O
GEODEZYI

PRZEZ

MICHAŁA PEŁKĘ POLIŃSKIEGO

DOKTORA FILOZOFII

W WILNIE

DRUKIEM IÓZEFA ZAWADZKIEGO TYPOGRAFA IMPER. WILEN. UNIWER.

1816.

Dozwala się drukować pod tym warunkiem, aby po wydrukowaniu nie zaczynając przedawać, złożone były w komitecie cenzury exemplarze xiążki tey: jeden dla tegoż Komitetu, dwa dla Departamentu ministeryum oświecenia, dwa dla IMPERATORSKIEY *publiczney biblioteki i ieden dla* IMPERATORSKIEY *Akademii nauk.*

w Wilnie 1816 Marca 26 dnia Zacharyasz Niemczewski Pro. Zw. Mat. Czł. Kom. Ce.

WYKŁAD RZECZY ZAWARTYCH W CAŁÉM DZIÉLE.

DODATKI.

Przykład rozwiązania troykąta kulistego.

OMYŁKI DO POPRAWY.

strona	wiersz	jest	poprawić
2	z góry 33 i 35	rejestru różnice	różnicę
1 —	31	nieodzielne	nieoddzielné
2 —	przyp. (g)	Legeudre	Legendre
6 —	19	$\frac{Za+ba+Za-Zb}{2}$	$\frac{Za+ba+Zb-Zb}{2}$
— —	33	zamie	ramie
7 —	3	wst$\frac{1}{2}$z	wst$\frac{1}{2}$Z
8 —	33	*po wyrazie* kąta *dodać*	wymierzonego od wiérzchołka kąta
9 —	12	sprowadzanego	szukanego
— —	23	Z″GB	Z′GB
10 —	10	płasczynach	płasczyznach
— —	31	orzymamy	otrzymamy
12 —	7	*po wyrazie* jescze *dodać*	Delambra
— —	25	wst OP	wst COP
13 —	30	w samym jego srodku	przypadającéy na sam jego środek
14 —	43	QMO^2	2MO^2
— —	23	*po wyrazie* połowie *dodać*	w kierunku płasczyzny pionowéy
16	ostatni	*po wyrazie* mowi	*skasować nawias*
17 —	2	wst 1	wst 1″
— —	5	$\frac{1}{2}$COS	$\frac{1}{2}$OCS
— —	23	różnych	równych
19 —	38	ta, luneta	ta luneta
20 —	28	P″ $\frac{1}{\text{wst } 1''}$	P″$=\frac{1}{\text{wst } 1''}$
21 —	28	przyległe	przyległym
22 —	27	ustanowieniem	ustawieniem
— —	32	cała	cala
—	ostatni	Meridieun	Meridienne
26 —	39	1$^{k.p.}$CBA	1$^{k.p.}$—CBA
27 —	8	Mająe liniją VT.	Mając liniją VS
— —	12	$\frac{u^2}{1}$	$\frac{u^2}{2}$
— —	18	52)	54.)
29 —	26	Perpignau	Perpignan

strona	wiersz	jest	poprawić
30 —	17	ABA′=E.	ABA′=E′
— —	19	VBA—D	VBA=D
— —	21	otrzymujemy=E	otrzymujemy E
31 —	14	Franse	France
— —	36	O′	O
32 —	15	*napoczątku wierszu*	*położyć znak równości* =
— —	47	punkta	punktu
39 —	10	mieysca,	miéysca M,
— —	33	mieysca	poprowadzonéy z miéysca
40 —	8	ae	ag
— —	15	ge	gc
— —	21	Ed	ES
— —	30	AE i AF	BE i BF
41 —	3	n^3 p^3	$\frac{n^3}{p^3}$
42 —	16	(b′)	(c′)
— —	24	(c′)	(b′)
— —	14	trrykątów	troykątów
44	38 i 39	powinnyby się zupełnie zgodzić	zupełnieby się zgodziły
46 —	7	znaydujących	znaydujących się
47 —	12	P′	P″
48	z dołu 4	przy końcu wiérsza $\frac{-C\sqrt{-1}}{.be}$ $\frac{-C\sqrt{-1}}{-be}$	$\frac{C\sqrt{-1}}{+be}$ $\frac{-C\sqrt{-1}}{-be}$
50	z góry 17	*w liczniku* $-1\frac{a^2}{2p^2}$	$1-\frac{a^2}{2p^2}$
— —	20	*w liczniku* $-\frac{c^2}{2p^2}$	$+\frac{c^2}{2p^2}$
— —	22	dodlicznika	do licznika
51 —	25	wts A′	wst A′
52 —	14	α p^2	$\frac{\alpha}{p^2}$
53	z dołu 3	$\frac{1}{2}v^1$	$\frac{1}{2}v^2$

1. Korzyści z dokładnych kart geograficznych znajomé są wszystkim. Przez nié badacz odległéy starożytności wyśledza początek, przechody, i łączenie się różnych narodów; dziejopis przy ich pomocy opisuje miéysce rozmaitych zdarzeń politycznych, i wierny ich obraz przesyła potomności; władca narodu mając je przed sobą, układa z sąsiadami traktaty stanowiącé szczęśliwy byt teraźniéyszych i przyszłych pokoleń. Oné są przewodnikami podróżnym, i wskazując naykrótszą drogę, ułatwiają handel i kommunikacyą między narodami; oné przedstawując oczóm naszym zbliżoné do siebie kraje i osady różnych ludów, uczą nas, oświécają i zaspokajaią naszę ciekawość. Bez nich znajomość położenia miéysc, alboby się ograniczała znajomością tylko okolic naszych siedzib, albobyśmy polegali na opowiadaniu wędrowników nayczęściéy przesadzoném; bez nich żeglarz na los się puszczając, staje się igraszką wiatrów; bez nich wojownik poruczaiąc się nieznajomym przewodnikóm pada niekiedy ofiarą ich niewiadomości lub zdrady — Sporządzenie więc dokładnych kart geograficznych jest jedną z ważnych przysług czynionych towarzystwu; przeto nauka, która podaje sposoby do ich robienia, nazywana Geodezyą, stanowiąca oddzielną gałęź nauk matematycznych stosowanych, powinna być liczoną między témi naukami, które bezpośredni przynosząc pożytek, na pierwszé miéysce zasługują przed innémi.

2. Do zrobienia dokładnéy geograficznéy karty, trzeba umiéć dwie rzeczy doskonale wykonać. *Naprzód.* Znaleść w miarach stałych i wiadomych prawdziwé odległości miéysc które chcemy na karcie umieścić. *Powtóre.* Znalezioné té odległości tak oznaczyć na papiérze, to jest na powierzchni płaskiéy, aby z odległości oznaczonych łatwo można było poznać względną odległość miéysc leżących na ziemi, która jest bryłą okrągłą. Lecz z tych dwoch warunków piérwszy istotniéyszy jest od drugiégo. Nayregularniéyszé bowiem wykréślanié na papiérze, z fałszywych wymiarów dokładnéy mappy nie zrobi; na ścisłém więc znalezieniu wzajemnych odległości miéysc wszystkich mających się na karcie umieścić, cała się jéy dokładność zasadza; sposoby do uskutecznienia tégo służącé zamierzam tu w krótkości wyłożyć.

3. Do znalezienia wzajemnych odległości, działania miernicze nie wszędzie być mogą użyté; prócz tégo, chociażby w niektórych miéyscach położenie gruntu nie czyniło do wymiarów żadnéy przeszkody, wypadki przezeń otrzymané dla błędów, które, z przyczyny narzędzi i samégo ich użycia, są nieodzielne od praktycznych robót, są mniéy pewné od wypadków wyprowadzonych przez rachunek pilnie odbyty, podług niewątpliwych prawideł. Wcałym więc ciągu roboty należy starać się używać rachunku, a do działań mierniczych tyle się tylko udawać, ile są potrzebné do jego zaczęcia, lub do sprawdzenia wypadków przezeń otrzymanych.

4. Na ten koniec kray, którego zamiérzamy robić kartę, dzieli się na troykąty, obiérając za ich wierzchołki miéysca znaczniéyszé. Takowé troykąty składają niby sieć rozciągającą się na wszystkié strony, w nich znając wielkość wszystkich kątów, i jednégo przynaymniéy którégokolwiek boku, znaydziemy przez trygonometryą inné boki, to jest, wzajemné odległości miéysc będących wierzchołkami troykątów; z tych odległości wyrachowanych układa się główny rys kraju; powierzchnia zaś każdégo troykąta wielkiego zapełnia się troykątami mniéyszémi, mającémi za wierzchołki przedmioty także znaczniéyszé; a powiérzchnie mniéyszych troykątów zapełniają się wszystkiémi szczegułami, w obrebie ich znaydującémi się, które się oznaczają sposobami przez Geometrów zwyczaynie używanémi, opiérając się zawsze o boki wielkich troykątów.

A

5. Główné troykąty powinny być, jak tylko można, naywiększé, iżby w ciągu téyże saméy roboty zająć większą część kraiu, a raczéy ażeby w ułożeniu głównégo rysu kraju używać iak naymniéy działań mierniczych; lecz krzywość powiérzchni ziemi i niedalekie sięganie lunet będących przy kątomierzu, kładą granicę, za którą przeyscie zamiast pożytku sprawiłoby niedokładność, dla niewyraźnégo malowania przedmiotów.

6. Kształt troykątów nie jest także obojętną rzeczą; naylepsze są równoboczné, albo ile możności do nich przystępujące, ponieważ w takich troykątach omyłka w braniu kątów popełniona, naymniéy wpływa do długości boków (a); lecz położenié miéysca nie zawsze dozwala czynić tak dogodny wybór punktów; nad to, używając do brania kątów koła powtarzaiącégo (*cercle repetiteur*), można się oddalić od założonégo prawidła, i dość tylko o to się starać, jak mówi *Puissant* (b), aby kąty nie były mniéysze od 22° 30′, ponieważ w takowym kącie popełniona omyłka na 3″,2 nie wpływa nawet na jedności boku długiego 60000 metrów.

7. Im punkta ostateczné maiące się umieścić na karcie są dalszé od siebie, tém mniéy dokładności, jak się zdaje, można obiecywać w ich oznaczeniu, ponieważ tém większa liczba troykątów użytą być musi do ich połączenia; błąd przeto popełniony w piérwszym troykącie, wpływając we wszystkié następné z nim się wiążącé, i łącząc się z błędami w każdym troykącie popełnianémi, da wypadki na wartość boków w dalszych troykątach różné od prawdziwéy ich wartości i stanie się przyczyną niedokładnégo oznaczenia punktów. Doswiadczenie jednak nie potwierdza tégo rozumowania. Bouguer i Condamine, Akademicy Francuzcy, roku 1736 i lat następnych przeznaczeni do mierzenia trzech piérwszych stopni południka w Peru, z ciągu 32 troykątów służących do oznaczenia części południka, więcéy jak 177 tysięcy sążni wynoszącéy, znalezli tylko $\frac{31}{100}$ sążnia róznicy między długościami podstawy przy Tarqui, jedną otrzymaną z wymiaru, a drugą wyprowadzoną przez rachunek z podstawy wymierzonéy przy Yarouqui (c)— Boscovich i Maire wymierzaiąc, roku 1750 i lat następnych, w panstwie papieskiém część południka zamykającą więcéy jak 123 tysięcy sążni, użyli tylko 11 troykątów, a w ostatnim z nich, długość boku wyrachowana więcéy jak 5 stopami pokazała się być mniéyszą od wymierzonéy (d).— Delambre nakoniec i Méchain, za wynalezieniem doskonalszych narzędzi i sciśléyszych sposobów rachowania, z ciągu 53 troykątów łączących Perpignan z Melun, w odległości większéy od 900 tysięcy metrów, nie znalezli trzeciéy części metru różnicy, między wielkością podstawy przy Perpignan otrzymaną z wymiaru, a wyprowadzoną przez rachunek z podstawy wymierzonéy przy Melun, bo cała różnica wynosiła 0,16 sążnia, czyli około 11 cali— Z czégo wnieść można, że im więcéy jest troykątów, skoro oné tylko odpowiadają wyżéy założonym warunkom, oraz narzędzia są doskonałe i sposoby rachowania scislé, błędy popełniané zamiast zbiérania się, wzajemnie się niszczą i w końcu tém mniéyszy błąd wypada.

8. Wiérżchołki tróykątów powinny być dobrze widziané jedné z drugich dla wymiérzania kątów, przeto tak należy układać troykąty, aby ich wiérżchołki przypadały na budowle wązkié a wysokié, które zdaleka dają się postrzegać, jakiémi są dzwonnice, wieże, i t. d. a nawet drzewa, krzyże lub jakiékowiek słupy; lecz naylepiéy obierać takié budowle, na których narzędzie do brania kątów użyte, może być postawioné. W niedostatku gotowych znaków, robią się znaki umyślné na wyniosłych mieyscach

(a) Trigonometrie par Cagnoli trad. de l'Ital. par Chompré 2. edit. 1808 N. 769—772.
(b) Traité de Géodesie par Puissant N. 47.
(c) La figure de la terre par M. Bouguer à Paris 1749 in 4to page 113 et 150; ou II. Sect. N. 77; III Sect. N. 37.
(d) De literaria expeditione a Maire et Boscovich Romae 1755— oposculum secun. N. 22 et 48. pag. 142 et 152.

w kształcie ostrosłupów lub graniastosłupów, albo też, jak w nocy, zapalają się ognie, lub ustawiają się lampy z blachami swiatło odbijającémi (*lampes à reverbere*).

9. Naylepszym co do widzenia ze wszystkich znaków, jest bez wątpienia, lampa z rewerberem. Pozorna średnica światła jest we wszystkich kierunkach jednostayna, w celowaniu więc nie można popełnić błędu; nadto, z daleka daje się postrzegać. Mówi bowiem Roy, iż w czasie działań geodezycznych wykonywanych w celu znalezienia odległości miedzy południkami, przez obserwatoryum w Paryżu i w Grynicz (*Greenwich*), przechodzącémi, lampy z blachami do odbijania swiatła srednicy calów 10, dawały się postrzegać w odległości 24 mil angielskich, co wynosi blisko 20 tysięcy sążni (e) — Biot zaś z brzegów Walencyi w Hiszpanii widział swiatło lampy zapaloney na wyspie Majorce (f) — Méchain z góry Montlambert przy Boulogne przez lunetę, widział swiatło prostéy lampy Kinqueta z rewerberem, palącéy się w latarni zwyczaynéy na brzegu Angielskim w Lydd, jak gwiazdę ósméy wielkości, gdy odległość wynosiła do 30000 sążni — Ognie też bez blach swiatło odbijających mogą być zdaleka widziané: Cassini z Blancnez widział gołém okiem, jak Wenusa przy poziomie ogien zapalony w Dunkierce przez P. Legendre, w odległości 20000 sążni — Méchain z Montlambert widział także gołém okiem, ogien zapalony przez Roy, na brzegu Angielskim przy Fairligkt Down w czasie dźdźu w odległości 40000 sążni; lecz té ognie, umyślnie do tego sporządzane, były bardzo żywé, puszki w których się one znaydowały, razem się paliły, i dłużéy takowe ognie nie trwały na $2\frac{1}{4}$ minut (g).

10. Lecz ta korzyść drogo się kupuje. Oswiécanie nici lunetowych, koniecznie potrzebné w nocnych obserwacyach, a trudné niekiedy do wykonania na górach prawie zawsze oddalonych od wszelkich mieszkań, a osobliwie utrzymywanie na każdém stanowisku rozsądnéy osoby do zapalania lamp, i kierowania blachami swiatło odbijającémi, są to wielkie w użyciu ich niedogodności; prócz tego mówi Delambre (h), iż w kątach, które Méchain wymierzał w Hiszpanii za pomocą lamp, nie widzi więcéy zgody, a może też nieco mniéy, niżeli w kątach, któré otrzymywał obserwując znaki dzienné zwyczayné.

11. Znaki jakiegokolwiek bądź gatunku powinny być zdaleka dobrze widziané i należycie od innych przedmiotów rozróżnioné. W nocy używając lamp, można dwie razem zapalić jednę nad drugą w kierunku pionowym, jako czynili Anglicy w okolicach Londynu (e); w znakach zaś dziennych wierzchołki powinny być zupełnie wyraźné, ponieważ się do nich pospolicie celuje, należy przeto unikać niewyraznie zakończonych. Przedmioty w kształcie ostrosłupa lub ostrokręgu ostro się kończącé są dobrémi znakami, jeźli samé ich wierżchołki mogą być uważané, w zdarzeniu przeciwném, lepiéy jest wiérżchołek ucinać, lecz potrzeba unikać znaków mających kształt walca lub graniastosłupa równo uciętych, bo w nich na domysł się celuje do osi. Znaki są naylepszé w kształcie ostrosłupów lub ostrokręgów z wierżchołkami nieco uciętémi, lub zakończonemi gałką.

12. Delambre prawie wszędzie robił swoje znaki w kształcie ostrosłupów kwadratowych z wierżchołkami uciętémi — Szwedzi wymierzając południk w Laponii roku 1801, 1802 i 1803, robili znaki w kształcie ostrosłupów czworobocznych, na ich osiach przedłużonych ustawiali równoległobok wewnątrz próżny, którén obracali w kierunku prostopadłym do promienia celującégo. Jeżli czas był pogodny a znak odbijał się na niebo, obserwowano przez równoległobok niebo widziané, jeźli zaś przedmiot odbijał się na

---

(e) Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Vol. 80. page 163.
(f) Biblioteque Britannique.
(g) Exposé des operations faites en France en 1787 pour jonction des observatoires de Paris et de Greenwich par Cassini, Méchain et Legendre à Paris.
(h) Base du Systeme métrique décimal par Méchain et Delambre Tome I. discours préliminaire page 106.

ziemię, udawano się do samego ostrosłupa. To urządzenie było wyborné, wymagało tylko posyłania zawsze jakiegoś człowieka dla dania równoległobokowi przyzwoitégo położenia, za każdym razem, jak odmieniano stanowisko (i).

Borda radzi robić znaki w kształcie troykątów równobocznych, mogących się obracać około osi pionowéy, dla przedstawienia ich następnie ku tym stanowiskóm, z których będą obserwowané. Bez wątpienia takowe znaki uczyniłyby obserwacye dokładnieyszémi, i mnieyby wypadało czynić redukcyy, lecz niepodobność nadania im zupełnéy mocy, a często niedostatek zdolnych rzemieślników i stosownych materyałów, nadto utrzymywanie na każdém stanowisku osoby obracającéy znaki w różne strony, każe uważać podany sposób przez Pana Bordę, za dobry tylko w teoryi ale nie w praktyce.

13. Znak ażeby zdaleka mógł być dobrze widziany, powinien mieć pewną wysokość, szérokość zdaje się mniey wpływać do dobrego jego widzenia, a nawet za nadto wielka uczyniłaby niepewnym punkt, do którego się celuie. — Delambre po wielu doświadczeniach w czasie wymierzania południka wziął sobie za prawidło dawać znakowi wysokość równą $\frac{3}{20000}$ odległości, w któréy ma być widziany, czyli raczéy równą iloczynowi z odległości przez wstawę 31″, to jest przez 0,00015. i takową wysokość widział pod kątem naymniey 30″. Szérokość zaś podstawie znaku, dawał równą trzeciéy części wysokości (k)— Boscovich robione znaki w kształcie ostrokręgu lub ostrosłupa średnicy stop 14, a wysokości nieco większéy, gdy się odbijały na niebo, słabémi lunetami postrzegał w odległości 50000 sążni; gdy się odbijały na ziemię, pociągnioné białym kolorem widział w odległości 24000 sążni.

14. Znaki trzeba tak ustawiać, aby należycie były widziane ze wszystkich stanowisk, z których maią być obserwowané, naylepiey byłoby, jeśli można, tak ich ściany układać, aby były prostopadłémi do boków troykątów, którym służą za wierzchołki. Lecz takowe ułożenie nayczęściéy jest niepodobné. Jeśli znak z dwoch tylko stanowisk ma być uważany, można go zrobić z jednéy tarczy, i tak ją ustawić aby kąt zawarty między dwoma stanowiskami dzieliła po połowie, jeżeli jest większy od kąta prostégo; jeżeli zaś jest mnieyszy od prostégo, aby była prostopadłą do linii dzielącey ten kąt po połowie. Jeżeli znak ma być obserwowany z kilku stanowisk, można go niekiedy tak ustawić, aby jedna ściana była widzianą ze wszystkich stanowisk, chociaż ukośnie w dostateczney jednak szérokości; lecz nayczęściéy niepodobna tego dokazać; w takowym razie zwrócić należy całą ścianę ku temu stanowisku, z którego przewidujemy, iż, dla odległości lub dla innéy przyczyny, trudniéy będzie widziany niżeli z jnnych.

15. Jeżeli znak ma być umyślnie robiony na jakiém mieyscu, dla dowiedzenia się, na jakie przedmioty będzie się odbijał widziany z przyległych stanowisk, ustawia się koło kątomierza w położeniu pionowém, jedna luneta zwraca się do spodu znaku, zktórégo ma być obserwowany znak ustawiony na tém mieyscu, gdzie zostajemy, a druga w stronę przeciwną na poziom. Jeżeli łuk w górze zawarty między dwiema lunetami zamyka kilka minut więcéy od półokręgu koła, wtedy można mieć pewną nadzieję, iż znak uważany z przyległego stanowiska będzie się odbijał na niebo. Jeżeli rzeczony łuk zamyka równo półokręgu koła, można się spodziewać, że przynaymniéy wierzchołek znaku padać będzie na niebo, lecz jeżeli rzeczony łuk jest mnieyszy od półokręgu koła, wtedy niewątpliwą jest rzeczą, iż znak będzie się odbijał na ziemię. Tym spo-

(i) Exposition des operations faites en Laponie pour la determination d'un arc du meridien en 1801, 1802 et 1803 par Ofverbom, Svanberg, Holmquist et Palander redigée par M. Svanberg Directeur de l'observatoire de Stockholm. 1804 in 8vo.

(k) Base du Systême mètrique. T. I. Dis. preli. page 107.

sobem doświadczywszy względem wszystkich stanowisk otaczających, można łatwo poznać, którą stronę znaku wypada pociągnąć jakim kolorem, dla rozróżnienia go od przedmiotów, na które się ma odbijać, a które w odległości złączywszy się ze znakiem wprowadziłyby błąd w obserwacyą. Pomimo użytych ostróżności może się wydarzyć, iż dla łamania się światła przedmioty znaydujące się pod poziomem staną się widzianémi, i znak odbijający się na niebo, będzie się odbijał na przedmioty wyszłe zpod poziomu; lecz ztąd nieprzyzwoitość żadna nie wyniknie, bo przedmioty pokazujące się przez łamanie się światła, słabiéy się malują od rzeczywistych.

16.) Po ustanowieniu znaków na wszystkich stanowiskach otaczających to stanowisko, na którém się obserwator znayduje, biorą się kąty dwojakiego gatunku, jedne zawarté między linijami ze stanowiska do innych znaków poprowadzonémi, nazywané kątami położenia (*angles de position*), służącé do rozwiązania głównych troykątów, drugié zawarté między ramionami pierwszych i linijami pionowémi przez wierzchołki ich przechdzącémi, nazywané odległościami od nadgłownika (*distances au zenith*), służącé do sprowadzenia pierwszych do poziomu.

17.) Kąty położenia aby należycie odpowiedziały tému celowi, do jakiego mają być użyté, powinny: 1^{od} znaydować się każdy na płaszczyznie poziomey przez wierzchołek kąta przechodzącéy; 2re być branémi w samym środku stanowiska, to jest w samych wierzchołkach troykątów; 3^{cie} mieć swoje ramiona skierowané do środka tych stanowisk, między którémi się biorą. Lecz nie zawsze jest w mocy obserwatora wypełnić te warunki, i nayczęściéy pomimo całéy swéy usilności, musi wymierzać takie kąty, jakich mu położenie miéysca dozwala. Często się albowiem wydarza, iż środek znaku służącego za stanowisko zajęty jest czémkolwiek; w tym razie ustawia się kątomiérz albo wewnątrz znaku obok środka, albo zupełnie zewnątrz. Położenie znowu słońca względem obserwatora sprawuje, iż w znakach między którémi się kąt bierze, strony obróconé ku obserwatorowi niekiedy w części tylko są oświeconé; a że strony oświecone naylepiéy się dają widzieć, przeto obserwator w dniu pogodnym celując do linii pionowéy, dzielącéy po połowie strony widziané, wymierza kąt, którego ramiona nie przechodzą przez osi znaków obserwowanych. Nakoniec wymiérzony kąt prawie nigdy nie leży na płaszczyznie poziomey przez jego wierzchołek przechodzącéy. Należy więc piérwiéy, nim przystąpimy do szukania wzajemnych odległości stanowisk, z wymiérzonych kątów nie odpowiadających założonym warunkóm, znaleść kąty leżącé na płaszczyznie poziomey przez stanowisko przechodzącéy, i takie, jakiébyśmy otrzymali ustawiając środek narzędzia na osi znaku, i celując do osi znaków obserwowanych; czyli, jak się pospolicie mówi, należy kąty wymiérzone sprowadzić do poziomu, do środka stanowiska, i ramiona ich skierować do osi znaków, między którémi się biorą.

18.) Dla sprowadzenia kąta położenia do płaszczyzny poziomey przez jégo wierzchołek przechodzącéy, trzeba miéć od nadgłownika odległości tych znaków, między którémi jest on wzięty, to jest trzeba mieć kąty zawarté między ramionami kąta położenia a liniją pionową przez jego wierzchołek przechodzącą; mając zaś je, z wierzchołka spólnégo wszystkim trzem kątóm, wyobrażamy zakréślone jednym jakimkolwiek promieniem, łuki między ramionami tych kątów; tworzy się ztąd troykąt kulisty, w którym, mając wiadomé wszystkié trzy boki jako będącé miarami wiadomych trzech kątów, znaydziemy kąt kulisty zawarty między dwoma łukami zbiegającémi się na linii pionowéy, to jest kąt między stycznémi do tychże łuków w punkcie ich zbieżenia się poprowadzonémi, a zatém między prostopadłémi do linii pionowéy; takowy kąt leży na płaszczyznie prostopadłéy do linii pionowéy, a tém samém na płaszczyznie poziomey, zatém jest kątem szukanym odpowiadającym wymiérzonému i nazywa się jego projekcyą. Następne wykréślenie całą tę rzecz objaśni.

Fig. 1. Niech będzie Z, nadgłownik obserwatora, który z punktu C wymiérzył i kąt BCA, leżący na płaszczyznie pochyłéy względem płaszczyzny B′CA′ poziomey przez punkt C przechodzącéy, i odległości od nadgłownika ZCB, ZCA. Przez ramiona kąta wymiérzonégo BCA prowadzę płaszczyzny pionowé ACA′, BCB′, które, przeciąwszy się z płaszczyzną poziomą w linijach, A′C, B′C, tworzą kąt poziomy B′CA′, nazywany kątem sprowadzonym, czyli redukcyą kąta pochyłégo BCA; o jégo wynalezienie rzecz tu idzie: na ten koniec z punkta C wyobrażamy zakréślone jednym promieniem łuki Za, Zb, ab; w troykącie z tych łuków utworzonym kulistym Zab, kąt kulisty Z, jest razem kątém zawartym między stycznémi Za′, Zb′, łuków Za, Zb, w punkcie Z, prostopadłémi do linii pionowéy ZC, i równoległémi do liniy CA′, CB′; zatém jest równy kątowi poziomému B′CA′; znalazłszy więc kąt kulisty Z, będziémy mieli tém samém kąt poziomy B′CA′. Znaydziemy zaś kąt Z, z troykąta kulistégo Zab, w którym wszystkie boki są wiadomé; boki Za, Zb, jako odległości od nadgłównika ramión CA i CB, bok zaś ab, jako miara kąta wymiérzonégo BCA; do czégo może służyć wzór znajomy w trygonometryi kulistéy następny:

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}Z = \sqrt{\left[\frac{\text{wst}\left(\frac{Zb+ba-Za}{2}\right)\text{wst}\left(\frac{Za+ba-Zb}{2}\right)}{\text{wst}\,Za.\ \text{wst}\,Zb.}\right]}$$

$$\text{czyli}\quad \text{wst}\,\tfrac{1}{2}Z = \sqrt{\left[\frac{\text{wst}\left(\frac{Zb+ba+Za-Za}{2}\right)\text{wst}\left(\frac{Za+ba+Za-Zb}{2}\right)}{\text{wst}\,Za\,.\ \text{wst}\,Zb}\right]}$$

nazywając zaś summę boków $Zb+ba+Za=s$,

$$\text{będzie}\quad \text{wst}\,\tfrac{1}{2}Z = \sqrt{\left[\frac{\text{wst}\left(\frac{s}{2}-Za\right)\text{wst}\left(\frac{s}{2}-Zb\right)}{\text{wst}\,Za\,.\ \text{wst}\,Zb}\right]}$$

Wysokości ramion kąta wymiérzonégo nad płaszczyznę poziomą przez jego wiérzchołek przechodzącą, zakładając w i v; będzie $Za = 1^{k.\,pr} - w$, $Zb = 1^{k.\,pr} - v$ (l); kładąc te wyrażenia za Za i za Zb, w naypiérwszą wartość kąta Z, będzie

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}Z = \sqrt{\left[\frac{\text{wst}\left(\frac{1^{k.\,p}-v+ba-(1^{k.\,p}-w)}{2}\right)\text{wst}\left(\frac{1^{k.\,pr}-w+ba-(1^{k.\,pr}-v)}{2}\right)}{\text{wst}\,(1^{k.\,pr}-w)\ \text{wst}\,(1^{k.\,pr}-v)}\right]}$$

$$\text{czyli}\quad \text{wst}\,\tfrac{1}{2}Z = \sqrt{\left[\frac{\text{wst}\left(\frac{ba+(w-v)}{2}\right)\text{wst}\left(\frac{ba-(w-v)}{2}\right)}{\text{dosta}\,w\,.\ \text{dosta}\,v.}\right]}$$

Jeźliby kąt wymiérzony leżał pod płaszczyzną poziomą przez jego wiérzchołek przechodzącą, w tym razie, zniżenia ramion kąta wymiérzonégo pod płaszczyznę poziomą nazywając w i v, byłoby $Za = 1^{k.\,pr} + w$, $Zb = 1^{k.\,pr} + v$; té wyrażenia zamiast Za, Zb, w prowadzając w naypiérwszą wartość kąta Z, po uprosczeniu wypadłaby ta sama formuła co wyżéy; więc ostatnia formuła służy na przypadek tak wysokości jak zniżenia ramion kąta wymiérzonégo, względem płaszczyzny poziomey przez jego wierzchołek przechodzącéy.

Jeźliby zaś jedno ramie kąta wymiérzonégo było podniesioné a drugié zniżone względem rzeczonéy płaszczyzny, wtedy należałoby położyć $Za = 1^{k.\,p} - w$, $Zb = 1^{k.\,p} + v$; albo $Za = 1^{k.\,p} + w$, $Zb = 1^{k.\,p} - v$; co uczyniwszy po uprosczeniu wyrażenia otrzymamy

(l) Wyrażenie $1^{k.\,p}$, znaczy jeden kąt prosty; $2^{k.\,p}$, znaczy dwa kąty proste.

$$\text{wst}\ \tfrac{1}{2}Z = \sqrt{\left[\frac{\text{wst}\left(\frac{ba+(w+v)}{2}\right)\text{wst}\left(\frac{ba-(w+v)}{2}\right)}{\text{dosta}\ w\ .\ \text{dosta}\ v.}\right]}.$$ Fig. 1.

Ten wzór i poprzedzający mogą być wyrażoné pod jednym kształtem następnym:

$$\text{wst}\ \tfrac{1}{2}z = \sqrt{\left[\frac{\text{wst}\left(\frac{ba+(w\mp v)}{2}\right)\text{wst}\left(\frac{ba-(w\mp v)}{2}\right)}{\text{dosta}\ w\ .\ \text{dosta}\ v.}\right]}$$

gdzie—v, bierze się wtedy, kiedy oba ramiona kąta wymiérzonégo leżą z jednéy strony płasczyzny poziomėy; +v, kiedy ze stron przeciwnych.

