Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica
Wydział Matematyki Stosowanej
Katedra Równań Różniczkowych

Rozprawa doktorska

Komutatory dyfeomorfizmów klasy C^r

Jacek Lech

Promotor dr hab. T. Rybicki

Kraków 2007

Dziękuję mojemu promotorowi
prof. dr hab. Tomaszowi Rybickiemu
za pomoc w napisaniu pracy

Spis treści

Wstęp

W latach 60-tych ubiegłego stulecia Anderson, Chernawski, Kirby i Edwards pokazali, że grupa wszystkich homeomorfizmów na gładkiej rozmaitości homotopijnych z Id jest grupą prostą. Wówczas Smale postawił hipotezę, że tak samo jest w przypadku grupy $\mathrm{Diff}^r_c(M)_0$ dyfeomorfizmów klasy C^r dyfeotopijnych z Id przez C^r-dyfeotopie o zwartych nośnikach, $r = 0, 1, \ldots, \infty$.

W 1970 r. Epstein [6] pokazał, że wystarczy w tym celu udowodnić doskonałość grupy $\mathrm{Diff}^r_c(M)_0$, gdyż jej komutator jest grupą prostą. Wniosek ten jest prawdziwy także w wielu innych przypadkach, jeśli jest spełniony warunek tranzytywności i rozważamy homeomorfizmy o zwartych nośnikach.

W 1971 r. Herman [9] udowodnił, wykorzystując twierdzenie Sergeraeta o funkcji uwikłanej [29], że grupa $\mathrm{Diff}^\infty(T^n)_0$ jest doskonała i prosta, gdzie T^n jest n-wymiarowym torusem. Następnie Thurston [31] rozszerzył ten rezultat na przypadek dowolnej rozmaitości. Ideą dowodu było wykorzystanie własności homologicznych grupy dyfeomorfizmów. Równocześnie odkryte zostały pewne związki między homologiami grup dyfeomorfizmów i własnościami topologicznymi przestrzeni klasyfikujących Haefligera dla foliacji, gdzie zostało zastosowane wspomniane twierdzenie. Opis wymienionych faktów można znaleźć w [4] i [31].

Inną metodę zaprezentował Mather. W pracach [17] i [18] pokazał, że grupa $\mathrm{Diff}^r_c(M)_0$ jest doskonała dla r skończonego, $r \neq n + 1$, gdzie n jest wymiarem rozmaitości M. Epstein [7] rozszerzył ten dowód na przypadek $r = \infty$. W obu przypadkach wykorzystane zostało twierdzenie Schaudera-Tichonowa o punkcie stałym. Dla $r = n + 1$ Mather [19], [20] podał argumenty sugerujące, że odpowiedź jest negatywna, jednak problem pozostaje otwarty. Uwagi na ten temat przedstawimy w podrozdziale 3.6. W przypadku $r = 0$, czyli dla grupy homeomorfizmów dowód przedstawił Mather [16], używając własności fragmentacji dla homeomorfizmów [5].

Metoda Mathera nie wymaga takich zaawansowanych środków jak dowód Hermana-Thurstona, jednak składa się na nią wiele subtelnych argumentów. Istotne jest tutaj zastosowanie operatorów rozszerzania i zwijania, co powoduje, że nie można jej użyć w przypadku grup ze strukturami geometrycznymi takimi jak formy symplektyczne i elementy objętości. Natomiast wydaje się, że jest to możliwe w przypadku grupy kontaktomorfizmów.

Dowody dla grupy C^∞-symplektomorfizmów i C^∞-dyfeomorfizmów zachowujących objętość zostały przedstawione przez Banyagę [3] i Thurstona [30] przy użyciu metody Hermana-Thurstona. Grupy homologii w tych przypadkach nie są trywialne, lecz wyrażają się poprzez pewne niezmienniki topologiczne.

W omawianym zagadnieniu bada się także grupy dyfeomorfizmów bez założenia o zwartości nośników. Przypadki te wymagają użycia zupełnie innych metod niż wspomniane powyżej. Istotny wkład wniosła tutaj McDuff, która udowodniła doskonałość grupy $\mathrm{Diff}^r(M)_0$ dyfeomorfizmów C^r-dyfeotopijnych z Id, gdzie $r = 0, 1, \ldots, \infty$. Podała także warunki opisujące jak wygląda pierwsza grupa homologii grupy C^∞-dyfeomorfizmów zachowujących objętość. W szczególności jest ona trywialna dla $M = \mathbb{R}^n$ i $n \geq 3$. Rezultaty te zostały przedstawione w pracach [21], [22], [23] i opierają się na rozważaniach zaprezentowanych przez Segala [28]. Metoda ta została również użyta w [11] do badania doskonałości innych grup tego typu oraz związku między nimi a grupami dyfeomorfizmów o zwartych nośnikach.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie zagadnienia doskonałości grup dyfeomorfizmów o zwartych nośnikach na dwóch ważnych typach rozmaitości, tzn. rozmaitości z foliacją i rozmaitości z narożami. Wykorzystywane dowody opierają się na metodzie Mathera.

Na rozmaitości z foliacją rozważamy grupę $\mathrm{Diff}^r_c(M, \mathcal{F})_0$ dyfeomorfizmów działających wzdłuż liści. Przypadek $r = \infty$ został udowodniony przez Rybickiego [25] z wykorzystaniem koncepcji Hermana-Thurstona. Ponadto przypadek $r < k$ jest prostym wnioskiem z dowodu Mathera [18], gdzie k jest wymiarem foliacji $\mathcal{F}$. Dla $r \geq k$ problem jest trudniejszy, gdyż jego pozytywne rozwiązanie wymaga obniżenia gładkości odwzorowań w kierunku transwersalnym do liści.

Prezentowana praca wprowadza klasę $C^{r,s}$-odwzorowań i przedstawia dowód doskonałości grupy $\mathrm{Diff}^{r,s}_c(M, \mathcal{F})_0$ dla $r - s > k + 1$. Wynik ten, opublikowany w [12], wymaga zbadania wspomnianego typu odwzorowań oraz opracowania dowodów własności topologicznych grupy $\mathrm{Diff}^{r,s}_c(M, \mathcal{F})_0$. W przypadku Lematu 2.16 jest to spowodowane faktem, że dla rozmaitości z foliacją nie istnieje odwzorowanie exp (porównaj z [4]). Natomiast dowód Lematu 2.15 można przeprowadzić jak w [15] lub [24], jednak wymagałoby to zdefiniowania pojęcia (r, s)-żetów, co dodatkowo komplikowałoby rozumowanie. Stąd została przedstawiona jego inna wersja.

Odwzorowania używane w konstrukcji operatora Mathera są zgodne ze strukturą foliacji co pozwala na przeformułowanie metody. Zauważmy także, że doskonałość grupy na rozmaitości z foliacją jest związana z doskonałością grupy na zwykłej rozmaitości. Na końcu rozdziału trzeciego podane zostały wnioski mogące w ten sposób prowadzić do rozwiązania przypadku $r = n + 1$.

Drugim rozważanym zagadnieniem jest doskonałość grupy dyfeomorfizmów na rozmaitości z narożami. Przedstawiony został dowód dla $r = \infty$. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla $r > n + 1$. Oba przypadki są opisane w [13].

Operator Mathera można zastosować jedynie wzdłuż krawędzi rozmaitości. Stąd konieczne było użycie dodatkowo innej metody, nazwanej rozkładem regularnym. Dowód polega na połączeniu obu rozwiązań i zachodzi dla rozmaitości wymiaru $n \geq 2$. Dla $n = 1$ rozważana grupa nie jest doskonała, co wynika z [8].

Należy dodać, że rodzina rozważanych problemów jest o wiele szersza niż wspomniane powyżej. Przykładowo znane są wyniki dotyczące doskonałości grup homeomorfizmów Lipschitzowskich [1], [2], dyfeomorfizmów zachowujących punkt [8], czy też homeomorfizmów ekwiwariantnych [27]. Wiele z nich to jedynie częściowe rezultaty. W szczególności pozostaje otwarty problem grup C^r-symplektomorfizmów i C^r-kontaktomorfizmów w przypadku gdy r jest skończone. Dokładniejsze omówienie tych kwestii przekracza ramy niniejszego opracowania.

Praca składa się z czterech rozdziałów. Pierwszy zawiera podstawowe informacje, wykorzystywane w dalszej części. Przedstawione zostały własności modułów ciągłości, oszacowania seminorm dla przypadku zwykłej rozmaitości, a także własności topologiczne grup dyfeomorfizmów na $\mathbb{R}^n$.

Rozdziały drugi i trzeci dotyczą doskonałości pewnych grup dyfeomorfizmów na rozmaitości z foliacją. Najpierw zdefiniowane zostały odwzorowania klasy $C^{r,s}$ oraz pokazano ich podstawowe własności. Następnie udowodniono, że grupa $\mathrm{Diff}_c^{r,s}(M, \mathcal{F})$ jest grupą topologiczną oraz własność fragmentacji dla rozmaitości z foliacją. Informacje te stanowią przygotowanie do dowodu Twierdzenia 3.2.

Rozdział trzeci opisuje dowód Twierdzenia 3.2 podzielony na kilka etapów. Najważniejszymi są konstrukcja operatora zwijania oraz operatora Mathera. Dowód Lematu 3.6 w podrozdziale 3.3 nie jest potrzebny do zrozumienia pozostałych części. Na końcu rozdziału znajdują się uwagi dotyczące przypadku $r = n + 1$.

W rozdziale czwartym przedstawiono dowód doskonałości składowej spójnej identyczności grupy C^∞-dyfeomorfizmów o zwartym nośniku na rozmaitości z narożami. Przypomniane zostały podstawowe definicje i opisane potrzebne własności. Następnie przeprowadzono konstrukcję operatora Mathera [7] i zaprezentowano rozumowanie dotyczące rozkładu regularnego. Podsumowaniem tej części jest dowód głównego twierdzenia. Uzyskany wniosek został przedstawiony w Twierdzeniu 4.5. Ostatni podrozdział opisuje przypadek rozmaitości z narożami, która ma wierzchołki.

W pracy używane są standardowe oznaczenia na zbiory liczbowe $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$. Przez $|x|$ będziemy rozumieć normę elementu x w $\mathbb{R}^n$. Symbol n jest zarezerwowany na oznaczenie wymiaru rozważanej przestrzeni, a k na wymiar foliacji lub wymiar krawędzi rozmaitości. Ponadto litery r, s służą do opisu klasy odwzorowań.

W tekście pojawia się wiele różnych przestrzeni odwzorowań i dyfeomorfizmów. Są one oznaczane według schematu $C_c^r(M,M)$, $\mathrm{Diff}_K^{r,\alpha}(M)_0$, gdzie indeks górny oznacza klasę rozważanych odwzorowań, symbol 0 - składową spójną przestrzeni w danej topologii, a c i K - przestrzenie odwzorowań o nośnikach odpowiednio zwartych i zawartych w K. Konkretne definicje są podane w miarę pojawiania się poszczególnych przestrzeni.

1. Podstawowe wiadomości

1.1. Moduły ciągłości i odwzorowania klasy $C^{r,\alpha}$

Definicja 1.1. Funkcję $\alpha : [0,\infty) \to [0,\infty)$ nazywamy *modułem ciągłości* jeśli jest ciągła, silnie rosnąca, $\alpha(0) = 0$ oraz $\alpha(st) \leq s\alpha(t)$ dla każdego $s \geq 1$ i $t \geq 0$.

Definicja 1.2. Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi. Mówimy, że odwzorowanie $f : X \to Y$ jest *α-ciągłe* jeśli istnieją stałe $C > 0$ i $\delta > 0$ takie, że dla $x, y \in X$ warunek $d_X(x,y) \leq \delta$ pociąga za sobą nierówność

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq C\alpha(d_X(x,y)).$$

Ponadto mówimy, że f jest *lokalnie α-ciągłe* jeśli dla każdego punktu $x \in X$ istnieje otoczenie U tego punktu takie, że $f|_U$ jest α-ciągłe.

Zauważmy, że jeśli moduły ciągłości α, β pokrywają się w otoczeniu zera, to α-ciągłość jest równoważna β-ciągłości. Ponadto prawdziwa jest następująca własność.

Własność 1.3. *Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi i niech α będzie modułem ciągłości. Jeśli odwzorowanie $f : X \to Y$ jest α-ciągłe, to jest α-ciągłe po zamianie metryk na równoważne.*

Dowód. Niech d_1, d_2 oraz ϱ_1, ϱ_2 będą parami metryk równoważnych odpowiednio w przestrzeni X i Y, tzn. zachodzą oszacowania

$$\begin{aligned} m_d d_1(x_1,x_2) \leq d_2(x_1,x_2) \leq M_d d_1(x_1,x_2), &\quad x_1,x_2 \in X, \\ m_\varrho \varrho_1(y_1,y_2) \leq \varrho_2(y_1,y_2) \leq M_\varrho \varrho_1(y_1,y_2), &\quad y_1,y_2 \in Y, \end{aligned}$$

dla pewnych stałych $m_d, M_d, m_\varrho, M_\varrho > 0$. Możemy założyć, że $m_d, m_\varrho < 1$ i $M_d, M_\varrho > 1$.

Jeśli f jest α-ciągłe względem metryk d_1, ϱ_1 ze stałymi $C_1 > 0$, $\delta_1 > 0$, to dla $x_1, x_2 \in X$ takich, że $d_2(x_1,x_2) \leq \delta_2 = \delta_1 m_d$ mamy

$$\begin{aligned} \varrho_2(f(x_1), f(x_2)) &\leq M_\varrho \varrho_1(f(x_1), f(x_2)) \leq M_\varrho C_1 \alpha(d_1(x_1,x_2)) \\ &\leq M_\varrho C_1 \alpha\left(\frac{1}{m_d} d_2(x_1,x_2)\right) \leq \frac{M_\varrho}{m_d} C_1 \alpha(d_2(x_1,x_2)). \end{aligned}$$

Przyjmujemy $C_2 = \frac{M_\varrho}{m_d} C_1$. □

Przedstawimy teraz własności modułów ciągłości, które zostaną wykorzystane w dalszych rozważaniach.

Lemat 1.4. *Niech X będzie zwartym, wypukłym podzbiorem przestrzeni unormowanej, a Y przestrzenią metryczną. Jeśli $f : X \to Y$ jest odwzorowaniem ciągłym, to istnieje moduł ciągłości α taki, że odwzorowanie f jest α-ciągłe.*

Dowód. Definiujemy funkcję
$$\tilde{\alpha}(t) = \sup_{|x_1 - x_2| \le t} d(f(x_1), f(x_2)).$$
Jest ona dobrze określona, bo zbiór X jest zwarty. Ponadto jest niemalejąca, $\tilde{\alpha}(0) = 0$ oraz
$$d(f(x_1), f(x_2)) \le \tilde{\alpha}(|x_1 - x_2|)$$
dla każdego $x_1, x_2 \in X$. Pokażemy, że funkcja $\tilde{\alpha}$ jest ciągła.

Niech $t_1 > 0$ i $\varepsilon > 0$. Z ciągłości f i ze zwartości X istnieje $\delta > 0$ takie, że dla $x_1, x_2 \in X$, $|x_1 - x_2| \le \delta$ mamy $d(f(x_1), f(x_2)) \le \frac{\varepsilon}{2}$.

Wybieramy $t_2 > 0$ takie, że $|t_1 - t_2| \le \delta$. Dla $x_1, x_2 \in X$, $|x_1 - x_2| \le t_1$ istnieją $x_1', x_2' \in X$ takie, że $|x_1' - x_2'| \le t_2$ oraz $|x_1 - x_1'| \le \delta$ i $|x_2 - x_2'| \le \delta$. Stąd mamy oszacowanie
$$\begin{aligned} d(f(x_1), f(x_2)) &\le d(f(x_1), f(x_1')) + d(f(x_1'), f(x_2')) + d(f(x_2'), f(x_2)) \\ &\le \varepsilon + d(f(x_1'), f(x_2')). \end{aligned}$$
Biorąc supremum po obu stronach otrzymujemy $|\tilde{\alpha}(t_1) - \tilde{\alpha}(t_2)| \le \varepsilon$.

Skonstruujemy moduł ciągłości α taki, że
$$d(f(x_1), f(x_2)) \le \tilde{\alpha}(|x_1 - x_2|) \le \alpha(|x_1 - x_2|),$$
czyli taki, że f jest α-ciągłe.

Ze zwartości X istnieje $B > 0$ i $t_0 > 0$ takie, że $\tilde{\alpha}(t) = B$ dla $t \ge t_0$. Bierzemy ciąg $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ spełniający warunek $\tilde{\alpha}(t_i) = \frac{B}{2^i}$, $i \in \mathbb{N}$. Definiujemy funkcję
$$\alpha(t) = \begin{cases} t + B & t \in [t_0, \infty) \\ t + \frac{B}{2^i} + t \sum_{l=1}^{i} \frac{B}{2^l t_l} & t \in [t_{i+1}, t_i) \\ 0 & t = 0 \end{cases}.$$

Jest ona ciągła i silnie rosnąca. Pozostało sprawdzić warunek $\alpha(st) \le s\alpha(t)$. Bierzemy $s \ge 1$ i $t > 0$. Zakładamy, że $t \in [t_{j+1}, t_j)$ i $st \in [t_{i+1}, t_i)$ dla pewnych $i, j \in \mathbb{N}$, $i \le j$. Wówczas
$$\frac{B}{2^i} + st \sum_{l=1}^{i} \frac{B}{2^l t_l} = \frac{B}{2^j} + \sum_{l=i+1}^{j} \frac{B}{2^l} + st \sum_{l=1}^{i} \frac{B}{2^l t_l} \le \frac{B}{2^j} + st \sum_{l=1}^{j} \frac{B}{2^l t_l},$$
bo $t_j < \ldots < t_{i+1} \le st$. Stąd
$$\alpha(st) = st + \frac{B}{2^i} + st \sum_{l=1}^{i} \frac{B}{2^l t_l} \le st + s\frac{B}{2^j} + st \sum_{l=1}^{j} \frac{B}{2^l t_l} = s\alpha(t).$$
Analogicznie postępujemy, gdy $st \in [t_0, \infty)$. □

Lemat 1.5. *Niech X, Y, Z będą przestrzeniami metrycznymi. Jeśli odwzorowanie $f : X \to Y$ jest α-ciągłe i $g : Y \to Z$ jest β-ciągłe, to złożenie $g \circ f : X \to Z$ jest $\beta \circ \alpha$-ciągłe.*

Dowód. Niech $C_f, C_g > 0$ i $\delta_f, \delta_g > 0$ będą stałymi z definicji α i β-ciągłości odpowiednio dla f i g. Zakładamy, że $C_f \geq 1$.

Wybieramy $\delta \leq \delta_f$ takie, że $C_f \alpha(\delta) \leq \delta_g$. Wówczas dla $d_X(x_1, x_2) \leq \delta$ mamy

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C_f \alpha(d_X(x_1, x_2)) \leq C_f \alpha(\delta) \leq \delta_g.$$

Teraz możemy zapisać

$$\begin{aligned} d_Z((g \circ f)(x_1), (g \circ f)(x_2)) &\leq C_g \beta(d_Y(f(x_1), f(x_2))) \\ &\leq C_g \beta(C_f \alpha(d_X(x_1, x_2))) \\ &\leq C_g C_f (\beta \circ \alpha)(d_X(x_1, x_2)). \end{aligned}$$

□

Uwaga 1.6. Dla dowolnego $t \leq s$ mamy $\alpha(s) = \alpha(\frac{s}{t} t) \leq \frac{s}{t} \alpha(t)$. Stąd funkcja $\frac{t}{\alpha(t)}$ jest niemalejąca i odwzorowanie Id jest α-ciągłe względem każdego modułu ciągłości α. Ponadto dowolne odwzorowanie jest Id-ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy spełnia warunek Lipschitza.

Z tych dwóch faktów i z Lematu 1.5 wynika, że funkcja spełniająca warunek Lipschitza jest α-ciągła względem każdego modułu ciągłości α. W szczególności funkcja klasy C^1 jest lokalnie α-ciągła dla każdego α.

Lemat 1.7. *Niech $X, Y_1, \ldots, Y_l$ będą przestrzeniami metrycznymi i niech $f_i : X \to Y_i$ będą funkcjami α-ciągłymi, $i = 1, \ldots, l$. Określamy metrykę produktową d_Y na $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_l$ wzorem*

$$d_Y(x, y) = \sum_{i=1}^{l} d_{Y_i}(x_i, y_i),$$

dla $x, y \in Y$. Wówczas zestawienie $f = (f_1, \ldots, f_l) : X \to Y$ jest α-ciągłe. Z Własności 1.3 wniosek pozostaje prawdziwy po zamianie metryk na równoważne.

Dowód. Przyjmując $\delta \leq \min\{\delta_{f_i} : i = 1, \ldots, l\}$, dla $d_X(x, y) \leq \delta$ mamy

$$d_Y(f(x), f(y)) = \sum_{i=1}^{l} d_{Y_i}(f_i(x), f_i(y)) \leq \left(\sum_{i=1}^{l} C_{f_i} \right) \alpha(d_X(x, y)),$$

gdzie $C_{f_i} > 0$, $\delta_{f_i} > 0$ są stałymi z definicji α-ciągłości dla odwzorowania f_i, $i = 1, \ldots, l$. □

Lemat 1.8. *Niech X będzie przestrzenią metryczną i niech $V_1, \ldots, V_l, W$ będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi. Ponadto zakładamy, że odwzorowania $g_i : X \to V_i$, $i = 1, \ldots, l$, są α-ciągłe o ograniczonych obrazach i $f : V_1 \times \ldots \times V_l \to W$ odwzorowaniem l-liniowym. Wówczas $f \circ (g_1, \ldots, g_l)$ jest α-ciągłe.*

Dowód. Odwzorowanie f jest l-liniowe, więc jest lokalnie Lipschitzowskie. Ponadto zbiór $\overline{\mathrm{Im}(g_1) \times \ldots \times \mathrm{Im}(g_l)}$ jest zwarty. Stąd f jest Lipschitzowskie. Z Uwagi 1.6 wynika, że f jest Id-ciągłe. Korzystając z Lematów 1.7 i 1.5 otrzymujemy tezę. □

Lemat 1.9. *Niech X będzie przestrzenią metryczną, a Y przestrzenią unormowaną. Jeśli $f_1, f_2 : X \to Y$ są α-ciągłe oraz $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, to odwzorowanie $f = a_1 f_1 + a_2 f_2 : X \to Y$ jest α-ciągłe.*

Dowód. Przy oznaczeniach jak wcześniej ustalamy $\delta \leq \min\{\delta_{f_1}, \delta_{f_2}\}$. Wówczas

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\leq |a_1| \|f_1(x) - f_1(y)\| + |a_2| \|f_2(x) - f_2(y)\| \\ &\leq |a_1| C_{f_1} \alpha(d_X(x,y)) + |a_2| C_{f_2} \alpha(d_X(x,y)) \\ &= (|a_1| C_{f_1} + |a_2| C_{f_2}) \alpha(d_X(x,y)) \end{aligned}$$

dla $d_X(x,y) \leq \delta$. □

Niech $r \geq 0$, $n, m \geq 1$ i niech α będzie modułem ciągłości. W dalszej części pracy symbol $[\alpha]$ będzie oznaczał α lub nic. Ponadto przez I w przypadku dyfeotopii będziemy rozumieć przedział $[0,1]$.

Niech $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będą odwzorowaniami klasy C^r. Wówczas zachodzą znane wzory na pochodne złożenia odwzorowań

$$D(f \circ g) = (Df \circ g) \cdot Dg \tag{1.1}$$

oraz

$$\begin{aligned} D^r(f \circ g) &= (D^r f \circ g) \cdot (Dg \times \ldots \times Dg) + (Df \circ g) \cdot D^r g \\ &\quad + \sum C_{i,j_1,\ldots,j_i} (D^i f \circ g) \cdot (D^{j_1} g \times \ldots \times D^{j_i} g) \end{aligned} \tag{1.2}$$

dla $r \geq 2$, gdzie suma przebiega po $1 < i < r$, $j_1 + \ldots + j_i = r$ i $j_l \geq 1$, $l = 1, \ldots, i$. Stałe $C_{i,j_1,\ldots,j_i}$ są liczbami naturalnymi niezależnymi od f i g.

Jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest dyfeomorfizmem klasy C^r, to

$$D(f^{-1}) = (Df \circ f^{-1})^{-1} \tag{1.3}$$

oraz

(1.4)

$$\begin{aligned} D^r(f^{-1}) &= -D(f^{-1}) \cdot (D^r f \circ f^{-1}) \cdot (D(f^{-1}) \times \ldots \times D(f^{-1})) \\ &\quad - D(f^{-1}) \sum C_{i,j_1,\ldots,j_i} (D^i f \circ f^{-1}) \cdot (D^{j_1}(f^{-1}) \times \ldots \times D^{j_i}(f^{-1})) \end{aligned}$$

dla $r \geq 2$.

Ostatni wzór uzyskujemy z (1.2) przyjmując $g = f^{-1}$. Istotnie, wówczas

$$\begin{aligned} 0 = D^r(f \circ f^{-1}) &= (D^r f \circ f^{-1}) \cdot (D(f^{-1}) \times \ldots \times D(f^{-1})) \\ &+ (Df \circ f^{-1}) \cdot D^r(f^{-1}) \\ &+ \sum C_{i,j_1,\ldots,j_i} (D^i f \circ f^{-1}) \cdot (D^{j_1}(f^{-1}) \times \ldots \times D^{j_i}(f^{-1})). \end{aligned}$$

Mnożąc to równanie lewostronnie przez $(Df \circ f^{-1})^{-1}$ i przenosząc drugi składnik na lewą stronę otrzymujemy (1.4).

W dalszej części złożenie odwzorowań będziemy zazwyczaj zapisywać w postaci fg, a iloczyn jako $f \cdot g$.

Definicja 1.10. Mówimy, że odwzorowanie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest *klasy* $C^{r,\alpha}$ jeśli jest klasy C^r i pochodna $D^r f$ jest lokalnie α-ciągła. Jeśli dodatkowo f^{-1} jest klasy $C^{r,\alpha}$, to f nazywamy $C^{r,\alpha}$*-dyfeomorfizmem.*

Definicja 1.11. Odwzorowanie $H : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ nazywamy $C^{r,[\alpha]}$*-dyfeotopią* od Id do f jeśli H jest klasy $C^{r,[\alpha]}$, H_t jest dyfeomorfizmem klasy $C^{r,[\alpha]}$ dla każdego $t \in I$ oraz $H_0 = \mathrm{Id}$ i $H_1 = f$.

Własność 1.12. *Niech $r \geq 1$ i niech α będzie modułem ciągłości. Zakładamy, że odwzorowania $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ są klasy $C^{r,\alpha}$. Wówczas złożenie $f \circ g$ jest klasy $C^{r,\alpha}$. Ponadto, jeśli odwzorowanie f ma odwrotność klasy C^1, to f jest $C^{r,\alpha}$-dyfeomorfizmem.*

Dowód. Niech f i g będą odwzorowaniami klasy $C^{r,\alpha}$. Wystarczy pokazać, że pochodna $D^r(f \circ g)$ jest lokalnie α-ciągła.

Dla $r = 1$ wykorzystamy wzór (1.1). Odwzorowanie g jest klasy C^1, więc z Uwagi 1.6 jest lokalnie Id-ciągłe i z Lematu 1.5 odwzorowanie $Df \circ g$ jest lokalnie α-ciągłe. Mnożenie jest dwuliniowe i rozważamy α-ciągłość lokalnie, więc możemy skorzystać z Lematu 1.8. Stąd i ze wzoru (1.1) odwzorowanie $D(f \circ g)$ jest lokalnie α-ciągłe.

Gdy $r \geq 2$, rozważamy wzór (1.2). Uzasadniamy jak wyżej, że pierwszy i drugi składnik tego wzoru to odwzorowania lokalnie α-ciągłe. Trzeci składnik zawiera tylko odwzorowania klasy C^1, więc z Uwagi 1.6 są one również lokalnie α-ciągłe. Korzystając z Lematu 1.9 otrzymujemy tezę.

Analogiczne rozumowanie przeprowadzamy w przypadku dyfeomorfizmu, wykorzystując wzory (1.3) i (1.4). $\square$

Przez $C^{r,[\alpha]}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ oznaczamy przestrzeń odwzorowań $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ klasy $C^{r,[\alpha]}$. Ponadto przez $C_c^{r,[\alpha]}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ będziemy oznaczać jej podprzestrzeń złożoną z odwzorowań o zwartych nośnikach, a przy pomocy indeksu K, $C_K^{r,[\alpha]}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, podprzestrzeń odwzorowań o nośnikach w $K \subset \mathbb{R}^n$. Analogicznie określamy grupę $\mathrm{Diff}^{r,[\alpha]}(\mathbb{R}^n)$ dyfeomorfizmów klasy $C^{r,[\alpha]}$ na $\mathbb{R}^n$ z działaniem składania odwzorowań oraz jej podgrupy $\mathrm{Diff}_c^{r,[\alpha]}(\mathbb{R}^n)$ i $\mathrm{Diff}_K^{r,[\alpha]}(\mathbb{R}^n)$.

1.2. Definicje i oszacowania seminorm

Niech $r \geq 0$, $n, m \geq 1$ i niech α będzie modułem ciągłości.
Dla odwzorowania $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiujemy seminormy

$$\mu_r(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|D^r(f - \mathrm{Id})(x)\|,$$

$$\mu_{r,\alpha}(f) = \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{\|D^r f(x) - D^r f(y)\|}{\alpha(|x-y|)}$$

oraz

$$\|f\|_r = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|D^r f(x)\|,$$

gdzie $\|\cdot\|$ oznacza standardową normę w przestrzeni odwzorowań r-liniowych $L^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Ponadto dla $r \geq 1$ określamy

$$M_r(f) = \sup\{\mu_i(f) \,:\, i = 1, \ldots, r\},$$
$$M_{r,\alpha}(f) = \sup\{\mu_i(f), \mu_{i,\alpha}(f) \,:\, i = 1, \ldots, r\}.$$

Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem domkniętym. Definiujemy stałą

$$R_K = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathrm{dist}(x, \overline{\mathbb{R}^n \setminus K}).$$

Zauważmy, że $\mu_1(f) \leq \|f\|_1 + 1$ i $\|f\|_1 \leq \mu_1(f) + 1$ oraz $\mu_r(f) = \|f\|_r$ dla $r \geq 2$. Ponadto zachodzi następujący lemat.

Lemat 1.13. *Niech $r \geq 1$ i niech α będzie modułem ciągłości.*

(1) *Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem domkniętym takim, że $R_K < \infty$. Wówczas istnieje stała $C > 0$ zależna od R_K i α taka, że*

$$\mu_r(f) \leq C\mu_{r+1}(f), \quad \mu_r(f) \leq C\mu_{r,\alpha}(f), \quad \mu_{r,\alpha}(f) \leq C\mu_{r+1,\alpha}(f)$$

dla dostatecznie regularnego $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takiego, że $D^r(f - \mathrm{Id}) = 0$ na $\overline{\mathbb{R}^n \setminus K}$.

(2) *Niech $1 \leq i \leq n$. Istnieje stała $C \geq 1$ zależna od α taka, że*

$$\mu_r(f) \leq C^r\mu_{r+1}(f), \quad \mu_r(f) \leq C^r\mu_{r,\alpha}(f), \quad \mu_{r,\alpha}(f) \leq C^r\mu_{r+1,\alpha}(f)$$

dla dostatecznie regularnego $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ okresowego względem i-tej współrzędnej o okresie 1.

Dowód. Niech $x \in \mathbb{R}^n$. Wybieramy $y \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus K}$ takie, że $|x - y| \leq R_K$. Wówczas otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\|D^r(f - \mathrm{Id})(x)\| &= \|D^r(f - \mathrm{Id})(x) - D^r(f - \mathrm{Id})(y)\| \\
&= \left\| \int_0^1 D^{r+1}(f - \mathrm{Id})(tx + (1-t)y) \cdot (x - y)\, dt \right\| \qquad (1.5) \\
&\leq \mu_{r+1}(f)|x - y| \leq R_K \mu_{r+1}(f).
\end{aligned}$$

Ponadto

$$\begin{aligned}\|D^r(f-\mathrm{Id})(x)\| &= \frac{\|D^r(f-\mathrm{Id})(x)-D^r(f-\mathrm{Id})(y)\|}{\alpha(|x-y|)}\alpha(|x-y|) \\ &\leq \alpha(R_K)\mu_{r,\alpha}(f).\end{aligned} \tag{1.6}$$

Aby udowodnić trzecie oszacowanie z (1) pokażemy, że

$$\mu_{r,\alpha}(f) \leq \widetilde{C}\mu_{r+1}(f) \tag{1.7}$$

dla pewnej stałej $\widetilde{C} > 0$ zależnej od R_K i α.

Niech $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$. Z Uwagi 1.6 funkcja $\frac{t}{\alpha(t)}$ jest niemalejąca, więc całkując jak w (1.5) mamy

$$\frac{\|D^r f(x) - D^r f(y)\|}{\alpha(|x-y|)} \leq \frac{\mu_{r+1}(f)|x-y|}{\alpha(|x-y|)} \leq \frac{1}{\alpha(1)}\mu_{r+1}(f) \tag{1.8}$$

dla $|x-y| \leq 1$. Jeśli $|x-y| > 1$, to wybieramy $x_0, y_0 \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus K}$ takie, że $|x-x_0| \leq R_K$, $|y-y_0| \leq R_K$ i szacujemy

$$\begin{aligned}\frac{\|D^r f(x) - D^r f(y)\|}{\alpha(|x-y|)} &\leq \frac{\|D^r f(x) - D^r f(x_0)\| + \|D^r f(y_0) - D^r f(y)\|}{\alpha(|x-y|)} \\ &\leq \frac{\mu_{r+1}(f)}{\alpha(1)}(|x-x_0| + |y-y_0|) \leq \frac{2R_K}{\alpha(1)}\mu_{r+1}(f).\end{aligned} \tag{1.9}$$

Stąd prawdziwa jest nierówność (1.7). Stosując oszacowania (1.6) i (1.7) otrzymujemy (1).

Aby udowodnić (2) przeprowadzamy rozważania na pochodnych cząstkowych. Dla uproszczenia zapisu przyjmujemy $i = 1$.

Niech $i_1, \ldots, i_r, l \in \{1, \ldots, n\}$. Bierzemy $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Z okresowości f istnieje punkt $y = (y_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ taki, że $\frac{\partial^r (f-\mathrm{Id})_l}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_r}}(y) = 0$ i $|x_1 - y_1| \leq 1$. Wówczas mamy

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial^r (f-\mathrm{Id})_l}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_r}}(x)\right\| &= \left\|\frac{\partial^r (f-\mathrm{Id})_l}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_r}}(x) - \frac{\partial^r (f-\mathrm{Id})_l}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_r}}(y)\right\| \\ &\leq \left\|\int_0^1 \frac{\partial^{r+1} (f-\mathrm{Id})_l}{\partial x_1 \partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_r}}(tx + (1-t)y) \cdot (x_1 - y_1, 0, \ldots, 0)\, dt\right\| \\ &\leq \mu_{r+1}(f)|x_1 - y_1| \leq \mu_{r+1}(f).\end{aligned}$$

Sumując po wszystkich pochodnych cząstkowych otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mu_r(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|D^r(f-\mathrm{Id})(x)\| &\leq \sum \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\|\frac{\partial^r (f-\mathrm{Id})_l}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_r}}(x)\right\| \\ &\leq \sum \mu_{r+1}(f) = n^{r+1}\mu_{r+1}(f).\end{aligned}$$

Podobnie, wykonując przekształcenie jak w (1.6), możemy zapisać

$$\mu_r(f) \le \sum \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\| \tfrac{\partial^r (f-\mathrm{Id})_l}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_r}}(x)\right\| \le \sum \alpha(1)\mu_{r,\alpha}(f) = n^{r+1}\alpha(1)\mu_{r,\alpha}(f). \tag{1.10}$$

Teraz niech $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$. Jeśli $|x-y| \le 1$, to zachodzi oszacowanie (1.8).

Załóżmy, że $|x-y| > 1$. Z okresowości f dla każdego $i_1, \dots, i_r, l \in \{1, \dots, n\}$ istnieją punkty $x^0 = (x_1^0, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $y^0 = (y_1^0, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ takie, że $\frac{\partial^r (f-\mathrm{Id})_l}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_r}}(x^0) = \frac{\partial^r (f-\mathrm{Id})_l}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_r}}(y^0) = 0$ oraz $|x_1 - x_1^0| \le 1$ i $|y_1 - y_1^0| \le 1$. Wtedy szacując jak w (1.9) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{\|D^r f(x) - D^r f(y)\|}{\alpha(|x-y|)} &\le \sum \frac{\left\| \frac{\partial^r (f-\mathrm{Id})_l}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_r}}(x) - \frac{\partial^r (f-\mathrm{Id})_l}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_r}}(y)\right\|}{\alpha(1)} \\ &\le \sum \frac{2}{\alpha(1)}\mu_{r+1}(f) = n^{r+1}\frac{2}{\alpha(1)}\mu_{r+1}(f),\end{aligned}$$

gdzie również sumujemy po wszystkich pochodnych cząstkowych. W ten sposób udowodniliśmy, że

$$\mu_{r,\alpha}(f) \le n^{r+1}\frac{2}{\alpha(1)}\mu_{r+1}(f).$$

Korzystając dodatkowo z (1.10) mamy ostatnią nierówność z (2). □

Definicja 1.14. *Wielomianem pierwszego rodzaju* nazywamy wielomian jednej zmiennej o nieujemnych współczynnikach i bez wyrazu wolnego. Jeśli dodatkowo nie ma on wyrazu liniowego, to mówimy że jest to *wielomian drugiego rodzaju.* Będziemy je oznaczać odpowiednio przez G i F.

Wzory (1.1)-(1.4) pozwalają nam udowodnić następujące lematy.

Lemat 1.15. (1) *Niech $l \ge 1$. Dla $f_1, \dots, f_l \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mamy*

$$\mu_1(f_1 \dots f_l) \le l(\sup_{1\le i\le l}\mu_1(f_i))(1 + \sup_{1\le i\le l}\mu_1(f_i))^{l-1}.$$

(2) *Niech $r \ge 2$ i $l \ge 1$. Istnieje wielomian drugiego rodzaju F zależny od r i l taki, że*

$$\mu_r(f_1 \dots f_l) \le l(\sup_{1\le i\le l}\mu_r(f_i))(1 + \sup_{1\le i\le l}\mu_1(f_i))^{r(l-1)} + F(\sup_{1\le i\le l}M_{r-1}(f_i))$$

dla dowolnych $f_1, \dots, f_l \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Dowód. Dowód poprowadzimy przez indukcję. Dla $l = 1$ własności (1) i (2) są oczywiście spełnione. Załóżmy, że $l \ge 2$ i zachodzą one dla $j = 1, \dots, l-1$.

Korzystając ze wzoru (1.1) i z indukcji otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\|D(f_1\dots f_l - \mathrm{Id})(x)\| &= \|D(f_1\dots f_{l-1})(f_l(x))\cdot Df_l(x) - \mathrm{Id}\,\| \\
&\le \|D(f_1\dots f_{l-1})(f_l(x)) - \mathrm{Id}\,\|\|Df_l(x)\| + \|Df_l(x) - \mathrm{Id}\,\| \\
&\le \mu_1(f_1\dots f_{l-1})\|f_l\|_1 + \mu_1(f_l) \\
&\le (l-1)(\sup_{1\le i\le l-1}\mu_1(f_i))(1+\sup_{1\le i\le l-1}\mu_1(f_i))^{l-2}(1+\mu_1(f_l)) + \mu_1(f_l) \\
&\le (l-1)(\sup_{1\le i\le l}\mu_1(f_i))(1+\sup_{1\le i\le l}\mu_1(f_i))^{l-1} \\
&\quad + \mu_1(f_l)(1+\sup_{1\le i\le l}\mu_1(f_i))^{l-1} \\
&\le l(\sup_{1\le i\le l}\mu_1(f_i))(1+\sup_{1\le i\le l}\mu_1(f_i))^{l-1}.
\end{aligned}$$

Podobnie, dla $r\ge 2$ ze wzoru (1.2) mamy

$$\begin{aligned}
\|D^r(f_1\dots f_l)(x)\| &\le \|D^r(f_1\dots f_{l-1})(f_l(x))\|\|Df_l(x)\|^r \\
&\quad + \|D(f_1\dots f_{l-1})(f_l(x))\|\|D^r f_l(x)\| \\
&\quad + \sum C_{i,j_1,\dots,j_i}\|D^i(f_1\dots f_{l-1})(f_l(x))\|\prod_{1\le m\le i}\|D^{j_m}f_l(x)\| \\
&\le \mu_r(f_1\dots f_{l-1})\|f_l\|_1^r + \|f_1\dots f_{l-1}\|_1\mu_r(f_l) \\
&\quad + \sum C_{i,j_1,\dots,j_i}\mu_i(f_1\dots f_{l-1})\|f_l\|_{j_1}\dots\|f_l\|_{j_i} \\
&\le (l-1)(\sup_{1\le i\le l-1}\mu_r(f_i))(1+\sup_{1\le i\le l-1}\mu_1(f_i))^{r(l-2)}(1+\mu_1(f_l))^r \\
&\quad + F_1(\sup_{1\le i\le l-1}M_{r-1}(f_i))(1+\mu_1(f_l))^r \\
&\quad + \left(1+(l-1)(\sup_{1\le i\le l-1}\mu_1(f_i))(1+\sup_{1\le i\le l-1}\mu_1(f_i))^{l-2}\right)\mu_r(f_l) \\
&\quad + \sum C_{i,j_1,\dots,j_i}\mu_i(f_1\dots f_{l-1})M_{r-1}(f_l)(1+M_{r-1}(f_l))^{i-1},
\end{aligned}$$

gdzie F_1 jest pewnym wielomianem drugiego rodzaju. Ostatni składnik otrzymujemy korzystając z faktu, że co najmniej jeden z indeksów $j_1,\dots,j_i$ jest większy od 1.

