

111V68r.

9 KWI 1979

7. *Wydanie*
1922-

ELEMENTY PŁASKIEJ GEOMETRII RZUTOWEJ

napisał

Dr Antoni Plamitzer

docent pryw. i adjunkt Politechniki Lwowskiej.

Wszelkie prawa autorskie zastrzeżone.
Egzemplarze nie zaopatrzone pieczęcią Komisji Wydawn. Twa. Br. Pom. będą sądownie ścigane.

Wydanie drugie

Z zapomogi Ministerstwa W.R.I.O.P.

Lwów.
Naładem Komisji Wydawniczej Twa. Bratniej Pomocy
Studentów Politechniki Lwowskiej
1922.

Przedmowa.

Niniejsze „Elementy” traktuję jako uzupełnienie książki Prof. Dra. **Kazimierza Bartla** pt. „Geometria Wykreślna” (Książnica Twa Naucz. szkół wyższych, Lwów 1919). Z tego też powodu ograniczam się w moich rozważaniach do omówienia wyłącznie tylko związków płaskiej geometrii rzutowej, a nawet pomijam kwestję kolineacji dwóch układów płaskich, opracowaną w powyżej wymienionej książce.

Całość podzieliłem na sześć rozdziałów, których dokładną treść podaje w poniżej zamieszczonym spisie. Zaznaczę w tem miejscu, że w ust. 6 zdefiniowałem - wedle L. Cremony - końcowe ogniwu łańcucha utworów perspektywicznych, jako utwory rzutowe (jednokreślne). Wprowadzenie tej definicji uważałem za korzystne z tego powodu, że pozwala w sposób bardzo przyzysły ustalić odpowiedniość jedno-jednoznaczna, zachodzącą pomiędzy homologicznymi elementami swych utworów zasadniczych gatunku 1^{go}. Ustalenie bowiem owej odpowiedniości nastręcza zazwyczaj większe trudności dla początkujących.

Przy opracowaniu niniejszych „Elementów” korzystałem ze skrypta Prof. sara **Bartla** i dzieł: **Bôgera**, **Cremony**, **Doehlemanna**, **Enriques'a**, **Lewenberg'a**, **Luzarskiego**, **Reyego** i **Sturma**. Zaznaczam też, że nie spotkałem się w adnasnej literaturze ze sposobem, w jaki przeprowadziłem dowód twierdzenia (ust. 39), będącego podstawą do uzupełnienia pęku inwolucyjnego.

Łódź, w grudniu 1921 r.

Quboro



III 52.148

N2B 8110

BIBLIOTEKA GŁÓWNA AGH



1000328200

Wstęp.

Pomiędzy zasadniczymi elementami przestrzeni, punktami, prostymi i płaszczyznami oraz pomiędzy utworami geometrycznymi, np. linijami krzywymi, powierzchniami i t. p. zachodzą pewne zależności, które nazywamy **własnościami geometrycznymi**. Własności geometryczne dzielimy na dwie duże kategorie: a) **własności opisowe**, występujące np. pomiędzy punktami i prostymi, a ich rzutami, oraz b) **własności miarowe**, odnoszące się do długości odcinka, odległości punktu od prostej i płaszczyzny, wielkości kąta dwu prostych lub płaszczyzn i t. p.

Geometria rzutowa - zwana także *wyższą, nowszą, potężniejszą i syntetyczną* - bada własności opisowe utworów geometrycznych i wyklucza rozważania, odnoszące się do własności miarowych. Ponieważ jednak własności miarowe posiadają bardzo ciekawe związki z geometrią rzutową, tworząc jej przedmiot zastosowań, przeło w rozważaniach naszych omawiać będziemy własności opisowe i miarowe utworów geometrycznych. Uczynimy to również i z tego względu, że tą drogą, szybciej osiągniemy cel, aniżeli w przypadku, gdybyśmy uwzględniali, wyłącznie tylko własności opisowe.

Jakkolwiek właściwy rozwój geometrii rzutowej przypada dopiero na wiek XIX, to jednak początków tej nauki doszukać się można w praktycznych konstrukcjach perspektywy.

Badania utworów geometrycznych z punktu widzenia perspektywy umożliwia w sposób nader prosty wyznaczenie własności opisowych tych utworów, oraz zawiera dwa podstawowe

działania geometrii rzutowej, a mianowicie: rzucanie i przecinanie. Pierwsze z tych działań odpowiada procesowi widzenia, drugie natomiast - procesowi wyobrażania na płaszczyźnie przecięcia. Badanie tej drogi, własności stożkowych - jako rzutu środkowego (perspektywy) kota - zawdzięczamy Desargues'owi (1593-1661) i Pascalowi (1623-1662). Właściwymi twórcami geometrii rzutowej są: Poncelet (*Traité des propriétés projectives des figures*, Paris 1822), Möbius (*Der baryzentrische Calcul*, Leipzig 1827), Steiner (*Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, Berlin 1832), Chasles (*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles 1837; *Traité de géométrie supérieure*, Paris 1852; *Traité de sections coniques*, Paris 1865) i von Staudt (*Geometrie der Lage*, Nürnberg, 1847; *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Nürnberg 1855-1860).

Wymienić tu należy jeszcze prace następujących autorów: L. Cremona, *Elementi di geometria proiettiva* (przekład francuski Dewulfa i niemiecki Trautvettera), F. Enriques, *Lezioni di geometria proiettiva* (przekł. niemiecki Fleischera i polski Włodarskiego), I. Reye, *Geometrie der Lage*; R. Sturm, *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften*; W. Fiedler, *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage*; J. Thomae, *Die Kegelschnitte in rein projektiver Behandlung*; R. Böger, *Ebene Geometrie der Lage*; K. Doehlemann *Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung*. - Z literatury polskiej podać należy dzieła: St. Ziembinińskiego, *Składowia wykresła* (podług Reye'go) Lwów 1877; M. A. Baranińskiego, *Początkowy wykład syntetyczny własności prze-*

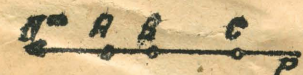
cięć stożkowych (Warszawa 1885), A. Lewenberg, Geometria rzutowa tworów pierwiastkowych (Warszawa 1902); Prof. Dr. M. Łazarzkiego, Zasady Geometrii wykreslnej, Lwów, Tom I 1903, Tom II 1906, Skrypta geometrii wykreslnej według wykładów ^{z r. n. 1913/14} prof. Dr. K. Bartla, oraz Enriques'a (tłumaczenie Włodarskiego) Wykłady geometrii rzutowej, Warszawa, 1917.

Rozdział I.

Wiadomości początkowe. Perspektywiczność i rzutowość utworów zasadniczych gatunku I.^{go}

1. Utwory zasadnicze. W rozważaniach naszych ograniczymy się do własności płaskiej geometrii rzutowej i wprowadzimy następujące utwory zasadnicze:

Szereg punktów, przez który rozumiemy (rys. 1.) ogół wszystkich punktów dowolnej prostej. Poszczególne punkty $A, B, C, \dots$



Rys. 1.

nazywać będziemy elementami szeregu, a prosta, p - jego podstawa. Szereg punktów o podstawie p i elementach $A, B, C, \dots$ oznaczamy symbolem: $p(A, B, C, \dots)$, lub też symbolem: (p) .

Pęk promieni, tj. zbiór wszystkich prostych $a, b, \dots$ (rys. 1.), przechodzących przez

dowolny punkt P i leżących na dowolnej płaszczyźnie.

Proste $a, b, \dots$ są elementami a punkt P jest wierzchołkiem, lub środkiem pęku promieni. Symbol: $P(a, b, c, \dots)$ lub (P) oznacza pęk promieni o wierzchołku P i elementach $a, b, c, \dots$. Zauważyć musimy, że w geometrii rzutowej nie robimy żadnych zastrzeżeń co do tego, czy punkty i pro-

ste są elementami właściwymi, czy też niewłaściwymi (elementami nieskończenie dalekimi, elementami w nieskończoności). Szereg punktów (p) o podstawie właściwej p posiada nieskończenie wiele punktów właściwych i jeden punkt niewłaściwy N^∞ . Jeżeli podstawa szeregu jest prostą niewłaściwą p^∞ , to elementami niewłaściwego szeregu punktów $p^\infty(A^\infty, B^\infty, \dots)$ są punkty niewłaściwe $A^\infty, B^\infty, \dots$. Punkt niewłaściwy P^∞ uważać możemy za wierzchołek niewłaściwego pęku promieni $P(a, b, \dots)$; elementami tego pęku są proste ^{równoległe} $a \parallel b \parallel c \dots$ oraz prosta niewłaściwa n^∞ .