19.) Zamiast szukania całégo kąta poziomégo, można tylko szukać téy ilości, którą trzeba dodać do kąta wymiérzonégo, dla otrzymania kąta poziomégo, osobliwie jeźli płasczyzna na któréy się znayduje kąt wymiérzony, nie wiele się oddala od płasczyzny poziomėy; do czégo służy sposób podany na znalezienie w troykącie kulistym kąta zawartégo między bokami, nie wiele się różniącémi od czwartéy części okręgu koła (101). Jakoż boki Za, Zb, mało się różnią od czwartéy części okręgu koła, zatém wartość kąta kulistego Z, mało co jest mniéysza od wartości łuku ab, czyli od kąta ABC; tę ilość, którą do kąta ACB, należy dodać, dla otrzymania kąta kulistégo Z, czyli jému równégo A′CB′, znaydziemy za pomocą wzoru:

$$x = \left(\frac{w+v}{2}\right)^2 \text{sty}\ \frac{C}{2} - \left(\frac{w-v}{2}\right)^2 \text{dosty}\ \frac{C}{2} \qquad \text{(A)}$$

w którym w, i v, oznaczają wysokości ramión kąta wymiérzonégo ACB nad płasczyznę poziomą; C znaczy kąt wymiérzony ACB, czyli łuk będący jego miarą ab.

Jeźliby kąt wymiérzony leżał pod płaszczyzną poziomą przez wiérzchołek jego przechodzącą; wtedy w, i v, oznaczają zniżenia ramion kąta wymiérzonégo; w takowym razie należy we wzorze poprzedzającym położyć w, i v, ze znakami przeciwnémi po czém będzie:

$$x = \left[\frac{-w-v}{2}\right]^2 \text{sty}\ \frac{C}{2} - \left[\frac{-w+v}{2}\right]^2 \text{dosty}\ \frac{C}{2}$$

lecz ten wzór co do wartości niczém się nie różni od poprzedzającégo, bo kwadraty z ilości tychże samych tak odjemnych jak dodatnych, zawsze są dotatné i równe między sobą, więc tenże wzor (A), może służyć na oba przypadki.

Jeźli zaś jedno ramie kąta wymiérzonégo znayduje się nad poziomem, a drugie pod poziomem, to jest, jeźli *np.* w, oznacza wysokość jednégo ramienia, v, zniżenie ramienia drugiégo pod poziom, kładąc wtedy v, ze znakiem piérwszému przeciwnym, wzor (A) zamieni się na

$$x = \left[\frac{w-v}{2}\right]^2 \text{sty}\ \frac{C}{2} - \left[\frac{w+v}{2}\right]^2 \text{dosty}\ \frac{C}{2} \qquad \text{(B)}$$

którego wartość jest odmienną od wartości wzoru poprzedzającégo.

We wzorach (A) i (B), mogą rozmaité zachodzić odmiany, podług różnych wielkości w i v, i tak jeźliby wypadło w=v, to jest że wysokości lub zniżenia ramión kąta wymiérzonégo są równé między sobą, albo wysokość jednégo równa jest zniżeniu drugiégo, w takowém zdarzeniu wzór (A) przywodzi się do $x = \left[\frac{w+w}{2}\right]^2 \text{sty}\frac{C}{2} = w^2.\text{sty}\frac{C}{2}$; a wzór (B), do $x = -\left[\frac{w+w}{2}\right]^2 \text{dosty}\frac{C}{2} = -w^2.\text{dosty}\frac{C}{2}$.

Fig. 1. 20.) Cały zaś wzór tak (A), jak i (B), przywodzi się do o, to jest kąt wymiérzony, nie potrzebując żadnéy poprawki, równy jest poziomému w trzech przypadkach;

1^{od}. Kiedy w=o, v=o;

2re. Kiedy dwa wyrazy składające wzór są równé między sobą, bo w tym razie, jako ze znakami przeciwnémi, zniszczą się, to jest kiedy:

we wzorze (A); $\left(\frac{w+v}{2}\right)^2 \text{sty}\frac{C}{2} = \left(\frac{w-v}{2}\right)^2 \text{dosty}\frac{C}{2}$

$$\text{ztąd } \frac{\text{sty}\frac{C}{2}}{\text{dosty}\frac{C}{2}} = \frac{(w-v)^2}{(w+v)^2};\quad \text{czyli } \text{sty}^2\frac{C}{2} = \left(\frac{w-v}{w+v}\right)^2;\quad \text{czyli } \text{sty}\frac{C}{2} = \frac{w-v}{w+v}.$$

we wzorze zaś (B); $\left(\frac{w-v}{2}\right)^2 \text{sty}\frac{C}{2} = \left(\frac{w+v}{2}\right)^2 \text{dosty}\frac{C}{2}$;

$$\frac{\text{sty}\frac{C}{2}}{\text{dosty}\frac{C}{2}} = \frac{(w+v)^2}{(w-v)^2};\quad \text{czyli } \text{sty}^2\frac{C}{2} = \left(\frac{w+v}{w-v}\right)^2;\quad \text{czyli } \text{sty}\frac{C}{2} = \frac{w+v}{w-v}.$$

3^{cie} Kiedy w=o, albo v=o, i sty $\frac{C}{2}$=dosty $\frac{C}{2}$; kładąc albowiem we wzorach (A), i (B), *np.* v=o, wypada $x = \frac{w^2}{4}\text{sty}\frac{C}{2} - \frac{w^2}{4}\text{dosty}\frac{C}{2}$; a jeżeli założymy sty $\frac{C}{2}$= dosty $\frac{C}{2}$, będzie $x = \frac{w^2}{4}\text{sty}\frac{C}{2} - \frac{w^2}{4}\text{sty}\frac{C}{2} = o$; wtedy zaś sty$\frac{C}{2}$=dosty$\frac{C}{2}$, kiedy kąt C, jest prosty; więc pokazuje się, że kąt wymiérzony kiedy jest prosty, a jedno ramie jest poziomé, żadnéy wtedy nie potrzebuje poprawki. Dla prędszéy roboty wyrachowané są tablice służące do znalezienia kąta poziomégo; takowé tablice w dziele *Traité de Géodésie par Puissant* są rachowané dzieląc koło na 400°; Delambre zaś wdziele *Base du Système métrique* rachował je uważając koło podzielone na 360°.

21.) W poprzedzających wzorach przypuszczaliśmy, iż odległości od nadgłownika ramion kąta sprowadzanégo, brané były z wiérzchołka tegoż kąta, położenie jednak miéysca przymusza niekiedy obserwatora dla wzięcia rzeczonych odległości, zeyść z swégo piérwszégo stnnowiska na inné miéysce. Odległości od nadgłownika wymiérzoné na tém miéyscu, będą się nieco różniły od tych, jakieby wypadły biorąc je z wiérzchołka kąta sprowadzanégo, należy przeto tę różnicę ocenić, i ze stosownym znakiem przyłączyć ją do odległości od nadgłownika wymiérzonéy.

Miéysce obrané może się znaydować, albo na linii pionowéy przez wiérzchołek kąta sprowadzanégo przechodzącéy, lecz tylko od niégo wyżéy lub niżéy, albo na jednéy z nim płaszczyznie poziomey, z któréykolwiek jego strony, albo może nie leżeć, ani na jednéy linii pionowéy, ani na jednéy płaszczyznie poziomey.

Fig. 2. *Co do piérwszego.* Jeźli wiérzchołki obu kątów leżą na jednéy linii pionowéy; *np.* mamy wymiérzony kąt ZEB, trzeba zaś miéć kąt ZAB; widzimy że kąt ZAB jako zewnętrzny otrzymamy dodając kąt ABE, do kąta AEB; kąt ABE znaydziemy z troykąta ABE, albowiem w nim mamy bok EB będący odległością dwoch stanowisk; bok AE, który jest odległością wiérzchołka kąta szukanégo, i kąt AEB; będzie przeto AB : AE=wstE : wst B, ztąd wst ABE$=\frac{AE\,.\,\text{wst}\,E}{AB}$; aże AB = EB prawie, więc wst ABE $=\frac{AE\,.\,\text{wst}E}{EB}$; dla małości kąta ABE, biorąc wstawę za łuk, będzie ABE$=\frac{AE\,.\,\text{wst}\,E}{EB}$;

wyrażając zaś ten kąt w sekundach, otrzymujemy $ABE = \frac{AE \,.\, \text{wst}\, E}{EB \,.\, \text{wst}\, 1''}$. To samo otrzy- Fig. 2
malibyśmy używając sposobu podanégo na znalezienié kąta w troykącie z wiadomych w nim dwoch boków i kąta między niémi zawartégo.

Podobnie sobie postąpimy, jeźli wiérzchołek kąta szukanégo znaydować się będzie pod wiérzchołkiem kąta wymiérzonégo, *np.* mamy kąt wymiérzony AEB, a trzeba nam znaleść kąt EDB; widzimy, iż kąt EDB otrzymamy, odeymując od kąta AEB kąt EBD, który podobnym jak wyżey sposobem wyprowadzimy; będzie $EBD = \frac{ED \,.\, \text{wst}\, E.}{EB \,.\, \text{wst}\, 1''}$ więc ogólnie nazywając wzajemną stanowisk odległość $=O$, odległość wiérzchołka kąta szukanégo od wiérzchołka kąta wymiérzonégo $=d$, kąt wymiérzony $=b$; będzie różnica między kątem wymiérzonym a szukanym $= \frac{d \,.\, \text{wst}\, b}{O \,.\, \text{wst}\, 1''}$; takową różnicę dodawszy do odległości od nadgłownika wymiérzonéy, jeźli wiérzchołek tey odległości leży pod wiérzchołkiem kąta sprowadzanego, a w przeciwnym razie od niéy odjąwszy znaydziemy odległość od nadgłownika żądaną.

22.) *Co do drugiego.* Jeźli wiérzchołki obu kątów, to jest odległości wymiérzonéy Fig. 3.
i szukanéy leżą na jednéy płasczyznie poziomćy. Niech będzie stanowisko E, nadgłównik jego 14.
Z; przedmiot B, trzeba znaleść kąt ZEB; lecz obserwator znayduje się w punkcie G, który zakładamy na jednéy płasczyznie poziomćy z punktem E, i wymiérza kąt Z′GB; z tégo więc kąta trzeba wyprowadzić kąt ZEB. Na ten koniec z punktu B, wyobrażamy spuszczoną liniją prostopadłą BF, na płasczyznę poziomą GEF, przez punkta G, E, przechodzącą, i prowadzimy linije GF, EF. Z punktu F wyobrażamy odciętą liniją $FH = FE$, więc jeźli znaydziemy kąt Z″HB, będziemy miéli tém samém kąt ZEB równy kątowi Z″HB. Uważamy że kąt $Z''HB = Z''HF - BHF$, czyli $Z''HB = Z'GF - BHF = Z'GB + BGF - (BGF + GBH)$, tojest $Z''HB = Z''GB - GBH$; na figurze zaś 4y podobnie uważając wypada $Z''HB = Z'GB + GBH$. — Cała więc rzecz kończy się na znalezieniu kąta GBH, który otrzymamy z troykąta GBH; jest albowiem;

$$HB : HG = \text{wst}\, HGB \text{ v. dosta } Z'GB : \text{wst}\, GBH; \text{ ztąd wst}GBH = \frac{HG \,.\, \text{dosta}\, Z'GB}{HB}$$

Liniją zaś HG, możemy oznaczyć z troykąta GBE; wktórym mając boki GE, EB, i kąt GEB, znaydziemy bok GB; odeymując od niego liniją EB, otrzymamy liniją GH; albo nie trzymając się wielkiéy scisłości, możemy znaleść liniją GH z troykąta GHE, biorąc w nim kąt H za prosty, będzie albowiem $\text{wst}\, H \text{ v. } 1 : \text{wst}\, GEH = GE : GH$, a ztąd $GH = GE \,.\, \text{wst}\, GEH$; biorąc przez przybliżenie kąt HEF za prosty, będzie $\text{wst}\, GEH = \text{dosta}\, GEF$; przeto $GH = GE \,.\, \text{dosta}\, GEF$, a ztąd $GBH = \frac{GE \,.\, \text{dosta}\, GEF \,.\, \text{dosta}\, Z'GB.}{HB}$
Ogólnie więc nazywając odległość GE punktu obserwacyi, od środka stanowiska $=d$; odległość między stanowiskami $=O$; odległość od nadgłównika wymierzoną $=b$; kąt zawarty między linijami ze stanowiska poprowadzonémi do drugiego stanowiska do którego celujemy, i do punktu obserwacyi, to jest kąt GEB, czyli $GEF = E$; otrzymujemy $\text{wst}\, GBH = \frac{d \,.\, \text{dosta}\, E \,.\, \text{dosta}\, b;}{O}$ a dla małości kąta GBH, biorąc wstawę za łuk, będzie $GBH = \frac{d \,.\, \text{dosta}\, E \,.\, \text{dosta}\, b;}{O \,.\, \text{wst}\,.\, 1''}$ Takowy kąt jest różnicą między odległością od nadgłównika wymierzoną a szukaną. — Tę różnicę, jeźli punkt obserwacyi leży przed stanowiskiem, dodając do odległości od nadgłownika wymierzonéy, gdy jest mniéyszą od kąta prostégo, lub od niéy odeymując gdy jest większą od prostégo, otrzymamy odległość od

Fig. 3. i 4. nadgłownika żądaną. Jeźli zaś punkt obserwacyi leży za stanowiskiem, dla znalezienia odległości od nadgłownika prawdziwéy, należy do wymierzonéy gdy jest większą od kąta prostégo dodać wypadłą różnicę, odjąć zaś gdy jest mniéyszą od prostégo.

23.) *Co do trzeciégo* Jeźli punkt obserwacyi nie znayduje się ani na jednéy linii pionowéy, ani na jednéy płasczyznie poziomey z wierżchołkiem kąta poziomégo, wymiérzona wtedy odległość od nadgłownika naprzód, sposobem podanym w przypadku drugim, sprowadza się do lini pionowéy przez wiérżchołek kąta troykątowégo przechodzącéy, a potém podług przypadku piérwszégo do wiérżchołka kąta rzeczonégo

24.) Jeżliby do wymiaru kąta położenia użyty był kątomierz z lunetami mogącemi się nachylać w kierunku pionowym po płasczynach przez ich osi przechodzących, takim kątomierzem ustawionym poziomo, kąt wymierzony jest kątem poziomym i nie potrzebujé żadnégo sprowadzania do poziomu.

25.) Po otrzymaniu jakimkolwiek sposobem kąta poziomégo, jeźli jégo wiérzchołek nie znayduje się na linii pionowéy przez środek znaku przechodzącéy, to jest na osi znaku, trzeba go do niéy sprowadzić, co wykonamy następnym sposobem.

Fig. 5. Niech będzie C środek stanowiska, O środek narzędzia, albo wiérzchołek kąta uważanégo AOB, trzeba znaleść kąt ACB nazywany redukcyą kąta wymierzonégo AOB

Na ten koniec wymiérzam liniją CO i kąt COB; linije zaś CA, CB, trzeba mieć wymiérzoné lub wyrachowané. Kąt AIB jest zewnętrznym troykąta AIO, i troykąta BIC, więc $AIB = IAO + AOI$; $AIB = IBC + BCI$, przeto $IBC + BCI = IAO + AOI$; ztąd $BCI = AOI + IAO - IBC = AOB + CAO - CBO$.

W tróykącie CAO, mamy, $CA : CO = \text{wst}\, COA : \text{wst}\, CAO$; ztąd $\text{wst}\, CAO = \frac{CO \,.\, \text{wst}\, COA}{CA}$

W troykącie CBO mamy, $CB : CO = \text{wst}\, COB : \text{wst}\, CBO$ ztąd $\text{wst}\, CBO = \frac{CO . \text{wst}\, COB}{CB}$

Dla małości kątów CAO, i CBO, kładąc na ich miéyscu wartość ich wstaw, będzie

$$BCI \,\underline{\vee}\, ACB = AOB + \frac{CO \,.\, \text{wst}\, COA}{CA} - \frac{CO \,.\, \text{wst}\, COB}{CB}$$

Wartość kątów CAO i CBO, wyrażona jest w częściach promienia, dla wyrażenia jéy w stopniach czyli sekundach mnożę przez $P'' = \frac{1}{\text{wst}\, 1''}$ (98); z czego wypada:

$$ACB = AOB + \frac{CO \,.\, \text{wst}\, COA}{CA \,.\, \text{wst}\, 1''} - \frac{CO \,.\, \text{wst}\, COB}{CB \,.\, \text{wst}\, 1''}$$

Ztąd różnica między kątem szukanym a wymierzonym jest

$$ACB - AOB = \frac{CO \,.\, \text{wst}\, COA}{CA \,.\, \text{wst}\, 1''} - \frac{CO \,.\, \text{wst}\, COB}{CB \,.\, \text{wst}\, 1''} \quad (C)$$

Tę różnicę dodawszy do kąta wymiérzonégo AOB, orzymamy kąt szukany ACB; lecz w użyciu tégo wzoru należy pilnie uważać, jakié wypada położyć znaki przed wyrazami; te znaki zależą od wstaw kątów COA, COB; wiadomo bowiem, że wstawa kąta mniéyszégo od dwoch kątów prostych jest dodatna, większégo zaś od dwoch kątów prostych jest odjemna; przeto wyraz piérwszy $\frac{CO \,.\, \text{wst}\, COA}{CA \,.\, \text{wst}\, 1''}$ poty będzie dodatnym, póki kąt COA będzie mniéyszy od dwoch kątów prostych, stanie się zaś odjemnym gdy kąt COA stanie się większy od dwoch kątów prostych; a przeciwnie wyraz drugi $-\frac{CO . \text{wst}\, COB}{CB \,.\, \text{wst}\, 1''}$ dopóty znak odeymowania przed sobą zatrzyma, dopóki kąt COB będzie mniéyszy od dwoch kątów prostych, skoro zas ten kąt stanie się większy od dwoch kątów prostych, wyraz rzeczony znak odeymowania zamieni na znak dodawania.

Linija AC jest odległością stanowiska od przedmiotu leżącego z prawéy strony, BC odległośią stanowiska od przedmiotu leżącégo ze strony lewéy względem obserwatora obróconego ku przedmiotóm. Kąt zaś COB, jest to kąt, pod którym się pokazują środek stanowiska i przedmiot leżący z lewéy strony względem obserwatora; mierząc przeto kąt AOB, górna luneta skierowana jest ku przedmiotowi lewému B, a dolna ku przedmiotowi prawému A; zostawując dolną na swojém miéyscu, górna od przedmiotu B, obraca się w lewą stronę aż do środka stanowiska C, łuk na kątomierzu od lunety przebiéżony jest miarą kąta COB który od o° dóyść może aż do cztérech kątów prostych. Fig. 5.

Wzór (C) sprowadza się do jednégo tylko wyrazu, kiedy jedna z odległości CB lub CA, jest bardzo wielka względem linii CO; *np.* kiedy punkt A lub B będzie środkiem ciała niebieskiégo, wtedy wzór sprowadza się do tégo tylko wyrazu, który zależy od przedmiotu ziemskiégo, jak się to zdarza w obserwacyach azymutu. J tak jeźli punkt A jest ciałem niebieśkiém, linija CA będzie bardzo wielka względem linii CO, wyraz zatém piérwszy mający za mianownik liniją CA, jako bardzo mały, opuscza się i wzór (C) zamienia się na następny: $ACB-AOB=-\frac{CO \,.\, \text{wst } COB.}{BC \,.\, \text{wst } 1''}$. Jeźli zaś punkt B jest ciałem niebieskiém, linija BC, jest bardzo wielka, przeto drugi wyraz opuscza się, a zostaje tylko $ACB-AOB=-\frac{CO \,.\, \text{wst } COA}{CA \,.\, \text{wst } 1''}$

26.) Jeźli oba punkta A i B, są siałami niebieskiémi, cały wzór sprowadza się do zera i wtedy wypada ACB=AOB. Nadto będzie cały wzór równy zeru wtedy nawet, kiedy jeden punkt A, lub B, jest ciałem niebieskiém, a środek narzędzia znayduje się na drugiém ramieniu kąta szukanégo idącém do przedmiotu ziemskiégo. Jeźli np. punkt A, jest ciałem niebieskiém, a środek narzędzia znayduje się w kierunku linii BC; linija AC jest bardzo wielka a kąt COB równy albo zeru, albo dwóm kątóm prostym; przeto wyraz piérwszy we wzorze (C) opuscza się dla swojéy małości, drugi zaś ginie z przyczyny, iż wstawa kąta COB równa się zeru. Podobnie jeźli punkt B jest ciałem niebieskiém a środek narzędzia przypada na linii AC; linija BC, będzie bardzo wielka, a kąt COA równy albo zeru, albo dwóm kątóm prostym, przeto we wzorze (C) piérwszy wyraz ginie, ponieważ wstawa kąta COA równa się zeru, drugi zaś opuscza się dla swojéy małości

Nie przypuszczając nawet żadnéy odległości nieskończonéy, obaczmy czy niémoże być kiedykolwiek kąt wymiérzony równy kątowi szukanému, to jest ACB=AOB; żebyśmy znaleźli, kiedy takowy przypadek może się wydarzyć, przypuśćmy że ACB=AOB, co uczyniwszy wypada $\frac{OC \,.\, \text{wst } COA}{CA}=\frac{CO \,.\, \text{wst } COB}{CB}$, a ztąd $\frac{CB}{CA}=\frac{\text{wst } COB.}{\text{wst } COA}$

Prowadzę liniją BA. W troykącie ABC mamy, BC : CA=wstA : wstB; ztąd $\frac{BC}{CA}=\frac{\text{wst } A}{\text{wst } B}$ aże $B+(A+C)=2^{\,k.\,p}$; przeto wstB=wst (A+C); $\frac{BC}{CA}=\frac{\text{wst } A.}{\text{wst } (A+C)}$

Porównywając z sobą dwa wyrażenia ułamku $\frac{BC}{CA}$, wypada: $\frac{\text{wt } COB.}{\text{wst } COA.}=\frac{\text{wst } A.}{\text{wst}(A+C).}$ aże COA=COB+BOA, przeto, $\frac{\text{wst } COB}{\text{wst } (COB+BOA)}=\frac{\text{wst } A}{\text{wst } (A+C)}$

Kładąc za wstawę summy dwoch kątów jey wartość, a za BOA, kładąc BCA, wypada:

$$\frac{\text{wst } COB}{\text{wst } COB \,.\, \text{dosta } BCA + \text{dosta } COB \,.\, \text{wst } BCA}=\frac{\text{wst} : A}{\text{wst}BAC.\text{dosta}ACB+\text{dosta}BAC\text{wst}C.}$$

Fig. 5. albo $\dfrac{1}{\text{dosta BCA} + \text{dosty COB . wst BCA}} = \dfrac{1}{\text{dosta ACB} + \text{dosty BAC . wsta ACB.}}$

albo dosta ACB + dosty BAC . wst ACB = dosta BCA + dosty COB . wst BCA.

ztąd dosty BAC = dosty COB; ztąd BAC = COB = 2 k. pr + COB.

To jest aby kąt szukany był równy wymiérzonému, potrzeba tak stanąć, żeby kąt COB, czyli tak nazwany kąt kierunkowy (*angle de direction*) był równy kątowi BAC, albo kątowi 2 k. p. + BAC.

Fig. 6. 27.) Z kąta AOB można wyprowadzić kąt ACB sposobem jescze następnym: Przez punkta A, B, C, wyobrażam przechodzącé koło. Z punktu P, w którym linija P, przecina okrąg koła, prowadzę cięciwy PC, PA. Kąt ACB = APB = AOB + OAP, czyli zakładając ACB = C; AOB = O; jest C = O + OAP. W troykącie OAP, mamy AP : OP = wst AOP : wst OAP

ztąd wst OAP $= \dfrac{\text{OP . wst AOP.}}{\text{AP}}$ — Ponieważ kąt OAP jest mały, więc biorąc wstawę za łuk czyli za kąt przezeń wymierzony, mamy OAP $= \dfrac{\text{OP . wst AOP.}}{\text{AP}}$ — Wartość tego kąta wyrażona jest w częściach promienia dla wyrażenia jéy w sekundach, mnożymy przez $P'' = \dfrac{1}{\text{wst } 1''}$; ztąd wypada OAP $= \dfrac{\text{OP . wst AOP}}{\text{AP . wst } 1''}$.

W troykącie OCP, mamy; wst CPO : wst OCP = CO : OP

ztąd OP $= \dfrac{\text{OC . wst OCP}}{\text{wst CPO}} = \dfrac{\text{OC . wst (CPB} - \text{COP)}}{\text{wst CPO} \underline{\vee} \text{ wst CPB} \underline{\vee} \text{ wst CAB}}$

albo dla skrócenia kładąc CO = r, CAB = A, COP = y; będzie OP $= \dfrac{\text{r . wst (A} - \text{y)}}{\text{wst A}}$

tę wartość za OP kładąc w wyrażenie kąta OAP $= \dfrac{\text{OP . wst AOP}}{\text{AP . wst } 1''}$, otrzymujemy:

$$\text{OAP} = \frac{\text{r . wst (A} - \text{y). wst O}}{\text{wst A . AP . wst } 1''}. \qquad \text{(D)}$$

Z punktu P, prowadzę na liniją AC, prostopadłą PL; w troykącie APL mamy AL : AP = Pro : siecz PAL; ztąd AP = AL . siecz PAL = (AC — CL) siecz PAL, aże w troykącie CPL jest; CL : CP = dosta PCA : Pro; ztąd CL = CP . dosta PCA; przeto AP = (AC — CP . dosta PCA) siec PAL; aże sie $= \dfrac{\text{Pro}^2}{\text{dosta}}$, więc AP $= \dfrac{\text{AC} - \text{CP . dosta PCA}}{\text{dosta PAL}}$

z troykąta CPO mamy; CP : CO = wst COP : wst CPO $\underline{\vee}$ wst CPB

ztąd CP $= \dfrac{\text{CO . wstOP}}{\text{wst CPB}} = \dfrac{\text{r. wst y}}{\text{wst CAB}}$

przeto AP $= \dfrac{\text{AC} - \dfrac{\text{r . wst y . dosta PCA}}{\text{wst CAB}}}{\text{dosta PAL}}$

aże kąt PAL jest bardzo mały, więc jego dostawa nie wiele się różni od promienia; kładąc dostaPAL = Pro = 1, wypada AP = AC $- \dfrac{\text{r . wst y . dosta PCA} \underline{\vee} \text{ PBA.}}{\text{wst CAB}}$

tę wartość linii AP, kładąc w znalezioną wyżéy wartość OAP (D);

będzie OAP $= \dfrac{\text{r . wst (A} - \text{y) . wst O}}{\left(\text{AC} - \dfrac{\text{r . wst y . dosta PBA}}{\text{wst A}}\right) \text{wst A . wst } 1''.}$

Przeto wyrażenie C = O + OAP; zamieni się w następne

$$C=O+\frac{r\cdot \text{wst}\,(A-y)\ \text{wst}\ O}{\left(AC-\frac{r\,.\,\text{wst}\ y\,.\,\text{dosta}\ PBA}{\text{wst}\ A}\right)\text{wst}\ A\,.\,\text{wst}\ 1''}$$ Fig. 6

czyli $$C=O+\frac{r\,.\,\text{wst}\,(A-y)\ \text{wst}\ O}{AC\,.\,\text{wst}A\,.\,\text{wst}\ 1''-r\,.\,\text{wst}\ y\,.\,\text{dosta}PBA.\text{wst}\ 1''}$$

Drugi wyraz w mianowniku jako nierównie mniéyszy w porównaniu piérwszégo, opusczając wypada:

$$C=O+\frac{r\,.\,\text{wst}\ O\,.\,\text{wst}\ (A+y).}{AC\,.\,\text{wst}\ A\,.\,\text{wst}\ 1''}$$

Nie równie prędzéy przyyść można do tego wzoru sposobem następnym:

Uważamy że linija AP mało się różni od linii AC, kładąc więc AC za AP, w wyrażenie (D); otrzymujemy:

$$OAP=\frac{r\,.\,\text{wst}\ (A-y)\ \text{wst}\ O}{AC\,.\,\text{wst}\ A\,.\,\text{wst}\ 1''};\ \text{a ztąd}$$

$$C=O+OAP=O+\frac{r\,.\,\text{wst}\ (A-y)\ \text{wst}\ O.}{AC\,.\,\text{wst}\ A\,.\,\text{wst}\ 1''}$$

Delambre używał tégo wzoru przekładając go nad piérwszy, ponieważ jest dostatecznym, a rachunek zabiéra mniéy czasu i miéysca, lecz wzór piérwszy jest ściśleyszy, i ta z niego jest korzyść, iż jeźli się obserwuje kilka kątów mających jedno ramie spólné, wyraz zależący od tégo boku spólnégo, jest tenże sam na redukcye wszystkich kątów; przeto za stanowiska naylepiéy jest obiérać takié punkta, zktórychby można było brać wszystkié potrzebné kąty. W takowym razie, dosyć jest raz tylko wymiérzyć odległość OC, i kąt COB, zktórégo można otrzymać wszystkié inné COA, dodając do niégo rozmaité kąty BOA, otrzymané przez obserwacyą. Takowégo sposobu postępowania ciągle się trzymał Delambre w swoich robotach.

28.) Używając którégokolwiek z dwoch wzorów poprzedzających dla przyprowadzenia kąta do jego prawdziwégo wiérzchołka; zawsze trzeba znać odległość stanowiska od osi znaku, to jest odległość wierżchołka kąta wymiérzonégo od wiérżchołka kąta szukanégo, i kąt nazywany kątem kierunkowym (*angle de direction*), zawarty między środkiém znaku, a przedmiotem z lewéy strony leżącym względem obserwatora; lecz kiedy środek znaku jest niewidziany, ani do niego celować ani do niego odmierzyć z punktu stanowiska nié można; rachunku wtedy użyć trzeba do znalezienia rzeczonéy odległości i kąta kierunkowégo.

Podstawa znaku może być albo wielokątem foremnym albo kołem. Jeźli podstawa jest wielokątem foremnym, stanowisko może być obrané.

1^{od}. Na linii prostopadłéy do boku podstawy, w samym jego środku.

2re. Na przedłużeniu boku podstawy.

3^{cie}. W inném jakiémkolwiek mieyscu zewnątrz podstawy.

Co do piérwszégo. Niech będzie podstawa znaku jakimkolwiek wielokątem foremnym *np.* sześciokątem ABCDEF, stanowisko niech będzie wpunkcie G na linii HG, Fig. 7 prostopadłéy do boku BC, a tém samém na linii przechodzącéy przez środek H, podstawy znaku. W tym razie dla znalezienia kąta kierunkowego, celuję z punktu G do punktu H i do przedmiotu lewégo; kąt wymierzony będzie kątem kierunkowym. Odległość zaś KG otrzymam dodając do wymierzonéy linii HG liniją KH, która znaydę z troykąta KHB, mając w nim wiadomy bok BH, bo można go wymierzyć, kąt H prosty, a kąt K, jako połowę kąta w środku wielokąta, to jest równy cztérem kątóm prostym podzielonym przez podwóyną liczbę boków wielokąta.

D

Fig. 7. Jeźliby podstawa znaku była prostokątem, wtedy linija CH byłaby równa połowie drugiégo boku prostokąta.

29.) *Co do drugiégo.* Niech będzie stanowisko obrane w punkcie O na przedłużeniu któregokolwiek boku *np* BC. W tym razie wymiérzam liniją OH, to jest odległość stanowiska O od środka boku H, i kąt SOC zawarty między lewym przedmiotem a bokiem przedłużonym.