Z indukcji względem r wynika, że

$$\begin{aligned}
\mu_i(f_1\dots f_{l-1}) &\le (l-1)(\sup_{1\le j\le l-1}\mu_i(f_j))(1+\sup_{1\le j\le l-1}\mu_1(f_j))^{i(l-2)} \\
&\quad + F(\sup_{1\le j\le l-1}M_{i-1}(f_j)) \\
&\le \widetilde{G}(\sup_{1\le j\le l-1}M_{i-1}(f_j))
\end{aligned}$$

dla pewnego wielomianu pierwszego rodzaju $\widetilde{G}$. W efekcie ostatni składnik powyższego oszacowania możemy zapisać jako wielomian drugiego rodzaju. Stąd i z nierówności Bernoulliego otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\|D^r(f_1\dots f_l)(x)\| &\le (l-1)(\sup_{1\le i\le l}\mu_r(f_i))(1+\sup_{1\le i\le l}\mu_1(f_i))^{r(l-1)}\\
&\quad+\left(1+(l-1)(\sup_{1\le i\le l}\mu_1(f_i))\right)(1+\sup_{1\le i\le l}\mu_1(f_i))^{l-2}\mu_r(f_l)\\
&\quad+F_2(\sup_{1\le i\le l}M_{r-1}(f_i))\\
&\le (l-1)(\sup_{1\le i\le l}\mu_r(f_i))(1+\sup_{1\le i\le l}\mu_1(f_i))^{r(l-1)}\\
&\quad+(1+\sup_{1\le i\le l}\mu_1(f_i))^{l-1}(1+\sup_{1\le i\le l}\mu_1(f_i))^{l-2}\mu_r(f_l)\\
&\quad+F_2(\sup_{1\le i\le l}M_{r-1}(f_i))\\
&\le l(\sup_{1\le i\le l}\mu_r(f_i))(1+\sup_{1\le i\le l}\mu_1(f_i))^{r(l-1)}+F_2(\sup_{1\le i\le l}M_{r-1}(f_i))
\end{aligned}$$

dla pewnego wielomianu drugiego rodzaju F_2. □

Lemat 1.16. (1) *Niech $f\in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^n)$ i $\mu_1(f)\le \frac{1}{2}$. Wówczas*

$$\mu_1(f^{-1})\le 2\mu_1(f).$$

(2) *Niech $r\ge 2$. Istnieje wielomian drugiego rodzaju F zależny od r taki, że*

$$\mu_r(f^{-1})\le \mu_r(f)(1+2\mu_1(f))^{r+1}+F(M_{r-1}(f))$$

dla każdego $f\in \mathrm{Diff}^r(\mathbb{R}^n)$ takiego, że $\mu_1(f)\le\frac{1}{2}$.

Dowód. Jeśli $f\in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^n)$ i $\mu_1(f)<1$, to zachodzi wzór

$$(Df(x))^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}(-(Df(x)-\mathrm{Id}))^m. \tag{1.11}$$

Stąd i ze wzoru (1.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mu_1(f^{-1}) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\|D(f^{-1})(x)-\mathrm{Id}\,\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\|(Df(f^{-1}(x)))^{-1}-\mathrm{Id}\,\|\\
&=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left\|\sum_{m=0}^{\infty}(-(Df(f^{-1}(x))-\mathrm{Id}))^m-\mathrm{Id}\right\|\\
&\le\sum_{m=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\|Df(f^{-1}(x))-\mathrm{Id}\,\|^m=\sum_{m=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\|Df(x)-\mathrm{Id}\,\|^m\\
&\le\sum_{m=1}^{\infty}(\mu_1(f))^m=\frac{\mu_1(f)}{1-\mu_1(f)}\le 2\mu_1(f).
\end{aligned}\tag{1.12}$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla $\mu_1(f) \le \frac{1}{2}$.

Niech teraz $r \ge 2$ i $\mu_1(f) \le \frac{1}{2}$. Korzystając z (1.4) i (1) mamy

$$\begin{aligned}\|D^r(f^{-1})(x)\| &\le \|D(f^{-1})(x)\|\|D^r f(f^{-1}(x))\|\|D(f^{-1})(x)\|^r \\ &\quad + \|D(f^{-1})(x)\| \sum C_{i,j_1,\dots,j_i} \|D^i f(f^{-1}(x))\| \prod_{1\le l\le i} \|D^{j_l}(f^{-1})(x)\| \\ &\le \mu_r(f)\|f^{-1}\|_1^{r+1} + \|f^{-1}\|_1 \sum C_{i,j_1,\dots,j_i}\mu_i(f)\|f^{-1}\|_{j_1}\dots\|f^{-1}\|_{j_i} \\ &\le \mu_r(f)(1+2\mu_1(f))^{r+1} \\ &\quad + (1+2\mu_1(f))\sum C_{i,j_1,\dots,j_i}\mu_i(f)\mu_{j_{l_0}}(f^{-1}) \prod_{\substack{1\le l\le i\\ l\ne l_0}} (1+\mu_{j_l}(f^{-1})),\end{aligned}$$

gdzie l_0 jest tak wybrane, że $j_{l_0} \ge 2$.

Z indukcji wynika, że prawdziwe są nierówności

$$\mu_j(f^{-1}) \le \widetilde{G}(M_j(f)) \le \widetilde{G}(M_{r-1}(f))$$

dla każdego $j = 1, \dots, r-1$ i pewnego wielomianu pierwszego rodzaju $\widetilde{G}$. Stąd istnieje wielomian drugiego rodzaju F zależny od r taki, że

$$\begin{aligned}\|D^r(f^{-1})(x)\| &\le \mu_r(f)(1+2\mu_1(f))^{r+1} \\ &\quad + (1+2\mu_1(f))\sum C_{i,j_1,\dots,j_i}\mu_i(f)\widetilde{G}(M_{r-1}(f))(1+\widetilde{G}(M_{r-1}(f)))^{i-1} \\ &\le \mu_r(f)(1+2\mu_1(f))^{r+1} + F(M_{r-1}(f))\end{aligned}$$

dla $f \in \mathrm{Diff}^r(\mathbb{R}^n)$ spełniających warunek $\mu_1(f) \le \frac{1}{2}$. □

Lemat 1.17. *Niech $r \ge 1$ i niech α będzie modułem ciągłości.*

(1) *Istnieje wielomian pierwszego rodzaju G zależny od r i α taki, że*

$$\mu_{r,\alpha}(fg) \le \mu_{r,\alpha}(f) + \mu_{r,\alpha}(g) + M_{r,\alpha}(f)G(M_{r,\alpha}(g))$$

dla $f, g \in C^{r,\alpha}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

(2) *Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem domkniętym takim, że $R_K < \infty$. Wówczas istnieją stałe $\delta_1 > 0$ i $C_1 > 0$ zależne od r, R_K i α takie, że*

$$\mu_{r,\alpha}(fg) \le \mu_{r,\alpha}(f) + \mu_{r,\alpha}(g) + C_1\mu_{r,\alpha}(f)\mu_{r,\alpha}(g)$$

dla dowolnych $f, g \in C^{r,\alpha}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ takich, że $\mu_{r,\alpha}(f), \mu_{r,\alpha}(g) \le \delta_1$ i $D(f - \mathrm{Id}) = D(g - \mathrm{Id}) = 0$ na $\overline{\mathbb{R}^n \setminus K}$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy jednocześnie dla obu własności, gdyż (2) wynika z (1) przy wykorzystaniu Lematu 1.13 (1).

Niech $r = 1$. Ze wzoru (1.1) oraz z oszacowania $\|g\|_1 \leq 1 + \mu_1(g)$ mamy

$$\begin{aligned}
\mu_{1,\alpha}(fg) &= \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Df(g(x)) \cdot Dg(x) - Df(g(y)) \cdot Dg(y)\|}{\alpha(|x-y|)} \\
&\leq \sup_{x \neq y} \frac{\|Df(g(x)) - Df(g(y))\|}{\alpha(|x-y|)} \|Dg(x)\| \\
&\quad + \sup_{x \neq y} \|Df(g(y))\| \frac{\|Dg(x) - Dg(y)\|}{\alpha(|x-y|)} \\
&\leq \sup_{x \neq y} \frac{\|Df(g(x)) - Df(g(y))\|}{\alpha(|g(x)-g(y)|)} \frac{\alpha(\|g\|_1 |x-y|)}{\alpha(|x-y|)} \|g\|_1 \\
&\quad + \|f\|_1 \mu_{1,\alpha}(g) \\
&\leq \mu_{1,\alpha}(f)(1 + \mu_1(g))^2 + \|f\|_1 \mu_{1,\alpha}(g) \\
&\leq \mu_{1,\alpha}(f)(1 + \mu_1(g))^2 + (1 + \mu_1(f)) \mu_{1,\alpha}(g) \\
&\leq \mu_{1,\alpha}(f) + \mu_{1,\alpha}(g) + M_{1,\alpha}(f) G(M_{1,\alpha}(g))
\end{aligned} \tag{1.13}$$

dla pewnego wielomianu pierwszego rodzaju G zależnego od α.

Jeśli są spełnione założenia własności (2), to korzystając z Lematu 1.13 (1) istnieje stała $C_1 > 0$ zależna od R_K i α taka, że

$$\mu_{1,\alpha}(fg) \leq \mu_{1,\alpha}(f) + \mu_{1,\alpha}(g) + C_1 \mu_{1,\alpha}(f) \mu_{1,\alpha}(g)$$

dla małych $\mu_{1,\alpha}(f)$, $\mu_{1,\alpha}(g)$.

Niech $r \geq 2$. Wykorzystamy wzór (1.2). Możemy zapisać nierówności

$$\begin{aligned}
&\frac{\|((D^i f \circ g) \cdot (D^{j_1} g \times \ldots \times D^{j_i} g))(x) - ((D^i f \circ g) \cdot (D^{j_1} g \times \ldots \times D^{j_i} g))(y)\|}{\alpha(|x-y|)} \\
&\quad \leq \frac{\|D^i f(g(x)) - D^i f(g(y))\|}{\alpha(|g(x)-g(y)|)} \frac{\alpha(\|g\|_1 |x-y|)}{\alpha(|x-y|)} \|D^{j_1} g(x)\| \ldots \|D^{j_i} g(x)\| \\
&\quad\quad + \|D^i f(g(y))\| \frac{\|D^{j_1} g(x) - D^{j_1} g(y)\|}{\alpha(|x-y|)} \prod_{2 \leq l \leq i} \|D^{j_l} g(x) - D^{j_l} g(y)\| \\
&\quad \leq \mu_{i,\alpha}(f)(1 + \mu_1(g)) \|g\|_{j_1} \ldots \|g\|_{j_i} + 2^{i-1} \|f\|_i \mu_{j_1,\alpha}(g) \mu_{j_2}(g) \ldots \mu_{j_i}(g).
\end{aligned}$$

W ostatnim oszacowaniu wykorzystaliśmy zależność

$$\|D^{j_l} g(x) - D^{j_l} g(y)\| = \|D^{j_l}(g - \mathrm{Id})(x) - D^{j_l}(g - \mathrm{Id})(y)\| \leq 2\mu_{j_l}(g). \tag{1.14}$$

Teraz ze wzoru (1.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mu_{r,\alpha}(fg) &\le \mu_{r,\alpha}(f)(1+\mu_1(g))\|g\|_1^r + 2^{r-1}\|f\|_r\mu_{1,\alpha}(g)(\mu_1(g))^{r-1} \\
&\quad + \mu_{1,\alpha}(f)(1+\mu_1(g))\|g\|_r + \|f\|_1\mu_{r,\alpha}(g) \\
&\quad + \sum C_{i,j_1,\dots,j_i}\Big(\mu_{i,\alpha}(f)(1+\mu_1(g))\|g\|_{j_1}\dots\|g\|_{j_i} \\
&\qquad\qquad + 2^{i-1}\|f\|_i\mu_{j_1,\alpha}(g)\mu_{j_2}(g)\dots\mu_{j_i}(g)\Big) \\
&\le \mu_{r,\alpha}(f)(1+\mu_1(g))^{r+1} + 2^{r-1}\mu_r(f)\mu_{1,\alpha}(g)(\mu_1(g))^{r-1} \qquad (1.15) \\
&\quad + \mu_{1,\alpha}(f)(1+\mu_1(g))\mu_r(g) + (1+\mu_1(f))\mu_{r,\alpha}(g) \\
&\quad + \sum C_{i,j_1,\dots,j_i}\Big(\mu_{i,\alpha}(f)(1+\mu_1(g))\mu_{j_{l_0}}(g)\prod_{\substack{1\le l\le i\\ l\ne l_0}}(1+\mu_{j_l}(g)) \\
&\qquad\qquad + 2^{i-1}\mu_i(f)\mu_{j_1,\alpha}(g)\mu_{j_2}(g)\dots\mu_{j_i}(g)\Big),
\end{aligned}$$

gdzie l_0 jest wybrane tak, że $j_{l_0} \ge 2$. Stąd

$$\mu_{r,\alpha}(fg) \le \mu_{r,\alpha}(f) + \mu_{r,\alpha}(g) + M_{r,\alpha}(f)G(M_{r,\alpha}(g)), \tag{1.16}$$

gdzie G jest wielomianem pierwszego rodzaju zależnym od r i α.

W sytuacji (2) zbiór $\mathbb{R}^n \setminus K$ jest otwarty i niepusty, gdyż $R_K < \infty$. Stąd $D^j(f-\mathrm{Id}) = 0$ na $\overline{\mathbb{R}^n \setminus K}$ dla $j = 1,\dots,r$ i możemy zastosować Lemat 1.13 (1) do (1.16). Otrzymujemy stałą $C_1 > 0$ zależną od r, R_K i α taką, że

$$\mu_{r,\alpha}(fg) \le \mu_{r,\alpha}(f) + \mu_{r,\alpha}(g) + C_1\mu_{r,\alpha}(f)\mu_{r,\alpha}(g)$$

dla dostatecznie małych $\mu_{r,\alpha}(f)$, $\mu_{r,\alpha}(g)$. □

Lemat 1.18. *Niech $r \ge 1$ i niech α będzie modułem ciągłości.*

(1) *Istnieje wielomian drugiego rodzaju F zależny od r i α taki, że*

$$\mu_{r,\alpha}(f^{-1}) \le \mu_{r,\alpha}(f) + F(M_{r,\alpha}(f))$$

dla $f \in \mathrm{Diff}^{r,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ i $\mu_1(f) \le \frac{1}{6}$.

(2) *Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem domkniętym takim, że $R_K < \infty$. Wówczas istnieje stała $\delta_2 > 0$ zależna od r, R_K i α taka, że*

$$\mu_{r,\alpha}(f^{-1}) \le 2\mu_{r,\alpha}(f)$$

dla każdego $f \in \mathrm{Diff}^{r,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ takiego, że $\mu_{r,\alpha}(f) \le \delta_2$ i $D(f - \mathrm{Id}) = 0$ na $\overline{\mathbb{R}^n \setminus K}$.

Dowód. Jak w poprzednim dowodzie większość oszacowań jest identyczna dla (1) i (2).

Niech $\mu_1(f) \leq \frac{1}{2}$. Ze wzorów (1.3) oraz (1.11) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mu_{1,\alpha}(f^{-1}) &= \sup_{x\neq y\in\mathbb{R}^n} \frac{\|D(f^{-1})(x) - D(f^{-1})(y)\|}{\alpha(|x-y|)} \\
&= \sup_{x\neq y} \frac{\|(Df(f^{-1}(x)))^{-1} - (Df(f^{-1}(y)))^{-1}\|}{\alpha(|x-y|)} \\
&\leq \sum_{m=0}^{\infty} \sup_{x\neq y} \frac{\|(-(Df(f^{-1}(x)) - \mathrm{Id}))^m - (-(Df(f^{-1}(y)) - \mathrm{Id}))^m\|}{\alpha(|x-y|)} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sup_{x\neq y} \frac{\|(Df(f^{-1}(x)) - \mathrm{Id})^m - (Df(f^{-1}(y)) - \mathrm{Id})^m\|}{\alpha(|x-y|)}.
\end{aligned}$$

Oznaczmy $I(x) = Df(f^{-1}(x)) - \mathrm{Id}$. Dla macierzy kwadratowych prawdziwy jest wzór

$$A^m - B^m = \sum_{l=0}^{m-1} A^{m-l-1}(A-B)B^l.$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\mu_{1,\alpha}(f^{-1}) &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \sup_{x\neq y} \frac{\sum_{l=0}^{m-1} \|I(x)\|^{m-l-1}\|I(x) - I(y)\|\|I(y)\|^l}{\alpha(|x-y|)} \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{m-1} (\mu_1(f))^{m-1} \sup_{x\neq y} \frac{\|I(x) - I(y)\|}{\alpha(|x-y|)} \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} m(\mu_1(f))^{m-1} \sup_{x\neq y} \frac{\|Df(f^{-1}(x)) - Df(f^{-1}(y))\|}{\alpha(|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)|)} \frac{\alpha(\|f^{-1}\|_1|x-y|)}{\alpha(|x-y|)} \\
&\leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} m(\mu_1(f))^{m-1}\right) \mu_{1,\alpha}(f)(1 + \mu_1(f^{-1})).
\end{aligned}$$

Suma ostatniego szeregu wynosi

$$\sum_{m=1}^{\infty} m(\mu_1(f))^{m-1} = \frac{1}{(1-\mu_1(f))^2}.$$

Ostatecznie, korzystając z Lematu 1.16 (1) otrzymujemy oszacowanie

$$\mu_{1,\alpha}(f^{-1}) \leq \frac{1 + 2\mu_1(f)}{(1-\mu_1(f))^2}\mu_{1,\alpha}(f) \leq (1 + 6\mu_1(f))\mu_{1,\alpha}(f) \leq 2\mu_{1,\alpha}(f)$$

dla $\mu_1(f) \leq \frac{1}{6}$. Aby uzyskać (2) wystarczy przyjąć $\mu_{1,\alpha}(f) \leq \frac{1}{6C}$, gdzie C jest stałą z Lematu 1.13 (1).

Załóżmy teraz, że $r \geq 2$ oraz $\mu_1(f) \leq \frac{1}{6}$. Z indukcji istnieje wielomian pierwszego rodzaju G_1 taki, że

$$\mu_{j,\alpha}(f^{-1}) \leq G_1(M_{j,\alpha}(f)) \leq G_1(M_{r,\alpha}(f)) \tag{1.17}$$

dla $j = 1, \ldots, r-1$.

Do dowodu wykorzystamy wzór (1.4). W tym celu wprowadzamy oznaczenia

$$I_1 = \frac{\left\| \left(D(f^{-1}) \cdot (D^r f \circ f^{-1}) \cdot (D(f^{-1}) \times \ldots \times D(f^{-1})) \right) \Big|_y^x \right\|}{\alpha(|x-y|)},$$

$$I_2 = \frac{\left\| \left(D(f^{-1}) \sum C_{i,j_1,\ldots,j_i} (D^i f \circ f^{-1}) \cdot (D^{j_1}(f^{-1}) \times \ldots \times D^{j_i}(f^{-1})) \right) \Big|_y^x \right\|}{\alpha(|x-y|)},$$

gdzie $h\big|_y^x = h(x) - h(y)$. Teraz możemy zapisać

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{\|D(f^{-1})(x) - D(f^{-1})(y)\|}{\alpha(|x-y|)} \|D^r f(f^{-1}(x))\| \|D(f^{-1})(x)\|^r \\
&\quad + \|D(f^{-1})(y)\| \frac{\|D^r f(f^{-1}(x)) - D^r f(f^{-1}(y))\|}{\alpha(|x-y|)} \|D(f^{-1})(x)\|^r \\
&\quad + \|D(f^{-1})(y)\| \|D^r f(f^{-1}(y))\| \frac{\|D(f^{-1})(x) - D(f^{-1})(y)\|}{\alpha(|x-y|)} \\
&\quad \cdot \|D(f^{-1})(x) - D(f^{-1})(y)\|^{r-1} \\
&\leq \mu_{1,\alpha}(f^{-1}) \mu_r(f) \|f^{-1}\|_1^r \\
&\quad + \|f^{-1}\|_1 \frac{\|D^r f(f^{-1}(x)) - D^r f(f^{-1}(y))\|}{\alpha(|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)|)} \frac{\alpha(\|f^{-1}\|_1 |x-y|)}{\alpha(|x-y|)} \|f^{-1}\|_1^r \\
&\quad + \|f^{-1}\|_1 \mu_r(f) \mu_{1,\alpha}(f^{-1}) (2\mu_1(f^{-1}))^{r-1},
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy (1.14). Korzystając z (1.17) i z Lematu 1.16 (1) mamy

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq G_1(M_{r,\alpha}(f)) \mu_r(f) (1 + 2\mu_1(f))^r + \mu_{r,\alpha}(f)(1 + 2\mu_1(f))^{r+2} \\
&\quad + (1 + 2\mu_1(f)) \mu_r(f) G_1(M_{r,\alpha}(f)) (4\mu_1(f))^{r-1} \\
&\leq \mu_{r,\alpha}(f) + F_1(M_{r,\alpha}(f)),
\end{aligned}$$

gdzie F_1 jest wielomianem drugiego rodzaju zależnym od r i α.

Podobnie szacujemy wyrażenie I_2, otrzymując

$$
\begin{aligned}
I_2 \leq \sum C_{i,j_1,\dots,j_i}\Bigg(& \frac{\|D(f^{-1})(x) - D(f^{-1})(y)\|}{\alpha(|x-y|)} \|D^i f(f^{-1}(x))\| \\
& \cdot \|D^{j_1}(f^{-1})(x)\| \dots \|D^{j_i}(f^{-1})(x)\| \\
& + \|D(f^{-1})(y)\| \frac{\|D^i f(f^{-1}(x)) - D^i f(f^{-1}(y))\|}{\alpha(|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)|)} \frac{\alpha(\|f^{-1}\|_1 |x-y|)}{\alpha(|x-y|)} \\
& \cdot \|D^{j_1}(f^{-1})(x)\| \dots \|D^{j_i}(f^{-1})(x)\| \\
& + \|D(f^{-1})(y)\| \|D^i f(f^{-1}(y))\| \frac{\|D^{j_1}(f^{-1})(x) - D^{j_1}(f^{-1})(y)\|}{\alpha(|x-y|)} \\
& \cdot \prod_{2 \leq l \leq i} \|D^{j_l}(f^{-1})(x) - D^{j_l}(f^{-1})(y)\| \Bigg),
\end{aligned}
$$

a następnie

$$
\begin{aligned}
I_2 \leq \sum C_{i,j_1,\dots,j_i} \Big(& \mu_{1,\alpha}(f^{-1}) \mu_i(f) \|f^{-1}\|_{j_1} \dots \|f^{-1}\|_{j_i} \\
& + \|f^{-1}\|_1 \mu_{i,\alpha}(f)(1 + \mu_1(f^{-1})) \|f^{-1}\|_{j_1} \dots \|f^{-1}\|_{j_i} \\
& + 2^{i-1} \|f^{-1}\|_1 \mu_i(f) \mu_{j_1,\alpha}(f^{-1}) \prod_{2 \leq l \leq i} \mu_{j_l}(f^{-1}) \Big) \\
\leq \sum C_{i,j_1,\dots,j_i} \Big(& \mu_{1,\alpha}(f^{-1}) \mu_i(f) \prod_{1 \leq l \leq i} (1 + \mu_{j_l}(f^{-1})) \\
& + \mu_{i,\alpha}(f)(1 + \mu_1(f^{-1}))^2 \mu_{j_{l_0}}(f^{-1}) \prod_{\substack{1 \leq l \leq i \\ l \neq l_0}} (1 + \mu_{j_l}(f^{-1})) \\
& + 2^{i-1}(1 + \mu_1(f^{-1})) \mu_i(f) \mu_{j_1,\alpha}(f^{-1}) \prod_{2 \leq l \leq i} \mu_{j_l}(f^{-1}) \Big),
\end{aligned}
$$

gdzie l_0 jest takie, że $j_{l_0} \geq 2$.

Z Lematu 1.16 istnieje wielomian pierwszego rodzaju G_2 taki, że

$$\mu_1(f^{-1}) \leq 2\mu_1(f) \leq G_2(M_{r,\alpha}(f))$$

oraz

$$\mu_j(f^{-1}) \leq \mu_j(f)(1 + 2\mu_1(f))^{j+1} + F(M_{j-1}(f)) \leq G_2(M_{r,\alpha}(f)),$$

$j = 2, \dots, r$, dla $\mu_1(f) \leq \frac{1}{2}$.

Wykorzystując powyższe oszacowania oraz (1.17) mamy

$$\begin{aligned}
I_2 \leq \sum C_{i,j_1,\dots,j_i}\Big(& G_1(M_{r,\alpha}(f))\mu_i(f)\big(1+G_2(M_{r,\alpha}(f))\big)^i \\
&+ \mu_{i,\alpha}(f)(1+2\mu_1(f))^2 G_2(M_{r,\alpha}(f))\big(1+G_2(M_{r,\alpha}(f))\big)^{i-1} \\
&+ 2^{i-1}(1+2\mu_1(f))\mu_i(f)G_1(M_{r,\alpha}(f))(G_2(M_{r,\alpha}(f)))^{i-1}\Big) \\
\leq F_2(M_{r,\alpha}(f))&
\end{aligned}$$

dla $\mu_1(f) \leq \frac{1}{6}$, gdzie F_2 jest wielomianem drugiego rodzaju zależnym od r i α.

Podsumowując obie części powyższych rozważań otrzymujemy

$$\mu_{r,\alpha}(f^{-1}) \leq \mu_{r,\alpha}(f) + F_1(M_{r,\alpha}(f)) + F_2(M_{r,\alpha}(f))$$

dla każdego $f \in \mathrm{Diff}^{r,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ takiego, że $\mu_1(f) \leq \frac{1}{6}$, co kończy dowód (1).

Przy spełnieniu założeń własności (2), z Lematu 1.13 (1) istnieje wielomian pierwszego rodzaju G zależny od r, R_K i α taki, że

$$\mu_{r,\alpha}(f^{-1}) \leq \Big(1 + G(\mu_{r,\alpha}(f))\Big)\mu_{r,\alpha}(f) \leq 2\mu_{r,\alpha}(f)$$

dla dostatecznie małego $\mu_{r,\alpha}(f)$. □

1.3. Własności topologiczne grup dyfeomorfizmów na $\mathbb{R}^n$

Teraz przedstawimy własności C^r-topologii (Whitney'a) potrzebne w naszych rozważaniach. Informacje na ten temat można znaleźć w [10] i [24].

Zakładamy, że $r \geq 0$ i $n \geq 1$.

Definicja 1.19. Niech $0 \leq p \leq r$. W przestrzeni $C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ wprowadzamy *C^p-topologię* przy pomocy pełnego układu otoczeń

$$\begin{aligned}
\beta_f^p(K,\varepsilon) = \{h \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \,:\, & \|D^j h(x) - D^j f(x)\| < \varepsilon_i, \\
& 0 \leq j \leq p,\ x \in K_i,\ i \in I\},
\end{aligned}$$

gdzie $f \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $K = \{K_i\}_{i \in I}$ jest lokalnie skończonym pokryciem $\mathbb{R}^n$ złożonym ze zbiorów zwartych oraz $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ rodziną stałych dodatnich.

Wprowadzone wcześniej przestrzenie wyposażamy w C^r-topologię indukowaną z przestrzeni $C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Składową spójną przestrzeni X oznaczamy przez X_0.

Własność 1.20. *Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, $K \subset U$ zbiorem zwartym i niech $f : U \to \mathbb{R}^n$ będzie zanurzeniem klasy C^1. Wówczas istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że jeśli $g : U \to \mathbb{R}^n$ jest immersją klasy C^1, $\|Dg(x) - Df(x)\| < \varepsilon$ i $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$ dla $x \in K$, to $g|_K$ jest injekcją.*

Dowód. Załóżmy, że istnieje $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $g_i : U \to \mathbb{R}^n$, ciąg immersji klasy C^1, które nie są injekcjami taki, że $\|Dg_i(x) - Df(x)\| \to 0$ i $|g_i(x) - f(x)| \to 0$ jednostajnie na K. Wówczas istnieją ciągi $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset K$ takie, że $g_i(x_i) = g_i(y_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Możemy przyjąć, że $x_i \to x \in K$ i $y_i \to y \in K$. Stąd

$$|f(x_i) - f(y_i)| \leq |f(x_i) - g_i(x_i)| + |g_i(y_i) - f(y_i)| \to 0,$$

więc $f(x) = f(y)$. Z injektywności f mamy $x = y$.

Określamy $v_i = \frac{x_i - y_i}{|x_i - y_i|}$, $i \in \mathbb{N}$. Wybierając podciąg możemy przyjąć, że ciąg $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do pewnego elementu $v \in S^{n-1}$, gdzie S^{n-1} oznacza $(n-1)$-wymiarową sferę jednostkową w $\mathbb{R}^n$. Ze wzoru Taylora otrzymujemy

$$\begin{aligned} |Df(y_i).v_i| &\leq |Df(y_i).v_i - Dg_i(y_i).v_i| + |Dg_i(y_i).v_i| \\ &= |Df(y_i).v_i - Dg_i(y_i).v_i| + \frac{|g_i(x_i) - g_i(y_i) - Dg_i(y_i).(x_i - y_i)|}{|x_i - y_i|}, \end{aligned}$$

gdzie prawa strona dąży do zera. Z drugiej strony $Df(y_i).v_i \to Df(y).v$. Stąd $Df(y).v = 0$, co jest sprzeczne z immersyjnością f. □

Lemat 1.21. *Niech $r \geq 1$. Wówczas zbiór $\mathrm{Diff}^r_c(\mathbb{R}^n)$ jest otwarty w $C^r_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ w C^1-topologii.*

Dowód. Dowód wystarczy przeprowadzić dla $r = 1$, gdyż

$$\mathrm{Diff}^r_c(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Diff}^1_c(\mathbb{R}^n) \cap C^r_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Najpierw pokażemy, że zbiór zanurzeń klasy C^1, $\mathrm{Emb}^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, jest otwarty w $C^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Niech $f \in \mathrm{Emb}^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Bierzemy $K = \{K_i\}_{i\in I}$ lokalnie skończone pokrycie $\mathbb{R}^n$ złożone ze zbiorów zwartych i takie, że $\{\mathrm{Int}\, K_i\}_{i\in I}$ też jest pokryciem.

Niech $i \in I$. Zbiór $\{Df(x) : x \in K_i\}$ jest zwarty i składa się z izomorfizmów. Zbiór izomorfizmów w $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ jest otwarty, więc istnieje $\varepsilon_i > 0$ takie, że $Dh(x)$, $x \in K_i$, jest izomorfizmem dla każdego $h \in C^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ spełniającego warunek $\|Dh(x) - Df(x)\| < \varepsilon_i$, $x \in K_i$. Biorąc rodzinę stałych $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ otrzymujemy otoczenie $\beta^1_f(K, \varepsilon)$ odwzorowania f złożone z immersji.

Następnie bierzemy $\{L_i\}_{i\in I}$ lokalnie skończone pokrycie $\mathbb{R}^n$ złożone ze zbiorów zwartych takie, że $L_i \subset \mathrm{Int}\, K_i$, $i \in I$. Odwzorowanie f jest zanurzeniem, więc dla każdego $i \in I$ istnieje zbiór otwarty $V_i \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $f(L_i) \subset V_i$ i $f(\overline{\mathbb{R}^n \setminus K_i}) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{V}_i$. Możemy zmniejszyć $\varepsilon_i > 0$ tak, by

$$h(L_i) \subset V_i \quad \text{i} \quad h(\overline{\mathbb{R}^n \setminus K_i}) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{V}_i, \tag{1.18}$$

dla każdego $h \in \beta^1_f(K, \varepsilon)$. Ponadto z Własności 1.20 możemy założyć, że $h|_{K_i}$ jest injekcją, $i \in I$, gdzie przyjmujemy $U = \mathbb{R}^n$ i $K = K_i$. Pokażemy, że wówczas zbiór $\beta^1_f(K, \varepsilon)$ składa się z zanurzeń.

Niech $h \in \beta^1_f(K, \varepsilon)$. Bierzemy $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$ takie, że $x \in L_i$ dla pewnego $i \in I$. Mamy $h(x) \neq h(y)$. Dla $y \notin K_i$ wynika to z (1.18), a dla $y \in K_i$ korzystamy z faktu, że $h|_{K_i}$ jest injekcją. Stąd h jest injekcją. Ponadto ma ono zwarty nośnik, więc jest domknięte i $h : \mathbb{R}^n \to h(\mathbb{R}^n)$ jest homeomorfizmem. To oznacza, że h jest zanurzeniem i zbiór $\mathrm{Emb}^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ jest otwarty w $C^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ w C^1-topologii.

Analogicznie jak w przypadku immersyjności pokazujemy, że zbiór submersji, $\mathrm{Sub}^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, jest otwarty w $C^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Oczywiście każdy dyfeomorfizm jest zanurzeniem i submersją. Odwrotnie, niech $g \in \mathrm{Emb}^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Sub}^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Odwzorowanie g ma zwarty nośnik, więc jego obraz jest domknięty. Ponadto obraz submersji jest otwarty. Ze spójności przestrzeni $\mathbb{R}^n$ odwzorowanie g jest surjekcją i jako surjektywne zanurzenie jest dyfeomorfizmem. W ten sposób pokazaliśmy, że

$$\mathrm{Diff}^1_c(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Emb}^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Sub}^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

co oznacza, że zbiór $\mathrm{Diff}^1_c(\mathbb{R}^n)$ jest otwarty w $C^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ w C^1-topologii. $\square$

Lemat 1.22. *Niech $0 \leq p < r \leq \infty$. Wówczas zbiór $C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ jest gęsty w $C^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Ponadto jeśli $f \in C^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ jest odwzorowaniem klasy C^r w otoczeniu zbioru domkniętego $L \subset \mathbb{R}^n$, to w dowolnym C^p-otoczeniu odwzorowania f w $C^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ istnieje $g \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ takie, że $g = f$ na L.*

Dowód. Dla każdego $\delta > 0$ istnieje funkcja $\gamma_\delta : \mathbb{R} \to [0, 1]$ klasy C^∞ taka, że $\mathrm{supp}(\gamma_\delta) = [-\delta, \delta]$. Określamy funkcję $\vartheta_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n, [0, \infty))$ wzorem

$$\vartheta_\delta(x) = \frac{\gamma_\delta(|x|)}{\int_{B(0,\delta)} \gamma_\delta(|z|)\, dz},$$

gdzie $B(0, \delta)$ jest kulą w $\mathbb{R}^n$ o środku w 0 i promieniu δ. Z definicji mamy $\mathrm{supp}(\vartheta_\delta) = \overline{B}(0, \delta)$ i $\int_{\mathbb{R}^n} \vartheta_\delta(x)\, dx = 1$.

Dla $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ określamy odwzorowanie $\vartheta_\delta * h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wzorem

$$(\vartheta_\delta * h)(x) = \int_{B(0,\delta)} \vartheta_\delta(y) h(x - y)\, dy.$$

Niech $f \in C^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ i niech $K = \{K_i\}_{i\in I}$ będzie lokalnie skończonym pokryciem $\mathbb{R}^n$ złożonym ze zbiorów zwartych oraz $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ rodziną stałych dodatnich. Pokażemy, że

$$\beta^p_f(K, \varepsilon) \cap C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \neq \emptyset.$$

Niech $i \in I$. Odwzorowanie f jest ciągłe wraz ze swymi pochodnymi, więc dla każdego $\tilde{\varepsilon}_i > 0$ istnieje $\delta_i > 0$ takie, że dla $x \in K_i$, $y \in \mathbb{R}^n$, $|x - y| < \delta_i$ mamy $\|D^j f(x) - D^j f(y)\| < \tilde{\varepsilon}_i$, $0 \leq j \leq p$. Bierzemy $\vartheta_i = \vartheta_{\delta_i}$ i $g_i = \vartheta_i * f$.

Dla każdego $1 \le j \le r$ i $x \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$\begin{aligned} D^j g_i(x) &= D^j \left(\int_{B(0,\delta_i)} \vartheta_i(y) f(x-y)\, dy \right) = D^j \left(\int_{B(x,\delta_i)} \vartheta_i(x-z) f(z)\, dz \right) \\ &= D^j \left(\int_{\mathbb{R}^n} \vartheta_i(x-z) f(z)\, dz \right) = \int_{\mathbb{R}^n} D^j \vartheta_i(x-z) f(z)\, dz \\ &= \int_{B(0,\delta_i)} D^j \vartheta_i(y) f(x-y)\, dy = (D^j \vartheta_i * f)(x), \end{aligned}$$

czyli $g_i \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Niech $x \in K_i$ i $0 \le j \le p$. Zauważmy, że

$$D^j g_i(x) = D^j \left(\int_{B(0,\delta_i)} \vartheta_i(y) f(x-y)\, dy \right) = \int_{B(0,\delta_i)} \vartheta_i(y) D^j f(x-y)\, dy.$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|D^j g_i(x) - D^j f(x)\| &= \left\| \int_{B(0,\delta_i)} \vartheta_i(y) D^j f(x-y)\, dy - \int_{B(0,\delta_i)} \vartheta_i(y) D^j f(x)\, dy \right\| \\ &= \left\| \int_{B(0,\delta_i)} \vartheta_i(y) \left(D^j f(x-y) - D^j f(x) \right) dy \right\| \\ &\le \int_{B(0,\delta_i)} \vartheta_i(y) \|D^j f(x-y) - D^j f(x)\|\, dy < \tilde{\varepsilon}_i. \end{aligned}$$

Bierzemy $\lambda = \{\lambda_i\}_{i \in I}$ lokalnie skończony rozkład jedynki klasy C^∞ na $\mathbb{R}^n$ skojarzony z K i określamy odwzorowanie $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ klasy C^r wzorem

$$g(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i(x) g_i(x).$$

Z lokalnej skończoności pokrycia K możemy przyjąć, że dla $x \in K_i$ powyższa suma przebiega po zbiorze skończonym $I_i = \{l \in I : K_l \cap K_i \neq \emptyset\}$, $i \in I$. Ponadto istnieje rodzina $\widetilde{C} = \{\widetilde{C}_i\}_{i \in I}$ stałych dodatnich zależnych od λ, p i $\{I_i\}_{i \in I}$ takich, że dla każdego $x \in K_i$ i $0 \le j \le p$ mamy

$$\begin{aligned} \|D^j g(x) - D^j f(x)\| &\le \sum_{l \in I_i} \|D^j(\lambda_l g_l - \lambda_l f)(x)\| \\ &\le \sum_{l \in I_i} \sum_{q=0}^{j} \binom{j}{q} \|D^q \lambda_l(x)\| \|D^{j-q} g_l(x) - D^{j-q} f(x)\| \\ &< \sum_{l \in I_i} \widetilde{C}_l \tilde{\varepsilon}_l < \varepsilon_i \end{aligned}$$

dla dostatecznie małych $\tilde{\varepsilon}_i > 0$, $i \in I$. Stąd $g \in \beta_f^p(K, \varepsilon) \cap C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, co kończy dowód pierwszej części lematu.

Teraz załóżmy, że $f \in C^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ jest klasy C^r w otoczeniu W zbioru domkniętego $L \subset \mathbb{R}^n$ i niech $\beta^p_f(K, \varepsilon)$ będzie otoczeniem f z bazy.