Ogół wszystkich punktów i prostych, leżących na dowolnej płaszczyźnie α , nazywamy układem płaskim i oznaczamy symbolem (α) . Przyjmując za elementy układu tylko punkty, wzgl. tylko proste, otrzymujemy „płaski układ punktów” wzgl. „płaski układ prostych”. Płaszczyznę α nazywamy wówczas podstawą układu. Układ płaski (α) o podstawie właściwej α , zawiera nieskończenie wiele elementów właściwych, jedną prostą niewłaściwą n^∞ oraz wszystkie niewłaściwe punkty tej prostej n^∞ . Jeżeli podstawa układu płaskiego (α^∞) jest płaszczyzną niewłaściwą (pt. nieskończenie daleka, pl. w nieskończoności) α^∞ , to elementami tego niewłaściwego układu płaskiego są wyłącznie punkty niewłaściwe i proste niewłaściwe. Szereg punktów i pęk promieni nazywamy utworami zasadniczymi gatunku pierwszego. Układ płaski zawiera nieskończenie wiele szeregów punktów i pęków promieni i należy do utworów zasadniczych gatunku drugiego.

2. Zasada biegunowej dwoistości. Zanim

rozpocznemy badanie związków, zachodzących pomiędzy utworami zasadniczymi gatunku pierwszego, zajmiemy się wprowadzeniem zasady (prawa) biegunowej dwoistości. W myśl tej zasady uważamy punkt i prostą, za elementy dwoiste sobie odpowiadające w płaskiej geometrii rzutowej. Dla szybszego i łatwiejszego zorientowania się podamy kilka przykładów, wypisując obok siebie w tym samym poziomie elementy i własności opisane utworów geometrycznych, odpowiadających sobie dwoistcie:

Punkt A

Prosta a

Prosta b

Punkt B

Dwa punkty A i B wyznaczają prostą $c = AB$.

Dwie proste a i b wyznaczają punkt $C = ab$.

Trzy punkty A, B, C wyznaczają trójkąt ABC . Trójkąt ten posiada trzy wierzchołki A, B, C i trzy boki (proste) AB, BC i AC .

Trzy proste a, b, c wyznaczają trójbok abc . Trójbok ten posiada trzy boki a, b, c i trzy ^(punkty) wierzchołki Ab, bc i ca .

Cztery punkty A, B, C, D (leżące na tej samej płaszczyźnie) z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, wyznaczają czworokąt zupełny.

Cztery proste a, b, c, d (leżące na tej samej płaszczyźnie) z których żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, wyznaczają czworobok zupełny.

Uważany wielokąt posiada cztery wierzchołki A, B, C, D i sześć boków: AB, AC, AD, BC, BD, CD .

Uważany wielobok posiada cztery boki: a, b, c, d i sześć wierzchołków: ab, ac, ad, bc, bd, cd .

Płaski n -kąt zupełny posiada n wierzchołków (z których

Płaski n -bok zupełny posiada n boków, z których żadne

żadne trzy nie leżą na jednej prostej) i $\frac{1}{2}n(n-1)$ boków.

Szereg punktów $p(A, B, C, \dots)$.

Pęk promieni $W(a, b, c, \dots)$.

trzy nie przechodzą przez jeden punkt) i $\frac{1}{2}n(n-1)$ wierzchołków.

Pęk promieni $P(a, b, c, \dots)$.

Szereg punktów $w(A, B, C, \dots)$.

Powyższe przykłady pouczają nas, że każdemu płaskiemu utworowi geometrycznemu (figurze) Φ_1 podporządkować możemy na mocy zasady biegunowej dwoistości, nowy płaski twór geometryczny (figurę) Φ_2 . Uwaga: Prawdziwości tej zasady dowiódł Poncelet przy pomocy teorii biegunów i biegunowych krzywej rzędu drugiego (porównaj ust. 44).

Każda własność opisowa utworu geometrycznego Φ_2 i każda konstrukcja, odnosząca się do utworu Φ_2 , wyprowadza się z własności opisowej i konstrukcji, odnoszącej się do utworu Φ_1 , przez przemianę elementów: punktu i prostej, na: prosta i punkt. Natomiast własności miarowe (z wyjątkiem t. zw. miarowo-rzutowych, porówn. ust. 14, 15, 17, 18 oraz ust. 44) nie podlegają prawu biegunowej dwoistości. Stosowanie zasady biegunowej dwoistości ułatwia w znacznej mierze studjum płaskiej geometrii rzutowej, dzieląc odnośny materiał naukowy na dwie części.

3. Pennik ciągłości. Prosta l opisać może (rys. 2) dowolny punkt, który, wyszedłszy np. z położenia A , porusza się po niej w jednym i tym samym kierunku, poczynkawszy od Julia-



Rys. 2.

jać się od punktu A i następnie, po przekroczeniu punktu niewłaściwego

N^∞ , zbliżając się ku punktowi A , aż

w granicy zjedzie się z tym punktem.

Uważajmy na prostej l odcinek ABC - nie jako długość, lecz jako zbiór punktów - to punkt ruchomy opisać może ten odcinek w dwójaki sposób: 1. Wychodząc z położenia początkowego A i poru-

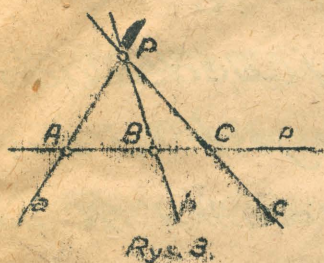
szują się w stałym kierunku ABC , albo 2° wychodząc z położenia początkowego C i poruszając się w stałym, ale wprost przeciwnym do poprzedniego, kierunku CBA . Uważany odcinek $\overline{AC}$ może podzielić punktem B na dwie części, które posiadają następujące własności: a) Każdy punkt odcinka $\overline{AC}$ należy do jednej z tych części; b) element B (wedle założenia) należec może do jednej lub drugiej części; c) każdy element pierwszej części wypierza każdy punkt części drugiej, a każdy element części drugiej następuje po każdym punkcie części pierwszej.

Teraz wprowadzamy pewnik ciągłości (Dedekinda): Jeżeli odcinek $\overline{AC}$ prostej l podzielony jest na dwie części w ten sposób, że: 1° każdy element odcinka $\overline{AC}$ należy do jednej z tych części 2° punkt A należy do pierwszej, element C do drugiej części, 3° każdy punkt części pierwszej wypierza każdy element części drugiej - to wówczas istnieje jeden i tylko jeden punkt B odcinka $\overline{AC}$ tego rodzaju, że każdy element odcinka $\overline{AC}$, wypierzający punkt B , należy do pierwszej, każdy zaś element odcinka $\overline{AC}$, następujący po elemencie B , należy do części drugiej w ustanowionym podziale.

Punkt B nazywamy wówczas przekrojem uważanego odcinka $\overline{AC}$ i jego istnienia dowieść nie możemy. Stosując powyższy pewnik do każdego odcinka prostej l , ustalamy temsamem ciągłość szeregu punktów $l(A, B, C, \dots)$. Ciągłość pęku promieni ustalimy w następnym ustępie.

4. Perspektywiczność pęku promieni i szeregu punktów. Źródła podstawowe. Na płaszczyźnie rysunkowej przyjmijmy (rys. 3):

Pęk promieni $P(a, b, c, \dots)$ i dowolna prosta p , nieprzechodząca przez wierzchołek P tego pęku. Skoro oznaczymy przez $A = pa$, $B = pb$, $C = pc$, punkty przecięcia się prostej p z poszczególnymi promieniami $a, b, c, \dots$ pęku (P), to wówczas otrzymamy szereg punktów $p(A, B, C, \dots)$



Rys. 3.

Szereg punktów $p(A, B, C, \dots)$ i dowolny punkt P , nie leżący na podstawie p tego szeregu. Skoro oznaczymy przez $a = PA$, $b = PB$, $c = PC$, proste, łączące punkt P z poszczególnymi punktami $A, B, C, \dots$ szeregu (p), to wówczas otrzymamy pęk promieni $P(a, b, c, \dots)$.