Prowadzę na figurze liniją KO, i prostopadłą KH; w troykącie KHO prostokątnym mając bok HO wymiérzony; bok KH wyrachowany z troykąta BKH i kąt prosty, znaydziemy bok KO będący odległością stanowiska od osi znaku, i kąt KOH, który dodawszy do kąta SOH otrzymamy kąt kierunkowy SOK.

Jeżeliby się stanowisko znaydowało w punkcie O na przedłużeniu boku FE, w tym razie należałoby kąt wymierzony S'O'F zmniéyszyć kątem wyrachowanym KO'I dla otrzymania kąta kierunkowego S'O'K.

30.) *Co do trzeciego.* Jeźli stanowisko obiera się w innćm jakiémkolwiek mieyscu zewnątrz podstawy. — W tym przypadku, może się wydarzyć stanowisko takie, iż z niégo można widzieć: a), albo oba końce przekątnéy w podstawie przez jéy środek przechodzącéy, jeźli podstawa jest wielokątem foremnym z parzystą liczbą boków; b), albo oba końce którégokolwiek boku; c), albo jeden koniec tylko boku.

Fig. 8. a) Niech będzie podstawą znaku sześciokąt ABCDEF; stanowisko O z którégo można widzieć oba końcé srednicy EB. Wymierzam linije OE, OB, i kąt między niémi zawarty EOB, jako też kąt SOB czyli kąt SOE. W tróykącie EOB znaydziemy kąty OEB, OBE, i bok EB, a zatém i jego połowę EK=KB. Po czém albo z troykąta OEK mając w nim boki OE, EK i kąt OEK, znaydziemy kąt EOK i bok OK; albo z troykąta OBK mając w nim także boki OB, BK, i kąt OBK, znaydziemy kąt KOB i bok OK. Którykolwiek więc rozwiązując troykąt otrzymamy liniją OK, która jest odległością stnowiska od osi znaku; kąt zaś kierunkowy KOS wynaydziemy, albo do kąta SOB dodając kąt KOB, albo od kąta SOE odeymując kąt KOE.

W tym przypadku znaleść można odległość OK i kąt SOK bez rachunku trygonometrycznégo. Na ten koniec wymierzam linije OE,OB, odcinam na nich jakiekolwiek proporcyonalné części *np.* OL, ON; a naylepiéy takiéy wielkości, aby przez punkta L i N, poprowadzona linija LN, przypadała jak naybliżéy wielokąta; takowa linija jest równoległą do linii EB; dzielę ją po połowie; niech będzie środkiem punkt P; linija OP, przedłużona przeydzie koniecznie przez środek H; wymierzywszy więc kąt POS, mamy kąt kierunkowy; liniją zaś OK znaydziemy z podobnych troykątów PON, KOB, w których boki OP, ON, OB, mogą być wymierzoné.

Fig. 9. 31. b) Niech podstawą znaku będzie jakikolwiek wielokąt foremny *np.* sześciokąt ABCDEF, stanowisko O, z którégo można tylko widzieć bok jeden ED. — Wymiérzam kąt EOD, i kąt EOS, albo DOS; oraz trzy linije OE, OD, ED; lub przynaymniéy dwie którekolwiek. — W troykącie EOD znaydziemy kąty OED, ODE, i bok ED, jeźli nie jest wymiérzony. — W troykącie EKD z wiadomégo boku ED, i wszystkich kątów znaydziemy bok EK=KD. — Więc w troykącie OEK mając boki OE, EK, i kąt OEK, znaydziemy kąt EOK i bok OK, albo w troykącie ODK z wiadomych boków OD, DK, i kąta ODK, znaydziemy bok OK i kąt DOK; będziemy przeto mieli odległość stanowiska O, od środka znaku K; kąt zaś kierunkowy KOS otrzymamy, albo do kąta EOS dodając kąt EOK; albo do kąta DOS dodając kąt KOD,

W tym przypadku można to samo otrzymać bez rachunku trygonometrycznégo. Na ten koniec ze stanowiska O prowadzę prostopadłą OP do boku ED i ze środka wielokąta K, prostopadłą KM; wymiérzamy dokładnie linije OP, MP, MK; troykąty KMN i NOP dają; KM : MN = OP : NP ztąd KM+OP : MN+NP=KM : MN

czyli KM+OP : MP=KM : MN Fig. 9.

Znalezioną z téy proporcyi liniją MN odmiérzam na boku ED od punktu M, prowadzę liniją ON, która będzie w kierunku środka K, celując więc do punktu N, wymiérzymy kąt kierunkowy NOS. Liniją zaś OK otrzymamy dodając do linii NO wymiérzonéy, liniją KN znalezioną z troykąta prostokątnégo KMN mającégo dwa boki KM, MN wiadomé.

32. c). Podstawą znaku niech będzie jakikolwiek wielokąt foremny *np.* sześciokąt Fig. 10. ABCDEF. Ze stanowiska O widziany jest tylko jeden koniec boku D. W tym razie obieramy na boku ED jakikolwiek punkt *np.* Q, i wymiérzamy trzy linije OQ, OD, QD, albo dwie przynaymniéy którekolwiek i kąt QOD; przeto w troykącie QOD, znaydziemy kąt ODQ; w troykącie zaś EKD, wymierzywszy bok ED, i mając wszystkié trzy kąty wiadomé znaydziemy bok KD, ztąd w troykącie ODK, wyprowadzimy wartość boku KO, i kąta KOD, który dodawszy do kąta, wymiérzonégo DOS otrzymamy kąt kierunkowy KOS.

33.) Kiedy podstawa znaku jest kołem, do znalezienia odległości stanowiska od Fig. 11. środka znaku, i kąta kierunkowégo, służy sposób podany na znalezienie tych samych rzeczy, kiedy w wielokącie foremnym parzystą liczbę boków mającym, oba końce średnicy są widziané. Liniją tylko OK można wynaleść sposobem następnym, nie używając troykątów OPN, OKB — Wymiérzamy linije OR, OB, aże mamy z własności koła, OR : OB ; OT ; znaydziemy przeto OT, ztąd $OK=\frac{OT+OR}{2}$.

34.) Kiedy znaki obserwowané nie są zakończoné jednym punktem, lecz mają wiérzchołki ucięté, wtedy się celuje do linii dzielącéy po połowie stronę widzianą. Daje się zaś postrzegać strona oświécona od słońca i do niéy celujemy. Jeżeli więc promień oczny nie jest prostopadły do linii pozioméy leżącéy na scianie widzianéy w znaku ze scianami płaskiémi, albo do stycznéy pozioméy w znaku okrągłym, takowy promień nie przechodzi przez oś znaku; kątów zaś branych ramiona koniecznie powinny przypadać na osi znaków, między któremi się biorą, należy więc kąty obserwowané poprawić, to jest trzeba znaleść tę ilość, którą dodawszy do kąta wymiérzonégo, lub od niégo odjąwszy otrzymamy kąt żądany.

Naprzód. Niech będzie znak ze scianami płaskiémi; przecięcie jego od płaszczyzny Fig. 12. równoległéy do podstawy niech będzie abcd, strona oswiécona ab; ze stanowiska O, celujemy do środka téy strony A; przeto ramieniem kąta uważanégo, jest linija OA, powinna zaś być linija OM, jako przechodząca przez środek znaku M, więc kąt uważany rózni się od szukanégo kątem AOM; ten kąt AOM nazywany poprawką kąta uważanégo, otrzymamy z troykąta OAM, w którym kąt AMO i boki AM, OM, będącé odległościami osi znaku, piérwszy od punktu uważanégo na stronie widzianéy, drugi od stanowiska, należy miéć wiadomé. Kąt AMO i bok AM pospolicie się wymierzają, a bok OM wiadomy jest z poprzedzającégo rachunku. Lecz nie rozwiązując troykąta AOM, możemy kąt AOM znaleść przez wzór podany na znalezienie kąta w troykącie, w którym wiadomé są dwa boki i kąt zawarty między niémi (99). Podług tego wzoru otrzymamy:

$$AOM=\frac{AM}{MO}\cdot\frac{\text{wst } M}{\text{wst } 1''}+\frac{AM^2}{QMO^2}\frac{\text{wst } 2M}{\text{wst } 1''}+ \text{ i t. d.}$$ Z tego wyrażenia biorąc tylko wyraz piérwszy, będziemy mieli $AOM=\frac{AM}{MO}\cdot\frac{\text{wst } M}{\text{wst } 1''}$

Poprawkę znalezioną czy należy dodać do kąta wymiérzonégo czy od niégo od-

Fig. 12. jąć, łatwo jest zrozumieć z figury; i tak, jeźli znak leży na prawém ramieniu kąta wymiérzanégo, a punkt uważany na znaku, z prawéy strony tegoż ramienia, lub jeźli znak znayduje się na lewém ramieniu kąta, i punkt uważany leży z lewéy strony tegoż ramienia, poprawkę należy odjąć, jak *np* od kąta ZOA należy odjąć kąt MOA albo od kąta SOB, kąt MOB; przeciwnie, jeźli znayduje się znak na prawém ramieniu, a punkt uważany leży z lewéy strony tegoż ramienia, lub jeźli znak leży na lewém ramieniu kąta, a punkt uważany z prawéy strony tegoż ramienia, poprawkę należy dodać, jak *np.* do kąta ZOB, trzeba dodać kąt MOB, albo do kąta SOA kąt MOA.

W znalezieniu rzeczonéy poprawki nie byłoby żadnéy trudności, gdyby zawsze były wiadomé linije MA, MO, i kąt AMO; lecz często się zdarza, że kąt AMO, nie może być znajomym, a zatém poprawka niepodobna jest do znalezienia, Linija także AM będąca odległością punktu, do któregośmy celowali, od osi znaku, jest wiadomą jeźli promień oczny przypada na liniją pionową dzielącą stronę widzianą po połowie, bo w tym razie w znaku *np.* graniastosłupowym, ta odległość jest prostopadłą z osi znaku poprowadzoną na stronę widzianą; lecz czyż można być zapewnionymi, żeśmy całą stronę oświéconą widzieli? przeto dla uniknienia niepewności, naylepiéy jest celować do wiérzchołka znaku, albo do środka nayniższéy części widzianéy, w piérwszym razie poprawka będzie prawie nieznaczną, a przeto można ją zaniedbać; w drugim razie, choć będzie naywiększa, ale liniją AM, można dokładnie wymiérzyć: w czasach zaś mglistych, kiedy się nie daje dobrze widzieć ani spód znaku, ani wiérzchołek, należy celować do środka ściany widzianéy, i w tym razie za odległość punktu uważanégo od osi znaku, bierze się średnia różnicowo proporcyonalna między odległościami osi znaku od ściany widzianéy w górze i w dole.

Fig. 13. 35.) *Powtóre.* Niech znakiem będzie wieża okrągła, któréy przecięcie poziomé jest AZBN. Słońce niech znayduje się w punkcie S, strona zatém oświécona jest AZB, oddzielona od ciemnéy ADB, liniją AB, prostopadłą do linii SC. Obserwator patrząc na tę wieżę z punktu O, znaydującégo się w dalekiéy odległości, mógłby widzieć jéy połowę DAZE, oddzieloną od połowy niewidzianéy liniją DE prostospadłą do linii OC, łączącéy stanowisko ze środkiem wieży; lecz część AD, nie jest oświéconą przeto obserwator widzi tylko część AZE, i do środka jéy, to jest do punktu Z, celuje, zatém linija celowa OZ, nieprzechodzi przez środek przecięcia znaku C, trzeba więc znaleść kąt COZ, dla dodania go lub odjęcia od kąta wymiérzonégo; na ten koniec uważamy troykąt ACO, w którym jest, OA: AC = wst ACO: wst AOC; ztąd wst AOC $= \frac{AC.\ \text{wst}\ ACO}{OA}$; dla małéy różnicy kładąc OC na mieyscu OA wypada, kąt AOC $= \frac{AC.\ \text{wst}\ ACO}{OC}$; ponieważ kąt ACO, z kątem OCS, czyni kąt prosty, więc wst ACO = dosta OCS; a że bok AC = CE, jako promienie, przeto AOC $= \frac{CE.\ \text{dosta}\ OCS.}{OC}$ W troykącie OCE prostokątnym w kącie C, mamy; OC: CE = Pro $\underline{v}$ 1: sty COE; ztąd sty COE $= \frac{CE}{OC}$, a że łuk miérzący kąt COE, dla małości linii CE, względem linii OC, jest bardzo mały, i prawie się nie różni od swojéy stycznéy, przeto zamiast sty COE, biorąc łuk czyli kąt przezeń wymiérzony, będzie COE $= \frac{CE}{OC}$. Oba kąty COA i COE, czyli raczéy łuki je miérzącé wyrażoné są w częściach promienia, dla wyrażenia ich w sekundach, należy je rozmnożyć przez liczbę sekund znaydujących się w łuku równym promieniowi, czyli (jak się pospolicie mówi)

choć niewłaściwie) w promieniu, to jest przez $P'' = \frac{1}{\text{wst } 1''}$ (98), po czém wypada Fig. 13.

$$COE = \frac{CE}{OC \,.\, \text{wst } 1''},\quad COA = \frac{CE \,.\, \text{dosta } OCS}{OC \,.\, \text{wst } 1''},$$

ztąd $COE - COA = \frac{CE\,(1 - \text{dosta } OCS)}{OC \,.\, \text{wst } 1''}$.

aże $1 - \text{dosta } OCS = 2 .\, \text{wst}^2 \frac{OCS}{2}$ (m).

przeto $COE - COA = \frac{CE \,.\, 2 \,.\, \text{wst}^2 \frac{1}{2} OCS}{OC \,.\, \text{wst } 1''}$; kąt zaś $OCS = MCP - MCS$,

więc $COE - COA = \frac{2 \,.\, CE \,.\, \text{wst}^2 \frac{1}{2} (MCP - MCS)}{OC \,.\, \text{wst } 1''}$;

ztąd $\frac{COE - COA}{2} = \frac{CE \,.\, \text{wst}^2 \frac{1}{2} (MCP - MCS)}{OC \,.\, \text{wst } 1''}$;

widzimy z figury że $ZOE = COE - COZ$, $ZOA = COA + COZ$; aże $ZOE = ZOA$, przeto $COE - COZ = COA + COZ$, ztąd $COE - COA = 2COZ$;

więc $COZ = \frac{COE - COA}{2} = \frac{CE \,.\, \text{wst}^2 \frac{1}{2} (MCP - MCS)}{OC \,.\, \text{wst } 1''}$.

Zapomocą tego wzoru znaydziemy kąt COZ, którym należy powiększyć lub zmnieyszyć kąt wymierzony, lecz do tego potrzeba znać wartość kąta (MCP—MCS), którą można otrzymać sposobem następnym: jednę z lunet będących przy kątomierzu zwracamy ku środkowi wieży, czyli raczéy ku środkowi strony widzianéy, a drugą do środka słońca S′, o czém się przekonamy, kiedy cień od nici pionowéy, będzie padał w kierunku osi lunety; kąt między témi dwiema lunetami zawarty COS′, czyli raczéy ZOS′ będzie prawie spełnieniem kąta szukanégo SCP, do dwoch kątów prostych, albowiem do środka słońca z punktów O, i C, poprowadzoné linije OS′, CS, mogą być uważané za równoległe między sobą, gdyż linija OC względem odległości słońca od ziemi jest bardzo małą. Lecz kąt SCP ciągle się zmienia dla nieustannégo obrotu ziemi, więc znaleziony przed obserwacyą, lub po obserwacyi kąta troykątowego, nie będzie ten sam, jaki jest w czasie obserwacyi; dla téy przyczyny należy go wziąć, raz przed obserwacyą, drugi raz po obserwacyi kąta troykątowégo, w różnych odległościach czasu od obserwacyi, średnia różnicowo proporcyonalna między témi dwoma kątami będzie kątem SCP, w czasie obserwacyi kąta troykątowégo.

Wyłożony sposób znalezienia kąta SCP jest nayłatwiéyszy, lecz nie jest zupełnie dostateczny, albowiem dla znalezienia kąta SCP, trzeba miéć kąt COS′, którégo nigdy dokładnie miéć nie możemy, bo z punktu O nie celuje się do punktu P, to jest do środka C, ale do punktu Z, to jest do środka strony oświéconéy; więc ściśle biorąc wymiérzamy kąt ZOS′, a nie COS′. Prócz tego może się wydarzyć, że z punktu O, słońca widzieć nie można, chociaż wieża DAB jest należycie oświécona; przeto na wynalezienié kąta PCS, naylepiéy jest używać sposobu następnégo: kąt MCP znayduje się za pomocą dokładnéy igły magnesowéy; kąt zaś MCS zwany azymutem słońca znaydziemy,

(m) Teorya rach. Algie. T. 1. kar. 279. §. 53.

Fig. 13. z troykąta kulistego GCS, w którym boki GC, GS, i kąt G, są wiadomé; bok GC, jako dopełnienié szérokości geograficznéy miéysca C, czyli wysokości bieguna do czwartéy części okręgu koła, bok GS jako dopełnienié zboczenia słońca do czwartéy części także okręgu koła, i kąt G godzinny w czasie obserwacyi; do czégo może nam służyć wzór podany w trygonometryi kulistéy.

$$\text{dosty GCS} = \frac{\text{wst GC . dosty GS} - \text{dosta GC . dosta G}}{\text{wst . G}} \quad \text{(n)}$$

aże kąt GCS, jest spełnieniem kąta MCS, do dwoch kątów prostych, przeto ich dostyczné są równé ze znakami tylko przeciwnémi, zatém

$$\text{dosty MCS} = \text{dosta GC . dosty G} - \frac{\text{wst GC . dosty GS}}{\text{wst G}}$$

aże wst GC = dostawie wysokości bieguna,
dosta GC = wstawie wysokości bieguna,
dosty GS = stycznéy zboczenia słońca; przeto:

$$\text{dosty MCS} = \text{wst: wyso : bieg} : \times \text{dosty : kąta go} : - \frac{\text{dosta : wys : bieg} : \times \text{sty : zbocz : słoń:}}{\text{wst : kąta godz:}}$$

Kładąc MCS = Z, wysokość bieguna = L, zboczenie słońca = H, kąt godzinny = B, wypada wzór służący do znalezienia azymutu słońca:

$$\text{dosty Z} = \text{wst L . dosty B} - \frac{\text{dosta L . sty H}}{\text{wst B}}.$$ ten sam jakiégo używa Delambre (o).

Zapomocą tego wzoru znaleziony kąt MCS, odjąwszy od kąta MCP wymiérzonégo igłą magnesową, będziemy mieli kąt SCP, potrzebny do znalezienia poprawki COZ.

Takową poprawkę COZ, czy należy do kąta wymierzonégo dodać, czy od niego odjąć, figura nam pokazuje: jeżeli wieża znayduje się na prawém ramieniu kąta uważanégo troykątowégo, i słońce z prawéy strony tegoż ramienia, lub wieża na lewém ramieniu kąta i słońce z lewéy strony tegoż ramienia, poprawkę należy odjąć jak *np.* od kąta AOZ, należy odjąć kąt COZ; lecz jeźli wieża znayduje się na prawém ramieniu kąta, a słońce z lewéy strony tegoż ramienia, lub jeźli wieża na lewém ramieniu, a słońce z prawéy strony tegoż ramienia, poprawkę należy dodać do kąta uważanégo.

36.) Poprawka może wypaść dość znaczna, jeźli nie wielka część strony oświeconéy przedstawuje się obserwatorowi, zmniéysza się zaś w miarę zbliżania się słońca do płaszczyzny pionowéy, przez stanowisko i oś znaku obserwowanégo przechodzącéy; a nie byłoby żadnéy, jeźliby środek słońca znaydował się na rzeczonéy płaszczyznie; przeto jeźli nie można do obserwacyi wybrać takowégo czasu, starać się przynaymniéy należy, iżby słońce, znaydowało się naybliżéy wyrażonégo położenia.

37.) Należałoby jescze kąt wymiérzony poprawić z małégo błędu, który wynika ze złudzenia optycznégo, jeźli linija, w kierunku któréy patrzymy, nie jest prostopadłą do strony znaku, do któréy się celuje; w takowym albowiem razie, celując niby do środka strony pochyło ku nam obróconéy, celujemy do punktu leżącégo bliżéy tego brzegu strony widzianéy, który jest bliższym naszégo stanowiska; zatém wymierzamy kąt inny od tego, jakibyśmy otrzymali celując do środka ściany widzianéy. Jakoż
Fig. 14. strona znaku, do któréy celujemy, niech będzie ab, punkt obserwacyi O. Linija ab pokazuje się nam w kierunku fb, prostopadłym do linii Og, dzielącéy popołowie kąt aOb, pod którym widzimy ścianę ab, celujemy przeto do środka g linii fb, zatém do punktu h, a nie do punktu A, jak w rachunku zakładamy; wymierzamy więc kąt aOh,

(n) Elem. de Geom. p. Legendre. Trigon. N 86. pag. 398.
(o) Base du Sys. metr. dis. prel. Tome 1. page 186.

lub hOb, zamiast aOA, lub AOb, to jest wymiérzamy kąt większy lub mniéyszy od tego, jaki wprowadzamy w rachunek, kątem AOh; lecz ten kąt AOh, ponieważ zaledwo czyni jednę lub dwie setné części sekundy, opusczony nie wprowadzi żadnégo błędu; dla tego nie daje się nań baczność, i kąt wymiérzony aOh, lub hOb, uważa się jako połowa kąta aOb. Fig. 14.

38.) Wymiar kąta nie powinien się kończyć na jednéy tylko obserwacyi, dla ruchu bowiem powietrza, dla rozmaitéy jego temperatury i gęstości, nie zawsze jednostaynie i w jednym kierunku łamie się światło; a ztąd znaki tak dzienné jak nocné, raz zdają się (jak mówi Delambre z doświadczenia) wahać i około prawdziwégo miéysca krążyć, chociaż zostają w spoczynku, drugi raz pokazują się być nieruchomémi, chociaż ich stan rzeczywisty dalekim jest od stanu spokoyności, a niekiedy wydają się krótszémi, skrzywionémi, lub pochyłémi; pzzeto, dla uniknienia omyłki, albo raczéy dla jéy zmniéyszenia, należałoby czas do obserwacyi wybierać spokoyny i pogodny, co przy ciągłéy robocie jest rzeczą niepodobną. Stałość więc tylko obserwatora w powtarzaniu obserwacyy jednégo tegoż samégo kąta w różnych godzinach, jedynym jest sposobem do zmniéyszenia nieuchronnych błędów.

39.) Wielką do tego być może pomocą kątomiérz zwany kołém powtarzającém Pana Bordy, zaproponowany przez Tobijasza Mayera Astronoma Getyngskiégo roku 1767 w dziele (*Theorie de la lune*), a wydoskonalony roku 1789 przez Pana Bordę. Takowy kątomierz naylepszém teraz jest narzędziem do brania kątów; na różnych bowiem jego podziałach powtarzając obserwacye jednego kąta razy kilkanaście, a do tégo jescze w różnych godzinach, i za kąt szukany, biorąc wypadek średni ze wszystkich wypadków, błąd nieoddzielny od praktycznych robot, do jak naymniéyszéy przyprowadza się ilości.

40.) Lecz w kole powtarzającém, albo obie lunety, albo, jak pospolicie bywa, jedna tylko dolna są mimośrodkowé, to jest tak urządzoné, iż płasczyzny prostopadłé do powiérzchni koła przez osi lunet przechodzącé, nie przechodzą przez jego środek, albo obie, albo płasczyzna przez oś dolnéy lunety poprowadzona; przeto kąt wymiérzony różni się od kąta, jakibyśmy otrzymali kątomiérzem z lunetami spółśrodkowémi; różnicę między niémi zachodzącą, należy znaleść i dodać ze znakiem stosownym do kąta wymiérzonégo; takowa różnica w tym razie, kiedy dolna tylko luneta jest mimośrodkowa, równa się ilorazowi z połowy mimośrodu, to jest z połowy odległości środka koła od płasczyzny do koła prostopadłéy, na któréy się oś lunety znayduje, przez odległość przedmiotu z téy strony leżącégo z któréy się znayduje mimośrod, mniéy ilorazem z połowy mimośrodu przez odległość przedmiotu leżącégo z drugiéy strony względem lunety mimośrodkowéy. Następne opisanie rzecz tę objaśni:

Przystępując do miérzenia kąta ACB, górną lunetę narzędzia ustawiamy na 0°, Fig. 15. całé zaś koło tak obracamy; aby ta, luneta była skierowaną ku przedmiotowi prawému A, dolną zaś lunetę zwracamy ku przedmiotowi lewému B; gdyby obie lunety były spółśrodkowé, to jest gdyby płasczyzny prostopadłé do powiérzchni koła przez ich osi przechodzącé, przechodziły także przez środek koła, tedy jedna przypadłaby w kierunku linii CA, a druga w kierunku linii CB, przeto łuk na kole zawarty między lunetami, pokazałby wielkość kąta ACB; chcąc zaś powtórzyć, przytwierdziwszy obie lunety, w swojém położeniu, obrócilibyśmy całé narzędzie w stronę prawą tak, iżby dolna była skierowana ku punktowi A, w tedy górna wziełaby położenié w kierunku CA′, nie ruszając potém narzędzia z miéysca, lunetę górną skierowalibyśmy ku punktowi B, zatém łuk, jakiby ona przebiegła, czyli kąt A′CB, byłyby podwóynym kąta szukanégo ACB; więc jégo połowa dałaby nam kąt ACB. Lecz w kole powtarzającém, w którém albo obie lunety, albo jedna dolna są mimośrodkowé, kąt między

Fig. 15. lunetami zawarty, nie jest wartością kąta szukanégo, różnicę między kątem wymiérzonym a szukanym znaydziemy następnym sposobem:

Naprzod. Jeźli tylko dolna lunéta jest mimośrodkowa. Niech jéy mimośrod będzie $=CD$. W tym razie górną lunetę ustawiwszy na $0°$, gdy skierujemy ku przedmiotowi A, dolna luneta skierowana ku przedmiotowi B, bierze położenie stycznéy przez punkt A poprowadzonéy do koła zakréślonégo mimośrodem CD, to jest przypada w kierunku BD, i środek jey osi znayduje się w punkcie D. Przytwierdziwszy potém obie lunety w tém położeniu, obracamy całé narzędzié w stronę prawą, aż póki dolna luneta nie będzie skierowana ku punktowi A, środek jéy osi z punktu D krążąc około środka koła przeydzie do E, to jest oddali się od swégo piérwszégo położenia łukiem DE, czyli kątém DCE, i wezmie kierunek EA, przeto i całé narzędzié obróci się w stronę prawą kątem DCE, zatém i górna luneta, która przypadała w kieruuku CA, wezmie kierunek CA′, oddalony od linii CA kątem ACA′, równym kątowi DCE. Zostawując całé narzędzié nieporuszoné, górną tylko lunetę, która przypadała w kierunku CA′ zwracamy ku punktowi B, przeydzie ona kąt $A'CB = A'CA + ACB = DCE + ACB$.

ztąd $ACB = A'CB - DCE = A'CB - ACE + ACD = A'CB - ACE + BCD - ACB$.
$= A'CB - (1^{k.p.} - A) + (1^{k.p.} - B) - ACB = A'CB + A - B - ACB$.

ztąd $2ACB = A'CB + A - B$.

$$ACB = \frac{A'CB}{2} + \frac{A}{2} - \frac{B}{2}.$$

W troykącie ACE, mamy; $AC : CE = \text{pro}^{\underline{y}}\ 1 : \text{wst}\ A$; ztąd, $\text{wst}\ A = \frac{CE}{AC}$

w troykącie BCD, mamy; $BC : CD = \text{pro}^{\underline{y}}\ 1 : \text{wst}\ B$; ztąd, $\text{wst}\ B = \frac{CD}{BC}$

Dla małości kątów A, i B, biorąc na ich miéyscu, czyli na miéyscu łuków je miérzących ich wstawy, będziemy mieli: $A = \frac{CE}{AC}$; $B = \frac{CD}{BC}$; linije CD, CE, są równé między sobą, jako oznaczającé mimośrod téy saméy lunety, który nazywam $= m$; będzie więc $A = \frac{m}{AC}$; $B = \frac{m}{BC}$; Ta wartość kątów A i B, czyli raczéy łuków je miérzących wyrażona jest w częściach promienia, dla wyrażenia jéy w stopniach, mnożymy przez $P'' \frac{1}{\text{wst}\ 1''}$ (98); ztąd wypada; $A = \frac{m}{AC . \text{wst}\ 1''}$; $B = \frac{m}{BC . \text{wst}\ 1''}$; przeto $ACB = \frac{A'CB}{2} + \frac{m}{2\,AC . \text{wst}\ 1''} - \frac{m}{2\,BC . \text{wst}\ 1''}$. kąt A′CB, czyli łuk go miérzący jest przebieżony od górnéy lunety, można więc położyć; $ACB = \frac{\text{kątowi wymierz:}}{2} + \frac{m}{2\,AC . \text{wst}\ 1''} - \frac{m}{2BC . \text{wst}\ 1''}$.
więc różnica między kątem wymierzonym a szukanym, to jest poprawka wymierzonégo jest; $\frac{m}{2\,AC . \text{wst}\ 1''} - \frac{m}{2\,BC . \text{wst}\ 1''}$.

Takowa poprawka przywodzi się do zera, jeźli odległości AC, BC są równé; bo w tym razie dwa wyrazy ją składającé będąc równe znisczą się dla przeciwnych znaków. Jeźliby mimośrod przypadał ze strony lewéy a nie z prawéy, znaki w wyrazach poprawkę składających zostałyby odmienioné, to jest byłaby poprawka $= \frac{m}{2\,BC . \text{wst}\ 1''} - \frac{m}{2\,AC . \text{wst}\ 1''}$.

W tróykącie summa wszystkich kątów, miérząc je kołem powtarzającém z dolną lunetą mimośrodkową, wypada taż sama, jakąbyśmy otrzymali miérząc kątomiérzem z obiema lunetami spółśrodkowémi, to jest summa poprawek wszystkich trzech kątów staje się równa zeru. Niech będą albowiem trzy boki troykąta a, b, c, trzy kąty im przeciwné A, B, C, poprawka na kąt A jest$=\frac{m}{2b}-\frac{m}{2c}$; Fig. 15.

na kąt B, jest$=\frac{m}{2c}-\frac{m}{2a}$;

na kąt C, jest$=\frac{m}{2a}-\frac{m}{2b}$;

których summa widocznie równa się zeru.

41.) *Powtóre* Jeźli obie lunety mają mimośrod. Górna luneta ustawiona na o°, zwraca się ku przedmiotowi A, a dolna ku przedmiotowi B, ponieważ ich osi nie odpowiadają środkowi koła, lecz mają mimosrody równé między sobą i równé linii CD, przeto obie lunety wezmą kiérunek stycznych przez punkta A, i B, poprowadzonych do koła zakréślonégo mimośrodem CD; to jest, górna luneta przypadnie w kierunku linii EA, a dolna w kierunku DB; gdy potém przytwierdziwszy obie lunety, obrócimy całé narzędzie w stronę prawą tak, izby dolna luneta była skierowana ku punktowi A, wezmie ona wtedy położenia EA, to samo, jakie pierwiéy miała luneta górna, ta zaś przeydzie do położenia GH, więc nie ruszając dolnéy lunety, gdy górną z położenia GH, skierujemy ku punktowi B, to jest, przywiedziemy ją do położenia DB, mimośrod CG opisze kąt GCD, aże mimośrod CG razem z górną lunetą obrót swóy odbywa, zatém łuk nakole zawarty między piérwszém górnéy lunety położeniem a drugiém oznacza kąt GCD. kąt zaś między osiami dwoch lunet znaydujący się jest AFB a mamy znaleść kąt ACB.

