funkcją charakterystyczną H_n . Wtedy następujące dwa warunki są równoważne*

(i) dla każdego $x \in \mathbb{R}^r$

$$H_n(x, \omega) \xrightarrow{d} H_0(x, \omega),$$

(ii) dla każdego $t \in \mathbb{R}^r$

$$\phi_n(t, \omega) \xrightarrow{d} \phi_0(t, \omega).$$

Rolę ciągu H_n w naszym przypadku pełnił będzie rozkład bootstrapowy, a rolę dystrybuanty granicznej (nielosowej) rozkład normalny. Zauważmy, że ponieważ

$$H_n(x, \cdot) = P^*(\sqrt{n}(\bar{X}_n^* - E^*\bar{X}_n^*) \leq x) = E^*\mathbf{1}_{\sqrt{n}(\bar{X}_n^* - E^*\bar{X}_n^*) \leq x},$$

odwzorowanie $H_n(x, \cdot)$ jest zawsze mierzalne względem σ -ciała generowanego przez obserwacje (X_1, \dots, X_n) . Uwaga ta dotyczy zarówno bootstrapu jednowymiarowego jak i wielowymiarowego. Przypomnijmy także, że zbieżność według rozkładu do stałej jest zbieżnością według prawdopodobieństwa.

Najpierw pokażemy punktową zbieżność wg. prawdopodobieństwa funkcji charakterystycznej wielowymiarowego rozkładu bootstrapowego. W tym celu zauważmy, że dla każdego wektora $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^r$

$$\phi_{\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n^* - E^*\bar{\mathbf{X}}_n^*)}(\mathbf{c}) = \phi_{\sqrt{n} \mathbf{c}^{\text{TR}}(\bar{\mathbf{X}}_n^* - E^*\bar{\mathbf{X}}_n^*)}(1).$$

Szereg $\{Y_t : t \in \mathbb{Z}\} = \{\mathbf{c}^{\text{TR}}\mathbf{X}_t : t \in \mathbb{Z}\}$ jest szeregiem APC spełniającym wszystkie założenia Twierdzenia 3.3. Zatem dla tego szeregu MBB jest zgodne i ponadto

$$\text{Var}(\sqrt{n} \bar{Y}_n) \rightarrow \mathbf{c}^{\text{TR}} \Sigma \mathbf{c}$$

oraz

$$\sqrt{n}(\bar{Y}_n^* - E^*\bar{Y}_n^*) = \sqrt{n} \mathbf{c}^{\text{TR}}(\bar{\mathbf{X}}_n^* - E^*\bar{\mathbf{X}}_n^*).$$

Korzystając ze zgodności bootstrapu dla szeregu $\{Y_t\}$ i Lematu 3.3 mamy, że

$$\phi_{\sqrt{n} \mathbf{c}^{\text{TR}}(\bar{\mathbf{X}}_n^* - E^*\bar{\mathbf{X}}_n^*)}(1) \xrightarrow{P} \phi_{\mathcal{N}(0, \mathbf{c}^{\text{TR}} \Sigma \mathbf{c})}(1) = \phi_{\mathcal{N}(0, \Sigma)}(\mathbf{c}).$$

Korzystając jeszcze raz z Lematem 3.3 otrzymujemy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

$$P^*(\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n^* - E^*\bar{\mathbf{X}}_n^*) < x) \xrightarrow{P} F_{\mathcal{N}(0, \Sigma)}(x),$$

gdzie $F_{\mathcal{N}(0, \Sigma)}$ jest dystrybuantą rozkładu $\mathcal{N}(0, \Sigma)$. Zbieżność jednostajną otrzymujemy z twierdzenia Polya zastosowanego w identyczny sposób jak w dowodzie punktu (ii)

Twierdzenia 3.2.1 w monografii Politis i in. (1999). Ostatnim kokiem jest zapisanie nierówności trójkąta

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}^r} \left| P^* \left(\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n^* - E^* \bar{\mathbf{X}}_n^*) < x \right) - P \left(\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n - \mu) < x \right) \right| \\ & \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^r} \left| P^* \left(\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n^* - E^* \bar{\mathbf{X}}_n^*) < x \right) - F_{\mathcal{N}(0, \Sigma)}(x) \right| \\ & \quad + \sup_{x \in \mathbb{R}^r} \left| P \left(\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n - \mu) < x \right) - F_{\mathcal{N}(0, \Sigma)}(x) \right|, \end{aligned}$$

która implikuje tezę. ■

Stosunkowo szeroką klasę parametrów stanowią parametry będą gładkimi funkcjami średniej. W kontekście szeregów czasowych prawie okresowych mają one postać $\theta = H(M_t(EX_t))$. Jako naturalny estymator parametru θ można przyjąć $\hat{\theta}_n = H(\bar{X}_n)$. Jeżeli funkcja H jest odpowiednio gładka, to metoda delta podaje postać asymptotycznego rozkładu wielkości $\sqrt{n}(H(\bar{X}_n) - H(M_t(EX_t)))$. Rozkład ten można przybliżać za pomocą MBB w sytuacji opisanej przez poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.5. *Niech $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie APC szeregiem czasowym spełniającym założenia Twierdzenia 3.3. Dla pewnego odwzorowania $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ założymy, że*

(i) *H jest różniczkowalne w zbiorze*

$$N_H = \{x \in \mathbb{R} : |x - \mu| < 2\eta\},$$

gdzie $\mu = M_t(EX_t)$ oraz $\eta > 0$,

(ii) *$H'(\mu) \neq 0$,*

(iii) *H spełnia warunek Lipschitza rzędu $\kappa > 0$ na N_H , tzn. istnieje stała rzeczywista C , że dla każdych $x, y \in N_H$*

$$|H(x) - H(y)| \leq C|x - y|^\kappa.$$

Wtedy procedura MBB z blokiem o długości $b \rightarrow \infty$, ale $b = o(n/\ln n)$, jest zgodna, czyli

$$\sup_x \left| P^* \left(\sqrt{n}(H(\bar{X}_n^*) - H(E^* \bar{X}_n^*)) \leq x \right) - P \left(\sqrt{n}(H(\bar{X}_n) - H(\mu)) \leq x \right) \right| \xrightarrow{P} 0.$$

Dowód. Z niewielkimi modyfikacjami dowód opiera się na dowodzie Twierdzenia 4.1, Lahiri (2003). Rozważmy następującą dekompozycję

$$\sqrt{n} \left(H(\bar{X}_n^*) - H(E^* \bar{X}_n^*) \right) = \sqrt{n} H'(\mu)(\bar{X}_n^* - E^* \bar{X}_n^*) + R_n^*.$$

Reszta R_n^* jest definiowana poprzez powyższe równanie. Korzystając z warunkowego lematu Słuckiego (Lemat 4.1, Lahiri, 2003, str. 77) wystarczy pokazać, że dla dowolnego $\epsilon > 0$

$$P^* (|R_n^*| > \epsilon) \xrightarrow{P} 0.$$

Oznaczmy $t_n = |E^* \bar{X}_n^* - \mu|$. Wielkość ta jest nielosowa względem P^* . Zauważmy, że na zbiorze $\{t_n < \eta\} \cap \{|\bar{X}_n^* - E^* \bar{X}_n^*| < \eta\}$ zachodzi następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} |R_n^*| &= \left| \sqrt{n} \left(H(\bar{X}_n^*) - H(E^* \bar{X}_n^*) \right) - \sqrt{n} H'(\mu) (\bar{X}_n^* - E^* \bar{X}_n^*) \right| \\ &= \sqrt{n} \left| H' \left(\xi \bar{X}_n^* + (1 - \xi) E^* \bar{X}_n^* \right) (\bar{X}_n^* - E^* \bar{X}_n^*) - H'(\mu) (\bar{X}_n^* - E^* \bar{X}_n^*) \right| \\ &= |T_n^*| \cdot \left| H' \left(\xi \bar{X}_n^* + (1 - \xi) E^* \bar{X}_n^* \right) - H'(\mu) \right| \\ &\leq C |\xi \bar{X}_n^* + (1 - \xi) E^* \bar{X}_n^* - \mu|^\kappa |T_n^*| \\ &= C |\xi (\bar{X}_n^* - E^* \bar{X}_n^*) + (E^* \bar{X}_n^* - \mu)|^\kappa |T_n^*| \\ &\leq 2^{\max\{1, \kappa - 1\}} C \left(|\bar{X}_n^* - E^* \bar{X}_n^*|^\kappa + t_n^\kappa \right) |T_n^*|. \end{aligned}$$

W powyższym oszacowaniu ξ jest pewną liczbą z przedziału $[0, 1]$ i jej istnienie wynika z twierdzenia Lagrange'a, natomiast $T_n^* = \sqrt{n} (\bar{X}_n^* - E^* \bar{X}_n^*)$. Aby oszacować z góry wielkość $P^*(|R_n^*| > \epsilon)$ zauważmy, że

$$\begin{aligned} \{|R_n^*| > \epsilon\} &= \{|R_n^*| > \epsilon, t_n \leq \eta\} \cup \{|R_n^*| > \epsilon, t_n > \eta\} \\ &\subset \{|R_n^*| > \epsilon, |\bar{X}_n^* - E^* \bar{X}_n^*| \leq \eta, t_n \leq \eta\} \\ &\quad \cup \{|R_n^*| > \epsilon, |\bar{X}_n^* - E^* \bar{X}_n^*| > \eta, t_n \leq \eta\} \cup \{|R_n^*| > \epsilon, t_n > \eta\} \\ &\subset \{|R_n^*| > \epsilon, |\bar{X}_n^* - E^* \bar{X}_n^*| \leq \eta, t_n \leq \eta\} \cup \{|\bar{X}_n^* - E^* \bar{X}_n^*| > \eta\} \cup \{t_n > \eta\}. \end{aligned}$$

Ponieważ wielkość t_n jest nielosowa względem rozkładu P^* , korzystając z powyższej inkluzji mamy oszacowanie

$$\begin{aligned} P^*(|R_n^*| > \epsilon) &\leq P^* \left(|R_n^*| > \epsilon, |\bar{X}_n^* - E^* \bar{X}_n^*| \leq \eta \right) \mathbf{1}_{t_n \leq \eta} \\ &\quad + \mathbf{1}_{t_n > \eta} + P^* \left(|\bar{X}_n^* - E^* \bar{X}_n^*| > \eta \right) \\ &\leq P^* \left(C' (|\bar{X}_n^* - E^* \bar{X}_n^*|^\kappa + t_n^\kappa) |T_n^*| > \epsilon \right) \\ &\quad + \mathbf{1}_{t_n > \eta} + P^* \left(|\bar{X}_n^* - E^* \bar{X}_n^*| > \eta \right) \\ &\leq P^* \left(C' n^{-\frac{\kappa}{2}} |T_n^*|^{1+\kappa} > \frac{\epsilon}{2} \right) + P^* \left(C' t_n^\kappa |T_n^*| > \frac{\epsilon}{2} \right) \\ &\quad + \mathbf{1}_{t_n > \eta} + P^* \left(n^{-\frac{1}{2}} |T_n^*| > \eta \right). \end{aligned}$$

Korzystając teraz z relacji

$$\left\{ C' t_n^\kappa |T_n^*| > \frac{\epsilon}{2} \right\} \subset \left\{ t_n^\kappa > \frac{\eta}{\ln n} \right\} \cup \left\{ |T_n^*| > \frac{\epsilon}{2C'\eta} \ln n \right\},$$

oraz z faktu, że dla dużych argumentów funkcja logarytmiczna rośnie wolniej niż potęgowa, możemy ostatecznie napisać, że

$$P^*(|R_n^*| > \epsilon) \leq 3P^* \left(|T_n^*| > C(\epsilon, \kappa, \eta) \ln n \right) + 2 \cdot \mathbf{1}_{t_n > \frac{\eta}{\ln n}}.$$

Ze zgodności bootstrapu pierwszy składnik prawej strony powyższej nierówności jest rzędu $o_P(1)$. Aby zbadać zbieżność wielkości $\mathbf{1}_{t_n > \frac{\eta}{\ln n}}$ zauważmy, że

$$E \left(\mathbf{1}_{t_n > \frac{\eta}{\ln n}} \right) \leq P \left(t_n > \frac{\eta}{\ln n} \right) \leq \frac{\ln^2 n}{\eta^2} E t_n^2.$$

oraz

$$Et_n^2 \leq 2E|\bar{X}_n^* - \bar{X}_n|^2 + 2E|\bar{X}_n - \mu|^2. \quad (3.15)$$

Z założenia o jednostajnej ograniczoności momentów rzędu $2 + \zeta$ otrzymujemy, że $E|\bar{X}_n - \mu|^2 = O(1/n)$. Pierwszy składnik prawej strony nierówności (3.15) oszacujemy następująco

$$\begin{aligned} E|\bar{X}_n^* - \bar{X}_n|^2 &\leq E \left(\left| \frac{n}{n-b+1} - 1 \right| \bar{X}_n + \frac{1}{b(n-b+1)} \left| \sum_{t=1}^{b-1} (b-t)(X_t + X_{n-t+1}) \right| \right)^2 \\ &\leq O\left(\frac{b^2}{n^2}\right) E\bar{X}_n^2 + \frac{4}{b^2(n-b+1)^2} \left(E \left(\sum_{t=1}^{b-1} (b-t) X_t \right)^2 + E \left(\sum_{t=1}^{b-1} (b-t) X_{n-t+1} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Łatwo widać, że $E\bar{X}_n^2 = O(1)$. Dla pozostałych składników mamy oszacowanie wynikające z ograniczoności momentów

$$E \left(\sum_{t=1}^{b-1} (b-t) X_t \right)^2 = E \left(\sum_{t=1}^{b-1} (b-t) X_{n-t+1} \right)^2 = O(b^4).$$

Z powyższych rozważań otrzymujemy, że $Et_n^2 = O(1/n) + O(b^2/n^2)$, a zatem

$$\mathbf{1}_{t_n > \frac{n}{\ln n}} = o_P(1).$$

■

Powyższe twierdzenie może być także zapisane łatwo w wersji wielowymiarowej dla odpowiednio gładkiej funkcji $H : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$. W dowodzie należy zamienić odpowiednio moduły na normy.

Pokażemy teraz, że otrzymane rezultaty zgodności MBB dla średniej próbkowej mogą zostać łatwo przeniesione na współczynniki Fouriera. W pierwszej kolejności rozważmy szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$, dla którego $EX_t \equiv 0$. Zdefiniujemy wektorowy szereg czasowy $\{W_t(\lambda, \tau) : t \in \mathbb{Z}\}$ jako

$$W_t(\lambda, \tau) = X_t X_{t+\tau} e^{-i\lambda t}.$$

Funkcja wartości oczekiwanej tego szeregu jest funkcją prawie okresową. Łatwo widać, że

$$M_t(EW_t(\lambda, \tau)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E(X_{t+\tau} X_t e^{-i\lambda t}) = a(\lambda, \tau)$$

oraz

$$\bar{W}_{n-\tau}(\lambda, \tau) = \frac{1}{n-\tau} \sum_{t=1}^{n-\tau} W_t = \hat{a}_n(\lambda, \tau).$$

Dlatego możemy użyć procedury MBB, aby estymować $M_t(EW_t(\lambda, \tau))$ czyli $a(\lambda, \tau)$. Niech $(W_1^*(\lambda, \tau), \dots, W_{n-\tau}^*(\lambda, \tau))$ będzie próbką MBB otrzymaną z obserwacji

$$(W_1(\lambda, \tau), \dots, W_{n-\tau}(\lambda, \tau)) = (X_1 X_{1+\tau} e^{-i\lambda}, \dots, X_{n-\tau} X_n e^{-i\lambda(n-\tau)}).$$

Wersję MBB estymatora $\hat{a}_n(\lambda, \tau)$ definiujemy jako

$$\hat{a}_n^*(\lambda, \tau) = \overline{W}_{n-\tau}^*(\lambda, \tau) = \frac{1}{n-\tau} \sum_{t=1}^{n-\tau} W_t^*(\lambda, \tau).$$

Poniższy wniosek dotyczy zgodności estymatora $\hat{a}_n^*(\lambda, \tau)$.

Wniosek 3.5. Niech szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie APC i WAP(4). Załóżmy, że $EX_t \equiv 0$ oraz dla pewnego $\delta > 0$ spełnione są następujące warunki

- (i) zbiór istotnych częstotliwości $\Lambda_\tau = \{\lambda \in [0, 2\pi) : M_t(B(t, \tau)e^{-i\lambda t}) \neq 0\}$ jest skończony,
- (ii) $\sup_{t \in \mathbb{Z}} E|X_t|^{8+2\delta} < \infty$,
- (iii) $\sum_{\tau=1}^{\infty} \tau \alpha_X^{\frac{\delta}{4+\delta}}(\tau) < \infty$,
- (iv) $\det(\Sigma) \neq 0$, gdzie

$$\Sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left(\sqrt{n} \hat{a}_n(\lambda, \tau) \right).$$

Wtedy procedura MBB z blokiem o długości $b \rightarrow \infty$, ale $b = o(n)$, dla estymatora $\hat{a}_n(\lambda, \tau)$ jest zgodna, czyli

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \left| P^* \left(\sqrt{n}(\hat{a}_n^*(\lambda, \tau) - E^*(\hat{a}_n^*(\lambda, \tau))) < x \right) - P \left(\sqrt{n}(\hat{a}_n(\lambda, \tau) - a(\lambda, \tau)) < x \right) \right| \xrightarrow{P} 0.$$

Powyższy rezultat dotyczy przypadku zerowej wartości oczekiwanej szeregu $\{X_t\}$. Załóżmy teraz, że średnia jest funkcją prawie okresową i ma zbiór częstotliwości $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_K\}$. Aby otrzymać zgodność MBB zauważmy, że estymator $\hat{a}_n(\lambda, \tau)$ można zapisać jako funkcję średniej próbkowej szeregów

$$\begin{aligned} & \{X_t X_{t+\tau} \cos(\lambda t) : t \in \mathbb{Z}\}, \{X_t X_{t+\tau} \sin(\lambda t) : t \in \mathbb{Z}\}, \\ & \{X_t \cos(\gamma_1 t) : t \in \mathbb{Z}\}, \{X_t \sin(\gamma_1 t) : t \in \mathbb{Z}\}, \\ & \{X_t \cos((\gamma_1 - \lambda)t) : t \in \mathbb{Z}\}, \{X_t \sin((\gamma_1 - \lambda)t) : t \in \mathbb{Z}\}, \\ & \dots \\ & \{X_t \cos(\gamma_K t) : t \in \mathbb{Z}\}, \{X_t \sin(\gamma_K t) : t \in \mathbb{Z}\}, \\ & \{X_t \cos((\gamma_K - \lambda)t) : t \in \mathbb{Z}\}, \{X_t \sin((\gamma_K - \lambda)t) : t \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

które są APC i JAPC jeśli założymy, że $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ jest APC, WAP(3) oraz WAP(4).

3.5. Zgodność bootstrapu sezonowych bloków (SBB)

Zauważmy, że dla szeregu okresowo skorelowanego w wyniku procedury MBB otrzymujemy próbkę, dla której

$$E^* X_t^* \neq E^* X_{t+T}^*.$$

Jeśli procedure MBB zmodyfikujemy w ten sposób, że będziemy próbować z bloków $B_{i,b} = (X_i, \dots, X_{i+b-1})$, dla $i = 1, \dots, n$ definiując $X_{n+i} = X_i$ (cykliczny MBB), to wtedy $E^* X_t^* = \overline{X}_n$ (warunkowa stacjonarność). Możemy zatem stwierdzić, że proces

resamplingowania nie replikuje okresowości w danych. Ponieważ główną ideą resamplingu jest to, aby jak najlepiej zachowywał cechy próbki, pojawia się pytanie o taki sposób resamplingowania, który replikuje okresowość. Można się spodziewać, że taka procedura byłaby być może bardziej efektywna. Jak do tej pory zaproponowano dwa specjalne sposoby resamplingowania danych okresowych: bootstrap bloków sezonowych (SBB), dla którego $E^* X_t^* = E^* X_{t+bT}^*$, oraz bootstrap bloków okresowych (PBB), dla którego $E^* X_t^* = E^* X_{t+T}^*$. W niniejszym paragrafie skoncentrujemy się na pierwszej metodzie.