Pomiędzy poszczególnymi promieniami pęku $P(a, b, c, \dots)$ a punktami szeregu $p(A, B, C, \dots)$ ustanowić możemy pewną zależność w ten sposób, że: że każdemu promieniowi a pęku (P) podporządkujemy

jeden i tylko jeden punkt $A = pa$ szeregu (p) i wzajemnie: każdemu punktowi A szeregu (p) podporządkujemy jeden ściśle oznaczony promień $a = PA$ pęku (P). Podporządkowane sobie elementy: a, A ; b, B ; c, C ; ... tych utworów nazywać będziemy elementami „odpowiadającymi sobie” lub „homologicznymi”.

Pomiędzy elementami uważanych utworów ustanowiliśmy w ten sposób taką, odpowiedniość (zależność) jedno-jednoznaczna, że każdy promień a pęku (P) przechodzi przez odpowiadający mu punkt A szeregu (p), wzgl. każdy punkt A tego szeregu leży na homologicznym promieniu a pęku (P). Taką zależność [1,1]-zależną, nazywamy perspektywicznością tych utworów. Pęk promieni (P) i szereg punktów (p) nazywamy utworami „odniesionemi do siebie perspektywicznie” lub wprost utworami perspektywicznymi.

Celem oznaczenia, że dwa utwory są perspektywiczne, będziemy używać symbolu $\bar{\bar{}}$. W naszym przypadku symbolem:

$$P(a, b, c, \dots) \bar{\bar{p}}(A, B, C, \dots) \text{ lub } (P) \bar{\bar{p}}(p)$$

oznaczamy, że: pęk promieni (P) jest perspektywiczny wzglę-
dem szeregu punktów (p) . A zatem:

Pęk promieni i szereg punktów nazywamy perspektywicznymi wówczas, jeżeli poszczególne promienie pęku przechodzą odpowiednio przez podporządkowane im punkty tego szeregu, wzgl. poszczególne punkty szeregu leżą odpowie-
dnie na homologicznych promieniach owego pę-
ku.

Jeżeli pęk promieni (P) i szereg punktów (p) są utworami perspektywicznymi, to powiadamy tezę, że: pęk promieni jest rzutem owego szeregu (punktu P wzgl. szereg punktów jest przekrojem uważanego pęku prostą p).

Wykonać rzut szeregu $p(A, B, C, \dots)$ z punktu P - (nie leżącego na podstawie p) - znaczy; połączyć punkt P z poszczególnymi punktami $A, B, C, \dots$ szeregu (p) i otrzymane w ten sposób promienie $PA, PB, PC, \dots$ pęku (P) podporządkować odpowiednim punktom $A, B, C, \dots$ owego szeregu (p) .

Wykonać przekrój pęku $P(a, b, c)$ prostą p - (nie przechodzącą przez wierzchołek P) - znaczy: skonstruować punkty przecięcia się prostej p z poszczególnymi promieniami $a, b, c, \dots$ pęku (P) i otrzymane w ten sposób punkty $pa, pb, pc, \dots$ szeregu (p) podporządkować odpowiednio promieniom $a, b, c, \dots$ owego pęku.

Pozналиśmy w ten sposób dwa podstawowe działania geometrii rzutowej za pośrednictwem których otrzymujemy:

pęk promieni perspektywicznie szereg punktów, perspektywicznie odniesiony do danego szeregu | nie odniesiony do danego pęku.

punktów.

| promieni.

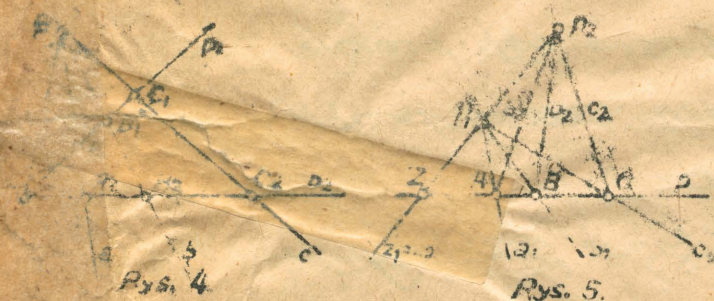
W poprzednim ustępie ustaliliśmy ciągłość szeregu punktów. Ponieważ ^{każdy} promień (P) odnieść możemy perspektywicznie do pomocniczego szeregu punktów (p) - to, jak z łatwością zauważymy, z ciągłości szeregu (p) wynika bezpośrednio ciągłość pęku promieni (P).

5. Perspektywiczność dwóch szeregów punktów wzgl. pęków promieni.

Dany pęk promieni (P) przetnijmy dwiema prostymi p_1 i p_2 , nie przechodzącymi przez wierzchołek P (rys. 4)

Dany szereg punktów (p) izuźmy z dwóch punktów P_1 i P_2 , nie leżących na podstawie p (rys. 5)

Przy pomocy poszczególnych promieni $a, b, c, \dots$ pęku (P), każdemu punktowi A_1 szeregu (p_1) podporządkować możemy w szeregu (p_2) jeden i tylko jeden punkt $A_2 = ap_2$ przecięcia się promie-



$A_2 P = a$ z podstawy p_2 i wzajemnie: każdemu elementowi A_2 szeregu (p_2) podporządkować możemy w szeregu (p_1) jeden ściśle oznaczony punkt $A_1 = ap_1$, przecięcia się promienia $A_2 P = a$ z podstawą p_1 . Za pośrednictwem poszczególnych promieni pęku $P(a, b, c, \dots)$ powiliśmy pomiędzy elementami: A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i $C_2, \dots$ szeregów (p_1) taką odpowiedniość jedno-jednoznaczna, że każda para powiadających sobie punktów leży na tym samym promieniu pomocniczym pęku (P). Taką zależność nazywamy perspektywicznością utworów. Korzystając z prawa odwrotnej dwójności (ust. 2.), otrzymujemy bezpośrednio (por. rys. 5) analogiczną odpowiedniość jedno-jed-

znajdującego, zachodzącego, pomiędzy promieniami: a_1 i a_2, b_1, b_2, c_1 i $c_2, \dots$ pęków (P_1) i (P_2) .

Otrzymane szeregi punktów (p_1) i (p_2) , wzgl. pęki promieni (P_1) i (P_2) nazywamy utworami „odniesionymi do siebie perspektywnicznie” lub utworami perspektywnicznymi. Aby oznaczyć, że dwa utwory są perspektywniczne, będziemy się posługiwać symbolem $\bar{\wedge}$, pisząc: $(p_1) \bar{\wedge} (p_2)$ oraz $(P_1) \bar{\wedge} (P_2)$ lub $p_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} p_2(b_1, b_2, c_2, \dots)$ oraz $P_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$.

Dwa szeregi punktów nazywamy perspektywnicznymi wówczas, jeżeli są one przekrojami tego samego pęku promieni.

Dwa pęki promieni nazywamy wówczas perspektywnicznymi, jeżeli są one rzutami tego samego szeregu punktów.

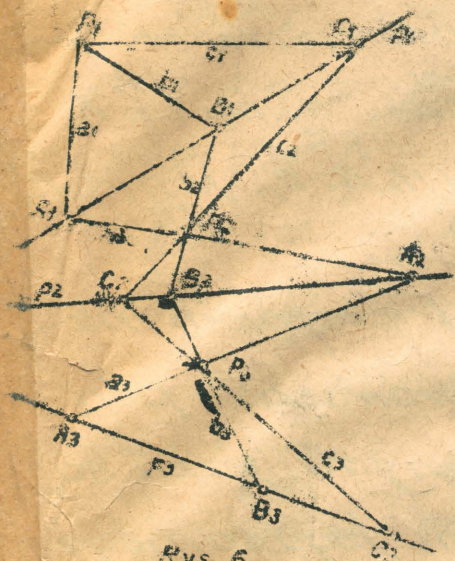
Ponieważ każdy promień (rys. 4) pęku $P(a, b, c, \dots)$ przecina podstawy p_1 i p_2 w dwóch homologicznych punktach badanych szeregów perspektywnicznych (p_1) i (p_2) , przeto: promień z , przechodzący przez punkt $p_1 p_2$, przecina się podstaw p_1 i p_2 wyznaczając taką parę odpowiadających sobie punktów z_1 i z_2 , które schodzą się z punktem $p_1 p_2$. Punkt $z_1 = z_2$, w którym nakrywają się dwa homologiczne elementy szeregów perspektywnicznych, nazywamy punktem odpowiednio-wspólnym lub zjednoczonym tych szeregów.