Kąty GCE, ECD, są równé; kąt bowiem GCE, oznacza oddalenie się górnéy lunety od swégo piérwszégo położenia, a kąt ECD oddalenie się lunety dolnéy od jéy piérwszégo położenia, obie zaś lunety mając równé mimośrody, równie się muszą oddalać od swych piérwszych położeń. Kąt zaś AFB=DCE; albowiem w czworokącie CDFE, mającym kąty D, E, prosté, kąt DFE z kątem DCE czyni dwa kąty prosté, i tenże kąt DFE z kątem DFA, jako przyległé, czyni także dwa kąty prosté, więc kąt BFA=DCE=połowie kąta DCG, to jest połowie kąta wymierzonégo na kole, więc jest wiadomy. — Do znalezienia kąta BCA z kąta wiadomégo BFA, może nam służyć sposób podany na sprowadzenie kąta miérzonego nie na właściwém stanowisku do prawdziwégo jego wiérzchołka (25), do czégo trzeba miéć odległość wiérzchołka kąta wymiérzonégo od wiérzchołka kąta szukanégo i kąt kierunkowy, to jest trzeba miéć liniją CF, i kąt CFB. Obie té rzeczy znaydziemy z troykąta CFD mającégo wiadomy bok CD jako mimośrod, kąt D prosty, i kąt DCF, który jest połową kąta DCE, czyli czwartą częscią kąta DCG; więc odjąwszy kąt DCF od prostégo, będziemy mieli kąt kierunkowy DFC, a rozwiązawszy proporcyą:

wst DFC : Pro=CD : CF,
albo Pro : Siecz DCF=CD : CF,
otrzymamy bok CF.

42.) Wiedząc mimośrod lunety w kole, którégo mamy używać, można zawczasu ułożyć tablicę poprawek na różné odległości, jak zrobił Delambre zakładając trzy mimośrody od 16, 18, i 20 liniy, i rachując w każdym razie poprawkę na rozmaité odległości zaczynając od 1000 sążni i ciągnąc daléy na odległości coraz 1000 sążni

Fig. 15 większé aż do 40000 sążni (p); lecz w wielkiey odległości, takowa poprawka jest mało znacząca; zakładając jedno ramie kąta szukanégo od 4000 sążni, drugie od 5000 sążni, a mimośrod od 16 liniy, poprawka zaledwo czyni 0″, 1.

43.) Mając wymiérzoné kąty na wszystkich stanowiskach, sprowadzoné już do poziomów przez ich wierzchołki przechodzących i do środków stanowisk, oraz poprawione tak z małéy niedokładności wynikającéy z nieprzechodzenia ich ramion przez osi znaków obserwowanych, jakoteż z mimośrodu, a chcąc przystąpić do rachowania wzajemnych odległości wszystkich stanowisk, przez rozwiązywanie troykątów utworzonych z tychże odległości, trzeba miéć jeden przynaymniey bok wiadomy w którymkolwiek troykącie. Na ten koniec należałoby wymierzyć odległość między dwoma jakiemikolwiek stanowiskami, czyli tak nazywaną podstawę; lecz jeźli żaden z boków nie leży na gruncie równym, wtedy się wybiera gdziekolwiek równé miéysce, jakie się pospolicie trafia, albo w bliskości morza, albo nad brzégami wielkich rzék mały spadek mających, albo przy bagnach, lub na drogach, wymierza się na tém mieyscu podstawa, która, biorąc z końców jéy kąty zawarté między nią a innémi znakami, wiąże się z całym łancuchem troykątow; lecz dla należytégo jéy złączenia z całą siecią, naylepiey jest obierać na nią miéysce przed ustanowieniem znaków.

44.) Dokładność podstawy i kątów jest zasadą dokładności całéy karty; przeto w wymiérzaniu podstawy równą scisłość zachować należy, jaka się zachowuje w braniu kątów. Nad to, uważając, że obserwacya kąta, o którymby zachodziła wątpliwość łatwiéy być może powtórzoną, niż wymiar całéy podstawy; swiało można powiedzieć, iż mierzenié podstawy jest jedném z działań naydelikatniéyszych i nayważniéyszych w Geodezyi. Tu wprawność ręki, dokładność oka w sądzeniu i cierpliwość w ciągłéy bez przerwy pracy łączyć się powinny, dla uwieńczenia pomyślnym skutkiem całéy roboty.

45.) Naypiérwszém zatrudnieniem przy miérzeniu podstawy, jest dokładné jéy oznaczenié kołkami, które się tak w ziemię zabijają, aby ich osi znaydowały się na jednéy linii prostéy; w przypadku zbaczania, odległość osi kołka od linii prostéy ocenia się w częściach średnicy kołka; z wiadomégo zboczenia i z odległości wymiérzonéy między osiami kołków, znayduje się za pomocą trygonometryi część prawdziwa podstawy odpowiadająca wymiérzonéy; lecz różnica między częścią wymiérzoną a wyrachowaną, jest bardzo mała; zakładając *np.* zboczenié $= \frac{1}{2}$ cala, a odległość między osiami dwoch kołków równą stu sążniom, rzeczona różnica nie wyniesie nawet $\frac{1}{4800}$ linii; jednak w ścisłych robotach i ta ilość w rachunek wchodzić powinna. Lecz dokładné oznaczenié podstawy dla stanu powietrza niekiedy jest trudném, jak się to przydarzyło roku 1802 Szwedóm wymiérzającym część południka w Laponii, dla sprawdzenia roboty Francuzów odbytéy roku 1736, bo dla gęstéy mgły ciągle panującéy, w niewielkiéy odległości wbijając kołki zaledwo trzeci tylko widzieć mogli.

46.) Oznaczona podstawa wymiérza się prętami umyślnie na ten koniec robionémi. pręty mogą być z jakiegokolwiek ciała twardégo i jakiéykolwiek długości. Bouguer i Lacondamine 1736 w Peru używali prętów drewnianych długich stop 20 (q). Cassini de Thury blisko Paryża roku 1740 wymiérzał prętami żelaznemi, a syn jego podstawę przy Dunkierce wymiérzał prętami drewnianémi lakierowanémi (r). Boscovich roku 1750 we Włoszech używał prętów drewnianych (s). Anglicy podstawę przy Hounslow-

(p) Base du Sys. métr. Tom I. dis. prel page 102.
(q) La figure de la terre par Bouguer 1749. page 31.
(r) La méridienne de l'observatoire de Paris verifiée par Cassini de Thury 1744 page 23 et 34.
(s) De expiditione literaria 1755 page 136.

heat roku 1784, mierzyli prętami drewnianémi, lecz powtórnie mierząc używali rurek Fig. 15. sklannych 20 stop długich; wymiérzywszy jednak 1000 stop łańcuchem żelaznym doskonale przez Ramsdena zrobionym postrzegli, iż różnica między długością podstawy wymierzonéy prętami sklannémi zamykającéy 27404,7219 stop angielskich, a długością, jakaby wypadła z miérzenia łancuchem żelaznym, zaledwoby czyniła półcala, dla tego drugą podstawę przy Romney-marsh roku 1787, mierzyli samym łancuchem żelaznym 100 stop długości mającym, i znalezli tylko 4½ cale różnicy między długościami téy podstawy, jedną otrzymaną z wymiaru, a drugą wyprowadzoną przez rachunek z podstawy piérwszéy, przez ciąg 24 troykątów, w odległości 70 mil angielskich, co czyni prawie 57820 sążni francuzkich (t). Delambre i Méchain do wymierzania podstaw przy Perpignan i Melun roku 1798 używali prętów platynowych 12 stop długich. Jenerał Lambton 1802 na bregach Koromandelu mierzył podstawę łancuchem żelaznym przez Ramsdena zrobionym (u). Svanberg w Szwecyi roku 1802 podstawę przy Avasaxa tę samę, którą Maupertuis 1736 mierzył prętami drewnianemi, wymiérzał prętami żelaznémi 6 metrów długości, których końce okrywał blachami srébrnémi, a na nich oznaczał linije zupełnie na 6 metrów od siebie odległé. Nic jednak nie wyrównywa dokładności wymiarów prętami platynowémi służących za zasadę układowi metrycznému. Lecz wrobotach nie wymagających tak wielkiéy ścisłości, wygodnie być mogą użyté pręty drewniané mocno napojoné jakąkolwiek tłustą materyą, i pokostem dobrze powléczoné, a nawet dla mniéyszéy od metallów rozszerzalności, mogą być przekładané nad metallowé, byleby dla uniknienia ich skrzywienia się przyzwoicie były oprawioné.

47.) Podstawę można wymiérzać kładąc pręty na saméy ziemi; albo na pomostach umyślnie do tego zrobionych, w kierunku linii poziomey, albo podług pochyłości gruntu, jeżli jest jednostayną, a potém sprowadzając do poziomu, i ten drugi sposób należy przekładać nad piérwszy, ponieważ się unika małych błędów koniecznie wynikających z odmiany poziomu. Chcąc pręty kłaść na saméy ziemi, należałoby grunt zrównać i zgładzic, co nie zawsze być może wykonaném. Przeto w delikatnych robotach pręty kładą się na pomostach umyślnie w tym celu robionych, a nawet nie w zetknięciu z sobą, lecz w pewnéy odległości jeden od drugiégo, aby przez kładzenie nowégo pręta, leżący w tył nie został cofnięty; odległość zaś między niémi ocenia się albo podziałką do końca pręta przyprawioną, i za pomocą śrubki zwolna aż do zetknięcia się z drugim prętem posuwaną, jak postępowali Delambre i Méchain w swojém ważném działaniu (w), albo wymiérzona cyrklem zwyczaynym oznacza się na podziałce osobnéy, jak czynił Boscovich w państwie papieskiém. Svanberg zaś wymiérzając podstawę w Laponii, pręty mające na sobie linije odrysowané w kierunku do ich długości prostopadłym kładł obok siebie tak, iżby te linije czyniły jednę tylko liniją prostą; pręty zaś wspierał na podporkach miedzianych przytwierdzonych do descek jodłowych — Lecz w robotach zwyczaynych można nie popełniając żadnégo prawie błędu wymiérzać podstawę kładąc pręty w zetknięciu z sobą, osobliwie używając kilku prętów; kładziony bowiem jeden pręt z ostróżnością nie będzie mógł prawie posunąć razem kilku już leżących. Tym sposobem wymiérzał Bouguer podstawę w Peru na płaszczyznie Yarouqui prętami drewnianémi mającémi długości stóp 20, z ostrémi nakońcu blaszkami, tak je układając iżby się blaszki siebie dotykały pod kątém prostym.

48.) Pręty nigdy prawie nie mogą być położoné zupełnie poziomo i tak, iżby brzegi końca jednégo pręta, odpowiadały takimże brzegóm końcowym pręta drugiégo, to

(t) Philosophical Transactions vol. 80. page 121. 177.
(u) Asiatick Researches T. VIII.
(w) Base du Systeme metrique Tome I. page 21.

Fig. 15. jest, brzegi górné górnym, a dolné dolnym; lecz brzeg górny jednégo pręta odpowiada, albo brzegowi dolnému, albo środkowi ściany końcowéy pręta drugiégo; więc prawdziwa odległość punktów zetknięcia się, gdyby w swém położeniu pręty posunione były jeden ku drugiému, byłaby większą od długości pręta; przeto w ścisłych robotach, z długości pręta i z odległości punktu zetknięcia się od powiérżchni górnéy pręta, znayduje się odległość punktów zetknięcia się (x). Ta odległość jeźli nie jest poziomą znaydziemy liniją poziomą odpowiadającą rzeczonéy odległości, mając wyrachowaną tę odległość i kąt zawarty między nią a górną pręta powiérżchnią, oraz kąt pochyłości samégo pręta do poziomu. Różnica miedzy témi długościami jest bardzo mała; w podstawach mierzonych przez Delambra nie przechodziła 2,25 liniy (y); więc w robotach nie wymagających tak wielkiéy dokładności, jakiéy wyciągało oznaczenié fundamentalnéy miary, można ją śmiało opuścić, jako też i wyżéy wzmienioną (47) wynikającą ze zboczenia osi kołków od linii prostéy.

49.) Wymiar podstawy odbywać się powinien wolna i z jak naywiększą rozwagą, aby nic zgoła nie opuscić, co tylko może wpływać do jéy dokładnégo oznaczenia. Prędki wymiar, może się stać źródłem błędów, których ani miéysca ani przyczyny odkryć niémożna, a choćby powtórzony równie prędko, dał téż samé wypadki co piérwiéy, nié można jednak być pewnymi niepopełnienia jakowéy omyłki; zgodność wymiarów mówi wprawdzie za dokładnością roboty, lecz jey nie dowodzi, albowiem może się przydarzyć, że taż sama przyczyna błędu ten sam skutek sprawuje. Lepiéy jest raz tylko mierzyć, lecz zwolna i z uwagą, a niżeli kilka razy powtarzać prędko i z małą bacznością. Delambre raz tylko miérzył swojé podstawy, lecz naywiększéy, jaka być może, dokładał pilności; w dniu jednym nié miérzył więcéy nad 200 sążni, dla tégo większa zachodzi zgoda między wymiarem jego podstaw a rachunkiem, aniżeli w podstawie przy Bourges mierzoney 1739 trzy razy, ale niezmiernie prędko; albowiem w każdym razie cały pomiar nie zabierał czasu więcéy nad 14 godzin, przeto 500 sążni miérzono w jednéy godzinie. W dwoch piérwszych razach używano prętów długich stóp 24. w trzecim długich stóp 18, więc na godzinę kładziono je albo 125, albo 166 razy, to jest częściéy niż dwa razy na minutę. Idąc tak prędko, nié można było kłaść dokładnie, albo nie przysuwano dobrze pręta jednégo do drugiégo, albo przysuwając potrącano leżący i w tył cofano. Dwa piérwszé wymiary różniły się tylko o $4\frac{1}{2}$ linije, a trzeci dał wartość dłuższą 3 stopami; bo w piérwszych kładziono pręty, ile można, do poziomu, w trzecim zaś kładziono na gruncie. Sredni wypadek daje téy podstawy długość o 1,22 sążnia większą od téy, jaka wypada ztrzech ciągów troykątów opartych na podstawie przy Juvisi (z).

50.) Dawniéy dla mierzenia podstawy w linii prostéy, rozciągano sznur i obok niego kładziono pręty; u Delambra zaś nad prętami platynowémi znaydował się daszek, który je przykrywał, mający na sobie ostrza żelazné służącé do celowania i do położenia prętów w linii prostéy.

51.) Ponieważ wszystkié ciała a szczególniéy metalle ulégają wpływowi cieplika i podług odmian temperatury podłużają się lub skracają, dla tego pręty używané do miérzenia nie zachowują nigdy jednostaynéy długości; zatém liczba miar znaleziona w podstawie, jeżli tylko opuścimy wzgląd na wpływ cieplika, nie będzie rzetelną, przeto dla otrzymania prawdziwéy liczby miar, należy utrzymywać ciągły zapis odmian temperatury atmosfery w czasie miérzenia każdéy części podstawy, a wiedząc tempe-

(x) Base du Sy. metr. T. II. page 27.
(y) Base du sy. me. T. II. p. 29.
(z) Meridieun verifieé. page bę: 66.

raturę jak tę, w którey początkowa miara została oznaczoną, tak i tę, w którey pręty początkową miarą były wymierzone, oraz stosunek rozszerzania się na jeden stopień temperatury ciał użytych na pręty i na miarę początkową, wyrachujemy tę ilość, którą trzeba dodać do liczby miar w podstawie wymierzoney, lub od niey odjąć dla znalezienia długości prawdziwey. Anglicy w mierzeniu podstaw roku 1784 i 1787 używali 15 zwyczaynych termometrów i z nich wszystkich wyraz średni brali za prawdziwą temperaturę. Delambre i Méchain dla ocenienia skutków temperatury, pręty platynowe pokryli miedzianemi o 6 cali od platynowych krótszemi, i z jednego końca mocno z sobą spojonemi; z drugiego zaś końca wolnego na prętach platynowych znaydowała się podziałka, którey jedna część była $\frac{1}{20000}$ długości pręta miedzianego; w takowem narzędziu, które nazwali termometrem metallicznym, pręt miedziany rozszerzający się bardziey od platynowego, pokazywał temperaturę; a przez delikatne wprzód doświadczenia znaleźli, iż na jednę część tego termometru pręt podłużał się 0,9245 jedney części, ztąd dochodzili wkażdym czasie, ilości podłużania się prętów, jako też i podziałek; z czego otrzymywali ilość, którą trzeba było dodać do wymierzoney podstawy dla znalezienia prawdziwey jey długości (aa). Jak zaś należy postępować, szukając w rachunku prawdziwey liczby miar znaydujących się w podstawie, następny przykład objaśni.

52.) Używam do wymiaru *np.* metra żelaznego oznaczonego w temperaturze 10° ciepłomierza stostopniowego prętem platynowym, który w temperaturze 0°, to jest w czasie lodu topnieiącego oznaczał metr jeden; takowym metrem żelaznym wymierzamy długość pewną D, w średniey temperaturze 18°; trzeba znaleść ile ta długość zamyka metrów początkowych, jakim zakładamy metr platynowy w czasie lodu topnieiącego.

Metr platynowy w temperaturze 10°, większą ma długość niżli w temperaturze 0°, przeto i metr żelazny przezeń oznaczony w temperaturze 10°, ma długość większą od metru początkowego; równy zaś jemu będzie w temperaturze niższey od 10°, liczbę stopni, którą należy odjąć od 10° dla znalezienia temperatury, w którey metr żelazny będzie równy pierwiastkowemu, nazywam x; szukaną więc temperaturą będzie 10°—x°. Rozszerzenie się pręta platynowego w każdym wymiarze na jeden stopien ciepłomierza stostopniowego podług doświadczeń francuzkich jest 0,00000856 5. Podobne rozszerzenie się pręta żelaznego jest 0,00001066 6. Nazywam rozszerzenie się platyny R, żelaza R′; będzie w temperaturze 10° metr platynowy dłuższy od metru początkowego ilością 10R swojey pierwszey długości; żelazny ilością x R′; odeymując od nich takowe ilości, otrzymamy wyrażenie metru początkowego, który, zakładając w temperaturze 10° długość metru $=1$, będzie, $1-10\,R$, i $1-x\,R'$; przeto $1-10\,R=1-x\,R'$, ztąd

$$x=\frac{10\,R}{R'}=\frac{10.0{,}0000085 65}{0{,}0000106 66}=\frac{85650}{10666}=8°{,}03;$$ więc metr żelazny równy jest początkowemu w temperaturze $10°-8°{,}03=1°{,}97=$ prawie 2°.

Ponieważ założyliśmy, że długość D była mierzona w temperaturze 18°, metrem żelaznym, trzeba więc naprzód, metru żelaznego długość od 18° sprowadzić do 2°, to jest odjąć od niego tę ilość, jaką się on podłużył od 2° do 18°, przez 16°; takowa ilość jest $=16.0{,}0000106 66=0{,}00017065 6$; zakładając długość metru żelaznego w temperaturze 18°$=1$, będzie długość metru pierwiastkowego$=1-0{,}00017065 6=0{,}99982934 4$, przez nią dzieląc wymierzoną długość D, znaydziemy liczbę metrów pierwiastkowych w niey zamykających się$=\frac{D}{0{,}99982934 4}$; zakładając *np.* D$=$10000 metrom żelaznym

(aa) Base du Sys. métr. T. II. page 44. 55.

w temperaturze 18°, będzie w takowéy długości metrów początkowych $\frac{10009}{0{,}99982934}=$ $=10001{,}76$. — Ztąd postrzegamy iż kiedy wymiar jakiéy linii ma się odbywać z wielką ścisłością nie można zaniedbywać poprawki zależącéy od temperatury.

53.) Cała podstawa powinna leżeć na jednéy płasczyznie pionowéy, lecz nie zawsze można wybrać tak dogodne położenié gruntu. Podstawa przy Perpignan miérzona przez Delambra, daje nam przykład linii złamanéy, któréy końce były nawet w niejakieyś odległości od punktów obranych za środki stanowisk. Dla znalezienia wzajemnéy tych stanowisk odległości, wymierzą się kąt złamania i obie części podstawy od punktu złamania, aż do punktów przecięcia się z prostopadłémi nań spusczonémi z obranych stanowisk; z tych rzeczy znayduje się wzajemna odległość rzeczonych punktów przecięcia się, z téy odległości i z prostopadłych wymiérzanych wyprowadza się wzajemna odległość punktów obranych za środki stanowisk. Jakim się to sposobem wykonywa, następny przykład okaże.

Fig. 16. Trzeba znaleść *np.* odległość VS; wymiérzać zaś inaczéy nie możemy, tylko w kierunku linii złamanéy BCA, która nawet nieprzechodzi przez punkta V i S; na ten koniec z punktów V, S, na ramiona linii złamanéy spusczamy prostopadłé VB, SA; wymiérzamy te prostopadłé, i odległość punktu złamania od prostopadłych, to jest linije CB, CA, jakoteż kąt BCA. — Wyobrażam poprowadzoną liniją BA, takiéy krzywości, jakiéy są linije BC, CA. — W troykącie BCA kulistym z wiadomych boków BC, CA, i kąta C, znaydziemy bok BA, i kąty CBA i CAB, do czégo możemy użyć albo sposobu Leżandra (100), albo sposobu Delambra, który jest następny: znayduję cięciwy łuków BC, CA, odeymując od tych łuków ilość, jaką przewyższają swoje cięciwy. Dla znalezienia téy ilości, łuk niewielki na kuli, któréy promień zakładam $=1$, nazywam $=b$; jego cięciwę $=c$; aże cięciwa równa się podwóynéy wstawie łuku dwa razy mniéyszégo, więc $c=2\,\mathrm{wst}\frac{1}{2}b$; kładąc na miéyscu wstawy równy jey szereg wyrażony przez łuk, wypada:

$$c=2\left(\tfrac{1}{2}b-\frac{1}{2.3}\cdot\frac{b^3}{8}+\frac{1}{2.3.4.5}\cdot\frac{b^5}{32}-\text{i t. d.}\right)=b-\frac{b^3}{24}+\frac{b^5}{1920}\ \text{i t. d.}$$

biorąc z tego szeregu dwa tylko wyrazy początkowé będzie $c=b-\frac{b^3}{24}$; zatém różnica między łukiem b, a jego cięciwą jest, $b-c=\frac{b^3}{24}$. Na kuli, któréy promień $=P$, uważamy łuk B, podobny do łuku b, jego cięciwę $=C$; będzie, $1:P=b:B$, ztąd $b=\frac{B}{P}$; przeto różnica między tym łukiem a cięciwą będzie $=\frac{B^3}{24.P^3}$; kładąc za B, raz łuk AC, drugi raz BC, otrzymamy różnice między niémi a ich odpowiednémi cięciwami; odeymując te różnice od łuków znaydujemy ich cięciwy, znalazłszy także z kąta poziomégo kulistégo BCA, kąt zawarty między cięciwami, rozwiążemy troykąt prostokréślny z trzech wyrażonych rzeczy złożony, zkąd otrzymamy cięciwę łuku BA, i kąty zawarté między cięciwą BA a cięciwami BC, CA, to jest kąty prostokréślné CAB, CBA. Wyobrażam cięciwę BA przedłużoną w obie strony, i na nią z punktów V i S spusczoné prostopadłé Vb, Sa. Te linije chociaż właściwie mówiąc są łukami kół wielkich, ale dla swojéy małości uważają się za linije prosté. Więc w troykącie VbB, mając wiadomy bok VB, kąt b prosty, i kąt VBb, ponieważ on jest równy $=2^{\text{k.p.}}-\text{VBC}-\text{CBA}=2^{\text{k.p.}}-1^{\text{k.p.}}\text{CBA}=$ $1^{\text{k.p.}}-\text{CBA}$, znaydziemy boki Vb i bB. Podobnie w troykącie SAa, mając wiadomy bok SA, kąt prosty a, i kąt SAa, ponieważ on jest równy $=2^{\text{k.p.}}-\text{CAS}-\text{CAB}=2^{\text{k.p.}}-$

$1^{k.p.}$ — CAB$=1^{k.p.}$ — CAB, znaydziemy boki Sa, Aa.— Wyobrażamy przez punkt V poprowadzoną liniją Vd równoległą do linii AB; ztąd otrzymujemy troykąt VSd, w którym mając kąt d prosty, bok Vd wiadomy jako$=$bB$+$BA$+$Aa, bok Sd wiadomy, bo $=$Sa—Vb, znaydziemy liniją VS, za pomocą trygonometryi, lub sposobem jeometrycznym, ponieważ $VS^2=Vd^2+Sd^2$, ztąd $VS=\sqrt{Vd^2+Sd^2}$; albo jescze tak: ponieważ Fig. 16.

$VS=\sqrt{Vd^2+Sd^2}=Vd\sqrt{\left(1+\frac{Sd^2}{Vd^2}\right)}$; wyciągając rzeczywiście pierwiastek i biorąc dwa początkowé tylko wyrazy, będzie: $VS=Vd\left(1+\frac{Sd^2}{2Vd^2}\right)=Vd+\frac{Sd^2}{2Vd}$.

Mając liniją VT, a chcąc znaleść wartość łuku podpartégo przez tę liniją, możemy na ten koniec wyprowadzić wzór z różniczki łuku wyrażonéy przez wstawę i przez jey różniczkę; nazywając bowiem łuk$=$x; a jego wstawę$=$u; mamy $dx=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ (bb); rozwinąwszy mianownik na szereg po przeniesieniu go do licznika, otrzymamy

$$dx=du\left[1+\frac{u^2}{1}+\frac{3.u^4}{2.4}+\frac{3.5.u^6}{2.4.6}+\text{ i t. d.}\right]$$: po z całkowaniu będzie:

$$x=u+\frac{u^3}{2.3}+\frac{3.u^5}{2.4.5}+\frac{3.5.u^7}{2.4.6.7}+\text{ i t. d.}$$

Jest to wyrażenie połowy łuku podpartégo przez cięciwę, cały więc łuk podparty przez cięciwę będzie:

Łuk cały$=2\left(u+\frac{u^3}{2.3}+\frac{3.u^5}{2.4.5}+\frac{3.5.u^7}{2.4.6.7}+\text{ i t. d.}\right)$ w którym u znaczy połowę cięciwy.

52) Przerywając robotę wymierzania podstawy, albo przy końcu dnia, albo dla innéy jakiéykolwiek przyczyny, należy pilnie oznaczać na ziemi punkt odpowiadający koncowi ostatniégo pręta, aby wiedzieć zkąd znowu dalszy wymiar rozpocząć. Całéy też podstawy wymierzonéy końce, jak naydokładniéy powinny być oznaczoné, iżby po znacznym nawet przeciągu czasu można było wymiar odbyty powtórzyć i sprawdzić. Znaki na których się oznaczają końce podstawy powinny być z materyi trwałey i dobrze chronioné, a nie takie jakich użył Maupertuis w Laponii 1736. Koniec bowiem podstawy przezeń mierzonéy przypadał na punkt przecięcia się dwoch liniy opierających się na cztérech jodłach, na których wyrznięté były krzyże pokazujące końce tych liniy — Naprózno Svanberg 1802 przy nowym wymiarze szukał takowych jodeł, lub jakiégokolwiek przynaymniéy ich sladu.

53.) Wymiérzona podstawa jest częścią wielokąta foremnégo na powiérzchni ziemi opisanégo, zamykającą tyle boków, ile razy pręt był położony; zakładając iż on równy jest dwóm sążniom, a ziemię biorąc za doskonałą kulę, któréy promien zamyka 3271226 sążni, wypada kąt wielokąta$=176°. 59'. 59'', 874$ (cc); przeto dwa boki w takowym wielokącie z sobą się stykającé bardzo mało różnią się od linii prostéy, a różnica między całym obwodem tego wielokąta a okręgiem koła wielkiégo, zaledwo czyni 0,00000 00005 55 sążnia, wymiérzona zatém podstawa może być wzięta bez żadnego prawie błędu za łuk koła wielkiégo.

(bb) Traité élémentaire de cal. diff. et de cal.^{r} int. par Lacroix N. 35. 1806.
(cc) Base du Sys. metr. T. II. page 684.

56.) Ziemia wprawdzie nie jest ani doskonałą kulą, ani doskonałą ellipsoidą, ale sferoidą do kuli przystępującą; przeto linija wzięta na powierzchni ziemi w kierunku południka, przystępuje do łuku koła wielkiégo, i cała leży na jednéy płaszczyznie pionowéy, wzięta w kierunku równoleżnika jest kołem małém, wzięta zaś w innym jakimkolwiek kierunku, jest liniją podwóynéy krzywości, to jest nie leży na jednéy płaszczyznie pionowéy; albowiem normalné czyli pionowé miéysc leżących na jednym południku zawsze się z sobą zbiegają po dwie ich biorąc, oprócz punktów znaydujących się między biegunami i równikiem, odległych od siebie o całé półkole, których pionowé są do siebie równoległé; miéysc zaś leżących na jednym równoleżniku pionowé wszystkié się zbiegają w jednym punkcie na osi ziemi; lecz innych miéysc położonych na różnych południkach i równoleżnikach, pionowé nigdzie się z sobą nie Fig. 17. schodzą. Jakoż niech AB oznacza oś ziemską, CD srednicę równika, ACBD południk ziemski. Punktu C wziętégo na równiku pionowa CS, przecina się z osią w środku ziemi S; punktu E, mającégo mniéyszą krzywiznę, pionowa EF schodzi się z osią w punkcie F przypadającym za środkiem S; punktu zaś G, jako mającégo jescze mniéyszą krzywiznę, niżli punkt E, pionowa GH przetnie się z osią ziemską w punkcie H, daléy leżącym za środkiem S, aniżeli punkt F, zatém pionową EF spotyka przed osią wpunkcie I; i tak podobnie innych punktów coraz bliżey przystępujących do bieguna A, pionowé schodzić się będą z osią w punktach coraz dalszych za środkiem S, lecz wszystkié będą leżały na jednéy płaszczyznie a zatém z sobą przecinać się będą, po dwie tylko biorąc, w punktach przed osią przypadających. Pionowé zaś punktów G, L, K, M, i innych leżących na jednym równoleżniku, jako mających jednakową krzywiznę, będą równie do osi ziemi nachyloné, i z nią przetną się w jednym punkcie H; widoczna więc jest, że pionowé EF, MH, punktów E i M, leżących na różnych południkach i równoleżnikach nigdzie się z sobą nie spotkają a zatém nie leżą na jednéy płaszczyznie; więc płaszczyzna przez pionową EF i punkt M poprowadzona, inna jest do płaszczyzny przez pionową MH i punkt E przechodzącéy; takowé płaszczyzny przecinając powierzchnią ziemi utworzą linije krzywe MoE, MnE schodzącé się z sobą tylko w punktach E, M, wszystkiémi zaś innémi punktami od siebie oddaloné; przeto gdybyśmy z punktu E prowadzili na ziemi liniją do punktu M, w kierunku płaszczyzny przez pionową EF i przez punkt M przechodzącéy, mielibyśmy liniją EnM, która cała znaydowałaby się na płaszczyznie EMF, a zatém byłaby pojedynczéy krzywości; podobnie prowadząc z punktu M na ziemi liniją do punktu E, w kierunku płaszczyzny przez pionową MH, i przez punkt E przechodzącéy, otrzymalibyśmy liniją MoE leżącą na płaszczyznie EMH, zatém pojedyńczéy krzywości; lecz my prowadząc liniją na ziemi od punktu E do M, za każdém postąpieniem mamy coraz inną liniją pionową, i wkierunku jéy dalszé punkta oznaczamy, aże te wszystkié pionowé nigdzie się z sobą nie zbiegając leżą na odmiennych płaszczyznach, więc i punkta za ich pomocą na powierzchni ziemi oznaczoné znaydują się także na odmiennych płaszczyznach, zatém cała od E do M prowadzona linija, musi przypadać między linijami EoM, EnM, i jest podwoynéy krzywości, to jest, ma krzywość jednę zależącą od wypukłéy powierzchni ziemi, drugą od znaydowania się jéy punktów na coraz odmiennych pionowych płaszczyznach, lecz ta druga krzywość tak jest nieznaczna, iż z jednego końca linii patrząc na kołki oznaczającé jéy kierunek na powierzchni ziemi, jeżliby żadnéy przeszkody do ich widzenia nie było, wszystkié widzielibyśmy w linii prostéy bez żadnégo zboczenia. Pokazał bowiem Delambre (dd) iż szérokość klinka na powierzchni ziemi zawartégo między dwiema pionowémi płaszczyznami przechodzącémi

(d) Base du Sys. metr. T. II. page 687.

przez dwa punkta leżącé na odmienych południkach i równoleżnikach, lecz jedną poprowadzoną przez pionową jednégo punktu, a drugą przez pionową punktu drugiégo, w odległości 3000 sążni, zaledwo czyni 0,00045 linii; więc przecięcia się tych dwoch płaszczyzn z powiérżchnią ziemi, można uważać jako schodzącé się z sobą i formującé jednę tylko liniją; ztąd wypada, iż odległość wzajemną dwoch jakichkolwiek stanowisk, oznaczoną na powiérżchni ziemi podług liniy pionowych ciągle zmieniających swé położenie, można brać za liniją krzywą pojedynczéy krzywości.