Bierzemy rozkład jedynki $\{\psi_1, \psi_2\}$ klasy C^∞ na $\mathbb{R}^n$ taki, że $\operatorname{supp}(\psi_1) \subset W$ i $\operatorname{supp}(\psi_2) \subset \mathbb{R}^n \setminus L$. Z pierwszej części dowodu dla każdej rodziny $\tilde{\varepsilon} = \{\tilde{\varepsilon}_i\}_{i \in I}$ stałych dodatnich istnieje $h \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ takie, że $h \in \beta^p_f(K, \tilde{\varepsilon})$. Określamy odwzorowanie $g = \psi_1 f + \psi_2 h \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Wówczas $g = f$ na L oraz dla każdego $i \in I$ istnieje stała $\widetilde{C}_i > 0$ zależna od ψ_2 i p taka, że

$$\begin{aligned}
\|D^j g(x) - D^j f(x)\| &= \|D^j(\psi_2(h - f))(x)\| \\
&\le \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} \|D^l \psi_2(x)\| \|D^{j-l} h(x) - D^{j-l} f(x)\| \\
&< \widetilde{C}_i \tilde{\varepsilon}_i < \varepsilon_i
\end{aligned}$$

dla każdego $x \in K_i$ i $0 \le j \le p$ oraz dostatecznie małego $\tilde{\varepsilon}_i > 0$. W szczególności $g \in \beta^p_f(K, \varepsilon)$. □

Wniosek 1.23. *Niech $r \ge 1$ i niech K będzie zbiorem zwartym, wypukłym w $\mathbb{R}^n$. Wówczas zbiór $\mathrm{Diff}^{r+1}_K(\mathbb{R}^n)$ jest gęsty w $\mathrm{Diff}^r_K(\mathbb{R}^n)$.*

Dowód. Możemy przyjąć, że $0 \in \operatorname{Int} K$, bo sytuacja nie zależy od wyboru układu współrzędnych. Niech $f \in \mathrm{Diff}^r_K(\mathbb{R}^n)$. Z Lematu 1.21 istnieje U otoczenie f w $C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ w C^1-topologii złożone z dyfeomorfizmów. Niech $\beta^r_f(K', \varepsilon) \subset U$ będzie zbiorem z bazy. Dla $0 < t < 1$ określamy odwzorowanie

$$f_t : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto t f(\tfrac{1}{t} x) \in \mathbb{R}^n.$$

Jest to dyfeomorfizm klasy C^r i $\operatorname{supp}(f_t) \subset \operatorname{Int} K$. Ze zwartości K istnieje $\delta > 0$ takie, że dla $x \in K'_i$, $y \in \mathbb{R}^n$, $|x - y| < \delta$ mamy $\|D^j f(x) - D^j f(y)\| < \frac{\varepsilon_i}{4}$, $0 \le j \le r$. Stąd dla $t = t_\delta$ dostatecznie bliskiego 1 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\|D^j f_t(x) - D^j f(x)\| &\le \left\| t^{1-j} D^j f(\tfrac{1}{t} x) - D^j f(\tfrac{1}{t} x) \right\| + \left\| D^j f(\tfrac{1}{t} x) - D^j f(x) \right\| \\
&< |t^{1-j} - 1| \|f\|_j + \frac{\varepsilon_i}{4} \le \frac{\varepsilon_i}{2}
\end{aligned}$$

dla $x \in K'_i$ i $0 \le j \le r$, czyli $f_t \in \beta^r_f(K', \frac{\varepsilon}{2})$. Z Lematu 1.22 w otoczeniu $\beta^r_{f_t}(K', \frac{\varepsilon}{2})$ odwzorowania f_t istnieje $g \in C^{r+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ takie, że $\operatorname{supp}(g) \subset K$. Z powyższych uwag mamy $g \in \beta^r_f(K', \varepsilon) \cap \mathrm{Diff}^{r+1}_K(\mathbb{R}^n)$. □

Własność 1.24. *Niech $r \ge 1$. Grupa $\mathrm{Diff}^r_c(\mathbb{R}^n)_0$ składa się z dyfeomorfizmów dyfeotopijnych z* Id *przez C^r-dyfeotopie o zwartych nośnikach.*

Dowód. Z Lematu 1.21 istnieje otoczenie $\beta^1_{\mathrm{Id}}(K, \varepsilon)$ identyczności w $C^r_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ takie, że $\beta^1_{\mathrm{Id}}(K, \varepsilon) \subset \mathrm{Diff}^r_c(\mathbb{R}^n)_0$.

Niech $f \in \beta^1_{\mathrm{Id}}(K, \varepsilon)$. Określamy odwzorowanie

$$H : \mathbb{R}^n \times I \ni (x, t) \mapsto t f(x) + (1 - t) x \in \mathbb{R}^n.$$

Wówczas $H_t \in \beta^1_{\mathrm{Id}}(K,\varepsilon) \subset \mathrm{Diff}^r_c(\mathbb{R}^n)_0$, $t \in I$. Stąd H jest C^r-dyfeotopią od Id do f o zwartym nośniku. Grupa $\mathrm{Diff}^r_c(\mathbb{R}^n)$ jest grupą topologiczną, więc teraz wystarczy pokazać, że C^r-dyfeotopijność z Id jest zgodna ze składaniem odwzorowań.

Niech $f, g \in \mathrm{Diff}^r_c(\mathbb{R}^n)_0$ będą dyfeotopijne z Id przez C^r-dyfeotopie F i G o zwartych nośnikach. Wówczas odwzorowanie

$$H_t(x) = F_t(G_1^{-1}(G_{1-t}(x)))$$

jest C^r-dyfeotopią od Id do fg^{-1}.

Odwrotnie, niech f będzie dyfeomorfizmem dyfeotopijnym z Id przez C^r-dyfeotopię H o zwartym nośniku. Z definicji dyfeotopii odwzorowanie

$$I \ni t \mapsto H_t \in \mathrm{Diff}^r_c(\mathbb{R}^n)$$

jest ciągłe w C^r-topologii, więc $f = H_1 \in \mathrm{Diff}^r_c(\mathbb{R}^n)_0$. □

Własność 1.25. *Niech $r \geq 1$. Wówczas $\mathrm{Diff}^r_c(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Diff}^r_c(\mathbb{R}^n)_0$. W szczególności dla zbioru zwartego, wypukłego $K \subset \mathbb{R}^n$ mamy $\mathrm{Diff}^r_K(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Diff}^r_K(\mathbb{R}^n)_0$.*

Dowód. Bierzemy $f \in \mathrm{Diff}^r_c(\mathbb{R}^n)$. Zakładamy, że $\mathrm{supp}(f) \subset \mathrm{Int}\, K'$, gdzie $K' \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem zwartym. Określamy odwzorowanie $H : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ wzorem

$$H(x,t) = \begin{cases} tf\left(\frac{1}{t}x\right) & t \neq 0 \\ x & t = 0 \end{cases}.$$

Jest to C^0-dyfeotopia od Id do f o nośniku w $\mathrm{Int}\, K'$. Możemy przeskalować t tak, by $H_t = \mathrm{Id}$ dla $t \in [0, \frac{\varepsilon}{2}]$, gdzie $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Przyjmujemy $H_t = \mathrm{Id}$ dla $t \leq 0$ i $H_t = f$ dla $t \geq 1$ i definiujemy odwzorowanie

$$\widehat{H} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ni (x,t) \mapsto (H_t(x), t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Jest ono klasy C^r poza $(\mathrm{Int}\, K') \times (\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)$. Z Lematu 1.22 w każdym C^0-otoczeniu $\widehat{H}$ w $C^0(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1})$ istnieje $\widehat{H}' \in C^r(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1})$ takie, że $\widehat{H}' = \widehat{H}$ poza $K' \times (\frac{\varepsilon}{3}, 2\varepsilon)$.

Z konstrukcji w Lemacie 1.22 wynika, że $\widehat{H}'$ jest postaci $\widehat{H}'(x,t) = (H'_t(x), t)$, gdyż funkcja ϑ_i, $i \in I$, jest stała na sferach o środku w 0. W szczególności odwzorowanie $H' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ jest klasy C^r i $H' = H$ poza $K' \times (\frac{\varepsilon}{3}, 2\varepsilon)$. Dla dostatecznie małego otoczenia H mamy $H'_t \in \mathrm{Diff}^r_c(\mathbb{R}^n)$, $t \in I$. Stąd $H'|_{\mathbb{R}^n \times I}$ jest C^r-dyfeotopią od Id do f o nośniku w K' i z Własności 1.24 mamy $f \in \mathrm{Diff}^r_c(\mathbb{R}^n)_0$.

Załóżmy teraz, że $f \in \mathrm{Diff}^r_K(\mathbb{R}^n)$. Przyjmujemy, że $0 \in \mathrm{Int}\, K$. Z wypukłości zbioru K istnieje $a > 0$ takie, że $[-a,a]^n \subset K$.

Z pierwszej części dowodu wynika, że istnieje C^r-dyfeotopia H' od Id do f o nośniku w pewnym zbiorze $[-b,b]^n$, gdzie $b > a$. Zakładamy, że $H'_t = f$

dla $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Bierzemy funkcję $\lambda \in C^\infty([0,1],[1,\frac{b}{a}])$ taką, że $\lambda(t) = \frac{b}{a}$ dla $t \in [0, \frac{1}{2}]$ i $\lambda(1) = 1$. Wówczas odwzorowanie

$$H(x,t) = \frac{1}{\lambda(t)} H'(\lambda(t)x, t)$$

jest C^r-dyfeotopią od Id do f o nośniku w K. $\square$

Własność 1.26. *Niech $r \geq 1$ i niech α będzie modułem ciągłości. Ponadto zakładamy, że $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem zwartym, wypukłym. Wówczas funkcja $d(f,g) = \mu_{r,\alpha}(f-g)$ jest metryką na $\mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n)$. Topologię przez nią indukowaną nazywamy $C^{r,\alpha}$-topologią. Grupa $\mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n)$ wyposażona w tę topologię jest spójną grupą topologiczną. W szczególności $\mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n)_0$.*

Dowód. Najpierw pokażemy, że d jest metryką.

Niech $f, g \in \mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n)$. Odwzorowanie $D^r(f-g)$ jest lokalnie α-ciągłe i $f - g = 0$ na $\mathbb{R}^n \setminus K$, więc ze zwartości zbioru K supremum jest osiągnięte oraz $\mu_{r,\alpha}(f-g) < \infty$.

Dla $f = g$ mamy $\mu_{r,\alpha}(f-g) = 0$. Odwrotnie, niech $\mu_{r,\alpha}(f-g) = 0$. Stąd $D^r(f-g) = 0$, czyli $f - g$ jest wielomianem. Ale $f - g = 0$ na $\mathbb{R}^n \setminus K$, więc $f = g$ na $\mathbb{R}^n$. Prawdziwość pozostałych warunków wynika z własności norm.

Udowodnimy teraz ciągłość składania odwzorowań w $\mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n)$ względem pierwszej współrzędnej.

Niech $f_1, f_2, g \in \mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n)$. Mamy $D^i(f_1 - f_2) = 0$ na $\overline{\mathbb{R}^n \setminus K}$, $1 \leq i \leq r$ i $R_K < \infty$. Postępując jak w przypadku drugiej i trzeciej nierówności w dowodzie Lematu 1.13 (1) otrzymujemy oszacowania

$$\|f_1 - f_2\|_i \leq C\mu_{i,\alpha}(f_1 - f_2), \quad \mu_{i-1,\alpha}(f_1 - f_2) \leq C\mu_{i,\alpha}(f_1 - f_2), \tag{1.19}$$

$1 \leq i \leq r$, gdzie C jest stałą z Lematu 1.13 (1).

Aby uzyskać (1.13) i (1.15) nie korzystamy z założeń Lematu 1.13, więc prawdziwe jest poniższe rozumowanie.

Z (1.13) i (1.19) oraz stosując Lemat 1.13 (1) dla g możemy zapisać

$$\begin{aligned}\mu_{1,\alpha}(f_1 g - f_2 g) &\leq \mu_{1,\alpha}(f_1 - f_2)(1 + \mu_1(g))^2 + \|f_1 - f_2\|_1 \mu_{1,\alpha}(g) \\ &\leq \Big((1 + C\mu_{1,\alpha}(g))^2 + C\mu_{1,\alpha}(g)\Big)\mu_{1,\alpha}(f_1 - f_2).\end{aligned}$$

Dla $r \geq 2$, z pierwszego oszacowania w (1.15) mamy

$$\begin{aligned}\mu_{r,\alpha}(f_1 g - f_2 g) \leq\ & \mu_{r,\alpha}(f_1 - f_2)(1 + \mu_1(g))\|g\|_1^r \\ &+ 2^{r-1}\|f_1 - f_2\|_r \mu_{1,\alpha}(g)(\mu_1(g))^{r-1} \\ &+ \mu_{1,\alpha}(f_1 - f_2)(1 + \mu_1(g))\|g\|_r + \|f_1 - f_2\|_1 \mu_{r,\alpha}(g) \\ &+ \sum C_{i,j_1,\dots,j_i}\Big(\mu_{i,\alpha}(f_1 - f_2)(1 + \mu_1(g))\|g\|_{j_1} \dots \|g\|_{j_i} \\ &\qquad + 2^{i-1}\|f_1 - f_2\|_i \mu_{j_1,\alpha}(g)\mu_{j_2}(g)\dots\mu_{j_i}(g)\Big).\end{aligned}$$

Korzystając z (1.19) i z Lematu 1.13 (1) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mu_{r,\alpha}(f_1g - f_2g) \leq\ & \mu_{r,\alpha}(f_1 - f_2)(1+\mu_1(g))^{r+1} \\ & + 2^{r-1}C\mu_{r,\alpha}(f_1 - f_2)\mu_{1,\alpha}(g)(\mu_1(g))^{r-1} \\ & + \mu_{1,\alpha}(f_1 - f_2)(1+\mu_1(g))\mu_r(g) + C\mu_{1,\alpha}(f_1 - f_2)\mu_{r,\alpha}(g) \\ & + \sum C_{i,j_1,\dots,j_i}\Big(\mu_{i,\alpha}(f_1 - f_2)(1+\mu_1(g))\prod_{1\leq l\leq i}(1+\mu_{j_l}(g)) \\ & \qquad + 2^{i-1}C\mu_{i,\alpha}(f_1 - f_2)\mu_{j_1,\alpha}(g)\mu_{j_2}(g)\dots\mu_{j_i}(g)\Big) \\ \leq\ & \widetilde{C}\mu_{r,\alpha}(f_1 - f_2),\end{aligned}$$

gdzie $\widetilde{C} > 0$ jest pewną stałą zależną od g, r, R_K i α.

Analogicznie pokazujemy ciągłość składania względem drugiej współrzędnej. Stąd odwzorowania

$$R_f : \mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n) \ni h \mapsto hf \in \mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n),$$
$$L_f : \mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n) \ni h \mapsto fh \in \mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n),$$

są ciągłe względem $C^{r,\alpha}$-topologii.

Następnie oznaczamy przez comp i inv składanie i odwracanie odwzorowań w $\mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n)$. Z Lematów 1.17 i 1.18 wynika, że odwzorowania te są ciągłe odpowiednio w $(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ i Id.

Niech teraz $(f_0, g_0) \in \mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n)$. Dla (f, g) z dostatecznie małego $C^{r,\alpha}$-otoczenia (f_0, g_0) mamy

$$fg = L_{f_0} \circ R_{g_0} \circ \mathrm{comp} \circ (L_{f_0^{-1}}, R_{g_0^{-1}})(f, g),$$

więc składanie jest ciągłe względem $C^{r,\alpha}$-topologii w punkcie (f_0, g_0). Podobnie

$$f^{-1} = L_{f_0^{-1}} \circ \mathrm{inv} \circ R_{f_0^{-1}}(f)$$

dla f z pewnego $C^{r,\alpha}$-otoczenia f_0 w $\mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n)$. Stąd odwracanie odwzorowań jest ciągłe w $C^{r,\alpha}$-topologii i $\mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n)$ jest grupą topologiczną.

Pozostało wykazać, że grupa $\mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n)$ jest spójna. W tym celu zakładamy, że f należy do otoczenia $\beta^1_{\mathrm{Id}}(K, \varepsilon) \subset \mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n)_0$ w C^1-topologii w $C^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ i określamy $C^{r,\alpha}$-dyfeotopię od Id do f o nośniku w K wzorem

$$H : \mathbb{R}^n \times I \ni (x, t) \mapsto tf(x) + (1-t)x \in \mathbb{R}^n.$$

Dla $t_1, t_2 \in I$ mamy oszacowanie

$$\begin{aligned}\mu_{r,\alpha}(H_{t_1} - H_{t_2}) &= \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{\|D^r(H_{t_1} - H_{t_2})(x) - D^r(H_{t_1} - H_{t_2})(y)\|}{\alpha(|x-y|)} \\ &= \sup_{x \neq y} \frac{\|(t_1 - t_2)D^r f(x) - (t_1 - t_2)D^r f(y)\|}{\alpha(|x-y|)} \\ &\leq \mu_{r,\alpha}(f)|t_1 - t_2|,\end{aligned}$$

czyli odwzorowanie $I \ni t \mapsto H_t \in \mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n)$ jest ciągłe w $C^{r,\alpha}$-topologii i grupa $\mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n)$ jest lokalnie spójna.

Niech $f \in \mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{Diff}^r_K(\mathbb{R}^n)$. Z Wniosku 1.23 zbiór $\mathrm{Diff}^{r+1}_K(\mathbb{R}^n)$ jest gęsty w $\mathrm{Diff}^r_K(\mathbb{R}^n)$. Stąd w dowolnym C^r-otoczeniu f w $\mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n)$ istnieje $g \in \mathrm{Diff}^{r+1}_K(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n)$. Dla dostatecznie małego otoczenia z lokalnej spójności $\mathrm{Diff}^{r,\alpha}_K(\mathbb{R}^n)$ istnieje $C^{r,\alpha}$-dyfeotopia od g do f o nośniku w K. Ponadto z Własności 1.24 i 1.25 wynika, że grupa $\mathrm{Diff}^{r+1}_K(\mathbb{R}^n)$ jest spójna i istnieje C^{r+1}-dyfeotopia od Id do g o nośniku w K. Stąd otrzymujemy $C^{r,\alpha}$-dyfeotopię od Id do f o nośniku w K, co kończy dowód. $\square$

2. Grupa $C^{r,s}$-dyfeomorfizmów na rozmaitości z foliacją

2.1. Odwzorowania klasy $C^{r,s}$

Zakładamy, że $r \geq 1$, $s \geq 0$, $1 \leq k \leq n$ i $1 \leq l \leq m$ są ustalonymi liczbami naturalnymi. Niech $f : U \to V$ będzie dowolnym odwzorowaniem między zbiorami otwartymi $U \subset \mathbb{R}^n$ i $V \subset \mathbb{R}^m$.

Definicja 2.1. Mówimy, że pochodna cząstkowa rzędu r odwzorowania f jest *typu* (r, s) jeśli istnieje $p = 0, \ldots, s$ takie, że różniczkowanie odbywa się $r - p$ razy względem pierwszych k współrzędnych i p razy względem ostatnich $n - k$ współrzędnych, przy czym kolejność różniczkowania jest dowolna.

Niech $x \in U$. Przez $D^{r,s}f(x)$ oznaczamy odwzorowanie r-liniowe, które w interpretacji macierzowej ma postać $D^{r,s}f(x) = [a^l_{i_1,\ldots,i_r}]^{l=1,\ldots,m}_{i_1,\ldots,i_r=1,\ldots,n}$, gdzie

$$a^l_{i_1,\ldots,i_r} = \begin{cases} \frac{\partial^r f_l}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_r}}(x) & \#\{j : i_j > k,\, j = 1, \ldots, r\} \leq s \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}.$$

Operator

$$D^{r,s}f : U \to L^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

nazywamy (r, s)-*tą pochodną* odwzorowania f. Dodatkowo wprowadzamy oznaczenie $D^{0,s}f = f$ dla $s \geq 0$.

Zauważmy, że dla $r \leq s$ mamy $D^{r,s}f = D^r f$. W szczególności będziemy pisać Df zamiast $D^{1,s}f$.

Definicja 2.2. Niech $f : U \to V$ będzie postaci $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(y))$, gdzie $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ oraz $f_1(x, y) \in \mathbb{R}^l$, $f_2(y) \in \mathbb{R}^{m-l}$. Mówimy, że f jest *klasy* $C^{r,s}$ jeśli istnieje i jest ciągłe odwzorowanie $D^{r,s}f$. Jeśli dodatkowo $D^{r,s}f$ jest lokalnie α-ciągłe, to f nazywamy odwzorowaniem *klasy* $C^{r,s,\alpha}$.

Dla $s \geq 1$, $m = n$ i $l = k$ mówimy, że odwzorowanie f jest *dyfeomorfizmem klasy* $C^{r,s}$ ($C^{r,s,\alpha}$) jeśli jest klasy $C^{r,s}$ ($C^{r,s,\alpha}$) i ma odwrotność klasy C^1.

Przez $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_k)$ oznaczamy rozmaitość z foliacją wymiaru k, której liście mają postać $L = \mathbb{R}^k \times \{\mathrm{pt}\}$. Dla odwzorowania klasy $C^{r,s}$ przez parametry k i l będziemy zawsze rozumieć wymiary foliacji odpowiednich rozmaitości.

Podamy teraz podstawowe własności wprowadzonych odwzorowań.

Lemat 2.3. *Niech $r \geq 1$, $s \geq 0$ i niech U, V, W będą podzbiorami otwartymi odpowiednio w $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_k)$, $(\mathbb{R}^m, \mathcal{F}_l)$ i $(\mathbb{R}^p, \mathcal{F}_q)$. Jeśli odwzorowania $f : V \to W$ i $g : U \to V$ są klasy $C^{r,s}$, to złożenie $f \circ g : U \to W$ jest klasy $C^{r,s}$.*

Dowód. Dowód przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na r i s.

Niech $r = 1$ i $s = 0$. Z definicji pochodnej, podobnie jak w podstawowym dowodzie dla odwzorowań różniczkowalnych pokazujemy, że istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial (f\circ g)_t}{\partial x_i}$ oraz zachodzi wzór

$$\frac{\partial (f\circ g)_t}{\partial x_i} = \left(\sum_{j=1}^{l} \frac{\partial f_t}{\partial x_j} \circ g\right) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \tag{2.1}$$

dla $i = 1, \ldots, k$ i $t = 1, \ldots, q$. Odwzorowania po prawej stronie wzoru (2.1) są ciągłe, więc pochodne $\frac{\partial (f\circ g)_t}{\partial x_i}$ są ciągłe i $f \circ g$ jest klasy $C^{1,0}$.

Gdy $r \geq 2$, to pochodne cząstkowe po prawej stronie wzoru (2.1) są typu $(r-1, 0)$. Z założenia indukcyjnego i z dwuliniowości mnożenia pochodna po prawej stronie też jest typu $(r-1,0)$. Stąd $f \circ g$ jest klasy $C^{r,0}$.

Niech $s \geq 1$. Macierz pochodnych odwzorowania $h = (h_1, h_2)$ klasy $C^{r,s}$ można zapisać w postaci

$$Dh = \begin{bmatrix} D_x h_1 & D_y h_1 \\ 0 & D_y h_2 \end{bmatrix}.$$

Dla $r = 1$ teza wynika ze standardowego dowodu. W szczególności otrzymujemy wzór (1.1), czyli

$$\begin{bmatrix} D_x(f\circ g)_1 & D_y(f\circ g)_1 \\ 0 & D_y(f\circ g)_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x f_1 \circ g & D_y f_1 \circ g \\ 0 & D_y f_2 \circ g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_x g_1 & D_y g_1 \\ 0 & D_y g_2 \end{bmatrix}.$$

Stąd mamy

$$D_x(f\circ g)_1 = (D_x f_1 \circ g) \cdot D_x g_1, \tag{2.2}$$

$$D_y(f\circ g)_1 = (D_x f_1 \circ g) \cdot D_y g_1 + (D_y f_1 \circ g) \cdot D_y g_2, \tag{2.3}$$

$$D_y(f\circ g)_2 = (D_y f_2 \circ g) \cdot D_y g_2. \tag{2.4}$$

Rozważamy wzór (2.2). Wszystkie pochodne cząstkowe w macierzach $D_x f_1$ i $D_x g_1$ są typu $(r-1, s)$. Z indukcji i z dwuliniowości mnożenia pochodne cząstkowe w macierzy $D_x(f\circ g)_1$ też są typu $(r-1,s)$. Analogicznie wszystkie pochodne cząstkowe w macierzach ze wzorów (2.3) i (2.4) są typu $(r-1, s-1)$. To oznacza, że istnieją i są ciągłe wszystkie pochodne cząstkowe typu (r,s) odwzorowania $f \circ g$. Stąd otrzymujemy tezę. □

Lemat 2.4. *Niech $r, s \geq 1$ i niech U, V będą zbiorami otwartymi w $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_k)$. Jeśli $f : U \to V$ jest klasy $C^{r,s}$ i jego odwrotność jest klasy C^1, to f^{-1} jest klasy $C^{r,s}$.*

Dowód. Niech $r \geq 2$. Zakładamy indukcyjnie, że f^{-1} jest klasy $C^{r-1,s}$. Ze wzoru (1.3) mamy

$$D(f^{-1}) = \begin{bmatrix} I_1 & -I_1 \cdot (D_y f_1 \circ f^{-1}) \cdot I_2 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix},$$

gdzie $I_1 = \operatorname{inv} \circ D_x f_1 \circ f^{-1}$ i $I_2 = \operatorname{inv} \circ D_y f_2 \circ f^{-1}$. Odwzorowanie inv oznacza operator odwracania macierzy i jest klasy C^∞. Korzystając z indukcji, pokazujemy jak w poprzednim dowodzie, że istnieją wszystkie pochodne cząstkowe typu (r,s) odwzorowania f^{-1}. Stąd f^{-1} jest klasy $C^{r,s}$. $\square$

Dla $r \leq s$ prawdziwe są wzory (1.1)-(1.4). Dla $r > s$ wzory (1.2) i (1.4) nie zachodzą, mamy jednak następujący lemat.

Lemat 2.5. *Niech $r, s \geq 1$ i niech U, V, W będą zbiorami otwartymi w $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_k)$. Zakładamy, że odwzorowania $f : V \to W$ i $g : U \to V$ są klasy C^r. Wówczas pochodnej cząstkowej typu (r,s) po lewej stronie wzoru (1.2) (lub (1.4)) odpowiada wyrażenie składające się tylko z pochodnych cząstkowych typu (i,s), $1 \leq i \leq r$, po prawej stronie tego wzoru. W szczególności dla odwzorowań klasy $C^{r,s}$ prawdziwe są nierówności*

(2.5)
$$\begin{aligned}\|D^{r,s}(f\circ g)(x)\| \leq \|(D^{r,s}f\circ g)(x)\|\|Dg(x)\|^r + \|(Df\circ g)(x)\|\|D^{r,s}g(x)\| \\ + \sum C_{i,j_1,\dots,j_i}\|(D^{i,s}f\circ g)(x)\|\|D^{j_1,s}g(x)\|\dots\|D^{j_i,s}g(x)\|,\end{aligned}$$

(2.6)
$$\begin{aligned}\|D^{r,s}(f^{-1})(x)\| \leq \|D(f^{-1})(x)\|\|(D^{r,s}f\circ f^{-1})(x)\|\|D(f^{-1})(x)\|^r \\ + \|D(f^{-1})(x)\|\sum C_{i,j_1,\dots,j_i}\|(D^{i,s}f\circ f^{-1})(x)\|\prod_{1\leq l\leq i}\|D^{j_l,s}(f^{-1})(x)\|,\end{aligned}$$

dla $x \in \mathbb{R}^n$, gdzie $\|\cdot\|$ oznacza standardową normę w przestrzeni odwzorowań r-liniowych $L^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Dowód. Niech f i g będą odwzorowaniami klasy C^r. Korzystając ze wzoru (1.2) pochodną cząstkową rzędu r odwzorowania $f \circ g$ możemy zapisać w postaci

(2.7)
$$\begin{aligned}\frac{\partial^r (f\circ g)_l}{\partial x_{q_1}\dots\partial x_{q_r}} &= \sum_{m_1,\dots,m_r=1}^{n}\left(\frac{\partial^r f_l}{\partial x_{m_1}\dots\partial x_{m_r}}\circ g\right)\cdot\left(\frac{\partial g_{m_1}}{\partial x_{q_1}}\times\dots\times\frac{\partial g_{m_r}}{\partial x_{q_r}}\right)\\ &+ \sum_{m_1=1}^{n}\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_{m_1}}\circ g\right)\cdot\frac{\partial^r g_{m_1}}{\partial x_{q_1}\dots\partial x_{q_r}}\\ &+ \sum C_{i,j_1,\dots,j_i}\sum_{m_1,\dots,m_i=1}^{n}\left(\frac{\partial^i f_l}{\partial x_{m_1}\dots\partial x_{m_i}}\circ g\right)\\ &\qquad\cdot\left(\frac{\partial^{j_1} g_{m_1}}{\partial x_{q_1}\dots\partial x_{q_{j_1}}}\times\dots\times\frac{\partial^{j_i} g_{m_i}}{\partial x_{q_{r-j_i+1}}\dots\partial x_{q_r}}\right),\end{aligned}$$

gdzie $l = 1, \dots, k$ oraz $q_1, \dots, q_r \in \{1, \dots, n\}$.

Jeśli pochodna po lewej stronie powyższego wyrażenia jest typu (r,s), to po prawej stronie występują tylko pochodne typu (i,s), $1 \le i \le r$, odwzorowania g. Ponadto jeśli składnik po prawej stronie wyrażenia (2.7) zawiera pochodną cząstkową rzędu i odwzorowania f, która nie jest typu (i,s), $1 \le i \le r$, to jest on równy zero. Wynika to z faktu, że wówczas więcej niż s spośród indeksów $m_1, \ldots, m_i$ jest większych od k. Z drugiej strony co najwyżej s spośród indeksów $q_1, \ldots, q_r$ może być większych od k. Tymczasem z postaci odwzorowania g mamy $\frac{\partial g_l}{\partial x_j} = 0$ dla każdego $l = k+1, \ldots, n$ i $j = 1, \ldots, k$.

Z powyższych uwag wynika, że wzór (2.7) pozostaje prawdziwy dla pochodnych cząstkowych typu (r,s), gdy i-te pochodne we wzorze (1.2) zastąpimy (i,s)-tymi pochodnymi, $i = 1, \ldots, r$. Pozostałe elementy macierzy $D^{r,s}(f \circ g)$ są zerami, więc otrzymujemy (2.5).

Analogiczne rozumowanie możemy przeprowadzić dla nierówności (2.6). □

Niech $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_k)$ będzie rozmaitością z foliacją produktową wymiaru k, której liście mają postać $L = \mathbb{R}^k \times \{\mathrm{pt}\}$.

Dla $r, s \ge 1$ i modułu ciągłości α przez $C^{r,s,[\alpha]}(n,k)$ oznaczamy przestrzeń odwzorowań $f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_k) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_k)$ klasy $C^{r,s,[\alpha]}$ działających wzdłuż liści, tzn. postaci $f(x,y) = (f_1(x,y), y)$, gdzie $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^{n-k}$. Ponadto przy pomocy indeksu c będziemy oznaczać jej podprzestrzeń złożoną z odwzorowań o zwartych nośnikach, a przez K podprzestrzeń odwzorowań o nośnikach w zbiorze $K \subset \mathbb{R}^n$.

Analogicznie określamy grupy $C^{r,s,[\alpha]}$-dyfeomorfizmów na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_k)$ działających wzdłuż liści, $\mathrm{Diff}^{r,s,[\alpha]}(n,k)$, $\mathrm{Diff}_c^{r,s,[\alpha]}(n,k)$ i $\mathrm{Diff}_K^{r,s,[\alpha]}(n,k)$. Dodatkowo wprowadzamy symbole $\mathrm{Diff}^{\infty}(n,k)$ i $\mathrm{Diff}_c^{\infty}(n,k)$ dla ich podgrup złożonych z dyfeomorfizmów klasy C^∞. Fakt, że są to grupy wynika z poniższego wniosku.

Wniosek 2.6. *Niech $r, s \ge 1$. Wówczas zbiory $\mathrm{Diff}^{r,s,[\alpha]}(n,k)$, $\mathrm{Diff}_c^{r,s,[\alpha]}(n,k)$ i $\mathrm{Diff}_K^{r,s,[\alpha]}(n,k)$ są grupami z działaniem składania odwzorowań.*

Dowód. Złożenie odwzorowań działających wzdłuż liści jest oczywiście odwzorowaniem działającym wzdłuż liści, więc dla $\mathrm{Diff}^{r,s}(n,k)$ teza wynika z Lematów 2.3 i 2.4. W przypadku przestrzeni $\mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}(n,k)$ dowód wygląda jak we Własności 1.12, przy czym rozważania przeprowadzamy na pochodnych cząstkowych. Korzystamy tutaj ze wzoru (2.7) i jego odpowiednika dla pochodnych odwzorowania odwrotnego.

W pozostałych przypadkach dowód jest oczywisty. □

2.2. Własności seminorm

Niech $r \geq 0$, $s \geq 1$ i niech α będzie modułem ciągłości. Dla odwzorowania $f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_k) \to (\mathbb{R}^m, \mathcal{F}_l)$ klasy $C^{r,s,[\alpha]}$ definiujemy seminormy

$$\mu_{r,s}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|D^{r,s}(f - \mathrm{Id})(x)\|,$$

$$\mu_{r,s,\alpha}(f) = \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{\|D^{r,s}f(x) - D^{r,s}f(y)\|}{\alpha(|x-y|)}$$

oraz

$$\|f\|_{r,s} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|D^{r,s}f(x)\|,$$

gdzie $\|\cdot\|$ oznacza standardową normę w przestrzeni odwzorowań r-liniowych $L^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Ponadto określamy

$$M_{r,s,\alpha}(f) = \sup\{\mu_{i,s}(f), \mu_{i,s,\alpha}(f) \,:\, i = 1, \ldots, r\}.$$

Dla zbioru domkniętego $K \subset \mathbb{R}^n$ wprowadzamy oznaczenie

$$R'_K = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathrm{dist}(x, \overline{\mathbb{R}^n \setminus K} \cap L_x),$$

gdzie $L_x \in \mathcal{F}_k$ jest liściem zawierającym x. W poniższych lematach będziemy zakładać, że zbiór K spełnia jeden z warunków

$$K = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \quad \text{lub} \quad \mathbb{R}^{i-1} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{n-i} \subset \mathbb{R}^n \setminus K, \tag{2.8}$$

dla pewnego $i = 1, \ldots, k$, gdzie $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$, $j = 1, \ldots, n$. Zauważmy, że wówczas $R'_K < \infty$. Zbiór $K \subset \mathbb{R}^n$ spełniający pierwszy warunek nazywamy *kostką* w $\mathbb{R}^n$.

Mamy $\|f\|_{1,s} \leq \mu_{1,s}(f) + 1$, $\mu_{1,s}(f) \leq \|f\|_{1,s} + 1$ oraz $\|f\|_{r,s} = \mu_{r,s}(f)$ dla $r \geq 2$. Zachodzi także następujący odpowiednik Lematu 1.13.

Lemat 2.7. *Niech $r, s \geq 1$ i niech α będzie modułem ciągłości.*

(1) *Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem domkniętym postaci (2.8). Wówczas istnieje stała $C > 0$ zależna od R'_K i α taka, że*

$$\mu_{r,s}(f) \leq C\mu_{r,s,\alpha}(f), \quad \mu_{r,s,\alpha}(f) \leq C\mu_{r+1,s,\alpha}(f)$$

dla dostatecznie regularnego $f \in C^{1,s}(n,k)$ takiego, że $D^{r,s}(f - \mathrm{Id}) = 0$ na $\overline{\mathbb{R}^n \setminus K}$.

(2) *Niech $1 \leq i \leq k$. Istnieje stała $C \geq 1$ zależna od α taka, że*

$$\mu_{r,s}(f) \leq C^r\mu_{r,s,\alpha}(f), \quad \mu_{r,s,\alpha}(f) \leq C^r\mu_{r+1,s,\alpha}(f)$$

dla dostatecznie regularnego $f \in C^{1,s}(n,k)$ okresowego względem i-tej współrzędnej o okresie 1.

Dowód. Pierwszą nierówność z (1) i (2) dowodzimy jak w Lemacie 1.13, tzn. mamy oszacowania

$$\mu_{r,s}(f) \le \alpha(R'_K)\mu_{r,s,\alpha}(f), \quad \mu_{r,s}(f) \le n^{r+1}\alpha(1)\mu_{r,s,\alpha}(f). \tag{2.9}$$

Dowód drugiego oszacowania z (1) przeprowadzimy w trzech krokach.

Najpierw niech $(x,y^1),(x,y^2) \in \mathbb{R}^n$, $y^1 \ne y^2$, gdzie $x \in \mathbb{R}^k$, $y^1,y^2 \in \mathbb{R}^{n-k}$. Z postaci zbioru K istnieje punkt $x^0 \in \mathbb{R}^k$ taki, że $(x^0,y^1),(x^0,y^2) \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus K}$ i $|x-x^0| \le R'_K$. Wtedy zachodzi równość

$$D^{r,s}f(x,y^1) - D^{r,s}f(x^0,y^1) = \int_0^1 D^{r+1,s}f(tx+(1-t)x^0,y^1)\cdot(x-x^0,0)\,dt. \tag{2.10}$$

Oznaczmy $I_t(a,b) = ta+(1-t)b$. Wówczas mamy

$$\begin{aligned} &\|D^{r,s}f(x,y^1) - D^{r,s}f(x,y^2)\| \\ &\quad = \|D^{r,s}f(x,y^1) - D^{r,s}f(x^0,y^1) + D^{r,s}f(x^0,y^2) - D^{r,s}f(x,y^2)\| \\ &\quad = \left\|\int_0^1 \Big(D^{r+1,s}f(I_t(x,x^0),y^1) - D^{r+1,s}f(I_t(x,x^0),y^2)\Big)\cdot(x-x^0,0)\,dt\right\| \\ &\quad \le \sup_{t\in[0,1]} \|D^{r+1,s}f(I_t(x,x^0),y^1) - D^{r+1,s}f(I_t(x,x^0),y^2)\||x-x^0| \\ &\quad \le \sup_{z\in\mathbb{R}^k} \|D^{r+1,s}f(z,y^1) - D^{r+1,s}f(z,y^2)\||x-x^0|. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\|D^{r,s}f(x,y^1) - D^{r,s}f(x,y^2)\|}{\alpha(|(x,y^1)-(x,y^2)|)} &\le \sup_{z\in\mathbb{R}^k} \frac{\|D^{r+1,s}f(z,y^1) - D^{r+1,s}f(z,y^2)\|}{\alpha(|y^1-y^2|)}|x-x^0| \\ &\le R'_K\mu_{r+1,s,\alpha}(f). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Teraz bierzemy $(x^1,y),(x^2,y) \in \mathbb{R}^n$, $x^1 \ne x^2$, gdzie $x^1,x^2 \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^{n-k}$. Gdy $|x^1-x^2| \le 1$, z (2.10) mamy

$$\frac{\|D^{r,s}f(x^1,y) - D^{r,s}f(x^2,y)\|}{\alpha(|x^1-x^2|)} \le \frac{\mu_{r+1,s}(f)|x^1-x^2|}{\alpha(|x^1-x^2|)} \le \frac{\mu_{r+1,s}(f)}{\alpha(1)}, \tag{2.13}$$

gdyż funkcja $\frac{t}{\alpha(t)}$ jest niemalejąca. Jeśli $|x^1-x^2| > 1$, to wybieramy $z^1,z^2 \in \mathbb{R}^k$ takie, że $(z^1,y),(z^2,y) \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus K}$ i $|x^1-z^1| \le R'_K$, $|x^2-z^2| \le R'_K$. Korzystając ponownie z (2.10) i z monotoniczności α możemy zapisać nierówności

$$
\begin{aligned}
&\frac{\|D^{r,s}f(x^1,y) - D^{r,s}f(x^2,y)\|}{\alpha(|x^1-x^2|)} \\
&\le \frac{\|D^{r,s}f(x^1,y) - D^{r,s}f(z^1,y)\| + \|D^{r,s}f(z^2,y) - D^{r,s}f(x^2,y)\|}{\alpha(1)} \\
&\le \frac{\mu_{r+1,s}(f)}{\alpha(1)}(|x^1-z^1| + |x^2-z^2|) \le \frac{2R'_K}{\alpha(1)}\mu_{r+1,s}(f).
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Stosując pierwszą nierówność z (2.9) otrzymujemy szukane oszacowanie.

Gdy punkty $(x^1,y^1),(x^2,y^2) \in \mathbb{R}^n$ są dowolne, to bierzemy punkt (x^1,y^2) i wykonujemy oba powyższe kroki.

Dowód drugiej nierówności z (2) również dzielimy na trzy części. Dla uproszczenia zapisu zakładamy, że $i = 1$. Ponadto poniższe rozumowanie przeprowadzamy dla pochodnych cząstkowych typu (r,s).

Bierzemy $x = (x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $y = (x_1,y_2,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$. Odwzorowanie $f(x) - f(y)$ jest okresowe jako funkcja 1-ej zmiennej, więc dla każdego $i_1, l \in \{1,\dots,n\}$ istnieją punkty $x^0 = (x_1^0,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $y^0 = (x_1^0,y_2,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ takie, że $\frac{\partial(f-\mathrm{Id})_l}{\partial x_{i_1}}(x^0) - \frac{\partial(f-\mathrm{Id})_l}{\partial x_{i_1}}(y^0) = 0$.