Punkt przecięcia się podstaw dwóch perspektywnicznych szeregów punktów jest elementem zjednoczonym tych utworów.

Prosta, łącząca wierzchołki dwóch perspektywnicznych pęków promieni jest elementem zjednoczonym tych utworów.

6. Utwory rzutowe (jednokresłne). Dany pęk p

mięni $P_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$ przetnijmy dowolną prostą p_1 (rys. 6), a otrzymany szereg punktów $p_1(A_1, B_1, C_1, \dots)$ rzucimy następnie z dowolnego punktu P_2 i wyznaczmy pęk promieni $P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$.



Rys. 6.

W ten sam sposób skonstruować możemy dowolną ilość dalszych szeregów punktów i pęków promieni, stosując kolejne przekroje prostymi p i rzuty z punktów P . Otrzymany łańcuch utworów zasadniczych gatunku pierwszego posiada tę własność, że każde dwa sąsiadnie (bezpośrednio po sobie następujące) ogniwa tego łańcucha są utworami perspektywicznymi: $P_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge}$

$p_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \bar{\wedge} P_2(a_2, b_2, c_2, \dots) \bar{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, \dots) \bar{\wedge} P_3(a_3, b_3, c_3, \dots) \bar{\wedge}$
 $p_3(A_3, B_3, C_3, \dots)$. Z łatwością zauważymy jednak (por. rys. 6), że perspektywicznymi są nie tylko każde dwa sąsiadnie ogniwa tego łańcucha, ale również i następujące ogniwa: (P_1) i (P_2) ; (P_1) i (P_3) ; (P_2) i (P_3) ; (p_1) i (p_2) ; (p_1) i (p_3) ; (p_2) i (p_3) . Natomiast ogniwa np. (P_1) i (P_2) nie są już perspektywiczne, gdyż promień pęku (P_1) nie przechodzi wcale przez punkty szeregu (P_2) . Podobnie (P_1) i (P_3) , (P_1) i (p_3) , (P_2) i (p_3) nie są wcale utworami perspektywicznymi. - Zbadajmy teraz związek, jaki zachodzi pomiędzy elementami końcowych ogniw (P_1) i (P_3) . W celu możliwego poszerzenia naszych rozważań, zamiast poprzedniego łańcucha weźmy pod uwagę (por. rys. 6) nowy łańcuch utworów perspektywicznych: $P_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} P_2(a_2, b_2, c_2, \dots) \bar{\wedge} P_3(a_3, b_3, c_3, \dots) \bar{\wedge}$
 $p_3(A_3, B_3, C_3, \dots)$. - Z trzech pierwszych ogniw wynika, że: każdemu promieniowi a_1 pęku (P_1) odpowiada jeden i tylko

jeden element a_2 pęku (P_2), a każdemu promieniowi a_2 odpowiada jeden ściśle oznaczony element a_3 pęku (P_3). Każdemu promieniowi a_1 pęku (P_1) podporządkować możemy (za pośrednictwem elementów pęku (P_2)) jeden i tylko jeden promień (P_3). Ponieważ każdemu promieniowi a_3 pęku (P_3) odpowiada (rys. 6) jeden i tylko jeden punkt A_3 szeregu (p_3), przeto: podporządkować możemy każdemu promieniowi a_1 pęku (P_1) jeden ściśle oznaczony punkt A_3 szeregu (p_3). - Wychodząc z szeregu (p_3) - za pośrednictwem uważanego tancucha utworów perspektywicznych - każdemu punktowi A_3 podporządkować możemy jeden i tylko jeden promień a_1 pęku (P_1); każdemu bowiem elementowi a_3 odpowiada tylko jeden promień a_2 w pęku (P_2), a w końcu promieniowi a_2 odpowiada jeden i tylko jeden promień a_1 pęku (P_1).
 Zatem: Każdemu punktowi A_3 szeregu (p_3) podporządkować możemy jeden ściśle oznaczony promień a_1 pęku (P_1). - Podporządkowane sobie elementy nazywamy elementami „odpowiadającymi sobie” lub „homologicznymi”.
 Ustanowiliśmy w ten sposób odpowiedniość jednoznaczna₂ pomiędzy homologicznymi elementami: a_1 i A_3 ; b_1 i B_3 ; c_1 i C_3 , ... utworów (P_1) i (p_3). Zależność tę nazywamy rzutowością₂ lub jednokreślnością₂. Pęk promieni (P_1) i szereg punktów (p_3) zdefiniujemy jako utwory rzutowe lub jednokreślne₂ i wyrazimy zapomocą symbolu: $P_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} p_3(A_3, B_3, C_3, \dots)$ lub $(P_1) \bar{\wedge} (p_3)$ [Czytaj: Pęk (P_1) rzutowy (lub jednokreślny) względem szeregu (p_3)]. - W powyżej przeprowadzonym rozumowaniu zawarte jest wyznaczenie odpowiedniości jednoznacznej pomiędzy promieniami a_1 i A_3 , ... rzutowych pęków (P_1) i (P_3). W analogiczny sposób

skonstruować możemy jednakowoż szeregi punktów (p_2) i (p_3) .

A zatem: Dwa utwory zasadnicze gatunku pierwszego nazywamy rzutowymi lub jednakowymi wówczas, jeżeli są one końcowymi ogniwami łańcucha utworów perspektywicznych.

7. Założmy teraz, że łańcuch utworów perspektywicznych składa się z dwóch, lub trzech ogniw, to końcowe ogniwą są w tym wypadku perspektywiczne. Wnosimy stąd że:

Dwa perspektywiczne utwory zasadnicze gatunku pierwszego są utworami jednakowymi. Perspektywiczność tych utworów jest szczególnym przypadkiem rzutowości (jednakowości).

Niechaj rzutowe szeregi punktów (p_1) i (p_2) są końcowymi ogniwami łańcucha perspektywicznych utworów zasadniczych gatunku pierwszego. Skonstruujemy drugi łańcuch utworów perspektywicznych, dla którego końcowymi ogniwami są jednakowe szeregi (p_2) i (p_3) . Wówczas szeregi (p_1) i (p_3) , jako ogniwą końcowe nowego łańcucha - złożonego ze wszystkich ogniw dwóch poprzednich łańcuchów - są utworami rzutowymi. Postępując się symbolami, napiszemy: Jeżeli $(p_1) \bar{\wedge} (p_2)$ i $(p_2) \bar{\wedge} (p_3)$, to wówczas $(p_1) \bar{\wedge} (p_3)$. A zatem:

Dwa utwory zasadnicze gatunku pierwszego, jednakowe względem trzeciego utworu zasadniczego gatunku pierwszego, są utworami rzutowymi. - Powyższy związek wypisać możemy też symbolicznie w formie następującej: Jeżeli $(p_1) \bar{\wedge} (p_2) \bar{\wedge} (p_3)$, to $(p_1) \bar{\wedge} (p_3)$. - Uważajmy teraz dalsze łańcuchy utworów perspektywicznych o ogniwach końcowych: (p_3) i (p_4) , (p_4) i (p_5) , ... to zachodzą

relacje: $(p_3) \wedge (p_4); (p_4) \wedge (p_5);$ Uzyskalismy w ten sposób tancuch.
 $(p_1) \wedge (p_2) \wedge (p_3) \wedge (p_4) \wedge (p_5)$ utworów jednokreślnych, przy czem
 pomiędzy każdą parą tych ogniów istnieją pomocnicze tancu-
 chy utworów, perspektywicznych. Uwzględniając te wszystkie tancu-
 chy, zauważymy, że: (p_1) i (p_5) są końcowymi utworami, jedne-
 go nowego tancucha utworów perspektywicznych; a zatem utwo-
 ry (p_1) i (p_5) są jednokreślne. Wykazaliśmy tedy, że:

Końcowe ogniwa tancucha, złożonego z jedno-
 kreślnych utworów zasadniczych gatunku 1^{go},
 są utworami rzutowymi.

Rozdział II.

Własności miarowe jednokreślnych utwo-
 rów zasadniczych gatunku pierwszego.