57.) W robotach nie wymagających skrupulatnéy ścisłości, można nawet wymiérzoną podstawę brać za liniją prostą, zakładając *np.* podstawę od 6000 sążni, łuk takiéy długości na kole wielkiém ziemi, biorąc ją za kulę doskonałą, zawiéra tylko 6′18″,6; różnica zaś między tym łukiem a jego cięciwą znaleziona zapomocą wzoru znajomégo w Algebrze (ee), $A - 2\text{wst}\frac{1}{2}A = \frac{A^3}{2.3.2^2}$ — i t. d. gdzie A znaczy łuk uważany, biorąc z niégo wyraz tylko piérwszy, wynosi 0,0050484 stopy, czyli 0,72698 linii; można więc śmiało ją opuścić, i wymiérzoną część obwodu wielokąta, wziąć nietylko za łuk koła wielkiégo, ale nawet i za liniją prostą. Rzadko albowiem kiedy wypadłaby podstawa dłuższa od 6000 sążni; i z wymierzanych dotąd, niektóre mało co są większe od założonéy a wiele jest mniéyszych. Podstawa mierzona przez Francuzów w Peru r. 1736, zamykała sążni 6272, stop 4 cali $7\frac{1}{4}$ (ff).— W Laponii mierzona przez Maupertuis r. 1736 zamykała 7406,8 sążni (gg).— We Francyi mierzona przez Pikarda blisko Paryża na płaszczyznieVillejuif r. 1669 miała 5663 sążni— blisko Paryża mierzona r. 1740 przez Kassyniego zamykała 5729 sążni.— Mierzona przy Dunkierce przez Kassyniego syna miała $6224\frac{1}{2}$ sążni (hh)— Mierzona przy Villersbretonneux sążni 5242,2,— w Anglii r. 1784 mierzona przy Honslow-heat przez Roy miała 4285,665 sążni (ii) czyli ang. stop 27404,72.— r. 1787 przy Romney-marsh mierzona przez Fiddes zamykała 4462,1 sążni (kk) czyli ang. stop 28532,92.— we Francyi mierzona przez Delambra roku 1798 przy Melun zamykała 6075,900069 sążni; przy Perpignau 6006.25545 (ll) w temper. $16\frac{1}{4}°$ Réomiura po sprowadzeniu do morza— w Laponii roku 1802 przez Svanberga 7414,5, sążni (i). Na brzegach Koromandelu 1802 przez Jenerała Lambton mierzona zamykała stop angiel. 40006,4418 (mm) na płaszczyznie blisko góry ś. Tomasza. Jedna tylko ostatnim razem wymierzona w Bawaryi zamykała 11107 sążni.

58.) Podstawa wymiérzona nigdy prawie nie jest pozioma, lecz pospolicie jeden jéy koniec wyższy jest od drugiégo; więc można ją naprzód sprowadzić do poziomu przez jeden jéy koniec przechodzącégo, a tak sprowadzoną, potém sprowadzić do powiérżchni morza; albo uważając, jakoby ona cała znaydowała się na poziomie przez jéy środek przechodzącym, z tégo poziomu sprowadzić ją za jednym razem do powiérżchni morza. Jednym czy drugim sposobem zechcemy postępować zawsze trzeba znać wysokość jednégo końca podstawy nad drugi, oraz wysokość którégokolwiek końca podstawy nad powiérżchnią morza. Dla znalezienia zaś rzeczonych wysokości, należy koniecznie mieć prawdziwą odległość jednégo punktu od nadgłownika punktu dru-

(ee) Rachunku alg. Teorya T. I. kar. 282.
(ff) La figure de la terre par Bouguer. page 44 i 59.
(gg) La figure de la terre par Maupertuis 1738. Amsterdam page 97.
(hh) La meridienne verifiée par Cassini page 23, 36, 37.
(ii) Description des operations faites en Angleterre pour determiner les positions respectives des observatoires de Greenwich et de Paris, de l'anglais par Prony 1791 page 79. memoire 1.
Philosophical trantactions vol 80. page 172.
(kk) Philosophical trans. vol. 80. page 133.
(ll) Base du Systeme metr. T. II. page 45, 55.
(mm) Bibl. Brit. N. 294. page 172. 1808— Afiatic Researches.

giego, i wzajemnie odległość punktu drugiego od nadgłownika piérwszégo; tych zaś prawdziwych odległości nie otrzymamy, nie wiedząc o ile łamanie się światła podnosi przedmioty; trzeba więc naprzód wyprowadzić sposób na ocenienie skutku łamania się światła, co wykonamy następnym rachunkiem:

Fig. 18. 59.) Punkt C niech oznacza środek ziemi, A i B dwa znaki. Patrząc z punktu A na przedmiot B, promień od tego przedmiotu idący do naszégo oka, dla różnéy gęstości powietrza w tych warstach, przez które przechodzi, będzie miał kierunek linii krzywéy BDA; a ponieważ my patrzymy i widziané przedmioty odnosimy w linii prostéy, więc przedmiot B pokaże się w punkcie B′ na linii AB′, która jest styczną do linii krzywey ADB w punkcie A, to jest pokaże się wyżéy niżli jest w samey istocie kątem B′AB, i wzajemnie z punktu B, patrząc na przedmiot A będziemy go widzieli w punkcie A′ na stycznéy A′B, wyżéy od punktu A, kątem ABA′; takowe kąty są miarami łamania się swiatła; o ich oznaczenié nam tu rzecz idzie.

Naten koniec wymiérzamy kąt ZAB′, to jest odległość pozorną punktu B od nadgłównika Z, i wzajemnie kąt VBA′, który jest pozorną odległością punktu A od nadgłownika V. — Dla skrócenia zakładam kąty $ZAB' = D$, $VBA' = D'$; kąty wymiérzające łamanie się swiatła $B'AB = E$, $ABA' = E$; przeto prawdziwé odległości od nadgłównika będą $ZAB = D + E$; $VBA = D' + E'$;

ztąd, $ZAB + VBA = D + D' + E + E'$; aże $ZAB = ABC + C$; $VBA = BAC + C$;

więc $ZAB + VBA = ABC + BAC + C + C = 2^{k.p.} + C$; ztąd wypada $D + D' + E + E' = 2^{k.p.} + C$; przypuściwszy że $E' = E'$, otrzymujemy $= E = \frac{1}{2}(2^{k.p.} + C - D - D')$.

wzór służący do znalezienia łamania się światła; albo dzieląc jego obie strony przez C; otrzymuję, $\frac{E}{C} = \frac{2^{k.p.} + C - D - D'}{2C} = n$, ztąd $E = nC$. Ilość n odmienia się podług stanu powietrza, i Delambre postrzegł we Francyi, że latem, n ma wartość około 0,075; w jesieni i wiosną 0,08; zimą zaś odmienia się od 0,09 do 0,10. — Jeźliby n było odjemne, łamanie się światła zniżałoby przedmioty, zamiast ich podnoszenia, lecz to rzadko się przytrafia.

Wzor służący do ocenienia łamania się światła, wyprowadzony został w tém założeniu, iż z tych punktów wymiérzamy odległość od nadgłownika, do których na odwrót celujemy; lecz w praktyce nie zawsze jest w mocy obserwatora wypełnić ten warunek, pospolicie się celuje do wiérzchołków znaków, a stajemy z narzędziem niżéy; należy więc przed rozpoczęciem rachunku łamania się światła, wymiérzoné odległości od nadgłownika sprowadzić do wiérzchołków znaków, na których stoimy, to jest, z wymiérzonych odległości znaleść te, którébyśmy otrzymali ustawiwszy narzędzie na tych punktach, do których na odwrot celujemy. Co wykonamy sposobem wyżéy podanym (21, 22, 23).

Przypusciliśmy także, iż łamanie się swiatła jednakowé jest na obu stanowiskach, co wtedy się tylko prawdzi kiedy stan powietrza co do gestości, wilgoci i ciepła jest tenże sam w obu miéyscach; więc odległości od nadgłownika powinny być brané w jednym momencie przez dwoch obserwatorów, a jeżeli to być nie może, jeżeli jeden tylko obserwator zaymuje się robotą, więc wziąwszy na jednym stanowisku od swégo nadgłownika odległość punktu drugiégo, wtedy powinien przystąpić do brania odległości punktu piérwszégo od nadgłownika drugiégo, kiedy stan powietrza będzie zupełnie ten sam albo bliski tégo, jaki był w czasie jego obserwacyi na piérwszém stanowisku.

60.) Założyliśmy, iż linija krzywa oznaczająca łamanie się światła, jest pojedyńczéy krzywości, to jest, cała leży na pionowéy płaszczyznie; lecz niektórzy trudniący się wymiarami, jako to Delambre i Puissant, piérwszy w wielkiém swojém działaniu

dla oznaczenia metru, drugi w robotach geodezycznych w Medyolanie i przyległych Fig. 18.
departamentach, doświadczyli łamania się światła w kierunku bocznym; mówi jednak Delambre, iż skutek takowégo łamania się, jest daleko mnieyszy od łamania się w kierunku pionowym, i zaledwo kilka sekund wynosi; cokolwiek bądź, zawsze linija oznaczająca kierunek łamania się światła, będzie liniją krzywą podwóynéy krzywości. Wtakowym razie dla uniknienia omyłki, trzeba koniecznie kilka razy powtarzać obserwacye jednégo tégoż samégo kąta i w rożnych czasach, a za prawdziwą wartość, wziąć wypadek średni.

61.) Dla znalezienia kąta C, odległość wzajemna dwoch stanowisk znaleziona przez wymiar lub przez rozwiązanie troykątów w miarach podłużnych, obraca się na łuk, proporcyonalnie do wartości koła wielkiégo prostopadłégo do południka w punkcie średniéy szérokości między dwoma stanowiskami. Wartość jednégo stopnia takowych kół wielkich pod każdym stopniem szérokości geograficznéy wyrachowana jest przez Kassyniego wdziele; *Exposé des observations faites en Franse en 1787, pour la jonction des observatoires de Paris et de Greenwich* na karcie 68 do czego używał przypuszczenia podanégo przez Bugera, iż ziemia jest sferoidą, w któréy stopnie szérokości geograficznéy, to jest stopnie południka oddalając się od równika, rosną jak czwarté potęgi wstaw szérokości.

62.) Umiéjąc ocenić skutek łamania się swiatła przystąpmy do wyprowadzenia Fig. 19.
sposobu na znalezienié różnicy między wysokościami dwoch stanowisk.

Niech będzie C środek ziemi, którą uważamy za doskonałą kulę; O i M, dwa punkta nierównie oddaloné od środka ziemi. Niech łuk ODN oznacza łuk ziemski, to jest prawdziwy poziom przez punkt O przechodzący, więc różnicą między wysokosciami mieysc O i M, jest linija NM, którą trzeba wynaleść. — Wyprowadzimy ją z troykąta MON, w którym mamy; wst OMN: wst MON=ON: MN, ztąd $MN=\frac{ON.\,wst MON}{wst\,OMN}$

Kąt $MON=2^{k.p.}-NOC-ZOM$. Lecz w troykącie NOC, summa kątów $NOC+ONC+C=2^{k.p.}$; aże $NOC=ONC$, więc $2NOC+C=2^{k.p.}$, ztąd $NOC=1^{k.p.}-\frac{1}{2}C$; kąt zaś $ZOM=D+E$ (59) $=D+\frac{1}{2}(2^{k.p.}+C-D-D')=1^{k.p.}+\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}(D'-D)$; przeto $MON=$

$$2^{k.p.}-(1^{k.p.}-\tfrac{1}{2}C)-(1^{k.p.}+\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{2}(D'-D))=\tfrac{1}{2}(D'-D)$$

Kąt $OMN=ONC-MON=1^{k.p.}-\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}(D'-D)$

więc $MN=\dfrac{ON.\,wst\,\frac{1}{2}(D'-D)}{wst\,(1^{k.p.}-\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}(D'-D))}=\dfrac{ON.\,wst\frac{1}{2}(D'-D)}{dosta(\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\,(D'-D))}$

Jeźli odległość ON nie jest wielka, można kąt $\frac{1}{2}C$, opuścić, a wtedy wzór poprzedzający zamieni się na $MN=\dfrac{ON.\,wst\,\frac{1}{2}\,(D'-D)}{dosta\,\frac{1}{2}\,(D'-D)}=ON.\,sty\,\frac{1}{2}\,(D'-D)$.

Ilość D′ wyraża odległość miéysca O, którégo wysokość bierzemy za wiadomą od nadgłownika punktu M, którégo wysokości szukamy; ilość zaś D, odległość punktu M od nadgłownika punktu O. Więc jeźli $D'>D$, wartość MN będzie dodatna; jeźli $D'<D$, kąt $\frac{1}{2}(D'-D)$, jest odjemny, styczna jego, zatem i wartość MN jest odjemna; jeźli nakoniec $D'=D$, kąt $\frac{1}{2}(D'-D)$, jest$=0$, jego styczna, a przeto i wartość $MN=0$; co nam pokazuje że w pierwszym razie punkt M jest wyższy, w drugim niższy od punktu O, w trzecim zaś na jednym z punktem O znayduje się poziomie.

63.) Jeżliby nie można było na obu stanowiskach brać nawzajem odległości ich od nadgłownika, w takowym razie troykąt ONM, uważalibyśmy jako prostokątny, biorąc kąt prosty przy tém stanowisku, na którém nie stawaliśmy. Gdybyśmy *np.* wzięli tyl-

Fig. 19. ko ze stanowiska O, odległość punktu M, od nadgłownika punktu O, to jest D, w tym razie troykąt OMN uważalibyśmy za prostokątny w punkcie N. — Miéyscé na którém nie stawaliśmy może być wyższe, albo niższe od tego na którém stoimy.

Naprzód. Jeźli punkt M jest wyższy od punktu O, w tym razie biorąc troykąt ONM za prostokątny, mamy, Pro^{v} 1 : sty NOM=ON: NM ztąd NM= ON. sty MON.

Kąt MON=2$^{k.p.}$—ZOM—NOC; kąt ZOM znacząc prawdziwą odległość punktu M od nadgłownika pnnktu O, równa się odległości pozornéy. powiększonéy łamaniem się światła, to jest=D+E (59); kąt NOC=1$^{k.p.}$—C (62); więc MON=2$^{k.p.}$—(D+E)—(1$^{k.p.}$—$\frac{1}{2}$C)= 1$^{k.p.}$—(D+E—$\frac{1}{2}$C);

przeto NM=ON. sty (1$^{k.p.}$—(D+E—$\frac{1}{2}$C))= ON. dosty (D+E—$\frac{1}{2}$C).

Powtóre. Jeźli punkt, którego odległość bierzemy od nadgłownika punktu O, jest niższy od punktu O, jak *np.* punkt E; w tym razie biorąc troykąt NOE, za prostokątny w punkcie N, mamy Pro^{v} 1 : sty NOE=ON: NE, ztąd NE=ON. sty NOE.

Kąt NOE = ZOE — ZON = D+E — ONC — C=D+E — (1$^{k.p.}$—$\frac{1}{2}$C) — C (62) D+E—$\frac{1}{2}$C—1$^{k.p.}$; przeto NE=ON. sty ((D+E—$\frac{1}{2}$C)—1$^{k.p.}$)

Ponieważ kąt (D+E—$\frac{1}{2}$C)—1$^{k.p.}$, jest dopełnieniem przez nadmiar kąta (D+E—$\frac{1}{2}$C) do kąta prostégo, to jest odjowszy kąt piérwszy od drugiégo zostaje kąt prosty, więc styczna piérwszégo, jest dostyczną drugiégo, lecz że kąt (D+E—$\frac{1}{2}$C) jest rozwarty więc jego dostyczna jest odjemna, przeto będzie NE=—ON. dosty (D+E—$\frac{1}{2}$C).

Zakładając punkt M wyższy od punktu O, otrzymaliśmy wartość linii MN dodatną, zakładając zaś punkt E niższy od punktu O, mamy wartość linii NE odjemną, więc znak wypadający przed wartością linii szukanéy pokazuje, czy punkt nieprzystępny jest wyższy lub niższy od punktu na którym stoimy.

Linii ON wymierzyć nie możemy, ale tylko liniją OM, lecz dla małey różnicy między niémi zachodzącey i prawie żadnéy za liniją ON, bierzemy liniją OM.

64.) Różnicę między wysokościami dwoch miéysc, w tym przypadku, kiedy jednego z nich tylko odległość bierze się od nadgłownika drugiégo, możemy jescze wyprowadzić następnym sposobem:

To samo czyniąc przypuszczenie, iż tylko z punktu O bierzemy odległość D punktu M od nadgłownika punkta O, i że kąt przy N jest prosty, mamy z troykąta ONM; Pro^{v} 1 : sty NOM=ON: NM, ztąd, NM=ON. sty NOM.

Przez punkt O, prowadzimy prostopadłą OH do pionowéy ZC. Ta prostopadła będąc styczną łuku ODN w punkcie O, jest liniją pozornégo poziomu punktu O. — Kąt NOM=MOH+HON. Kąt MOH jest zawarty między liniją pozornégo poziomu punktu O, a liniją poprowadzoną do punktu M, którego wysokości szukamy. Kąt HON będąc zawarty między styczną a cięciwą, waży połowę łuku podpartégo przez cięciwę, to jest połowę kąta C, więc NM=ON. sty (MOH+$\frac{1}{2}$C). — Co pokazuje, że, jeźli miéyscé nieprzystępné jest wyższé od tego na którém stoimy, różnica między ich wysokościami równa się iloczynowi z odległości ich wzajemnéy, przez styczne kata złożonego z kąta wymierzającégo wysokość punktu nieprzystępnégo nad pozorny poziom obserwatora i z połowy kąta zawartégo między pionowémi dwoch miéysc. *Powtóre.* Jeźli miéyscé nieprzystępné jest niższé *np.* punkt E. — W troykącie NOE, biorąc kąt N za prosty, mamy Pro^{v} 1 : sty NOE=NO: NE; ztąd NE=NO. sty NOE= NO. sty (HOE—HON) NO. sty (HOE—$\frac{1}{2}$C). To jest że, jeźli mieysce nieprzystępnie jest niższe od tego na którém stoimy, różnica między ich wysokościami równa się iloczynowi z odległości ich wzajemnéy przez styczną kąta bedącégo różnicą między kątem pokazującym zniżenie punkta niedostępnego nad pozorny poziom obserwatora, a połową kąta zawartego między pionowémi obu stanowisk.

Za liniją ON, tak jak w liczbie 63, bierze się linija OM.

Sposoby wyłożoné w téy liczbie i w poprzedzającéy dają wypadki przybliżone tylko do prawdziwych, bo żadną miarą nie można kąta N uważać za prosty.

65.) Postępując wyłożonémi sposobami w trzech liczbach poprzedzających, a naylepiéy sposobem w liczbie 62 podanym od jedného punktu do drugiégo, przyydziemy nakoniec albo do takiégo znaku, który jest położony nad samém morzem, albo z którégo morze może być widziané. Oznaczywszy różnicę między poziomami przechodzącémi przez wiérzchołki znaków piérwszégo i ostatniégo, a potém odjowszy wysokości tych znaków, to jest rzeczoné poziomy zniżywszy na wysokość tych znaków, będziemy mieli różnicę między poziomami spodów tych znaków; więc jeźli znak ostatni stoi nad samém morzem, otrzymamy różnicę między poziomem spodu znaku piérwszégo a poziomem morza.

Lecz jeźli znak ostatni nie stoi nad samém morzem, ale tylko z niego morze może być widziané, w tym razie trzeba znaleść wysokość spodu ostatniégo znaku nad powiérzchnią morza, co wykonamy następnym sposobem:

Niech będzie B punktem, którégo wysokość nad morze potrzeba znaleść, AB′ Fig. 20.
powiérzchnia morza. Z punktu B wyobrażam powrowadzoną do powiérzchni morza styczną AB; wymiérzam kąt ABV, to jest odległość powiérzchni morza od nadgłownika punktu obserwacyi. Promień CA, jest prostopadły do stycznéy AB, więc w troykącie CAB prostokątnym w kącie A, mamy; $\text{wst}\,B : \text{wst}\,A \veebar P \veebar 1 = AC : CB$;

ztąd $CB = \dfrac{AC}{\text{wst}\,B} = \dfrac{AC}{\text{dosta}\,C}$, ztąd, $BB' = CB - CB' = \dfrac{AC}{\text{dosta}\,C} - CB' = \dfrac{AC - CB'\,.\,\text{dosta}\,C}{\text{dosta}\,C}$

aże $AC = CB'$, więc $BB' = \dfrac{AC\,(1 - \text{dosta}\,C)}{\text{dosta}\,C}$; wiadomo zaś z Algebry (nn); że

$\dfrac{\text{wst}\,a - \text{wst}\,b}{\text{dosta}\,b - \text{dosta}\,a} = \text{dosty}\,\dfrac{a+b}{2}$; zakładając $a = C$, $b = 0$, wypada, $\dfrac{\text{wst}\,C}{1 - \text{dosta}\,C} = \text{dosty}\,\tfrac{1}{2}\,C$,

ztąd $\dfrac{\text{wsta}\,C}{\text{dosty}\,\frac{1}{2}\,C} = 1 - \text{dosta}\,C$, czyli $\text{wst}\,C\,.\,\text{sty}\,\tfrac{1}{2}\,C = 1 - \text{dosta}\,C$, przeto $BB' =$

$AC\left(\dfrac{\text{wst}\,C\,.\,\text{sty}\,\frac{1}{2}\,C}{\text{dosta}\,C}\right) = AC\,.\,\text{sty}\,C\,.\,\text{sty}\,\tfrac{1}{2}\,C$. Aże $C = ABV - BAC = ABV - 1^{\text{k.p.}}$ kąt zaś ABV, czyli prawdziwa odległość morza od nadgłownika punktu V, równa się odległości pozornéy i łamaniu się swiatła, to jest $= D + E$ przeto $C = D + E - 1^{\text{k.pr.}}$; linija zaś AC jest promieniem ziemskim który zakładam $= P$,

przeto $BB' = P\,.\,\text{sty}\,(D + E - 1^{\text{k.pr.}})\,\text{sty}\,\tfrac{1}{2}\,(D + E - 1^{\text{k.pr.}})$

Jeźliby łamanie się światła było nie znajome, można jego wartość wyprowadzić ze zrównania $E = nC$, lecz dogodniéy będzie, wartość BB′ przemienić na funkcyą ilości n, co wykonamy sposobem następnym: $C = D + E - 1^{\text{k.p.}}$ opusczając E będzie $C = D - 1^{\text{k.p.}}$ przeto $E = nC = n(D - 1^{\text{k.p.}})$; ztąd $BB' = P.\text{sty}\,(D + n(D - 1^{\text{k.p.}}) - 1^{\text{k.p.}})\,\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(D + n(D - 1^{\text{k.p.}}) - 1^{\text{k.p.}})$, wiadomo zaś z algebry że kiedy łuk jest mały x, wtedy $mx = m\,.\,\text{sty}\,x$, kładąc przeto

$\tfrac{1}{2}\,\text{sty}\,(D + n(D - 1^{\text{k.p.}}) - 1^{\text{k.p.}})$, za $\text{sty}\,\tfrac{1}{2}\,(D + n\,(D - 1^{\text{k.p.}}) - 1^{\text{k.p.}})$,

będzie $BB' = \tfrac{1}{2}\,P\,.\,\text{sty}^2\,(D + n(D - 1^{\text{k.p.}}) - 1^{\text{k.p.}}), = \tfrac{1}{2}\,P\,.\,\text{sty}^2\,(n(D - 1^{\text{k.p.}}) + (D - 1^{\text{k.p.}}))$

$= \tfrac{1}{2}\,P\,.\,\text{sty}^2(n+1)(D - 1^{\text{k.p.}})$ czyli blisko tego $BB' = \tfrac{1}{2}\,P\,(1+n)^2\,\text{sty}^2(D - 1^{\text{k.p.}})$

Ilość n podług doświadczeń Delambra we Francyi latem $= 0{,}075$; wiosną i jesienią $= 0{,}08$, zimą $=$ od $0{,}09$, do $0{,}10$.

66.) Takowé obserwacye są dostateczne do sprowadzenia podstawy do poziomu

---

(nn) Teorya rachun. Alg. Tom I. kar. 284. §. 54.

morza, lecz chcąc zrobić równoważenié zupełnie doskonałé, należałoby zachowywać inné ostrożności, to jest całą odległość podzielić na mniéyszé części, na obu stanowiskach czynić obserwacye w jednym czasie, w śród dnia kiedy powietrze jest pogodné. Jednak pomimo tylu prac i ostróżności, niepewność łamania się światła czyni nas zawsze wątpliwymi względem ścisłéy dokładności.

67.) Można także znaleść wysokość końca podstawy nad powiérzchnią morza zapomocą barometru, lecz dla otrzymania dokładnégo wypadku, należałoby robić przez czas długi meteorologiczne obserwacye na tém mieyscu gdzie koniec podstawy przypada, lub blisko niego.

68.) Znalazłszy wysokość jednégo końca podstawy nad drugi jey koniec, oraz wysokość końców a tém samém i środka podstawy nad powiérzchnią morza, sprowadzimy ją do téy powiérzchni przez proporcyą, że łuki podobné są do siebie w stosunku promieni kół, do których należą.

69.) Mając podstawę sprowadzoną do powiérzchni morza i kąty brané na wszystkich stanowiskach sprowadzoné także do poziomów przez ich wierzchołki przechodzących i ze wszystkich błędów oczyszczoné, możemy już rachować wzajemné stanowisk odległości. Lecz uważamy, że one są linijami krzywémi leżącemi na powierzchni ziemi, która w swoim kształcie nie jest doskonałą ani kulą, ani ellipsoidą, ale sferoidą do kuli przystępującą, troykąty więc ze wzajemnych odległosci stanowisk utworzoné są sferoidyczné każdy zaś w nich kąt jest zawarty między płaszczyznami pionowémi przez znaki obserwowane i przez stanowisko przechodzącémi, których spolném przecięciem jest linija pionowa w mieyscu obserwacyi; aże pionowé rożnych punktów na sferoidzie z sobą się nie zbiegają, nawet po dwie uważając, wyjowszy przypadek, jeźliby oba punkta leżały na jednym południku, lub na jednym równoleżniku, co względem znaków osobliwym trafem chyba się przydarzy, przeto wszystkié trzy kąty troykąta sferoidycznégo odnoszą się do trzech pionowych różnych z sobą się nie zbiegających, nic więc ich nie wiąże, nie możemy odnosić ich do żadnégo ostrosłupa, któryby nam dał stosunek między niémi zachodzący; dla znalezienia go należałoby wszystkie trzy kąty odnosić do jednéy któréykolwiek z trzech pionowych, albo do pionowéy średniéy między trzema; w tém przypuszczeniu odmienią się przynaymniéy dwa obserwowané kąty, ale ta odmiana jest nie znaczna, i daje błąd daleko mniéyszy od błędów nieuchronnych w obserwacyi. Delambre pokazał (oo), że dla małéy różnicy zachodzącéy między kątem branym na jakiémkolwiek miéyscu odniesionym do prawdziwéy pionowéy tegoż miéysca, a kątem odniesionym do linii łączącéy miéyscé obserwacyi z końcem pionowéy znaku drugiégo, można brać bez żadnégo błędu kąt jeden zadrugi. Przeto kąty brané na wszystkich stanowiskach i sprowadzoné do poziomów mogą być uważané za kąty kulisté, i troykąty sferoidyczné za tróykąty kulisté. Przeto z wiadoméy wielkości podstawy w miarach podłużnych, to jest w częściach promienia, znalazłszy jéy wielkość w stopniach, będziemy rozwiązywali troykąty sferoidyczné, jak troykąty kulisté, zaczynając od tégo, którému za bok służy podstawa wymiérzona, a tak otrzymamy wzajemne odległości stanowisk w stopniach, ztąd potém w częściach promienia czyli w miarach podłużnych.

70.) Lecz ponieważ krzywość ich boków względem wielkości promienia ziemskiégo jest nieznaczna, można je rozwiązywać sposobem Leżandra, jako troykąty prostokréślné, których boki równé są w długości bokóm troykąta kulistégo, a kąty równé są kątóm odpowiednym kulistym zmnieyszonym trzecią częścią przewyżki wszystkich trzech

(oo) Base du Sys. m. T. II. page. 671. 672.

kątów kulistych nad dwa kąty prosté (pp); przewyżka ta odpowiada zawsze powierzchni tegoż samégo troykąta kulistégo rozwiązanégo zupełnie jak troykąt prostokreślny; ten sposób Leżandra jest takiéy dokładności, jakiéy tylko wymaga rachunek boków, kiedyby oné nawet zamykały po 100000 sążni.

71.) Dawniéysi w szukaniu odległości stosowali się zupełnie do sposobu Leżandra; troykąty z szukanych odległości utworzoné rozwiazywali jak troykąty prostokréślné, rozdzielając przewyżkę summy trzech kątów w troykącie nad 2 kąty proste, równo między trzy kąty i tym sposobem summę wszystkich kątów w troykącie przyprowadzając do dwoch kątów prostych, lecz przewyżkę summy trzech kątów w troykącie nad dwa kąty prosté, przypisywali nie kulistości troykąta, ale tylko błędom nieuchronnym w obserwacyi.

72.) Można także znaydować wzajemné odległości stanowisk w linijach prostych, rozwiązując zamiast troykątów kulistych, troykąty prostokréslné utworzoné z cięciw podpierających boki troykątów kulistych, to jest z liniy prostych zawartych między punktami, w których pionowé znaków dotykają się powierzchni morza przedłużonéy, jak postępował ciągle Delambre przy wymierzaniu południka. Lecz do tégo, trzeba kąty kulisté sprowadzić do kątów prostokréślnych zawartych między cięciwami, jako też i podstawę sprowadzoną do powierzchni morza, sprowadzić do cięciwy ją podpierającéy.