Postępując indukcyjnie, dla każdego $r \geq 1$ oraz $i_1,\dots,i_r,l \in \{1,\dots,n\}$ istnieją punkty $x^0 = (x_1^0,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $y^0 = (y_1^0,y_2,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ takie, że $\frac{\partial^r(f-\mathrm{Id})_l}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_r}}(x^0) - \frac{\partial^r(f-\mathrm{Id})_l}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_r}}(y^0) = 0$. Punkty x^0, y^0 zależą od x, y i pochodnej cząstkowej, którą liczymy.

Wybierając punkty x^0 i y^0 jak wyżej tak, by $|x_1 - x_1^0| \leq 1$ i $|y_1 - y_1^0| \leq 1$, dla każdej pochodnej cząstkowej możemy wykonać oszacowanie jak w (2.11) i (2.12). Stąd otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\frac{\|D^{r,s}f(x) - D^{r,s}f(y)\|}{\alpha(|x-y|)} &\le \sum \frac{\left\|\frac{\partial^r(f-\mathrm{Id})_l}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_r}}(x) - \frac{\partial^r(f-\mathrm{Id})_l}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_r}}(y)\right\|}{\alpha(|x-y|)} \\
&\le \sum \mu_{r+1,s,\alpha}(f) \le n^{r+1}\mu_{r+1,s,\alpha}(f),
\end{aligned}
$$

gdzie suma przebiega po wszystkich pochodnych cząstkowych typu (r,s).

Teraz niech $x = (x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $y = (y_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$. Dla $|x-y| \leq 1$ zachodzi oszacowanie (2.13). Gdy $|x-y| > 1$, to z okresowości f istnieją punkty $x^0 = (x_1^0,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $y^0 = (y_1^0,x_2,\dots,x_n)$ takie, że $D^{r,s}f(x^0) = D^{r,s}f(y^0)$ oraz $|x_1 - x_1^0| \leq 1$ i $|y_1 - y_1^0| \leq 1$. Możemy wykonać oszacowanie jak w (2.14) otrzymując

$$
\frac{\|D^{r,s}f(x) - D^{r,s}f(y)\|}{\alpha(|x-y|)} \le \frac{2}{\alpha(1)}\mu_{r+1,s}(f).
$$

W obu przypadkach stosujemy dodatkowo drugie oszacowanie z (2.9).

Ogólną sytuację sprowadzamy do dwóch powyższych. □

Możemy udowodnić analogiczne własności jak w Lematach 1.15-1.18, korzystając z Lematów 2.5 i 2.7 (1). W szczególności będziemy używać oszacowań dla odwzorowań α-ciągłych. Zostały one przedstawione w poniższych lematach.

Lemat 2.8. *Niech $r, s \geq 1$ i niech α będzie modułem ciągłości.*

(1) *Istnieje wielomian pierwszego rodzaju G zależny od r i α taki, że*

$$\mu_{r,s,\alpha}(fg) \leq \mu_{r,s,\alpha}(f) + \mu_{r,s,\alpha}(g) + M_{r,s,\alpha}(f)G(M_{r,s,\alpha}(g))$$

dla dowolnych $f, g \in C^{r,s,\alpha}(n,k)$.

(2) *Istnieje wielomian drugiego rodzaju F zależny od r i α taki, że*

$$\mu_{r,s,\alpha}(f^{-1}) \leq \mu_{r,s,\alpha}(f) + F(M_{r,s,\alpha}(f))$$

dla każdego $f \in \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}(n,k)$ takiego, że $\mu_{1,s}(f) \leq \frac{1}{6}$.

Lemat 2.9. *Niech $r, s \geq 1$ i niech α będzie modułem ciągłości. Zakładamy, że $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem domkniętym postaci (2.8).*

(1) *Istnieją stałe $\delta_1 > 0$ i $C_1 > 0$ zależne od r, R'_K i α takie, że*

$$\mu_{r,s,\alpha}(fg) \leq \mu_{r,s,\alpha}(f) + \mu_{r,s,\alpha}(g) + C_1\mu_{r,s,\alpha}(f)\mu_{r,s,\alpha}(g)$$

dla dowolnych $f, g \in C^{r,s,\alpha}(n,k)$ takich, że $\mu_{r,s,\alpha}(f), \mu_{r,s,\alpha}(g) \leq \delta_1$ oraz $D(f - \mathrm{Id}) = D(g - \mathrm{Id}) = 0$ na $\overline{\mathbb{R}^n \setminus K}$.

(2) *Istnieje stała $\delta_2 > 0$ zależna od r, R'_K i α taka, że*

$$\mu_{r,s,\alpha}(f^{-1}) \leq 2\mu_{r,s,\alpha}(f)$$

dla każdego $f \in \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}(n,k)$ takiego, że $\mu_{r,s,\alpha}(f) \leq \delta_2$ i $D(f - \mathrm{Id}) = 0$ na $\overline{\mathbb{R}^n \setminus K}$.

Uwaga 2.10. Spośród powyższych oszacowań konieczne jest użycie tylko tych z Lematów 2.7 (2) i 2.8. Jednak wówczas Lemat 2.7 (2) trzeba udowodnić w dwóch wersjach, tzn. dla odwzorowań spełniających założenia z (1) lub (2). W związku z tym wygodniej posługiwać się dwoma oddzielnymi warunkami.

Ponadto, korzystając z Lematu 2.8 zamiast 2.9 otrzymujemy oszacowania jak dla przypadku grupy C^∞-dyfeomorfizmów [7]. W szczególności uzyskujemy analogiczne nierówności jak w Lematach 4.18 (5) i 4.19 (3). Tutaj zaprezentujemy wersję charakterystyczną dla r skończonego, czyli jak w dowodzie Mathera [17], gdzie stosowany jest Lemat 2.9.

W dalszej części będziemy używać Lematów 2.7 (1) i 2.9 wszędzie tam gdzie jest to możliwe.

2.3. **Własności topologiczne grupy** $\mathrm{Diff}_c^{r,s}(M,\mathcal{F})$

Zakładamy, że $(M,\mathcal{F})$ jest n-wymiarową, spójną rozmaitością z foliacją, $\dim\mathcal{F}=k$.

Niech $f:(M,\mathcal{F})\to(M,\mathcal{F})$ będzie odwzorowaniem zachowującym foliację, tzn. $f(L_x)\subset L_{f(x)}$ dla każdego $x\in M$, gdzie $L_z\in\mathcal{F}$ oznacza liść zawierający z.

Definicja 2.11. Mówimy, że odwzorowanie f jest *klasy* $C^{r,s}$ jeśli dla każdego $x\in M$ istnieją mapy (U,φ), (V,ψ) takie, że $x\in U$, $f(x)\in V$ i $f(U)\subset V$ oraz odwzorowanie $\psi f\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$ jest klasy $C^{r,s}$. Ponadto f jest *dyfeomorfizmem klasy* $C^{r,s}$ jeśli jest odwzorowaniem klasy $C^{r,s}$ i dyfeomorfizmem klasy C^1.

Definicja nie zależy od wyboru map co wynika z Lematów 2.3 i 2.4. Zauważmy też, że zdefiniowane odwzorowanie ma lokalnie postać

$$(\psi f\varphi^{-1})(x,y)=((\psi f\varphi^{-1})_1(x,y),(\psi f\varphi^{-1})_2(y)).$$

Przez $C_c^{r,s}(M,M;\mathcal{F})$ i $\mathrm{Diff}_c^{r,s}(M,\mathcal{F})$ oznaczamy przestrzenie odpowiednio odwzorowań i dyfeomorfizmów $f:(M,\mathcal{F})\to(M,\mathcal{F})$ klasy $C^{r,s}$ o zwartych nośnikach, które działają wzdłuż liści, tzn. $f(L_x)\subset L_x$, $x\in M$. Z Lematów 2.3 i 2.4 wynika, że $\mathrm{Diff}_c^{r,s}(M,\mathcal{F})$ jest grupą.

Na rozmaitości $M\times I$ wprowadzamy foliację $\mathcal{F}'=\{L\times\{t\}\,:\,L\in\mathcal{F},\,t\in I\}$.

Definicja 2.12. Odwzorowanie $H:M\times I\to M$ nazywamy $C^{r,s}$-*dyfeotopią* od Id do f jeśli jest klasy $C^{r,s}$, $H_t\in\mathrm{Diff}_c^{r,s}(M,\mathcal{F})$ dla każdego $t\in I$ oraz $H_0=\mathrm{Id}$ i $H_1=f$.

Definicja 2.13. Niech $0\le p\le r$. W przestrzeni $C_c^{r,s}(M,M;\mathcal{F})$ wprowadzamy $C^{p,s}$-*topologię* przy pomocy pełnego układu otoczeń

$$\begin{aligned}&\beta_f^{p,s}(\varphi,\psi,K,\varepsilon)\\&\quad=\{h\in C_c^{r,s}(M,M;\mathcal{F})\,:\,\|D^{j,s}(\psi_ih\varphi_i^{-1})(x)-D^{j,s}(\psi_if\varphi_i^{-1})(x)\|<\varepsilon_i,\\&\qquad\qquad h(K_i)\subset V_i,\ 0\le j\le p,\ x\in\varphi_i(K_i),\ i\in I\},\end{aligned}$$

gdzie $f\in C_c^{r,s}(M,M;\mathcal{F})$, $\varphi=\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ jest lokalnie skończonym atlasem na $(M,\mathcal{F})$, $\psi=\{(V_i,\psi_i)\}_{i\in I}$ zbiorem map na $(M,\mathcal{F})$, $K=\{K_i\}_{i\in I}$ lokalnie skończonym pokryciem M złożonym ze zbiorów zwartych takich, że $K_i\subset U_i$, $i\in I$, oraz $\varepsilon=\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ rodziną stałych dodatnich.

Przestrzeń $\mathrm{Diff}_c^{r,s}(M,\mathcal{F})$ wyposażamy w $C^{r,s}$-topologię indukowaną z $C_c^{r,s}(M,M;\mathcal{F})$. Przy pomocy indeksu 0 będziemy oznaczać składowe spójne tych przestrzeni.

Lemat 2.14. *Niech* $r, s \geq 1$. *Zbiór* $\mathrm{Diff}^{r,s}_c(M, \mathcal{F})$ *jest otwarty w* $C^{r,s}_c(M, M; \mathcal{F})$ *w* $C^{1,s}$*-topologii.*

Dowód. Dowód przeprowadzamy jak w Lemacie 1.21 używając lokalnego opisu odwzorowań. W szczególności korzystając z Własności 1.20 stwierdzamy, że $\psi_i h \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(K_i)}$ jest injekcją, gdzie przyjmujemy $U = \varphi_i(U_i)$ i $K = \varphi_i(K_i)$, czyli $h|_{K_i}$ jest injekcją. $\square$

Lemat 2.15. *Niech* $1 \leq p \leq r$ *i* $s \geq 1$. *Zachodzą własności*

(1) *Składanie odwzorowań*

$$\mathrm{comp} : C^{r,s}_c(M, M; \mathcal{F}) \times C^{r,s}_c(M, M; \mathcal{F}) \ni (f, g) \mapsto fg \in C^{r,s}_c(M, M; \mathcal{F})$$

jest ciągłe w $C^{p,s}$*-topologii.*

(2) *Odwracanie*

$$\mathrm{inv} : \mathrm{Diff}^{r,s}_c(M, \mathcal{F}) \ni f \mapsto f^{-1} \in \mathrm{Diff}^{r,s}_c(M, \mathcal{F})$$

jest ciągłe w $C^{p,s}$*-topologii.*

W szczególności grupa $\mathrm{Diff}^{r,s}_c(M, \mathcal{F})$ *jest grupą topologiczną.*

Dowód. Niech $f_0, g_0 \in C^{r,s}_c(M, M; \mathcal{F})$. Bierzemy zbiór $\beta^{p,s}_{f_0 g_0}(\varphi, \psi, K, \varepsilon)$ z bazy $C^{p,s}$-topologii, gdzie $\varphi = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ jest lokalnie skończonym atlasem na $(M, \mathcal{F})$, $\psi = \{(V_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ rodziną map na $(M, \mathcal{F})$, $K = \{K_i\}_{i \in I}$ lokalnie skończonym pokryciem M złożonym ze zbiorów zwartych takich, że $K_i \subset U_i$, $i \in I$, oraz $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i \in I}$ rodziną stałych dodatnich.

Możemy przyjąć, że istnieje lokalnie skończony atlas $\varphi' = \{(U'_i, \varphi'_i)\}_{i \in I}$ na $(M, \mathcal{F})$ wraz z pokryciem $K' = \{K'_i\}_{i \in I}$ złożonym ze zbiorów zwartych takich, że $K'_i \subset U'_i$ oraz

$$g_0(U_i) \subset \mathrm{Int}\, K'_i \quad \text{i} \quad f_0(K'_i) \subset V_i, \tag{2.15}$$

dla $i \in I$.

W przeciwnym przypadku można przeprowadzić następującą konstrukcję. Niech $i \in I$. Z ciągłości odwzorowań f_0 i g_0 można wybrać pokrycie skończone $\{\widetilde{U}^j_i\}_{j \in J_i}$ zbioru K_i wraz z rodziną map $\{(U^j_i, \varphi^j_i)\}_{j \in J_i}$ i zbiorów zwartych $\{K^j_i\}_{j \in J_i}$ takich, że $\widetilde{U}^j_i \subset U_i$, $K^j_i \subset U^j_i$ oraz $g_0(\widetilde{U}^j_i) \subset \mathrm{Int}\, K^j_i$ i $f_0(K^j_i) \subset V_i$, $j \in J_i$. Określamy $\tilde{\varphi}^j_i = \varphi_i|_{\widetilde{U}^j_i}$, $\tilde{\varphi} = \{(\widetilde{U}^j_i, \tilde{\varphi}^j_i)\}_{i \in I, j \in J_i}$, $\widetilde{K} = \{\widetilde{K}^j_i\}_{i \in I, j \in J_i}$ oraz przyjmujemy $\tilde{\varepsilon} = \{\varepsilon_i\}_{i \in I, j \in J_i}$ i $\tilde{\psi} = \{(V_i, \psi_i)\}_{i \in I, j \in J_i}$.

Wówczas otrzymujemy otoczenie $\beta^{p,s}_{f_0 g_0}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \widetilde{K}, \tilde{\varepsilon}) \subset \beta^{p,s}_{f_0 g_0}(\varphi, \psi, K, \varepsilon)$ i rodziny $\varphi' = \{(U^j_i, \varphi^j_i)\}_{i \in I, j \in J_i}$, $K' = \{K^j_i\}_{i \in I, j \in J_i}$ takie, że $g_0(\widetilde{U}^j_i) \subset \mathrm{Int}\, K^j_i$ i $f_0(K^j_i) \subset V_i$ dla $i \in I$, $j \in J_i$. Jeśli nie tworzą one pokrycia rozmaitości, to rozszerzamy je dookreślając zbiory tak, by otrzymać lokalnie skończone pokrycia φ'' i K'', a w poniższym rozumowaniu bierzemy $f \in \beta^{p,s}_{f_0}(\varphi'', \psi, K'', \varepsilon'')$ i $g \in \beta^{p,s}_{g_0}(\varphi, \varphi', K, \varepsilon')$. Poza tym dowód pozostaje bez zmian.

Zakładamy, że zachodzi sytuacja jak w warunku (2.15). Pokażemy, że można dobrać rodziny $\varepsilon'' = \{\varepsilon''_i\}_{i\in I}$ i $\varepsilon' = \{\varepsilon'_i\}_{i\in I}$ stałych dodatnich tak, że dla każdego $f \in \beta^{p,s}_{f_0}(\varphi', \psi, K', \varepsilon'')$ i $g \in \beta^{p,s}_{g_0}(\varphi, \varphi', K, \varepsilon')$ mamy $fg \in \beta^{p,s}_{f_0 g_0}(\varphi, \psi, K, \varepsilon)$.

Dla uproszczenia zapisu lokalnie odwzorowania będziemy zapisywać przy pomocy daszka, tzn. dla $h \in \beta^{p,s}_{f_0}(\varphi', \psi, K', \varepsilon'')$ oznaczamy $\hat{h} = \psi_i h(\varphi'_i)^{-1}$.

Niech $i \in I$. Odwzorowanie f_0 jest ciągłe wraz ze swymi pochodnymi, więc dla każdego $\varepsilon''_i > 0$ istnieje $\delta_i > 0$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \varphi'_i(K'_i)$, $|x - y| < \delta_i$ mamy $\|D^{j,s}\hat{f}_0(x) - D^{j,s}\hat{f}_0(y)\| < \varepsilon''_i$, $0 \le j \le p$. Bierzemy $\varepsilon'_i \le \min\{\delta_i, \varepsilon''_i\}$.

Niech $f \in \beta^{p,s}_{f_0}(\varphi', \psi, K', \varepsilon'')$ i $g \in \beta^{p,s}_{g_0}(\varphi, \varphi', K, \varepsilon')$. Automatycznie zachodzi warunek $fg(K_i) \subset f(K'_i) \subset V_i$, $i \in I$. Niech $i \in I$ i $x \in \varphi_i(K_i)$. Wtedy

$$|\hat{g}(x) - \hat{g}_0(x)| < \varepsilon'_i \le \delta_i, \tag{2.16}$$

czyli możemy zapisać oszacowanie

$$|\hat{f}\hat{g}(x) - \hat{f}_0\hat{g}_0(x)| \le |\hat{f}\hat{g}(x) - \hat{f}_0\hat{g}(x)| + |\hat{f}_0\hat{g}(x) - \hat{f}_0\hat{g}_0(x)| < \varepsilon''_i + \varepsilon''_i = 2\varepsilon''_i.$$

Z rozważań Lematu 2.5 wynika, że dla pochodnych cząstkowych typu (r, s) zachodzi równość we wzorze na pochodną złożenia. Stąd, jak w (2.5) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\|D^{j,s}(\hat{f}\hat{g})(x) - D^{j,s}(\hat{f}_0\hat{g}_0)(x)\| \\
&\quad \le \sum C_{l,j_1,\dots,j_l} \Big(\|D^{l,s}\hat{f}(\hat{g}(x)) - D^{l,s}\hat{f}_0(\hat{g}_0(x))\| \|D^{j_1,s}\hat{g}(x)\| \dots \|D^{j_l,s}\hat{g}(x)\| \\
&\qquad + \|D^{l,s}\hat{f}_0(\hat{g}_0(x))\| \|D^{j_1,s}\hat{g}(x) - D^{j_1,s}\hat{g}_0(x)\| \dots \|D^{j_l,s}\hat{g}(x) - D^{j_l,s}\hat{g}_0(x)\| \Big),
\end{aligned}$$

dla $1 \le j \le p$, gdzie sumujemy po $1 \le l \le j$, $j_1 + \ldots + j_l = j$ i $j_m \ge 1$, $m = 1, \ldots, l$.

Korzystając z (2.16), dla każdego $m = 1, \ldots, p$ mamy

$$\begin{aligned}
\|D^{m,s}\hat{f}(\hat{g}(x)) - D^{m,s}\hat{f}_0(\hat{g}_0(x))\| &\le \|D^{m,s}\hat{f}(\hat{g}(x)) - D^{m,s}\hat{f}_0(\hat{g}(x))\| \\
&\quad + \|D^{m,s}\hat{f}_0(\hat{g}(x)) - D^{m,s}\hat{f}_0(\hat{g}_0(x))\| \\
&< \varepsilon''_i + \varepsilon''_i = 2\varepsilon''_i
\end{aligned}$$

oraz

$$\|D^{m,s}\hat{g}(x)\| \le \|D^{m,s}\hat{g}(x) - D^{m,s}\hat{g}_0(x)\| + \|D^{m,s}\hat{g}_0(x)\| < \varepsilon'_i + \|D^{m,s}\hat{g}_0(x)\|.$$

Ze zwartości nośników odwzorowań f_0 i g_0 istnieje stała $C_1 > 0$ zależna od f_0, g_0 i p taka, że

$$\|D^{j,s}(\hat{f}\hat{g})(x) - D^{j,s}(\hat{f}_0\hat{g}_0)(x)\| \le \sum C_{l,j_1,\dots,j_l} \left(2\varepsilon''_i(\varepsilon'_i + C_1)^l + C_1(\varepsilon'_i)^l\right) < \varepsilon_i,$$

$1 \le j \le p$, dla dostatecznie małych ε''_i, ε'_i. W ten sposób udowodniliśmy ciągłość składania odwzorowań.

Aby pokazać ciągłość odwracania zauważmy, że

$$f^{-1} = L_{f_0^{-1}} \circ \operatorname{inv} \circ R_{f_0^{-1}}(f),$$

gdzie

$$R_f : \operatorname{Diff}_c^{r,s}(M,\mathcal{F}) \ni h \mapsto hf \in \operatorname{Diff}_c^{r,s}(M,\mathcal{F}),$$
$$L_f : \operatorname{Diff}_c^{r,s}(M,\mathcal{F}) \ni h \mapsto fh \in \operatorname{Diff}_c^{r,s}(M,\mathcal{F}).$$

Na podstawie powyższych rozważań odwzorowania R_f i L_f są ciągłe, więc wystarczy udowodnić ciągłość odwzorowania inv w Id.

Niech $\beta^{p,s}_{\mathrm{Id}}(\varphi,\varphi,K,\varepsilon)$ będzie zbiorem z bazy, gdzie $\varphi = \{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ jest lokalnie skończonym atlasem na $(M,\mathcal{F})$, $K = \{K_i\}_{i\in I}$ lokalnie skończonym pokryciem M złożonym ze zbiorów zwartych takich, że $K_i \subset U_i$, $i \in I$, oraz $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ rodziną stałych dodatnich.

Wystarczy ograniczyć rozważania do takiej sytuacji, gdyż dla dowolnego zbioru $\beta^{p,s}_{\mathrm{Id}}(\varphi,\psi,K,\varepsilon)$ z bazy, gdzie $\varphi = \{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ i $\psi = \{(V_i,\psi_i)\}_{i\in I}$, mamy $K_i \subset U_i \cap V_i$. Stąd biorąc $\varphi' = \{(U_i',\varphi_i')\}_{i\in I}$, gdzie $U_i' = U_i \cap V_i$ i $\varphi_i' = \varphi_i|_{U_i'}$, dla małych $\varepsilon_i' \le \varepsilon_i$, $i \in I$, otrzymujemy $\beta^{p,s}_{\mathrm{Id}}(\varphi',\varphi',K,\varepsilon') \subset \beta^{p,s}_{\mathrm{Id}}(\varphi,\psi,K,\varepsilon)$.

Podobnie jak wyżej oznaczamy $\hat{h} = \varphi_i h \varphi_i^{-1}$ dla $h \in \beta^{p,s}_{\mathrm{Id}}(\varphi,\varphi,K,\varepsilon)$. Niech $K' = \{K_i'\}_{i\in I}$ będzie lokalnie skończonym pokryciem M złożonym ze zbiorów zwartych takich, że $K_i \subset \operatorname{Int} K_i' \subset K_i' \subset U_i$. Bierzemy $\varepsilon_i' \le \min\{\varepsilon_i, 1\}$, $i \in I$. Zmniejszając ε_i' możemy przyjąć, że dla $h \in \beta^{p,s}_{\mathrm{Id}}(\varphi,\varphi,K',\varepsilon')$ zachodzi warunek $h^{-1}(K_i) \subset \operatorname{Int} K_i'$.

Niech $f \in \beta^{p,s}_{\mathrm{Id}}(\varphi,\varphi,K',\varepsilon')$. Pokażemy, że $f^{-1} \in \beta^{p,s}_{\mathrm{Id}}(\varphi,\varphi,K,\varepsilon)$.

Niech $i \in I$ i $x \in \varphi_i(K_i)$. Mamy $f^{-1}(K_i) \subset K_i' \subset U_i$. Stąd $\hat{f}^{-1}(x) \in \varphi_i(K_i')$ i otrzymujemy

$$|\hat{f}^{-1}(x) - x| = |\hat{f}^{-1}(x) - \hat{f}(\hat{f}^{-1}(x))| < \varepsilon_i' \le \varepsilon_i.$$

Następnie postępując jak w (1.12) możemy zapisać

$$\begin{aligned}\|D(\hat{f}^{-1})(x) - \operatorname{Id}\| &\le \sum_{m=1}^{\infty} \|D\hat{f}(\hat{f}^{-1}(x)) - \operatorname{Id}\|^m \\ &< \sum_{m=1}^{\infty} (\varepsilon_i')^m = \frac{\varepsilon_i'}{1-\varepsilon_i'} < 2\varepsilon_i' < \varepsilon_i\end{aligned}$$

dla dostatecznie małego $\varepsilon_i' > 0$.

Zakładamy indukcyjnie, że istnieje stała $C_2 > 0$ zależna od p taka, że

$$\|D^{m,s}(\hat{f}^{-1})(x) - D^{m,s}\operatorname{Id}(x)\| < C_2\varepsilon_i' \le C_2$$

dla $m = 1, \dots, j-1$. Ze wzoru (2.6) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|D^{j,s}(\hat{f}^{-1})(x)\| &\leq \|D(\hat{f}^{-1})(x)\| \|D^{j,s}\hat{f}(\hat{f}^{-1}(x))\| \|D(\hat{f}^{-1})(x)\|^j \\ &\quad + \|D(\hat{f}^{-1})(x)\| \sum C_{l,j_1,\dots,j_l} \|D^{l,s}\hat{f}(\hat{f}^{-1}(x))\| \\ &\quad \cdot \|D^{j_1,s}(\hat{f}^{-1})(x)\| \dots \|D^{j_l,s}(\hat{f}^{-1})(x)\| \\ &< \varepsilon_i'(1 + C_2\varepsilon_i')^{j+1} + \sum C_{l,j_1,\dots,j_l}\varepsilon_i'(1 + C_2\varepsilon_i')^{l+1} \\ &\leq \varepsilon_i' \Big((1 + C_2)^{j+1} + \sum C_{l,j_1,\dots,j_l}(1 + C_2)^{l+1} \Big) < \varepsilon_i,\end{aligned}$$

$2 \leq j \leq p$, dla dostatecznie małego $\varepsilon_i' > 0$, gdzie sumujemy po $1 < l < j$, $j_1 + \ldots + j_l = j$ i $j_m \geq 1$, $m = 1, \ldots, l$.

Stąd $f^{-1} \in \beta^{p,s}_{\mathrm{Id}}(\varphi, \varphi, K, \varepsilon)$. □

Lemat 2.16. *Istnieje $\varphi = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ lokalnie skończony atlas na $(M, \mathcal{F})$ oraz $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\varphi)$ i $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\varphi) \subset \mathcal{V}$ otoczenia* Id *w* $\mathrm{Diff}^{1,s}_c(M, \mathcal{F})_0$ *w $C^{1,s}$-topologii takie, że dla każdego $f \in \mathcal{V} \cap \mathrm{Diff}^{r,s}_c(M, \mathcal{F})_0$ istnieje $m \in \mathbb{N}$ i dyfeomorfizmy $g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{U} \cap \mathrm{Diff}^{r,s}_c(M, \mathcal{F})_0$ spełniające warunki $f = g_1 \ldots g_m$ oraz* $\mathrm{supp}(g_j) \subset U_{i(j)}$, $j = 1, \ldots, m$.

Dowód. Z Lematu 2.14 istnieje $\mathcal{U}$ otoczenie Id w $C^{1,s}_c(M, M; \mathcal{F})$ w $C^{1,s}$-topologii takie, że dla każdego $h \in \mathcal{U}$ mamy $h \in \mathrm{Diff}^{1,s}_c(M, \mathcal{F})_0$.

Korzystając z metryki riemannowskiej d na $(M, \mathcal{F})$ możemy wybrać pokrycie rozmaitości $(M, \mathcal{F})$ mapami $(B(x, \varepsilon_x), \varphi_x)$, gdzie $B(x, \varepsilon_x)$ oznacza kulę o środku x i promieniu $0 < \varepsilon_x < 1$, a φ_x jest izometrią, $x \in M$. Następnie wybieramy pokrycie lokalnie skończone $K'' = \{K_i''\}_{i \in I}$, gdzie $K_i'' = \overline{B}(x_i, \frac{1}{64}\varepsilon_i)$ i $\varepsilon_i = \varepsilon_{x_i}$, $i \in I$. Definiujemy także pokrycia $K' = \{K_i'\}_{i \in I}$, $K = \{K_i\}_{i \in I}$ i $U = \{U_i\}_{i \in I}$ wzorami $K_i' = \overline{B}(x_i, \frac{1}{4}\varepsilon_i)$, $K_i = \overline{B}(x_i, \frac{1}{2}\varepsilon_i)$ i $U_i = B(x_i, \varepsilon_i)$ oraz oznaczamy $\varphi_i = \varphi_{x_i} : U_i \to \varphi_i(U_i)$, $i \in I$, tworząc atlas $\varphi = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$.

Niech $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i \in I}$. Określamy zbiory z bazy $C^{1,s}$-topologii wzorami

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1 &= \beta^{1,s}_{\mathrm{Id}}(\varphi, \varphi, K'', \varepsilon), \\ \mathcal{U}_2 &= \beta^{1,s}_{\mathrm{Id}}(\varphi, \varphi, K', \tfrac{1}{2}\varepsilon), \\ \mathcal{U}_3 &= \beta^{1,s}_{\mathrm{Id}}(\varphi, \varphi, K, \tfrac{1}{8}\varepsilon), \\ \mathcal{V} &= \beta^{1,s}_{\mathrm{Id}}(\varphi, \varphi, K, \tfrac{1}{64}\varepsilon).\end{aligned}$$

Możemy przeskalować rodzinę ε tak, by $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$.

Niech $f \in \mathcal{V} \cap \mathrm{Diff}^{r,s}_c(M, \mathcal{F})_0$. Ze zwartości nośnika f możemy przyjąć, że $\mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{Int}\, K_i \neq \emptyset$ tylko dla skończonego zbioru indeksów $i = 1, \ldots, m$.

Dla $i = 1, \dots, m$ określamy odwzorowania

$$\begin{aligned}\hat{f}_i &= \varphi_i f|_{K_i} (\varphi_i|_{K_i})^{-1} : \varphi_i(K_i) \to \varphi_i(U_i),\\ \widehat{H}_t^i &= t\hat{f}_i + (1-t)\,\mathrm{Id} : \varphi_i(K_i) \times I \to \varphi_i(U_i),\\ H_t^i &= \varphi_i^{-1} \widehat{H}_t^i \varphi_i : K_i \times I \to U_i.\end{aligned}$$

Następnie definiujemy $H : M \times I \to M$ wzorem

$$H_t(x) = \begin{cases} H_t^i(x) & x \in K_i \\ x & x \notin K_1 \cup \ldots \cup K_m \end{cases}.$$

Niech $x \in K_i \cap K_j$, $i, j = 1, \dots, m$, $i \neq j$. Z powyższych definicji mamy $f(x) = \varphi_i^{-1} \hat{f}_i \varphi_i(x) = \varphi_j^{-1} \hat{f}_j \varphi_j(x)$, czyli

$$\hat{f}_j(\varphi_j(x)) = \varphi_j \varphi_i^{-1} \hat{f}_i \varphi_i \varphi_j^{-1}(\varphi_j(x)).$$

Teraz z izometryczności $\varphi_j \varphi_i^{-1}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}H_t^i(x) &= \varphi_i^{-1} \widehat{H}_t^i \varphi_i(x) = \varphi_i^{-1}(t\hat{f}_i + (1-t)\,\mathrm{Id})\varphi_i(x)\\ &= \varphi_j^{-1}(\varphi_j\varphi_i^{-1}) \left(t\hat{f}_i + (1-t)\,\mathrm{Id}\right) (\varphi_i\varphi_j^{-1})\varphi_j(x)\\ &= \varphi_j^{-1} \left(t\varphi_j\varphi_i^{-1}\hat{f}_i\varphi_i\varphi_j^{-1} + (1-t)\,\mathrm{Id}\right) \varphi_j(x)\\ &= \varphi_j^{-1}(t\hat{f}_j + (1-t)\,\mathrm{Id})\varphi_j(x) = \varphi_j^{-1}\widehat{H}_t^j\varphi_j(x) = H_t^j(x).\end{aligned}$$

Stąd H jest dobrze określone.

Wszystkie odwzorowania w konstrukcji są klasy $C^{r,s}$ we wnętrzu swoich dziedzin i $\mathrm{supp}(f) \subset \mathrm{Int}\, K_1 \cup \ldots \cup \mathrm{Int}\, K_m$, więc H jest klasy $C^{r,s}$.

Dla każdego $x \in \varphi_i(\mathrm{Int}\, K_i)$ i $t \in I$ mamy

$$|\widehat{H}_t^i(x) - x| = |t\hat{f}_i(x) + (1-t)x - x| \leq t|\hat{f}_i(x) - x| < \frac{1}{64}\varepsilon_i$$

oraz

$$\|D\widehat{H}_t^i(x) - \mathrm{Id}\,\| \leq t\|D\hat{f}_i(x) - \mathrm{Id}\,\| < \frac{1}{64}\varepsilon_i,$$

$i = 1, \dots, m$. Stąd $H_t \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Ponadto H_t działa wzdłuż liści, bo lokalnie w konstrukcji używamy tylko jednej mapy, więc $H_t \in \mathrm{Diff}_c^{r,s}(M, \mathcal{F})$ i H jest dyfeotopią od Id do f o zwartym nośniku.

Zauważmy, że powyższa konstrukcja zachodzi w przypadku dowolnego zbioru z bazy w $C_c^{1,s}(M, M; \mathcal{F})$ postaci $\beta_{\mathrm{Id}}^{1,s}(\varphi, \varphi, K, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$. W szczególności jeśli $h \in \mathcal{U}_1 \cap \mathrm{Diff}_c^{r,s}(M, \mathcal{F})$, to $h \in \mathrm{Diff}_c^{r,s}(M, \mathcal{F})_0$.

Bierzemy $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ rozkład jedynki klasy C^∞ na M skojarzony z pokryciem K taki, że $\|D(\lambda_i\varphi_i^{-1})(x)\| \leq 4$ dla każdego $x \in \varphi_i(K_i)$, $i \in I$. Istnienie takiego rozkładu wynika z postaci powyższych pokryć. Definiujemy funkcje $\gamma_0 = 0$ i $\gamma_l = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j$, $l = 1, \dots, m$.

Niech $l = 0, \dots, m$. Określamy odwzorowanie

$$f_l : M \ni x \mapsto H_{\gamma_l(x)}(x) \in M.$$

Jest ono klasy $C^{r,s}$ i $\operatorname{supp}(f_l) \subset K_1 \cup \ldots \cup K_l$. Dalej, dla $x \in \varphi_i(K_i)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|\varphi_i f_l \varphi_i^{-1}(x) - x| &= |\varphi_i H_{(\gamma_l \varphi_i^{-1})(x)} \varphi_i^{-1}(x) - x| = |\widehat{H}^i_{(\gamma_l \varphi_i^{-1})(x)}(x) - x| \\
&= |(\gamma_l \varphi_i^{-1})(x) \cdot (\hat{f}_i(x) - x)| \\
&\leq |\gamma_l \varphi_i^{-1}(x)| |\hat{f}_i(x) - x| < \frac{1}{64} \varepsilon_i
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\| D(\varphi_i f_l \varphi_i^{-1})(x) - \operatorname{Id} \| &= \| D((\gamma_l \varphi_i^{-1}) \cdot (\hat{f}_i - \operatorname{Id}))(x) \| \\
&\leq \| D(\gamma_l \varphi_i^{-1})(x) \| |\hat{f}_i(x) - x| + |(\gamma_l \varphi_i^{-1})(x)| \| D(\hat{f}_i - \operatorname{Id})(x) \| \\
&< 4 \frac{1}{64} \varepsilon_i + \frac{1}{64} \varepsilon_i < \frac{1}{8} \varepsilon_i,
\end{aligned}$$

$i = 1, \dots, m$. Stąd $f_l \in \mathcal{U}_3 \subset \mathcal{U}$ i $f_l \in \operatorname{Diff}^{r,s}_c(M, \mathcal{F})_0$.

Dla $l = 1, \dots, m$ określamy dyfeomorfizmy $g_l = f_{l-1}^{-1} f_l \in \operatorname{Diff}^{r,s}_c(M, \mathcal{F})$. Mamy $\gamma_{l-1} = \gamma_l$ na $M \setminus K_l$, więc $f_{l-1} = f_l$ na $M \setminus K_l$ i $\operatorname{supp}(g_l) \subset K_l \subset U_l$, $l = 1, \dots, m$. Pozostało wykazać, że $g_l \in \mathcal{U}_1$. Wówczas $g_l \in \operatorname{Diff}^{r,s}_c(M, \mathcal{F})_0$ i $f = g_1 \ldots g_m$ jest szukanym rozkładem.

Niech $h_1, h_2 \in \mathcal{U}_3$. Pokażemy, że $h_1^{-1} h_2 \in \mathcal{U}_1$. Użyjemy zapisu $\hat{h}_1 = \varphi_i h_1 \varphi_i^{-1}$ i $\hat{h}_2 = \varphi_i h_2 \varphi_i^{-1}$, $i = 1, \dots, m$.

Niech $i = 1, \dots, m$. Jeśli $x \in \varphi_i(U_i) \setminus \varphi_i(K_i)$, to

$$|\hat{h}_1(x) - \varphi_i(x_i)| \geq \Big| |x - \varphi_i(x_i)| - |\hat{h}_1(x) - x| \Big| > \frac{1}{2} \varepsilon_i - \frac{1}{8} \varepsilon_i > \frac{1}{4} \varepsilon_i.$$

To oznacza, że $\hat{h}_1(x) \in \varphi_i(U_i) \setminus \varphi_i(K_i')$, czyli $h_1(K_i) \supset K_i'$ i $h_1^{-1}(K_i') \subset K_i$.

Teraz dla $x \in \varphi_i(K_i')$ mamy $\hat{h}_1^{-1}(x) \in \varphi_i(K_i)$ i możemy zapisać

$$|\hat{h}_1^{-1}(x) - x| = |\hat{h}_1^{-1}(x) - \hat{h}_1(\hat{h}_1^{-1}(x))| < \frac{1}{8} \varepsilon_i.$$

Ponadto, szacując jak w (1.12) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\| D(\hat{h}_1^{-1})(x) - \operatorname{Id} \| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \| D\hat{h}_1(\hat{h}_1^{-1}(x)) - \operatorname{Id} \|^j \\
&< \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8} \varepsilon_i \right)^j = \frac{\frac{1}{8} \varepsilon_i}{1 - \frac{1}{8} \varepsilon_i} < \frac{1}{4} \varepsilon_i,
\end{aligned}$$

czyli $h_1^{-1} \in \mathcal{U}_2$.

Następnie, niech $x \in \varphi_i(K_i'')$. Wówczas

$$|\hat{h}_2(x) - \varphi_i(x_i)| \leq |\hat{h}_2(x) - x| + |x - \varphi_i(x_i)| < \frac{1}{8}\varepsilon_i + \frac{1}{64}\varepsilon_i < \frac{1}{4}\varepsilon_i.$$

Stąd $\hat{h}_2(x) \in \varphi_i(K_i')$ i mamy oszacowanie

$$|\hat{h}_1^{-1}\hat{h}_2(x) - x| \leq |\hat{h}_1^{-1}(\hat{h}_2(x)) - \hat{h}_2(x)| + |\hat{h}_2(x) - x| < \frac{1}{2}\varepsilon_i + \frac{1}{8}\varepsilon_i < \varepsilon_i$$

oraz

$$\begin{aligned}\|D(\hat{h}_1^{-1}\hat{h}_2)(x) - \mathrm{Id}\,\| &\leq \|D\hat{h}_1^{-1}(\hat{h}_2(x)) - \mathrm{Id}\,\|\|D\hat{h}_2(x)\| + \|D\hat{h}_2(x) - \mathrm{Id}\,\| \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon_i\left(1 + \frac{1}{8}\varepsilon_i\right) + \frac{1}{8}\varepsilon_i < \varepsilon_i.\end{aligned}$$

Nierówności te oznaczają, że $h_1^{-1}h_2 \in \mathcal{U}_1$. □

Wniosek 2.17. *Grupa* $\mathrm{Diff}_c^{r,s}(M,\mathcal{F})_0$ *składa się z dyfeomorfizmów, które są dyfeotopijne z* Id *przez* $C^{r,s}$*-dyfeotopie o zwartych nośnikach.*

Dowód. Z poprzedniego dowodu wynika, że odwzorowania z $\mathcal{V} \cap \mathrm{Diff}_c^{r,s}(M,\mathcal{F})_0$ są dyfeotopijne z Id przez $C^{r,s}$-dyfeotopie o zwartych nośnikach. Z Lematu 2.15 grupa $\mathrm{Diff}_c^{r,s}(M,\mathcal{F})$ jest grupą topologiczną, więc tezę otrzymujemy jak w przypadku Własności 1.24, korzystając z Lematów 2.3 i 2.4. □

Na zakończenie tego rozdziału przedstawimy kilka faktów dotyczących rozmaitości $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_k)$, gdzie $\mathcal{F}_k = \{\mathbb{R}^k \times \{\mathrm{pt}\}\}$. Będziemy używać oznaczeń wprowadzonych na końcu podrozdziału 2.1. Analogicznie jak wcześniej indeks 0 oznacza składową spójną danej przestrzeni.