Bootstrap bloków sezonowych został opisany w pracy Politis (2001). Rezultatem tej pracy jest zgodność dla modelu $X_t = f(t) + Z_t$, gdzie funkcja f jest okresowa a szereg czasowy $\{Z_t : t \in \mathbb{Z}\}$ ściśle stacjonarny. Okazuje się, że rozwinięte w poprzednich paragrafach techniki umożliwiają rozszerzenie tego rezultatu.

Twierdzenie 3.6. *Niech szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ będzie PC i α -mieszający. Załóżmy, że spełnia on założenia (ii)-(iv) z Twierdzenia 3.3. Niech X_t^* będą obserwacjami generowanymi za pomocą procedury SBB przy użyciu bloków o długości Tb , gdzie $b \rightarrow \infty$, ale $b = o(n)$. Wtedy procedura SBB jest zgodna, czyli*

$$\text{Var}^* \left(\sqrt{n} \bar{X}_n^* \right) \xrightarrow{P} \sigma^2$$

oraz

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P \left(\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu) < x \right) - P^* \left(\sqrt{n} (\bar{X}_n^* - E^* \bar{X}_n^*) < x \right) \right| \xrightarrow{P} 0.$$

Dowód. Dowód przeprowadzamy analogicznie do dowodu Twierdzenia 3.3 uwzględniając różnicę między MBB i SBB. Przypomnijmy, że $n = bTk$ i oznaczymy $Z_{j,b} = X_{jT+1} + \dots + X_{(j+b)T}$, gdzie $j = 0, \dots, (k-1)b$. Próbkowanie przeprowadzamy w oparciu o następujący rozkład

$$P^*(Z_{j,b}^* = Z_{t,b}) = \frac{1}{(k-1)b+1}, \text{ dla } t = 0, \dots, (k-1)b.$$

Pokazujemy, że dla dowolnego $\nu > 0$

$$\sum_{j=1}^k P^* \left(\frac{1}{\sqrt{n}} |Z_{j,b}^*| > \nu \right) \xrightarrow{P} 0, \quad (3.16)$$

$$\sum_{j=1}^k E^* \left(\frac{1}{\sqrt{n}} Z_{j,b}^* \mathbf{1}_{|Z_{j,b}^*| \leq \sqrt{n}\nu} \right) - \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} E^*(Z_{j,b}^*) \xrightarrow{P} 0,$$

oraz

$$\sum_{j=1}^k \text{Var}^* \left(\frac{1}{\sqrt{n}} Z_{j,b}^* \mathbf{1}_{|Z_{j,b}^*| \leq \sqrt{n}\nu} \right) \xrightarrow{P} \sigma^2,$$

za pomocą technik użytych w dowodach Twierdzeń 3.2 i 3.3. Przykładowo dla zbieżności (3.16) możemy napisać

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k P^* \left(\frac{1}{\sqrt{n}} |Z_{j,b}^*| > \nu \right) &= k P^* \left(\frac{1}{\sqrt{n}} |Z_{1,b}^*| > \nu \right) \\ &= \frac{k}{(k-1)b+1} \sum_{t=0}^{(k-1)b} \mathbf{1}_{|Z_{t,b}^*| > \nu \sqrt{n}} \end{aligned}$$

i dalej

$$\begin{aligned} P\left(\frac{k}{(k-1)b+1} \sum_{t=0}^{(k-1)b} \mathbf{1}_{|Z_{t,b}| > \nu\sqrt{k}}\right) &\leq \frac{k}{(k-1)b+1} \sum_{t=0}^{(k-1)b} P\left(\frac{1}{\sqrt{bT}} |Z_{t,b}| > \nu\sqrt{k}\right) \\ &\leq \frac{k}{(k-1)b+1} \sum_{t=0}^{(k-1)b} \frac{E\left|\frac{1}{\sqrt{bT}} Z_{t,b}\right|^{2+\zeta}}{\nu^{2+\zeta} k^{1+\zeta}} = O\left(\frac{1}{k^\zeta}\right). \end{aligned}$$

■

Otrzymujemy zatem w łatwy sposób zgodność bootstrapu bloków sezonowych w tych samych sytuacjach co dla MBB. Oprócz Twierdzenia 3.6 możemy sformułować analogiczne twierdzenia dla SBB przy warunkach z Twierdzenia 3.2, Wniosku 3.3 oraz Wniosku 3.4.

3.6. Zgodność bootstrapu okresowych bloków (PBB)

W pracy Chan i in. (2004) zaproponowano metodę bootstrapowania dla danych okresowych zwaną bootstrapem bloków okresowych (PBB). Publikacja Chan i in. (2004) koncentruje się głównie na przykładzie zastosowania do danych opisujących degradację materiałów wystawionych na działanie czynników zewnętrznych (słońce, wiatr, wilgoć, itp.). Autorzy zakładają następujące warunki o szeregu $\{X_t\}$:

- (i) jest on ściśle okresowy rzędu pierwszego (SP(1)) i okresowo skorelowany z okresem T ,
- (ii) jest on m -zależny, przy czym m jest dużo mniejsze niż długość okresu T ,
- (iii) funkcja autokowariancji $B(t, \tau)$ jest nieujemna.

Przy powyższych warunkach otrzymano w sposób nieformalny, że procedura PBB działa "w przybliżeniu". Praca Chan i in. (2004) zostawia zatem do rozwiązania następujące problemy:

- asymptotyczna zgodność bootstrapowego estymatora wariancji i bootstrapowych kwantyli,
- przypadek α -mieszający,
- porównanie efektywności PBB i MBB .

W tym paragrafie będziemy się starali rozwiązać dwa pierwsze problemy. Dzięki pracom Singh (1981); Liu i Singh (1992) oraz Künsch (1989) wiemy, że bootstrapowanie danych zależnych za pomocą bloków, których długość nie dąży do nieskończoności może powodować kłopoty ze zgodnością. W przypadku PBB długość bloku jest mniejsza niż okres i dlatego nie może dążyć do nieskończoności. Dlatego przeniesiemy najpierw ideę PBB na przypadek tablic okresowych z okresem, który zwiększa się wraz z numerem wiersza. Otrzymane wyniki sformalizują rezultaty Chan i in. (2004) oraz pozwolą wysnuć wnioski na temat szeregów czasowych.

W dalszej części będziemy się zajmować tablicą zmiennych losowych $\{X_{n,t} : t = 1, \dots, d_n\}$, gdzie $d_n \rightarrow \infty$. Załóżmy, że funkcja wartości oczekiwanej $\mu_{n,t} = E(X_{n,t})$ w tej tablicy jest wierszowo okresowa z okresem T_n w n -tym wierszu. Obserwując kolejne wiersze tej tablicy obliczamy średnią próbkową $\bar{X}_n = (1/d_n) \sum_{t=1}^{d_n} X_{n,t}$, która estymuje wielkość $\mu_n = (1/T_n) \sum_{t=1}^{T_n} \mu_{n,t}$. Następnie stosujemy wierszowo bootstrap bloków

okresowych otrzymując bootstrapową wersję tego estymatora $\bar{X}_n^* = (1/d_n) \sum_{t=1}^{d_n} X_{n,t}^*$. Oznaczmy $\{\alpha_n(\tau) : \tau = 0, 1, \dots\}$ jako funkcję α -mieszania w n -tym wierszu tablicy $\{X_{n,t}\}$ oraz $B_n(t, \tau) = Cov(X_{n,t}, X_{n,t+\tau})$.

Twierdzenie 3.7. *Niech $\{X_{n,t} : t = 1, \dots, d_n\}$ będzie wierszowo WP(1), gdzie $\mu_{n,t} = E(X_{n,t})$ jest funkcją okresową zmiennej t z okresem T_n . Załóżmy, że*

- (i) $T_n = L_n b_n$, $d_n = r_n T_n$, $T_n \rightarrow \infty$ i $r_n \rightarrow \infty$ dla $n \rightarrow \infty$,
- (ii) istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\sup_{t,n} E|X_{n,t}|^{4+\delta} = M_{4+\delta} < \infty \quad \text{oraz} \quad \sup_n \sum_{\tau=1}^{d_n} \tau \alpha_n^{\frac{\delta}{4+\delta}}(\tau) = K < \infty,$$

- (iii) wariancja jest zbieżna jednostajnie, tzn. dla każdego ciągu $\{k_n\}$ rozbieżnego do nieskończoności i takiego, że $k_n \leq d_n$, mamy

$$\sup_{s=1, \dots, d_n - k_n + 1} Var \left(\frac{1}{\sqrt{k_n}} \sum_{t=s}^{s+k_n-1} X_{n,t} \right) \rightarrow \sigma^2,$$

gdzie $\sigma^2 > 0$.

Wtedy zachodzi centralne twierdzenie graniczne, tzn.

$$\sqrt{d_n} (\bar{X}_n - \mu_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

i PBB z blokami o długości b_n takiej, że $b_n \rightarrow \infty$ jest zgodny, czyli

$$Var^* \left(\sqrt{d_n} \bar{X}_n^* \right) \xrightarrow{P} \sigma^2$$

oraz

$$\sup_x \left| P^* \left(\sqrt{d_n} (\bar{X}_n^* - E^*(\bar{X}_n^*)) \leq x \right) - P \left(\sqrt{d_n} (\bar{X}_n - \bar{\mu}_n) \leq x \right) \right| \xrightarrow{P} 0.$$

Dowód. Centralne twierdzenie graniczne jest implikowane bezpośrednio przez Twierdzenie 2.2 oraz Uwagę 2.1. Dla przejrzystości dowodu będziemy czasami opuszczać indeks n w b_n, d_n oraz T_n . Niech $\tilde{Z}_t = X_t + \dots + X_{t+b-1}$. Ponieważ

$$\bar{X}_n^* = \frac{1}{d_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{j=0}^{r_n-1} \tilde{Z}_{ub+jT+1}^*,$$

możemy powiedzieć, że estymator \bar{X}_n^* jest sumą niezależnych zmiennych losowych pochodzących z L_n różnych rozkładów (dla różnych części okresu mamy różne $u = 0, \dots, L_n - 1$)

$$P^* \left(\tilde{Z}_{ub+jT+1}^* = \tilde{Z}_{ub+tT+1} \right) = \frac{1}{r_n}, \quad t = 0, \dots, r_n - 1,$$

gdzie $j = 0, \dots, r_n - 1$ jest numerem okresu. Korzystając z tego, że $E^* \bar{X}_n^* = \bar{X}_n$ możemy zapisać

$$\begin{aligned} \sqrt{d_n} (\bar{X}_n^* - E^* \bar{X}_n^*) &= \sqrt{d_n} \left(\frac{1}{d_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{j=0}^{r_n-1} \tilde{Z}_{ub+jT+1}^* - \frac{1}{d_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{j=0}^{r_n-1} \tilde{Z}_{ub+jT+1} \right) \\ &= \sqrt{d_n} \left(\frac{1}{d_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{j=0}^{r_n-1} (\tilde{Z}_{ub+jT+1}^* - E \tilde{Z}_{ub+jT+1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{d_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{j=0}^{r_n-1} (\tilde{Z}_{ub+jT+1} - E \tilde{Z}_{ub+jT+1}) \right) \\ &= \sqrt{d_n} \left(\frac{1}{d_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{j=0}^{r_n-1} Z_{ub+jT+1}^* - \frac{1}{d_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{j=0}^{r_n-1} Z_{ub+jT+1} \right), \end{aligned}$$

gdzie $Z_t = X_t - EX_t + \dots + X_{t+b-1} - EX_{t+b-1}$ oraz

$$P^* (Z_{ub+jT+1}^* = Z_{ub+tT+1}) = \frac{1}{r_n}, \quad t = 0, \dots, r_n - 1.$$

Widzimy, że skutkiem idealnego replikowania okresowości w próbce bootstrapowej jest to, że możemy założyć, że próbujemy z bloków $Z_{ub+tT+1}$ o zerowej wartości oczekiwanej.

Z Twierdzenia 2.4 wystarczy pokazać, że

$$\sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{j=0}^{r_n-1} P^* \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} |Z_{ub+jT+1}^*| > \nu \right) \xrightarrow{P} 0, \quad (3.17)$$

$$\sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{j=0}^{r_n-1} E^* \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} Z_{ub+jT+1}^* \mathbf{1}_{\frac{1}{\sqrt{d_n}} |Z_{ub+jT+1}^*| > \nu} \right) \xrightarrow{P} 0, \quad (3.18)$$

oraz

$$\sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{j=0}^{r_n-1} Var^* \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} Z_{ub+jT+1}^* \mathbf{1}_{\frac{1}{\sqrt{d_n}} |Z_{ub+jT+1}^*| \leq \nu} \right) \xrightarrow{P} \sigma^2, \quad (3.19)$$

gdzie ν jest dowolną liczbą dodatnią. W dowodach tych zbieżności wykorzystamy następujące oszacowanie

$$P \left(|Z_{ub+tT+1}| > \sqrt{d_n} \nu \right) \leq \frac{E \left| \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1} \right|^4}{(\nu^2 L_n r_n)^2} = O \left(\frac{1}{r_n^2 L_n^2} \right),$$

które wynika z nierówności Czebyszewa, Lematu 2.4 oraz jest jednostajne względem u i t .

Aby udowodnić (3.17) zauważmy, że

$$\begin{aligned} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{j=0}^{r_n-1} P^* \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} |Z_{ub+jT+1}^*| > \nu \right) &= \sum_{u=0}^{L_n-1} r_n P^* \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} |Z_{ub+1}^*| > \nu \right) \\ &= \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} \mathbf{1}_{|Z_{ub+tT+1}| > \sqrt{d_n} \nu} \end{aligned}$$

ORAZ

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} \mathbf{1}_{|Z_{ub+tT+1}| > \sqrt{d_n}\nu} > \epsilon\right) &\leq \frac{1}{\epsilon} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} P\left(|Z_{ub+tT+1}| > \sqrt{d_n}\nu\right) \\ &= O\left(\frac{1}{r_n L_n}\right). \end{aligned}$$

Aby udowodnić (3.18) zauważmy, że

$$\begin{aligned} &\sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{j=0}^{r_n-1} E^* \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} Z_{ub+jT+1}^* \mathbf{1}_{|Z_{ub+jT+1}^*| > \nu\sqrt{d_n}} \right) \\ &= \sum_{u=0}^{L_n-1} r_n E^* \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} Z_{ub+1}^* \mathbf{1}_{|Z_{ub+1}^*| > \nu\sqrt{d_n}} \right) \\ &= \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} \frac{1}{\sqrt{d_n}} Z_{ub+tT+1} \mathbf{1}_{|Z_{ub+tT+1}| > \nu\sqrt{d_n}} \end{aligned}$$

ORAZ

$$\begin{aligned} &P\left(\left|\sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} \frac{1}{\sqrt{d_n}} Z_{ub+tT+1} \mathbf{1}_{|Z_{ub+tT+1}| > \nu\sqrt{d_n}}\right| > \epsilon\right) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} E \left| \frac{1}{\sqrt{d_n}} Z_{ub+tT+1} \mathbf{1}_{|Z_{ub+tT+1}| > \nu\sqrt{d_n}} \right| \\ &\leq \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} \frac{1}{\epsilon\sqrt{L_n r_n}} \left(\left\| \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1} \right\|_4 \right) \left(\left\| \mathbf{1}_{|Z_{ub+tT+1}| > \nu\sqrt{d_n}} \right\|_{\frac{4}{3}} \right) \\ &= O\left(\frac{1}{r_n L_n}\right). \end{aligned}$$

Aby udowodnić (3.19) zauważmy, że

$$\begin{aligned} &\sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{j=0}^{r_n-1} Var^* \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} Z_{ub+jT+1}^* \mathbf{1}_{|Z_{ub+jT+1}^*| \leq \nu\sqrt{d_n}} \right) \\ &= \sum_{u=0}^{L_n-1} r_n Var^* \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} Z_{ub+1}^* \mathbf{1}_{|Z_{ub+1}^*| \leq \nu\sqrt{d_n}} \right) \\ &= \sum_{u=0}^{L_n-1} r_n \left\{ \frac{1}{r_n} \sum_{t=0}^{r_n-1} \frac{1}{d_n} Z_{ub+tT+1}^2 \mathbf{1}_{|Z_{ub+tT+1}| \leq \nu\sqrt{d_n}} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{r_n} \sum_{t=0}^{r_n-1} \frac{1}{\sqrt{d_n}} Z_{ub+tT+1} \mathbf{1}_{|Z_{ub+tT+1}| \leq \nu\sqrt{d_n}} \right)^2 \right\} \tag{3.20} \\ &= \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} \frac{1}{d_n} Z_{ub+tT+1}^2 - \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} \frac{1}{d_n} Z_{ub+tT+1}^2 \mathbf{1}_{|Z_{ub+tT+1}| > \nu\sqrt{d_n}} \\ &\quad - \frac{1}{r_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \left(\sum_{t=0}^{r_n-1} \frac{1}{\sqrt{d_n}} Z_{ub+tT+1} \mathbf{1}_{|Z_{ub+tT+1}| \leq \nu\sqrt{d_n}} \right)^2 = U_n - V_n - W_n. \end{aligned}$$

Dla wielkości V_n mamy oszacowanie

$$\begin{aligned}
 P(|V_n| > \epsilon) &\leq \frac{1}{\epsilon} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} E \left(\frac{1}{d_n} Z_{ub+tT+1}^2 \mathbf{1}_{|Z_{ub+tT+1}| > \sqrt{d_n\nu}} \right) \\
 &\leq \frac{1}{\epsilon} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} \frac{1}{L_n r_n} \left(\left\| \frac{1}{b_n} Z_{ub+tT+1} \right\|_2 \right) \left(\left\| \mathbf{1}_{|Z_{ub+tT+1}| > \sqrt{d_n\nu}} \right\|_2 \right) \\
 &= O \left(\frac{1}{r_n L_n} \right).
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Dla W_n natomiast można napisać, że dla pewnego $\zeta > \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
 P(|W_n| > \epsilon) &\leq \frac{2}{\epsilon r_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} E \left(\sum_{t=0}^{r_n-1} \frac{1}{\sqrt{d_n}} Z_{ub+tT+1} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{4}{\epsilon r_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} E \left\{ \sum_{t=0}^{r_n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} Z_{ub+tT+1} \mathbf{1}_{|Z_{ub+tT+1}| > \sqrt{d_n\nu}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - E \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} Z_{ub+tT+1} \mathbf{1}_{|Z_{ub+tT+1}| > \sqrt{d_n\nu}} \right) \right) \right\}^2 \\
 &\quad + \frac{4}{\epsilon r_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \left\{ \sum_{t=0}^{r_n-1} E \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} Z_{ub+tT+1} \mathbf{1}_{|Z_{ub+tT+1}| > \sqrt{d_n\nu}} \right) \right\}^2 \\
 &= O \left(\frac{1}{T_n^\zeta} \right) + O \left(\frac{1}{r_n} \right) + O \left(\frac{1}{r_n^3 L_n^3} \right) \rightarrow 0,
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

ponieważ korzystając z Lematu 2.1 oraz założenia (ii) mamy

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\epsilon r_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} E \left(\sum_{t=0}^{r_n-1} \frac{1}{\sqrt{d_n}} Z_{ub+tT+1} \right)^2 \\
 &\leq \frac{2}{r_n^2 L_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} \sum_{\tau=0}^{r_n-1-t} \left| Cov \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+(t+\tau)T+1} \right) \right| \\
 &\leq \frac{8}{r_n^2 L_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} \sum_{\tau=0}^{r_n-1-t} \left(\sup_{u,t} E \left| \frac{1}{\sqrt{b}} Z_{ub+tT+1} \right|^4 \right)^{1/2} \alpha_n^{1/2} (\tau T_n - b_n + 1) \\
 &\leq \frac{C}{r_n} \sum_{\tau=2}^{r_n} \alpha_n^{1/2} (\tau T_n - b_n + 1) + O \left(\frac{1}{r_n} \right) \leq \frac{C'}{r_n} \sum_{\tau=1}^{r_n-1} \frac{1}{\tau^\zeta T_n^\zeta} + O \left(\frac{1}{r_n} \right).
 \end{aligned}$$

Pokazaliśmy zatem, że obie te wielkości zbiegają do zera wg. prawdopodobieństwa. Będziemy chcieli teraz udowodnić, że U_n dąży wg. prawdopodobieństwa do σ^2 . W tym celu zdefiniujemy tablicę $\{Y_{n,t} : t = 0, \dots, r_n - 1\}$, gdzie

$$Y_{n,t} = \frac{1}{L_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \frac{1}{b_n} Z_{ub+tT+1}^2.$$

Będziemy chcieli pokazać, że dla tej tablicy spełnione są założenia Lematu 2.9. W pierwszej kolejności zauważmy, że z założenia (iii) mamy

$$\frac{1}{r_n} \sum_{t=0}^{r_n-1} E Y_{n,t} = \frac{1}{L_n r_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} Var \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1} \right) \rightarrow \sigma^2. \tag{3.23}$$

Następnie, ponieważ

$$\left| Cov \left(\frac{1}{b_n} Z_{u_1 b+tT+1}^2, \frac{1}{b_n} Z_{u_2 b+tT+1}^2 \right) \right| \leq C_1,$$

możemy napisać, że

$$E|Y_{n,t}|^2 \leq 2E \left| \frac{1}{L_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \frac{1}{b_n} \left(Z_{ub+tT+1}^2 - EZ_{ub+tT+1}^2 \right) \right|^2 + \frac{2}{L_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \frac{1}{b_n} EZ_{ub+tT+1}^2 = O(1).$$

Zatem tablica $\{Y_{n,t}\}$ ma jednostajnie ograniczone drugie momenty. Jest ona także wierszowo α -mieszająca ze współczynnikami $\alpha_{Y_n}(\tau) \leq \alpha_n((\tau-1)T_n+1)$. ■

Ze wszystkich założeń Twierdzenia 3.7 najbardziej ograniczające jest założenie (iii), gdyż nie pozwala funkcji autokowariancji na okresowość. Przykładem modelu, który spełnia założenie (iii) jest $X_{n,t} = f_n(t) + Z_t$, gdzie funkcja f_n jest okresowa z okresem T_n , a szereg czasowy $\{Z_t\}$ jest WS(2). Zaprezentujemy teraz rezultat, w którym założymy nieco inny, mniej ograniczający warunek.