73.) Dla sprowadzenia kąta kulistégo do kąta cięciw, trzeba rozwiązać troykąt kulisty, w którym jeden kąt byłby równy kątowi kulistému, który mamy sprowadzać, ramionami zaś tégo kąta byłyby łuki równé czwartym częściom okręgu koła powiększonym lub zmniéyszonym połową wartości łuków obeymującyeh kąt sprowadzony, znaleziona w stopniach wartość trzeciégo boku, będzie wartością kąta szukanégo. Jakoż Fig. 21. niech będzie troykąt kulisty ABC, prowadzę cięciwy we wszystkich bokach tégo troykąta; trzeba nam z kąta kulistégo BCA, czyli z kąta T′CT zawartégo między stycznémi łuków BC, AC, w punkcie ich zbieżenia się C, znaleść kąt BCA zawarty między cięciwami łuków BC, AC. — Przez wiérzchołek kąta C wyobrażamy liniją pionową NS. Z punktu C jakimkolwiek promieniem, który bierzemy za jedność, zakréślamy łuki $N\alpha$, $N\beta$, $\alpha\beta$; albo łuki $S\alpha$, $S\beta$, $\alpha\beta$; tworzy się ztąd troykąt albo $N\alpha\beta$, albo $S\alpha\beta$; w każdym z nich mamy trzy rzeczy wiadomé, albowiem kąt $\alpha N\beta$, jest to kąt zawarty między stycznémi NV, NV′ łuków w punkcie N, zatém równy jest kątowi T′CT, czyli kątowi danému BCA; podobnie kąt $\alpha S\beta$ jest kąt zawarty między stycznémi Z′S ZS, przeto równa się kątowi T′CT czyli kulistému BCA. — Boki $N\alpha$, $N\beta$ są miarami kątów NCA, NCB; kąt $NCA = NCT + TCA$; kąt $NCB = NCT' + T'CB$; kąty NCT, NCT′ są prosté bo linije CT′, CT są prostopadłe do pionowéy NS; kąty zaś TCA, T′CA, ważą połowę łuków CA, CB, bo wiadomo z geometryi, że kąt zawarty między styczną a cięciwą przez punkt dotknięcia poprowadzoną, waży połowę łuku podpartego przez tę cięciwę, przeto $N\alpha = 1^{k.p.} + \frac{CA}{2}$; $N\beta = 1^{k.p.} + \frac{CB}{2}$; boki też $S\alpha$, $S\beta$ są wiadomé, bo $S\alpha = 1^{k.p.} - \frac{AC}{2}$; $S\beta = 1^{k.p.} - \frac{BC}{2}$; więc rozwiązując którykolwiek troykąt albo $N\alpha\beta$, albo $S\alpha\beta$, znaydziemy bok $\alpha\beta$, który jest miarą kąta szukanégo; zatém otrzymany kąt BCA zawarty między cięciwami.

74.) Zamiast szukania całégo kąta między cięciwami, dość jest znaleść tę ilość, którą trzeba odjąć od kąta kulistégo dla otrzymania kąta zawartégo między cięciwami; aże boki $N\alpha$ i $N\beta$, lub $S\alpha$ i $S\beta$ nie wiele się różnią od czwartéy części okręgu koła, uży-

---

(pp) Elem. de Geom. par Legendre, Traité de Trigon. N. 105. 106.

Fig. 21. jemy więc sposobu podanego na znalezienie boku w troykącie, z wiadomych dwoch jego boków niewiele się różniących od czwartéy części okręgu koła i kąta między niemi zawartégo (101); zkąd otrzymamy $x = \left(\frac{w+v}{2}\right)^2 \text{sty}\frac{C}{2} - \left(\frac{w-v}{2}\right)^2 \text{dosty}\frac{C}{2}$. W tym wzorze ilość x, oznacza ilość szukaną, C kąt kulisty dany do sprowadzenia; w, i v, kąty zawarté między cięciwami CA, CB, i stycznémi CT, CT', czyli połowy łuków CA, CB; które powinny być piérwiéy znalezioné przez przybliżenie rozwiązując troykąt kulisty jak prostokreślny; takową wartość na ilość x, znalezioną odeymując od kąta kulistego C, otrzymamy łuk $\alpha\beta$ który jest miarą kąta BCA, a tém samém otrzymamy kąt BCA zawarty między cięciwami.

Wynalezioné trzy kąty w troykącie złożonym z cięciw powinny czynić równo dwa kąty prosté, i to będzie znakiem dobrze odbytych obserwacyy. Jeżliby zachodziła jaka różnica, trzeba ją rozdzielić po równéy części na każdy kąt i summę trzech kątów przyprowadzić do dwoch kątów prostych.

75.) Podstawę sprowadzoną do powiérzchni morza, a zatém będącą łukiem koła wielkiego, można przyprowadzić do cięciwy za pomocą wzoru:

$$\text{Cięciwa łuku } v = v - \frac{v^3}{2^3.3} + \frac{v^5}{2^5.3.4.5} - \frac{v^7}{2^7.3.4.5.6.7} + \text{ i t. d. (qq).}$$

76. Którégokolwiek sposobu będziemy używali, do rozwiązywania troykątów, sposobu Leżandra, albo Delambra zawsze przyydziemy do swojégo celu, z tą tylko różnicą, że rozwiązując sposobem Leżandra będziemy otrzymywali łuki koł wielkich kuli ziemskiéy, używając zaś sposobu Delambra, będą nam wypadały cięciwy tychże łuków, to jest krawędzie wielościanu wpisanégo w kulę ziemską.

77.) Gdy się już dość znacznie oddalimy od wymierzonéy podstawy, od któréy rozpoczęliśmy rachunek dla większéy dokładności, za prawdziwą długość boków troykąta należy brać średni wypadek między wypadkami otrzymanémi z rozmaitych ciągów troykątów, którym takowé boki są wspólné. Albo jeżli kray jest dość obszérny, w każdéy jego części można wymierzyć osobną podstawę, a sprawdziwszy one jednę przez drugą, i zapewniwszy się o ich dokładności, każdą część kraju odnosić do podstawy w niéy zawartéy. Tak uczynił Delambre w rachowaniu swégo południka; część jego północną odnosił do podstawy wymiérzonéy przy Melun, a część południową do podstawy przy Perpignan.

78.) Mając już wyrachowané wzajemne odległości wszystkich stanowisk, możnaby układać rys całégo planu kréśląc troykąty z wyrachowanych odległości, lecz używając tégo sposobu popełniona omyłka w oznaczeniu jednégo troykąta, wszystkié troykąty, do których oznaczenia boki piérwszégo wpływają, oddali od prawdziwégo ich położenia, chociażby w ich kréśleniu nayściśleysza regularność była zachowaną, coż mówić, jeżli się w każdym troykącie błąd popełni a do tego jescze w jednym kierunku? w tedy plan odrysowany bardzo fałszywé dawałby nam wyobrażenie o rzeczywistém miéysc położeniu. Należy przeto wszystkié punkta tak oznaczać, iżby oznaczenié jednégo nie zależało bynaymniéy od oznaczenia innych; na ten koniec przez którykolwiek punkt mający się oznaczyć, wyobraża się przechodząca linija południowa i druga do niéy prostopadła, od tych dwoch linii rachuje się odległość wszystkich punktów mających się nakarcie oznaczyć, to jest wszystkich wiérzchołków troykątów; co łatwo jest otrzymać, wiedząc wszystkie rzeczy w każdym troykącie, i azymut jednego boku, to jest kąt zawarty między bokiem troykąta a liniją południową. Takowé odległości

(qq) Teorya rachunku Algebr. T. I. kar. 282.

nie są linjami prostémi, ale łukami, równie jak odległości stanowisk; przeto znaydziemy je z troykątów kulistych prostokątnych mających za jedno ramie kąta prostégo, łuk prostopadły do południka ziemskiego ze stanowiska poprowadzony a za drugié ramié część ziemskiego południka zawartą między tym łukiem a punktem przecięcia się z bokiem troykąta idącym od stanowiska, używając do rozwiązywania tych troykątów, albo sposobu zwyczaynégo, albo sposobu podanego przez Leżandra.

Niektórzy Geografowie uważając wszystkie troykąty za prostokréślné, i całą ich sieć jakby leżącą na jednéy płaszczyznie, każdégo punktu odległość od linii południowéy i od prostopadłéy do linii południowéy znaydowali w linijach prostych, ztroykątów prostokątnych mających za przeciwprostokątné boki głownych troykątów, a za ramiona linije prosté prowadzone przez wszystkié wiérzchołki troykątów, jednę prostopadłą a drugą równoległą do linii południowéy. Tym sposobem odległość wszystkich miéysc we Francyi od linii południowéy i od prostopadły do niéy przez obserwatoryum Paryzkie przechodzącéy została wyrachowaną przez Kassyniego, lecz sposób takowy co do scisłości w oznaczaniu punktów ustępuje poprzedzającemu.

79.) Dla znalezienia azymutu trzeba się już udawać do obserwacyy astronomicznych; i tak z końca któregokolwiek boku za pomocą wysokości odpowiadających jakiéykolwiek gwiazdy można znaleść moment przeyścia jéy przez południk, w tym kierunku ustawiwszy lunetę południkową, oznacayć na ziemi południk przez miéysce obserwacyi przechodzący, jak zrobili w Pensylwanii Mason i Dixon przedłużając go i mierząc przez cały stopień ziemski; wzięty kąt między takowym południkiem a bokiem troykąta, będzie prawdziwym tego boku azymutem. Ten sposób nie jest zupełnie dogodny, bo wymaga długiéy pracy i zabiera wiele czasu, a nad to w kraju mieszkalnym nie wszędzie można południk ziemski oznaczyć. Nierównie jest prędszy sposób znalezienia azymutu za pomocą słońca lub gwiazdy, na ten koniec obiera się stanowisko, którégo szérokość geograficzna jest doskonale znajomą, na niém wymiérza się kąt między bokiem na tym stanowisku kończącym się a środkiem słońca lub gwiazdą, kiedy się one znaydują blisko poziomu, i uważa się dokładnie czas obserwacyi, a wiedząc także za pomocą wysokości odpowiadających prawdziwy moment przeyścia słońca lub gwiazdy w tym dniu przez południk, znajomy będzie kąt godzinny w czasie obserwacyi, z tego kąta godzinnégo, z odległości bieguna od nadgłownika obserwatora, i z wiadomégo z tablic porządnie wyrachowanych zboczenia słońca lub gwiazdy, znaydzie się przez trygonometryą kulistą azymut słońca lub gwiazdy uważany od północy; biorąc między tym azymutem a kątem piérwiéy wymiérzonym i sprowadzonym do poziomu różnicę, jeźli bok troykąta przypada między południkiem a słońcem, lub południk między bokiem a słońcem, biorąc zaś obu tych samych kątów summę, jeźli słońce znayduje się między południkiem a bokiem, otrzymamy azymut boku troykąta.

Szukanie azymutu za pomocą słońca, należy przekładać nad szukanie jego za pomocą gwiazdy, gdyż obserwacya słońca uwalnia nas od oświécania przedmiotu, między którym kąt się wymiérza, i w przypadku tylko niejasnégo widzenia w dzień przedmiotu, należy się udać do nocnéy obserwacyi.

Czas jedną jest z rzeczy istotnych do znalezienia azymutu; należy go pilnie rachować, bo błąd popełniony na 1″ czasu, daje błąd 15″ w łuku. Dla otrzymania dokładnégo azymutu, trzeba go wyciągać z licznych obserwacyy, biorąc w końcu wypadek średni ze wszystkich znalezionych; nad to trzeba go wyprowadzać raz ze słońca zachodzącégo, drugi raz ze słońca wschodzącégo. Lecz dla uniknienia niepewnych skutków łamania się światła w czasie znaydowania się słońca blisko poziomu, bierze się pospolicie azymut, kiedy słońce na kilka już stopni podniesioné jest nad poziom. Używając gwiazdy, należy jey zboczenie, znaydujące się w tablicach poprawić z cofania się punktów równonocnych, z wahania się osi ziemskiey i z aberracyi. Obserwacye azymutu, ponieważ są delikatné i trudné, powinny zatém być robione z naywiększą, jaka tylko być może dokładnością.

80.) Po znalezieniu odległości każdégo punktu od linii południowéy i od prostopadłéy do niéy przez jakikolwick punkt przechodzącéy, można już na karcie wszystkie punkta oznaczać bez żadney zawisłości jednych od drugich. Karta tym sposobem odrysowana przedstawiać będzie miéysca w położeniu odpowiadającém ich położeniu wzajemnému, lecz nie da żadnégo wyobrażenia o położeniu mieysc względem cztérech stron świata, i nie można jéy związać z kartą przedstawującą inną część powiérzchni ziemi. Dla téy przyczyny jednégo przynaymniéy miéysca, długość i széerokość geograficzną trzeba jak naydokładniéy oznaczyć, a z nich długość i széerokość miéysc innych przez rachunek wyprowadzić.

81.) Długość geograficzna znayduje się obserwując fenomen niebieski pokazujący się w jednym momencie wszystkim mieszkańcom ziemi, u których widziany być może, jakim jest zaćmienie księżyca ziemskiégo, lub księżyców jowiszowych. Dway obserwatorowie za pomocą zegarów dobrze i jednostaynie urządzonych uważają moment, w którym cień ziemi dotyka się całéy tarczy księżyca, lub nastepnie różnych jego plam znacznych, albo uważają moment zanurzenia się w cień lub z niego wyyścia księżyców jowiszowych, a różnica czasu między momentami dotknięcia cieniu całéy tarczy lub téy saméy plamy księżyca ziemskiégo, albo między momentami zanurzenia się w cień lub wynurzenia się księżyca jowiszowégo, jest różnicą między długościami geograficznémi obu tych mieysc, na których obserwacye były czynioné. — Zaćmień księżyców jowiszowych, lepiéy jest używać aniżeli zaćmienia księżyca ziemskiégo, bo tego ostatniego zaćmienie rzadko się przydarza, a nad to dla powolnégo i niewyraznégo posuwania się cieniu, trudno jest z dokładnością oznaczyć moment zetknięcia się jego z tarczą księżyca, lub z jakąkolwiek na nim plamą. Zaćmienie zaś księżyców jowiszowych nie równie dokładniéy może być oznaczoné, często bowiem przypada i prędko się odbywa osobliwie księżyca piérwszégo, który w godzinach 42 i minutach 28, swóy bieg kończy. — Zakrycia także gwiazd stałych lub słońca przez księżyc mogą równym sposobem pokazać nam różnicę między długościami geograficznémi. Aże zakrycia gwiazd i zaćmienie słońca nie przypadają w tym samym czasie w różnych mieyscach, przeto z obserwacyi dochodzi się przez rachunek moment złączenia czyli nowiu, to jest moment w którym środek ziemi, środek księżyca ziemskiego, i środek słońca lub gwiazdy znaydują się na jednéy płaszczyznie, który to moment jeden jest dla całéy ziemi; różnica między czasami przypadania tego momentu na różnych mieyscach pokazuje różnicę długości geograficzney.

82.) Széerokość geograficzną znaleść można za pomocą gwiazd nigdy niezachodzących, obserwując wysokość ich nad poziom w czasie naywiększégo ich górowania i naywiększégo zniżenia, to jest w czasie ich przeyścia przez południk, odtrąciwszy od każdéy wysokości skutek łamania się światła, a pozostałości średni wypadek wyciągnięty z licznych i pilnie odbytych obserwacyy pokaże nam wysokość bieguna nad poziom, czyli széerokość geograficzną miéysca. — Można ją także otrzymać za pomocą słońca lub gwiazdy, któréy zboczenie jest wiadomé; znalazłszy bowiem przez obserwacyą wysokość gwiazdy lub słońca nad poziom, w czasie ich przeyścia przez południk i od téy wysokości odjowszy zboczenie, jeźli jest północné lub do niéy przydawszy jeźli jest południowé, znaydziemy wysokość równika nad poziom, któréy dopełnienie do kąta prostégo będzie széerokością geograficzną miéysca, na którém obserwacya czyniona była.

83.) Mając już sposobami podanémi znalezioną długość i széerokość geograficzną miéysca jednégo, możemy z nich przez rachunek wyprowadzić długość i széerokość mieysc

innych sposobem następnym; Niech będzie mieysce M, którégo wiemy długość i széro- Fig.22.
kość geograficzną; trzeba znaleść długość i szérokość mieysca A; zakładamy iż z wymiaru lub przez rozwiązanie troykątów, wiadoma jest odległość AM. Przez punkt M wyobrażamy przechodzący południk BC, i koło do niégo prostopadłe, którégo częścią jest łuk DM. Z punktu A prowadzimy do południka BC i do koła doń prostopadłego DM, łuki prostopadłe AC, AD, czyli co jest dostateczném jeden łuk AC; w troykącie kulistym AMC mając kąt C prosty, bok AM, wiadomy i kąt AMC, który jako azymut boku AM powinien być piérwiéy znaleziony, znaydziemy wartość boku AC i CM. Jeźli naznaczymy punkt B za biegun, łuk BM jest dopełnieniem szérokości geograficznéy miéysca, obróciwszy więc łuk MC na stopnie, wiedząc zkąd inąd ile jeden stopień południka w szérokości geograficznéy miéysca zamyka takich miar, w jakich oznaczona jest linija MC i do łuku BM dodawszy, będziemy mieli łuk BC. Prowadzę przez punkt A południk AB, tworzy się ztąd troykąt ABC, w którym kąt C jest prosty, bok BC wiadomy i bok AC także wiadomy, ponieważ wyrachowany bok AC w miarach, obrócić możemy na łuk za pomocą wiadoméy zkąd inąd wartości jednégo stopnia koła wielkiégo prostopadłégo do południka BC w miéyscu C, znaydziemy więc kąt ABC, i bok AB; kąt ABC jako zawarty między południkami miéysc A i C, pokazuje różnicę między ich długościami geograficznémi; łuk zaś AB będąc odległością miéysca A od bieguna, odjęty od kąta prostego daje mieysca A szérokość geograficzną.

Zamiast obracania linii AC, na łuk koła wielkiégo prostopadłégo do południka, obrócić ją możemy na stopnie długości pod szérokością mieysca C, przez co będziemy mieli kąt ABC, to jest długość miéysca A przybliżoną, (bo właściwie mówiąc, znaleziona liczba stopni odpowiada szérokości miéysca C, lecz nie miéysca A); więc w troykącie ABC, mając kąty C, B, i bok BC, znaydziemy bok AB, a tém samém i szérokość geograficzną miéysca A, lecz tylko przybliżoną; mając ją, obracamy znowu liniją AC na stopnie pod szérokością miéysca A, a przeto będziemy mieli kąt ABC, więc w troykącie ABC znaydziemy bok AB, a ztąd szérokość geograficzną mieysca A. Takowa powtórnie znaleziona długość i szérokość mogą już być wzięte za prawdziwe. — Ten sposob chociaż nie prosto wiedzie do rzeczy szukanych, jednak daje wypadki równie dokładné jak sposób poprzedzający.

84.) Du Sejour podaje jescze sposób jeden znalezienia różnic między długościami i Fig.23.
szérokościami dwoch miéysc z danych odległości jednégo miéysca od południka i od prostopadłéy do tegoż południka miéysca drugiégo. Wyprowadzenie od samych początków całégo sposobu byłoby niezmiernie długie, więc tylko wyłożę wzory do znalezienia rzeczy szukanych służącé. Niech B oznacza biegun ziemi, S środek, FE część równika. Niech będą dwa południki BAE, BCF, ziemskié, przechodzącé przez miéysce A, którégo szérokość i długość geograficzna jest znajoma, i przez miéysce C, którégo znamy tylko odległość CG, od południka miéysca A, i odległość GA od prostopadłéy do tégoż południka przez punkt A przechodzącéy. — Na osi ziemskiéy wyobrażamy utworzoną kulę, którą nazywamy kulą wpisaną w kulę ziemską. Przez południki ziemskie BAE, BCF, i przez oś BS wyobrażamy przechodzącé płaszczyzny, przecinając się one z powiérzchnią kuli w pisanéy tworzą na niéy południki odpowiedné Bae, Bcf. Płaszczyzna także równika EFS, przecinając kulę wpisaną oznaczy na niéy część równika odpowiedną ef. Z punktów A, G, C, spuściwszy prostopadłé na oś BS, otrzymamy na południkach kuli w pisanéy punkta a, g, c, odpowiadającé punktóm A, G, C; łuki AE, CF, oznaczają prawdziwé szérokości geograficzné miéysc A, C; łuki zaś ae, cf, na kuli w pisanéy oznaczają tych miéysc szérokości geograficzné nazwané poprawnémi. Łuk EF, na równiku, czyli kąt EBF między południkami BE, BF, oznacza różnicę między długościami prawdziwémi mieysc A i C; łuk zaś ef, czyli kąt eBf na kuli w pisanéy ozna-

Fig.23. cza różnicę między długościami tychże miéysc poprawnémi. — Sam zaś sposób jest następny:

1[od] Z danéy prawdziwéy szérokości AE miéysca A, znayduję szérokość poprawną ae zapomocą wzoru: $\text{Sty. széro. popr.} = \frac{\text{sty. széro. prawdziwéy}}{\text{połowa osi większéy}}$ (rr) i tę szérokość poprawną dla skrócenia nazywam L.

2[re] Łuku AG wyrażonégo w miarach podłużnych znayduję wartość w stopniach, a z niéy wyprowadzam wartość łuku ag odpowiadającégo na kuli wpisanéy, przez wzór

$$ae = AG^\circ - \frac{\alpha}{4}\ (AG^\circ - 206265''.\ \text{dosta}\ (2L + AG)\ \text{wst}\ AG);$$

(ss) ilość α, oznacza mimośrod południka prawdziwégo ziemskiégo, biorąc ziemię za ellipsoidę, to jest oznacza mnogość z summy połowy osi większéy i połowy osi mniéyszéy, przez różnicę między połowami tychże osi. — Mając ag, znaydziemy Bg, albowiem $Bg = Ba \pm ag$.

3[cie] Łuku także CG wyrażonégo w miarach podłużnych znayduję wartosć w stopniach, a z niéy wyprowadzam wartość łuku cg na kuli wpisanéy, do czégo służy wzor:

$$cg = CG^\circ - \frac{\alpha}{4}\ \text{dosta}^2\ Bg\ \left(CG + \frac{206265''.\ \text{wst}.\ 2\ CG}{2}\right) \quad (tt)$$

4[té] W troykącie Bgc znając Bg, gc i kąt prosty g, znaydę szérokość cf punktu c, to jest szérokość poprawną miéysca C i kąt gBc, to jest różnicę między długościami punktów a, i c, za pomocą wzorów.

$$\text{wst:cf} = \text{dosta:Bg. dosta:ac.} \quad (uu). \qquad \text{Sty:gBc} = \frac{\text{sty:cg}}{\text{wst:Bg}} \quad (ww).$$

Mając szérokość i długość poprawną miéysca C znaydziemy długość i szérokość jego prawdziwą przez wzory;

Sty. szér. prawd. = sty. szér. popraw $\times$ połowa osi większéy; to jest $\text{Sty:CF} = \text{Sty:cf} \times Ed.$

$$GBC = gBc - \frac{\alpha}{2}.\ \text{wst Bg. cg.} \quad (xx)$$ czyli dla małéy różnicy między cg a CG.

$$GBC = gBC - \frac{\alpha}{2}.\ \text{wst Bg. CG.}$$

85.) Leżandr i Delambre podali inné jescze wzory, nierównie krótszé od wzorów Pana Du-Sejour a przeto zasługujące na piérszeństwo. Uważają ani ziemię za ellipsoidę, a południki za ellipsy.

Podług Leżandra. Niech będzie miéysce A, którégo szérokość geograficzna jest znajoma i którą zakładam $= S$; niech będzie łuk $AC = n$ prostopadły do południka BAE; trzeba znaleść szérokość punktu C leżącégo na końcu łuku AC, którą nazywam $= S'$; długość czyli raczéy różnicę między południkami mieysc AE, i AF, która niech będzie $= D$; i kąt $BCA = Z$ czyli azymut łuku CA. — Mimośrod ellipsy oznaczającéy południk ziemski niech będzie $= m$; promień krzywości łuku leżącégo przy punkcie A, a tém samém i całégo prawie łuku AC, niech będzie $= p$. Liczba sekund znaydujących się w łuku równym promieniowi niech będzie $= P''$; będą przeto wzory:

(rr) Tome I. § 4.
(ss) Tome II. § 28. liczba (3).
(tt) Tome II. § 49. liczba (3).
(uu) Tome II. § 85. liczba (1).
(ww) Tome II. § 85. liczba (2).
(xx) Tome II. § 60. liczba (1) i (2).

Traité analytique des mouvemens apparens des corps celestes par M. Dionis du Sejour Conseiller de grand' chambre à Paris 1786. 1789 in 4to.

$$S' = S - \tfrac{1}{2} P'' \frac{n^2}{p^2} \text{ sty } S - \tfrac{1}{2} P'' m^2 \frac{n^2}{p^2} \text{ wst } S. \text{ dosta } S.$$

$$D = \frac{P'' n}{p. \text{ dosta } S} \left(1 - \tfrac{1}{3} \frac{n^2}{p^2} \text{ sty}^2\, S\right).$$

$$Z = 1^{k.p.} - P'' \frac{n}{p} \text{ sty } S + \tfrac{1}{3} P'' \frac{n^3}{p^3} \text{ sty } S \left(\tfrac{1}{2} + \text{sty}^2 S\right)$$

Jeźliby zaś szérokość mieysca C była dana, na znalezienie szérokości miéysca A, i azymutu łuku BA; służą wzory następné:

$$S = S' + \tfrac{1}{2} P'' \frac{n^2}{p^2} \text{ sty } S' + \tfrac{1}{2} P'' m^2 \frac{n^2}{p^2} \text{ wsta } S'. \text{ dosta } S'.$$

$$Z = 1^{k.p.} - P'' \frac{n}{p} \text{ sty } S' - \tfrac{1}{3} P'' \frac{n^3}{p^3} \text{ sty } S' \left(1 + \tfrac{1}{2} \text{ sty}^2\, S'\right)$$

Jeźliby szérokość miéysca A, nie była dana, ale tylko odległość x tégo miéysca od prostopadłéy przechodzącéy przez główné miéysce karty, którégo szérokość jest znajoma, w takowym razie należy tę odległość obrócić na stopnie, i do szérokości miéysca głównégo dodać, lub od niéy odjąć, podług tégo, jak rzeczoná odległość jest połnocną lub południową względem prostopadłéy miéysca głównégo. Obrócić zaś możemy tę odległość na stopnie używając wzoru: $\delta = \frac{P'' x}{P} (1 - \tfrac{1}{2} m^2. \text{ wst}^2 S)$, w którym δ oznacza liczbę szukanych stopni; P promień równika. Ponieważ mimośrod ellipsy oznaczającéy południk jest mały, wyrazy przeto zamykające m^2 we wzorach podanych do znalezienia szérokości, mogą być opuszczoné. — Wzór służący do oznaczenia promienia krzywości p, jest następny $p = \frac{P}{\sqrt{(1 - m^2 \text{ wst}^2 S)}}$.

86.) Wzory Delambra któré przytoczę, są równie ścisłé jak poprzedzającé i bynaymniéy nie zależą od odległości prostopadłych od południka i od prostopadłey do tegoż południka, lecz między niémi zachodzi ta różnica, iż Leżandr za odległość dwoch punktów, bierze łuk koła wielkiégo zawarty między ich pionowémi, Delambr zaś za tę odległość, uważa cięciwę tegoż samégo łuku. Niewiele wprawdzie różni się łuk od swojéy cięciwy w robotach mierniczych, bo uważają się łuki nienazbyt długié; zatém można brać rzecz jednę za drugą; chcąc jednak zupełną zachować ścisłość, nigdy różnicy między łukiem a cięciwą zaniedbywać nie należy. — Promień równika w miarach zwyczaynych, jakiémi się linije wymierzały na gruncie, niech będzie$=$P. Mimośród ellipsy oznaczającéy południk$=$m. Połowa osi większéy téy ellipsy$=$1. Łuk wyrażony w sekundach zawarty między jedném miéyscem, którégo szerokość, długość i azymut są wiadomé, a drugiém, którégo szérokości, długości i azymutu szukamy$=\delta$. Cięciwa ten łuk podpierająca$=$C. Szérokość wiadowa jednégo miéysca$=$S, szérokość szukana drugiégo miéysca$=$S'. Długość znajoma jednego miéysca$=$D, długość szukana drugiego mieysca$=$D'. Długość bierze się ze wschodu na zachod od 0° do 4ch kątów prostych. Azymut miéysca jednégo znajomy$=$Z, azymut miéysca drugiégo szukany$=$Z', rachując je także od południka na zachód.

87.) Wzory do znalezienia azymutu podané przez Delambra są następne:

1^{od}. $Z' = 2^{k.p.} + Z - \delta.$ wst Z. sty. S $- \tfrac{1}{2}\delta^2$ wst. Z. dosta Z $(1 + 2 \text{ sty}^2 S) - \tfrac{5}{6}\delta.^3$ wst Z. sty S $-\delta^3.$ wst Z. sty^3 S $+ 2\delta^3$ wst^3 Z. sty S $+ \tfrac{4}{3}$ wst^3 Z. sty^3 S. (yy).

(yy) Base du Système métrique par Delambre Paris. T. III 1810 in 4to page 23.

L

Ten wzór jest dokładny, lecz w rachunku bardzo niedogodny dla swojey długości — Trzeba wiele czasu łożyć na znalezienie wartości wyrazu 4tégo, 5go, 6go i t. d. które się po większéy części nawzajem niszczą i bardzo małą dają wartość, osobliwie jeżeli δ jest małe. U Delambra po założeniu $\delta = 1^\circ$, zaledwo czynią $= 0'',25$; więc tego wzoru można wtedy tylko używać, kiedy potęgi trzecie mogą być opuszczoné. Zakładając ten warunek podaje Delambre wzór krótszy lecz już nie tak ścisły, następny:

$$2^{\text{re}}.\ Z' = 2^{\text{k.p.}} + Z - \frac{\delta.\ \text{wst}\ Z.\text{wst} \frac{1}{2}(S' + S)}{\text{dosta}\ S'}.\ \text{(zz)}.$$

Azymut znaleziony za pomocą tego wzoru przez Delambra jest $0'',2$ większy od azymutu wyrachowanégo przez wzor poprzedzający. (a')

Ilość zaś δ znajdziemy za pomocą wzoru $\delta = \frac{C}{\text{P. wst}\ 1''}\ (1 - \frac{1}{2}m^2.\ \text{wst}^2\ S)$.

3^{cie}. Wzór bardzo regularny i dokładny jest także
$Z' = 2^{\text{k.p.}} + Z - M + N.$

$$M = \left(\frac{\text{sty} \frac{1}{2}\delta}{\text{wst}\ 1''}\right).\ \text{sty}\ (\tfrac{1}{2}^{\text{k.p.}} + \tfrac{1}{2}S)\ \text{wst}\ Z - \left(\frac{\text{sty}^2\ \frac{1}{2}\delta}{\text{wst}\ 2''}\right).\ \text{sty}^2\ (\tfrac{1}{2}^{\text{k.p.}} + \tfrac{1}{2}S)\ \text{wst}\ 2\ Z +$$

$$+ \left(\frac{\text{sty}^3\ \frac{1}{2}\delta}{\text{wst}\ 3''}\right) \text{sty}^3\ (\tfrac{1}{2}^{\text{k.p.}} + \tfrac{1}{2}S)\ \text{wst}\ 3\ Z - \ \text{i t. d.}$$

$$N = \left(\frac{\text{sty}\ \frac{1}{2}\delta}{\text{wst}\ 1''}\right) \text{dosty}\ (\tfrac{1}{2}^{\text{k.p.}} + \tfrac{1}{2}S)\ \text{wst}\ Z + \left(\frac{\text{sty}^2\ \frac{1}{2}\delta}{\text{wst}.\ 2''}\right) \text{sty}^2\ (\tfrac{1}{2}^{\text{k.p.}} + \tfrac{1}{2}S)\ \text{wst}\ 2\ Z$$

$$+ \left(\frac{\text{sty}^2\ \frac{1}{2}\delta}{\text{wst}\ 3''}\right) \text{dosty}\ (\tfrac{1}{2}^{\text{k.p.}} + \tfrac{1}{2}S)\ \text{wst}\ 3\ Z + \ \text{i t. d. (b')}$$

Przez ten wzór rachować można azymut mając samé tylko ilosci dané w zadaniu. Dwa wyrazy początkowé są prawie zawsze dostateczné. Wyraz czwarty jest zawsze nieznaczny, lecz chcąc go otrzymać, mając wyrazy piérwsze, dość jest tylko poszukać dwoch jeszcze logarytmów; i ta jest wyższość szeregów regularnych nad piérwszą formułę złożoną z mnostwa wyrazów tego samégo porządku, i których nie można przedłużać bez znacznego powiększenia pracy.