Lemat 2.18. *Niech* $0 \leq p < r$. *Zbiór* $C^{r,r}(n,k)$ *jest gęsty w* $C^{p,p}(n,k)$. *Ponadto jeśli* $f \in C^{p,p}(n,k)$ *jest klasy* $C^{r,r}$ *w otoczeniu zbioru domkniętego* $L \subset \mathbb{R}^n$, *to w dowolnym* $C^{p,p}$*-otoczeniu odwzorowania* f *w* $C^{p,p}(n,k)$ *istnieje* $g \in C^{r,r}(n,k)$ *takie, że* $g = f$ *na* L.

Dowód. Przeprowadzamy konstrukcję jak w Lemacie 1.22. Pokażemy, że uzyskane w ten sposób odwzorowania działają wzdłuż liści. W tym celu oznaczamy $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x), x_{k+1}, \ldots, x_n)$ dla $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Zauważmy, że odwzorowanie ϑ_i, $i \in I$, jest stałe na sferach o środku w 0, czyli funkcja $\vartheta_i(y)y_l$ jest nieparzysta jako funkcja zmiennej y_l, $l = 1, \ldots, n$. Stąd dla $l = k+1, \ldots, n$ mamy

$$\begin{aligned}(g_i)_l(x) &= \int_{B(0,\delta_i)} \vartheta_i(y) f_l(x-y)\, dy = \int_{B(0,\delta_i)} \vartheta_i(y)(x_l - y_l)\, dy \\ &= x_l \int_{B(0,\delta_i)} \vartheta_i(y)\, dy - \int_{B(0,\delta_i)} \vartheta_i(y) y_l\, dy = x_l,\end{aligned}$$

czyli g_i działa wzdłuż liści. Dla pozostałych odwzorowań z konstrukcji jest to oczywiste. □

Lemat 2.19. *Niech $1 \leq s < r$ i niech K będzie zbiorem zwartym, wypukłym w $\mathbb{R}^n$. Zbiór $\mathrm{Diff}_K^{r,r}(n,k)$ jest gęsty w $\mathrm{Diff}_K^{s,s}(n,k)$.*

Dowód. Analogicznie jak we Wniosku 1.23, korzystając z Lematów 2.14 i 2.18. Rozumowanie jest poprawne, gdyż z postaci odwzorowania f również odwzorowanie f_t działa wzdłuż liści. □

Własność 2.20. *Niech $r \geq 1$ i niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym, wypukłym. Wówczas grupy $\mathrm{Diff}_c^{r,r}(n,k)$ i $\mathrm{Diff}_K^{r,r}(n,k)$ są spójne w $C^{r,r}$-topologii.*

Dowód. Postępujemy jak w dowodzie Własności 1.25, stosując Lemat 2.18 i Wniosek 2.17. □

Na podstawie Lematów 2.7 (1) i 2.9 otrzymujemy

Własność 2.21. *Niech $1 \leq s < r$ i niech α będzie modułem ciągłości. Załóżmy, że zbiór K jest kostką w $\mathbb{R}^n$. Wówczas grupa $\mathrm{Diff}_K^{r,s,\alpha}(n,k)$ z metryką $d(f,g) = \mu_{r,s,\alpha}(f-g)$ jest spójną grupą topologiczną. Topologię indukowaną przez wprowadzoną metrykę nazywamy $C^{r,s,\alpha}$*-topologią.

Dowód. Dowód przebiega analogicznie jak w przypadku Własności 1.26. Modyfikacji wymaga jedynie dowód spójności grupy $\mathrm{Diff}_K^{r,s,\alpha}(n,k)$.

Z Lematu 2.19 zbiór $\mathrm{Diff}_K^{r,r}(n,k)$ jest gęsty w $\mathrm{Diff}_K^{s,s}(n,k)$, więc w dowolnym $C^{s,s}$-otoczeniu $f \in \mathrm{Diff}_K^{r,s,\alpha}(n,k) \subset \mathrm{Diff}_K^{s,s}(n,k)$ istnieje $g \in \mathrm{Diff}_K^{r,r}(n,k)$. Jak w dowodzie Własności 1.26 uzyskujemy lokalną spójność grupy $\mathrm{Diff}_K^{r,s,\alpha}(n,k)$, czyli istnieje $C^{r,s,\alpha}$-dyfeotopia od g do f o nośniku w K. Z Własności 2.20 i Wniosku 2.17 grupa $\mathrm{Diff}_K^{r,r}(n,k)$ jest spójna i istnieje $C^{r,r}$-dyfeotopia od Id do g o nośniku w K. Stąd grupa $\mathrm{Diff}_K^{r,s,\alpha}(n,k)$ jest spójna. □

3. Dowód doskonałości grupy $\mathrm{Diff}^{r,s}_c(M,\mathcal{F})_0$

3.1. Przedstawienie problemu

Zakładamy, że $1 \leq k < n$.

Definicja 3.1. Grupę G nazywamy *doskonałą* jeśli jest równa swojemu komutatorowi, czyli grupie $[G,G]$ generowanej przez iloczyny elementów postaci $[f,g] = fgf^{-1}g^{-1}$, gdzie $f,g \in G$. W języku homologii grup oznacza to, że $H_1(G) = G/[G,G] = \{0\}$.

Naszym celem jest udowodnienie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3.2. *Niech $r,s \geq 1$, $1 \leq k < n$ i niech $(M,\mathcal{F})$ będzie n-wymiarową rozmaitością z foliacją, $\dim \mathcal{F} = k$. Rozważamy grupę $\mathrm{Diff}^{r,s}_c(M,\mathcal{F})_0$ dyfeomorfizmów klasy $C^{r,s}$ na $(M,\mathcal{F})$ działających wzdłuż liści i dyfeotopijnych z* Id *przez $C^{r,s}$-dyfeotopie o zwartych nośnikach. Wówczas grupa $\mathrm{Diff}^{r,s}_c(M,\mathcal{F})_0$ jest doskonała dla $r - s > k+1$.*

Z Lematów 2.15, 2.16 i Wniosku 2.17 wynika, że wystarczy udowodnić Twierdzenie 3.2 tylko dla $f \in \mathcal{U} \cap \mathrm{Diff}^{r,s}_c(M,\mathcal{F})_0$ takich, że $\mathrm{supp}(f) \subset U_i$ dla pewnego $i \in I$, gdzie $\mathcal{U}$ i $\varphi = \{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ są obiektami z Lematu 2.16. Wtedy biorąc mapę (U_i,φ_i) mamy

$$(\varphi_i f \varphi_i^{-1})(x,y) = ((\varphi_i f \varphi_i^{-1})_1(x,y),y),$$

czyli można ograniczyć rozważania do przypadku $M = \mathbb{R}^n$ i $\mathcal{F} = \{\mathbb{R}^k \times \{\mathrm{pt}\}\}$.

Co więcej, wystarczy pokazać, że dla każdego modułu ciągłości α zachodzi warunek

$$\mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_K(n,k)_0 \subset [\mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_c(n,k)_0, \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_c(n,k)_0], \tag{3.1}$$

gdzie K jest pewną kostką w $\mathbb{R}^n$. Wynika to z poniższego rozumowania.

Niech $(\mathbb{R}^n,\mathcal{F}_k)$ będzie rozmaitością z foliacją produktową $\mathcal{F}_k = \{\mathbb{R}^k \times \{\mathrm{pt}\}\}$. Zachodzi następujący lemat.

Lemat 3.3. *Niech $r,s \geq 1$. Wówczas*

$$\mathrm{Diff}^{r,s}_c(n,k)_0 = \bigcup_\alpha \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_c(n,k)_0,$$

gdzie suma przebiega po wszystkich modułach ciągłości α.

Dowód. Oczywiście mamy $\mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_c(n,k)_0 \subset \mathrm{Diff}^{r,s}_c(n,k)_0$ dla każdego modułu ciągłości α.

Odwrotnie, niech $f \in \mathrm{Diff}^{r,s}_c(n,k)_0$ i niech H będzie $C^{r,s}$-dyfeotopią od Id do f o nośniku zawartym w pewnej kuli domkniętej K'. Odwzorowanie

$$D^{r,s}H : \mathbb{R}^n \times I \to L^r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$$

jest ciągłe oraz $\mathrm{supp}(D^{r,s}H) \subset K' \times I$. Z Lematu 1.4 istnieje moduł ciągłości α taki, że $D^{r,s}H$ jest α-ciągłe. Stąd H jest $C^{r,s,\alpha}$-dyfeotopią, czyli $f = H_1 \in \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_c(n,k)_0$. $\square$

Niech $f \in \mathrm{Diff}^{r,s}_c(n,k)_0$ i niech K będzie kostką w $\mathbb{R}^n$. Z Lematu 3.3 istnieje moduł ciągłości α taki, że $f \in \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_c(n,k)_0$. Ponadto, istnieje dyfeomorfizm $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ klasy C^∞ zależny od f i postaci $g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(y))$ taki, że $\mathrm{supp}(gfg^{-1}) \subset K$. Jeśli jest spełniony warunek (3.1), to

$$[gfg^{-1}] = [\mathrm{Id}] \in H_1(\mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_c(n,k)_0),$$

czyli istnieje $m \in \mathbb{N}$ i dyfeomorfizmy $h_1, \dots, h_{2m} \in \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_c(n,k)_0$ takie, że $gfg^{-1} = [h_1,h_2]\dots[h_{2m-1},h_{2m}]$. Stąd mamy rozkład

$$f = [g^{-1}h_1g, g^{-1}h_2g]\dots[g^{-1}h_{2m-1}g, g^{-1}h_{2m}g]$$

na komutatory elementów z $\mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_c(n,k)_0$, co dowodzi Twierdzenia 3.2.

W poniższym dowodzie przyjmujemy $K = [-2,2]^n$.

3.2. Operator zwijania

Zakładamy, że $A \geq 1$ jest liczbą naturalną i $K = [-2,2]^n$. Dla $i = 0, \dots, k$ definiujemy zbiory

$$\begin{aligned} K_i &= [-2,2]^i \times [-2A,2A]^{k-i} \times [-2,2]^{n-k}, \\ K_i' &= [-2,2]^{i-1} \times S^1 \times [-2A,2A]^{k-i} \times [-2,2]^{n-k}, \\ K_i'' &= [-2,2]^{i-1} \times \mathbb{R} \times [-2A,2A]^{k-i} \times [-2,2]^{n-k}, \end{aligned}$$

gdzie $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ jest okręgiem jednostkowym z działaniem indukowanym z $\mathbb{R}$. Zachodzą inkluzje

$$K = [-2,2]^n \subset K_{k-1} \subset \dots \subset K_0 = [-2A,2A]^k \times [-2,2]^{n-k}.$$

Niech $i = 1, \dots, k$. Definiujemy zbiory $B_i = \mathbb{R}^{i-1} \times S^1 \times \mathbb{R}^{n-i}$ oraz rzutowania nakrywające $\pi_i : \mathbb{R}^n \to B_i$. Rzutowania te określają lokalny układ współrzędnych w otoczeniu każdego punktu przestrzeni B_i zgodny z foliacją $\mathcal{F}_k = \{\mathbb{R}^{i-1} \times S^1 \times \mathbb{R}^{k-i} \times \{\mathrm{pt}\}\}$. Odwzorowania przejścia są translacjami wzdłuż liści. Stąd definicje seminorm przenoszą się na B_i.

Przestrzenie odwzorowań i dyfeomorfizmów klasy $C^{r,s,[\alpha]}$ na B_i działających wzdłuż liści oznaczamy odpowiednio przez $C^{r,s,[\alpha]}(B_i,k)$ i $\mathrm{Diff}^{r,s,[\alpha]}(B_i,k)$. Ponadto przez $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będziemy oznaczać translację o wektor jednostkowy względem i-tej współrzędnej.

Dla $f \in \mathrm{Diff}^{1,s}_{K_0}(n,k)_0$ spełniającego warunek $\mu_{0,s}(f) \leq \frac{1}{2}$ określamy odwzorowanie $\Gamma_{i,A}(f) : B_i \to B_i$ w następujący sposób:

Dla $\vartheta \in B_i$ wybieramy $x \in \mathbb{R}^n$ takie, że $\pi_i(x) = \vartheta$ i $x_i < -2A$. Następnie wybieramy $N \in \mathbb{N}$ takie, że $((T_i f)^N(x))_i > 2A$, gdzie indeks i oznacza i-tą współrzędną. Wówczas definiujemy

$$\Gamma_{i,A}(f)(\vartheta) = \pi_i((T_i f)^N(x)).$$

Wartość odwzorowania $\Gamma_{i,A}(f)$ nie zależy od wyboru x i N.

Lemat 3.4. *Niech $r,s \geq 1$, $A \geq 1$, $1 \leq i \leq k$ i niech α będzie modułem ciągłości. Istnieje U otoczenie* Id *w* $\mathrm{Diff}^{1,s}_c(n,k)_0$ *takie, że*

(1) $\Gamma_{i,A}$ *zachowuje* Id.
(2) *Odwzorowanie*

$$\Gamma_{i,A} : U \cap \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K_{i-1}}(n,k)_0 \to \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K'_i}(B_i,k)_0$$

jest ciągłe w $C^{r,s}$-topologii.
(3) *Istnieje stała $\delta > 0$ zależna od r, A i α taka, że*

$$\mu_{r,s,\alpha}(\Gamma_{i,A}(f)) \leq 12A\mu_{r,s,\alpha}(f)$$

dla każdego $f \in U \cap \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K_{i-1}}(n,k)_0$ spełniającego warunek $\mu_{r,s,\alpha}(f) \leq \delta$.

Dowód. Z Lematu 2.14 istnieje $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ takie, że dla każdego $f \in C^{1,s}_c(n,k)$, $\mu_{0,s}(f), \mu_{1,s}(f) < \varepsilon$ mamy $f \in \mathrm{Diff}^{1,s}_c(n,k)_0$. Definiujemy

$$U = \{f \in \mathrm{Diff}^{1,s}_c(n,k)_0 \; : \; \mu_{0,s}(f), \mu_{1,s}(f) < \varepsilon\}.$$

Niech $f \in U \cap \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K_{i-1}}(n,k)_0$. Lokalnie możemy wybrać N stałe, więc $\Gamma_{i,A}(f)$ jest odwzorowaniem klasy $C^{r,s,\alpha}$ jako złożenie odwzorowań klasy $C^{r,s,\alpha}$. Określamy $(\Gamma_{i,A}(f))^{-1}$ następująco: dla $\vartheta \in B_i$ wybieramy $x \in \mathbb{R}^n$ takie, że $\pi_i(x) = \vartheta$ i $x_i > 2A$ oraz $N \in \mathbb{N}$ takie, że $((T_i f)^{-N}(x))_i < -2A$. Wówczas definiujemy

$$(\Gamma_{i,A}(f))^{-1}(\vartheta) = \pi_i((T_i f)^{-N}(x)).$$

Stąd $\Gamma_{i,A}(f) \in \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K'_i}(B_i,k)$.

Z postaci otoczenia U wynika, że odwzorowanie

$$H : \mathbb{R}^n \times I \ni (x,t) \mapsto tf(x) + (1-t)x \in \mathbb{R}^n$$

jest $C^{r,s,\alpha}$-dyfeotopią od Id do f w $U \cap \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K_{i-1}}(n,k)_0$. Stąd $\Gamma_{i,A}(H)$ jest $C^{r,s,\alpha}$-dyfeotopią od Id do $\Gamma_{i,A}(f)$ w $\mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K'_i}(B_i,k)$ i $\Gamma_{i,A}(f) \in \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K'_i}(B_i,k)_0$.

Ciągłość operatora $\Gamma_{i,A}$ w $C^{r,s}$-topologii wynika z Lematu 2.15 (1). W ten sposób otrzymujemy (2).

Dla dowodu (3) niech $f \in U \cap \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K_{i-1}}(n,k)_0$ i $N \in \mathbb{N}$. Bierzemy $\varepsilon > 0$ takie, że

$$\sum_{j=0}^{N-1}(1+\varepsilon)^j \leq N+1.$$

Dla każdego $x \notin [-2,2]^{i-1} \times [-2A-N,2A] \times [-2A,2A]^{k-i} \times [-2,2]^{n-k}$ oraz $m = 1,\dots,N$ mamy $D((T_i f)^m - \mathrm{Id})(x) = 0$, więc można zastosować Lemat 2.9.

Bierzemy stałe δ_1, C_1 z Lematu 2.9 (1) i niech $0 < \delta \leq \min\{\frac{\delta_1}{N+1}, \frac{\varepsilon}{C_1}\}$. Pokażemy indukcyjnie, że

$$\mu_{r,s,\alpha}((T_i f)^m) \leq \sum_{j=0}^{m-1}(1+\varepsilon)^j \mu_{r,s,\alpha}(f) \tag{3.2}$$

dla $m = 1,\dots,N$ i $\mu_{r,s,\alpha}(f) \leq \delta$.

Jeśli $m = 1$, to $\mu_{r,s,\alpha}(T_i f) = \mu_{r,s,\alpha}(f)$.

Niech $m \geq 2$. Ponieważ $\delta \leq \frac{\delta_1}{N+1}$, to z założenia indukcyjnego mamy $\mu_{r,s,\alpha}((T_i f)^{m-1}) \leq \delta_1$. Teraz z Lematu 2.9 (1) otrzymujemy

$$\mu_{r,s,\alpha}((T_i f)^m) \leq \mu_{r,s,\alpha}(T_i f) + \mu_{r,s,\alpha}((T_i f)^{m-1}) + C_1 \mu_{r,s,\alpha}(T_i f)\mu_{r,s,\alpha}((T_i f)^{m-1}).$$

Z warunku $\delta \leq \frac{\varepsilon}{C_1}$ i ponownie z indukcji wynika, że

$$\begin{aligned}\mu_{r,s,\alpha}((T_i f)^m) &\leq \mu_{r,s,\alpha}(f) + \sum_{j=0}^{m-2}(1+\varepsilon)^j\mu_{r,s,\alpha}(f) + \varepsilon\sum_{j=0}^{m-2}(1+\varepsilon)^j\mu_{r,s,\alpha}(f)\\ &\leq \sum_{j=0}^{m-1}(1+\varepsilon)^j\mu_{r,s,\alpha}(f)\end{aligned}$$

dla $\mu_{r,s,\alpha}(f) \leq \delta$, co dowodzi nierówności (3.2). W szczególności dla $m = N$ mamy

$$\mu_{r,s,\alpha}((T_i f)^N) \leq (N+1)\mu_{r,s,\alpha}(f).$$

W definicji $\Gamma_{i,A}(f)$ możemy wziąść x takie, że $-2A-1 \leq x_i < -2A$. Najmniejsze przesunięcie względem i-tej współrzędnej przez odwzorowanie $T_i f$ wynosi $\frac{1}{2}$, czyli N musi być takie, że $x_i + \frac{N}{2} > 2A$ lub inaczej $N > 4A - 2x_i$. Stąd wystarczy wziąść $N > 8A + 2 \geq 4A - 2x_i$.

Zakładamy, że $N = 8A+3$. Wtedy z powyższego oszacowania otrzymujemy

$$\mu_{r,s,\alpha}(\Gamma_{i,A}(f)) = \mu_{r,s,\alpha}((T_i f)^N) \leq (N+1)\mu_{r,s,\alpha}(f) \leq 12A\mu_{r,s,\alpha}(f),$$

dla $\mu_{r,s,\alpha}(f) \leq \delta$, co kończy dowód Lematu 3.4. □

3.3. Lemat o sprzężeniu

Niech $A \geq 1$ i $1 \leq i \leq k$. Wybieramy $\tilde{\chi}_A \in C^\infty(\mathbb{R},[0,1])$ takie, że $\mathrm{supp}(\tilde{\chi}_A) = [-2A-1, 2A+1]$ oraz $\tilde{\chi}_A = 1$ na $[-2A, 2A]$. Definiujemy funkcję $\chi_A : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ wzorem $\chi_A(x) = \tilde{\chi}_A(x_1)\dots\tilde{\chi}_A(x_k)$ dla $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Mamy $\chi_A \in C^\infty(\mathbb{R}^n,[0,1])$, $\mathrm{supp}(\chi_A) = [-2A-1, 2A+1]^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ oraz $\chi_A = 1$ na $[-2A,2A]^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

Określamy odwzorowanie

$$\varrho_{i,A} : \Omega_\varrho \ni (x_1,\dots,x_n) \mapsto \varphi_{x_i}^{\chi_A\partial_i}(x_1,\dots,0,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

gdzie

$$\Omega_\varrho = (-2A-1, 2A+1)^{i-1} \times \mathbb{R} \times (-2A-1,2A+1)^{k-i} \times \mathbb{R}^{n-k}$$

i niech $\tau_{i,A} = \varphi_1^{\chi_A\partial_i} \in \mathrm{Diff}^\infty(n,k)_0$. Symbol ∂_i oznacza jednostkowe pole wektorowe na $\mathbb{R}^n$ w kierunku i-tej współrzędnej, a φ_t^X - 1-parametrową grupę transformacji pola X.

Będziemy używać rzutowań

$$q_i : B_i \ni (x_1,\dots,x_{i-1},\vartheta_i,x_{i+1},\dots,x_n) \mapsto (x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1},$$
$$\tilde{q}_i : \mathbb{R}^n \ni (x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n) \mapsto (x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1},$$
$$\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \ni (x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) \mapsto x_i \in \mathbb{R}.$$

Określamy działanie $S^1 \times B_i \to B_i$ wzorem

$$\beta\cdot(x_1,\dots,\vartheta_i,\dots,x_n) = (x_1,\dots,\beta+\vartheta_i,\dots,x_n)$$

oraz grupę

$$G_i^{r,s,\alpha} = \{h \in \mathrm{Diff}_c^{r,s,\alpha}(B_i,k)_0 \ : \ h(\beta\cdot\vartheta) = \beta\cdot h(\vartheta)\ \forall\,\beta\in S^1\ \forall\,\vartheta \in B_i\}.$$

Lemat 3.5. *Zachodzą własności*

(1) $\varrho_{i,A}$ *działa tylko wzdłuż i-tej współrzędnej oraz* $|(\varrho_{i,A}^{-1}(x))_i| \geq |x_i|$ *dla* $x \in (-2A-1,2A+1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.
(2) $\varrho_{i,A} = \mathrm{Id}$ *na* $[-2A,2A]^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.
(3) $\varrho_{i,A} \in \mathrm{Diff}^\infty(\Omega_\varrho,(-2A-1,2A+1)^k \times \mathbb{R}^{n-k})$.
(4) $\varrho_{i,A}^*(\chi_A\partial_i) = \partial_i$.
(5) $\tau_{i,A} = \varrho_{i,A}T_i\varrho_{i,A}^{-1}$.
(6) *Dla* $(x_1,\dots,x_n) \in [-2A,2A]^{i-1} \times \mathbb{R} \times [-2A,2A]^{k-i} \times \mathbb{R}^{n-k}$ *mamy* $(\varrho_{i,A}(0,\dots,x_i,\dots,0))_i = (\varrho_{i,A}(x_1,\dots,x_n))_i$.

Dowód. Własności (1), (2) i (6) są konsekwencją tego, że pole wektorowe $\chi_A\partial_i$ działa tylko wzdłuż i-tej współrzędnej, $\chi_A\partial_i = \partial_i$ na $[-2A,2A]^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ oraz $0 \leq \chi_A \leq 1$.

Do dowodu (3) zauważmy, że odwzorowanie $\varrho_{i,A}$ jest klasy C^∞ jako zacieśnienie 1-parametrowej grupy transformacji pola $\chi_A\partial_i$. Ponadto mamy

$\mathrm{supp}(\chi_A) = [-2A-1, 2A+1]^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, więc z jednoznaczności istnienia krzywej całkowej odwzorowanie $\varrho_{i,A}$ jest bijekcją. Ze związku między polami wektorowymi i 1-parametrowymi grupami transformacji otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varrho_{i,A}}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) &= \frac{\partial \varphi_{x_i}^{\chi_A\partial_i}}{\partial x_i}(x_1,\dots,0,\dots,x_n)\\ &= (\chi_A\partial_i)(\varphi_{x_i}^{\chi_A\partial_i}(x_1,\dots,0,\dots,x_n))\\ &= (0,\dots,\chi_A(\varrho_{i,A}(x_1,\dots,x_n)),\dots,0).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Następnie dla $j \neq i$ mamy $\frac{\partial \varrho_{i,A}}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_n) = (0,\dots,1,\dots,0)$, bo $\varrho_{i,A}$ jest stałe wzdłuż j-tej współrzędnej. Stąd

$$\det(D\varrho_{i,A}(x)) = \chi_A(\varrho_{i,A}(x)) \neq 0,$$

więc $\varrho_{i,A}$ jest C^∞-dyfeomorfizmem.

Pozostało wykazać (4) i (5). Korzystając z (3.3) mamy

$$\varrho_{i,A}^*(\chi_A\partial_i)(x) = \frac{\partial \varrho_{i,A}^{-1}}{\partial x_i}(\chi_A\partial_i(\varrho_{i,A}(x))) = \frac{\partial \varrho_{i,A}^{-1}}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varrho_{i,A}}{\partial x_i}(x)\right) = \partial_i(x).$$

Następnie zauważmy, że jeśli $\varphi_t^{\chi_A\partial_i}$ jest 1-parametrową grupą transformacji pola $\chi_A\partial_i$, to $\varrho_{i,A}^{-1}\varphi_t^{\chi_A\partial_i}\varrho_{i,A}$ jest 1-parametrową grupą transformacji pola $\varrho_{i,A}^*(\chi_A\partial_i)$. Stąd otrzymujemy

$$\tau_{i,A} = \varphi_1^{\chi_A\partial_i} = \varrho_{i,A}\varphi_1^{\varrho_{i,A}^*(\chi_A\partial_i)}\varrho_{i,A}^{-1} = \varrho_{i,A}\varphi_1^{\partial_i}\varrho_{i,A}^{-1} = \varrho_{i,A}T_i\varrho_{i,A}^{-1}.$$

□

Pozostałą część tego podrozdziału poświęcimy dowodowi lematu o sprzężeniu, którego wypowiedź jest przedstawiona poniżej.

Lemat 3.6. *Niech $r,s \geq 1$, $A \geq 1$ i $1 \leq i \leq k$ oraz niech α będzie modułem ciągłości. Istnieje U'_A otoczenie* Id *w* $\mathrm{Diff}_c^{1,s}(n,k)_0$ *zależne od A takie, że odwzorowania $\tau_{i,A}f$ i $\tau_{i,A}g$ są sprzężone dla dowolnych $f,g \in U'_A \cap \mathrm{Diff}_{K_0}^{r,s,\alpha}(n,k)_0$ spełniających warunek $\Gamma_{i,A}(f)(\Gamma_{i,A}(g))^{-1} \in G_i^{r,s,\alpha}$, gdzie sprzężenie oznacza równość $[\tau_{i,A}f] = [\tau_{i,A}g] \in H_1(\mathrm{Diff}_c^{r,s,\alpha}(n,k)_0)$.*

Niech $U'_A = U$ będzie otoczeniem Id z Lematu 3.4. Wówczas $\Gamma_{i,A}(h)$ jest dobrze określone dla każdego $h \in U'_A$.

Bierzemy $f,g \in U'_A \cap \mathrm{Diff}_{K_0}^{r,s,\alpha}(n,k)_0$. Definiujemy odwzorowanie $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ następująco: dla $x \in \mathbb{R}^n$ wybieramy $N \in \mathbb{N}$ takie, że $((T_ig)^{-N}(x))_i < -2A$ i określamy

$$L(x) = (T_if)^N(T_ig)^{-N}(x).$$

Wartość L nie zależy od wyboru N i jest to odwzorowanie klasy $C^{r,s,\alpha}$, gdyż lokalnie można ustalić N.

Analogicznie możemy zdefiniować L^{-1}, tzn. dla $x \in \mathbb{R}^n$ wybieramy $N \in \mathbb{N}$ takie, że $((T_i f)^{-N}(x))_i < -2A$ i wtedy przyjmujemy

$$L^{-1}(x) = (T_i g)^N (T_i f)^{-N}(x).$$

Stąd $L \in \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}(n,k)$ oraz

$$\operatorname{supp}(L) \subset [-2A, 2A]^{i-1} \times [-2A, \infty) \times [-2A, 2A]^{k-i} \times [-2,2]^{n-k}. \tag{3.4}$$

Zachodzi następująca własność.

Własność 3.7. *Dyfeomorfizm*

$$\varrho_{i,A} L \varrho_{i,A}^{-1} : (-2A-1, 2A+1)^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to (-2A-1, 2A+1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

spełnia warunek

$$(\varrho_{i,A} L \varrho_{i,A}^{-1}) \tau_{i,A} g (\varrho_{i,A} L \varrho_{i,A}^{-1})^{-1} = \tau_{i,A} f.$$

Dowód. Niech $x \in \mathbb{R}^n$ i niech $N \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $((T_i f)^{-N}(x))_i < -2A$. Wówczas

$$L T_i g L^{-1}(x) = (T_i f)^{N+1} (T_i g)^{-N-1} T_i g (T_i g)^N (T_i f)^{-N}(x) = T_i f(x). \tag{3.5}$$

Teraz niech $x \in (-2A-1, 2A+1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Z Lematu 3.5 (1), (2) i (5) dla każdego $h \in U'_A$, $\operatorname{supp}(h) \subset K_0$ mamy

$$\tau_{i,A} h(x) = \varrho_{i,A} T_i \varrho_{i,A}^{-1} \varrho_{i,A} h \varrho_{i,A}^{-1}(x) = \varrho_{i,A} T_i h \varrho_{i,A}^{-1}(x). \tag{3.6}$$

Z (3.5) i (3.6) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
(\varrho_{i,A} L \varrho_{i,A}^{-1}) \tau_{i,A} g (\varrho_{i,A} L \varrho_{i,A}^{-1})^{-1}(x) &= \varrho_{i,A} L \varrho_{i,A}^{-1} \varrho_{i,A} T_i g \varrho_{i,A}^{-1} \varrho_{i,A} L^{-1} \varrho_{i,A}^{-1}(x) \\
&= \varrho_{i,A} L T_i g L^{-1} \varrho_{i,A}^{-1}(x) \\
&= \varrho_{i,A} T_i f \varrho_{i,A}^{-1}(x) = \tau_{i,A} f(x).
\end{aligned}$$

□

Pokażemy, że można rozszerzyć $\varrho_{i,A} L \varrho_{i,A}^{-1}$ do odwzorowania $\widehat{L}$ takiego, że $\widehat{L} \in \mathrm{Diff}_c^{r,s,\alpha}(n,k)_0$. Wówczas dla każdego $x \notin (-2A-1, 2A+1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ mamy

$$\widehat{L} \tau_{i,A} g \widehat{L}^{-1}(x) = x = \tau_{i,A} f(x), \tag{3.7}$$

gdyż $\operatorname{supp}(f), \operatorname{supp}(g) \subset K_0$ i $\operatorname{supp}(\tau_{i,A}) \subset (-2A-1, 2A+1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Stąd

$$\widehat{L} \tau_{i,A} g \widehat{L}^{-1} = \tau_{i,A} f$$

na $\mathbb{R}^n$, czyli otrzymujemy tezę Lematu 3.6.

Zacieśniamy U'_A tak, by $\mu_{0,s}(h) < \frac{1}{32A}$ dla każdego $h \in U'_A$. Wtedy dla $x \in \mathbb{R}^n$, $2A + \frac{1}{2} < x_i \leq 2A + \frac{3}{2}$ i $N = 4A + 2$ mamy

$$\begin{aligned} -2A - \frac{7}{4} < 2A + \frac{1}{2} - \left(1 + \frac{1}{32A}\right) N &< ((T_i g)^{-N}(x))_i \\ &\leq 2A + \frac{3}{2} - \left(1 - \frac{1}{32A}\right) N < -2A \end{aligned}$$

oraz

$$((T_i f)^N (T_i g)^{-N}(x))_i > -2A - \frac{7}{4} + \left(1 - \frac{1}{32A}\right) N > 2A.$$

Stąd $(L(x))_i > 2A$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$, $x_i > 2A + \frac{1}{2}$ i $N \geq 4A + 2$.

Dla x i N jak wyżej otrzymujemy

$$\begin{aligned} \pi_i L(x) &= \pi_i((T_i f)^N (T_i g)^{-N}(x)) = \Gamma_{i,A}(f) \pi_i((T_i g)^{-N}(x)) \\ &= \Gamma_{i,A}(f)(\Gamma_{i,A}(g))^{-1}(\pi_i(x)). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Podnosimy $\Gamma_{i,A}(f)(\Gamma_{i,A}(g))^{-1}$ do odwzorowania $\widetilde{\Gamma} \in \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}(n,k)$ spełniającego warunek

$$\pi_i \widetilde{\Gamma} = \Gamma_{i,A}(f)(\Gamma_{i,A}(g))^{-1} \pi_i. \tag{3.9}$$

Na podstawie (3.8) możemy przyjąć, że $\widetilde{\Gamma} = L$ na $\mathbb{R}^{i-1} \times (2A + \frac{1}{2}, \infty) \times \mathbb{R}^{n-i}$.

Określamy działanie $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^n$ wzorem

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto te_i + x \in \mathbb{R}^n,$$

gdzie e_i jest i-tym wektorem bazy kanonicznej. Z (3.9) oraz z założenia $\Gamma_{i,A}(f)(\Gamma_{i,A}(g))^{-1} \in G_i^{r,s,\alpha}$ mamy

$$\begin{aligned} \pi_i(\widetilde{\Gamma}(te_i + x)) &= \Gamma_{i,A}(f)(\Gamma_{i,A}(g))^{-1}(\pi_i(te_i + x)) \\ &= \Gamma_{i,A}(f)(\Gamma_{i,A}(g))^{-1}(p(t) \cdot \pi_i(x)) \\ &= p(t) \cdot \Gamma_{i,A}(f)(\Gamma_{i,A}(g))^{-1}(\pi_i(x)) \\ &= p(t) \cdot \pi_i(\widetilde{\Gamma}(x)) = \pi_i(te_i + \widetilde{\Gamma}(x)), \end{aligned}$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ i $t \in \mathbb{R}$, gdzie $p = \mathrm{pr}_i \circ \pi_i : \mathbb{R}^n \to S^1$ jest rzutowaniem nakrywającym. To oznacza, że $t \mapsto \widetilde{\Gamma}(te_i + x)$ i $t \mapsto te_i + \widetilde{\Gamma}(x)$ są podniesieniami tej samej krzywej. Są one równe dla $t = 0$, więc $\widetilde{\Gamma}(te_i + x) = te_i + \widetilde{\Gamma}(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ i $t \in \mathbb{R}$. Teraz możemy zapisać

$$(\widetilde{\Gamma} - \mathrm{Id})(te_i + x) = \widetilde{\Gamma}(te_i + x) - te_i - x = te_i + \widetilde{\Gamma}(x) - te_i - x = (\widetilde{\Gamma} - \mathrm{Id})(x),$$

czyli $\widetilde{\Gamma} - \mathrm{Id}$ jest stałe na krzywych całkowych pola wektorowego $\chi_A \partial_i$. W szczególności z Lematu 3.5 (1) mamy

$$(\widetilde{\Gamma} - \mathrm{Id}) \varrho_{i,A}^{-1} = \widetilde{\Gamma} - \mathrm{Id}\,. \tag{3.10}$$

Określamy funkcję $\tilde{\gamma} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wzorem $\tilde{\gamma}(x) = ((\widetilde{\Gamma} - \mathrm{Id})(x))_i$. Bierzemy $x \in \mathbb{R}^n$ takie, że $|x_j| > 2A$, $j = 1, \dots, k$, $j \neq i$ oraz $|x_j| > 2$, $j = k+1, \dots, n$. Możemy przyjąć, że $x_i > 2A + \frac{1}{2}$, bo $\tilde{\gamma}$ jest stała na krzywych całkowych pola $\chi_A \partial_i$. Wtedy z założenia o $\widetilde{\Gamma}$ otrzymujemy

$$\tilde{\gamma}(x) = ((\widetilde{\Gamma} - \mathrm{Id})(x))_i = ((L - \mathrm{Id})(x))_i = 0,$$

czyli

$$\mathrm{supp}(\tilde{\gamma}) = \mathrm{supp}(\widetilde{\Gamma}) \subset [-2A, 2A]^{i-1} \times \mathbb{R} \times [-2A, 2A]^{k-i} \times [-2, 2]^{n-k}.$$

Określamy $C^{r,s,\alpha}$-dyfeotopię od Id do $\widetilde{\Gamma}$ wzorem

$$H : \mathbb{R}^n \times I \ni (x, t) \mapsto t\widetilde{\Gamma}(x) + (1-t)x \in \mathbb{R}^n$$

oraz przyjmujemy $H_t = \mathrm{Id}$ dla $t \leq 0$ i $H_t = \widetilde{\Gamma}$ dla $t \geq 1$. Mamy

$$\mathrm{supp}(H) \subset [-2A, 2A]^{i-1} \times \mathbb{R} \times [-2A, 2A]^{k-i} \times [-2, 2]^{n-k}. \tag{3.11}$$

Definiujemy odwzorowanie $\tilde{\sigma}_i : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ wzorem

$$\tilde{\sigma}_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}).$$

Mamy $\tilde{\sigma}_i \tilde{q}_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ dla $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ oraz $\tilde{q}_i \tilde{\sigma}_i = \mathrm{Id}$.

Teraz możemy udowodnić

Własność 3.8. *Odwzorowanie $\widehat{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ określone wzorem*

$$\widehat{L}(x) = \begin{cases} \varrho_{i,A} L \varrho_{i,A}^{-1}(x) & x \in (-2A-1, 2A+1)^k \times \mathbb{R}^{n-k} \\ \tilde{\sigma}_i \tilde{q}_i H_{2A+3-x_i}(x) + (\varphi^{\chi_A \partial_i}_{\tilde{\gamma}(x)}(x))_i e_i & x \in \mathbb{R}^{i-1} \times (2A + \frac{1}{2}, \infty) \times \mathbb{R}^{n-i} \\ x & \textit{poza tym} \end{cases}$$

jest $C^{r,s,\alpha}$-dyfeomorfizmem, $\widehat{L} \in \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_c(n,k)_0$ oraz

$$\mathrm{supp}(\widehat{L}) \subset [-2A, 2A]^{i-1} \times [-2A, 2A+3] \times [-2A, 2A]^{k-i} \times [-2, 2]^{n-k}. \tag{3.12}$$

Dowód. Wszystkie odwzorowania w definicji są klasy $C^{r,s,\alpha}$ i działają wzdłuż liści, więc $\widehat{L} \in C^{r,s,\alpha}(n,k)$.

Z Własności 3.7 i z (3.7) wynika, że odwzorowanie $\widehat{L}$ po zacieśnieniu do zbioru $\mathbb{R}^{i-1} \times (-\infty, 2A+1) \times \mathbb{R}^{n-i}$ jest dyfeomorfizmem klasy $C^{r,s,\alpha}$. Dalej, niech $x \in \mathbb{R}^{i-1} \times [2A+1, \infty) \times \mathbb{R}^{n-i}$. Wówczas

$$\widehat{L}(x) = \tilde{\sigma}_i \tilde{q}_i H_{2A+3-x_i}(x) + x_i e_i,$$

gdyż $\mathrm{supp}(\chi_A) = [-2A-1, 2A+1]^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Ponieważ H_t jest dyfeomorfizmem dla każdego $t \in \mathbb{R}$ i $\tilde{\sigma}_i \tilde{q}_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, 0, \dots, x_n)$, więc $\widehat{L}$ jest bijekcją na $\mathbb{R}^{i-1} \times (2A+1, \infty) \times \mathbb{R}^{n-i}$ oraz $\det(D\widehat{L}(x)) \neq 0$. Stąd $\widehat{L}$ jest dyfeomorfizmem klasy $C^{r,s,\alpha}$ na $\mathbb{R}^n$. Ponadto zauważmy, że dla $x \in \mathbb{R}^n$, $x_i > 2A+3$, mamy $H_{2A+3-x_i}(x) = x$, więc z (3.4) i (3.11) otrzymujemy (3.12).

Pozostało wykazać, że $\widehat{L}$ jest dobrze określone. W tym celu pokażemy, że

$$\tilde{q}_i(\varrho_{i,A}L\varrho_{i,A}^{-1}(x)) = \tilde{q}_i H_{2A+3-x_i}(x),$$
$$(\varrho_{i,A}L\varrho_{i,A}^{-1}(x))_i = (\varphi^{\chi_A\partial_i}_{\tilde{\gamma}(x)}(x))_i$$

dla $x \in (-2A,2A)^{i-1} \times (2A+\frac{1}{2}, 2A+1) \times (-2A,2A)^{k-i} \times (-2,2)^{n-k}$. W pozostałych przypadkach poprawność określenia wynika z postaci nośników użytych odwzorowań.