8. Stosunek podziału trzech punktów.

Na dowolnej prostej p (rys. 7) wybieramy dwa stałe punkty
^{własne}
 A, B . Umówmy się, że symbolem $\overline{AB}$ oznaczać będziemy
 odcinek tylko o skończonej długości, ograniczony punktami
 końcowymi A i B . Uważajmy nadto kierunek od lewej ręki
 ku prawej za dodatni $(+)$, a przeciwny kierunek, od ręki pra-
 wej ku lewej za ujemny $(-)$. Wówczas odcinki $\overline{AB}$ i $\overline{BA}$ (o dłu-
 gości skończonej) są do bezwzględnej wartości



Rys. 7.

są sobie równe, ale różnią się znakiem. A za-

tem: $\overline{AB} = -\overline{BA}; \overline{AB} + \overline{BA} = 0$. Przyjmijmy na

prostej p trzeci ruchomy punkt C , to wówczas

bez względu na położenie punktu C - zachodzi

zawsze relacja: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Stosunkiem podziału odcinka AB punktem C nazywamy

liczbę $\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$. Każdemu punktowi C , leżącemu na prostej p (rys 7.) odpowiada jedna i tylko jedna wartość na λ . Dla punktów C , leżących wewnątrz wzgl. zewnątrz odcinka $\overline{AB}$, jest wartość $\lambda < 0$ wzgl. $\lambda > 0$. Dla punktu $C = A$, odcinek $\overline{AC} = 0$, więc $\lambda = 0$. Jeżeli C pokrywa odcinek $\overline{AB}$, to $\overline{AC} = \overline{CB}$, a wówczas $\lambda = -1$.

Z równań: $\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ i $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ wynika: $\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{\overline{BC}} = 1 + \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$; otrzymana, stąd wartość $\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{\lambda - 1}$ podstawmy w równanie: $\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ to $\overline{AC} = \lambda \cdot \overline{BC} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot \overline{AB}$. Z uzyskanych równań: $\overline{BC} = \frac{1}{\lambda - 1} \cdot \overline{AB}$; $\overline{AC} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot \overline{AB}$ wnosimy, że: każdej wartości λ odpowiada jeden i tylko jeden punkt C na prostej p .

Dla a) $\lambda = -1$, $\overline{AC} = \frac{1}{2} \overline{AB}$, $\overline{BC} = -\frac{1}{2} \overline{AB} = +\frac{1}{2} \overline{BA}$; b) $\lambda = -2$, $\overline{AC} = \frac{2}{3} \overline{AB}$, $\overline{BC} = -\frac{1}{3} \overline{AB} = +\frac{1}{3} \overline{BA}$; c) $\lambda = -3$, $\overline{AC} = \frac{3}{4} \overline{AB}$, $\overline{BC} = -\frac{1}{4} \overline{AB} = +\frac{1}{4} \overline{BA}$; ...
d) $\lambda = +3$, $\overline{AC} = \frac{3}{2} \overline{AB}$, $\overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{AB}$; e) $\lambda = +2$, $\overline{AC} = 2 \overline{AB}$, $\overline{BC} = \overline{AB}$;

f) $\lambda = +1$, $\overline{AC} = \infty$, $\overline{BC} = \infty$, to znaczy, że punkt C jest punktem niewłaściwym C^∞ . Jeżeli stosunek podziału $\lambda = -1$, to punkt C pokrywa odcinek $\overline{AB}$; jeżeli $\lambda = +1$, to punkt C jest punktem niewłaściwym (leży w nieskończoności) na prostej p .

9. Stosunek podwójnego podziału czterech punktów. Na prostej p obróźmy (rys. 8.) cztery różne punkty A, B, C i D . Liczbę $u = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$ nazywamy stosunkiem podwójnego podziału (dwustosunkiem lub stosunkiem anharmonicznym) tych czterech punktów i oznaczamy symbolem $(ABCD)$.



Rys. 8.

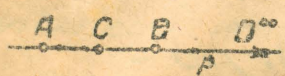
Zatem $u = (ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$. Jeżeli elementy A, B i C są punktami stałymi, to stosunek podziału

$\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = c_0$ jest liczbą stałą c_0 , a stosunek po-

dwójnego podziału $u = (ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = c_0 : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$. Wnosimy stąd, że każdemu punktowi D , w odniesieniu do trzech stałych punktów A, B i C odpowiada jedna i tyl-

ko jedna wartość na u i wzajemnie, każdej wartości u podporządkowany jest jeden, ściśle oznaczony punkt D .

Cztery punkty A, B, C, D nazywamy grupą harmoniczną, a stosunek podwójnego podziału $u = (ABCD)$ tych punktów stosunkiem harmonicznym wówczas, jeżeli $u = -1$. Specjalną grupę harmoniczną tworzą (rys. 9) punkty: A, B , punkt C , połowicy odcinek $\overline{AB}$ i punkt niewłaściwy D^∞ ; w tym wypadku (por. ust. 8)



Rys. 9.

mamy bowiem $u = (ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD^\infty}{BD^\infty} = -1 : +1 = -1$

Konstrukcję, w jaki sposób dla trzech danych punktów wyznaczyć czwarty, tworzący z nimi

grupę harmoniczną, podamy w ust. 15 i 22.

10. Stosunek podwójnego podziału czterech promieni. Obierzmy (rys. 10) trzy dowolne promienie a, b, c , przecinające się w punkcie P . Jeżeli prosta α wykona taki obrót okół punktu P , że nakryje się z promieniem b - przy czem element α i czasie dokonanego obrotu nie przekroczy położenia S , to wówczas prosta α opíše kąt $\bar{ab}$, zawarty pomiędzy promieniami



Rys. 10.

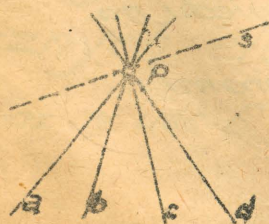
a i b . Umożliwmy się nadto, że np. ruch obrotowy w kierunku zgodnym z ruchem wskazówki zegara uważać będziemy za ujemny, a ruch obrotowy w kierunku przeciwnym - za dodatni, to kąty $\bar{ab}$ i $\bar{ba}$ róż-

nią się znakiem. Zatem $\bar{ab} = -\bar{ba}$, albo $\bar{ab} + \bar{ba} = 0$.

Przyjmijmy w peku promieni (P) elementy a, b, c i d (rys. 11)

oraz stały promień S , to wówczas zachodzą następujące relacje:

$\bar{ab} + \bar{bc} = \bar{ac}$; $\bar{ab} + \bar{bd} = \bar{ad}$. Niechaj elementy a, b będą promie-



Rys. 11.

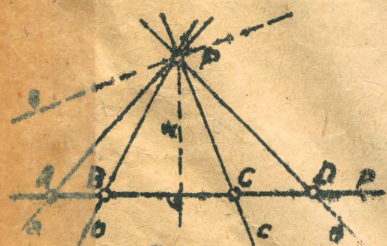
niami stałymi, a element c - promieniem zmiennym, to wyrażenie: $\lambda = \frac{\sin \bar{ac}}{\sin \bar{bc}}$ nazywamy stosunkiem podziału kąta $\bar{ab}$ promieniem c .

Każdemu promieniowi c w pęku (P) odpowiada jedna i tylko jedna wartość $\lambda = \frac{\sin \bar{ac}}{\sin \bar{bc}}$ i wzajemnie każdej wartości λ odpowiada jeden ściśle określony promień c w pęku (P) . Z równań bowiem $\lambda = \frac{\sin \bar{ac}}{\sin \bar{bc}}$ i $\bar{ab} + \bar{bc} = \bar{ac}$ (uwzględniając relację $\sin \bar{ac} = \sin(\bar{ab} + \bar{bc}) = \sin \bar{ab} \cos \bar{bc} + \cos \bar{ab} \sin \bar{bc}$) można wyznaczyć dla stałego kąta $\bar{ab}$ i danej wartości λ , najpierw kąt $\bar{bc}$, a następnie i kąt $\bar{ac}$.

Dla czterech dowolnych promieni a, b, c, d (rys. 11.) pęku (P) wyrażenie $u = \frac{\sin \bar{ac}}{\sin \bar{bc}} : \frac{\sin \bar{ad}}{\sin \bar{bd}}$ nazywamy stosunkiem podwójnego podziału (dwustosunkiem albo stosunkiem anharmonicznym) tych czterech promieni i oznaczamy symbolem $(abcd)$. Zatem $u = (abcd) = \frac{\sin \bar{ac}}{\sin \bar{bc}} : \frac{\sin \bar{ad}}{\sin \bar{bd}}$.