4^{te}. Podaje jeszcze Delambre wzór ścisły i skończony następny: $Z' = 2^{\text{k.p.}}\ (Z + x)$

$$\text{wst}\ x. = \frac{2\ \text{wst}\ Z.\ \text{dosta}\ Z.\ \text{dosta}\ S.\ \text{dosta}^2\ \frac{1}{2}\delta + \text{wst}\ \delta.\ \text{wst}\ Z.\ \text{wst}\ S\ \text{(c')}.}{\text{dosta}\ S'}$$

Ten wzór jest niedogodny, bo wiele pracy wymaga a niekiedy w praktyce mniéy pewny, dla tégo nie może iść w porównanie ze wzorem poprzedzającym.

5^{te}. $Z' = 2^{\text{k.p.}} + Z - \delta.\ \text{wst}\ Z.\ \text{sty}\ S - \frac{1}{4}\ \delta.\ \text{wst}\ \delta.\ \text{wst}\ 2\ Z.$

88.) Do wynalezienia długości geograficznéy mamy wzór podany od Delambra.

(zz) Page 24.
(a') Page 39.
(b') Page 30 et 42.
(c') Page 27.
(d') Page 25.
} Base du système métrique par Delambre 1810 Tome III.

$$1^{od}.\ D = \frac{\delta.\ \mathrm{wst}\ Z - \delta^2.\ \mathrm{wst}\ Z.\ \mathrm{dosta}\ Z.\ \mathrm{sty}\ S - \frac{1}{3}\delta^3.\ \mathrm{wst}\ Z.\ \mathrm{sty}^2\ S}{\mathrm{dosta}.\ S}$$

$$+ \frac{\frac{4}{3}\delta^3.\ \mathrm{wst}\ Z.\ \mathrm{dosta}^2 Z.\ \mathrm{sty}^2\ S + \frac{4}{3}\delta^3.\ \mathrm{wst}\ Z.\mathrm{dosta}^2\ S}{\mathrm{dosta}\ S} \quad (d')$$

Ten wzór ma té same niedogodności, jakie są przywiązané do wzoru piérwszégo na rachowanie azymutu. Lecz w robotach mniey ścisłych dwa wyrazy początkowé mogą być dostateczné. Nierównie jest dogodniéyszy w rachowaniu i nayściśléyszą dający wartość wzor następny:

$2^{re}.\ D = M + N$ (e'). Ilości M i N, są téż samé, jakie były we wzorze trzecim podanym na rachowanie azymutu.

89.) Mając już wyrachowaną długość geograficzną na znalezienie szérokości geograficznéy mamy wzóry Delambra

$1^{od}.\ S' = S - (x + y)$

$$y = \left(\frac{\mathrm{sty}^2\ \frac{1}{2}D}{\mathrm{wst}\ 1''}\right) \mathrm{wst}\ 2\ (S - x) - \left(\frac{\mathrm{sty}^4\ \frac{1}{2}D}{\mathrm{wst}\ 2''}\right) \mathrm{wst}\ 4\ (S - x) + \left(\frac{\mathrm{sty}^6\ \frac{1}{2}D}{\mathrm{wst}\ 3''}\right) \mathrm{wst}\ 6\ (S - x) - D$$

$\log x = \log \mathrm{sty}\ x + \frac{2}{3}\log \mathrm{dosta}\ x.\quad \mathrm{sty}\ x = \mathrm{sty}\ \delta.\ \mathrm{dosta}.\ Z.$ (f')

Piérwszy wyraz tego széregu jest dostateczny zakładając nawet $\delta = 1^\circ$ co się nigdy w działaniach geodezycznych nie trafia.

$2^{re}.\ S' = S - (\delta.\ \mathrm{dosta}\ Z + \frac{1}{2}\delta.\ \mathrm{wst}\ \delta.\ \mathrm{wst}^2\ Z.\ \mathrm{sty}\ S)(1 + m^2.\ \mathrm{dosta}^2\ S)$

$3^{cie}.\ \mathrm{wst}\ dS$, czyli $dS = -\mathrm{wst}\ \delta.\ \mathrm{dosta}\ Z - \mathrm{wst}\ \delta.\ \mathrm{wst}\ Z.\ \mathrm{wst}\ S.\ \mathrm{sty}\frac{1}{2}D.$ (g')

Ten wzór skończony jest prosty i w rachunku dogodny.

Podał także Delambre na znalezienie różnicy między szérokościami szukanémi wzór następny:

$dS = \delta.\ \mathrm{dosta}\ Z - \frac{1}{2}\delta^2.\mathrm{wst}\ 1''.\mathrm{wst}^2 Z.\mathrm{sty}\ S - \frac{1}{6}\delta^3.\ \mathrm{wst}^2\ 1''.\mathrm{wst}^4\ Z.\mathrm{dosta}\ Z\ (1 + 3\ \mathrm{sty}^2 S)$ (h')

Jeźli δ wyrażoné jest w sążniach, dS będzie różnicą równoleżników w sążniach, wtedy na miéyscu wst 1'', trzeba będzie położyć $\frac{1}{N}$; ilość N oznacza normalną w sążniach. Jeźli δ dané jest w sekundach, dS oznacza różnicę szérokosci.— Ten wzór jest dostateczny.

90.) Wszystkie te wzory dawałyby wartość dokładną gdyby ziemia była kulą doskonałą, lecz spłasczenie jéy przy biegunach sprawuje odmianę chociaż nie wielką.

Różnica między azymutem rachowanym na kuli i na sferoidzie kulistéy ma wyrażenie $\frac{1}{4}e^2\ \delta.\ \mathrm{sty}\ \delta.\ \mathrm{wst}\ 2\ Z.\ \mathrm{dosta}^2\ S$, (i'); gdzie $e^2 = 2a$ znaczy spłasczenie ziemi, to jest ilość którą oś ziemska jest mniéysza od średnicy równika. Takowa różnica będąc trzeciégo porządku jest zawsze nieznaczna, i może być zaniedbaną; przeto azymuty odniesioné jeden do linii pionowéy, drugi do linii pochyłéy łączącéy dané miéysce z końcem pionowéy miéysca drugiégo, można brać za równé między sobą.

91.) Szérokość geograficzną rachowaną na sferoidzie, za pomocą troykąta kulistégo zrobionégo w ostrosłupie mającym wiérzchołek u spodu normalnéy należy poprawić; téy małéy poprawki wyrażenie jest następné.

(e') Page 27.
(f') Page 28.
(g') Page 29.
(h') Page 21 et 34.
} Base du Système métrique Tome III.

(i') Base du Sys. metr. Tome II. 1807. page 672.

$+e^2$. wst δ. dosta Z. dosta^{2}S$-\frac{1}{2}e^2$. wst^2. δ. dosta^2 Z.wst S. dosta S$+e^4$. wst δ. dosta Z. wst^2 S. dosta^{2}S. (k')

Piérwszy wyraz téy poprawki jest zawsze dostateczny w działaniach geodezycznych, albowiem z niepewności, jaka pozostaje, względem prawdziwégo kształtu ziemi, w użyciu téy poprawki, wynikną zawsze błędy daleko znaczniéyszé od błędów pochodzących z opuszczenia dalszych wyrazów. Można więc przestać na odjęciu piérwszégo jéy wyrazu od szérokości S' wyrachowanéy, biorąc ziemię za doskonałą kulę.

92.) Długość geograficzna dla spłaszczenia ziemi nie odmienia się, ponieważ krzywość dwoch południków mniéy więcéy regularna nie odmienia w żaden sposób kąta zawartego między niémi w ich spólném przecięciu się, to jest na osi ziemi.

93.) Lecz skutek elliptyczności ziemi jest bardzo znaczny w obracaniu na sekundy odległości δ między dwoma znakami zawartéy. Na kuli dość jest podzielić wst δ wyrażoną w sążniach, przez promien ziemi wyrażony także w sążniach. Na sferoidzie zaś robota jest nieco dłuższa, albowiem:

$$\text{wst}\,\delta'' = \frac{\text{wst}\,\delta\,(1-\frac{1}{2}e^2.\ \text{wst}^2S')}{P}$$ (l'). Normalne czyli pionowe obu końców łuku wymierzonégo na powierżchni ziemi nie zbiegają się razem na osi; zatém kąt zawarty między normalną jednégo końca łuku a liniją łączącą spod téy normalnéy z drugim końcem łuku zawsze jest mniéyszy od wartości łuku wymierzonégo na powierżchni zieli ilością, która rośnie jak kwadraty wstaw szérokości. Dla obracania więc dokładnie na sekundy łuków miérzonych na powierżchni ziemi trzeba koniecznie znać doskonale kształt ziemi, czyli jéy spłaszczenie. Mniéy ścisła znajomość kształtu ziemi, mały wprawdzie błąd sprawi w obracaniu na sekundy łuku miérzonégo, a mniéyszy jescze w szukaniu różnic tak między długościami jak między azymutami, pomimo tego jednak dla kształtu sferoidycznégo rachowané azymuty po znacznym ciągu trrykątów nigdy się nie zgodzą z wymierzonémi.

94.) Dla prędszégo znalezienia rzeczy szukanych za pomocą wzorów Leżandra i Delambra wyrachowané są przez Piuissana w jego dziele *Traité de Géodesie* tablice zamykające wartość mnożników które wchodzą do składu wzorów, jakoto:

$$\frac{1}{P.\ \text{wst}\,1''}\,(1-\tfrac{1}{2}m^2.\ \text{wst}^2S)\,;\quad \text{sty}\,S\,;\quad \tfrac{1}{4}\,\text{wst}\,2\,Z\,;\quad \frac{2.\ \text{sty}\,S}{\text{dosta}\,S}.$$

95.) Szérokość, długość i azymut naylepiéy jest znaydować miéysca przypadającégo w środku karty, a ztąd idąc na wszystkié strony rachować azymuty boków wszystkich troykątów, szérokość ich wiérzchołków i różnicę między ich długościami geograficznémi.

96. Ponieważ w wyprowadzoné azymuty, szérokości i długości miéysc innych błąd wcisnąć się może, należy przeto po końcach całégo łancucha z troykątów uformowanégo, naylepiéy w kierunku południka, dla sprawdzenia znaleść jakichkolwiek miéysc azymut i szérokość geograficzną; powinny się one zgadzać, albo blisko przystępować do azymutów i szérokości wyrachowanych; wyciągnięté z dobrych obserwacyy powinnyby się zupełnie zgodzić, gdyby kształt i nierównośc ziemi były należycie znajomé. Dla sprawdzenia także dobrze odbytych wszystkich działań wymiérza się druga podstawa lub więcéy w dość znaćznéy odległości od piérwszéy złączona z ciągiem troykątów. Tak Kassyni robiąc kartę Francyi wymierzał 19 podstaw sprawdzających w ró-

---

(k') Tome II. page 670.
(l') Tome III. page 33. 43. } Base du syst. métrique.

żnych miéyscach; Anglicy roku 1784 wyprowadzając całé swojé rachunki z podstawy wymiérzonéy przy Hounslow-heat, dla sprawdzenia wymiérzyli podstawę przy Romney-marsh. U Delambra podstawa przy Perpignan służyła do sprawdzenia rachunków wyciągnionych z podstawy przy Melun. — Zgodność wypadków otrzymanych z rachunku i z wymiaru praktycznégo podstawy sprawdzającéy dowodzi dokładności roboty.

97.) Znalazłszy sposobami wyżéy podanémi, długość i szérokość geograficzną miéysc wszystkich znaczniéyszych, mających się na karcie umiesczać, układa się głowny rys całéy karty. Dla oznaczenia innych punktów także znaczniéyszych, robią się na bokach tróykątów głównych składających sieć całégo kraju, troykąty mniéyszé nazywané tróykątami drugiégo porządku, do brania ich kątów bardzo wygodnie służy także koło powtarzające, lecz kąty tych troykątów mniéy już wymagają poprawy; dokładność w nich o 5″, lub 6″ jest dostateczną, kiedy w głównych tróykątach starać się należy o dokładność 1″, lub naywięcéy 2″. Dość jest poprawić je z mimośrodu lunety, i sprowadzić do środka stanowisk, a do poziomu wtedy tylko sprowadzać, kiedy odległości od nadgłownika nie są dość znaczné. Summa kątów w każdym troykącie przywodzi się do 2 kątów prostych, rozdzielając przewyżkę lub niedostatek na trzy równé części, a boki znaydują się tak, jak troykątów prostokreślnych. Ztąd rachuje się odległość wierżchołków tych troykątów od linii południonéy, oraz znayduje się ich długość i szérokość, po czém umiésczają się na karcie stosownie do głównégo rysu, a tak oznaczają się całe troykąty drugiégo porządku; nakoniec do boków tych troykątów stosują się wszystkie sczegóły w obrębie ich znaydujące się i zdjęté na papier stolikem lub innémi sposobami od Geometrów w miernictwie używanémi.

DODATKI.

98.) *Sposób znalezienia liczby stopni w łuku wyrażonym w częściach promienia, i wzajemnie.*

Okrąg koła można uważać dwojako, albo jako podzielony na stopnie, albo jako podzielony na takie części, na jakie jest podzielony promień tegoż koła, wyobrażając sobie albo okrąg koła wyprostowany, albo promień zgięty na okręgu; bardzo często się wydarza dochodzić liczby stopni znaydujących w łuku wyrażonym w cześciach promienia, i wzajemnie szukać liczby części promienia mieszczących się w łuku wyrażonym przez stopnie. Na ten koniec trzeba wiedzieć ile się zamyka stopni w łuku równym promieniowi, czyli, jak się mówi pospolicie, wpromieniu; a to wiedząc rozwiążemy wyższe zadanie przez następną proporcyą: jak się ma liczba miar podłużnych zawartych wpromieniu, który nazywam P, do liczby takichże miar znaydujących się w danym łuku, który kładę$=$Ł; tak się ma liczba sekund zawartych w promieniu czyli raczéy w łuku równym promieniowi, którą wyrażam przez P'', do liczby sekund będących w danym łuku, którą zakładam$=$Ł$''$; to jest będzie, $P : Ł = P'' : Ł''$; ztąd $Ł'' = \frac{Ł.\,P''}{P}$; $Ł = \frac{Ł''.\,P}{P''}$.

Liczbę sekund zamykających się w łuku równym promieniowi, wyrazić możemy przez $\frac{P}{\text{łuk } 1''}$, to jest $P'' = \frac{P}{\text{łuk } 1''}$, aże wstawa łuku bardzo małego niczém się prawie nie różni od samégo łuku, więc biorąc wst $1''$ zamiast łuku $1''$, będzie $P'' = \frac{P}{\text{wst } 1''}$. to wyrażenie kładąc na miéyscu P'', w poprzedzającé łuków wartości otrzymujemy $Ł'' = \frac{Ł}{\text{wst } 1''}$; $Ł = Ł''.\ \text{wst. } 1''$

Te wzory i wyżéy otrzymané pokazuja, że dla znalezienia liczby sekund znaydujących się w jakimkolwiek łuku, trzeba liczbę miar podłużnych zawartych w danym łuku, albo rozmnożyć przez liczbę sekund będących w promieniu, a tę mnogość podzielić przez liczbę miar podłużnych zawartych w promieniu, albo podzielić tylko przez wstawę łuku jednéy sekundy; a przeciwnie dla znalezienia liczby miar podłużnych zamykających się w jakimkolwiek łuku, trzeba liczbę sekund znaydujących się w danym łuku, albo rozmnożyć przez liczbę miar podłużnych składających promień, i tę mnogość podzielić przez liczbę sekund zawartych wpromieniu, albo rozmnożyć tylko przez wstawę łuku jedney sekundy. — Lecz zakładając promień $P=1$; poprzedzającé wyrażenia zamienią się w następné.

$$P'' = \frac{1}{\text{łuk } 1} = \frac{1}{\text{wst } 1''};\quad Ł'' = Ł.\,P'' = \frac{Ł}{\text{wst } 1''};\quad Ł = \frac{Ł''}{P''} = Ł''.\ \text{wst } 1''.\quad (\alpha)$$

to jest: że liczbę miar podłużnych zawartych w jakimkolwiek łuku, albo mnożąc przez liczbę sekund będących w łuku równym promieniowi czyli w promieniu, albo dzieląc przez wstawę łuku jednéy sekundy, otrzymujemy liczbę sekund znaydujących się w tymże łuku; a przeciwnie liczbę sekund zamykających się w łuku, albo dzieląc przez liczbę sekund będących w promieniu, albo mnożąc przez wstawę łuku jednéy sekundy, znaydujemy liczbę miar podłużnych mieszczących się w tymże łuku.

Liczbę sekund zamykających się w łuku równym promieniowi znaydziemy z następnéy proporcyi: jak się ma okrąg koła wyrażony w częściach promienia, do promienia, tak się ma liczba stopni zamykających się w całym okręgu koła, do liczby stopni zamykających się w łuku równym promieniowi. Zakładając promień$=1$; będzie okrąg koła $=6,283184$; zatém wyższa proporcya tak się wyrazi, $6,283184 : 1 = 4^{k.p.} : P''$, czyli $3,141592 : 1$

$= 2^{k.p.} : P''$, ztąd $P'' = \frac{2^{k.p.}}{3,141592}$,

używając podziału sześćdziesiątkowégo, to jest kładąc $1^{k.p.} = 90°$, wypada

$$P'' = \frac{180°}{3,141592} = 57°.\ 17'.\ 44'', 8 = 3437', 7333. = 206264'', 8,$$

używając zaś podziału setnégo, to jest kładąc $1^{k.p.} = 100°$, otrzymujemy:

$$P'' = \frac{200°}{3,141592} = 63°.\ 66'.\ 19'', 77237 = 636619'', 77237$$

w podziale sześćdziesiątkowym.

$P'' = 206264'', 8$; log. $P'' = 5,3144251317$; wst $1'' = 0,0000048481$; log. wst $1'' = 4,6855749$.

w podziale setnym

$P'' = 636619'', 77237$; l. $P'' = 5,8038801229$; wst $1'' = 0,0000015704$; l. wst $1'' = 4,1961199$.

Wzory wyrażoné pod literą (α) pospolicie się rozwiązują przez logarytmy, przeto chcąc znaleść wartość łuku w stopniach, trzeba wziąć z tablic logarytm liczby części promienia zamykających się w danym łuku, dodać do tego logarytmu logarytm P'', albo odjąć logarytm wst $1'''$, w piérwszym razie summa, w drugim różnica, będzie logarytmem liczby sekund znaydujących się w łuku, liczba odpowiadająca tému logarytmowi znaleziona w tablicach logarytmów liczb naturalnych, będzie liczbą sekund żądaną, którą łatwo jest obrócić na stopnie lub minuty. — Przeciwnie chcąc znaleść wartość łuku w częściach promienia, trzeba liczbę stopni i minut danégo łuku zamienic na sekundy, znaleść téy liczby sekund logarytm w tablicach logarytmów liczb naturalnych, odjąć od niego logarytm P'', albo dodać do niego logarytm wst $1''$, w piérwszym razie różnica, w drugim summa będzie logarytmem liczby części promienia zamykających się w danym łuku, odpowiadająca liczba temu logarytmowi, będzie liczbą szukaną.

99. *Z wiadomych dwoch boków i kąta zawartégo w troykącie prostokątnym znaleść przez szeregi wartość kątów innych.*

Niech będą trzy boki troykąta prostokréślnego a, b, c; kąty im przeciwné A, B, C; dané są *np.* boki a, b, i kąt C; trzeba znaleść kąt B.

Na znalezienie kata B, mamy proporcyą

a: b = wst A: wst B = wst (B + C) : wst B. = wst B. dosta C + dosta B. wsta C: wst B

ztąd a. wst B = b. wst B. dosta C + b. dosta B. wst C; ztąd $\frac{\text{wst B}}{\text{dosta. B}} = \frac{\text{b. wst C}}{\text{a} - \text{b. dosta C}}$

aże wsta $v=\frac{e^{+v\sqrt{-1}}-e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$; dosta $v=\frac{e^{+v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$ (m')

takowé przeto wartości wstawy i dostawy w ilościach wykładniczych urojonych kładąc na ich mieyscu w poprzedzającé z równanie otrzymujemy:

$$\frac{\dfrac{e^{+B\sqrt{-1}}-e^{-B\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}}{\dfrac{e^{+B\sqrt{-1}}+e^{-B\sqrt{-1}}}{2}}=\frac{\dfrac{b\left(e^{+C\sqrt{-1}}-e^{-C\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}}}{a-b\left[\dfrac{e^{+C\sqrt{-1}}+e^{-C\sqrt{-1}}}{2}\right]}$$

czyli $\frac{e^{B\sqrt{-1}}+e^{-B\sqrt{-1}}}{e^{B\sqrt{-1}}+e^{-B\sqrt{-1}}}=\frac{b\left[e^{C\sqrt{-1}}-e^{C\sqrt{-1}}\right]}{2a-b\left[e^{C\sqrt{-1}}+e^{-C\sqrt{-1}}\right]}$.

dzieląc licznik i mianownik piérwszéy strony przez $e^{-B\sqrt{-1}}$, a w drugiéy wykonywając wskazané mnożenie, będzie:

$$\frac{e^{2B\sqrt{-1}}-1}{e^{2B\sqrt{-1}}+1}=\frac{be^{C\sqrt{-1}}-be^{-C\sqrt{-1}}}{2a-be^{C\sqrt{-1}}-be^{-C\sqrt{-1}}},\ \text{ztąd}$$

$$2ae^{2B\sqrt{-1}}-2a-e^{2B\sqrt{-1}}\cdot be^{C\sqrt{-1}}+be^{C\sqrt{-1}}-e^{2B\sqrt{-1}}\cdot be^{-C\sqrt{-1}}+be^{-C\sqrt{-1}}=$$

$$=e^{2B\sqrt{-1}}\cdot be^{C\sqrt{-1}}-e^{2B\sqrt{-1}}\cdot be^{-C\sqrt{-1}}\cdot be^{-C\sqrt{-1}}-be^{-C\sqrt{-1}}$$

po uproszczeniu będzie: $2ae^{2B\sqrt{-1}}-2e^{2B\sqrt{-1}}\cdot be^{C\sqrt{-1}}=2a-2be^{-C\sqrt{-1}}$

ztąd $e^{2B\sqrt{-1}}=\frac{a-be^{-C\sqrt{-1}}}{a-be^{C\sqrt{-1}}}$; biorąc z obu stron logarytmy wypada

(m') Teorya Rach. Algeb. Tom I. §. 55 kar. 285.

$$2B\sqrt{-1}.\ \log.\ e = \log.\left[a - be^{-C\sqrt{-1}}\right] - \log.\left[a - be^{C\sqrt{-1}}\right];$$

log. e, jako logarytm gruntu kładąc $= 1$, prawą zaś stronę rozwijając podług znajomégo wzoru, $\log.(a - x) = \log.\ a - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} -$ i t. d. mamy

$$2B\sqrt{-1} = \log.\ a - \frac{be^{-C\sqrt{-1}}}{a} - \frac{b^2C^{-2C\sqrt{-1}}}{2a^2} - \frac{b^3C^{-3C\sqrt{-1}}}{3a^3} - \text{ i t. d.}$$

$$- \log.\ a + \frac{be^{C\sqrt{-1}}}{a} + \frac{b^2e^{2C\sqrt{-1}}}{2a^2} + \frac{b^3e^{+3C\sqrt{-1}}}{3a^2} + \text{ i t. d.}$$

$$\text{ztąd } B = \frac{b}{a}\left(\frac{e^{C\sqrt{-1}} - e^{-C\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right) + \frac{b^2}{2a^2}\left(\frac{e^{2C\sqrt{-1}} - e^{-2C\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right) +$$

$$+ \frac{b^3}{3a^3}\left[\frac{e^{3C\sqrt{-1}} - e^{-3C\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right] + \text{ i t. d.}$$

aże $\text{wst}^n\ v = \frac{e^{nv\sqrt{-1}} - e^{-nv\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ jak wiemy o tém z Trygonometryi; przeto

$$B = \frac{b}{a}\text{wst } C + \frac{b^2}{2a^2}\text{ wst } 2C + \frac{b^3}{3a^3}\text{ wst } 3C + \text{ i t. d.}$$

Jest to wartość kąta B wyrażona przez szereg, który tém bardziéy będzie malejącym im mniéysza jest ilość b, względem ilości a. Ta wartość wyrażona jest w częściach promienia, mnożąc ją przez P″, lub przez $\frac{1}{\text{wst } 1''}$, znaydziemy ten kąt w stopniach, będzie więc $B = \frac{b}{a}.\frac{\text{wst } C}{\text{wst } 1''} + \frac{b^2}{2a^2}.\frac{\text{wst } C}{\text{wst } 1''} + \frac{b^3}{3a^3}.\frac{\text{wst } C}{\text{wst } 1''} +$ i t. d.

100.) *Sposób rozwiązania troykątów kulistych których boki są bardzo małe względem promienia kuli.*

Niech będzie troykąt kulisty, którego trzy kąty są A, B, C, boki tym kątóm przeciwné a, b, c, są bardzo małé względem promienia kuli; takowy troykąt jako mało różniący się od prostokréślnégo, może być rozwiązany jak prostokréślny, lecz wypadki z tégo rozwiązania otrzymane nie są ściśle prawdziwé, bo kąty kulisté, chociażby nie wielka była ich kulistość, zawsze są większé od kątów odpowiednych w troykącie prostokréślnym, mającym boki równé w długości bokóm troykąta kulistégo, przeto i summa trzech kątów troykąta kulistégo zawsze jest większa od dwoch kątów prostych; więc rozwiązując troykąt kulisty jak troykąt prostokréślny, zaniedbuje się przewyżka summy trzech kątów w troykącie kulistym nad dwa kąty proste. Zatém dla otrzymania wypadków bardziéy przybliżających się do prawdziwych, należy uważać na wzmiankowaną przewyżkę, do czego następny wyprowadzimy sposób:

Niech będzie p, promień kuli, na któréy się znayduje troykąt z bokami a, b, c, jeźli wyobrazimy troykąt podobny do piérwszégo wykreślony na kuli, któréy promień $=1$, boki tégo troykąta wypadając z proporcyy, $p : 1 = a : \frac{a}{p} = b : \frac{b}{p} = c : \frac{c}{p}$; będą $\frac{a}{p}, \frac{b}{p}, \frac{c}{p}$.
Mamy w trygonometryi kulistéy twierdzenie: że w troykącie kulistym jakimkolwiek dostawa którégokolwiek kąta równa się różnicy między kwadratem promienia, rozmnożonym przez dostawę boku przeciwnégo, a iloczyném z promienia przez dostawy boków przyległych, podzielonéy przez mnogość ze wstaw tychże samych boków; aże kładniemy promień $=1$, będzie więc, dosta $A = \dfrac{\text{dosta}\frac{a}{p} - \text{dosta}\frac{b}{p}.\ \text{dosta}\frac{c}{p}}{\text{wst}\frac{b}{p}.\ \text{wst}\frac{c}{p}}$.

lecz dosta $v = 1 - \frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{2.3.4} -$ i t. d.; wsta $v = v - \frac{v^3}{2.3} +$ i t. d. kładąc przeto w poprzedzającém zrównaniu zamiast wstaw i dostaw ich wartości wyrażone w szeregach będzie:

$$\text{dosta } A = \frac{1 - \frac{a^2}{2p^2} + \frac{a^4}{2.3.4.p^4} - \left(1 - \frac{b^2}{2.p^2} + \frac{b^4}{2.3.4.\ p^4}\ \text{i t.d.}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2p^2} + \frac{c^4}{2.3.4.\ p^4} - \text{i t. d.}\right)}{\left(\frac{b}{p} - \frac{b^3}{2.3.p^3} - \text{i t. d.}\right)\left(\frac{c}{p} - \frac{c^3}{2.3.p^3} + \text{i t. d.}\right)}$$

wykonywając rzeczywiście wskazané mnożenie i zaniedbując wyrazy mające wymiar ilości a, b, c, większy nad czwarty wypada:

$$\text{dosta } A = \frac{1 - \frac{a^2}{2p^2} + \frac{a^4}{2.3.4p^4} - 1 + \frac{b^2}{2.p^2} - \frac{b^4}{2.3.4.p^4} - \frac{c^2}{2p^2} - \frac{b^2c^2}{4p^4} - \frac{c^4}{2.3.4.p^4}}{\frac{bc}{p^2} - \frac{b^3c}{2.3p^4} - \frac{bc^3}{2.3.p^4}}$$

$$\text{czyli dosta } A = \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2p^2} + \frac{a^4 - b^4 - c^4}{24p^4} - \frac{b^2c^2}{4p^4}}{\frac{bc}{p^2}\left(1 - \frac{b^2 - c^2}{6p^2}\right)}$$

wyraz $\left(1 - \frac{b^2 - c^2}{6p^2}\right)$, będący w mianowniku przenoszę do licznika, z wykładnikiem -1, rozwijam go na szereg podług wzoru Newtona, przez ten szereg mnożę licznik; czyli co na jedno wychodzi mnożę licznik i mianownik tego ułamku przez $1 + \frac{b^2 + c^2}{6p^2}$; i z téy mnogości w obu razach biorąc tylko wyrazy, które nie zamykają wymiarów ilości a, b, c, większych od czwartych, otrzymuję:

$$\text{dosta } A = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2p^2} + \frac{a^4-b^4-c^4}{24p^4} - \frac{b^2c^2}{4p^4} + \frac{b^4+b^2c^2-a^2b^2+b^2c^2+c^4-a^2c^2}{2p^2 \cdot 6p^2}}{\frac{bc}{p^2}}$$

przyprowadzając w liczniku dalszé wyrazy po trzech początkowych, do jednégo mianownika i mnożąc licznik i mianownik przez p^2 będzie:

$$\text{dosta } A = \frac{b^2+a^2-c^2}{2bc} + \frac{a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2a^2b^2-2a^2c^2}{24\, bcp^2}. \quad (\alpha)$$

Ponieważ w troykącie prostokréślnym dostawa kąta jednego tak się ma do promienia, jak summa kwadratów z boków obeymujących kąt dany, mniéy kwadratem boku trzeciégo, do podwóynego prostokąta z boków obeymujących kąt dany; przeto wyobrażając troykąt prostokréślny, którégo boki byłyby w długości rowné bokóm a, b, c, tróykąta kulistégo, a kąty przeciwné tym bokóm nazywając A', B', C', będzie, z przyczyny promienia założonégo$=1$;

$$\text{dosta } A' : 1 = b^2+c^2-a^2 : 2bc; \text{ ztąd dosta } A' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad (\beta)$$

podnosząc obie strony do potęgi drugiéy, wypada

$$\text{dosta}^2 A' = \frac{b^4+2b^2c^2+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+a^4}{4b^2c^2}$$

aże $\text{dosta}^2 A' = 1 - \text{wst}^2 A'$. przeto

$$1 - \text{wst}^2 A' = \frac{b^4+2b^2c^2+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+a^4}{4b^2c^2}, \text{ ztąd}$$

$$4b^2c^2 . \text{wst}^2 A' = 2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4 \quad (\gamma)$$

zrównanie zatém (α), kładąc w niém za wyraz piérwszy wartość (β), a za wyraz drugi wartość (γ), zamienia się w następné:

$$\text{dosta } A = \text{dosta } A' - \frac{4b^2c^2 . \text{wst}^2 A'}{24\, bcp^2} = \text{dosta } A' - \frac{bc\,\text{wst}^2 A'}{6p^2}. \quad (\delta)$$

Kąt prostokréślny A' mniéyszy iest od kulistégo A; trzeba więc do niego dodać kąt jakiś mały x, iżby się stał równy kulistému; co czyniąc będzie $A = A' + x$, ztąd
$\text{dosta } A = \text{dosta } (A'+x) = \text{dosta } A' . \text{dosta } x - \text{wst } A' . \text{wst } x$.
dla małości łuku x, biorąc $\text{dosta } x = 1$, $\text{wst } x = x$; będzie $\text{dosta } A = \text{dosta } A' - \text{wts } A' . x$

ztąd $x = \frac{\text{dosta } A'}{\text{wst. } A'} - \frac{\text{dosta } A}{\text{wst } A'}$, za dosta A, kładąc wartość (δ), otrzymujemy

$$x = \frac{\text{dosta } A'}{\text{wst } A'} - \frac{\text{dosta } A'}{\text{wst } A'} + \frac{bc . \text{wst}^2 A'}{6p^2\, \text{wst } A'} \quad \text{ztąd } x = \frac{bc . \text{wst } A'}{6p^2};$$

$$\text{przeto } A = A' + x = A' + \frac{bc . \text{wst } A'}{6p^2}$$

Podobnie postępując można wyprowadzić

$$B = B' + \frac{ac.\ \mathrm{wst}\ B'}{6p^2}; \qquad C = C' + \frac{ab.\ \mathrm{wst}\ C}{6p^2},$$ więc

$$A+B+C = A'+B+C' + \frac{bc.\ \mathrm{wst}\ A'}{6p^2} + \frac{ac.\ \mathrm{wst}\ B'}{6p^2} + \frac{ab.\ \mathrm{wst}\ C'}{6p^2}$$

aże $A'+B'+C' = 2^{k.p.}$, jako summa trzech kątów w troykącie prostokréślnym, przeto

$$A+B+C - 2^{k.p.} = \frac{bc.\ \mathrm{wst}\ A'}{6p^2} + \frac{ac.\ \mathrm{wst}\ B'}{6p^2} + \frac{ab.\ \mathrm{wst}\ C'}{6p^2}$$

to jest, różnica między summą trzech kątów w troykącie kulistym, a dwoma kątami prostémi jest; $\frac{bc.\ \mathrm{wst}\ A'}{6p^2} + \frac{ac.\ \mathrm{wst}\ B'}{6p^2} + \frac{ab.\ \mathrm{wst}\ C'}{6p^2}$; té zaś trzy wyrazy są równé między sobą, albowiem w troykącie prostokréślnym którego boki są a, b, c, biorąc za podstawę b, wysokość będzie $=$ c. wst A', albo $=$ a. wst C', zatém powiérżchnia tégo troykąta będzie $= \frac{bc.\ \mathrm{wst}\ A'}{2}$; albo $= \frac{ac.\ \mathrm{wst}\ C'}{2}$; biorąc zaś za podstawę bok a, wysokość będzie $=$ c. wst B'; a powiérżchnia $= \frac{ac.\ \mathrm{wst}\ B'}{2}$; więc każdy z trzech wyrazów $\frac{bc.\ \mathrm{wst}\ A'}{6p^2} + \frac{ac.\ \mathrm{wst}\ B'}{6p^2} + \frac{ab.\ \mathrm{wst}\ C'}{6p^2}$, oznacza powiérżchnią troykąta prostokréślnégo, którégo bokami są a, b, c, podzieloną przez potroyny kwadrat z promienia; nazywając tę powierżchnią $= \alpha$, poprzedzającé zrównania tak się wyrażą

$$A+B+C - 2^{k.p.} = \frac{\alpha}{3p^2} + \frac{\alpha}{3p^2} + \frac{\alpha}{3p^2} = \frac{\alpha}{p^2} \qquad (\varepsilon)$$

$$A = A' + \frac{\alpha}{3p^2}; \quad B = B' - \frac{\alpha}{3p^2}; \quad C = C' + \frac{\alpha}{p^2};$$ ztąd

$$A' = A - \frac{\alpha}{3p^2} \quad B' = B - \frac{\alpha}{3p^2} \quad C' = C - \frac{\alpha}{3p^2}; \qquad (\zeta)$$

Zrównanie (ε) pokazuje nam, że w troykącie kulistym, którégo boki są małé względem promienia kuli, na któréy się on znayduje, przewyżka summy trzech kątów kulistych nad dwa kąty prosté, równa się powierżchni troykąta prostokréślnego z bokami równie długiémi, jak boki troykąta kulistégo, podzielonéy przez kwadrat z promienia.