Bierzemy x jak wyżej. Z (3.10) i z warunku $\tilde{q}_i\varrho_{i,A} = \tilde{q}_i\varrho_{i,A}^{-1} = \tilde{q}_i$ mamy

$$\tilde{q}_i\widetilde{\Gamma}\varrho_{i,A}^{-1}(x) = \tilde{q}_i(\widetilde{\Gamma} - \mathrm{Id})(x) + \tilde{q}_i\varrho_{i,A}^{-1}(x) = \tilde{q}_i\widetilde{\Gamma}(x),$$

a następnie

$$\tilde{q}_i(\varrho_{i,A}L\varrho_{i,A}^{-1}(x)) = \tilde{q}_iL\varrho_{i,A}^{-1}(x) = \tilde{q}_i\widetilde{\Gamma}\varrho_{i,A}^{-1}(x) = \tilde{q}_i\widetilde{\Gamma}(x) = \tilde{q}_iH_{2A+3-x_i}(x),$$

gdyż $2A+3-x_i > 1$.

Funkcja $\tilde{\gamma}$ jest stała na krzywych całkowych pola $\chi_A\partial_i$. Stąd

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^{\tilde{\gamma}\chi_A\partial_i}(x)) &= (\tilde{\gamma}\chi_A\partial_i)(\varphi_t^{\tilde{\gamma}\chi_A\partial_i}(x)) = \tilde{\gamma}(\varphi_t^{\tilde{\gamma}\chi_A\partial_i}(x))(\chi_A\partial_i)(\varphi_t^{\tilde{\gamma}\chi_A\partial_i}(x))\\ &= \tilde{\gamma}(x)(\chi_A\partial_i)(\varphi_t^{\tilde{\gamma}\chi_A\partial_i}(x))\end{aligned}$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi^{\chi_A\partial_i}_{\tilde{\gamma}(x)t})(x) = \tilde{\gamma}(x)\frac{\partial\varphi^{\chi_A\partial_i}_{\tilde{\gamma}(x)t}(x)}{\partial t} = \tilde{\gamma}(x)(\chi_A\partial_i)(\varphi^{\chi_A\partial_i}_{\tilde{\gamma}(x)t}(x)).$$

Ponadto $\varphi_0^{\tilde{\gamma}\chi_A\partial_i}(x) = \varphi_0^{\chi_A\partial_i}(x) = x$, więc $\varphi^{\chi_A\partial_i}_{\tilde{\gamma}(x)t}(x) = \varphi_t^{\tilde{\gamma}\chi_A\partial_i}(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ i $t \in \mathbb{R}$. Korzystając z Lematu 3.5 (1) i (4) mamy

$$\begin{aligned}\varrho_{i,A}^*(\tilde{\gamma}\chi_A\partial_i)(x) &= \frac{\partial\varrho_{i,A}^{-1}}{\partial x_i}(\tilde{\gamma}\chi_A\partial_i(\varrho_{i,A}(x))) = \tilde{\gamma}(\varrho_{i,A}(x))\frac{\partial\varrho_{i,A}^{-1}}{\partial x_i}(\chi_A\partial_i(\varrho_{i,A}(x)))\\ &= \tilde{\gamma}(x)\varrho_{i,A}^*(\chi_A\partial_i)(x) = \tilde{\gamma}\partial_i(x).\end{aligned}$$

Teraz możemy zapisać

$$\varphi^{\chi_A\partial_i}_{\tilde{\gamma}(x)}(x) = \varphi_1^{\tilde{\gamma}\chi_A\partial_i}(x) = \varrho_{i,A}\varphi_1^{\varrho_{i,A}^*(\tilde{\gamma}\chi_A\partial_i)}\varrho_{i,A}^{-1}(x) = \varrho_{i,A}\varphi_1^{\tilde{\gamma}\partial_i}\varrho_{i,A}^{-1}(x). \tag{3.13}$$

Funkcja $\tilde{\gamma}$ jest stała na krzywych całkowych pola ∂_i, więc zachodzi warunek

$$(\widetilde{\Gamma}(x))_i = \tilde{\gamma}(x) + x_i = (\varphi_1^{\tilde{\gamma}\partial_i}(x))_i.$$

Stąd i z Lematu 3.5 (6) oraz z (3.13) otrzymujemy

$$\begin{aligned}(\varrho_{i,A}L\varrho_{i,A}^{-1}(x))_i &= (\varrho_{i,A}\widetilde{\Gamma}\varrho_{i,A}^{-1}(x))_i = (\varrho_{i,A}\tilde{p}_i\widetilde{\Gamma}\varrho_{i,A}^{-1}(x))_i\\ &= (\varrho_{i,A}\tilde{p}_i\varphi_1^{\tilde{\gamma}\partial_i}\varrho_{i,A}^{-1}(x))_i = (\varrho_{i,A}\varphi_1^{\tilde{\gamma}\partial_i}\varrho_{i,A}^{-1}(x))_i\\ &= (\varphi^{\chi_A\partial_i}_{\tilde{\gamma}(x)}(x))_i,\end{aligned}$$

gdzie $\tilde{p}_i(x_1,\ldots,x_n) = (0,\ldots,x_i,\ldots,0)$. $\square$

3.4. Konstrukcja operatora Mathera

W tym rozdziale przedstawimy konstrukcję operatora $\Psi_{i,A}$. Zauważmy, że wszystkie odwzorowania uzyskane w dowodzie działają wzdłuż liści.

Lemat 3.9. *Niech $r, s \geq 1$, $A \geq 1$, $1 \leq i \leq k$ i niech α będzie modułem ciągłości. Istnieje U_A otoczenie* Id *w* $\mathrm{Diff}^{1,s}_c(n,k)_0$ *zależne od A oraz operator*

$$\Psi_{i,A} : U_A \to \mathrm{Diff}^{1,s}_c(n,k)_0$$

takie, że

(1) $\Psi_{i,A}$ *zachowuje* Id.
(2) *Odwzorowanie*

$$\Psi_{i,A} : U_A \cap \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K_{i-1}}(n,k)_0 \to \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K_i}(n,k)_0$$

jest ciągłe w $C^{r,s}$-topologii.
(3) *Dla każdego $f \in U_A \cap \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K_{i-1}}(n,k)_0$ mamy*

$$[f] = [\Psi_{i,A}(f)] \in H_1(\mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_c(n,k)_0).$$

(4) *Istnieją stałe $\delta > 0$ zależna od r, A i α oraz $Q_r \geq 2^{r^2}$ zależna od r i α takie, że*

$$\mu_{r,s,\alpha}(\Psi_{i,A}(f)) \leq Q_r A \mu_{r,s,\alpha}(f)$$

dla każdego $f \in U_A \cap \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K_{i-1}}(n,k)_0$ takiego, że $\mu_{r,s,\alpha}(f) \leq \delta$.

Niech $U_A = U'_A$ będzie otoczeniem Id z Lematu 3.6. Dla $f \in U_A$ definiujemy odwzorowanie $h \in C^{1,s}_{K'_i}(B_i,k)$ wzorem

$$h(x_1,\dots,\vartheta_i,\dots,x_n) = \vartheta_i \cdot \Gamma_{i,A}(f)(x_1,\dots,0,\dots,x_n).$$

Zależy ono w sposób ciągły od f w $C^{1,s}$-topologii oraz $\Gamma_{i,A}$ zachowuje Id, więc możemy zacieśnić U_A tak, by $h \in \mathrm{Diff}^{1,s}_{K'_i}(B_i,k)_0$ dla każdego $f \in U_A$. Określamy dyfeomorfizm $g = h^{-1}\Gamma_{i,A}(f) \in \mathrm{Diff}^{1,s}_{K'_i}(B_i,k)_0$. Mamy $h = \Gamma_{i,A}(f)$ i $g = \mathrm{Id}$ na $\{\vartheta \in B_i : \vartheta_i = 0\}$. Ponadto $g, h \in \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K'_i}(B_i,k)_0$ oraz $h \in G^{r,s,\alpha}_i$ dla $f \in U_A \cap \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K_{i-1}}(n,k)_0$. Fakt, że g i h należą do składowej spójnej przestrzeni $\mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K'_i}(B_i,k)$ wynika stąd, że są one $C^{r,s,\alpha}$-dyfeotopijne z Id, co otrzymujemy jak w dowodzie Lematu 3.4 dla $\Gamma_{i,A}(f)$.

Zauważmy, że $h - \mathrm{Id} = (\Gamma_{i,A}(f) - \mathrm{Id})\hat{p}_i$, gdzie

$$\hat{p}_i : B_i \ni (x_1,\dots,\vartheta_i,\dots,x_n) \mapsto (x_1,\dots,0,\dots,x_n) \in B_i.$$

Mamy $D\hat{p}_i = \mathrm{Id}$ i $D^{j,s}\hat{p}_i = 0$ dla $j \geq 2$. Stąd

$$\begin{aligned}\mu_{r,s,\alpha}(h) &\leq \sup_{x \neq y} \frac{\|D^{r,s}(\Gamma_{i,A}(f) - \mathrm{Id})(x) - D^{r,s}(\Gamma_{i,A}(f) - \mathrm{Id})(y)\|}{\alpha(|x-y|)} \\ &= \mu_{r,s,\alpha}(\Gamma_{i,A}(f))\end{aligned}$$

dla każdego $f\in U_A\cap \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K_{i-1}}(n,k)_0$.

Teraz z Lematu 2.8 mamy

$$\mu_{r,s,\alpha}(h^{-1})\le \mu_{r,s,\alpha}(h)+F(M_{r,s,\alpha}(h))$$

oraz

$$\begin{aligned}\mu_{r,s,\alpha}(g)&=\mu_{r,s,\alpha}(h^{-1}\Gamma_{i,A}(f))\\ &\le \mu_{r,s,\alpha}(h^{-1})+\mu_{r,s,\alpha}(\Gamma_{i,A}(f))+M_{r,s,\alpha}(h^{-1})G(M_{r,s,\alpha}(\Gamma_{i,A}(f)))\\ &\le \mu_{r,s,\alpha}(h)+F(M_{r,s,\alpha}(h))+\mu_{r,s,\alpha}(\Gamma_{i,A}(f))\\ &\quad+\Big(M_{r,s,\alpha}(h)+F(M_{r,s,\alpha}(h))\Big)G(M_{r,s,\alpha}(\Gamma_{i,A}(f)))\\ &\le 2\mu_{r,s,\alpha}(\Gamma_{i,A}(f))+F_1(M_{r,s,\alpha}(\Gamma_{i,A}(f)))\end{aligned}$$

dla $\mu_{1,s}(h)\le\frac{1}{6}$, gdzie F_1 jest pewnym wielomianem drugiego rodzaju zależnym od r i α. Z Lematów 3.4 (3) i 2.7 (1) istnieje stała $\delta>0$ zależna od r, A i α taka, że

$$\mu_{r,s,\alpha}(g)\le 24A\mu_{r,s,\alpha}(f)+F_1(12AC^r\mu_{r,s,\alpha}(f))\le 36A\mu_{r,s,\alpha}(f) \tag{3.14}$$

dla każdego $f\in U_A\cap \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K_{i-1}}(n,k)_0$ i $\mu_{r,s,\alpha}(f)\le\delta$. Korzystamy tutaj z tego, że $F_1(x)=x\widetilde{G}(x)$ dla pewnego wielomianu pierwszego rodzaju $\widetilde{G}$.

Możemy podnieść g do odwzorowania $\tilde g\in \mathrm{Diff}^{1,s}_{K_i''}(n,k)_0$ takiego, że $g\pi_i=\pi_i\tilde g$ oraz $\tilde g=\mathrm{Id}$ na $\{x\in\mathbb{R}^n : x_i\in\mathbb{Z}\}$. Odwzorowanie takie jest jedyne oraz $\tilde g$ zależy w sposób ciągły od g. Mamy $\mu_{r,s,\alpha}(\tilde g)=\mu_{r,s,\alpha}(g)$.

Bierzemy funkcję okresową $\xi\in C^\infty(\mathbb{R},[0,1])$ o okresie 1 taką, że $\xi=0$ w otoczeniu m i $\xi=1$ w otoczeniu $m+\frac12$, $m\in\mathbb{Z}$.

Definiujemy odwzorowania $\tilde g_1,\tilde g_2\in C^{1,s}_{K_i''}(n,k)_0$ wzorami

$$\tilde g_1=(\xi\circ \mathrm{pr}_i)\cdot(\tilde g-\mathrm{Id})+\mathrm{Id},\quad \tilde g_2=\tilde g_1^{-1}\tilde g.$$

Są one okresowe o okresie 1 względem i-tej współrzędnej oraz $\tilde g_1=\mathrm{Id}$ w otoczeniu $\mathbb{R}^{i-1}\times\{m\}\times\mathbb{R}^{n-i}$ i $\tilde g_2=\mathrm{Id}$ w otoczeniu $\mathbb{R}^{i-1}\times\{m+\frac12\}\times\mathbb{R}^{n-i}$, $m\in\mathbb{Z}$. Ponadto $\tilde g_1$ i $\tilde g_2$ zależą w sposób ciągły od f w $C^{1,s}$-topologii i $\tilde g_1=\tilde g_2=\mathrm{Id}$ dla $f=\mathrm{Id}$, więc możemy zacieśnić U_A tak, by $\tilde g_1,\tilde g_2\in \mathrm{Diff}^{1,s}_{K_i''}(n,k)_0$ dla $f\in U_A$. W szczególności $\tilde g_1,\tilde g_2\in \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K_i''}(n,k)_0$ dla $f\in U_A\cap \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K_{i-1}}(n,k)_0$.

Niech $x=(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Bierzemy $y=(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ takie, że $y_i\in\mathbb{Z}$ i $|x_i-y_i|\le 1$. Całkując względem i-tej współrzędnej mamy

$$|(\tilde g-\mathrm{Id})(x)|=|(\tilde g-\mathrm{Id})(x)-(\tilde g-\mathrm{Id})(y)|\le\mu_{1,s}(\tilde g)|x_i-y_i|,$$

czyli $\mu_{0,s}(\tilde g)\le\mu_{1,s}(\tilde g)$. Ponadto możemy przeprowadzić rozumowanie jak w dowodzie Lematu 2.7 (1) otrzymując $\mu_{0,s,\alpha}(\tilde g)\le 2\mu_{1,s,\alpha}(\tilde g)$.

Wykonujemy oszacowanie

$$\begin{aligned}
\mu_{r,s,\alpha}(\tilde g_1) &= \sup_{x\neq y}\frac{\|D^{r,s}((\xi\circ \mathrm{pr}_i)\cdot(\tilde g-\mathrm{Id}))(x)-D^{r,s}((\xi\circ \mathrm{pr}_i)\cdot(\tilde g-\mathrm{Id}))(y)\|}{\alpha(|x-y|)}\\
&\le \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\sup_{x\neq y}\frac{\left\|\left(D^{j,s}(\xi\circ \mathrm{pr}_i)\cdot D^{r-j,s}(\tilde g-\mathrm{Id})\right)\Big|_y^x\right\|}{\alpha(|x-y|)}\\
&\le \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\left(\sup_{x\neq y}\frac{\|D^{j,s}(\xi\circ \mathrm{pr}_i)(x)-D^{j,s}(\xi\circ \mathrm{pr}_i)(y)\|}{\alpha(|x-y|)}\mu_{r-j,s}(\tilde g)\right.\\
&\qquad\left.+\sup_{x\neq y}\|\xi\circ \mathrm{pr}_i\|_{j,s}\frac{\|D^{r-j,s}(\tilde g-\mathrm{Id})(x)-D^{r-j,s}(\tilde g-\mathrm{Id})(y)\|}{\alpha(|x-y|)}\right)\\
&\le \mu_{0,s,\alpha}(\xi\circ \mathrm{pr}_i)\mu_{r,s}(\tilde g)+\|\xi\circ \mathrm{pr}_i\|_{0,s}\mu_{r,s,\alpha}(\tilde g)\\
&\quad+\sum_{j=1}^{r-1}\binom{r}{j}\Big(\mu_{j,s,\alpha}(\xi\circ \mathrm{pr}_i)\mu_{r-j,s}(\tilde g)+\|\xi\circ \mathrm{pr}_i\|_{j,s}\mu_{r-j,s,\alpha}(\tilde g)\Big)\\
&\quad+\mu_{r,s,\alpha}(\xi\circ \mathrm{pr}_i)\mu_{0,s}(\tilde g)+\|\xi\circ \mathrm{pr}_i\|_{r,s}\mu_{0,s,\alpha}(\tilde g)\\
&\le Q_1 M_{r,s,\alpha}(\tilde g)
\end{aligned}$$

dla pewnej stałej $Q_1\ge 2^{r^2}$ zależnej od r i α, gdzie $\tilde h\big|_y^x=\tilde h(x)-\tilde h(y)$.

Z Lematu 2.7 (2) i z (3.14) otrzymujemy

$$\mu_{r,s,\alpha}(\tilde g_1)\le Q_1 C^{r^2}\mu_{r,s,\alpha}(\tilde g)\le 36 Q_1 C^{r^2} A\mu_{r,s,\alpha}(f), \tag{3.15}$$

gdzie wykorzystujemy równość $\mu_{r,s,\alpha}(\tilde g)=\mu_{r,s,\alpha}(g)$.

Zauważmy, że wyrażenie (3.14) jest ograniczone dla $\mu_{r,s,\alpha}(f)\le\frac{1}{A}$. Stąd i z Lematów 2.8 (1) i 2.9 (2) istnieje stała $Q_2\ge 2^{r^2}$ zależna od r i α taka, że (3.16)

$$\begin{aligned}
\mu_{r,s,\alpha}(\tilde g_2) &\le \mu_{r,s,\alpha}(\tilde g_1^{-1})+\mu_{r,s,\alpha}(\tilde g)+M_{r,s,\alpha}(\tilde g_1^{-1})G(M_{r,s,\alpha}(\tilde g))\\
&\le 2\mu_{r,s,\alpha}(\tilde g_1)+\mu_{r,s,\alpha}(\tilde g)+2M_{r,s,\alpha}(\tilde g_1)G(M_{r,s,\alpha}(\tilde g))\\
&\le 2Q_1C^{r^2}\mu_{r,s,\alpha}(\tilde g)+\mu_{r,s,\alpha}(\tilde g)+2Q_1C^{r^2}\mu_{r,s,\alpha}(\tilde g)G(C^{r^2}\mu_{r,s,\alpha}(\tilde g))\\
&\le Q_2\mu_{r,s,\alpha}(\tilde g)\le 36Q_2A\mu_{r,s,\alpha}(f)
\end{aligned}$$

dla $f\in U_A\cap \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K_{i-1}}(n,k)_0$ i dostatecznie małego $\mu_{r,s,\alpha}(f)$.

Określamy zbiory

$$E_1=\{x\in\mathbb{R}^n\,:\,0<x_i<1\},\qquad E_2=\left\{x\in\mathbb{R}^n\,:\,-\frac{3}{2}<x_i<-\frac{1}{2}\right\}$$

oraz operator $\Psi_{i,A} : U_A \to \mathrm{Diff}_c^{1,s}(n,k)_0$ wzorem

$$\Psi_{i,A}(f)(x) = \begin{cases} \tilde{g}_1(x) & x \in E_1 \\ \tilde{g}_2(x) & x \in E_2 \\ x & \text{poza tym} \end{cases}.$$

Pokażemy, że $\Psi_{i,A}$ spełnia tezę Lematu 3.9.

Własności (1) i (2) wynikają z faktu, że wszystkie wprowadzone odwzorowania zależą w sposób ciągły od f w $C^{1,s}$-topologii i działają wzdłuż liści oraz wykonywane operacje są ciągłe w $C^{r,s}$-topologii.

Aby pokazać (3) zauważmy, że istnieją dyfeomorfizmy $g_1, g_2 \in \mathrm{Diff}^{1,s}_{K_i'}(B_i,k)_0$ takie, że $g_1\pi_i = \pi_i\tilde{g}_1$ i $g_2\pi_i = \pi_i\tilde{g}_2$. Wówczas $\widetilde{g_1g_2} = \tilde{g}_1\tilde{g}_2 = \tilde{g}$, gdzie $\widetilde{g_1g_2}$ jest podniesieniem g_1g_2 takim, że $\widetilde{g_1g_2} = \mathrm{Id}$ na $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in \mathbb{Z}\}$. Stąd $g_1g_2 = g$.

Z ciągłej zależności od f w $C^{1,s}$-topologii możemy zacieśnić U_A tak, by $\Psi_{i,A}(f) \in U_A'$ dla $f \in U_A$, gdzie U_A' jest otoczeniem Id z Lematu 3.6.

Bierzemy $\vartheta \in B_i$. Wybieramy $x \in \mathbb{R}^n$ takie, że $\pi_i(x) = \vartheta$ i $x_i < -2A$ oraz $N \in \mathbb{N}$ takie, że $((T_i\Psi_{i,A}(f))^N(x))_i > 2A$. Z powyższych uwag i z definicji operatora $\Psi_{i,A}$ otrzymujemy

$$\Gamma_{i,A}(\Psi_{i,A}(f))(\vartheta) = \pi_i\left((T_i\Psi_{i,A}(f))^N(x)\right) = g_1g_2 = g.$$

Stąd zachodzi warunek

$$\Gamma_{i,A}(f)(\Gamma_{i,A}(\Psi_{i,A}(f)))^{-1} = \Gamma_{i,A}(f)g^{-1} = h \in G_i^{r,s,\alpha}$$

dla każdego $f \in U_A \cap \mathrm{Diff}^{r,s,\alpha}_{K_{i-1}}(n,k)_0$. Z Lematu 3.6 odwzorowania $\tau_{i,A}f$ i $\tau_{i,A}(\Psi_{i,A}(f))$ są sprzężone, czyli

$$[f] = [\Psi_{i,A}(f)] \in H_1(\mathrm{Diff}_c^{r,s,\alpha}(n,k)_0).$$

Pozostało wykazać (4). Niech $x \in E_1$ i $y \in E_2$. Bierzemy punkty $x^0, y^0 \in \mathbb{R}^n$ leżące na odcinku łączącym x i y takie, że $x_i^0 = 0$ i $y_i^0 = -\frac{1}{2}$. Wówczas $D^{r,s}(\tilde{g}_1 - \mathrm{Id})(x^0) = D^{r,s}(\tilde{g}_2 - \mathrm{Id})(y^0) = 0$ i mamy

$$\begin{aligned} \frac{\|D^{r,s}(\Psi_{i,A}(f))(x) - D^{r,s}(\Psi_{i,A}(f))(y)\|}{\alpha(|x-y|)} &\le \frac{\|D^{r,s}\tilde{g}_1(x) - D^{r,s}\tilde{g}_1(x^0)\|}{\alpha(|x-x^0|)} \\ &\quad + \frac{\|D^{r,s}\tilde{g}_2(y^0) - D^{r,s}\tilde{g}_2(y)\|}{\alpha(|y^0-y|)} \\ &\le \mu_{r,s,\alpha}(\tilde{g}_1) + \mu_{r,s,\alpha}(\tilde{g}_2). \end{aligned}$$

Analogiczne oszacowanie otrzymujemy w pozostałych przypadkach. Stąd

$$\mu_{r,s,\alpha}(\Psi_{i,A}(f)) \le \mu_{r,s,\alpha}(\tilde{g}_1) + \mu_{r,s,\alpha}(\tilde{g}_2).$$

Z (3.15) i (3.16) otrzymujemy tezę.

3.5. Dowód głównego twierdzenia

Zakładamy, że $r-s>k+1$. Bierzemy odwzorowanie $\zeta_A\in\mathrm{Diff}_c^\infty(n,k)_0$ takie, że $\zeta_A=(A\cdot\mathrm{Id},\mathrm{Id})$ na $K=[-2,2]^n$.

Niech U_A będzie otoczeniem Id w $\mathrm{Diff}_c^{1,s}(n,k)_0$ z Lematu 3.9. Dla dyfeomorfizmów $f,g\in\mathrm{Diff}_K^{1,s}(n,k)_0$ z $C^{1,s}$-otoczenia Id określamy odwzorowania

$$g_0=\zeta_A fg\zeta_A^{-1}\quad\text{i}\quad g_i=\Psi_{i,A}(g_{i-1}),$$

$i=1,\dots,k$. Z ciągłej zależności tych odwzorowań od f i g istnieje V_A otoczenie Id w $\mathrm{Diff}_c^{1,s}(n,k)_0$ zależne od A takie, że $g_0,g_1,\dots,g_k\in U_A$ dla $f,g\in V_A$. W szczególności dla $f,g\in V_A\cap\mathrm{Diff}_K^{r,s,\alpha}(n,k)_0$ mamy $g_i\in\mathrm{Diff}_{K_i}^{r,s,\alpha}(n,k)_0$, $i=0,\dots,k$.

Możemy teraz udowodnić następujący lemat.

Lemat 3.10. *Niech $r-s>k+1$ i niech α będzie modułem ciągłości. Wówczas istnieje $A_0\geq 1$ i $\varepsilon_0>0$ takie, że dla dowolnego $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ i $f,g\in\mathrm{Diff}_K^{r,s,\alpha}(n,k)_0$ spełniających warunek $\mu_{r,s,\alpha}(f),\mu_{r,s,\alpha}(g)\leq\varepsilon$ mamy $f,g\in V_{A_0}$ i $\mu_{r,s,\alpha}(g_k)\leq\varepsilon$.*

Dowód. Niech Q_r będzie stałą z Lematu 3.9 (4). Mamy $1-r+s+k<0$. Stąd istnieje $A_0\geq 1$ takie, że $3Q_r^kA_0^{1-r+s+k}\leq 1$.

Z Lematu 2.7 (1) istnieje $\varepsilon_0>0$ takie, że dla każdego $h\in\mathrm{Diff}_K^{r,s,\alpha}(n,k)_0$ i $\mu_{r,s,\alpha}(h)\leq\varepsilon_0$ mamy $h\in V_{A_0}$. Dla dostatecznie małego ε_0 z Lematu 2.9 (1) otrzymujemy

$$\mu_{r,s,\alpha}(fg)\leq\mu_{r,s,\alpha}(f)+\mu_{r,s,\alpha}(g)+C_1\mu_{r,s,\alpha}(f)\mu_{r,s,\alpha}(g)\leq 3\varepsilon \tag{3.17}$$

dla każdego $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$ i $f,g\in\mathrm{Diff}_K^{r,s,\alpha}(n,k)_0$ takich, że $\mu_{r,s,\alpha}(f),\mu_{r,s,\alpha}(g)\leq\varepsilon$.

Niech $(x,y)\in K_0$, gdzie $x\in\mathbb{R}^k$, $y\in\mathbb{R}^{n-k}$. Wtedy $\zeta_{A_0}(x,y)=(A_0x,y)$ oraz

$$(\zeta_{A_0}fg\zeta_{A_0}^{-1})(x,y)=(A_0(fg)_1(\tfrac{1}{A_0}x,y),y).$$

Każdy niezerowy element macierzy

$$I(x,y)=D^{r,s}(fg)(\tfrac{1}{A_0}x,y)\cdot(D\zeta_{A_0}^{-1}(x,y)\times\ldots\times D\zeta_{A_0}^{-1}(x,y))$$

ma postać

$$\frac{\partial^r(fg)_l}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_r}}(\tfrac{1}{A_0}x,y)\cdot\frac{\partial(\zeta_{A_0}^{-1})_{i_1}}{\partial x_{i_1}}(x,y)\cdot\ldots\cdot\frac{\partial(\zeta_{A_0}^{-1})_{i_r}}{\partial x_{i_r}}(x,y),$$

gdzie $i_1,\dots,i_r\in\{1,\dots,n\}$, $\#\{i_j : i_j>k,\ j=1,\dots,r\}\leq s$ i $l=1,\dots,n$. Stąd co najwyżej s pochodnych cząstkowych odwzorowania $\zeta_{A_0}^{-1}$ w powyższym iloczynie jest równa 1, a pozostałe A_0.

Bierzemy $(x^1,y^1),(x^2,y^2)\in K_0$. Z przedstawionych uwag i z rozważań Lematu 2.5 otrzymujemy

$$\frac{\|D^{r,s}(\zeta_{A_0}fg\zeta_{A_0}^{-1})(x^1,y^1)-D^{r,s}(\zeta_{A_0}fg\zeta_{A_0}^{-1})(x^2,y^2)\|}{\alpha(|(x^1,y^1)-(x^2,y^2)|)}\le A_0\frac{\|I(x^1,y^1)-I(x^2,y^2)\|}{\alpha(|(x^1,y^1)-(x^2,y^2)|)}$$
$$\le A_0^{1-r+s}\frac{\|D^{r,s}(fg)(\frac{1}{A_0}x^1,y^1)-D^{r,s}(fg)(\frac{1}{A_0}x^2,y^2)\|}{\alpha(|(\frac{1}{A_0}x^1,y^1)-(\frac{1}{A_0}x^2,y^2)|)}\le A_0^{1-r+s}\mu_{r,s,\alpha}(fg),$$

gdzie wykorzystaliśmy nierówność

$$|(x^1,y^1)-(x^2,y^2)|\ge|(\tfrac{1}{A_0}x^1,y^1)-(\tfrac{1}{A_0}x^2,y^2)|$$

oraz monotoniczność α. Dla $(x,y)\notin K_0$ mamy

$$D^{r,s}(\zeta_{A_0}fg\zeta_{A_0}^{-1})(x,y)=0=D^{r,s}(fg)(\tfrac{1}{A_0}x,y),$$

bo $\mathrm{supp}(f),\mathrm{supp}(g)\subset K$, więc powyższe oszacowanie zachodzi dla dowolnych punktów z $\mathbb{R}^n$.

Teraz korzystając z (3.17) otrzymujemy

$$\mu_{r,s,\alpha}(g_0)\le A_0^{1-r+s}\mu_{r,s,\alpha}(fg)\le 3A_0^{1-r+s}\varepsilon \tag{3.18}$$

dla $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ oraz $f,g\in\mathrm{Diff}_K^{r,s,\alpha}(n,k)_0$ takich, że $\mu_{r,s,\alpha}(f),\mu_{r,s,\alpha}(g)\le\varepsilon$.

Zacieśniamy ε_0 tak, by $3Q_r^iA_0^{1-r+s+i}\varepsilon_0\le\delta$ dla każdego $i=0,\dots,k$, gdzie δ jest stałą z Lematu 3.9 (4).

Niech $i=1,\dots,k$. Z (3.18) możemy założyć indukcyjnie, że

$$\mu_{r,s,\alpha}(g_{i-1})\le 3Q_r^{i-1}A_0^{1-r+s+(i-1)}\varepsilon\le\delta.$$

Wówczas z Lematu 3.9 (4) mamy

$$\mu_{r,s,\alpha}(g_i)\le Q_rA_0\mu_{r,s,\alpha}(g_{i-1})\le 3Q_r^iA_0^{1-r+s+i}\varepsilon\le\delta.$$

W szczególności

$$\mu_{r,s,\alpha}(g_k)\le 3Q_r^kA_0^{1-r+s+k}\varepsilon\le\varepsilon$$

dla każdego $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$. □

Niech $A_0\ge 1$ i $\varepsilon_0>0$ będą stałymi z Lematu 3.10. Określamy zbiór

$$L=\{h\in\mathrm{Diff}_K^{r,s,\alpha}(n,k)_0\ :\ \mu_{r,s,\alpha}(h)\le\varepsilon_0\},$$

który wyposażamy w $C^{r,s}$-topologię. Ustalamy $f\in L$ i definiujemy operator

$$\Phi: L\ni g\mapsto g_k\in L.$$

Z Lematu 3.10 jest on dobrze określony. Z Lematów 2.15 (1) i 3.9 (2) odwzorowanie Φ jest ciągłe w $C^{r,s}$-topologii. Ponadto zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.11. *Niech $r-s>k+1$. Wówczas zbiór L z $C^{r,s}$-topologią posiada własność punktu stałego, tzn. każde odwzorowanie ciągłe $L\to L$ ma punkt stały.*

Dowód. Definiujemy zbiór

$$L' = \{h \in C_K^{r,s,\alpha}(n,k)_0 \,:\, \mu_{r,s,\alpha}(h) \leq \varepsilon_0\}.$$

Będziemy go traktować jako podzbiór przestrzeni $C_K^{r,s}(n,k)_0$ z normą $\|\cdot\|_{r,s}$.

Topologia generowana przez $\|\cdot\|_{r,s}$ na $C_K^{r,s}(n,k)_0$ pokrywa się z $C^{r,s}$-topologią. Stąd odwzorowanie $L \ni h \mapsto h - \mathrm{Id} \in L'$ jest homeomorfizmem.

Bierzemy ciąg $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset L'$ zbieżny w $C_K^{r,s}(n,k)_0$ do pewnego h. Wówczas dla każdego $x, y \in \mathbb{R}^n$ mamy $\lim\limits_{i\to\infty} D^{r,s}h_i(x) = D^{r,s}h(x)$ oraz

$$\frac{\|D^{r,s}h_i(x) - D^{r,s}h_i(y)\|}{\alpha(|x-y|)} \leq \mu_{r,s,\alpha}(h_i) \leq \varepsilon_0.$$

Stąd

$$\frac{\|D^{r,s}h(x) - D^{r,s}h(y)\|}{\alpha(|x-y|)} \leq \varepsilon_0,$$

czyli $\mu_{r,s,\alpha}(h) \leq \varepsilon_0$ i $h \in L'$. W ten sposób pokazaliśmy, że zbiór L' jest domknięty w $C_K^{r,s}(n,k)_0$.

Następnie określamy operator

$$S : (C_K^{r,s}(n,k)_0, \|\cdot\|_{r,s}) \ni h \mapsto D^{r,s}h \in (C_K^0(\mathbb{R}^n, L^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)), \|\cdot\|_{\sup}),$$

gdzie $\|\cdot\|_{\sup}$ oznacza normę supremum. Jest to izometria, bo

$$\|Sh\|_{\sup} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|D^{r,s}h(x)\| = \|h\|_{r,s}$$

dla $h \in C_K^{r,s}(n,k)_0$. Stąd zbiór $S(L')$ jest domknięty w $C_K^0(\mathbb{R}^n, L^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$.

Rodzina $\{Sh \,:\, h \in L'\}$ jest wspólnie ograniczona, bo z Lematu 2.7 (1) mamy

$$\|Sh\|_{\sup} = \mu_{r,s}(h) \leq C\mu_{r,s,\alpha}(h) \leq C\varepsilon_0$$

dla $h \in L'$. Jest także jednakowo ciągła, co wynika z oszacowania

$$\|Sh(x) - Sh(y)\| = \frac{\|D^{r,s}h(x) - D^{r,s}h(y)\|}{\alpha(|x-y|)}\alpha(|x-y|) \leq \varepsilon_0\alpha(|x-y|),$$

$h \in L'$ i $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Zbiór $K = [-2,2]^n$ jest zwarty, więc z twierdzenia Arzeli-Ascoliego zbiór $S(L')$ jest względnie zwarty w $C_K^0(\mathbb{R}^n, L^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$. Wcześniej wykazaliśmy, że jest on domknięty, a S jest izometrią. Stąd zbiory $S(L')$ i L' są zwarte.

Zbiór L' jest zwartym, wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha, więc z twierdzenia Schaudera-Tichonowa każde odwzorowanie ciągłe $L' \to L'$ ma punkt stały. Z homeomorficzności L i L' otrzymujemy tezę. □

Z Twierdzenia 3.11 operator Φ ma punkt stały. Wobec tego istnieje $g \in L$ takie, że $g_k = g$. Teraz z Lematu 3.9 (3) otrzymujemy

$$[fg] = [\zeta_A f g \zeta_A^{-1}] = [g_0] = \ldots = [g_k] = [g] \in H_1(\mathrm{Diff}_c^{r,s,\alpha}(n,k)_0),$$

czyli

$$[f] = [\mathrm{Id}] \in H_1(\mathrm{Diff}_c^{r,s,\alpha}(n,k)_0)$$

dla każdego $f \in L$. Z Własności 2.21 zbiór L generuje $\mathrm{Diff}_K^{r,s,\alpha}(n,k)_0$, więc

$$\mathrm{Diff}_K^{r,s,\alpha}(n,k)_0 \subset [\mathrm{Diff}_c^{r,s,\alpha}(n,k)_0, \mathrm{Diff}_c^{r,s,\alpha}(n,k)_0],$$

co należało dowieść.

3.6. Przypadek grupy C^{n+1}-dyfeomorfizmów

Niech $r \geq 1$, $n \geq 1$ i niech M będzie rozmaitością wymiaru n. Przez $\mathrm{Diff}_c^r(M)_0$ oznaczamy grupę C^r-dyfeomorfizmów na M dyfeotopijnych z Id przez C^r-dyfeotopie o zwartych nośnikach.

Dowód Mathera [17], [18] doskonałości grupy $\mathrm{Diff}_c^r(M)_0$ działa przy założeniu, że $r \neq n+1$. Dla $r = n+1$ problem pozostaje nadal otwarty. Poniżej przedstawimy argumenty przemawiające za tym, że grupa $\mathrm{Diff}_c^{n+1}(M)_0$ nie jest doskonała. Pokażemy także jak przypadek rozmaitości z foliacją wiąże się z pozytywnym rozwiązaniem tego zagadnienia.

W 1985 r. Mather [20] udowodnił, że grupa G złożona z C^1-dyfeomorfizmów na $\mathbb{R}$ o zwartych nośnikach, których pierwsze pochodne mają ograniczone wariacje nie jest doskonała. W tym celu Mather pokazał, że można skonstruować homomorfizm $\pi : (G, \circ) \to (\mathbb{R}, +)$ będący epimorfizmem. Tymczasem gdyby grupa G była doskonała, to każdy taki homomorfizm byłby odwzorowaniem zerowym. W dowodzie zostały wykorzystane własności miar Radona.

Wcześniej, w [19] Mather rozważał własności pewnych operatorów wskazujące, że przypadek $r = n+1$ różni się od pozostałych. Streścimy przedstawione tam rozumowania.

Niech

$$T^n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,:\, |z_1| = \ldots = |z_n| = 1\}$$

będzie n-wymiarowym torusem. Dla liczby całkowitej $A > 1$ określamy odwzorowanie

$$\Gamma : T^n \ni (z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1^A, \dots, z_n^A) \in T^n.$$

Przez $\mathcal{X}^r(T^n)$ oznaczamy przestrzeń pól wektorowych klasy C^r na T^n i definiujemy operator $\mathrm{Tr} : \mathcal{X}^r(T^n) \to \mathcal{X}^r(T^n)$ wzorem

$$\mathrm{Tr}(X)(x) = \sum_{y \in \Gamma^{-1}(x)} \Gamma_*(X_y),$$

gdzie $X \in \mathcal{X}^r(T^n)$ i $x \in T^n$. Odwzorowanie Γ jest lokalnym dyfeomorfizmem, więc Tr jest dobrze określone. Wówczas mamy

Twierdzenie 3.12. *Zachodzą własności*

(1) *Jeśli* $r > n+1$*, to* $\mathrm{Tr} - \mathrm{Id}$ *jest izomorfizmem.*
(2) *Jeśli* $r < n+1$*, to* $\mathrm{Tr} - \mathrm{Id}$ *jest surjekcją oraz* $\dim\ker(\mathrm{Tr} - \mathrm{Id}) = \infty$*.*
(3) *Jeśli* $r = n+1$*, to* $\mathrm{Tr} - \mathrm{Id}$ *nie jest surjekcją, ale jest injekcją i obraz odwzorowania* $\mathrm{Tr} - \mathrm{Id}$ *jest zbiorem gęstym w* $\mathcal{X}^r(T^n)$*.*

Teraz przyjmujemy oznaczenia z podrozdziału 3.5 i zakładamy, że odwzorowania $f, g, g_0, \ldots, g_n \in \mathrm{Diff}_c^r(\mathbb{R}^n)_0$ są z małego C^1-otoczenia Id, gdzie $r > n+1$ (przypadek $r < n+1$ jest analogiczny).

Z Lematu 3.6 dla każdego $i = 1, \ldots, n$ istnieje $L_i \in \mathrm{Diff}_c^r(\mathbb{R}^n)_0$ takie, że

$$\tau_{i,A} g_{i-1} = L_i \tau_{i,A} g_i L_i^{-1}.$$

Stąd mamy $g_{i-1} = \tau_{i,A}^{-1} L_i \tau_{i,A} g_i L_i^{-1}$ oraz

$$\begin{aligned} f &= \zeta_A^{-1} g_0 \zeta_A g^{-1} = \zeta_A^{-1}(\tau_{1,A}^{-1} L_1 \tau_{1,A}) g_1 L_1^{-1} \zeta_A g^{-1} \\ &= \zeta_A^{-1}(\tau_{1,A}^{-1} L_1 \tau_{1,A}) \ldots (\tau_{n,A}^{-1} L_n \tau_{n,A}) g_n L_n^{-1} \ldots L_1^{-1} \zeta_A g^{-1}. \end{aligned}$$

Możemy przyjąć, że $g_n = g$ dla pewnego g. Wyznaczając $\zeta_A f \zeta_A^{-1}$ i dokonując linearyzacji otrzymujemy

$$(\zeta_A)_* \hat{f} = ((\tau_{1,A}^{-1})_*(\hat{L}_1) - \hat{L}_1) + \ldots + ((\tau_{n,A}^{-1})_*(\hat{L}_n) - \hat{L}_n) + (\hat{g} - (\zeta_A)_*(\hat{g})),$$

gdzie $f = \hat{f} + \mathrm{Id}$ i $\hat{f}$ traktujemy jak pole wektorowe na $\mathbb{R}^n$.