Wniosek 3.6. *W Twierdzeniu 3.7 założenie (iii) może być zastąpione następującym założeniem*

(iii') tablica $\{X_{n,t} : t = 1, \dots, d_n\}$ jest wierszowo PC z okresem T_n ($T_n \rightarrow \infty$) oraz

$$Var \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} \sum_{t=1}^{d_n} X_{n,t} \right) \rightarrow \sigma^2,$$

gdzie $\sigma^2 > 0$. Ponadto $\sup_{n,\tau} \{\tau^{1+\zeta} \alpha_n^{\frac{1}{2}}(\tau)\} < \infty$ dla pewnego $\zeta > 0$.

Dowód. Zaczniemy od pewnej modyfikacji Twierdzenia 2.2.

Lemat 3.4. *Niech $\{X_{n,t} : t = 1, \dots, d_n\}$ będzie tablicą zmiennych losowych o zerowych wartościach oczekiwanych, która jest wierszowo PC z okresem T_n . Załóżmy, że*

(a) istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\sup_{t,n} E|X_{t,n}|^{4+\delta} = M_{4+\delta} < \infty \quad \text{oraz} \quad \sup_n \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau \alpha_n^{\frac{\delta}{4+\delta}}(\tau) = K < \infty$$

i ponadto, istnieje pewna liczba $\zeta > 0$ taka, że $\sup_{n,\tau} \{\tau^{1+\zeta} \alpha_n^{1/2}(\tau)\} = K' < \infty$,

(b) $Var \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} \sum_{t=1}^{d_n} X_{n,t} \right) \rightarrow \sigma^2$, gdzie $\sigma^2 > 0$,

(c) $d_n/T_n \rightarrow \infty$.

Wtedy zachodzi centralne twierdzenie graniczne

$$\frac{1}{\sqrt{d_n}} \sum_{t=1}^{d_n} X_{n,t} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Ponadto wariancja asymptotyczna dana jest następującą formułą

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T_n} \sum_{t=1}^{T_n} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} B_n(t, \tau). \quad (3.24)$$

Dowód. Załóżymy bez straty ogólności, że d_n jest podzielne przez T_n . Zdefiniujemy nową tablicę $\{Y_{n,t} : t = 1, \dots, r_n\}$, gdzie $r_n = d_n/T_n \rightarrow \infty$ oraz

$$Y_{n,t} = \frac{1}{\sqrt{T_n}} \sum_{j=(t-1)T_n+1}^{tT_n} X_{n,j}.$$

Mamy oczywiście, że

$$\frac{1}{\sqrt{d_n}} \sum_{t=1}^{d_n} X_{n,t} = \frac{1}{\sqrt{r_n}} \sum_{t=1}^{r_n} Y_{n,t}$$

oraz tablica $\{Y_{n,t}\}$ jest wierszowo WS(2) i α -mieszająca ze współczynnikami $\alpha_{Y_n}(\tau) = \alpha_n((\tau - 1)T_n + 1)$. Dowód tezy można uzyskać dowodząc CTG dla tablicy $\{Y_{n,t}\}$ za pomocą kroków z dowodu Twierdzenia 2.2 z uwzględnieniem Uwagi 2.1 (patrz Politis i in., 1999). Jedyną różnicą jest taka, że nie zakładamy założenia jednostajnej zbieżności wariancji (założenie (ii) w Twierdzeniu 2.2). Dlatego musimy wyjaśnić dlaczego dla tablicy $\{Y_{n,t}\}$ zachodzi zbieżność (B.6) ze str. 324 monografii Politis i in. (1999). Ponieważ tablica $\{Y_{n,t}\}$ jest wierszowo WS(2) wystarczy pokazać, że

$$\frac{1}{\lfloor r_n^{3/4} \rfloor} \text{Var} \left(\sum_{t=1}^{\lfloor r_n^{3/4} \rfloor} Y_{n,t} \right) \rightarrow \sigma^2.$$

Wykorzystamy następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\lfloor r_n^{3/4} \rfloor} \text{Var} \left(\sum_{t=1}^{\lfloor r_n^{3/4} \rfloor} Y_{n,t} \right) - \sigma^2 \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{\lfloor r_n^{3/4} \rfloor} \text{Var} \left(\sum_{t=1}^{\lfloor r_n^{3/4} \rfloor} Y_{n,t} \right) - \frac{1}{r_n} \text{Var} \left(\sum_{t=1}^{r_n} Y_{n,t} \right) \right| + \left| \frac{1}{r_n} \text{Var} \left(\sum_{t=1}^{r_n} Y_{n,t} \right) - \sigma^2 \right|. \end{aligned}$$

Drugi składnik prawej strony tej nierówności dąży do zera z założenia (b). Niech $B_{Y_n}(\tau) = \text{Cov}(Y_{n,t}, Y_{n,t+\tau})$. Korzystając ze stacjonarności w wierszach $\{Y_{n,t}\}$ i zamiany zmiennych w sumach otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\lfloor r_n^{3/4} \rfloor} \text{Var} \left(\sum_{t=1}^{\lfloor r_n^{3/4} \rfloor} Y_{n,t} \right) - \frac{1}{r_n} \text{Var} \left(\sum_{t=1}^{r_n} Y_{n,t} \right) \right| \\ & = \left| 2 \sum_{\tau=1}^{\lfloor r_n^{3/4} \rfloor - 1} \left(1 - \frac{\tau}{\lfloor r_n^{3/4} \rfloor} \right) B_{Y_n}(\tau) - 2 \sum_{\tau=1}^{r_n-1} \left(1 - \frac{\tau}{r_n} \right) B_{Y_n}(\tau) \right| \quad (3.25) \\ & \leq 2 \sum_{\tau=\lfloor r_n^{3/4} \rfloor}^{r_n-1} |B_{Y_n}(\tau)| + \frac{2}{r_n} \sum_{\tau=1}^{r_n-1} \tau |B_{Y_n}(\tau)| + \frac{2}{\lfloor r_n^{3/4} \rfloor} \sum_{\tau=1}^{\lfloor r_n^{3/4} \rfloor - 1} \tau |B_{Y_n}(\tau)|. \end{aligned}$$

Z Lematu Kim (1994) mamy, że $\sup_{t,n} E |Y_n(t)|^4 < \infty$, a z Lematu 2.1 otrzymujemy natomiast nierówność

$$|B_{Y_n}(\tau)| \leq 8 \left(\sup_{t,n} E |Y_n(t)|^4 \right)^{1/2} \alpha_n^{1/2} ((\tau - 1)T_n + 1).$$

Korzystając teraz z założenia (a) możemy szacować.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_n} \sum_{\tau=1}^{r_n-1} \tau |B_{Y_n}(\tau)| &\leq \frac{1}{r_n} \sum_{\tau=1}^{r_n-1} \frac{\tau K'}{((\tau - 1)T_n + 1)^{1+\zeta}} \\ &\leq O\left(\frac{1}{r_n}\right) + \frac{1}{T_n^{1+\zeta}} \frac{1}{r_n} \sum_{\tau=2}^{r_n-1} \frac{\tau K'}{(\tau - 1)^{1+\zeta}} \\ &= O\left(\frac{1}{r_n}\right) + O\left(\frac{1}{T_n^{1+\zeta} r_n}\right) + \frac{1}{T_n^{1+\zeta}} \frac{1}{r_n} \sum_{\tau=2}^{r_n-1} \frac{K'}{(\tau - 1)^\zeta} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Aby pokazać, że zachodzi formuła (3.24), skorzystamy z kroków podobnych do dowodu Lematu 2.10. Zdefiniujmy

$$L_n(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} B_n(t, \tau).$$

Wykorzystując sumowalność współczynników mieszania można stwierdzić, że liczba $L_n(t)$ jest skończona oraz $L_n(t + T_n) = L_n(t)$. Dlatego mamy

$$\begin{aligned} &\left| \text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} \sum_{t=1}^{d_n} X_{n,t} \right) - \frac{1}{T_n} \sum_{t=1}^{T_n} L_n(t) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} \sum_{\tau=1-t}^{d_n-t} B_n(t, \tau) - \frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} B_n(t, \tau) \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} L(t) - \frac{1}{d_n} \sum_{j=1}^{d_n} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} B_n(t, \tau) \right| \\ &\leq \frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} \sum_{\tau=-\infty}^{-t} |B_n(t, \tau)| + \frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} \sum_{\tau=d_n+1-t}^{\infty} |B_n(t, \tau)| \\ &= \frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} \sum_{\tau=t}^{\infty} |B_n(t - \tau, \tau)| + \frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} \sum_{\tau=t}^{\infty} |B_n(d_n - t + 1, \tau)| \\ &\leq \frac{16}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} \sum_{\tau=t}^{\infty} \left(\sup_{t,n} E |X_{n,t}|^4 \right)^{1/2} \alpha^{1/2}(\tau) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

co wynika ze standardowej wersji lematu Toeplitza. ■

Ponieważ założyliśmy, że d_n jest podzielne przez T_n , mamy

$$\sqrt{d_n} (\bar{X}_{n,t} - \bar{\mu}_n) = \sqrt{d_n} \left(\frac{1}{d_n} \sum_{t=1}^{d_n} (X_{n,t} - EX_{n,t}) \right).$$

Dlatego CTG jest natychmiastową konsekwencją Lematu 3.4 (tablica o zerowej wartości oczekiwanej i wierszowo PC). Korzystając z założenia (iii') i dowodu Twierdzenia 3.7 wystarczy pokazać, że

$$R_n = \left| \frac{1}{L_n r_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} \text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1} \right) - \text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{L_n r_n}} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1} \right) \right| \rightarrow 0.$$

Wariancję sumy możemy rozpisać w następujący sposób

$$\begin{aligned} & \text{Var} \left(\sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1} \right) \\ &= \sum_{u_1=0}^{L_n-1} \sum_{u_2=0}^{L_n-1} \sum_{t_1=0}^{r_n-1} \sum_{t_2=0}^{r_n-1} \text{Cov} \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{u_1 b+t_1 T+1}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{u_2 b+t_2 T+1} \right) \\ &= 2 \sum_{u_1=0}^{L_n-1} \sum_{u_2=u_1+1}^{L_n-1} \sum_{t_1=0}^{r_n-1} \sum_{t_2=0}^{r_n-1} \text{Cov} \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{u_1 b+t_1 T+1}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{u_2 b+t_2 T+1} \right) \\ &\quad + \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t_1=0}^{r_n-1} \sum_{t_2=0}^{r_n-1} \text{Cov} \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+t_1 T+1}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+t_2 T+1} \right) \\ &= 2 \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{\kappa=1}^{L_n-1-u} \sum_{t_1=0}^{r_n-1} \sum_{t_2=0}^{r_n-1} \text{Cov} \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+t_1 T+1}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{(u+\kappa)b+t_2 T+1} \right) \\ &\quad + 2 \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t_1=0}^{r_n-1} \sum_{t_2=t_1+1}^{r_n-1} \text{Cov} \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+t_1 T+1}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+t_2 T+1} \right) \\ &\quad + \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} \text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1} \right). \end{aligned}$$

Dlatego mamy oszacowanie

$$\begin{aligned} & R_n \\ &\leq \frac{2}{L_n r_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{\kappa=1}^{L_n-1-u} \sum_{t_1=0}^{r_n-1} \sum_{t_2=0}^{r_n-1} \left| \text{Cov} \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+t_1 T+1}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{(u+\kappa)b+t_2 T+1} \right) \right| \\ &\quad + \frac{2}{L_n r_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} \sum_{\tau=1}^{r_n-1-t} \left| \text{Cov} \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+(t+\tau)T+1} \right) \right| \\ &= \frac{2}{L_n r_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{\kappa=1}^{L_n-1-u} \left(\sum_{t_1=0}^{r_n-1} \sum_{t_2=t_1}^{r_n-1} + \sum_{t_2=0}^{r_n-1} \sum_{t_1=t_2+1}^{r_n-1} \right) \\ &\quad \left| \text{Cov} \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+t_1 T+1}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{(u+\kappa)b+t_2 T+1} \right) \right| \\ &\quad + \frac{2}{L_n r_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} \sum_{\tau=1}^{r_n-1-t} \left| \text{Cov} \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+(t+\tau)T+1} \right) \right| \\ &= \frac{2}{L_n r_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{\kappa=1}^{L_n-1-u} \sum_{t=0}^{r_n-1} \sum_{\tau=1}^{r_n-1-t} \left| \text{Cov} \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{(u+\kappa)b+(t+\tau)T+1} \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{L_n r_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{\kappa=1}^{L_n-1-u} \sum_{t=0}^{r_n-1} \left| Cov \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{(u+\kappa)b+tT+1} \right) \right| \\
 & + \frac{2}{L_n r_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{\kappa=1}^{L_n-1-u} \sum_{t=0}^{r_n-1} \sum_{\tau=1}^{r_n-1-t} \left| Cov \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+(t+\tau)T+1}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{(u+\kappa)b+tT+1} \right) \right| \\
 & + \frac{2}{L_n r_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} \sum_{\tau=1}^{r_n-1-t} \left| Cov \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+(t+\tau)T+1} \right) \right| \\
 & = 2U_n + 2W_n + 2V_n + 2Z_n.
 \end{aligned}$$

W dalszej części użyjemy nierówności

$$\begin{aligned}
 & \left| Cov \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{(u+\kappa)b+(t+\tau)T+1} \right) \right| \\
 & \leq 8 \left(\sup_{u,t} E \left| \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1} \right|^4 \right)^{1/2} \alpha_n^{1/2} (\tau T_n + b_n(\kappa - 1) + 1) \\
 & = C \alpha_n^{1/2} (\tau T_n + b_n(\kappa - 1) + 1),
 \end{aligned}$$

z której wynika, że

$$\begin{aligned}
 U_n & \leq \frac{1}{L_n r_n} \sum_{\kappa=1}^{L_n-1} \sum_{\tau=1}^{r_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1-\tau} \sum_{u=0}^{L_n-1-\kappa} C \alpha_n^{1/2} (\tau T_n + b_n(\kappa - 1) + 1) \\
 & \leq \sum_{\tau=1}^{r_n-1} \sum_{\kappa=1}^{L_n-1} \frac{CK'}{(\tau T_n + b_n(\kappa - 1))^{1+\zeta}} \leq \frac{L_n}{T_n^{1+\zeta}} \sum_{\tau=1}^{r_n-1} \frac{CK'}{\tau^{1+\zeta}} = O \left(\frac{1}{L_n^\zeta b_n^{1+\zeta}} \right) \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Ponadto

$$\begin{aligned}
 W_n & = \frac{1}{L_n r_n} \sum_{\kappa=2}^{L_n-1} \sum_{u=0}^{L_n-1-\kappa} \sum_{t=0}^{r_n-1} \left| Cov \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{(u+\kappa)b+tT+1} \right) \right| \\
 & + \frac{1}{L_n r_n} \sum_{u=0}^{L_n-2} \sum_{t=0}^{r_n-1} \left| Cov \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{(u+1)b+tT+1} \right) \right|
 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{L_n r_n} \sum_{\kappa=2}^{L_n-1} \sum_{u=0}^{L_n-1-\kappa} \sum_{t=0}^{r_n-1} \left| Cov \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{(u+\kappa)b+tT+1} \right) \right| \\
 & \leq C \sum_{\kappa=2}^{L-1} \alpha^{1/2} (b_n(\kappa - 1) + 1) \\
 & \leq \frac{1}{b_n^{1+\zeta}} \sum_{\kappa=2}^{L-1} \frac{CK'}{(\kappa - 1)^{1+\zeta}} = O \left(\frac{1}{b_n^{1+\zeta}} \right) \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Przypadek $\kappa = 1$ potraktujemy osobno rozpisując

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{L_n r_n} \sum_{u=0}^{L_n-2} \sum_{t=0}^{r_n-1} \left| Cov \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{(u+1)b+tT+1} \right) \right| \\
 & = \frac{1}{L_n r_n} \sum_{u=0}^{L_n-2} \sum_{t=0}^{r_n-1} \frac{1}{b_n} \sum_{i=ub_n+tT_n+1}^{(u+1)b_n+tT_n} \sum_{j=(u+1)b_n+tT_n+1}^{(u+2)b_n+tT_n} |Cov(X_{n,i}, X_{n,j})|
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{L_n r_n} \sum_{u=0}^{L_n-2} \sum_{t=0}^{r_n-1} \left(\frac{1}{b_n} \sum_{(i,j) \in A_{n,u,t}} |Cov(X_{n,i}, X_{n,j})| + \frac{1}{b_n} \sum_{(i,j) \in B_{n,u,t}} |Cov(X_{n,i}, X_{n,j})| \right),$$

gdzie

$$A_{n,u,t} = \left\{ (i, j) \in \mathbb{N}^2 : ub_n + tT_n + 1 \leq i \leq (u+1)b_n + tT_n, \right. \\ \left. (u+1)b_n + tT_n + 1 \leq j \leq (u+2)b_n + tT_n, |i-j| < b_n^{\frac{1}{3}} \right\}, \\ B_{n,u,t} = \left\{ (i, j) \in \mathbb{N}^2 : ub_n + tT_n + 1 \leq i \leq (u+1)b_n + tT_n, \right. \\ \left. (u+1)b_n + tT_n + 1 \leq j \leq (u+2)b_n + tT_n \right\} \setminus A_{n,u,t}.$$

Korzystając teraz z założenia (i) mamy następujące oszacowania jednostajne względem u i t :

$$\frac{1}{b_n} \sum_{(i,j) \in A_{n,u,t}} |Cov(X_{n,i}, X_{n,j})| \leq O\left(\frac{1}{b_n^{1/3}}\right) \rightarrow 0$$

oraz

$$\frac{1}{b_n} \sum_{(i,j) \in B_{n,u,t}} |Cov(X_{n,i}, X_{n,j})| \leq \frac{1}{b_n} \sum_{\tau=\lfloor b_n^{1/3} \rfloor}^{2b_n} \sum_{t=ub_n+tT_n+1}^{(u+1)b_n+tT_n} |B_n(t, \tau)| \\ \leq 8M_4^{\frac{1}{2}} \sum_{\tau=\lfloor b_n^{1/3} \rfloor}^{2b_n} \alpha_n^{1/2}(\tau) \rightarrow 0,$$

gdzie $M_4 = \sup_{t,n} E|X_{n,t}|^4 < \infty$. Podobnie można pokazać zbieżności $V_n \rightarrow 0$ i $Z_n \rightarrow 0$. ■

Nasz następny rezultat dotyczy tablic zmiennych losowych, które są wierszowo m_n -zależne, przy czym m_n wzrasta do nieskończoności wraz z n . Takie tablice są wprawdzie wierszowo α -mieszające, ale nie musi zachodzić jednostajna sumowalność współczynników mieszania, tzn. może być $\sup_n \sum_{\tau=1}^{d_n} \alpha_n(\tau) = \infty$. Dlatego tablice takie nie spełniają założenia (ii) w Twierdzeniu 2.2 oraz 3.7. Pomimo tej trudności można udowodnić CTG (Berk, 1973; Romano i Wolf, 2000) oraz, jak pokażemy poniżej, zgodność bootstrapu bloków okresowych.