Ze zrównań zaś (ζ) wypada bardzo ważne następné twierdzenie: *Jeżli są dwa troykąty, jeden kulisty z bokami bardzo małémi względem promienia kuli, na któréy się znayduje, a drugi prostokréślny, którégo boki są równé w długości bokóm troykąta piérwszégo; kąty troykąta prostokréślnégo, równé są kątóm odpowiednym troykąta kulistégo zmniéyszonym trzecią częścią przewyżki summy wszystkich trzech kątów kulistych nad dwa kąty prosté, i wzajemnie kąty troykąta kulistégo równe są kątóm odpowiednym w troykącie prostokréślnym powiększonym trzecią częścią rzeczonéy przewyżki.*

Za pomocą tego twierdzenia możemy rozwiązanie troykątów kulistych małych sprowadzić do rozwiązania troykątów prostokréślnych sposobem następnym: Mając w troykącie kulistym dwa boki i kąt, lub bok i dwa kąty, lub trzy boki, i wyobrażając sobie troykąt prostokréślny, z bokami i kątami równemi bokóm i kątóm danym troykąta kulistégo, znaydziemy jego powiérżchnią, która dla małey krzywości troykąta kulistégo bardzo mało różni się od prawdziwéy jego powiérżchni; dzieląc ją przez kwadrat z promienia kuli, będziemy mieli przewyżkę summy trzech kątów kulistych nad dwa kąty proste, trzecią jéy część odjąwszy od każdégo z kątów danych troykąta kulistégo otrzymamy kąty troykąta prostokréślnégo, potém sposobem zwyczaynym znaydziemy inne boki i kąty; boki znalezioné w troykącie prostokréślnym bez żadnéy odmiany, a kąty powiększoné trzecią częścią przewyżki będą szukanémi bokami i kątami troykąta kulistégo.

101.) *W troykącie kulistym którego dwa boki nie wiele się różnią od czwartych części okręgu koła znaleść kąt między niémi zawarty.*

Niech będą trzy boki troykąta kulistégo a, b, c; kąty im przeciwné A, B, C; zakładamy że boki a i b, mało się różnią od czwartych części okręgu koła, trzeba oznaczyć kąt C zawarty między niémi. Gdyby boki a, i b, były zupełnie równé czwartym częściom okręgu koła, kąt C tyleby ważył, ile bok trzeci jemu przeciwny c, to jest gdyby był $a = 1^{k.p.}$, $b = 1^{k.p.}$; byłby też $C = c$ a ponieważ boki a, i b, mało się różnią od czwartych części okręgu koła, przeto i wartość kąta C nie wiele się różni od wartości boku c. Różnice między bokami a i b, a czwartémi częściami okręgu koła niech będą względnie w, v; różnica między kątem C a bokiem c, niech będzie x; zatém będzie $a = 1^{k.p.} + w$; $b = 1^{k.p.} + v$; $C = c + x$. — Wiadomo z trygonometryi kulistéy, że w troykącie kulistym dostawa którégokolwiek kąta, równa się różnicy między mnogością z kwadratu promienia przez dostawę boku przeciwnégo, a mnogością z promienia przez dostawy boków przyległych, podzielonéy przez mnogość ze wstaw tychże samych boków; zakładając promień $= 1$, będzie $\text{dosta } C = \dfrac{\text{dosta } c - \text{dosta } a.\ \text{dosta } b}{\text{wst } a.\ \text{wst } b}$

Za a, b, C, kładąc ich wartości założoné wypada

$$\text{dosta } (c+x) = \frac{\text{dosta } c - \text{dosta } (1^{k.p.}+w)\ \text{dosta } (1^{k.p.}+v)}{\text{wst. } (1^{k.p.}+w).\ \text{wst } (1^{k.p.}+v)} = \frac{\text{dosta. } c - \text{wst } w.\ \text{wst } v}{\text{dosta } w.\ \text{dosta. } v}$$

łuki w i v, dla ich małości biorąc za ich wstawy; a za dosta w i dosta v, kładąc ich wartości wyrażoné wszeregach $\left(1 - \frac{w^2}{1.2} - \frac{w^4}{1.2.3.4} - \text{i t. d.}\right)$ i $\left(1 - \frac{v^2}{1.2} - \frac{v^4}{1.2.3.4} - \text{i t. d.}\right)$

i w mnogości ztąd wypadającey opuszczając potęgi wyższe nad drugą, otrzymujemy

$$\text{dosta } (c+x) = \frac{\text{dosta. } c - w.\ v}{1 - \frac{1}{2}w^2 - \frac{1}{2}v^2}$$

przenosząc mianownik do licznika z wykładnikiem -1, i rozwijając go podług wzoru Newtona na szereg, będzie: $\text{dosta } (c+x) = (\text{dosta. } c - w.\ v)\left(1 + \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{2}v^2 + \text{i t. d.}\right)$

wykonywając wskazané mnożenie i opuszczając potęgi ilości w i v, wyższé nad drugą wypada: $\text{dosta } (c+x) = \left(1 + \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{2}v^2\right).\ \text{dosta: } c - w.v$

czyli $\text{dosta: } c.\ \text{dosta: } x - \text{wst: } c.\ \text{wst.: } x = \text{dosta: } c + \left(\frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{2}v^1\right)\ \text{dosta } c - w\,v$

dla małości łuku x, biorąc $\text{dosta } x = 1$, $\text{wst. } x = x$ będzie

$$x.\ \text{wst } c = wv - \left[\tfrac{1}{2}w^2 + \tfrac{1}{2}v^2\right] \text{dosta } c,\ \text{ztąd } x = \frac{wv - \left[\frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{2}v^2\right] \text{dosta } c}{\text{wst: } c}$$

zakładam $(w+v)=p$; $(w-v)=q$; te zrównania dodając jedno do drugiego i odciągając wypada $2w=p+q$; $2v=p-q$; ztąd $w=\frac{1}{2}(p+q)$; $v=\frac{1}{2}(p-q)$, przeto

$$x=\frac{\frac{1}{2}(p+q)\,\frac{1}{2}(p-q)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(p+q)^2+\frac{1}{4}(p-q)^2\right)\mathrm{dosta}.\,c}{\mathrm{wst}.\,c}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\left(p^2-q^2\right)-\frac{1}{4}p^2.\,\mathrm{dosta}:c-\frac{1}{4}q^2.\,\mathrm{dosta}:c}{\mathrm{wst}.\,c.}=\frac{p^2}{4}\left(\frac{1-\mathrm{dosta}:c}{\mathrm{wst}:c}\right)-\frac{q^2}{4}\left(\frac{1+\mathrm{dosta}:c}{\mathrm{wst}:c}\right)$$

wiemy z Algiebry że: $\frac{\mathrm{wst}:c+\mathrm{wst}:b}{\mathrm{dosta}:c+\mathrm{dosta}:b}=\mathrm{sty}\,\frac{c+b}{2}$; $\frac{\mathrm{wst}:c-\mathrm{wst}:b}{\mathrm{dosta}:b-\mathrm{dosta}:c}=\mathrm{dosty}:\frac{c+b}{2}$

kładąc w tych wzorach $b=o$, mamy $\frac{\mathrm{wst}:c}{\mathrm{dosta}:c+1}=\mathrm{sty}:\frac{c}{2}$; $\frac{\mathrm{wst}:c}{1-\mathrm{dosta}:c}=\mathrm{dosty}\frac{c}{2}$;

czyli $\frac{\mathrm{dosta}:c+1}{\mathrm{wst}:c}=\frac{1}{\mathrm{sty}\frac{1}{2}c}=\mathrm{dosty}:\frac{c}{2}$; $\frac{1-\mathrm{dosta}.\,c}{\mathrm{wst}.\,c}=\frac{1}{\mathrm{dosty}\,\frac{1}{2}c}=\mathrm{sty}\,\frac{c}{2}$

Te dwa wyrażenia wprowadzając w ostatnią wartość wyprowadzoną na ilość x otrzymujemy $x=\frac{1}{4}p^2.\,\mathrm{sty}\frac{1}{2}c-\frac{1}{4}q^2.\,\mathrm{dosty}\frac{1}{2}c$; to jest $x=\frac{1}{4}(w+v)^2.\,\mathrm{sty}\frac{1}{2}c-\frac{1}{4}(w-v)^2.\,\mathrm{dosty}\frac{1}{2}c$.

102.) Jeżeli zaś założymy, iż mamy wtym troykącie boki a, b, i kąt między niemi zawarty C, a chcemy znaleść bok trzeci c przeciwny kątowi C; będziemy podobnie rozumowali jak względem kąta C; tojest gdyby boki a, b, były równe każdy czwartey części okręgu koła, bok c tyleby ważył ile kąt C; aże boki a, b, nie wiele się różnią od czwartéy części okręgu koła, przeto i wartość boku c mało co jest mniéyszą od wartości kąta C. Różnice między bokami a, b, a czwartémi częściami okręgu koła nazywam w, v, róznicę między wartością kąta C, a wartością boku c, nazywam x; będzie więc $a=1^{k.p.}+w$; $b=1^{k.p.}+v$; $c=C-x$. — Wiemy z trygonometryi kulistéy że

$\mathrm{dosta}.\,C=\frac{\mathrm{dosta}:c-\mathrm{dosta}:a.\,\mathrm{dosta}:b}{\mathrm{wst}:a.\,\mathrm{wst}:b}$ ztąd $\mathrm{dosta}:c=\mathrm{dosta}C.\,\mathrm{wst}:a.\,\mathrm{wst}:b+\mathrm{dosta}:a.\,\mathrm{dosta}:b$;

za a, b, c, kładąc ich wartosci założone otrzymamy.

$\mathrm{dosta}\,(C-x)=\mathrm{dosta}\,C.\,\mathrm{wst}\,(1^{k.p.}+w)\,\mathrm{wst}\,(1^{k.p.}+v)+\mathrm{dosta}\,(1^{k.p.}+w)\,\mathrm{dosta}\,(1^{k.p.}+v)$

czyli $\mathrm{dosta}\,(C-x)=\mathrm{dosta}\,C.\,\mathrm{dosta}\,w.\,\mathrm{dosta}\,v+\mathrm{wst}\,w.\,\mathrm{wst}\,v$.

łuki w i v, dla ich małości, biorąc za ich wstawy, a za dosta w, i dosta. v kładąc ich wartości wyrażone wszeregach $\left(1-\frac{w^2}{1.2}-\frac{w^4}{1.2.3.4}\ \text{i t.d.}\right)$, i $\left(1-\frac{v^2}{1.2}-\frac{v^4}{1.2.3.4}\ \text{i t.d.}\right)$ i w mnogości ztąd wypadającéy opuszczając potęgi wyższe nad drugą mamy:

$$\mathrm{dosta}\,(C-x)=\mathrm{dosta}\,C\left(1-\frac{w^2}{1.2}-\frac{v^2}{1.2}\right)+wv$$

czyli $\mathrm{dosta}\,C.\,\mathrm{dosta}\,x+\mathrm{wst}\,C.\,\mathrm{wst}\,x=\mathrm{dosta}\,C-\mathrm{dosta}\,C\left(\frac{1}{2}w^2+\frac{1}{2}v^2\right)+wv$

dla małości łuku x, biorąc $\mathrm{dosta}\,x=1$, $\mathrm{wst}\,x=x$, wypada:

$$\mathrm{dosta}\,C+x.\,\mathrm{wst}\,C=\mathrm{dosta}\,C-\mathrm{dosta}\,C\left(\tfrac{1}{2}w^2+\tfrac{1}{2}v^2\right)+wv.$$

$$\text{ztąd } x=\frac{wv-\left(\frac{1}{2}w^2+\frac{1}{2}v^2\right)\mathrm{dosta}\,C}{\mathrm{wsta}\,C}$$

przyszliśmy więc do podobnego wyrażenia, jakieśmy otrzymali szukając kąta C z tą tylko różnicą, iż zamiast boku c, mamy kąt C; robiąc więc podobne przerobienia, jakieśmy tam odbywali, otrzymamy w końcu $x=\left(\frac{w+v}{2}\right)^2.\,\mathrm{sty}\,\frac{C}{2}-\left(\frac{w+v}{2}\right)^2.\,\mathrm{dosty}\frac{C}{2}$; którą wartość odjąwszy od wartości kąta C, znaydziemy wartość boku c.

Przykład rozwiązania troykąta kulistego.

Niech będzie troykąt kulisty ABC, w którym mamy bok BC=6075,90006 sążniom; kąt B=75°. 39′. 29″, 83; C=63°. 43′. 33″, 82.

103.) 1^od^ *Rozwiązując go jak troykąt prostokréślny.*

kąt B=	75°. 39′. 29″, 83.
kąt C=	63°. 43′. 33″, 82.
summa kątów (B+C)=	139°. 23′. 3″, 65.
przeto kąt A=	40°. 36′. 56″, 35.

wst A: wst C= BC : BA.		wst A: wst B= BC : AC.	
log. BC=	3,7836106	log. BC=	3,7836106
log. wst. C=	9,9526413	log. wst B =	9,9862501
dop. log. wst A=	0,1864313	dop. log. wst A =	0,1864313
log. AB=	3,9226832	log. AC=	3,9562920
log. 8369,1=	3,9226788	log. 9042,5=	3,9562885
	44		35.

wypada bok AB= 8369,18 sążniom; bok AC=9042,57 sążniom.

104.) 2^re^ *Rozwiązując sposobem zwyczaynym.*

Dla znalezienia wartości boku BC w stopniach układam następną proporcyą P : P″=BC : BC″.

log. BC	=	3,7836106
log. P″	=	5,3144251
dop. log. P	=	3,4859399
log. BC″	=	2,5839756
log. 383″,68	=	2,5839692
		64

mamy przeto
BC″=383″,6856= 6′. 23″,68
½BC″=191″,8424= 3′. 11″,84.

Na znalezienie boków AC i AB, mamy w trygonometryi wzory następne:

wst ½ (B+C) : wst ½ (B—C) = sty ½ BC : sty ½ (AC—AB).
dosta ½ (A+C) : dosta ½ (B—C) = sty ½ BC : sty ½ (AC+AB).

B=	75°. 39′. 29″, 83.	B=	75°. 39′. 29″, 83.
C=	63°. 43′. 33″, 82.	C=	63°. 43′. 33″, 82.
B+C=	139°. 23′. 3″, 65.	B—C=	11°. 55′. 56″, 04.
½ (B+C)=	69°. 41′. 31″, 825.	½ (B—C)=	5°. 57′. 58″, 005.
log. sty ½ BC =	6,9685197	log. sty. ½ BC=	6,9685197
log. wst ½ (B—C) =	9,0167037	log. dosta ½ (B—C)=	9,9976412
dop. log. wst ½ (B+C)=	0,0278706	dop. log. dosta ½ (B+C)=	0,4595907
log. sty ½ (AC—AB)=	6,0131740	log. sty ½ (AC+AB)=	7,4257516
log. sty 0′,21″ =	6,0077942	log. sty 9′. 9″=	7,4251482
	53798		6034

wypada ½ (AC″—AB″)=0′. 21″, 2664. ½ (AC″+AB″)=9′. 9″, 7632
ztąd AC″= 9′. 31″, 0296 AB″= 8′. 48″, 4968

Dla znalezienia liczby sążni zamykających się w bokach AC i AB, wyrażonych przez stopnie, układamy następné proporcye:

$P'' : P = AC'' : AC.$	$P'' : P = AB'' : AB.$
log. $AC'' = 2{,}7566586$	log. $AB'' = 2{,}7230424$
log. $P = 6{,}5140601$	log. $P = 6{,}5140601$
dop. log. $P' = 4{,}6855749$	dop. log. $P'' = 4\,6855749$
log. $AC = 3{,}9562936$	log. $AB = 3{,}9226774$
log. $9042{,}6 = 3{,}9562933$	log. $8369{,}0 = 3{,}9226736$

przeto będzie $AC = 9042{,}60$ sążniom; $AB = 8369{,}07$ sążniom.

Kąt A otrzymamy z proporcyi wst AB'' : wst AC'' = wst C : wst A.

log. wst $C = 9{,}9526413$
log. wst $BC'' = 7{,}2695498$
dop. log. wst $AB'' = 2{,}5913834$
log wst $A = 9{,}8135745$
log. wst $(40°.\ 36'.\ 50'') = 9{,}8135531$ więc kąt $A = 40°\ 36'.\ 58'',\ 69$
214

105.) 3cie *Rozwiązując podług Leżandra*

Powiérzchnia troykąta kulistégo ABC, uważając go jak prostokreślny jest

$$= \frac{BC^2.\ \text{wst}\ B.\ \text{wst}\ C}{2.\ \text{wst}\ (B+C)}$$

log. $BC = 3{,}7836106$
log. $BC^2 = 7{,}5672212$
log. wst $B = 9{,}9862501$
log. wst $C = 9{,}9526413$
dop. log. $2 = 9{,}6989700$
dop. log. wst $(B+C) = 0{,}1864313$
log. powierzchni $= 7{,}3915139$

Przewyżka kulista, to jest różnica między summą wszystkich trzech kątów kulistych a dwoma kątami prostémi, jest $=$ powiérzchni $ABC \times \frac{P''}{P^2}$

log. $P = 6{,}5140601\overline{3}$
log. $P^2 = 3{,}0281203$
dop. log. $P^2 = 6{,}9718797$
log. $P'' = 5{,}3144251$
log. powierz. $= 7{,}3915139$ więc szukana przewyżka $= 0'',4762$
log. przewyżki $= 9{,}6778187$ $\frac{1}{3}$ przewyżki $= 0'',1587$
log. $0{,}47623 = 9{,}6778167$

Odeymując trzecią część przewyżki kulistéy od kątów troykąta kulistégo, otrzymamy kąty, które nazywać można poprawionémi, to jest kąty troykąta prostokreślnego i tak będzie
$B = 75°.\ 39'.\ 29'',83 - 0'',\ 159 = 75°.\ 39'.\ 29'',\ 671$
$C = 63°.\ 43'.\ 33'',\ 82 - 0'',\ 159 = 63°.\ 43'.\ 33'',\ 661$
$A = 2^{k.p.} - (B+C) = 2^{k.p.} - 139°.\ 23'.\ 3'',332 = 40°.\ 36'.\ 56'',\ 668$

Z takowych kątów poprawionych i z boku wiadomégo BC, znaydziemy boki AB i AC, za pomocą trygonometryi płaskiéy przez proporcye:

wst A : wst C = BC : AB. wst A : wst B = BC : AC.

log. BC = 3,7836106
log. wst C = 9,9526411
dop. log. wst A = 0,1864309
log. AB = 3,9226822
log. 8369,1 = 3,9226788
34

log. BC = 3,7836106
log. wst B = 9,9862500
dop. log. wst A = 0,1864309
log. AC = 3,8562911
log. 9042,5 = 3,9562885
26

mamy zatém bok AB = 8369,165 sążniów; bok AC = 9042,554 sążniów

106.) 4[te] *Rozwiązując podług Delambrá.*

Bok BC sprowadzam do cięciwy. Różnica między bokiem BC, a jego cięciwą jest $= \frac{BC^3}{24 P^2}$

log. BC = 3,7836106
log. BC^3 = 1,3508318 +10
dop. log. 24 = 8,6197787 −10
dop. log. P^2 = 6,9718797 −10
6,9525003 −10
log. 0,00087 = 6,9424991 −10

Różnica między bokiem BC, a jego cięciwą jest = 0,00087
bok BC = 6075,90006
więc cięciwa BC = 6075,89919

Rozwiązuję troykąt kulisty ABC sposobem troykąta prostokréślnégo i znayduję boki AB i AC; szukam potém wartości tych boków w sekundach przez proporcye

P : P″ = AB : AB″;
log. AB = 3,9226831
log. P″ = 5,3144251
dop. log. P = 3,4859399
log. AB″ = 2,7230481
log. 528″,50 = 2,7230450
31

P : P″ = AC : AC″
log. AC = 3,9562920
log. P″ = 5,3144251
dop. log. P = 3,4859399
log. AC″ = 2,7566570
log. 573″,02 = 2,7566513
57

więc AB″ = 528″,5038; AC″ = 571,0275.

Różnica między kątem kulistym C, a kątem odpowiednym między cięciwami

$$\text{jest} = \left[\frac{AC''+BC''}{4}\right]^2 . \frac{\text{sty } \frac{1}{2} C}{P''} - \left[\frac{AC''-BC''}{4}\right]^2 . \frac{\text{dosty } \frac{1}{2} C.}{P''}$$

$\frac{1}{4}(AC''+BC'') = \frac{1}{4}(571'',0275+383'',6856) = 238'',6783$
$\frac{1}{4}(AC''-BC'') = \frac{1}{4}(571'',0275-383'',6856) = 46'',8355$
C = 63°. 43′. 33″, 82, $\frac{1}{2}$C = 31°. 51′. 46″, 91

log. $\frac{1}{4}(AC''+BC'')$ = 2,3778127
log. $(\frac{1}{4}(AC''+BC''))^2$ = 4,7556257
log. sty $\frac{1}{2}$ C = 9,7934763
dop. log. P″ = 4,6855749
9,2346768
log. 0″,17166 = 9,2346691

log. $\frac{1}{4}(AC''-BC'')$ = 1, 6705748
log. $(\frac{1}{4}(AC''-BC''))^2$ = 3, 3411496
log. dosty $\frac{1}{2}$ C = 10, 2065237
dop. log. P″ = 4, 6855748
8, 2332482
log. 0″,017109 = 8, 2332246

przeto różnica szukana jest = 0″,17166 — 0″,017109 = 0″,15455
a kąt C między cięciwami będzie = 63°. 43′. 33″, 82 — 0″,15455 = 63°.43′.33″,665

Różnica między kątem kulistym B, a kątem odpowiednym między cięciwami

$$\text{jest} = \left[\frac{AB''+BC''}{4}\right]^2 . \frac{\text{sty } \frac{1}{2} B}{P''} - \left[\frac{AB''-BC''}{4}\right]^2 . \frac{\text{dosty } \frac{1}{2} B}{P''}$$

$\frac{1}{4}(AB''+BC'') = \frac{1}{4}(528'',5038+383'',6856) = 228'',0474$
$\frac{1}{4}(AB''-BC'') = \frac{1}{4}(528'',5038-383'',6856) = 36'',2046$

$B=75°.39'.29'',83.$ $\quad \frac{1}{2}B=37°.49'.44'',915$

log. $\frac{1}{4}(AB''+BC'') = 2,3580250$	log. $\frac{1}{4}(AB''-BC'') = 1,5587633$
log. $(\frac{1}{4}(AB''+BC''))^2 = 4,7160500$	log. $(\frac{1}{4}(AB''-BC''))^2 = 3,1175266$
log. sty $\frac{1}{2}B = 9,8901384$	log. dosty $\frac{1}{2}B = 10,1098616$
dop. log. $P'' = 4,6855749$	dop. log. $P'' = 4,6855749$
$9,2917633$	$7,9129631$
log. $0''19577 = 9,2917461$	log. $0'',008184 = 7,9129603$

więc szukana rożnica $= 0''19577 - 0'',008184 = 0'',187586$

przeto kąt B między cięciwami będzie $= 75°.39'.29'',83 - 0''1876 = 75°.39'.29'',6424$

ztąd kąt $A = 2^{k.p.} - (B+C) = 2^{k.p.} - 139°.23'.3'',308 = 40°.36'.56'',692$

Mamy teraz do rozwiązania troykąt prostokréślny ABC, z cięciw złożony, w którym wszystkie kąty płaskie i bok BC są wiadome; na znalezienie w nim boków AC i BC, ułożymy proporcye:

AB

wst A : wst B = BC : AC	wst A : wst C = BC : AB
log. BC $= 3,7836106$	log. BC $= 3,7836106$
log. wst B $= 9,9862500$	log. wst. C $= 9,9526411$
dop. log. wst A $= 0,1864304$	dop. log. wst A $= 0,1864304$
log. AC $= 3,9562910$	log. AB $= 3,9226821$
log. $9042,5 = 3,9562885$	log. $8369,1 = 3,9226788$
25	33

przeto cięciwa AC $= 9042,554$; cięciwa AB $= 8369,165$

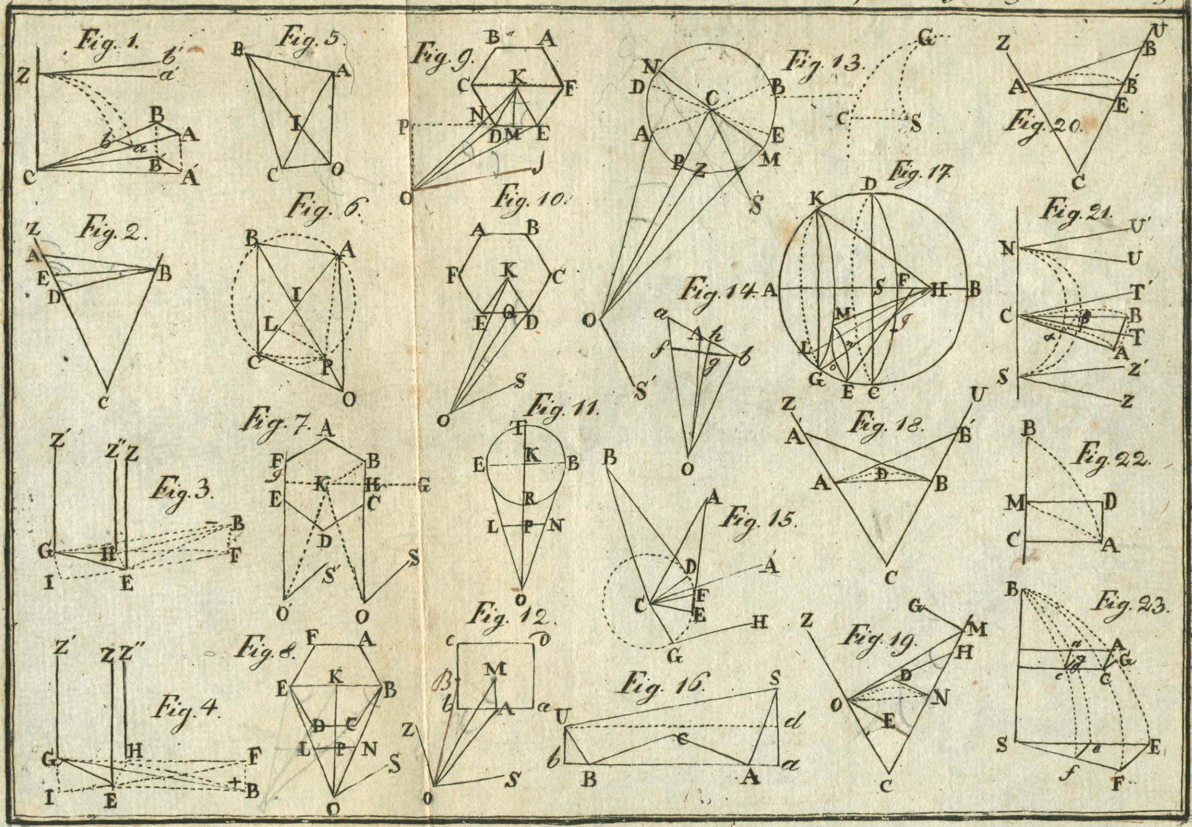
Różnica między łukiem AC i jego cięciwą jest $= \frac{AC^3}{24.P^2}$.

Różnica między łukiem AB, i jego cięciwą jest $= \frac{AB^3}{24.P^2}$.

log. AC $= 3,9562911$	log. AB $= 3,9226822$
log. $AC^3 = 1,8688733$	log. $AB^3 = 1,7680466$
dop. log. $24 = 8,6197887$	dop. log. $24 = 8,6197887$
dop. log. $P^2 = 6,9718797$	dop. log. $P^2 = 6,9718797$
$7,4605417$	$7,3597150$
log. $0,0028876 = 7,4605370$	log. $0,0022893 = 7,3597027$

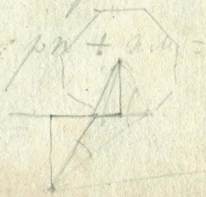
zatém łuk AC $= 9042,5583 + 0,00288 = 9042,5566$ sążniom

łuk AB $= 8369,16521 + 0,00228 = 8369,1675$.



NM : OP = pR : nm

NM + OP : pn + nm =



nM : MN = OP : pn

nM + OP : mN + np = nM : MN

pM = nM M