Bierzemy prostsze równanie

$$A_* \hat{f} = ((T_1^{-1})_*(\hat{L}_1) - \hat{L}_1) + \ldots + ((T_n^{-1})_*(\hat{L}_n) - \hat{L}_n) + (\hat{g} - A_*(\hat{g})),$$

gdzie A oznacza operator mnożenia przez A, a T_i translację o wektor jednostkowy względem i-tej współrzędnej. Zastępując jego lewą stronę przez $F(\hat{L}_1, \ldots, \hat{L}_n, \hat{g})$ otrzymujemy odwzorowanie, którego surjektywność oznacza, że powyższe równanie ma rozwiązanie dla każdego $\hat{f}$.

Mather udowodnił, że F jest surjekcją wtedy i tylko wtedy gdy $A \neq 1$ i $r \neq n+1$. Nie wiadomo, czy analogiczny fakt zachodzi dla odwzorowań $\zeta_A, \tau_{1,A}, \ldots, \tau_{n,A}$.

Na zakończenie pokażemy jak można badać omawiany problem przy pomocy rozmaitości z foliacją.

Niech M będzie n-wymiarową rozmaitością. Z Lematu 2.16 możemy przyjąć, że $M = \mathbb{R}^n$ i $f \in \mathrm{Diff}_c^r(\mathbb{R}^n)_0$ oraz f jest z małego C^1-otoczenia Id. Wówczas istnieje rozkład $f = (f_1, f_2)$ na dyfeomorfizmy $g = (g_1, g_2) \in \mathrm{Diff}_c^r(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}_k)_0$ i $h = (h_1, h_2) \in \mathrm{Diff}_c^r(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}'_{n-k})_0$ takie, że $f = gh$, gdzie $\mathcal{F}_k = \{\mathbb{R}^k \times \{\mathrm{pt}\}\}$ oraz $\mathcal{F}'_{n-k} = \{\{\mathrm{pt}\} \times \mathbb{R}^{n-k}\}$.

Istotnie, określając $h(x,y) = (x, f_2(x,y))$ i $g(x,y) = (f_1(h^{-1}(x,y)), y)$ dla $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ mamy

$$\begin{aligned}(gh)(x,y) &= (g_1(h(x,y)), g_2(h(x,y))) = ((f_1 h^{-1})(h(x,y)), h_2(x,y)) \\ &= (f_1(x,y), f_2(x,y)) = f(x,y).\end{aligned}$$

Istnienie takiego rozkładu oznacza, że z doskonałości grupy $\mathrm{Diff}_c^r(\mathbb{R}^n, \mathcal{F})_0$, gdzie $\mathcal{F}$ jest dowolną foliacją produktową, wynika doskonałość grupy $\mathrm{Diff}_c^r(\mathbb{R}^n)_0$. W szczególności wniosek taki zachodzi dla $r = n+1$.

W niniejszej pracy pokazaliśmy, że dowód Mathera działa dla odwzorowań klasy $C^{r,s}$. Transwersalnie następuje utrata gładkości, więc Twierdzenie 3.2 jest prawdopodobnie najlepszym wynikiem jaki można uzyskać dla foliacji.

4. Rozmaitości z narożami

4.1. Wprowadzenie

Niech $r \geq 1$, $0 \leq k \leq n$ i $0 \leq l \leq m$. Oznaczamy $\mathbb{R}^n_k = \mathbb{R}^k \times [0, \infty)^{n-k}$. Ponadto przez ∂X będziemy oznaczać brzeg zbioru X.

Mówimy, że punkt $x \in \mathbb{R}^n_k$ jest *indeksu* j, $j = 0, \ldots, n-k$, jeśli dokładnie j spośród ostatnich $n-k$ współrzędnych punktu x jest równych 0.

Definicja 4.1. Niech $U \subset \mathbb{R}^n_k$ i $V \subset \mathbb{R}^m_l$ będą zbiorami otwartymi. Mówimy, że odwzorowanie $f : U \to V$ jest *klasy* C^r jeśli istnieją i są ciągłe wszystkie pochodne cząstkowe odwzorowania f do rzędu r włącznie. W przypadku punktów należących do $\partial\mathbb{R}^n_k$ rozważamy pochodne jednostronne. Ponadto f nazywamy *dyfeomorfizmem klasy* C^r jeśli f jest klasy C^r i ma odwrotność klasy C^1.

Przez $D^r f : U \to L^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ będziemy oznaczać r-tą pochodną odwzorowania f. Dodatkowo przyjmujemy $D^0 f = f$.

Z twierdzenia Whitney'a o rozszerzeniu odwzorowanie f jest klasy C^r wtedy i tylko wtedy gdy można je przedłużyć do odwzorowania $\hat{f} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^m$ klasy C^r, gdzie $\widetilde{U}$ jest otwarty w $\mathbb{R}^n$ i $U = \widetilde{U} \cap \mathbb{R}^n_k$. Dowód tego faktu można znaleźć w [14], [32] lub [33].

Przez $\mathcal{C}^r(n,k)$ oznaczamy przestrzeń odwzorowań $f : \mathbb{R}^n_k \to \mathbb{R}^n_k$ klasy C^r takich, że $f(\partial\mathbb{R}^n_k) \subset \partial\mathbb{R}^n_k$. Ponadto przez $\mathcal{D}^r(n,k)$ będziemy oznaczać grupę C^r-dyfeomorfizmów na $\mathbb{R}^n_k$. Dyfeomorfizm przeprowadza punkty indeksu j na punkty indeksu j dla $j = 0, \ldots, n-k$, więc warunek $f(\partial\mathbb{R}^n_k) \subset \partial\mathbb{R}^n_k$ jest zawsze spełniony.

Definicja 4.2. Przestrzeń Hausdorfa M wymiaru n nazywamy *rozmaitością z narożami* klasy C^r jeśli jest wyposażona w strukturę różniczkową klasy C^r generowaną przez atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, gdzie U_i jest zbiorem otwartym w M, a $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$ homeomorfizmem na zbiór otwarty w $\mathbb{R}^n_{j(i)}$ dla pewnego $j(i) = 0, \ldots, n$, $i \in I$.

W dalszej części będziemy zakładać, że M jest n-wymiarową, spójną rozmaitością z narożami klasy C^∞.

Definicja 4.3. Odwzorowanie $f : M \to M$ na rozmaitości z narożami jest *klasy* C^r (*dyfeomorfizmem klasy* C^r) jeśli dla każdego $x \in M$ istnieją mapy (U, u), (V, v) na M takie, że $x \in U$, $f(x) \in V$, $f(U) \subset V$ i vfu^{-1} jest klasy C^r (dyfeomorfizmem klasy C^r).

Mówimy, że punkt $x \in M$ jest *indeksu* j, $j = 0, \dots, n$, jeśli istnieje mapa (U, φ) na M taka, że $x \in U$ i $\varphi(x)$ jest indeksu j. Indeks punktu nie zależy od wyboru mapy. Spójne składowe zbioru punktów o indeksie j nazywamy *krawędziami* wymiaru $n-j$. Są to podrozmaitości (bez brzegu) wymiaru $n-j$ rozmaitości M. Punkty indeksu n będziemy nazywać *wierzchołkami*.

Przez $\mathcal{C}^r(M, M)$ oznaczamy przestrzeń odwzorowań klasy C^r na M takich, że $f(\partial M) \subset \partial M$, a przez $\mathcal{D}^r(M)$ grupę C^r-dyfeomorfizmów na M, $r = 0, \dots, \infty$.

Analogicznie jak wcześniej indeksów c, K, 0 będziemy używać na oznaczenie odpowiednich podprzestrzeni.

Definicja 4.4. Mówimy, że odwzorowanie $H : M \times I \to M$ klasy C^r jest *C^r-dyfeotopią* od Id do f jeśli $H_t \in \mathcal{D}^r(M)$ dla każdego $t \in I$ oraz $H_0 = \mathrm{Id}$ i $H_1 = f$.

Udowodnimy następujące twierdzenie dotyczące doskonałości.

Twierdzenie 4.5. *Niech $n \geq 2$ i niech M będzie n-wymiarową rozmaitością z narożami klasy C^∞. Przez $\mathcal{D}_c^\infty(M)_0$ oznaczamy grupę C^∞-dyfeomorfizmów dyfeotopijnych z* Id *przez C^∞-dyfeotopie o zwartych nośnikach. Jeśli M nie ma wierzchołków, to grupa $\mathcal{D}_c^\infty(M)_0$ jest doskonała.*

Zaczniemy od przedstawienia podstawowych informacji dotyczących tego przypadku.

Niech $r \geq 0$. Dla odwzorowania $f : \mathbb{R}^n_k \to \mathbb{R}^m_l$ definiujemy seminormy

$$\mu_r(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n_k} \|D^r(f - \mathrm{Id})(x)\|,$$

$$\|f\|_r = \sup_{x \in \mathbb{R}^n_k} \|D^r f(x)\|,$$

oraz

$$M_r(f) = \sup\{\mu_i(f) \, : \, i = 1, \dots, r\}.$$

Niech $K \subset \mathbb{R}^n_k$ będzie zbiorem zwartym. Wówczas oznaczamy

$$R_K = \sup\{\mathrm{dist}(x, \overline{\mathbb{R}^n_k \setminus K}) \, : \, x \in \mathbb{R}^n_k\} < \infty.$$

Oczywiście mamy $\|f\|_1 \leq \mu_1(f) + 1$ i $\mu_1(f) \leq \|f\|_1 + 1$ oraz $\|f\|_r = \mu_r(f)$ dla $r \geq 2$.

Zastępując $\mathbb{R}^n$ przez $\mathbb{R}^n_k$ w dowodzie Lematu 1.13 otrzymujemy następujący

Lemat 4.6. *Niech $r \geq 1$.*

(1) *Niech $K \subset \mathbb{R}^n_k$ będzie zbiorem zwartym. Wówczas istnieje stała $C > 0$ zależna od R_K taka, że*

$$\mu_r(f) \leq C \mu_{r+1}(f)$$

dla każdego $f \in \mathcal{C}^{r+1}(n, k)$ takiego, że $D^r(f - \mathrm{Id}) = 0$ na $\overline{\mathbb{R}^n_k \setminus K}$.

(2) *Niech* $1 \leq i \leq k$. *Istnieje stała* $C \geq 1$ *taka, że*

$$\mu_r(f) \leq C^r \mu_{r+1}(f)$$

dla każdego $f \in \mathcal{C}^{r+1}(n,k)$ *okresowego względem* i*-tej współrzędnej o okresie* 1.

Uwaga 4.7. Podobnie jak w poprzedniej części, nierówność z (1) można sprowadzić do oszacowania postaci (2). Nie zmienia to rozumowania, jednak również tutaj wygodniej będzie używać dwóch odrębnych warunków.

Dla odwzorowań z przestrzeni $\mathcal{C}^r(n,k)$ otrzymujemy analogiczne wzory jak w (1.1)-(1.4). Stąd będziemy się do nich odwoływać w naszych rozważaniach. Postępując jak w Lematach 1.15 i 1.16 otrzymujemy

Lemat 4.8. (1) *Niech* $l \geq 1$. *Dla* $f_1, \dots, f_l \in \mathcal{C}^1(n,k)$ *mamy*

$$\mu_1(f_1 \dots f_l) \leq l(\sup_{1 \leq i \leq l} \mu_1(f_i))(1 + \sup_{1 \leq i \leq l} \mu_1(f_i))^{l-1}.$$

(2) *Niech* $r \geq 2$ *i* $l \geq 1$. *Istnieje wielomian drugiego rodzaju* F *zależny od* r *i* l *taki, że*

$$\mu_r(f_1 \dots f_l) \leq l(\sup_{1 \leq i \leq l} \mu_r(f_i))(1 + \sup_{1 \leq i \leq l} \mu_1(f_i))^{r(l-1)} + F(\sup_{1 \leq i \leq l} M_{r-1}(f_i))$$

dla dowolnych $f_1, \dots, f_l \in \mathcal{C}^r(n,k)$.

(3) *Dla* $f \in \mathcal{D}^1(n,k)$ *i* $\mu_1(f) \leq \frac{1}{2}$ *mamy*

$$\mu_1(f^{-1}) \leq 2\mu_1(f).$$

(4) *Niech* $r \geq 2$. *Istnieje wielomian drugiego rodzaju* F *zależny od* r *taki, że*

$$\mu_r(f^{-1}) \leq \mu_r(f)(1 + 2\mu_1(f))^{r+1} + F(M_{r-1}(f))$$

dla każdego $f \in \mathcal{D}^r(n,k)$ *takiego, że* $\mu_1(f) \leq \frac{1}{2}$.

4.2. Własności topologiczne grupy $\mathcal{D}^r_c(M)$

Definicja 4.9. Niech $0 \leq p \leq r$. W przestrzeni $\mathcal{C}^r_c(M,M)$ wprowadzamy *C^p-topologię* przy pomocy pełnego układu otoczeń

$$\begin{aligned}\beta^p_f(\varphi, \psi, K, \varepsilon) = \{h \in \mathcal{C}^r_c(M,M) \,:\, &\|D^j(\psi_i h \varphi_i^{-1})(x) - D^j(\psi_i f \varphi_i^{-1})(x)\| < \varepsilon_i, \\ &h(K_i) \subset V_i,\ 0 \leq j \leq p,\ x \in \varphi_i(K_i),\ i \in I\},\end{aligned}$$

gdzie $f \in \mathcal{C}^r_c(M,M)$, $\varphi = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ jest lokalnie skończonym atlasem na M, $\psi = \{(V_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ zbiorem map na M, $K = \{K_i\}_{i \in I}$ lokalnie skończonym pokryciem M złożonym ze zbiorów zwartych takich, że $K_i \subset U_i$, $i \in I$, oraz $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i \in I}$ rodziną stałych dodatnich.

Na $\mathcal{C}^\infty(M,M)$ wprowadzamy C^∞-*topologię* indukowaną przez ciąg inkluzji $\mathcal{C}^\infty(M,M) \to \mathcal{C}^r(M,M)$, $r = 0,1,\ldots$. Ponadto grupę $\mathcal{D}^r(M)$ wyposażamy w C^r-topologię indukowaną z $\mathcal{C}^r(M,M)$, $r = 0,\ldots,\infty$.

Analogicznie jak w Lemacie 1.21 uzyskujemy

Lemat 4.10. *Niech $r \geq 1$. Wówczas zbiór $\mathcal{D}^r_c(M)$ jest otwarty w $\mathcal{C}^r_c(M,M)$ w C^1-topologii.*

Przeprowadzając rozumowania jak w Lematach 2.15, 2.16 i Wniosku 2.17 otrzymujemy poniższe rezultaty. Istotny jest tutaj fakt, że odwzorowania użyte w konstrukcji zachowują krawędzie rozmaitości.

Lemat 4.11. *Niech $1 \leq p \leq r \leq \infty$. Wówczas*

(1) *Składanie odwzorowań*
$$\mathrm{comp}: \mathcal{C}^r_c(M,M) \times \mathcal{C}^r_c(M,M) \ni (f,g) \mapsto fg \in \mathcal{C}^r_c(M,M)$$
jest ciągłe w C^p-topologii.

(2) *Odwracanie*
$$\mathrm{inv}: \mathcal{D}^r_c(M) \ni f \mapsto f^{-1} \in \mathcal{D}^r_c(M)$$
jest ciągłe w C^p-topologii.

W szczególności grupa $\mathcal{D}^r_c(M)$ jest grupą topologiczną.

Lemat 4.12. *Niech $1 \leq r \leq \infty$ i niech M będzie rozmaitością z narożami. Istnieje $\varphi = \{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ lokalnie skończony atlas na M oraz $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\varphi)$ i $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\varphi) \subset \mathcal{V}$ otoczenia* Id *w $\mathcal{D}^1_c(M)_0$ w C^1-topologii takie, że dla każdego $f \in \mathcal{V} \cap \mathcal{D}^r_c(M)_0$ istnieje $m \in \mathbb{N}$ i dyfeomorfizmy $g_1,\ldots,g_m \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D}^r_c(M)_0$ spełniające warunki $f = g_1 \ldots g_m$ oraz $\mathrm{supp}(g_j) \subset U_{i(j)}$, $j = 1,\ldots,m$.*

Wniosek 4.13. *Niech $1 \leq r \leq \infty$. Grupa $\mathcal{D}^r_c(M)_0$ składa się z dyfeomorfizmów dyfeotopijnych z* Id *przez C^∞-dyfeotopie o zwartych nośnikach.*

Teraz przedstawimy uwagi dla rozmaitości $M = \mathbb{R}^n_k$.

Lemat 4.14. *Niech $0 \leq p < r \leq \infty$. Wówczas zbiór $\mathcal{C}^r(n,k)$ jest gęsty w $\mathcal{C}^p(n,k)$. Ponadto jeśli $f \in \mathcal{C}^p(n,k)$ jest klasy C^r w otoczeniu zbioru domkniętego $L \subset \mathbb{R}^n_k$, to w dowolnym C^p-otoczeniu odwzorowania f w $\mathcal{C}^p(n,k)$ istnieje $g \in \mathcal{C}^r(n,k)$ takie, że $g = f$ na L.*

Dowód. Dowód wymaga modyfikacji rozumowania z Lematu 1.22.

Niech $f \in \mathcal{C}^p(n,k)$ i bierzemy otoczenie $\beta^p_f(K,\varepsilon)$, gdzie $K = \{K_i\}_{i\in I}$ jest lokalnie skończonym pokryciem $\mathbb{R}^n_k$ złożonym ze zbiorów zwartych oraz $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ rodziną stałych dodatnich.

Z twierdzenia Whitney'a rozszerzamy f do odwzorowania $\tilde{f} \in C^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Jeśli $\mathrm{supp}(\tilde{f}) \cap \partial\mathbb{R}^n_k = \emptyset$, to możemy zastosować Lemat 1.22. Zakładamy, że $\mathrm{supp}(\tilde{f}) \cap \partial\mathbb{R}^n_k \neq \emptyset$.

Niech $i \in I$. Możemy przyjąć, że $\operatorname{supp}(\tilde{f}_i) \subset \mathbb{R}^k \times (-\frac{\tilde{\varepsilon}_i}{3}, \infty)^{n-k}$, gdzie $\tilde{f}_i = \tilde{f}$. W przeciwnym przypadku bierzemy $\tilde{f}_i = \gamma_i \tilde{f}$, gdzie $\gamma_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^∞, $\gamma_i = 1$ na $\mathbb{R}^n_k$ i $\operatorname{supp}(\gamma_i) \subset \mathbb{R}^k \times (-\frac{\tilde{\varepsilon}_i}{3}, \infty)^{n-k}$.

Odwzorowanie $\tilde{f}_i$ jest ciągłe wraz ze swymi pochodnymi, więc dla każdego $\tilde{\varepsilon}_i > 0$ istnieje $0 < \delta_i < \frac{\tilde{\varepsilon}_i}{3}$ takie, że dla $x \in K_i$, $y \in \mathbb{R}^n$, $|x - y| < \delta_i$ mamy $\|D^j \tilde{f}_i(x) - D^j \tilde{f}_i(y)\| < \frac{\tilde{\varepsilon}_i}{2}$, $0 \le j \le p$. Określamy $\hat{f}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wzorem $\hat{f}_i(x) = \tilde{f}_i(x) + (\frac{\tilde{\varepsilon}_i}{2}, \dots, \frac{\tilde{\varepsilon}_i}{2})$. Wtedy $\operatorname{supp}(\hat{f}_i) \subset \operatorname{Int} \mathbb{R}^n_k$, czyli $\hat{f}_i(\partial \mathbb{R}^n_k) \subset \partial \mathbb{R}^n_k$.

Określamy funkcję $\vartheta_i = \vartheta_{\delta_i} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, [0, \infty))$ jak w Lemacie 1.22 i definiujemy odwzorowanie $\tilde{g}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wzorem $\tilde{g}_i = \vartheta_i * \hat{f}_i$. Z założenia o δ_i mamy $\operatorname{supp}(\tilde{g}_i) \subset \operatorname{Int} \mathbb{R}^n_k$.

Dla $1 \le j \le r$ i $x \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$D^j \tilde{g}_i(x) = (D^j \vartheta_i * \hat{f}_i)(x),$$

czyli $\tilde{g}_i \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Ponadto dla $x \in K_i$ i $0 \le j \le p$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|D^j \tilde{g}_i(x) - D^j f(x)\| &\le \|D^j \tilde{g}_i(x) - D^j \hat{f}_i(x)\| + \|D^j \hat{f}_i(x) - D^j \tilde{f}_i(x)\| \\ &\le \int_{B(0,\delta_i)} \vartheta_i(y) \|D^j \hat{f}_i(x-y) - D^j \hat{f}_i(x)\| \, dy + \frac{\tilde{\varepsilon}_i}{2} \\ &\le \int_{B(0,\delta_i)} \vartheta_i(y) \|D^j \tilde{f}_i(x-y) - D^j \tilde{f}_i(x)\| \, dy + \frac{\tilde{\varepsilon}_i}{2} < \tilde{\varepsilon}_i. \end{aligned}$$

Niech $\lambda = \{\lambda_i\}_{i \in I}$ będzie lokalnie skończonym rozkładem jedynki klasy C^∞ na $\mathbb{R}^n_k$ skojarzonym z K. Bierzemy $g_i = \tilde{g}_i|_{\mathbb{R}^n_k} : \mathbb{R}^n_k \to \mathbb{R}^n_k$ i definiujemy odwzorowanie $g : \mathbb{R}^n_k \to \mathbb{R}^n_k$ wzorem

$$g(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i(x) g_i(x).$$

Postępując jak w Lemacie 1.22 otrzymujemy oszacowanie

$$\|D^j g(x) - D^j f(x)\| < \varepsilon_i$$

dla każdego $x \in K_i$, $0 \le j \le p$ i dla dostatecznie małych $\tilde{\varepsilon}_i > 0$, $i \in I$. Stąd $g \in \beta^p_f(K, \varepsilon) \cap \mathcal{C}^r(n, k)$.

Drugą część tezy dowodzimy analogicznie jak w Lemacie 1.22. □

Własność 4.15. *Niech $1 \le r \le \infty$ i niech K będzie zbiorem zwartym, wypukłym w $\mathbb{R}^n_k$. Wówczas grupy $\mathcal{D}^r_c(n, k)$ i $\mathcal{D}^r_K(n, k)$ są spójne.*

Dowód. Przeprowadzamy rozumowanie jak w dowodzie Własności 1.25, korzystając z Wniosku 4.13 i Lematu 4.14. □

Z Lematów 4.11, 4.12 oraz Wniosku 4.13 wynika, że Twierdzenie 4.5 wystarczy udowodnić w przypadku $M = \mathbb{R}^n_k$, $k = 1, \dots, n$. Dla $k = n$ otrzymujemy rozmaitość $\mathbb{R}^n$. Doskonałość grupy $\mathcal{D}^\infty_c(\mathbb{R}^n)_0$ wynika z dowodu Epsteina [7].

Dla $k = n-1$, czyli dla rozmaitości z brzegiem dowód przedstawił Rybicki [26]. W obu przypadkach można też użyć poniższej metody. W dalszej części zakładamy, że $k = 1, \dots, n-1$.

Niech $K \subset \mathbb{R}^n_k$ będzie zbiorem zwartym, wypukłym oraz $0 \in \operatorname{Int} K$. Wtedy dla każdego $f \in \mathcal{D}^\infty_c(n,k)_0$ istnieje $g \in \mathcal{D}^\infty_c(n,k)_0$ takie, że $\operatorname{supp}(gfg^{-1}) \subset K$. Twierdzenie 4.5 wynika teraz z warunku

$$\mathcal{D}^\infty_K(n,k)_0 \subset [\mathcal{D}^\infty_c(n,k)_0, \mathcal{D}^\infty_c(n,k)_0],$$

gdyż wówczas mamy

$$[f] = [gfg^{-1}] = [\mathrm{Id}] \in H_1(\mathcal{D}^\infty_c(n,k)_0).$$

4.3. Konstrukcja operatora Mathera

Niech $A \geq 1$ i $1 \leq k \leq n-1$. Definiujemy zbiory $K = [-2,2]^k \times [0,2]^{n-k}$,

$$\begin{aligned} K_0 &= [-2A, 2A]^k \times [0, 2A]^{n-k}, \\ K_0' &= S^1 \times [-2A, 2A]^{k-1} \times [0, 2A]^{n-k}, \\ K_0'' &= \mathbb{R} \times [-2A, 2A]^{k-1} \times [0, 2A]^{n-k}, \\ K_1 &= [-2,2] \times [-2A, 2A]^{k-1} \times [0, 2A]^{n-k}. \end{aligned}$$

Określamy zbiór $B = S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}_{k-1}$ oraz rzutowanie nakrywające $\pi : \mathbb{R}^n_k \to B$, gdzie S^1 jest okręgiem jednostkowym. Wprowadza ono lokalny układ współrzędnych w otoczeniu każdego punktu przestrzeni B i odwzorowania przejścia są translacjami wzdłuż pierwszej współrzędnej, więc definicje seminorm przenoszą się na B.

Przez $\mathcal{C}^r(B,k)$ i $\mathcal{D}^r(B,k)$ będziemy oznaczać odpowiednio przestrzenie odwzorowań i dyfeomorfizmów klasy C^r na B. Ponadto przez T oznaczamy translację o wektor jednostkowy względem pierwszej współrzędnej.

Niech $f \in \mathcal{D}^1_{K_0}(n,k)_0$ i $\mu_0(f) \leq \frac{1}{2}$. Dla $\vartheta \in B$ wybieramy $x \in \mathbb{R}^n_k$ takie, że $\pi(x) = \vartheta$ i $x_1 < -2A$ oraz $N \in \mathbb{N}$ takie, że $((Tf)^N(x))_1 > 2A$. Wówczas określamy odwzorowanie $\Gamma_A(f) : B \to B$ wzorem

$$\Gamma_A(f)(\vartheta) = \pi((Tf)^N(x)).$$

Jego wartość nie zależy od wyboru x i N.

Lemat 4.16. *Niech $r \geq 1$ i $A \geq 1$. Istnieje U otoczenie* Id *w $\mathcal{D}^1_c(n,k)_0$ takie, że*

(1) Γ_A *zachowuje* Id.

(2) *Odwzorowanie*

$$\Gamma_A(f) : U \cap \mathcal{D}^r_{K_0}(n,k)_0 \to \mathcal{D}^r_{K_0'}(B,k)_0$$

jest ciągłe w C^r-topologii.

(3) *Istnieje wielomian drugiego rodzaju F zależny od r i A taki, że*

$$\mu_1(\Gamma_A(f)) \le 11A\mu_1(f)(1+\mu_1(f))^{11A}$$

oraz

$$\mu_r(\Gamma_A(f)) \le 11A\mu_r(f)(1+\mu_1(f))^{11Ar} + F(M_{r-1}(f)),$$

gdy $r \ge 2$, dla każdego $f \in U \cap \mathcal{D}^r_{K_0}(n,k)_0$.

Dowód. Własność (1) jest oczywista, a (2) dowodzimy jak w Lemacie 3.4.

Aby wykazać (3) wykorzystamy fakt, że w definicji $\Gamma_A(f)$ wystarczy wziąść $N = 8A+3$. Mamy $\mu_r(Tf) = \mu_r(f)$ dla $r \ge 1$, więc z Lematu 4.8 (1) otrzymujemy

$$\mu_1(\Gamma_A(f)) = \mu_1((Tf)^N) \le N\mu_1(Tf)(1+\mu_1(Tf))^{N-1} \le 11A\mu_1(f)(1+\mu_1(f))^{11A}.$$

Podobnie z Lematu 4.8 (2) możemy zapisać

$$\begin{aligned}\mu_r(\Gamma_A(f)) = \mu_r((Tf)^N) &\le N\mu_r(Tf)(1+\mu_1(Tf))^{r(N-1)} + F(M_{r-1}(Tf))\\ &\le 11A\mu_r(f)(1+\mu_1(f))^{11Ar} + F(M_{r-1}(f))\end{aligned}$$

dla $r \ge 2$. □

Teraz wprowadzimy pojęcia potrzebne w dalszej części. W tym celu przez φ^X_t oznaczamy 1-parametrową grupę transformacji pola X, a przez ∂_1 jednostkowe pole wektorowe na $\mathbb{R}^n_k$ w kierunku pierwszej współrzędnej.

Niech $A \ge 1$. Bierzemy funkcję $\tilde\chi_A \in C^\infty(\mathbb{R},[0,1])$ spełniającą warunki $\mathrm{supp}(\tilde\chi_A) = [-2A-1, 2A+1]$ i $\tilde\chi_A = 1$ na $[-2A, 2A]$. Następnie określamy $\chi_A \in C^\infty(\mathbb{R}^n_k,[0,1])$ wzorem $\chi_A(x_1,\dots,x_n) = \tilde\chi_A(x_1)$ dla $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Mamy $\mathrm{supp}(\chi_A) = [-2A-1, 2A+1] \times \mathbb{R}^{n-1}_{k-1}$ i $\chi_A = 1$ na $[-2A,2A] \times \mathbb{R}^{n-1}_{k-1}$. Określamy $\tau_A = \varphi_1^{\chi_A\partial_1} \in \mathcal{D}^\infty(n,k)_0$.

Definiujemy działanie $S^1 \times B \to B$ wzorem

$$\beta \cdot (\vartheta_1, x_2, \dots, x_n) = (\beta + \vartheta_1, x_2, \dots, x_n)$$

oraz grupę

$$G^\infty = \{h \in \mathcal{D}^\infty_c(B,k)_0 \,:\, h(\beta\cdot\vartheta) = \beta\cdot h(\vartheta)\ \forall\,\beta\in S^1\ \forall\,\vartheta\in B\}.$$

Analogicznie jak w Lemacie 3.6 otrzymujemy

Lemat 4.17. *Niech $r \ge 1$ i $A \ge 1$. Istnieje U'_A otoczenie* Id *w $\mathcal{D}^1_c(n,k)_0$ zależne od A takie, że odwzorowania $\tau_A f$ i $\tau_A g$ są sprzężone w $\mathcal{D}^\infty_c(n,k)_0$ dla $f,g \in U'_A \cap \mathcal{D}^\infty_{K_0}(n,k)_0$ spełniających warunek $\Gamma_A(f)(\Gamma_A(g))^{-1} \in G^\infty$.*

W pozostałej części tego podrozdziału przedstawimy konstrukcję operatora Mathera Ψ_A. Będziemy go stosować tylko względem pierwszej współrzędnej, czyli wzdłuż krawędzi rozmaitości $\mathbb{R}^n_k$.

Lemat 4.18. *Niech $r \geq 1$ i $A \geq 1$. Istnieje U_A otoczenie* Id *w $\mathcal{D}^1_c(n,k)_0$ zależne od A oraz operator*

$$\Psi_A : U_A \to \mathcal{D}^1_c(n,k)_0$$

taki, że

(1) Ψ_A *zachowuje* Id.
(2) *Odwzorowanie*

$$\Psi_A : U_A \cap \mathcal{D}^r_{K_0}(n,k)_0 \to \mathcal{D}^r_{K_1}(n,k)_0$$

jest ciągłe w C^r-topologii.
(3) *Dla każdego $f \in U_A \cap \mathcal{D}^\infty_{K_0}(n,k)_0$ mamy*

$$[f] = [\Psi_A(f)] \in H_1(\mathcal{D}^\infty_c(n,k)_0).$$

(4) *Istnieje stała $C \geq 1$ niezależna od r i wielomian pierwszego rodzaju G zależny od r i A takie, że*

$$\mu_1(\Psi_A(f)) \leq CA\mu_1(f)$$

oraz

$$\mu_r(\Psi_A(f)) \leq C^r A\mu_r(f) + G(M_{r-1}(f))$$

gdy $r \geq 2$, dla każdego $f \in U_A \cap \mathcal{D}^r_{K_0}(n,k)_0$.
(5) *Istnieje stała $Q_r \geq 2^{r^2}$ zależna od r i wielomian drugiego rodzaju F zależny od r i A takie, że*

$$\mu_r(\Psi_A(f)) \leq Q_r A\mu_r(f) + F(M_{r-1}(f))$$

gdy $r \geq 2$, dla każdego $f \in U_A \cap \mathcal{D}^r_{K_0}(n,k)_0$.

Dowód. W poniższym dowodzie przez $C \geq 1$ z kolejnymi indeksami oznaczamy stałe niezależne od r, przez $Q \geq 2^{r^2}$ stałe zależne od r, a przy pomocy G i F wielomiany odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju zależne od r i A.

Niech $U_A = U'_A$ będzie otoczeniem Id z Lematu 4.17. Dla $f \in U_A$ definiujemy odwzorowanie $h \in \mathcal{C}^1_{K'_0}(B,k)$ wzorem

$$h(\vartheta_1, x_2, \dots, x_n) = \vartheta_1 \cdot \Gamma_A(f)(0, x_2, \dots, x_n).$$

Jest ono zależne w sposób ciągły od f w C^1-topologii i Γ_A zachowuje Id, więc możemy zacieśnić U_A tak, by $h \in \mathcal{D}^1_{K'_0}(B,k)_0$ dla każdego $f \in U_A$. Wówczas $h \in G^\infty$ dla $f \in U_A \cap \mathcal{D}^\infty_{K_0}(n,k)_0$. Określamy $g = h^{-1}\Gamma_A(f) \in \mathcal{D}^1_{K'_0}(B,k)_0$. Mamy $h = \Gamma_A(f)$ i $g = \mathrm{Id}$ na $\{\vartheta \in B : \vartheta_1 = 0\}$. Ponadto $g, h \in \mathcal{D}^r_{K'_0}(B,k)_0$ dla $f \in U_A \cap \mathcal{D}^r_{K_0}(n,k)_0$, gdyż można pokazać jak w Lemacie 3.4, że odwzorowania g i h są C^r-dyfeotopijne z Id.

Biorąc rzutowanie

$$\hat{p} : B \ni (\vartheta_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (0, x_2, \dots, x_n) \in B$$

mamy $h - \mathrm{Id} = (\Gamma_A(f) - \mathrm{Id})\hat{p}$ oraz $D\hat{p} = \mathrm{Id}$ i $D^j\hat{p} = 0$ dla $j \geq 2$. Stąd

$$\mu_r(h) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n_k} \|D^r(\Gamma_A(f) - \mathrm{Id})(x)\|\|D\hat{p}(x)\|^r = \mu_r(\Gamma_A(f))$$

dla każdego $r \geq 1$ i $f \in U_A \cap \mathcal{D}^r_{K_0}(n,k)_0$.

Zacieśniamy U_A tak, by $\mu_1(f) \leq \frac{1}{A}$ i $\mu_1(\Gamma_A(f)) \leq \frac{1}{2}$ dla każdego $f \in U_A$. Z Lematu 4.8 (1), (3) i z Lematu 4.16 (3) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mu_1(g) &\leq 2\Big(\mu_1(h^{-1}) + \mu_1(\Gamma_A(f))\Big)\Big(1 + \mu_1(h^{-1}) + \mu_1(\Gamma_A(f))\Big)\\
&\leq 2\Big(2\mu_1(h) + \mu_1(\Gamma_A(f))\Big)\Big(1 + 2\mu_1(h) + \mu_1(\Gamma_A(f))\Big)\\
&\leq 6\mu_1(\Gamma_A(f))\big(1 + 3\mu_1(\Gamma_A(f))\big) \leq 15\mu_1(\Gamma_A(f))\\
&\leq 15 \cdot 11A\mu_1(f)(1 + \mu_1(f))^{11A} \leq C_1A\mu_1(f),
\end{aligned} \tag{4.1}$$

gdzie C_1 jest niezależne od A. Korzystamy tutaj z faktu, że $(1 + \frac{1}{A})^A$ jest ograniczone dla każdego A.

Niech $r \geq 2$. Mamy $\mu_1(h) \leq \mu_1(\Gamma_A(f)) \leq \frac{1}{2}$. Stąd i z Lematu 4.8 (3), (4) zachodzi oszacowanie

$$\begin{aligned}
\mu_j(h^{-1}) &\leq \mu_j(h)(1 + 2\mu_1(h))^{j+1} + F(M_{j-1}(h))\\
&\leq 2^{j+1}\mu_j(h) + F(M_{j-1}(h))\\
&\leq 2^{j+1}\mu_j(\Gamma_A(f)) + F(M_{j-1}(\Gamma_A(f)))
\end{aligned} \tag{4.2}$$

dla $j = 2, \dots, r$.

Teraz z Lematu 4.8 (2), (3) i z (4.2) możemy zapisać

$$\begin{aligned}
\mu_r(g) &\leq 2\Big(\mu_r(h^{-1}) + \mu_r(\Gamma_A(f))\Big)\Big(1 + \mu_1(h^{-1}) + \mu_1(\Gamma_A(f))\Big)^r\\
&\quad + F(M_{r-1}(h^{-1}) + M_{r-1}(\Gamma_A(f)))\\
&\leq 2\Big(2^{r+1}\mu_r(\Gamma_A(f)) + F(M_{r-1}(\Gamma_A(f))) + \mu_r(\Gamma_A(f))\Big)\left(\frac{5}{2}\right)^r\\
&\quad + F(M_{r-1}(h^{-1}) + M_{r-1}(\Gamma_A(f)))\\
&\leq C_2^r\mu_r(\Gamma_A(f)) + F_1(M_{r-1}(\Gamma_A(f))).
\end{aligned}$$

Korzystając z Lematu 4.16 (3) mamy

$$\begin{aligned}
\mu_r(g) &\leq 11C_2^rA\mu_r(f)(1 + \mu_1(f))^{11Ar} + C_2^rF(M_{r-1}(f))\\
&\quad + F_1(M_{r-1}(\Gamma_A(f)))\\
&\leq C_3^rA\mu_r(f) + F_2(M_{r-1}(f))
\end{aligned} \tag{4.3}$$

dla każdego $f \in U_A \cap \mathcal{D}^r_{K_0}(n,k)_0$. Ponownie wykorzystaliśmy tutaj ograniczoność wyrażenia $(1 + \frac{1}{A})^A$.

Podnosimy g do odwzorowania $\tilde{g} \in \mathcal{D}^1_{K_0''}(n,k)_0$ takiego, że $g\pi = \pi\tilde{g}$ i $\tilde{g} = \mathrm{Id}$ na $\{x \in \mathbb{R}^n_k : x_1 \in \mathbb{Z}\}$. Jest ono wyznaczone jednoznacznie i zależy w sposób ciągły od $\tilde{g}$. Mamy $\mu_r(\tilde{g}) = \mu_r(g)$ i $\tilde{g} \in \mathcal{D}^r_{K_0''}(n,k)_0$ dla $f \in U_A \cap \mathcal{D}^r_{K_0}(n,k)_0$.

Bierzemy funkcję okresową $\xi \in C^\infty(\mathbb{R},[0,1])$ o okresie 1 taką, że $\xi = 0$ w otoczeniu m i $\xi = 1$ w otoczeniu $m + \frac{1}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$. Następnie określamy odwzorowania

$$\tilde{g}_1 = (\xi \circ \mathrm{pr}_1) \cdot (\tilde{g} - \mathrm{Id}) + \mathrm{Id}, \quad \tilde{g}_2 = \tilde{g}_1^{-1}\tilde{g},$$

gdzie $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^n_k \to \mathbb{R}$ jest rzutowaniem na pierwszą współrzędną. Są one okresowe o okresie 1 względem pierwszej współrzędnej oraz $\tilde{g}_1 = \mathrm{Id}$ w otoczeniu $\{m\} \times \mathbb{R}^{n-1}_{k-1}$ i $\tilde{g}_2 = \mathrm{Id}$ w otoczeniu $\{m + \frac{1}{2}\} \times \mathbb{R}^{n-1}_{k-1}$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$. Odwzorowania $\tilde{g}_1$ i $\tilde{g}_2$ zależą w sposób ciągły od f w C^1-topologii i $\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2 = \mathrm{Id}$ dla $f = \mathrm{Id}$, więc możemy zacieśnić U_A tak, by $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in \mathcal{D}^1_{K_0''}(n,k)_0$. Wówczas $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in \mathcal{D}^r_{K_0''}(n,k)_0$ dla $f \in U_A \cap \mathcal{D}^r_{K_0}(n,k)_0$.