Twierdzenie 3.8. *Niech $\{X_{n,t} : t = 1, \dots, d_n\}$ będzie m_n -zależną tablicą zmiennych losowych, dla której funkcja wartości oczekiwanej $\mu_{n,t} = E(X_{n,t})$ jest okresowa względem zmiennej t z okresem T_n . Załóżmy, że*

- (i) $T_n \rightarrow \infty$ wraz z $n \rightarrow \infty$, $T_n = L_n b_n$, $d_n = r_n T_n$, oraz $m_n^2/L_n = O(1)$,
- (ii) $\sup_{t,n} E|X_{n,t}|^4 < \infty$,
- (iii) *wariancja jest jednostajnie ograniczona, tzn. dla każdego ciągu $\{k_n\}$ takiego, że $k_n \leq d_n$, mamy*

$$\sup_{s=1, \dots, d_n-k_n+1} Var \left(\frac{1}{\sqrt{k_n}} \sum_{t=s}^{s+k_n-1} X_{n,t} \right) \leq C,$$

gdzie stała C nie zależy od n i ciągu $\{k_n\}$,
(iv)

$$\text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} \sum_{t=1}^{d_n} X_{n,t} \right) \rightarrow \sigma^2,$$

gdzie $\sigma^2 > 0$.

Wtedy zachodzi centralne twierdzenie graniczne oraz procedura PBB z bokami o długości b_n takiej, że $b_n/m_n^2 \rightarrow \infty$ ale $b_n \rightarrow \infty$, jest zgodna w sensie Twierdzenia 3.7.

Dowód. Ponieważ mamy $m_n^3/d_n \rightarrow 0$, CTG wynika bezpośrednio z Twierdzenia 2.3. W dalszej części powtarzamy kroki z dowodu Twierdzenia 3.7 oraz Wniosku 3.6 z uwzględnieniem faktu m_n -zależności tablicy $\{X_{n,t}\}$.

Z Lematu 2.6 mamy, że

$$E \left| \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1} \right|^4 = O(m_n^2)$$

i dlatego

$$\sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{j=0}^{r_n-1} P^* \left(\frac{1}{\sqrt{d_n}} |Z_{ub+jT+1}^*| \right) = O \left(\frac{m_n^2}{r_n L_n} \right).$$

Takie samo oszacowanie zachodzi dla (3.18) i (3.21). Musimy teraz pokazać, że W_n dąży do 0 i U_n dąży do σ^2 wg. prawdopodobieństwa, gdzie wielkości W_n oraz U_n zostały zdefiniowane równością (3.20). Korzystając z niezależności zmiennych losowych $Z_{ub+tT+1}$ oraz $Z_{ub+(t+\tau)T+1}$ dla $\tau \geq 1$, nierówności (3.22) i założenia (iii), mamy

$$\begin{aligned} P(|W_n| > \epsilon) &\leq \frac{2}{\epsilon L_n r_n^2} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} \text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1} \right) \\ &\quad + \frac{4}{\epsilon L_n r_n^2} \sum_{u=0}^{L_n-1} \sum_{t=0}^{r_n-1} \text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1} \mathbf{1}_{|Z_{ub+tT+1}| > \sqrt{d_n} \nu} \right) \\ &\quad + \frac{4}{\epsilon L_n r_n^2} \sum_{u=0}^{L_n-1} \left\{ \sum_{t=0}^{r_n-1} E \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1} \mathbf{1}_{|Z_{ub+tT+1}| > \sqrt{d_n} \nu} \right) \right\}^2 \\ &= O \left(\frac{1}{r_n} \right) + O \left(\frac{m_n^2}{L_n r_n^2} \right) + O \left(\frac{m_n^4}{L_n^3 r_n^3} \right). \end{aligned}$$

Zastosujemy teraz Lemat 2.9 do tablicy $\{Y_{n,t} : t = 0, \dots, r_n - 1\}$, która zdefiniowana została w dowodzie Twierdzenia 3.7. Zauważmy, że jest ona wierszowo 1-zależna i, z Lematu 2.6, mamy następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} E|Y_{n,t}|^2 &\leq 2E \left| \frac{1}{L_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \frac{1}{b_n} (Z_{ub+tT+1}^2 - EZ_{ub+tT+1}^2) \right|^2 + 2 \left| \frac{1}{L_n} \sum_{u=0}^{L_n-1} \frac{1}{b} EZ_{ub+tT+1}^2 \right| \\ &= O \left(\frac{m_n^2}{L_n} \right) + O(1). \end{aligned}$$

Ostatnim krokiem jest pokazanie, że zdefiniowana w dowodzie Wniosku 3.6 wielkość R_n jest zbieżna do 0. Wykorzystujemy w tym celu niezależność zmiennych losowych $Z_{ub+tT+1}$ i $Z_{(u+\kappa)b+tT+1}$ dla $\kappa > 1$ oraz oszacowanie

$$\left| Cov \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{ub+tT+1}, \frac{1}{\sqrt{b_n}} Z_{(u+1)b+tT+1} \right) \right| = O \left(\frac{m_n^2}{b_n} \right).$$

■

Można powiedzieć, że powyższe twierdzenie formalizuje rezultaty pracy Chan i in. (2004), gdyż zakładamy tutaj, że długość "okna zależności" jest mała (w odpowiednim tempie) w stosunku do długości bloku i okresu. Jeśli ponadto założymy jak w pracy Chan i in. (2004), że $B(t, \tau) \geq 0$, to założenie (iv) będzie implikowało założenie (iii). Założenia $m_n^2/L_n = O(1)$ i $b_n/m_n^2 \rightarrow \infty$ są pewnymi ograniczeniami na to jak możemy dzielić okresy. W tym kontekście Twierdzenie 3.7 i Wniosek 3.6 dają mniejsze ograniczenia niż Twierdzenie 3.8.

Chcemy teraz wytłumaczyć bardziej formalnie, dlaczego założenie $T_n \rightarrow \infty$ jest konieczne do zgodności PBB. W dowodzie Twierdzenia 3.7 i Wniosku 3.6 wymagaliśmy, aby jednostajnie względem u i t

$$Cov \left(\frac{1}{\sqrt{b_n}} \sum_{j=ub_n+tT_n+1}^{(u+1)b_n+tT_n} X_j, \frac{1}{\sqrt{b_n}} \sum_{j=(u+1)b_n+tT_n+1}^{(u+2)b_n+tT_n} X_j \right) \rightarrow 0.$$

Powyższa zbieżność nie zachodzi jednak dla danych zależnych jeśli nie mamy $b_n \rightarrow \infty$, co implikuje $T_n \rightarrow \infty$. Pokazujemy ten efekt dokładniej w poniższym przykładzie.

Przykład 3.3. Niech $\{X_t : t \in \mathbb{N}\}$ będzie szeregiem czasowym spełniającym warunki moment-mieszanie z Twierdzenia 3.7. Dla uproszczenia założymy, że

$$X_t = f(t) + Z_t,$$

gdzie funkcja f jest okresowa z okresem T i szereg czasowy $\{Z_t\}$ ma zerową średnią, jest WS(2) oraz m -zależny, gdzie $m < b < T$. Wiadomo, że wtedy

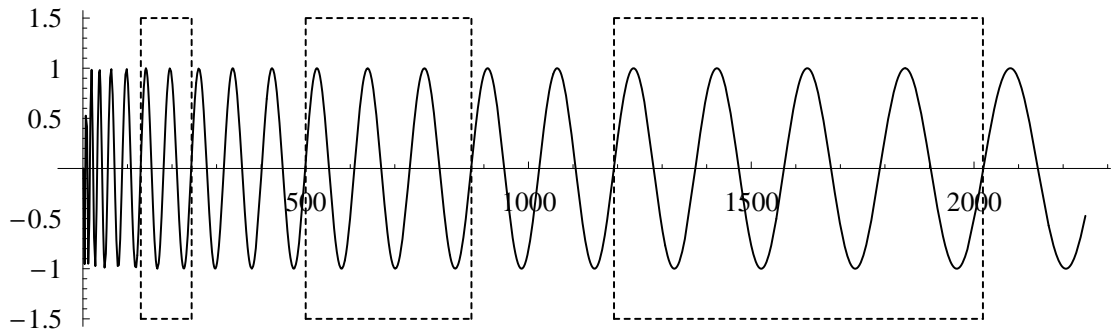
$$\sigma^2 = \sum_{\tau=-m}^m B_Z(\tau).$$

Jednakże z dowodu Twierdzenia 3.7 (patrz zbieżność (3.23)) dostajemy, że

$$Var^* \left(\sqrt{n} \bar{X}_n^* \right) \xrightarrow{P} \sigma^2 - \frac{2}{b} \sum_{\tau=1}^m \tau B_Z(\tau),$$

co oznacza, że PBB jest asymptotycznie niezgodny, o ile $\sum_{\tau=1}^m \tau B_Z(\tau) \neq 0$.

Zatem metoda PBB nie jest tak uniwersalna jak MBB. Poniżej przedstawiamy dwie praktyczne sytuacje, w których bootstrap bloków okresowych można stosować i jedną w której założenia przedstawionych twierdzeń nie są spełnione.

Rysunek 3.4. Przykład sygnału *chirp*.

Przykład 3.4 (Sygnał typu *down-chirp*). Sygnały typu *chirp*, to sygnały w których częstotliwość maleje (*down-chirp*) lub wzrasta (*up-chirp*) wraz z czasem. Są często spotykane w radarach, efektach Dopplera i dyspersji. Typowym przykładem jest sygnał $f(t) = \sin(2\pi t/T_t)$, gdzie T_t jest funkcją rosnącą o niezbyt szybkim tempie przyrostu. Jeśli obserwujemy sygnał *down-chirp* fragmentami (patrz Rysunek 3.4), możemy założyć, że w każdym oddzielnym fragmencie okres jest stały. Okres ten wzrasta dla kolejnych fragmentów. Dlatego jeśli obserwujemy w ten sposób zaszumiony sygnał *down-chirp*, możemy stosować bootstrap bloków okresowych.

Przykład 3.5 (Łańcuch komunikatorów). Załóżmy, że obserwowany sygnał interferuje kolejno z innymi okresowymi sygnałami. Sygnał ten może być zatem przedstawiony jako

$$X_{n,t} = f_1(t) + \dots + f_n(t) + Z_{n,t},$$

gdzie f_1, \dots, f_n są funkcjami z okresami T_1, \dots, T_n , a $\{Z_{n,t}\}$ jest pewnym szumem. Po interferencji z n sygnałami okres sygnału $\{X_{n,t}\}$ wynosi $NWW(T_1, \dots, T_n)$ i może wzrastać w kolejnych krokach.

Przykład 3.6 (Próbkowanie procesu stochastycznego). Rozważmy okresowo z okresem T skorelowany proces stochastyczny $\{Y_t : t \in \mathbb{R}\}$ i estymację wielkości $(1/T) \int_0^T E X_t dt$. Załóżmy, że próbkujemy ten proces coraz gęściej, tzn. w n -tym kroku dostępne są r_n okresy i wartości w punktach odległych o T_n/w_n , gdzie w_n jest pewnym ciągiem rosnącym do nieskończoności. Otrzymujemy w ten sposób tablicę zmiennych losowych $\{X_{n,t} : t = 1, \dots, d_n\}$, gdzie $d_n = r_n w_n$ oraz $X_{n,t} = Y_{t \frac{T}{w_n}}$. Tablica ta jest wierszowo PC z okresem $w_n \rightarrow \infty$. Niestety dla takiego procesu próbkowania nie zachodzą prezentowane twierdzenia o zgodności, gdyż mamy tutaj problem z rosnącą zależnością w tablicy $\{X_{n,t}\}$. Jeśli α_Y jest funkcją mieszania procesu $\{Y_t\}$, to $\alpha_n(t) = \alpha_Y(t \frac{T}{w_n})$. Załóżmy bez straty ogólności, że $\alpha_Y(1) > 0$ i że ta funkcja mieszania jest nierosnąca. Mamy następujące oszacowanie dla dowolnej liczby $p \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=1}^{\infty} \alpha_n^p(\tau) &= \sum_{\tau=1}^{\infty} \alpha_Y^p\left(\tau \frac{T}{w_n}\right) \\ &= \sum_{1 \leq \tau \leq \frac{w_n}{T}} \alpha_Y^p\left(\tau \frac{T}{w_n}\right) + \sum_{\tau > \frac{w_n}{T}} \alpha_Y^p\left(\tau \frac{T}{w_n}\right) \geq w_n \frac{\alpha_Y(1)}{T} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Zatem nie są spełnione warunki jednostajnej sumowalności współczynników mieszania. Nawet jeśli założyć, że proces $\{Y_t\}$ jest m -zależny, to tablica $\{X_{n,t}\}$ jest wierszowo $m_n = mw_n/T$ zależna, a więc niemożliwe jest aby $b_n/m_n^2 \rightarrow \infty$.

Zastosowania i porównania

Pokażemy na przykładach jak metody resamplingowe mogą wspomóc wnioskowanie statystyczne dla szeregów czasowych okresowych i prawie okresowych. W Paragrafie 4.1 w oparciu o pracę Synowiecki (2007a) resampling wykorzystamy w problemie graficznej identyfikacji częstotliwości, a następnie w problemie testowania (odróżniania) okresu oraz testowanie stacjonarności (Lenart i in., 2008a). Podkreślimy, że jak do tej pory w literaturze opisano niewiele efektywnych narzędzi statystycznych, które mogłyby być użyte w tych zagadnieniach. Ostatnie dwa paragrafy poświęcone są porównaniom metod resamplingowych.

4.1. Test graficzny na stacjonarność i identyfikację częstotliwości

Zacznijmy od zilustrowania w jaki sposób procedura MBB może być użyta do detekcji istotnych częstotliwości funkcji autokowariancji (czyli zbioru Λ_τ). W przypadku szeregów czasowych okresowo skorelowanych problem ten jest równoważny z problemem identyfikacji okresu. W praktyce inżynierskiej (Yeung i Gardner, 1996; Dehay i Leśkow, 1996b; Gardner i in., 2006) oblicza się wartości estymatora $\hat{a}_n(\lambda, \tau)$ dla $\lambda \in [0, 2\pi)$. Następnie częstotliwości, które dają duże piki wybierane są jako istotne. Wybór ten jest problematyczny - decyzja czy dany pik powinien być uznany za istotny powinna być oparta o przedziały ufności. Ponieważ asymptotyczna macierz wariancji estymatora $\hat{a}_n(\lambda, \tau)$ jest skomplikowana (Twierdzenie 2.6 oraz Dehay i Leśkow, 1996a; Leśkow i Synowiecki, 2006), przedziały asymptotyczne oparte o rozkład graniczny mogą być mało wiarygodne. Dlatego proponujemy użycie procedury MBB, dzięki której otrzymujemy w sposób efektywny przedziały ufności bez odwoływania się do dokładnej postaci rozkładu asymptotycznego. Dodajmy, że najbardziej pożądane byłyby przedziały ufności dla parametru $a(\lambda, \tau)$ jednocześnie ze względu na λ . W pracy Dehay i Leśkow (1996a) sformułowano funkcjonalne CTG względem τ . Jednakże, jak dotąd nie ma takich wyników względem λ .