Jeżeli a, b, c są promieniami **statymi** pęku (P) , wówczas stosunek podziału $\lambda = \frac{\sin \bar{ac}}{\sin \bar{bc}} = c_0$ jest liczbą stałą c_0 , stosunek zaś podwójnego podziału $u = \frac{\sin \bar{ac}}{\sin \bar{bc}} : \frac{\sin \bar{ad}}{\sin \bar{bd}} = c_0 : \frac{\sin \bar{ad}}{\sin \bar{bd}}$ ifnosimy stąd bezpośrednio, że każdemu promieniowi d (odniesieniu do trzech statycznych elementów a, b, c odpowiada jedna i tylko jedna wartość u , i wzajemnie: każdej wartości u , podporządkowany jest w pęku (P) jeden ściśleznaczony promień d .

11. Twierdzenie Pappusa. Dany pęk promieni (P) przetnijmy (rys 12) dowolną prostą p w szeregu punktów (p) i zbadajmy własności miarowe, zachodzące pomiędzy tymi perspektywicznymi utworami zasadniczymi gatunku 19^o.



Rys. 12.

Podwójne powierzchnie trójkątów: ACP, BCP, ADP i BDP wyrazić można - bez względu na położenie stałego ramienia S - wzorami:

$$\bar{AC} \cdot w = \bar{AP} \cdot \bar{CP} \cdot \sin \bar{ac} ; \bar{AD} \cdot w = \bar{AP} \cdot \bar{DP} \cdot \sin \bar{ad}$$

$$\bar{BC} \cdot w = \bar{BP} \cdot \bar{CP} \cdot \sin \bar{bc} ; \bar{BD} \cdot w = \bar{BP} \cdot \bar{DP} \cdot \sin \bar{bd}$$

przyczem w oznacza odległość punktu P od podstawy p .

Z obustronnego podzielenia uzyskamy:

$$\frac{AC \cdot w}{BC \cdot w} : \frac{AD \cdot w}{BD \cdot w} = \frac{AP \cdot CP \cdot \sin \widehat{ac}}{BP \cdot CP \cdot \sin \widehat{bc}} : \frac{AP \cdot DP \cdot \sin \widehat{ad}}{BP \cdot DP \cdot \sin \widehat{bd}} \text{ czyli:}$$

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin \widehat{ac}}{\sin \widehat{bc}} : \frac{\sin \widehat{ad}}{\sin \widehat{bd}} \text{ lub } (ABCD) = (abcd)$$

A zatem: Wartość stosunku podwójnego podziału czterech dowolnych punktów szeregu (p) równa się wartości stosunku podwójnego podziału czterech homologicznych promieni pęku (P) , perspektywicznego względem szeregu (p) .

Przeznijmy pęk promieni (P) dwiema prostymi p_1 i p_2 (rys 13)

w szeregach perspektywicznych:

$(p_1) \bar{\bar{}} (p_2)$. Ponieważ $(p_1) \bar{\bar{}} (P)$ i

$(p_2) \bar{\bar{}} (P)$, przeto zachodzą re-

lacje: $(A_1 B_1 C_1 D_1) = (abcd)$

$(A_2 B_2 C_2 D_2) = (abcd)$, a stąd

otrzymujemy związek: $(A_1 B_1 C_1 D_1) =$

$= (A_2 B_2 C_2 D_2)$ dla dwóch perspektywicznych szeregów punktów.

$(p_1) \bar{\bar{}} (p_2)$. Jeżeli z dwóch dowolnych punktów P_1 i P_2 ru-

cimy (rys. 13 a) szereg punktów (p) , to:

$(p) \bar{\bar{}} (P_1)$ więc: $(ABCD) = (a_1 b_1 c_1 d_1)$; $(p) \bar{\bar{}} (P_2)$ więc: $(ABCD) = (a_2 b_2 c_2 d_2)$

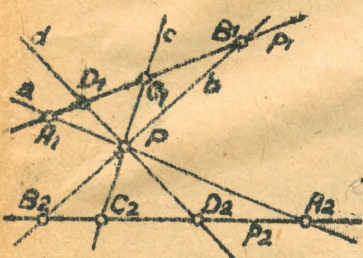
Zatem dla dwóch perspektywicznych pęków promieni $(P_1) \bar{\bar{}} (P_2)$

otrzymujemy związek: $(a_1 b_1 c_1 d_1) = (a_2 b_2 c_2 d_2)$. Wystawic możemy

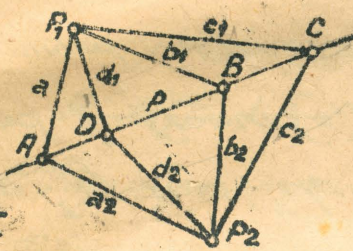
tedy tw. Pappusa (około 300 r. p.n. Chr.):

Dla dwóch perspektywicznych utworów za-
sadniczych gatunku pierwszego. stosunki
podwójnego podziału czterech par homolo-
gicznych elementów są sobie równe.

Ponieważ w ust. 6. zdefiniowaliśmy dwa jednokresłne utwory za-



Rys. 13.



Rys. 13a.

zasadnicze gatunku 1^{go}, jako końcowe ogniwa łańcucha utworów perspektywicznych, przeto, stosując tw. Pappusa kolejno do każdej pary sąsiadnych ogniw tego łańcucha, uzyskamy najogólniejsze tw.:

Dla dwóch rzutowych utworów zasadniczych gatunku 1^{go} stosunki podwójnego podziału czterech par homologicznych elementów są sobie równe.

12. Punkty graniczne i potęga utworów rzutowych. Pęk promieni (P) przetnijmy (rys. 14) dwiema pro-

stami p_1 i p_2 w perspektywicznych szeregach punktów $(p_1) \bar{\wedge} (p_2)$. Przez

wierzchołek P poprowadzimy promienie:

$r \parallel p_2$, $q \parallel p_1$ i wyznaczymy punkty:

$R_1 = rp_1$, $R_2^\infty = rp_2$; oraz $Q_1^\infty = qp_1$,

$Q_2 = qp_2$. Elementom R_1 i Q_1^∞ szeregu (p_1) odpowiadają punkty R_2^∞ i Q_2

szeregu (p_2) , a zatem:

$$p_1(A_1, B_1, C_1, \dots, R_1, Q_1^\infty, \dots) \bar{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, \dots, R_2^\infty, Q_2, \dots)$$

Punkty R_1 i Q_2 , którym w uważanych szeregach perspektywicznych odpowiadają elementy niewłaściwe R_2^∞ i Q_1^∞ , nazywamy elementami granicznymi tych szeregów (lub punktami wzajemnymi wzgl. elementami zbiegu).

Na mocy Tw. Pappusa otrzymamy dla dwu dowolnych par: A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , oraz dla par: R_1 i R_2^∞ , Q_1^∞ i Q_2 homologicznych elementów uważanych szeregów następuje związek: $(A_1, B_1, R_1, Q_1^\infty) = (A_2, B_2, R_2^\infty, Q_2)$ czyli:

$$\frac{\overline{A_1 R_1}}{\overline{B_1 R_1}} : \frac{\overline{A_1 Q_1^\infty}}{\overline{B_1 Q_1^\infty}} = \frac{\overline{A_2 R_2^\infty}}{\overline{B_2 R_2^\infty}} : \frac{\overline{A_2 Q_2}}{\overline{B_2 Q_2}}. \text{ Ale } \frac{\overline{A_1 Q_1^\infty}}{\overline{B_1 Q_1^\infty}} = 1; \frac{\overline{A_2 R_2^\infty}}{\overline{B_2 R_2^\infty}} = 1 \text{ (por. ust. 8) przeto:}$$

$$\frac{\overline{A_1 R_1}}{\overline{B_1 R_1}} = 1 : \frac{\overline{A_2 Q_2}}{\overline{B_2 Q_2}} \text{ lub } \frac{\overline{A_1 R_1}}{\overline{B_1 R_1}} = \frac{\overline{B_2 Q_2}}{\overline{A_2 Q_2}} \text{ więc ostatecznie: } \overline{A_1 R_1} \cdot \overline{A_2 Q_2} = \overline{B_1 R_1} \cdot \overline{B_2 Q_2}.$$

Gdybyśmy zamiast homologicznych elementów B_1 i B_2 przyjęli punkty

C_1 i C_2 , to iloczyn: $\overline{A_1 R_1} \cdot \overline{A_2 Q_2} = \overline{C_1 R_1} \cdot \overline{C_2 Q_2}$. Zatem ... czyn odcinków $\overline{A_1 R_1} \cdot \overline{A_2 Q_2}$

zawarty między punktami granicznymi R_1, Q_2 , a parą punktów homologicznych A_1 i A_2 - jest ilością stałą. Iloczyn ten nazwać będziemy potęgą perspektywicznych szeregów.