Niech $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_k$. Bierzemy $y = (y_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_k$ takie, że $y_1 \in \mathbb{Z}$ i $|x_1 - y_1| \le 1$. Stąd

$$|(\tilde{g} - \mathrm{Id})(x)| = |(\tilde{g} - \mathrm{Id})(x) - (\tilde{g} - \mathrm{Id})(y)| \le \mu_1(\tilde{g})|x_1 - y_1|,$$

czyli $\mu_0(\tilde{g}) \le \mu_1(\tilde{g})$. Ze wzoru na pochodną iloczynu, z równości $\mu_r(\tilde{g}) = \mu_r(g)$ i z (4.1) mamy

$$\begin{aligned} \mu_1(\tilde{g}_1) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n_k} \|D((\xi \circ \mathrm{pr}_1) \cdot (\tilde{g} - \mathrm{Id}))(x)\| \\ &\le \|\xi \circ \mathrm{pr}_1\|_1 \mu_0(\tilde{g}) + \|\xi \circ \mathrm{pr}_1\|_0 \mu_1(\tilde{g}) \\ &\le C_4 \mu_1(\tilde{g}) \le C_4 C_1 A \mu_1(f). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Następnie dla $r \ge 2$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mu_r(\tilde{g}_1) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n_k} \|D^r((\xi \circ \mathrm{pr}_1) \cdot (\tilde{g} - \mathrm{Id}))(x)\| \\ &\le \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \sup_{x \in \mathbb{R}^n_k} \|D^j(\xi \circ \mathrm{pr}_1)(x)\| \|D^{r-j}(\tilde{g} - \mathrm{Id})(x)\| \\ &\le \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \|\xi \circ \mathrm{pr}_1\|_j \mu_{r-j}(\tilde{g}) \\ &= \mu_r(\tilde{g}) + \sum_{j=1}^{r-1} \binom{r}{j} \|\xi \circ \mathrm{pr}_1\|_j \mu_{r-j}(\tilde{g}) + \mu_0(\tilde{g}) \\ &\le \mu_r(\tilde{g}) + Q_1 M_{r-1}(\tilde{g}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Użyjemy (4.5) na dwa sposoby. Z (4.1) i (4.3) mamy oszacowanie

$$\begin{aligned}\mu_r(\tilde{g}_1) &\leq C_3^r A\mu_r(f) + F_2(M_{r-1}(f)) \\ &\quad + Q_1 C_3^r A M_{r-1}(f) + Q_1 F_2(M_{r-1}(f)) \\ &\leq C_3^r A\mu_r(f) + G_1(M_{r-1}(f)).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Podobnie, z Lematu 4.6 (2) oraz z (4.1) i (4.3) wynika, że

$$\begin{aligned}\mu_r(\tilde{g}_1) &\leq \mu_r(\tilde{g}) + Q_1 C^{r^2}\mu_r(\tilde{g}) \\ &\leq (1+Q_1C^{r^2})C_3^r A\mu_r(f) + (1+Q_1C^{r^2})F_2(M_{r-1}(f)) \\ &\leq Q_2 A\mu_r(f) + F_3(M_{r-1}(f))\end{aligned} \tag{4.7}$$

dla każdego $f \in U_A \cap \mathcal{D}^r_{K_0}(n,k)_0$.

Korzystamy z warunku $\mu_1(f) \leq \frac{1}{A}$ dla (4.1) i (4.4). Wtedy z Lematu 4.8 (1), (3) prawdziwe są nierówności

$$\begin{aligned}\mu_1(\tilde{g}_2) = \mu_1(\tilde{g}_1^{-1}\tilde{g}) &\leq 2\big(2\mu_1(\tilde{g}_1) + \mu_1(\tilde{g})\big)\big(1 + 2\mu_1(\tilde{g}_1) + \mu_1(\tilde{g})\big) \\ &\leq 2\big(2C_4\mu_1(\tilde{g}) + \mu_1(\tilde{g})\big)(1 + 2C_4C_1 + C_1) \\ &\leq C_5\mu_1(\tilde{g}) \leq C_5C_1A\mu_1(f).\end{aligned} \tag{4.8}$$

Dalej, z Lematu 4.8 (4) oraz z (4.4) i (4.5) mamy

$$\begin{aligned}\mu_j(\tilde{g}_1^{-1}) &\leq \mu_j(\tilde{g}_1)(1+2\mu_1(\tilde{g}_1))^{j+1} + F(M_{j-1}(\tilde{g}_1)) \\ &\leq (1+2C_4C_1)^{j+1}\mu_j(\tilde{g}_1) + F(M_{j-1}(\tilde{g}_1)) \\ &\leq (1+2C_4C_1)^{j+1}\mu_j(\tilde{g}) + (1+2C_4C_1)^{j+1}Q_1M_{j-1}(\tilde{g}) + F_4(M_{j-1}(\tilde{g})) \\ &\leq C_6\mu_j(\tilde{g}) + Q_3M_{j-1}(\tilde{g}) + F_4(M_{j-1}(\tilde{g}))\end{aligned}$$

dla każdego $j = 2, \ldots, r$, gdzie $C_6 \geq 1$ jest stałą niezależną od j, $Q_3 \geq 2^{j^2}$ stałą zależną od j i F_4 wielomianem drugiego rodzaju zależnym od j i A.

Teraz z Lematu 4.8 (2), (3) oraz z (4.4) możemy zapisać

$$\begin{aligned}\mu_r(\tilde{g}_2) &\leq 2(\mu_r(\tilde{g}_1^{-1}) + \mu_r(\tilde{g}))(1 + \mu_1(\tilde{g}_1^{-1}) + \mu_1(\tilde{g}))^r \\ &\quad + F(M_{r-1}(\tilde{g}_1^{-1}) + M_{r-1}(\tilde{g})) \\ &\leq 2(\mu_r(\tilde{g}_1^{-1}) + \mu_r(\tilde{g}))(1 + 2C_4C_1 + C_1)^r \\ &\quad + F(M_{r-1}(\tilde{g}_1^{-1}) + M_{r-1}(\tilde{g})) \\ &\leq C_7^r\mu_r(\tilde{g}) + Q_4M_{r-1}(\tilde{g}) + F_5(M_{r-1}(\tilde{g})).\end{aligned} \tag{4.9}$$

Ostatecznie, korzystając z (4.1) i (4.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mu_r(\tilde{g}_2) &\leq C_7^r\mu_r(\tilde{g}) + G_2(M_{r-1}(\tilde{g})) \\ &\leq C_7^rC_3^rA\mu_r(f) + C_7^rF_2(M_{r-1}(f)) + G_2(M_{r-1}(\tilde{g})) \\ &\leq C_8^rA\mu_r(f) + G_3(M_{r-1}(f)).\end{aligned} \tag{4.10}$$

Możemy też dodatkowo użyć Lematu 4.6 (2), co prowadzi do oszacowania

$$
\begin{aligned}
\mu_r(\tilde{g}_2) &\leq C_7^r \mu_r(\tilde{g}) + Q_4 C^{r^2} \mu_r(\tilde{g}) + F_5(M_{r-1}(\tilde{g})) \\
&\leq (C_7^r + Q_4 C^{r^2}) C_3^r A \mu_r(f) + (C_7^r + Q_4 C^{r^2}) F_2(M_{r-1}(f)) \\
&\quad + F_5(M_{r-1}(\tilde{g})) \\
&\leq Q_5 A \mu_r(f) + F_6(M_{r-1}(f))
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

dla każdego $f \in U_A \cap \mathcal{D}^r_{K_0}(n,k)_0$.

Definiujemy zbiory

$$
E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n_k \,:\, 0 < x_1 < 1\}, \qquad E_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^n_k \,:\, -\frac{3}{2} < x_1 < -\frac{1}{2}\right\}
$$

oraz operator $\Psi_A : U_A \to \mathcal{D}^1_c(n,k)_0$ wzorem

$$
\Psi_A(f)(x) = \begin{cases} \tilde{g}_1(x) & x \in E_1 \\ \tilde{g}_2(x) & x \in E_2 \\ x & \text{poza tym} \end{cases}.
$$

Własności (1)-(3) Lematu 4.18 uzasadniamy jak w dowodzie Lematu 3.9. Następnie zauważmy, że

$$
\mu_r(\Psi_A(f)) = \max\{\mu_r(\tilde{g}_1), \mu_r(\tilde{g}_2)\}
$$

dla każdego $r \geq 1$. Stąd własność (4) jest oczywistym wnioskiem z oszacowań (4.4), (4.8) oraz (4.6), (4.10). Natomiast (5) wynika z (4.7) i (4.11). □

4.4. Rozkład regularny

Niech $A \geq 1$. Bierzemy dyfeomorfizm $\zeta_A \in \mathcal{D}^\infty_c(n,k)_0$ taki, że $\zeta_A = A \cdot \mathrm{Id}$ na $K = [-2,2]^k \times [0,2]^{n-k}$.

Dla $f, g \in \mathcal{D}^1_K(n,k)_0$ z C^1-otoczenia Id określamy odwzorowania

$$
g_0 = \zeta_A f g \zeta_A^{-1} \quad \text{i} \quad g_1 = g_{1,1} = \Psi_A(g_0).
$$

Niech U_A będzie otoczeniem Id w $\mathcal{D}^1_c(n,k)_0$ z Lematu 4.18. Istnieje V_A otoczenie Id w $\mathcal{D}^1_c(n,k)_0$ zależne od A takie, że dla każdego $f, g \in V_A$ mamy $g_0, g_1 \in U_A$. Ponadto $\mathrm{supp}(g_1) \subset K_1 = [-2,2] \times [-2A, 2A]^{k-1} \times [0, 2A]^{n-k}$. Możemy przyjąć, że $\mu_1(f)$, $\mu_1(g)$ są ograniczone dla $f, g \in V_A$.

Bierzemy funkcję okresową $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ o okresie 2 taką, że $\eta = 1$ w otoczeniu $2m$ i $\eta = 0$ w otoczeniu $2m+1$, $m \in \mathbb{Z}$.

Przez $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n_k \to \mathbb{R}$ oznaczamy rzutowanie na i-tą współrzędną, $i = 1, \ldots, n$. Określamy odwzorowania $g_{2,1}, g_{2,2} \in \mathcal{C}^1_{K_1}(n,k)$ wzorami

$$
g_{2,1} = (\eta \circ \mathrm{pr}_2) \cdot (g_{1,1} - \mathrm{Id}) + \mathrm{Id}, \quad g_{2,2} = g_{2,1}^{-1} g_{1,1}.
$$

Zacieśniając V_A mamy $g_{2,1}, g_{2,2} \in \mathcal{D}^1_{K_1}(n,k)_0$ dla $f, g \in V_A$. Nośniki tych odwzorowań zawarte są w sumie skończonej ilości zbiorów rozłącznych, co zapiszemy w postaci

$$\operatorname{supp}(g_{2,1}) \subset [-2,2] \times \Big(\bigcup [2m+1, 2m+3]\Big) \times [-2A, 2A]^{k-2} \times [0, 2A]^{n-k},$$

$$\operatorname{supp}(g_{2,2}) \subset [-2,2] \times \Big(\bigcup [2m, 2m+2]\Big) \times [-2A, 2A]^{k-2} \times [0, 2A]^{n-k},$$

gdzie sumujemy po $m \in \mathbb{Z} \cap [-A-1, A-1]$.

Analogicznie definiujemy

$$g_{j,2i-1} = (\eta \circ \mathrm{pr}_j) \cdot (g_{j-1,i} - \mathrm{Id}) + \mathrm{Id}, \quad g_{j,2i} = g^{-1}_{j,2i-1} g_{j-1,i}$$

dla $j = 3, \ldots, n$ i $i = 1, \ldots, 2^{j-1}$. Jak wcześniej, możemy zacieśnić V_A tak, by $g_{j,2i-1}, g_{j,2i} \in \mathcal{D}^1_{K_1}(n,k)_0$ dla każdego $f, g \in V_A$.

Nośnik dyfeomorfizmu $g_{n,i}$, $i = 1, \ldots, 2^{n-1}$, zawiera się w skończonej sumie kostek w $\mathbb{R}^n$ postaci

$$I = [-2,2] \times [m_2, m_2+2] \times \ldots \times [m_n, m_n+2], \tag{4.12}$$

gdzie m_l, $l = 2, \ldots, n$, jest parzystą lub nieparzystą liczbą całkowitą z przedziału $[-2A-1, 2A-1]$ dla $l = 2, \ldots, k$ i $[-1, 2A-1]$ dla $l = k+1, \ldots, n$. To czy m_l jest liczbą parzystą czy nieparzystą zależy od $g_{n,i}$. W dalszej części przez I będziemy rozumieć $I \cap \mathbb{R}^n_k$.

Niech $\mathcal{J}_i$ będzie zbiorem kostek postaci (4.12) zawierających nośnik dyfeomorfizmu $g_{n,i}$. Moc zbioru $\mathcal{J}_i$ jest ograniczona z góry przez $(2A+1)^{n-1}$. Dokładna wartość zależy od k, jednak nie jest to istotne w naszych rozważaniach.

Dla kostki $I \in \mathcal{J}_i$, $i = 1, \ldots, 2^{n-1}$, określamy dyfeomorfizm g_I wzorem $g_I = g_{n,i}$ na I i $g_I = \mathrm{Id}$ poza tym. Mamy $g_{n,i} = \prod_{I \in \mathcal{J}_i} g_I$ oraz zachodzi równość

$$g_1 = g_{n,1} \ldots g_{n,2^{n-1}}.$$

Z tego względu będziemy pisać $g_1 = \prod_{I \in \mathcal{J}} g_I$, gdzie $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{J}_{2^{n-1}}$. Elementy ostatniej sumy są parami różne i $\#\mathcal{J} \le 2^{n-1}(2A+1)^{n-1}$.

Dla każdego $I \in \mathcal{J}$ bierzemy dyfeomorfizm $\tau_I \in \mathcal{D}^\infty_c(n,k)_0$ taki, że odwzorowanie $h_I = \tau_I g_I \tau_I^{-1}$ spełnia warunek $\operatorname{supp}(h_I) \subset K = [-2,2]^k \times [0,2]^{n-k}$ oraz τ_I jest translacją na $\operatorname{supp}(g_I)$. Istnienie takiego dyfeomorfizmu wynika z faktu, że $g_I = \mathrm{Id}$ w pewnym otoczeniu $\partial\mathbb{R}^n_k$ lub $I \cap \partial\mathbb{R}^n_k \neq \emptyset$ i przesunięcie może odbywać się tylko równolegle do brzegu.

Ostatecznie, dla każdego $f, g \in V_A$ otrzymujemy dyfeomorfizm

$$h = \prod_{I \in \mathcal{J}} h_I \in \mathcal{D}^1_K(n,k)_0$$

oraz mamy $h \in \mathcal{D}^r_K(n,k)_0$ dla każdego $f, g \in V_A \cap \mathcal{D}^r_K(n,k)_0$.

Na podstawie przeprowadzonej konstrukcji możemy udowodnić następujący

Lemat 4.19. *Niech $r \geq 2$ i $A \geq 1$. Istnieje V_A otoczenie* Id *w $\mathcal{D}^1_c(n,k)_0$ takie, że*

(1) *Dla każdego $f, g \in V_A \cap \mathcal{D}^\infty_K(n,k)_0$ mamy $h \in \mathcal{D}^\infty_K(n,k)_0$ oraz*
$$[fg] = [h] \in H_1(\mathcal{D}^\infty_c(n,k)_0).$$
(2) *Istnieje stała $C \geq 1$ niezależna od r i wielomian pierwszego rodzaju G zależny od r i A takie, że*
$$\mu_r(h) \leq C^r A^{1-r+n}(\mu_r(f) + \mu_r(g)) + G(M_{r-1}(f) + M_{r-1}(g))$$
dla każdego $f, g \in V_A \cap \mathcal{D}^r_K(n,k)_0$.

(3) *Istnieje stała $Q_r \geq 2^{r^2}$ zależna od r i wielomian drugiego rodzaju F zależny od r i A takie, że*
$$\mu_r(h) \leq Q_r A^{1-r+n}(\mu_r(f) + \mu_r(g)) + F(M_{r-1}(f) + M_{r-1}(g))$$
dla każdego $f, g \in V_A \cap \mathcal{D}^r_K(n,k)_0$.

Dowód. Jak w dowodzie Lematu 4.18 przez $C \geq 1$ będziemy oznaczać stałe niezależne od r, przez $Q \geq 2^{r^2}$ stałe zależne od r, a G i F oznaczają wielomiany odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju zależne od r i A.

Własność (1) wynika z przeliczenia
$$[fg] = [\zeta_A fg \zeta_A^{-1}] = [g_0] = [g_1] = \prod_{I \in \mathcal{J}} [g_I] = \prod_{I \in \mathcal{J}} [h_I] = [h],$$
gdzie korzystamy z Lematu 4.18 (3).

Niech $f, g \in V_A \cap \mathcal{D}^r_K(n,k)_0$. Dla $x \in K$ mamy $D\zeta_A(x) = A \cdot \mathrm{Id}$ oraz
$$D^r(\zeta_A fg \zeta_A^{-1})(x) = D\zeta_A(x) \cdot (D^r(fg)(\tfrac{1}{A}x)) \cdot (D\zeta_A^{-1}(x) \times \ldots \times D\zeta_A^{-1}(x)).$$
Stąd i z Lematu 4.8 (1), (2) otrzymujemy
$$\begin{aligned}\mu_1(g_0) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n_k} \|D(fg)(\tfrac{1}{A}x)\| = \mu_1(fg) \\ &\leq 2(\mu_1(f) + \mu_1(g))(1 + \mu_1(f) + \mu_1(g)) \leq C_1(\mu_1(f) + \mu_1(g))\end{aligned} \tag{4.13}$$
oraz
$$\begin{aligned}\mu_r(g_0) &= A^{1-r} \sup_{x \in \mathbb{R}^n_k} \|D^r(fg)(\tfrac{1}{A}x)\| = A^{1-r}\mu_r(fg) \\ &\leq 2A^{1-r}(\mu_r(f) + \mu_r(g))(1 + \mu_1(f) + \mu_1(g))^r \\ &\quad + F(M_{r-1}(f) + M_{r-1}(g)) \\ &\leq C_1^r A^{1-r}(\mu_r(f) + \mu_r(g)) + F(M_{r-1}(f) + M_{r-1}(g))\end{aligned} \tag{4.14}$$
gdzie korzystamy z ograniczoności $\mu_1(f)$, $\mu_1(g)$.

Analogicznie jak w (4.4), (4.8) i (4.5), (4.9) otrzymujemy oszacowania

$$\mu_1(g_{j,l}) \leq C_2\mu_1(g_{j-1,i}) \tag{4.15}$$

oraz

$$\mu_r(g_{j,l}) \leq C_2^r\mu_r(g_{j-1,i}) + Q_1M_{r-1}(g_{j-1,i}) + F_1(M_{r-1}(g_{j-1,i})), \tag{4.16}$$

gdzie $l = 2i-1, 2i$, dla każdego $j = 2, \dots, n$ i $i = 1, \dots, 2^{j-1}$.

Stosując indukcyjnie (4.15) i (4.16) mamy

$$\mu_1(g_{n,l}) \leq C_2\mu_1(g_{n-1,i}) \leq C_2^{n-1}\mu_1(g_{1,1}) \tag{4.17}$$

oraz

$$\begin{aligned} \mu_r(g_{n,l}) &\leq C_2^r\mu_r(g_{n-1,i}) + Q_1M_{r-1}(g_{n-1,i}) + F_1(M_{r-1}(g_{n-1,i})) \\ &\leq C_2^{(n-1)r}\mu_r(g_{1,1}) + Q_2M_{r-1}(g_{1,1}) + F_2(M_{r-1}(g_{1,1})), \end{aligned} \tag{4.18}$$

gdzie $l = 2i-1, 2i$, dla $i = 1, \dots, 2^{n-1}$.

Teraz, niech $I \in \mathcal{J}_i$, $i = 1, \dots, 2^{n-1}$. Mamy $D\tau_I = \mathrm{Id}$ i $D^j\tau_I = 0$ dla $j \geq 2$ na $\mathrm{supp}(g_I)$. Stąd

$$\mu_r(h_I) = \mu_r(\tau_I g_I \tau_I^{-1}) = \mu_r(g_I) \leq \mu_r(g_{n,i}) \tag{4.19}$$

dla każdego $r \geq 1$.

Zacieśniamy V_A tak, by $\mu_1(h_I) \leq \frac{1}{A^n}$ dla każdego $f \in V_A$. Wówczas wyrażenie $(1 + \frac{1}{A^n})^{A^n}$ jest ograniczone i z Lematu 4.8 (2) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mu_r(h) &\leq (4A+2)^{n-1}(\sup_{I\in\mathcal{J}}\mu_r(h_I))(1 + \sup_{I\in\mathcal{J}}\mu_1(h_I))^{r(4A+2)^{n-1}} \\ &\quad + F(\sup_{I\in\mathcal{J}} M_{r-1}(h_I)) \\ &\leq C_3^{nr}A^{n-1}(\sup_{I\in\mathcal{J}}\mu_r(h_I)) + F_3(\sup_{I\in\mathcal{J}} M_{r-1}(h_I)). \end{aligned}$$

Teraz, korzystając z (4.17), (4.18) i (4.19) możemy zapisać nierówność

$$\begin{aligned} \mu_r(h) &\leq C_3^{nr}A^{n-1}(\sup_{1\leq i\leq 2^{n-1}}\mu_r(g_{n,i})) + F_3(\sup_{1\leq i\leq 2^{n-1}} M_{r-1}(g_{n,i})) \\ &\leq C_4^rA^{n-1}\mu_r(g_{1,1}) + Q_3A^{n-1}M_{r-1}(g_{1,1}) + F_4(M_{r-1}(g_{1,1})). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Zapisując razem drugi i trzeci składnik powyższego wyrażenia, na podstawie Lematu 4.18 (4) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mu_r(h) &\leq C_4^rA^{n-1}\mu_r(g_{1,1}) + G_1(M_{r-1}(g_{1,1})) \\ &\leq C_4^rC^rA^n\mu_r(g_0) + C_4^rG(M_{r-1}(g_0)) + G_1(M_{r-1}(g_{1,1})) \\ &\leq C_4^rC^rA^n\mu_r(g_0) + G_2(M_{r-1}(g_0)), \end{aligned}$$

gdzie C jest stałą z Lematu 4.18.

Analogicznie wykorzystując Lematy 4.6 (1) i 4.18 (5) do (4.20) mamy

$$\begin{aligned}\mu_r(h) &\leq C_4^r A^{n-1}\mu_r(g_{1,1}) + Q_3 A^{n-1} C^r \mu_r(g_{1,1}) + F_4(M_{r-1}(g_{1,1}))\\ &\leq (C_4^r + Q_3 C^r) Q_r A^n \mu_r(g_0) + (C_4^r + Q_3 C^r) A^{n-1} F(M_{r-1}(g_0))\\ &\quad + F_4(M_{r-1}(g_{1,1}))\\ &\leq Q_4 Q_r A^n \mu_r(g_0) + F_5(M_{r-1}(g_0)),\end{aligned}$$

gdzie C jest stałą z Lematu 4.6 (1). Istotny jest tutaj fakt, że $\operatorname{supp}(g_1) \subset K_1$, więc stała C jest niezależna od A.

Stosując (4.13) i (4.14) do dwóch ostatnich oszacowań otrzymujemy tezę. □

4.5. Dowód doskonałości

Niech $r_0 \geq n+2$ i niech Q_{r_0} i C będą stałymi z Lematu 4.19. Wówczas istnieje $A_0 \geq 1$ takie, że

$$Q_{r_0} A_0^{1-r_0+n} \leq \frac{1}{4} \quad \text{i} \quad C^i A_0^{1-i+n} \leq \frac{1}{4}$$

dla każdego $i > r_0$. Wystarczy wziąść $A_0 \geq \max\{4Q_{r_0}, 4C^{n+2}\}$, gdyż wtedy

$$C^i A_0^{1-i+n} = C^{n+2} A_0^{-1} \left(\frac{C}{A_0}\right)^{i-n-2} \leq \frac{1}{4}.$$

Z Lematu 4.6 (1) istnieje $\varepsilon_{r_0} > 0$ takie, że dla każdego $h \in \mathcal{D}_K^\infty(n,k)_0$ spełniającego warunek $\mu_{r_0}(h) \leq \varepsilon_{r_0}$ mamy $h \in V_{A_0}$.

Bierzemy $f, g \in \mathcal{D}_K^\infty(n,k)_0$ takie, że $\mu_{r_0}(f), \mu_{r_0}(g) \leq \varepsilon_{r_0}$ i niech $h_g = h$ będzie dyfeomorfizmem uzyskanym z przedstawionej konstrukcji. Wykorzystamy oszacowanie z Lematu 4.19 (3).

Ponieważ F jest wielomianem drugiego rodzaju, to możemy zmniejszyć $\varepsilon_{r_0} > 0$ tak, by $F(M_{r_0-1}(f) + M_{r_0-1}(g)) \leq \frac{\varepsilon_{r_0}}{2}$ dla każdego $f, g \in \mathcal{D}_K^\infty(n,k)_0$ takiego, że $\mu_{r_0}(f), \mu_{r_0}(g) \leq \varepsilon_{r_0}$. Wówczas z Lematu 4.19 (3) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mu_{r_0}(h_g) &\leq Q_{r_0} A_0^{1-r_0+n}(\mu_{r_0}(f) + \mu_{r_0}(g)) + F(M_{r_0-1}(f) + M_{r_0-1}(g))\\ &\leq \frac{1}{4} 2\varepsilon_{r_0} + \frac{\varepsilon_{r_0}}{2} = \varepsilon_{r_0}.\end{aligned}$$

Lemat 4.20. *Niech $\varepsilon_{r_0} > 0$ będzie stałą jak wyżej. Jeśli $f \in \mathcal{D}_K^\infty(n,k)_0$ spełnia warunek $\mu_{r_0}(f) \leq \varepsilon_{r_0}$, to istnieje ciąg $\{\varepsilon_i\}_{i>r_0}$ stałych dodatnich zależny od f taki, że dla każdego $g \in \mathcal{D}_K^\infty(n,k)_0$ i $\mu_i(g) \leq \varepsilon_i$, $i \geq r_0$, mamy $\mu_i(h_g) \leq \varepsilon_i$ i $\mu_i(f) \leq \varepsilon_i$, $i \geq r_0$.*

Dowód. Niech $f \in \mathcal{D}_K^\infty(n,k)_0$ i $\mu_{r_0}(f) \le \varepsilon_{r_0}$. Pierwszy krok indukcji wynika z powyższych rozważań. Następnie zakładamy, że istnieją stałe $\varepsilon_{r_0+1}, \dots, \varepsilon_{i-1}$ zależne od f takie, że dla $\mu_j(g) \le \varepsilon_j$, $j = r_0, \dots, i-1$ mamy $\mu_j(f) \le \varepsilon_j$ i $\mu_j(h_g) \le \varepsilon_j$, $j = r_0, \dots, i-1$. Rozważamy oszacowanie z Lematu 4.19 (2).

Istnieje $a_i > 0$ zależne od $f, \varepsilon_{r_0}, \dots, \varepsilon_{i-1}$ takie, że dla każdego $g \in \mathcal{D}_K^\infty(n,k)_0$ i $\mu_j(g) \le \varepsilon_j$, $j = r_0, \dots, i-1$, zachodzi nierówność $G(M_{i-1}(f) + M_{i-1}(g)) \le a_i$. Przyjmujemy $\varepsilon_i = \mu_i(f) + 2a_i$. Wówczas z Lematu 4.19 (2) mamy

$$\begin{aligned}\mu_i(h_g) &\le C^i A_0^{1-i+n}(\mu_i(f) + \mu_i(g)) + G(M_{i-1}(f) + M_{i-1}(g)) \\ &\le \frac{1}{4}(2\mu_i(f) + 2a_i) + a_i = \frac{1}{2}\mu_i(f) + \frac{3}{2}a_i < \varepsilon_i\end{aligned}$$

dla każdego $g \in \mathcal{D}_K^\infty(n,k)_0$ takiego, że $\mu_i(g) \le \varepsilon_i$. $\square$

Ustalamy $f \in \mathcal{D}_K^\infty(n,k)_0$ takie, że $\mu_{r_0}(f) \le \varepsilon_{r_0}$ i bierzemy ciąg $\{\varepsilon_i\}_{i > r_0}$ jak w Lemacie 4.20. Definiujemy zbiór

$$L_f = \{h \in \mathcal{D}_K^\infty(n,k)_0 \,:\, \mu_i(h) \le \varepsilon_i,\ i \ge r_0\}.$$

Twierdzenie 4.21. *Zbiór L_f wyposażony w C^∞-topologię posiada własność punktu stałego.*

Dowód. Określamy zbiór

$$L_f' = \{h \in \mathcal{C}_K^\infty(n,k)_0 \,:\, \|h\|_i \le \varepsilon_i,\ i \ge r_0\}.$$

Jest to podzbiór przestrzeni $\mathcal{C}_K^\infty(n,k)_0$ z topologią indukowaną przez ciąg norm $\{\|\cdot\|_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Topologia ta pokrywa się z C^∞-topologią. Stąd odwzorowanie $L_f \ni h \mapsto h - \mathrm{Id} \in L_f'$ jest homeomorfizmem.

Normy $\|\cdot\|_i$ są ciągłe, $i \in \mathbb{N}$, więc zbiór L_f' jest domknięty. Określamy operatory

$$S_i : (\mathcal{C}_K^\infty(n,k)_0, \{\|\cdot\|_i\}_{i\in\mathbb{N}}) \ni h \mapsto D^i h \in (C_K^0(\mathbb{R}_k^n, L^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)), \|\cdot\|_{\sup}),$$

gdzie $\|\cdot\|_{\sup}$ oznacza normę supremum. Dla każdego $i \ge 1$ mamy

$$\|S_i h\|_{\sup} = \sup_{x\in\mathbb{R}_k^n} \|D^i h(x)\| = \|h\|_i. \tag{4.21}$$

Stąd są to odwzorowania ciągłe i rodzina $\{S_i h \,:\, h \in L_f'\}$ jest wspólnie ograniczona dla $i \ge r_0$, a z Lematu 4.6 (1) również dla $i < r_0$. Ponadto dla każdego $h \in L_f'$ i $x, y \in \mathbb{R}_k^n$ prawdziwe jest oszacowanie

$$\|S_i h(x) - S_i h(y)\| = \|D^i h(x) - D^i h(y)\| \le \|h\|_{i+1}|x-y| \le \varepsilon_{i+1}|x-y|,$$

co oznacza jednakową ciągłość.

Zbiór K jest zwarty, więc z twierdzenia Arzeli-Ascoliego zbiór $S_i(L_f')$ jest względnie zwarty w $C_K^0(\mathbb{R}_k^n, L^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Pokażemy, że zbiór L_f' jest zwarty.

Niech $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem w L'_f. Zbiór $S_1(L'_f)$ jest względnie zwarty, więc możemy wybrać podciąg $\{h_i^1\}_{i\in\mathbb{N}}$ ciągu $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ taki, że $\{S_1(h_i^1)\}_{i\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w $C^0_K(\mathbb{R}^n_k, L^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$. Postępując indukcyjnie względem j, ze względnej zwartości zbioru $S_j(L'_f)$ istnieje podciąg $\{h_i^j\}_{i\in\mathbb{N}}$ ciągu $\{h_i^{j-1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ taki, że $\{S_j(h_i^j)\}_{i\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w $C^0_K(\mathbb{R}^n_k, L^j(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$, $j\geq 2$.

Otrzymujemy ciąg $\{h_i^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ taki, że $\{S_j(h_i^i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny dla każdego $j\in\mathbb{N}$. Z (4.21) ciąg $\{h_i^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{C}^\infty_K(n,k)_0$ z normą $\|\cdot\|_j$, $j\in\mathbb{N}$. Ponieważ L'_f jest domkniętym podzbiorem przestrzeni Frécheta, to ciąg $\{h_i^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w L'_f. Stąd L'_f jest zbiorem zwartym.

Zbiór L'_f jest zwartym, wypukłym podzbiorem przestrzeni Frécheta, więc z twierdzenia Schaudera-Tichonowa o punkcie stałym każde odwzorowanie ciągłe $L'_f\to L'_f$ ma punkt stały. Z homeomorficzności między L_f i L'_f otrzymujemy tezę. □

Określamy operator

$$\Phi : L_f \ni g \mapsto h_g \in L_f.$$

Z Lematu 4.20 wynika, że jest on dobrze określony. Ponadto operacje użyte w konstrukcji dyfeomorfizmu h_g są ciągłe w C^r-topologii dla każdego $r\geq 1$, więc odwzorowanie Φ jest ciągłe w C^∞-topologii. Z Twierdzenia 4.21 istnieje $g\in L_f$ takie, że $h_g=g$. Teraz z Lematu 4.19 (1) mamy

$$[fg]=[h_g]=[g]\in H_1(\mathcal{D}^\infty_c(n,k)_0),$$

czyli

$$[f]=[\mathrm{Id}]\in H_1(\mathcal{D}^\infty_c(n,k)_0)$$

dla każdego $f\in\mathcal{D}^\infty_K(n,k)_0$ takiego, że $\mu_{r_0}(f)\leq\varepsilon_{r_0}$. Zbiór

$$\{f\in\mathcal{D}^\infty_K(n,k)_0 \,:\, \mu_{r_0}(f)\leq\varepsilon_{r_0}\}$$

generuje przestrzeń $\mathcal{D}^\infty_K(n,k)_0$, więc

$$\mathcal{D}^\infty_K(n,k)_0\subset[\mathcal{D}^\infty_c(n,k)_0,\mathcal{D}^\infty_c(n,k)_0].$$

W ten sposób udowodniliśmy Twierdzenie 4.5.

4.6. Przypadek rozmaitości z wierzchołkami

Niech M będzie rozmaitością z narożami wymiaru $n\geq 1$. Zakładamy, że ma ona wierzchołki. Wówczas można pokazać, że grupa $\mathcal{D}^r_c(M)_0$, $r=1,\dots,\infty$, dyfeomorfizmów klasy C^r dyfeotopijnych z Id przez C^r-dyfeotopie o zwartych nośnikach nie jest doskonała. Z wcześniejszych rozważań wynika, że wystarczy zbadać przypadek $M=\mathbb{R}^n_0=[0,\infty)^n$.

Niech $f, g \in \mathcal{D}^r_c(\mathbb{R}^n_0)_0$. Wówczas z (1.1) i (1.3) mamy

$$D(f \circ g)(0) = Df(0) \cdot Dg(0)$$

oraz

$$D(f^{-1})(0) = (Df(0))^{-1}.$$

Stąd otrzymujemy

$$D[f,g](0) = D(fgf^{-1}g^{-1})(0) = Df(0) \cdot Dg(0) \cdot (Df(0))^{-1} \cdot (Dg(0))^{-1} = \mathrm{Id}\,.$$

To oznacza, że dyfeomorfizmy $h \in \mathcal{D}^r_c(\mathbb{R}^n_0)_0$ takie, że $Dh(0) \neq \mathrm{Id}$ nie należą do grupy komutatorów, czyli grupa $\mathcal{D}^r_c(\mathbb{R}^n_0)_0$ nie może być doskonała. Pokażemy jak wyznaczyć jej pierwszą grupę homologii w przypadku $n = 1$ i $r = \infty$.

Niech $G(n) = \mathcal{D}^\infty_c(\mathbb{R}^n, 0)_0$ będzie grupą C^∞-dyfeomorfizmów na $\mathbb{R}^n$ dyfeotopijnych z Id przez C^∞-dyfeotopie o zwartych nośnikach i zachowujących 0. Określamy epimorfizm

$$\Phi : G(n) \ni f \to Df(0) \in \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}),$$

gdzie $GL^+(n, \mathbb{R})$ oznacza podgrupę grupy liniowej $GL(n, \mathbb{R})$ o wyrazach mających dodatnie wyznaczniki.

Fukui [8] udowodnił, że zachodzi warunek $\ker \Phi = [\ker \Phi, G(n)]$. Ponadto mamy ciąg dokładny

$$\{\mathrm{Id}\} \to \ker \Phi \to G(n) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) \to \{\mathrm{Id}\}.$$

Stąd otrzymujemy ciąg dokładny

$$\{0\} = \ker \Phi / [\ker \Phi, G(n)] \to H_1(G(n)) \to H_1(\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})) \to \{0\},$$

czyli $H_1(G(n)) \cong H_1(\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}))$. Wiadomo, że grupa $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ jest izomorficzna z $\mathbb{R} \times \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, gdzie $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ oznacza specjalną grupę liniową i jest to grupa prosta. To oznacza, że $H_1(G(n)) \cong \mathbb{R}$.

Z twierdzenia Whitney'a o rozszerzeniu każdy element z $G(1)$ możemy traktować jako przedłużenie pewnego odwzorowania z $\mathcal{D}^\infty_c(\mathbb{R}^1_0)_0$ i są to dyfeomorfizmy zachowujące 0. Stąd mamy $H_1(\mathcal{D}^\infty_c(\mathbb{R}^1_0)_0) \cong \mathbb{R}$. Ponadto zauważmy, że jeśli $\mathcal{D}^\infty([0,1])_0$ oznacza grupę C^∞-dyfeomorfizmów na $[0,1]$ zachowujących orientację, to z powyższych wniosków otrzymujemy $H_1(\mathcal{D}^\infty([0,1])_0) \cong \mathbb{R}^2$.

Bibliografia

[1] K. Abe, K. Fukui, *On the structure of the group of Lipschitz homeomorphisms and its subgroups*, J. Math. Soc. Japan 53-3 (2001), 501–511

[2] K. Abe, K. Fukui, *On the structure of the group of Lipschitz homeomorphisms and its subgroups, II*, J. Math. Soc. Japan, 55-4 (2003), 947–956

[3] A. Banyaga, *Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique*, Comment. Math. Helv. 53 (1978), 174–227

[4] A. Banyaga, *The structure of classical diffeomorphism groups*, Mathematics and its Applications, 400, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997

[5] R. D. Edwards, R. C. Kirby, *Deformations of spaces of imbeddings*, Ann. Math. (2) 93 (1971), 63–88

[6] D. B. A. Epstein, *The simplicity of certain groups of homeomorphisms*, Compositio Math. 22 (1970), 165–173

[7] D. B. A. Epstein, *Commutators of C^∞-diffeomorphisms. Appendix to 'A curious remark concerning the geometric transfer map' by John N. Mather*, Commentarii Math. Helv. 59 (1984), 111–122.

[8] K. Fukui, *Homologies of the group $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^n, 0)$ and its subgroups*, J. Math. Kyoto Univ. 20 (1980), 475–487

[9] M. R. Herman, *Sur le groupe des difféomorphismes du tore*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 23, no. 2 (1973), 75–86

[10] M. W. Hirsch, *Differential topology*, Springer-Verlag, New York, 1976

[11] J. Lech, T. Rybicki, *On the perfectness of groups of diffeomorphisms with no restriction on support*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, vol. LIX (2005), 85–96

[12] J. Lech, T. Rybicki, *Groups of $C^{r,s}$-diffeomorphisms related to a foliation*, Geometry and Topology of Manifolds, Banach Center Publications, vol. 76 (2007), 437–450

[13] J. Lech, *Commutators of diffeomorphisms of a manifold with corners*, Demonstratio Mathematica, vol. XL, no. 2 (2007), 465–480

[14] B. Malgrange, *Ideals of differentiable functions*, Oxford University Press, 1966

[15] J. N. Mather, *Stability of C^∞-mappings, II. Infinitesimal stability implies stability*, Ann. Math. 89 (1969), 254–291

[16] J. N. Mather, *The vanishing of the homology of certain groups of homeomorphisms*, Topology 10 (1971), 297–298

[17] J. N. Mather, *Commutators of diffeomorphisms, I*, Comment. Math. Helv. 49 (1974), 512–528

[18] J. N. Mather, *Commutators of diffeomorphisms, II*, Comment. Math. Helv. 50 (1975), 33–40

[19] J. N. Mather, *A curious remark concerning the geometric transfer map*, Comment. Math. Helv. 59 (1984), 86–110

[20] J. N. Mather, *Commutators of diffeomorphisms, III: a group which is not perfect*, Comment. Math. Helv. 60 (1985), 122–124

[21] D. McDuff, *The lattice of normal subgroups of the group of diffeomorphisms or homeomorphisms of an open manifold*, J. London Math. Soc. 18 (1978), 353–364

[22] D. McDuff, *On the group of volume-preserving diffeomorphisms of* $\mathbb{R}^n$, Trans. Amer. Math. Soc. 261 (1980), 103–113

[23] D. McDuff, *On groups of volume-preserving diffeomorphisms and foliations with transverse volume form*, Proc. London Math. Soc. 43 (1981), 295–320

[24] P. W. Michor, *Manifolds of differentiable mappings*, Shiva Mathematics Series 3, 1980

[25] T. Rybicki, *The identity component of the leaf preserving diffeomorphism group is perfect*, Monatsh. Math. 120 (1995), 289–305

[26] T. Rybicki, *Commutators of diffeomorphisms of a manifold with boundary*, Annales Polonici Mathematici LXVIII.3 (1998), 199–210

[27] T. Rybicki, *On commutators of equivariant homeomorphisms*, Topology and its Applications 154 (2007), 1561–1564

[28] G. Segal, *Classifying spaces related to foliations*, Topology 17 (1978), 367–382

[29] F. Sergeraert, *Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications*, Ann. Scient. Éc. Nor. Sup., 4^e série, t. 5 (1972), 599–660

[30] W. Thurston, *On the structure of volume preserving diffeomorphisms*, Unpublished Ms. (1973)

[31] W. Thurston, *Foliations and groups of diffeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 304–307

[32] J. C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Ergebnisse 71, Springer-Verlag, 1972

[33] H. Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined on closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), 63–89