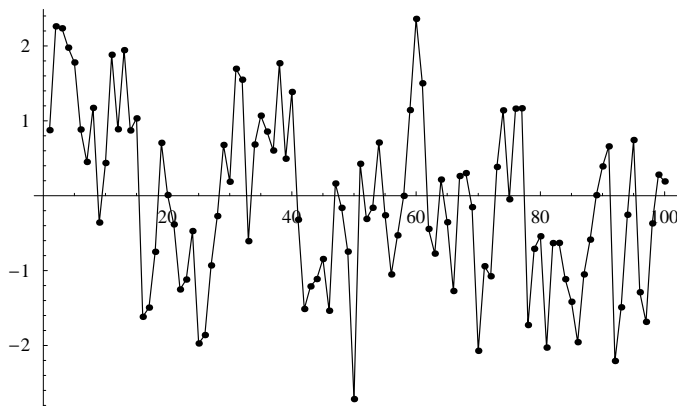
W celu przeprowadzenia symulacji rozważmy następujący model PAR(1)

$$X_t = a_t X_{t-1} + \epsilon_t, \quad (4.1)$$

gdzie funkcja

$$a_t = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$$

jest okresowa z okresem $T = 3$, a reszty $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ są i.i.d. ze standardowego rozkładu normalnego. Model ten jest PC z okresem $T = 3$ (Bloomfield i in., 1994) oraz posiada funkcję α -mieszania zbieżną do zera w tempie geometrycznym. Rysunek 4.1 przedstawia przykładową realizację tego modelu. Gdyby szereg ten posiadał silną okresowość



Rysunek 4.1. Przykładowa realizacja szeregu czasowego z modelu (4.1), długość próbki wynosi $n=100$.

na poziomie wartości oczekiwanej, długość okresu można by odgadywać na podstawie takiego wykresu. Symulowany szereg ma jednak zerową wartość oczekiwaną, a okresowość występuje na poziomie drugich momentów i nie jest możliwe "odgadnięcie" długości okresu na podstawie wykresu danych. Rysunek 4.2 przedstawia część rzeczywistą i urojoną estymatora $\hat{a}_n(\lambda, 1)$ jako funkcję częstotliwości $\lambda \in [0, \pi]$. Ponieważ

$$\hat{a}_n(2\pi - \lambda, \tau) = \overline{\hat{a}_n(\lambda, \tau)},$$

nie musimy przedstawiać wartości w przedziale $(\pi, 2\pi)$. Na tym etapie nie jesteśmy w stanie rozstrzygnąć, które częstotliwości są rzeczywiście istotne, gdyż obserwujemy kilkanaście pików o zbliżonym poziomie. W celu rozwiązania tego problemu rozważmy następujące zagadnienie testowania

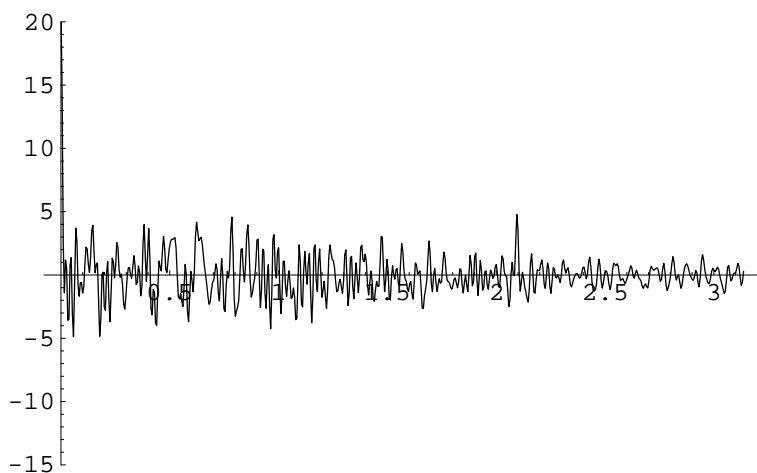
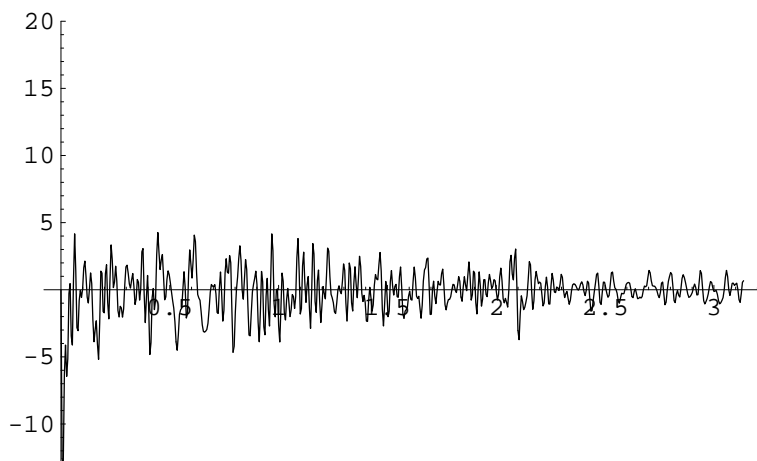
$$H_0 : a(\lambda, \tau) = 0$$

$$H_1 : a(\lambda, \tau) \neq 0.$$

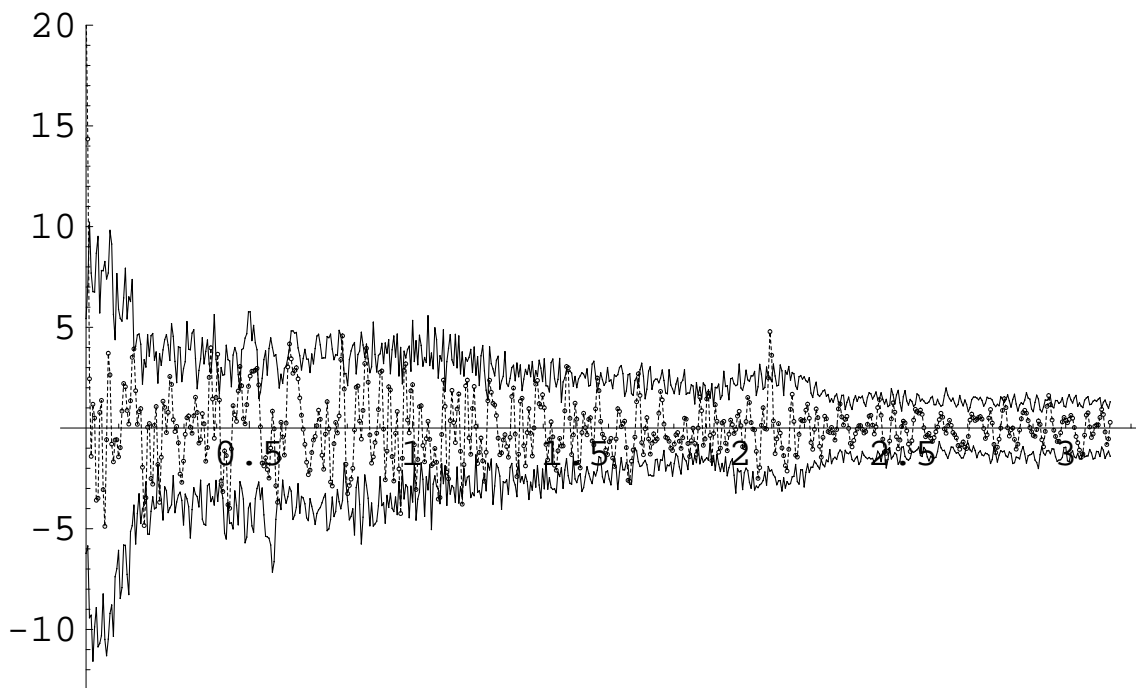
Aby zweryfikować hipotezę H_0 użyjemy statystyki $T_n(\lambda, \tau) = \sqrt{n} \operatorname{Re}(\hat{a}_n(\lambda, \tau))$ (odzielnie dla części rzeczywistej i urojonej), która przy hipotezie H_0 ma scentrowany rozkład normalny, a przy H_1 dąży do plus lub minus nieskończoności. Kwantyle statystyki $T_n(\lambda, \tau)$ otrzymujemy przy pomocy procedury MBB, czyli aproksymujemy za pomocą Monte Carlo kwantyle jej wersji bootstrapowej

$$T_n^*(\lambda, \tau) = \sqrt{n} (\operatorname{Re}(\hat{a}_n^*(\lambda, \tau)) - \operatorname{Re}(\hat{a}_n(\lambda, \tau))).$$

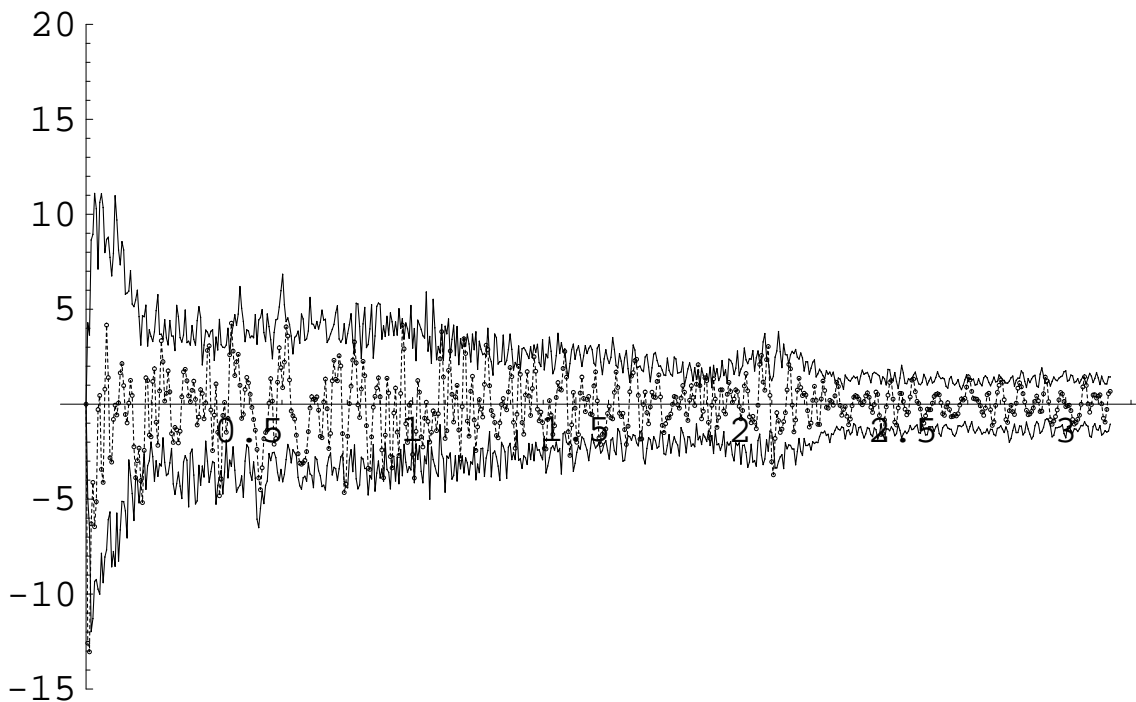
W naszych symulacjach wzięliśmy długość bloku $b = 30$. Rysunek 4.3 przedstawia wartości estymatora $\hat{a}_n(\lambda, 1)$ (linia kropkowana) w porównaniu z kwantylami bootstrapowymi rzędu 0.05 i 0.95 statystyki T_n przeskalowanymi przez \sqrt{n} (linia ciągła). Jeśli w jakimś punkcie linia przerywana wychodzi poza granicę wyznaczoną przez linie ciągłe, to w tym punkcie odrzucamy hipotezę H_0 . Jak widać z rysunku, jedynymi punktami, gdzie taka sytuacja ma miejsce są $\lambda \approx 2.1 \approx 2\pi/3$ oraz $\lambda \approx 0$. Dlatego możemy wnioskować, że nasz szereg ma okres $T = 3$, ponieważ wtedy $\Lambda_\tau \subset \{0, 2\pi/3, 4\pi/3\}$. Gdybyśmy nie zaobserwowali innej niż $\lambda = 0$ istotnej częstotliwości dla żadnego τ , moglibyśmy stwierdzić, że obserwowany szereg jest stacjonarny. Z tej perspektywy procedura ta może być używana jako graficzny test stacjonarności w klasie szeregów czasowych APC.

(a) Wartości estymatora $\text{Re}(\hat{a}_n(\lambda, 1))$ względem $\lambda \in [0, \pi]$.(b) Wartości estymatora $\text{Im}(\hat{a}_n(\lambda, 1))$ względem $\lambda \in [0, \pi]$.

Rysunek 4.2. Próba detekcji istotnych częstotliwości dla symulowanego szeregu czasowego. Długość próbki wynosi $n = 300$.



(a) Wartości estymatora $\text{Re}(\hat{a}_n(\lambda, 1))$ (linia kropkowana) oraz przedziały ufności oparte na procedurze MBB (linia ciągła) względem $\lambda \in [0, \pi]$.



(b) Wartości estymatora $\text{Im}(\hat{a}_n(\lambda, 1))$ (linia kropkowana) oraz przedziały ufności oparte na procedurze MBB (linia ciągła) względem $\lambda \in [0, \pi]$.

Rysunek 4.3. Detekcja istotnych częstotliwości dla symulowanego szeregu czasowego przy wykorzystaniu procedury MBB. Długość próbki wynosi $n = 300$, a bloku $b = 30$.

4.2. Test na odróżnianie okresów

W niektórych sytuacjach długość okresu nie jest dokładnie znana, ale wiadomo na przykład, że może ona przyjmować tylko dwie możliwe wartości. Możemy zatem sformułować następujący problem testowania

$$H_0: B_X(\cdot, \tau) \text{ jest okresowa z okresem } T_0,$$

$$H_1: B_X(\cdot, \tau) \text{ jest okresowa z okresem } T_1,$$

gdzie $\tau \in \mathbb{Z}$ i jest ustalone. Będzie używać statystyki testowej

$$U_n(\tau) = \sqrt{n} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_{T_1} \setminus \Lambda_{T_0}} |\hat{a}_n(\lambda, \tau)| \right),$$

gdzie dla każdego $T \in \mathbb{N}$,

$$\Lambda_T = \left\{ \frac{2\pi k}{T} : k = 0, \dots, T-1 \right\}.$$

Statystyka ta jest postaci $U_n(\tau) = v_n t_n(X_1, \dots, X_n)$, gdzie $v_n = \sqrt{n}$ oraz

$$t_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\lambda \in \Lambda_{T_1} \setminus \Lambda_{T_0}} |\hat{a}_n(\lambda, \tau)|.$$

Z twierdzenia o odwzorowaniu ciągłym i Twierdzenia 2.6 przy H_0 statystyka $U_n(\tau)$ zbiega do pewnego rozkładu $J'(P)$. Ponadto przy H_0 mamy

$$t_n(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow{P} 0,$$

a przy H_1

$$t_n(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow{P} t(P),$$

gdzie

$$t(P) = \sum_{\lambda \in \Lambda_{T_1} \setminus \Lambda_{T_0}} |a(\lambda, \tau)| > 0.$$

Przy założeniu, że rozkład $J'(P)$ jest niezdegenerowany (może się zdegenerować tylko, jeśli dla każdego $\lambda \in \Lambda_{T_1} \setminus \Lambda_{T_0}$ wariancja statystyki $\sqrt{n}|\hat{a}_n(\lambda, \tau)|$ zbiega do zera), kwantyle $U_n(\tau)$ mogą być aproksymowane za pomocą procedury subsamplingu, tzn. przez rozkład empiryczny

$$L_{n,b}(x) = \frac{1}{n-b+1} \sum_{t=1}^{n-b+1} \mathbf{1}_{\sqrt{b} \sum_{\lambda \in \Lambda_{T_1} \setminus \Lambda_{T_0}} (|\hat{a}_{n,b,t}^S(\lambda, \tau)| - |\hat{a}_n(\lambda, \tau)|) \leq x}. \quad (4.2)$$

Duże wartości statystyki $U_n(\tau)$ świadczą na korzyść H_1 . Zakładając nominalny poziom α , wartość krytyczna wynosi $c_{n,b}(1-\alpha)$, gdzie

$$c_{n,b}(1-\alpha) = \inf\{x : L_{n,b}(x) \geq 1-\alpha\}.$$

Zauważmy, że zgodność subsamplingu dla estymatora $|\hat{a}_n(\lambda, \tau)|$ można uzyskać stosując identyczne kroki jak w dowodzie Twierdzenia 3.1. Różnica polega na dodatkowym

zastosowaniu twierdzenia o odwzorowaniu ciągłym dla przypadku $|a(\lambda, \tau)| = 0$ i metody delta dla przypadku $|a(\lambda, \tau)| \neq 0$ z funkcją $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dlatego przy hipotezie H_0

$$Prob_P(U_n(\tau) > c_{n,b}(1 - \alpha)) \rightarrow \alpha \text{ dla } n \rightarrow \infty,$$

podczas gdy przy H_1

$$Prob_P(U_n(\tau) > c_{n,b}(1 - \alpha)) \rightarrow 1 \text{ dla } n \rightarrow \infty,$$

co oznacza, że nasz test jest asymptotycznie zgodny.

Powyższy test może oczywiście być zastosowany dla pewnego skończonego zbioru argumentów $\{\tau_1, \dots, \tau_K\}$ ze statystyką $U_n = \sum_{j=1}^K U_n(\tau_j)$. Zauważmy, że ponieważ $|\hat{a}_n(\lambda, \tau)| = |\hat{a}_n(\lambda, -\tau)|$, statystyka $U_n(\tau)$ jest parzysta względem τ . Weźmy $T_0 = 1$ i $\tau \in \{0, 1, \dots, K\}$, gdyż dla szeregów z krótką pamięcią można postulować, że $B(t, \tau) = 0$ dla dużych $|\tau|$. Otrzymujemy zatem test, który odróżnia szereg stacjonarny ($T = 1$) od szeregu PC z okresem $T > 1$, tzn.

$$H_0: \{X_t : t \in \mathbb{Z}\} \text{ jest WS}(2), \text{ równoważnie } T = 1 \text{ lub } \Lambda_T = \{0\},$$

$$H_1: \{X_t : t \in \mathbb{Z}\} \text{ jest PC z okresem } T, \text{ gdzie } T > 1.$$

Podkreślmy, że jak do tej pory nie ma ogólnych procedur testowania stacjonarności. Pewne sposoby opracowane zostały w klasie modeli liniowych. Najbardziej znany jest test pierwiastków jednostkowych (patrz np. Kwiatkowski i in., 1992). Dla modeli liniowych okresowych Vecchia i Ballerini (1991) opisali procedurę testowania okresowości dla funkcji autokorelacji. Hurd i Gerr (1990) oraz Broszkiewicz-Suwaj i in. (2004) zaprezentowali pewne testy graficzne dotyczące struktury okresowej w dziedzinie częstotliwości. Pomysł zastosowania w tym problemie kwantyli estymatora $\hat{a}_n(\lambda, \tau)$ pochodzi z prac Dandawate i Giannakis (1994); Dehay i Leśkow (1996b). Sugerowali oni estymację wariancji asymptotycznej i użycie kwantyli z rozkładu χ^2 do studentyzowanej wersji tego estymatora. Porównanie tego podejścia z subsamplingiem znajduje się w ostatniej części niniejszego paragrafu.

Aby zobaczyć jak subsamplingowy test odróżniania okresów działa w praktyce ograniczymy się do modeli PC postaci

$$X_t = \left(2 + \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right) Z_t, \quad (4.3)$$

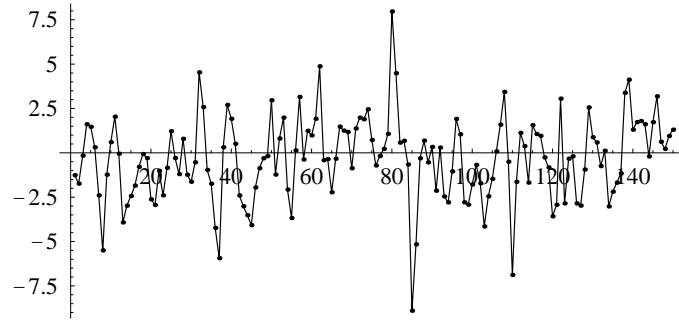
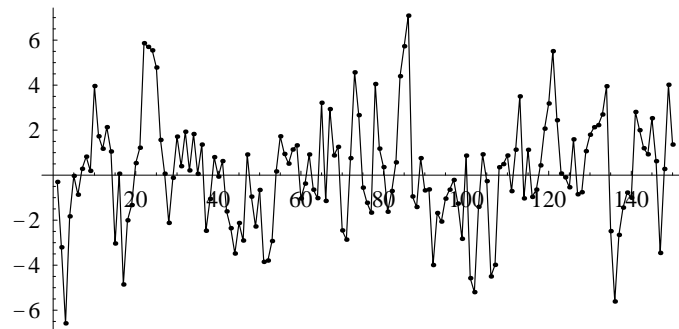
gdzie $T \in \mathbb{N}$ i szereg czasowy $\{Z_t : t \in \mathbb{N}\}$ pochodzi z modelu AR(1), tzn.

$$Z_t = 0.5 \cdot Z_{t-1} + \epsilon_t.$$

Innowacje $\{\epsilon_t : t \in \mathbb{N}\}$ są niezależne i pochodzą z rozkładu standardowego normalnego, jednostajnego na przedziale $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, i scentrowanego wykładniczego o jednostkowej wariancji. Szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{N}\}$ spełnia wszystkie założenia Twierdzenia 3.1 i ma okresowe momenty dowolnego rzędu. Załóżmy, że natura obserwowanego zjawiska dopuszcza dwie możliwe długości okresu: 6 i 7. Rozważmy następujący problem testowania:

$$H_0: B(\cdot, 0) \text{ jest okresowa z okresem } 6,$$

$$H_1: B(\cdot, 0) \text{ jest okresowa z okresem } 7.$$

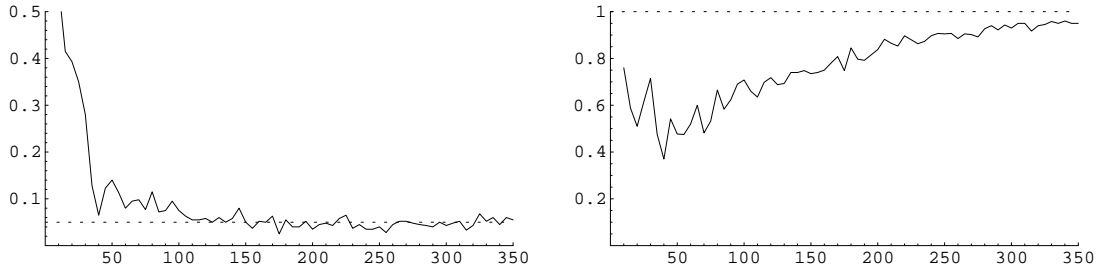
(a) Realizacja przy H_0 .(b) Realizacja przy H_1 .