Uważajmy teraz dwa jednokresłne szeregi punktów: (S_1) i (S_2) , jako końcowe ogniwa pewnego łańcucha utworów perspektywicznych. Z jednokresłności (ust. 6) tych szeregów wynika, że każdemu punktowi szeregu (S_1) odpowiada jeden ściśle oznaczony punkt szeregu (S_2) i wzajemnie. Punktom niętasciwemu Q_1^∞ szeregu (S_1) niechaj (konstrukcję podaną w ustępie 20) odpowiada punkt graniczny Q_2 szeregu (S_2) ; podobnie punktom niętasciwemu R_2^∞ szeregu (S_2) podporządkujemy jeden ściśle oznaczony punkt graniczny R_1 w szeregu (S_1) . Symbolicznie możemy to wyrazić:

$$S_1(A_1, B_1, C_1, \dots, R_1, Q_1^\infty, \dots) \bar{\wedge} S_2(A_2, B_2, C_2, \dots, R_2^\infty, Q_2, \dots)$$

Z uogólnionego tw. Pappusa wynika równość stosunków: $(A_1 B_1 R_1 Q_1^\infty) = (A_2 B_2 R_2^\infty Q_2)$ czyli po dokonaniem rozwinięciu: $\frac{A_1 R_1}{A_1 Q_1^\infty} \cdot \frac{A_2 Q_2}{A_2 R_2^\infty} = \frac{B_1 R_1}{B_1 Q_1^\infty} \cdot \frac{B_2 Q_2}{B_2 R_2^\infty} = \text{Const.}$

Iloczyn ten nazwiemy potęgą jednokresłnych szeregów (S_1) i (S_2) .

Iloczyn odcinków, zawartych pomiędzy punktami granicznymi i punktami homologicznymi dwóch szeregów rzutowych, jest ilością stałą i zowie się potęgą tych szeregów jednokresłnych.

13. Przekształtczenie stosunku podwójnego podziału. Korzystając z tw. Pappusa, wykazemy prawdziwość następującego twierdzenia:

Dla utworu zasadniczego 1^{go} gatunku - wartość stosunku podwójnego podziału czterech dowolnych elementów nie ulega zmianie wówczas, jeżeli przemienimy ze sobą dwa jego elementy i równocześnie dwa elementy pozostałe. Dla czterech punktów dowolnego szeregu - Dla czterech promieni dowol-

gu zachodzi związek: $(ABCD) = (BADC)$ nego pęku zachodzi związek:
 $(CDAB) = (DCBA)$.
 $(abcd) = (badc) = (cdab) = (dcba)$

Aby dowieść prawdziwości tego twierdzenia, przetnijmy (rys. 15) pęk promieni $S(a, b, c, d, \dots)$ dwiema prostymi p i r , przechodzącymi przez dowolny punkt A promienia a . Rzucimy następnie punkty $E = br$, $F = cr$ z wierzchołka D i oznaczmy przez m i n proste $DE = m$, $DF = n$. Z łańcucha utworów perspektywicznych: $p(ABCD, \dots) \bar{\wedge} S(a, b, c, d, \dots) \bar{\wedge} r(AE, FG, \dots) \bar{\wedge} D(p, m, n, d, \dots)$ wnosimy o rzutowości szeregu (p) i pęku (D) :

$p(ABCD) \bar{\wedge} D(p, m, n, d, \dots)$. Pęk promieni (D)

przetnijmy prostą b , a otrzymamy w ten sposób szereg (b) rzucimy z punktu F na podstawę

p , to wówczas: $p(ABCD, \dots) \bar{\wedge} D(p, m, n, d, \dots) \bar{\wedge}$

$\bar{\wedge} b(BE, NS, \dots) \bar{\wedge} F(FB, r, n, c, \dots) \bar{\wedge} p(BA, D, c, \dots)$

Dla jednokreślnych szeregów: $p(ABCD, \dots) \bar{\wedge}$

$\bar{\wedge} p(BADC, \dots)$ zachodzi równość stosunków

podwójnego podziału: $(ABCD) = (BADC) \dots \dots \dots 1^\circ$

Pęk promieni (D) przetnijmy teraz prostą c a otrzymamy szereg punktów (c) rzucimy z wierzchołka E na podstawę p , to $p(ABCD, \dots) \bar{\wedge}$

$\bar{\wedge} D(p, m, n, d, \dots) \bar{\wedge} c(C, M, F, S, \dots) \bar{\wedge} E(EC, m, r, b, \dots) \bar{\wedge} p(C, D, A, B, \dots)$

Dla szeregów: $p(ABCD, \dots) \bar{\wedge} p(CDAB, \dots)$ zachodzi relacja:

$(ABCD) = (CDAB) \dots \dots \dots 2^\circ$

Ponieważ jednak - na mocy równości 1° - $(CDAB) = (DCBA)$,

przeto uzyskaliśmy równość:

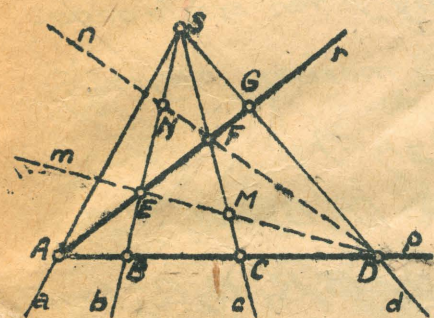
$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) \dots \dots \dots 3^\circ$

a temsamem dowiedliśmy prawdziwości naszego twierdzenia.

14. Własność grupy harmonicznej.

Założmy teraz, że dla czterech różnych od siebie punktów

A, B, C i D wartość ich stosunku podwójnego podziału $(ABCD)$ nie



Rys. 15.

ulega zmianie skoro przemienimy tylko dwa pierwsze wyrazy. Jeżeli tedy: $(ABCD) = (BACD)$ 4°

to wówczas (por. 1°) z równości $(BACD) = (ABDC)$ wynika zależność:

$$(ABCD) = (ABDC) \quad (5)$$

ustalająca też zmienność tylko dwóch ostatnich wyrazów uważanej czwórki punktów. Z łatwością wykazemy teraz, że ta czwórka elementów tworzy grupę harmoniczną. W istocie, bowiem z równości 5° wynika:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC} = \frac{\frac{AD}{BD}}{\frac{AC}{BC}} = \frac{1}{\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}} \quad \text{czyli} \quad \left(\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} \right)^2 = 1 \quad \text{lub:}$$

6 $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \pm 1$. Dla wartości +1 mamy: $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$, więc (ust. 8.) nakrywają się punkty C i D.

Ponieważ jednak (wedle założenia) różne punkty A, B, C i D są czterema różnymi od siebie elementami, przeto wartość ich stosunku podwójnego podziału $(ABCD) = -1$. Z ust. 9 wnosimy tedy:

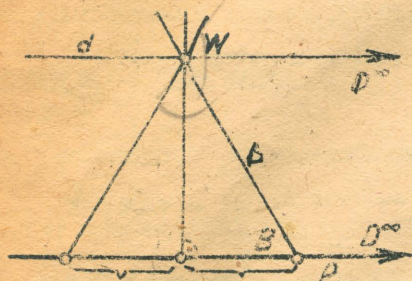
Jeżeli dla czterech elementów - utworzy harmoniczny górnika

19° - wartość stosunku podwójnego podziału nie ulega zmianie, skoro przemienimy ze sobą tylko dwa pierwsze lub tylko dwa ostatnie wyrazy, to uważane elementy tworzą wówczas grupę harmoniczną;

Uwzględniając równości 3°, 4° i 5°, otrzymamy dla grupy harmonicznego następującą zależność: $-1 = (ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = (ACDB) = (ABDC) = (DCAB) = (CDBA) = -1$. W uważanej grupie harmonicznego dwa pierwsze elementy A, B lub dwa ostatnie C, D nazywamy elementami harmonicznego sprzężonymi lub wprost „sprzężonymi”. Grupę harmoniczną przekształcimy tedy w ten sposób, że: wypisujemy stale obok siebie elementy sprzężone.