Rysunek 4.4. Przykładowe realizacje szeregu czasowego z modelu (4.3), długość próbek wynosi $n=150$.

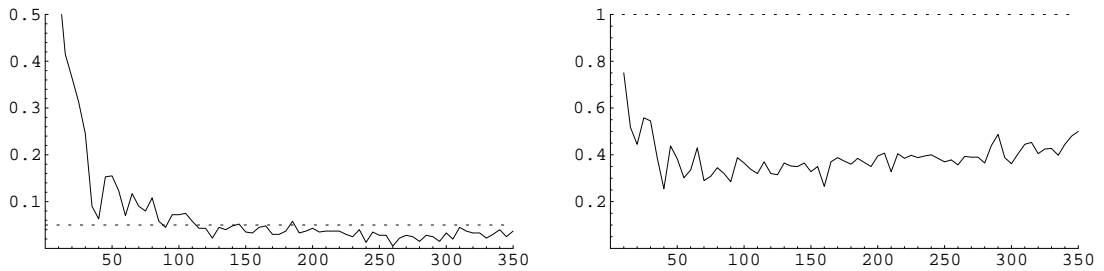
Przykłady realizacji modelu (4.3) przedstawione są na Rysunku 4.4. Oczywiście nie byłibyśmy w stanie odgadnąć z tych realizacji długości okresów. Rysunek 4.5 przedstawia prawdopodobieństwo błędu pierwszego rodzaju i moc testu dla długości bloku $b = 1.5\sqrt{n}$. Charakterystyki te zostały uzyskane za pomocą symulacji Monte Carlo. Aby otrzymać prawdopodobieństwo błędu pierwszego rodzaju 1000 razy symulowano próbki o długości n z hipotezy H_0 . Następnie zliczono ile razy test odrzuca tę hipotezę. Aby otrzymać moc testu symulowano z H_1 . Widać, że test subsamplingowy bardzo dobrze odróżnia okresy. Poziom nominalny $\alpha = 5\%$ jest utrzymywany dla wszystkich trzech rozkładów innowacji i próbek szeregu $\{X_t\}$ od długości od $n = 100$. Moc testu natomiast jest bliska 100% dla reszt z rozkładu jednostajnego dla $n \geq 200$. Z drugiej strony, jeśli rozkład innowacji jest skośny (Rysunek 4.5(b)), moc testu rośnie znacznie wolniej.

Rysunki 4.5(a) i 4.6 pokazują z kolei charakterystyki testu subsamplingowego dla różnych wyborów długości bloku b . Możemy zauważyć, że zwiększenie tempa b powoduje większą liberalność testu. Oznacza to, że test częściej odrzuca hipotezę H_0 zarówno przy H_1 jak i przy H_0 . Jak do tej pory nie ma żadnych sposobów na optymalny wybór bloku dla metod resamplingowych stosowanych do niestacjonarnych szeregów czasowych. Dla przypadku stacjonarnego są pewne rezultaty dotyczące optymalnego tempa. Okazuje się (Hall i in., 1995), że zależy ono od tego, co chcemy aproksymować i wynosi $b = C_1 n^{1/3}$ dla wariancji, $b = C_2 n^{1/4}$ dla kwantyla jednostronnego i $b = C_3 n^{1/5}$

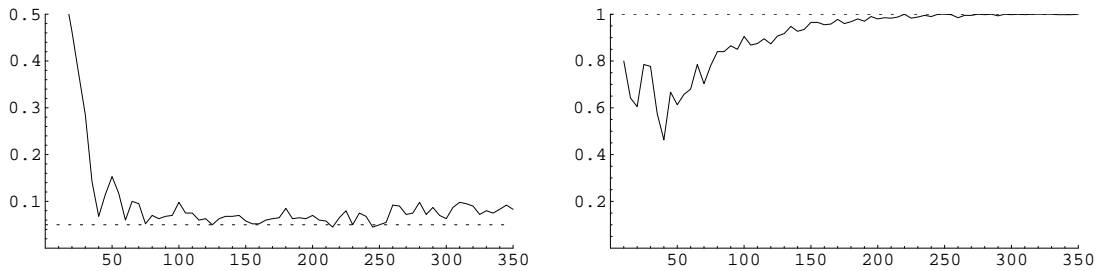
dla kwantyla obustronnego. Stałe C_1, C_2, C_3 zależą od nieznanymi charakterystyk szeregu czasowego. Pewne empiryczne sposoby doboru długości bloku zostały zaprezentowane w Rozdziale 9 monografii Politis i in. (1999).



(a) Innowacje z rozkładu normalnego.



(b) Innowacje z rozkładu wykładniczego.



(c) Innowacje z rozkładu jednostajnego.

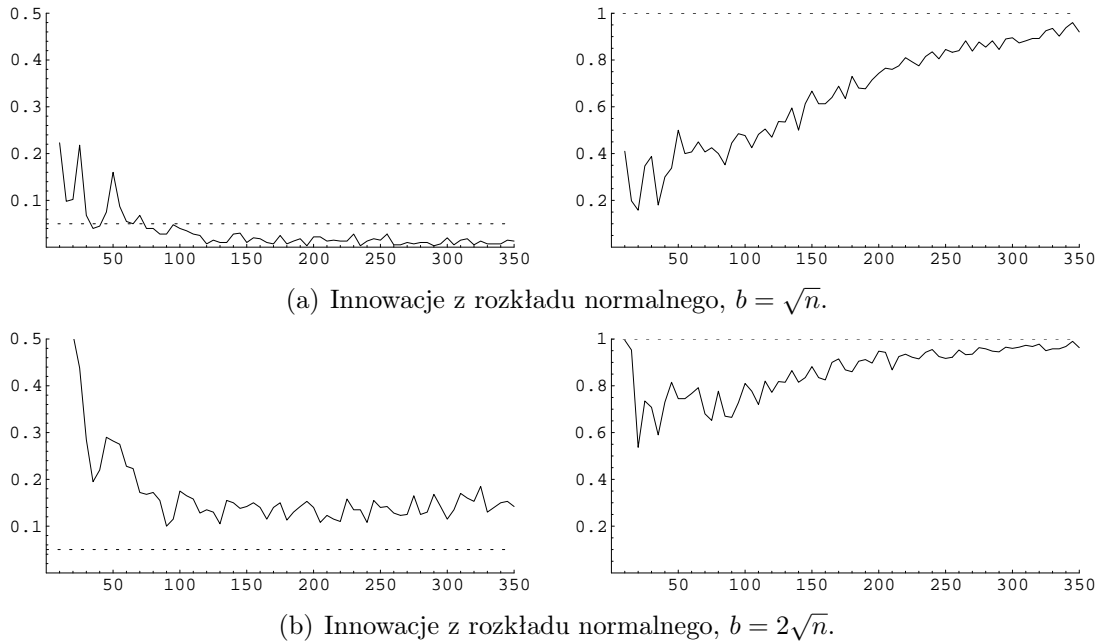
Rysunek 4.5. Aproksymacje charakterystyk subsamplingowego testu odróżniającego okresy otrzymane za pomocą Monte Carlo. Długość bloku wynosi $b = 1.5\sqrt{n}$ dla próbek o długości od $n = 10$ do 350. Lewa i prawa kolumna przedstawiają odpowiednio prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy H_0 pod warunkiem prawdziwości H_0 (lewa) i pod warunkiem H_1 (prawa).

W dalszej kolejności będziemy chcieli przedstawić porównanie testu subsamplingowego i asymptotycznego (Dehay i Leśkow, 1996b) stacjonarności przy alternatywie PC. Będziemy testować problem

$$H_0: B_X(\cdot, 0) \text{ jest okresowa z okresem } 1 \text{ (stacjonarność) ,}$$

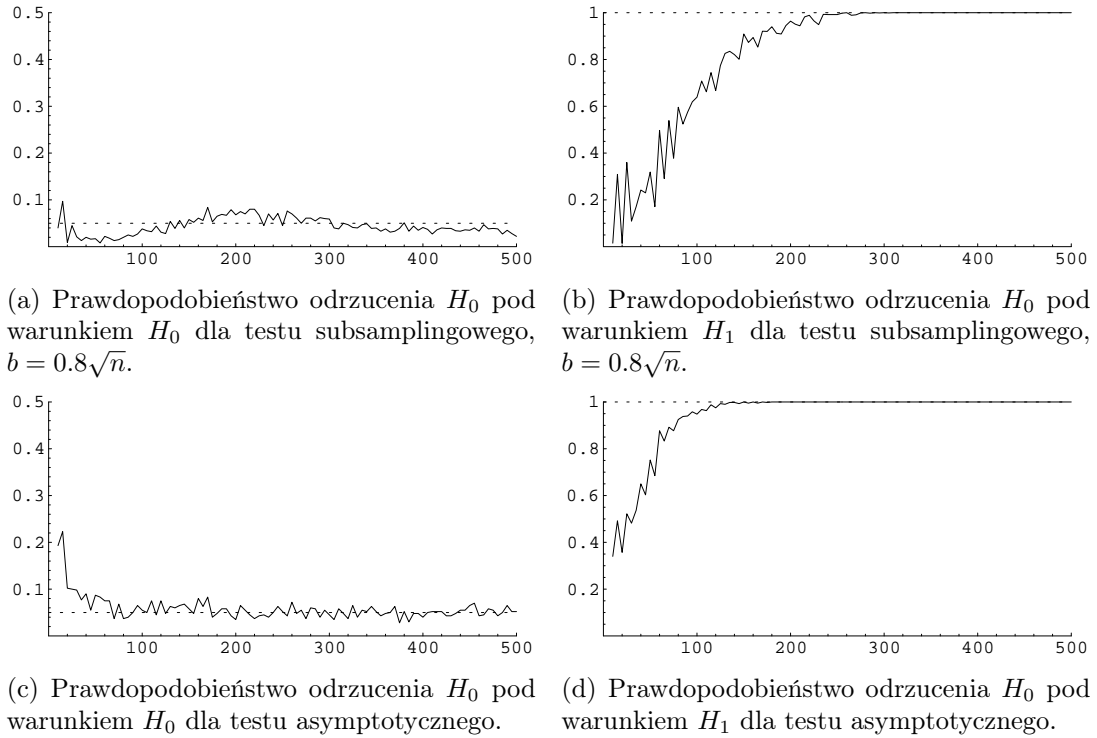
$$H_1: B_X(\cdot, 0) \text{ jest okresowa z okresem } 11$$

dla modelu (4.3). Do porównania wybierzemy pojedynczą częstotliwość $\lambda = 2\pi/11$ oraz $\tau = 0$. Statystykami testowymi są $U_n = \sqrt{n}|\hat{a}_n(\lambda, \tau)|$ dla testu subsamplingowego oraz $Z_n = n|\hat{C}_n^{-1/2}(\lambda, \tau, \tau)\hat{a}_n(\lambda, \tau)|^2$ dla testu asymptotycznego, gdzie $\hat{C}_n(\lambda, \tau, \tau)$ jest estymatorem macierzy wariancji asymptotycznej (str. 208, Dehay i Leśkow, 1996b).

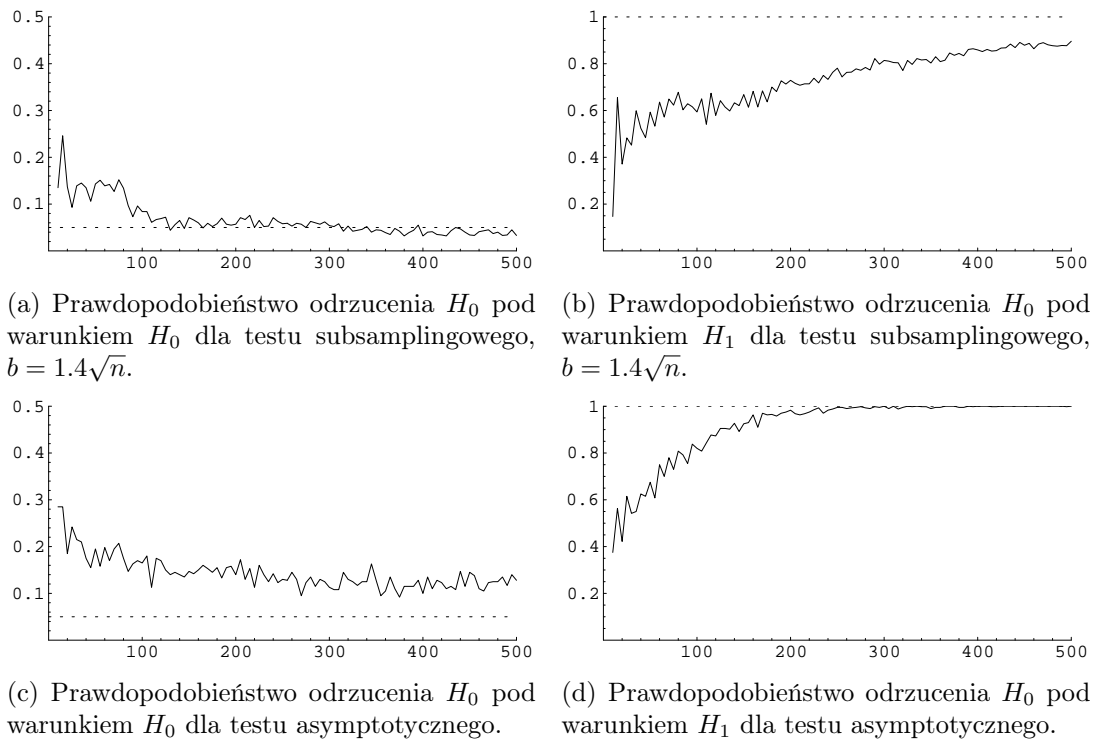


Rysunek 4.6. Aproksymacje charakterystyk subsamplingowego testu odróżniającego okresy dla różnych długości bloków.

Rysunki 4.7 i 4.8 przedstawiają prawdopodobieństwo błędu pierwszego rodzaju i moce testów dla reszt gaussowskich i wykładniczych. W przypadku gaussowskim prawdopodobieństwo odrzucenia H_0 pod warunkiem H_0 jest podobne dla obu statystyk U_n i Z_n . Moc natomiast wskazuje na przewagę testu asymptotycznego. W przypadku wykładniczym test subsamplingowy zachowuje się znacznie lepiej niż asymptotyczny. Prawdopodobieństwo odrzucenia H_0 przy H_0 dla testu asymptotycznego jest zbyt duże nawet dla próbek o wielkości 1000-2000, czego nie obejmuje już Rysunek 4.8. Efekt ten może być związany z tym, że aproksymacja rozkładem χ^2 i estymator wariancji asymptotycznej nie sprawdzają się dla danych skośnych. Możemy zatem stwierdzić, że subsampling lepiej działa dla tych danych. Dodajmy, że w pracy Dehay i Leśkow (1996b) nie podano jak należy stosować tę procedurę, żeby uwzględnić kilka częstości λ i wartości τ jednocześnie. Ponadto procedura asymptotyczna wymaga mocniejszych założeń o wyjściowym szeregu czasowym $\{X_t\}$ (momenty rzędu osiem) oraz obliczania numerycznego rozkładu Cholesky'ego i odwracania macierzy losowej. Operacje te mogą być niestabilne numerycznie.



Rysunek 4.7. Porównanie subsamplingowego i asymptotycznego testu stacjonarności dla innowacji z rozkładu normalnego w modelu (4.3).

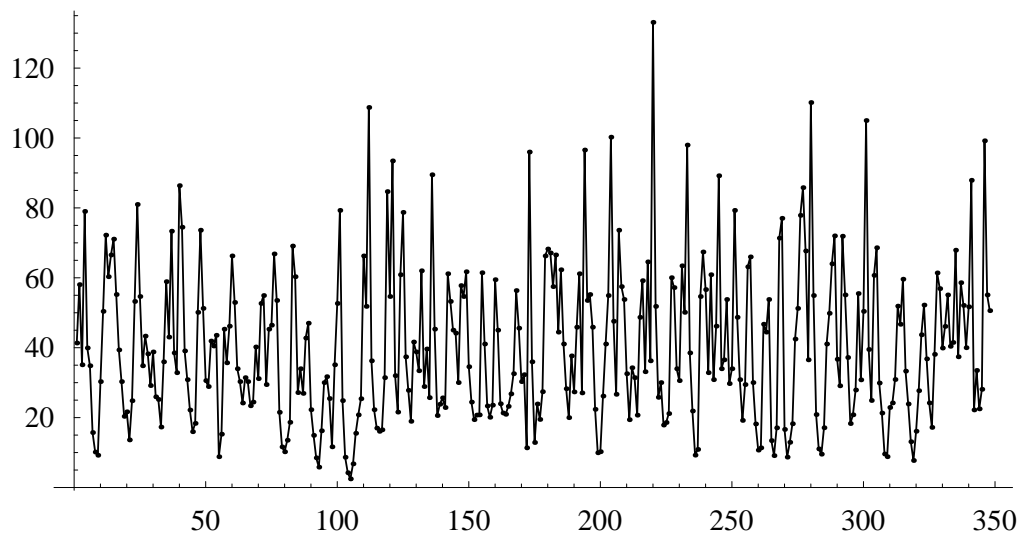


Rysunek 4.8. Porównanie subsamplingowego i asymptotycznego testu stacjonarności dla innowacji z rozkładu wykładniczego w modelu (4.3).

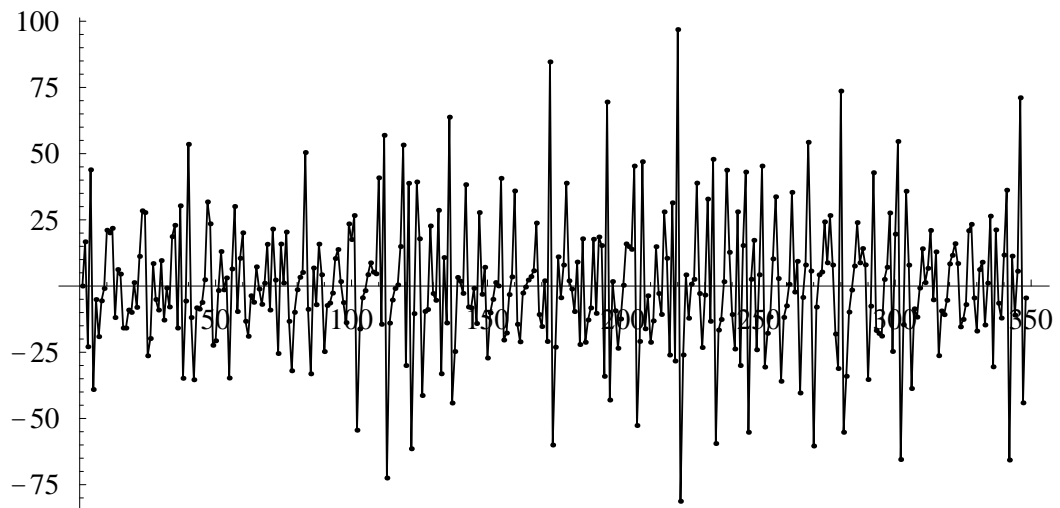
4.3. Przykład dla danych rzeczywistych

Pokażemy teraz jak subsampling pomaga wykrywać strukturę okresową na przykładzie danych autentycznych. Będziemy analizować graficznie zachowanie estymatora $|\hat{a}_n(\lambda, \tau)|$ i sprawdzać, czy wartości tego estymatora są istotne. Za pomocą subsamplingu otrzymamy przedziały ufności dla parametrów $|a(\lambda, \tau)|$ oddzielnie dla częstotliwości $\lambda \in \Lambda$ i wartości τ .

Analizowane dane przedstawiają przepływ rzeki Bay du Nord w Nowej Fundlandii (Hipel i McLeod, 1994). Rysunek 4.9(a) przedstawia przepływ za każdy miesiąc w latach 1953-1981 (348 obserwacji).



(a) Dane źródłowe.



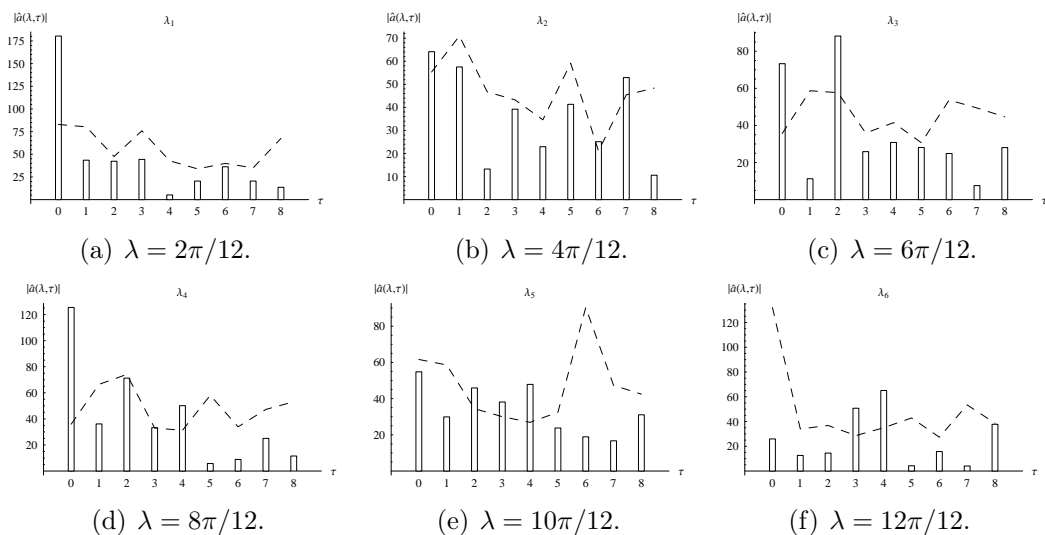
(b) Dane z usuniętą sezonowością poprzez różnicowanie sezonowe.

Rysunek 4.9. Miesięczny przepływ w rzece Bay du Nord.

Łatwo zauważyć, że dane posiadają okresowość ($T = 12$) w wartości oczekiwanej. Ponieważ jesteśmy zainteresowani okresowością w momentach drugiego rzędu, możemy użyć estymatora $\hat{a}_n(\lambda, \tau)$ w wersji dla niezerowej wartości oczekiwanej. Możemy też usunąć okresowość w wartości oczekiwanej za pomocą różnicowania z opóźnieniem $T = 12$. Różnicowanie takie jest często stosowane podczas modelowania danych (standardowa procedura w pakietach statystycznych). Do zróżnicowanego szeregu stosuje się model sezonowy ARMA(p, q), który jest postaci

$$X_t - \sum_{k=1}^p a_k X_{t-kT} = \epsilon_t - \sum_{k=1}^q b_k \epsilon_{t-kT}.$$

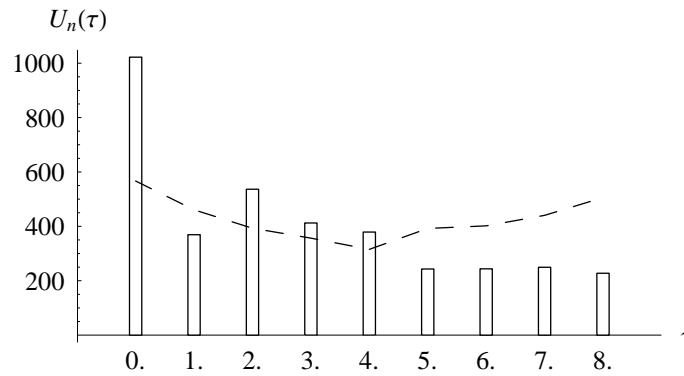
Szereg ten jest jednak stacjonarny (WS(2)) i nie modeluje okresowości w drugich momentach. Zatem testowanie stacjonarności przeciwko alternatywie PC jest w tym momencie bardzo istotne pod kątem dalszej analizy i modelowania danych. Dlatego procedurę subsamplingu zastosujemy do szeregu o zerowej wartości oczekiwanej, który powstaje przez różnicowanie sezonowe.



Rysunek 4.10. Estymator $|\hat{a}_n(\lambda, \tau)|$ (słupki) wraz z 95% przedziałem ufności otrzymanym za pomocą subsamplingu (linia przerywana).

W tym celu obliczymy wartości $\hat{a}_n(\lambda, \tau)$ dla $\lambda = 2\pi k/12$, $k = 1, \dots, 6$ oraz $\tau = 0, 1, \dots, 8$. Wybór częstotliwości λ odpowiada przypuszczalnej długości okresu $T = 12$. Rysunek 4.10(a) pokazuje, że wartość estymatora $\hat{a}_n(2\pi/12, 0)$ jest istotna, ponieważ $|\hat{a}_n(2\pi/12, 0)|$ leży powyżej wartości krytycznej obliczonej za pomocą subsamplingu z blokiem o długości $b = 100$. W podobny sposób za pomocą Rysunku 4.10(c) i 4.10(d) możemy wnioskować, że wartości estymatorów $|\hat{a}_n(6\pi/12, 0)|$, $|\hat{a}_n(6\pi/12, 2)|$ oraz $|\hat{a}_n(8\pi/12, 0)|$ są istotne. Rysunek 4.11 przedstawia test okresowości oparty na statystyce $U_n(\tau)$. Widzimy, że m.in. wartości $U_n(0)$ jest istotna, co świadczy o silnej okresowości wariancji szeregu czasowego. Ostatnim elementem analizy jest obliczenie statystyki zbiorczej

$$U_n = \sum_{\tau=0}^8 U_n(\tau).$$



Rysunek 4.11. Wartości statystyki $U_n(\tau)$ (słupki) wraz z 95% przedziałem ufności otrzymanym za pomocą subsamplingu (linia przerywana).

Jej wartość wynosi 231877, podczas gdy 95% kwantyl subsamplingowy jest równy 211698. Mamy zatem potwierdzenie, że Rysunek 4.9 przedstawia szereg, który jest okresowo skorelowany i nie może być modelowany przez modele stacjonarne.

4.4. Porównanie błędu średniokwadratowego dla metod bootstrap

Najbardziej uniwersalną metodą bootstrapowania, która działa zarówno dla szeregów okresowych jak i prawie okresowych jest bootstrap bloków ruchomych. Dla danych okresowych omówiliśmy natomiast trzy różne sposoby bootstrapowania, tzn. bootstrap bloków ruchomych (MBB), bloków sezonowych (SBB) i bloków okresowych (PBB). Pojawia się zatem naturalne pytanie o porównanie własności i efektywności tych metod. Naszym celem jest uzyskanie symulacyjnych porównań. Wykorzystamy tutaj kryterium, które stosował Lahiri (1999) w celu porównania metod bootstrapowania dla szeregów stacjonarnych. Jeżeli zachodzi CTG dla średniej próbkowej, tzn.

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

to miarą efektywności bootstrapu jest błąd średniokwadratowy estymatora bootstrapowego wariancji, tzn. wielkość

$$MSE = E \left(Var^*(\bar{X}_n^*) - \sigma^2 \right)^2.$$

Wielkość tę aproksymujemy za pomocą symulacji Monte Carlo jako funkcję długości bloku b .

Zgodność metody PBB była rozważana w kontekście tablic zmiennych losowych wierszowo okresowych ze zwiększającym się okresem. Mimo, że zgodność MBB była dowiedziona tylko dla szeregów czasowych, za pomocą technik zaprezentowanych w poprzednim rozdziale można ją rozszerzyć także na tablice. Dlatego w celu przeprowadzenia symulacji porównujących MBB i PBB rozważmy model

$$X_{n,t} = f_n(t)Z_{n,t} + g_n(t),$$

gdzie

$$Z_{n,t} = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=t}^{t+m-1} U_{n,j}.$$

Funkcje f_n i g_n są okresowe z okresem T_n , a $\{U_{n,j}\}$ jest tablicą zmiennych losowych i.i.d. Tablica $\{X_{n,t}\}$ jest wierszowo m -zależna i okresowo skorelowana z funkcją autkowariancji

$$B_n(t, \tau) = f_n(t)f_n(t + \tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{m}\right) \mathbf{1}_{(-m,m)}(\tau).$$

Do naszych symulacji przyjmujemy $m = 5$ oraz

$$f_n(t) = 1 + \sin\left(\frac{2\pi t}{T_n}\right), \quad g_n(t) = 3f_n(t). \quad (4.4)$$

Model ten charakteryzuje się silną okresowością w średniej i kowariancji. Jedna z realizacji została użyta do sporządzenia Rysunku 3.1. Korzystając z Lematu 3.4 można policzyć teoretyczną wartość wariancji asymptotycznej

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T_n} \sum_{t=1}^{T_n} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} B_n(t, \tau) \approx 7.5.$$

Do porównań użyliśmy kilku różnych rozkładów innowacji $\{U_{n,j}\}$, tzn. rozkład wykładniczy, gaussowski i jednostajny. Dla wszystkich rozkładów wyniki były podobne. Przykładowy przebieg błędów średniokwadratowych przedstawiony jest na Rysunku 4.12. Możemy zaobserwować, że procedura PBB jest w pewnych zakresach lepsza niż MBB. Co bardzo istotne, PBB zachowuje się w sposób dużo bardziej stabilny względem długości boku. Nie możemy tego powiedzieć o procedurze MBB, gdyż w tym przypadku błąd silnie zależy od tego, czy długość bloku jest wielokrotnością okresu. Zjawisko to jest bardzo widoczne na Rysunku 4.12(b) i 4.13(b), gdzie można wręcz mówić o pikach pomiędzy wartościami $b = 50, 100, 150, 200$. Obserwowany efekt wydaje się być związany z faktem, że dla tych wartości b procedura w mniejszym stopniu zaburza okresowość danych. Interesującym punktem jest $b = T$. Tutaj procedura MBB ma mniejszy błąd, co jest prawdopodobnie związane z większym stopniem nakładania się bloków, z których próbkujemy.

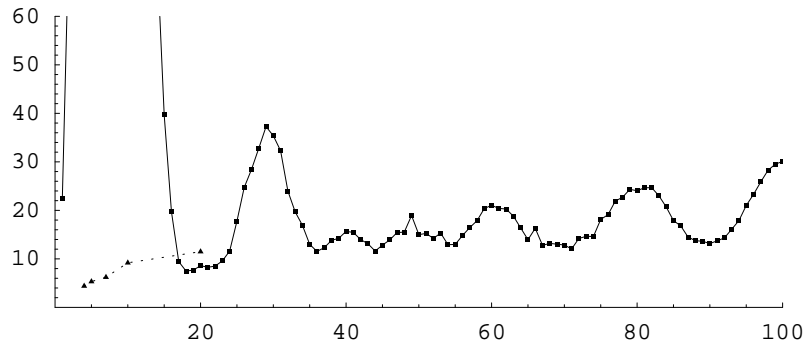
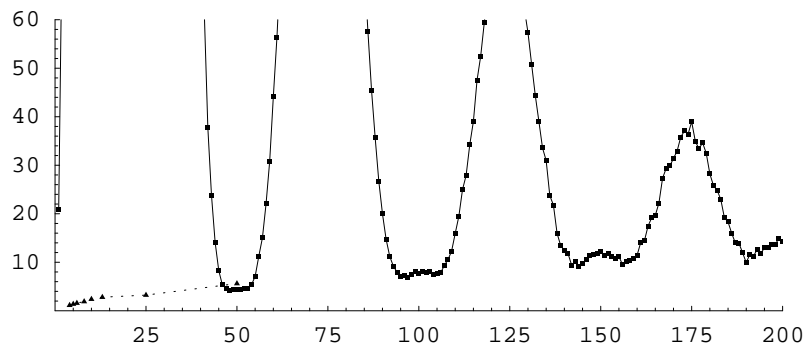
W celu porównania metod MBB i SBB rozważmy szereg czasowy $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$, gdzie

$$X_t = f_{20}(t)Z_t + g_{20}(t)$$

i funkcje f_{20}, g_{20} dane są przez (4.4). Korzystając z Lematu 2.10 możemy obliczyć teoretyczną wartość wariancji asymptotycznej

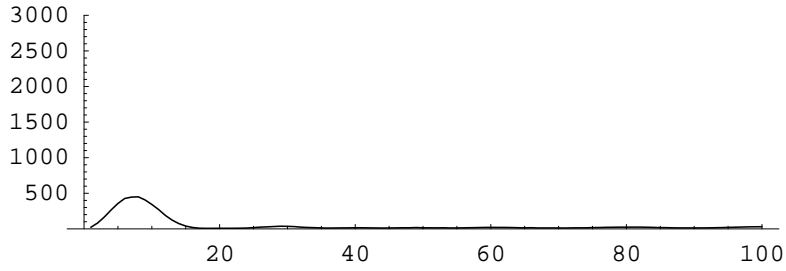
$$\sigma^2 = \frac{1}{20} \sum_{t=1}^{20} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} B_{20}(t, \tau) \approx 7.04.$$

Obie metody można porównać tylko w punktach będących wielokrotnością okresu. Analizując Rysunek 4.14 można stwierdzić, że w punktach tych błędy są porównywalne. Wydaje się, że procedury SBB i MBB będą asymptotycznie równoważne. Dla

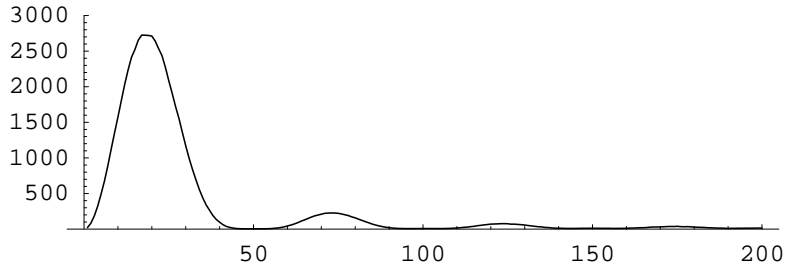
(a) Długość próbki wynosi $d_n = 200$, długość okresu jest równa $T_n = 20$.(b) Długość próbki wynosi $d_n = 1000$, długość okresu jest równa $T_n = 50$.

Rysunek 4.12. Porównanie błędów średniokwadratowych MSE_{MBB} (linia ciągła) i MSE_{PBB} (linia kropkowana) jako funkcji długości bloku b_n .

procedury MBB dla mniejszych długości bloku mamy znowu efekt pików pomiędzy wartościami będącymi wielokrotnościami długości okresu. Dla większych b efekt ten zanika. Z Rysunku 4.14 widzimy, że optymalna długość bloku w rozważanym modelu dla próbki o liczności $n = 200$ wynosi $b = 20$, a dla próbki o liczności $n = 1000$ najmniejszy błąd generują bloki o długościach $b = 20$ i $b = 40$.

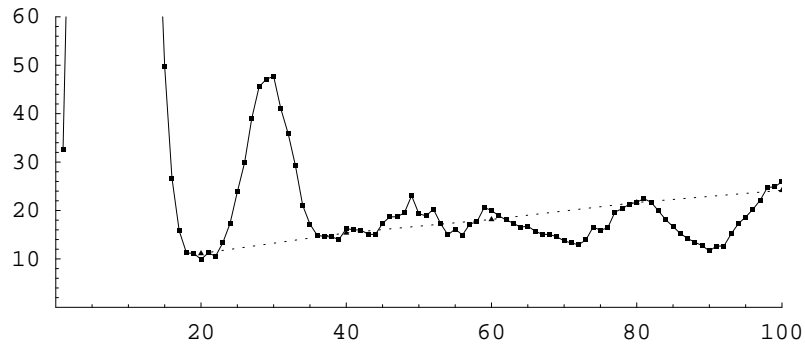


(a) Długość próbki wynosi $n = 200$, długość okresu jest równa $T_n = 20$.

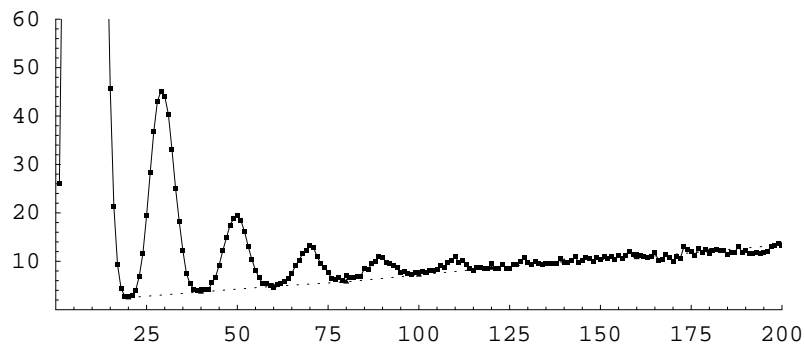


(b) Długość próbki wynosi $n = 1000$, długość okresu jest równa $T_n = 50$.

Rysunek 4.13. Błąd średniokwadratowy MSE_{MBB} jako funkcja długości bloku b_n dla danych okresowych.



(a) Długość próbki wynosi $n = 200$, długość okresu jest równa $T = 20$.



(b) Długość próbki wynosi $n = 1000$, długość okresu jest równa $T = 50$.

Rysunek 4.14. Porównanie błędów średniokwadratowych MSE_{MBB} (linia ciągła) i MSE_{PBB} (linia kropkowana) jako funkcji długości bloku b_n .

4.5. Porównanie subsamplingu i bootstrapu

Porównując subsampling i bootstrap bloków ruchomych powinniśmy przyjąć inne kryterium efektywności, ponieważ estymatory bootstrapowy i subsamplingowy wariancji są sobie równe. Dlatego badaliśmy prawdopodobieństwo pokrycia subsamplingowych i bootstrapowych przedziałów ufności. Wyniki kilku przeprowadzonych symulacji nie pozwalają wysnuć jednoznacznego wniosku o wyższości MBB nad subsamplingiem lub odwrotnie w klasie niestacjonarnych szeregów czasowych o strukturze okresowej i prawie okresowej. W Tabelicy 4.1 przedstawiamy wynik przykładowej symulacji. W wierszach nazwanych jako "MBB" i "Subs." przedstawiono aproksymacje prawdopodobieństw pokrycia 95% przedziałów ufności w modelu opisanym w poprzednim paragrafie. Aproksymacje te otrzymane zostały przez obliczenie proporcji tych przedziałów ufności, które zawierają prawdziwą wartość $M_t(EX_t)$. Przeciętna długość przedziałów ufności znajduje się w wierszach będących poniżej. Jak widać subsamplin-

$b =$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	25	30
MBB	0.98	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.93	0.91	0.91	0.89	0.95	0.74
	1.11	1.33	1.43	1.46	1.39	1.22	1.06	0.88	0.75	0.70	0.73	0.87	0.91
Subs.	0.94	0.96	0.98	0.98	0.99	0.98	0.97	0.95	0.92	0.88	0.92	0.95	0.97
	0.99	1.17	1.26	1.28	1.25	1.15	1.03	0.89	0.74	0.65	0.72	0.86	0.93

Tablica 4.1. Aproksymacja prawdopodobieństwa pokrycia dla 95% przedziałów ufności oraz ich przeciętna długość.

gowe przedziały ufności są nieco węższe i o mniejszym prawdopodobieństwie pokrycia. Co ciekawe, efekt słabej zbieżności do wariancji asymptotycznej bootstrapowego estymatora wariancji dla długości bloków nie będącymi wielokrotnościami okresu nie ma dużego przełożenia na utrzymywanie prawdopodobieństw pokrycia przedziałów ufności. Możemy jedynie stwierdzić, że przedziały ufności dla bloków będących wielokrotnościami okresu są znacznie krótsze.

Warto wspomnieć, że w literaturze znane są wyniki dotyczące szybkości zbieżności do zera wielkości

$$S_n = \sup_x \left| L_{n,b}(x) - P(\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \leq x) \right|$$

dla subsamplingu oraz

$$B_n = \sup_x \left| P^*(\sqrt{n}(\bar{X}_n^* - E^*\bar{X}_n^*)) - P(\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \leq x) \right|$$

dla bootstrapu. Oszacowania te otrzymano dla zmiennych niezależnych i stacjonarnych szeregów czasowych za pomocą tzw. rozwinięć Edgewortha. Wynika z nich, że wielkość B_n zanika szybciej niż S_n , czyli bootstrap jest efektywniejszy od subsamplingu. Jak dotąd nie rozszerzono tych wyników na niestacjonarne szeregi czasowe.

Porównując bootstrap i subsampling trzeba też wspomnieć o większej uniwersalności drugiej z tych metod. Przykładowo w teście na odróżnianie okresów używaliśmy statystyki $U_n(\tau) = \sqrt{n}|\hat{a}_n(\lambda, \tau)|$. Jej wersja bootstrapowa ma postać

$$U_n^*(\tau) = \sqrt{n}(|\hat{a}_n^*(\lambda, \tau)| - |E\hat{a}_n^*(\lambda, \tau)|).$$

Aby otrzymać zgodność bootstrapu chcielibyśmy zastosować Twierdzenie 3.5 z funkcją $H(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Jednakże w przypadku $a(\lambda, \tau) = 0$ (a taka sytuacja ma miejsce przy H_0) następuje zerowanie się obydwu pochodnych cząstkowych funkcji H , czyli tak naprawdę nie można stosować tego twierdzenia. Rozważmy następujący przykład.

Przykład 4.1 (Modyfikacja przykładu z pracy Babu, 1984). Niech U_1, \dots, U_n będą dla uproszczenia niezależnymi obserwacjami z rozkładu $\mathcal{N}(\mu, 1)$. Załóżmy, że $\mu = 0$. Obserwacje (U_1^*, \dots, U_n^*) powstają przez losowanie ze zwracaniem (bootstrap nieparametryczny i.i.d.). Będziemy zainteresowani działaniem bootstrapu dla statystyki

$$T_n = \sqrt{n}|\bar{U}_n|,$$

kwadrat której ma rozkład χ^2 o jednym stopniu swobody. Ponieważ $E^*\bar{U}_n^* = \bar{U}_n$, zgodność bootstrapu oznacza w tym przypadku, że

$$P^*(\sqrt{n}(|\bar{U}_n^*| - |\bar{U}_n|) \leq x) \xrightarrow{P} F_1(x^2), \quad (4.5)$$

gdzie F_1 jest dystrybuantą rozkładu χ^2 i jednym stopniu swobody. Przypomnijmy, że wielkość $\sqrt{n}(\bar{U}_n^* - \bar{U}_n)$ ma warunkowy rozkład asymptotyczny normalny. Korzystając z prawa iterowanego logarytmu mamy, że $\limsup \sqrt{n} \bar{U}_n = \infty$ prawie na pewno i dlatego dla dowolnego $x > 0$

$$\begin{aligned} \limsup P^*(n(|\bar{U}_n^*| - |\bar{U}_n|) \leq x) &\geq \limsup P^*(\sqrt{n}|\bar{U}_n^*| \leq \sqrt{n}|\bar{U}_n|) \\ &\geq \limsup P^*(0 \geq \sqrt{n}(\bar{U}_n^* - \bar{U}_n) \geq -2\sqrt{n} \bar{U}_n) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Powyższe oszacowanie jest sprzeczne z (4.5) dla $x \in (0, 0.6]$ gdyż z tablic odczytujemy, że $F_1(0.4) < \frac{1}{2}$. Oznacza to, że bootstrap jest niezgodny.

Możemy zatem podejrzewać, że kwantyle statystyki $U_n(\tau)$ nie da się aproksymować za pomocą MBB. Podsumujmy zatem ten paragraf stwierdzeniem, że metody bootstrapowe działają głównie dla statystyk o asymptotycznym rozkładzie normalnym. Natomiast subsampling nie jest wrażliwy na postać rozkładu granicznego.

Wnioski końcowe

W pracy zaprezentowano nowe wyniki dotyczące zgodności nieparametrycznych metod resamplingowych w dziedzinie czasu dla niestacjonarnych szeregów czasowych o strukturze okresowej i prawie okresowej. Otrzymano uniwersalną zgodność subsamplingu, bootstrapu blokowego i sezonowego dla średniej próbkowej, gładkich funkcji średniej oraz estymatorów współczynników Fouriera. Pokazano, że metoda bootstrapu bloków okresowych nie jest uniwersalnie zgodna. Procedura ta może być stosowana jedynie do danych o zwiększającej się długości okresu. Przedstawione w pracy przykłady pokazują duży potencjał metod resamplingowych we wnioskowaniu statystycznym w klasie modeli okresowych i prawie okresowych. Umożliwiają one m.in. identyfikację istotnych częstotliwości, odróżnianie okresu oraz testowanie stacjonarności. Dalsze badania w tej tematyce mogą być prowadzone m.in. w następujących kierunkach:

- Zbadanie teoretyczne i symulacyjne istniejących oraz nowych technik doboru długości bloku w klasie modeli okresowych i prawie okresowych.
- Rozszerzenie wyników na przypadek funkcji prawie okresowych z nieskończonym zbiorem częstotliwości.
- Rozwinięcie technik wnioskowania dla modelu autoregresyjnego

$$X_t = a_t X_{t-1} + \epsilon_t,$$

gdzie $\{a_t\}$ jest ciągiem prawie okresowym. Zbadanie możliwości zastosowania bootstrapu reszt oraz bootstrapu sitowego (Bühlmann, 1997) dla autoregresyjnych modeli okresowych i prawie okresowych.

- Zbadanie możliwości resamplingowania w dziedzinie spektralnej oraz porównanie z resamplingiem w dziedzinie czasu.
- Przeniesienie wyników zgodności na kontekst niestacjonarnych pól losowych.
- Zastąpienie założenia α -mieszania innymi założeniami, np. założeniami typu słabej zależności (tzw. *weak dependence*).

Ponieważ wiele zjawisk jakie obserwujemy charakteryzuje się okresowością, bardzo ważne jest rozwijanie narzędzi statystycznych dla modeli okresowych i prawie okresowych. Nasze wyniki dostarczają zgodnych i efektywnych procedur statystycznych dotyczących przedziałów ufności oraz testowania dla tych modeli.

Bibliografia

- Andrews, D. (1983). First order autoregressive processes and strong mixing. Cowless Foundation Discussion Paper no. 664, Yale University.
- Andrews, D. (1984). Non-strong mixing autoregressive processes. *J. Appl. Probab.*, 21:930 – 934.
- Araujo, A., Giné, E. (1980). *The central limit theorem for real and Banach valued random variables*. Wiley, New York.
- Arcones, M., Giné, E. (1989). The bootstrap of the mean with arbitrary bootstrap sample size. *Ann. Inst. Henr Poincaré*, 25:457–481.
- Athreya, K. (1987). Bootstrap of the mean in the infinite variance case. *Ann. Statist.*, 15:724 – 731.
- Babu, G. (1984). Bootstrapping statistics with linear combination of chi-squares as weak limit. *Sankhya*, 46:85 – 93.
- Bayandin, V. (1991). Tides as a periodically-correlated random processes. *Sov. J. Phys. Oceanogr.*, 2:443 – 450.
- Berk, K. (1973). A central limit theorem for m-dependent random variables with unbounded m. *Ann. Probab.*, 1:352–354.
- Besicovitch, A. (1932). *Almost Periodic Functions*. Cambridge University Press, London.
- Bloomfield, P., Hurd, H., Lund, R. (1994). Periodic correlation in stratospheric ozone time series. *J. Time Ser. Anal.*, 15:127–150.
- Bradley, R. (2005). Basic properties of strong mixing conditions. *Probab. Surv.*, 2:107 – 144.
- Broszkiewicz-Suwaj, E., Makagon, A., Weron, R., Wyłomańska, A. (2004). On detecting and modelling periodic correlation in financial data. *Physica A*, 336:196–205.
- Broszkiewicz-Suwaj, E., Wyłomańska, A. (2004). Analiza wolumenu sprzedaży energii elektrycznej na giełdzie Nord Pool metodą szeregów PARMA. *Rynek Terminowy*, 26:83–87.
- Bühlmann, P. (1997). Sieve bootstrap for time series. *Bernoulli*, 3:123–148.
- Cambanis, S., Houdré, C., Hurd, H., Leśkow, J. (1994). Laws of large numbers for periodically and almost periodically correlated processes. *Stochastic Process. Appl.*, 53:37–54.
- Capdessus, C., Sidahmen, M., Lacomme, J. (2000). Cyclostationary processes: application in gear faults early diagnosis. *Mech. Syst. Signal Process.*, 14:371 – 385.
- Carlstein, E. (1986). The use of subseries values for estimating the variance of a general statistics from a stationary sequence. *Ann. Statist.*, 14:1171–1179.
- Chan, V., Lahiri, S. N., Meeker, W. (2004). Block bootstrap estimation of the distribution of cumulative outdoor degradation. *Technometrics*, 46:215–224.
- Corduneanu, C. (1989). *Almost Periodic Functions*. Chelsea, New York.
- Dandawate, A., Giannakis, G. (1994). Statistical tests for presence of cyclostationarity. *IEEE*

- Trans. Signal Process.*, 42:2355 – 2369.
- Dehay, D., Leśkow, J. (1996a). Functional limit theory for the spectral covariance estimator. *J. Appl. Probab.*, 33:1077–1092.
- Dehay, D., Leśkow, J. (1996b). Testing stationarity for stock market data. *Econom. Lett.*, 50:205 – 212.
- Doukhan, P. (1994). *Mixing. Properties and examples*. Lecture Notes Statist. Springer.
- Efron, B. (1979). Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *Ann. Statist.*, 7:1–26.
- Fazekas, I., Kukush, A., Tómacs, T. (2000). On the Rosenthal inequality for mixing fields. *Ukrain. Mat. J.*, 2:266–276.
- Fitzenberger, B. (1997). The moving blocks bootstrap and robust inference for linear last squares and quantile regressions. *J. Econometrics*, 82:235 – 287.
- Fukuchi, J. (1999). Subsampling and model selection in time series analysis. *Biometrika*, 86:591 – 604.
- Gardner, W., Napolitano, A., Paura, L. (2006). Cyclostationarity: half a century of research. *Signal Process.*, 86:639 – 697.
- Giné, E., Zinn, J. (1989). Necessary conditions for the bootstrap of the mean. *Ann. Statist.*, 17:684–691.
- Gladyshev, E. (1961). Periodically correlated random sequences. *Sov. Math.*, 2:383–388.
- Gonçalves, S., White, H. (2002). The bootstrap of the mean for dependent heterogeneous arrays. *Econom. Theory*, 18:1367–1384.
- Guyon, X. (1995). *Random Fields on a Network*. Springer-Verlag, New York.
- Hall, P., Horowitz, J., Jing, B. (1995). On blocking rules for the bootstrap with dependent data. *Biometrika*, 82:561 – 574.
- Hipel, K., McLeod, A. (1994). *Time series modelling of water resources and environmental systems*. Elsevier, Amsterdam.
- Hurd, H. (1989). Nonparametric time series analysis for periodically correlated processes. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 35:350–359.
- Hurd, H. (1991). Correlation theory of almost periodically correlated processes. *J. Multivariate Anal.*, 30:24–45.
- Hurd, H., Dehay, D. (1996). Empirical determination of the frequencies of an almost periodic sequence. 8th IEEE Signal Processing Workshop on Statistical Signal and Array Processing.
- Hurd, H., Gerr, N. (1990). Graphical methods for determining the presence of periodic correlation. *J. Time Ser. Anal.*, 12:337 – 350.
- Hurd, H., Leśkow, J. (1992a). Estimation of the Fourier coefficient functions and their spectral densities for φ -mixing almost periodically correlated processes. *Statist. Probab. Lett.*, 14:299–306.
- Hurd, H., Leśkow, J. (1992b). Strongly consistent and asymptotically normal estimation of the covariance for almost periodically correlated processes. *Statist. Decisions*, 10:201–225.
- Hurd, H., Makagon, A., Miamée, A. (2002). On AR(1) models with periodic and almost periodic coefficients. *Stochastic Process. Appl.*, 100:167–185.
- Ibragimov, R., Sharakhmetov, S. (2001). The best constant in the Rosenthal inequality for nonnegative random variables. *Statist. Probab. Lett.*, 55:367–376.
- Izzo, L., Napolitano, A. (2002). Linear time-variant transformations of generalized almost cyclostationary signals. *IEEE Trans. Signal Process.*, 50:2947 – 2975.
- Kim, T. (1994). Moment bounds for non-stationary dependent sequences. *J. Appl. Probab.*, 31:731–742.
- Kolmogorov, A., Rozanov, Y. (1960). On strong mixing conditions for stationary gaussian

- processes. *Theory Probab. Appl.*, 5:204 – 208.
- Künsch, H. (1989). The jackknife and the bootstrap for general stationary observations. *Ann. Statist.*, 17:1217–1241.
- Kwiatkowski, D., Phillips, P., Schmidt, P., Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *J. Econometrics*, 54:159–178.
- Lahiri, S. (1992). Edgeworth correction by moving block bootstrap for stationary and non-stationary data. In LePage, R. and Billard, L., editors, *Exploring the Limits of Bootstrap*, pages 183–214. Wiley, New York.
- Lahiri, S. (1999). Theoretical comparison of block bootstrap methods. *Ann. Statist.*, 27:386–404.
- Lahiri, S. (2003). *Resampling methods for dependent data*. Springer-Verlag, New York.
- Latała, R. (1997). Estimation of moments of sums of independent real random variables. *Ann. Probab.*, 25:1502–1513.
- Lenart, L., Leśkow, J., Synowiecki, R. (2008a). Subsampling in testing autocovariance for periodically correlated time series. *praca złożona do J. Time Ser. Anal.*
- Lenart, L., Leśkow, J., Synowiecki, R. (2008b). Subsampling in time domain for almost periodically correlated time series. *praca w przygotowaniu*.
- Leśkow, J. (2001). The impact of stationarity assesment on studies of volatility and value-at-risk. *Math. Comput. Modelling*, 34:1213–1222.
- Leśkow, J., Synowiecki, R. (2006). Asymptotic distribution and subsampling for the estimator of autocovariance coefficient for APC time series. Preprint No. 1/2006, Faculty of Applied Mathematics, AGH University of Science and Technology.
- Leśkow, J., Synowiecki, R. (2008). On bootstrapping periodic random arrays with increasing period. *praca złożona*.
- Liebscher, E. (2005). Towards a unified approach for proving geometric ergodicity and mixing properties of nonlinear autoregressive processes. *J. Time Ser. Anal.*, 26:669–689.
- Liu, R., and Singh, K. (1992). Moving blocks jackknife and bootstrap capture weak dependence. In LePage, R. and Billard, L., editors, *Exploring the Limits of Bootstrap*, pages 225–248. Wiley, New York.
- Lund, R., Hurd, H., Bloomfield, P., Smith, R. (1995). Climatological time series with periodic correlation. *J. Climate*, 8:2787 – 2809.
- Pisarenko, V., Lyubushin, A., Canu, S., Kanevsky, M., Savelieva, E., Demianov, V., Bolgov, M., Rukavishnikova, T., Zaliapin, I. (2001). Statistical methods for river’s runoff forecast. Moscow. 4-th INTAS Interdisciplinary Symposium on Physical and Chemical Methods in Biology, Medicine and Environment.
- Politis, D. (2001). Resampling time series with seasonal components. Proceedings of the 33rd Symposium on the Interface of Computing Science and Statistics.
- Politis, D., Romano, J. (1994). Large sample confidence regions based on subsamples under minimal assumptions. *Ann. Statist.*, 22:2031–2050.
- Politis, D., Romano, J., Wolf, M. (1999). *Subsampling*. Springer-Verlag, New York.
- Radulović, D. (1996). The bootstrap of the mean for strong mixing sequences under minimal conditions. *Statist. Probab. Lett.*, 28:65–72.
- Rio, E. (2000). *Theorie asymptotique des processus aleatoires faiblement dependants*. Mathematics & Applications. Springer, Berlin.
- Romano, J., Wolf, M. (2000). A more general central limit theorem for m-dependent random variables with unbounded m. *Statist. Probab. Lett.*, 47:115 – 124.
- Rosenthal, H. (1970). On the subspaces of L^p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables. *Isr. J. Math.*, 8:273–303.

-
- Singh, K. (1981). On the asymptotic accuracy of the Efron's bootstrap. *Ann. Statist.*, 9:1187–1195.
- Sjöstedt, S. (2000). Resampling m -dependent random variables with application to forecasting. *Scand. J. Statist.*, 27:543 – 561.
- Synowiecki, R. (2005). Subsampling for periodically and almost periodically correlated time series. Praca magisterska, Wydział Matematyki Stosowanej AGH, 2005.
- Synowiecki, R. (2007a). Consistency and application of moving block bootstrap for nonstationary time series with periodic and almost periodic structure. *Bernoulli*, 13:1151–1178.
- Synowiecki, R. (2007b). Some results on the subsampling for φ -mixing periodically strictly stationary time series. *Probab. Math. Statist.*, 27:247–260.
- Vecchia, A., Ballerini, R. (1991). Testing for periodic autocorrelations in seasonal time series data. *Biometrika*, 78:53–63.
- Wyłomańska, A. (2005). Analiza modeli ARMA z okresowymi współczynnikami. Praca doktorska, Politechnika Wroclawska, 2005.
- Yeung, G. K., Gardner, W. (1996). Search-efficient methods of detection of cyclostationarity signals. *IEEE Trans. Signal Process.*, 44:1214–1223.

Oznaczenia i skróty

a.p.	prawie okresowa (funkcja)
SS	ściśle stacjonarny (szereg czasowy)
WS	stacjonarny w sensie szerszym (szereg czasowy)
SP	ściśle okresowy (szereg czasowy)
WP	okresowy w sensie szerszym (szereg czasowy)
WAP	prawie okresowy w sensie szerszym (szereg czasowy)
PC	okresowo skorelowany (szereg czasowy)
APC	prawie okresowo skorelowany (szereg czasowy)
i.i.d.	niezależne i o tym samym rozkładzie (dane)
MBB	bootstrap bloków ruchomych
SBB	bootstrap bloków sezonowych
PBB	bootstrap bloków okresowych
$\stackrel{d}{=}$	równość według rozkładu
$M_t(f(t))$	wartość średnia funkcji $f(\cdot)$
$\xrightarrow{p.n.}$	zbieżność prawie na pewno
\xrightarrow{P}	zbieżność według prawdopodobieństwa
$\xrightarrow{L^p}$	zbieżność w L^p
\xrightarrow{d}	zbieżność według rozkładu
\mathbb{C}	zbiór liczb zespolonych
\mathbb{N}	zbiór liczb naturalnych
\mathbb{R}	zbiór liczb rzeczywistych
\mathbb{Z}	zbiór liczb całkowitych
i	jednostka urojona
$\text{Re}(z)$	część rzeczywista liczby zespolonej z
$\text{Im}(z)$	część urojona liczby zespolonej z
$\mathbf{1}_A$	funkcja indykatorowa zbioru A
$O(b_n)$	$c_n = O(b_n)$ jeśli istnieje stała C , że $ c_n \leq C b_n $
$o(b_n)$	$c_n = o(b_n)$ jeśli $c_n/b_n \rightarrow 0$
$o_P(b_n)$	$c_n = o_P(b_n)$ jeśli $c_n/b_n \rightarrow 0$ według prawdopodobieństwa
$\mathcal{L}(X)$	rozkład zmiennej losowej X
$\mathcal{B}(\mathbb{E})$	σ -algebra zbiorów borelowskich przestrzeni metrycznej \mathbb{E}
$\mathcal{N}_p(0, \Sigma)$	p -wymiarowy rozkład normalny o zerowym wektorze wartości oczekiwanej i macierzy kowariancji Σ
A^{TR}	transpozycja macierzy A