Na prostej p obierzmy (ust. 9) specjalną grupę harmoniczną, złożoną z punktów: AB, D^∞ i pktu C, połowiącego odcinek $\overline{AB}$. Wpku C poprowadzimy (rys. 16 na str. 26) prostą cp (prostopadłą do podstawy p), a następnie rzucimy uważaną

grupę punktów z dowolnego wierzchołka W , leżącego na prostej e . Zta-



Rys. 16.

masz zauważyć, że promienie e i $d = WD^\infty$ są sy-

metralnymi kątów, jakie wyznaczają proste $a = WA$

i $b = WB$. Z tw. Pappusa (ust. 11) wynika równość stosun-

ków $(\cos d) = (\angle BCD)^\infty = -1$, a zatem:

Dwie proste przecinające się i ^{dwie} symetralne ką-
tów, wyznaczonych przez te proste, tworzą

grupę harmoniczną.

Nie należy sądzić jednak, aby każda grupa harmoniczna czterech promieni posiadała tę własność. W celu dokładniejszego omówienia tej sprawy, zajmiemy się grupami harmonicznymi, które występują w czworokątach, wzgl. czworobokach zupełnych.

15. Twierdzenie o czworokącie i czworoboku zupełnym. Zadanie.

Cztery punkty A, B, C i D dowolnej płaszczyzny (rys. 17), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, wyznaczają czworokąt zupełny.

Wielokąt ten posiada cztery wierzchołki:

A, B, C, D i sześć boków: $AB, AC, AD, BC, BD,$

CD . Takie pary boków, jak: AB i CD, AC i BD, AD i BC nazywamy bokami przeciwnymi.

Trzy pary boków przeciwnych przecinają się w trzech punktach przekątnych

P, Q, R , które wyzna-

czają trójkąt prze-

kątny lub biegu-

nowy. Boki p, q, r trójkąta przekątnego

Cztery proste a, b, c i d dowolnej pta-
szczyzny (rys. 18) z których żadne trzy
nie przechodzą przez jeden punkt, wy-
znaczają czworobok zupełny.

Wielobok ten posiada cztery boki: $a, b, c,$

d i sześć wierzchołków $ab, ac, ad, bc,$

bd, cd . Takie pary wierzchołków, jak:

ab i cd, ac i bd, ad i bc nazywa-

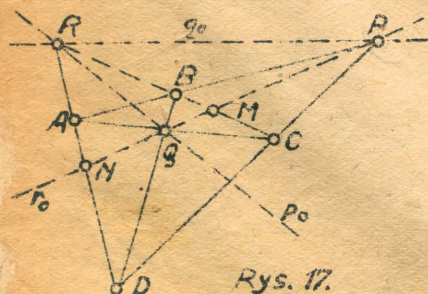
my wierzchołkami przeciwnymi. Trzy pary wierzchołków przeciwnych

wyznaczają trzy

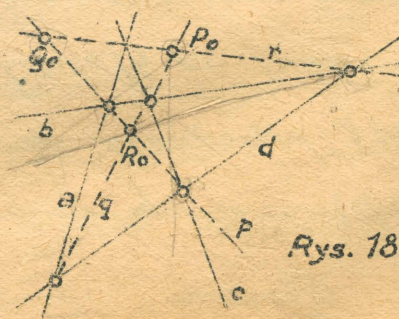
proste prze-

kątne p, q, r

które tworzą trój-



Rys. 17.



Rys. 18.

lub biegunowy.

przekątnymi uważanego czworokąta zupełnego.

Wierzchołki P, Q, R trójboku przekątnego nazywamy wprost punktami przekątnymi uważanego czworoboku zupełnego.

20. IV. 1823.

Przez promieni $P(PA, PD, p_0, q_0, \dots)$ przetnijmy rys. 17. dwoma bokami przeciwnymi AD, BC w dwóch perspektywicznych szeregach punktów $(H, D, N, R, \dots)$ i $(B, C, M, R, \dots)$ to (ust. 11) wartości stosunków podwójnego podziału: $(ADNR) = (BCMR)$ są sobie równe. Podobnie przez promieni $Q(QA, QD, p_0, q_0, \dots)$ przetnijmy znowu bokami AD, BC w dwóch perspektywicznych szeregach punktów: $(ADNR, \dots)$ i $(CBMR, \dots)$ to otrzymamy równość stosunków: $(ADNR) = (CBMR)$. Wykazaliśmy tedy, że $(ADNR) = (BCMR) = (CBMR)$, czyli (por. ust. 14) stosunek $(BCMR) = -1$, więc uważana czwórka punktów tworzy grupę harmoniczną. Przate

Na każdym boku czworokąta zupełnego leży czwórka harmoniczna punktów, a mianowicie: dwa wierzchołki, punkt przekątny i punkt przecięcia się tego boku z przekątną, łączącą dwa pozostałe punkty przekątne.

Przez każdy wierzchołek czworoboku zupełnego przechodzi czwórka harmoniczna promieni, a mianowicie: dwa boki, przekątna i prosta, łącząca ten wierzchołek z pozostałym punktem przekątnym.

Czwórkę harmoniczną $ADNR$ rzucimy z punktu P , a otrzymamy grupę harmoniczną promieni PA, PD, p_0, q_0 przetnijmy w końcu przekątną p_0 to uzyskamy nast. Owiędzemo:

Przez każdy punkt przekątny czworokąta zupełnego przechodzi grupa harmoniczna promieni, złożona z dwu boków przeciwnych i dwóch przekątnych.

Na każdej przekątnej czworoboku zupełnego leży grupa harmoniczna punktów, złożona z dwóch wierzchołków przeciwnych i dwóch punktów przekątnych.

Na każdej przekątnej czworokąta zupełnego leży grupa harmoniczna punktów, składająca się z dwóch punktów przecięcia się tej przekątnej z bokami przeciwnymi i z dwóch punktów przekątnych.

Przez każdy punkt przekątny czworoboku zupełnego przechodzi grupa harmoniczna promieni, składająca się z dwóch prostych, przechodzących przez wierzchołki przeciwnych, oraz dwóch przekątnych.

Zadanie: Wyznaczyć pkk N, tworzący z trzema danymi pktami B, C, M, R a 4 hor

macią o stosunku $(ADNR) = -1$.

Rozwiązanie: Bez punkty A i D prowadzimy (por. rys. 17) dwie dowolne proste AP , DP , zbudujemy je w pktach B i C prostą przechodzącą przez dany pkt R . Wskazywamy w ten sposób tworzenie zupełnym $ABCD$ konstruujemy trzeci pkt punktem Q i pociągamy $RQ = PQ$ wyznaczmy na dużej prostej żądany pkt N .

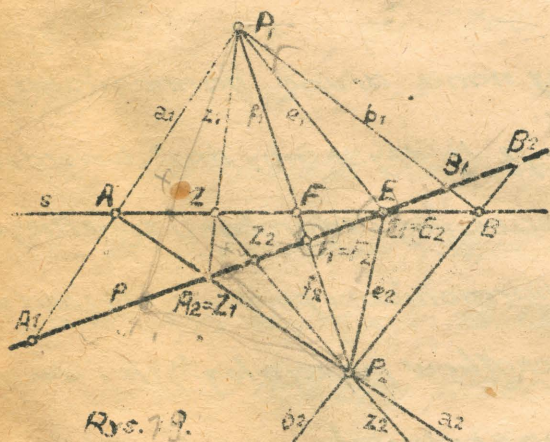
Rozdział III

Ustalenie rzutowości między utworami zasadniczymi gatunku 1^{go}

16. Rzutowe szeregi o wspólnej podstawie i pęki o wspólnym wierzchołku. Elementy zjednoczone.

Niechaj dane będą (rys. 19) dwa perspektywiczne pęki promieni (P_1) i (P_2) oraz dowolna prosta p , nie przechodząca przez wierzchołki tych pęków. Wzrost p płaszczyzny (ust. 8) uważane pęki w dwóch jednokreślonych szeregach proste o wspólnej podstawie p gojz. zachodzi relacja:

$$p(A, B, C, \dots) \bar{\wedge} P_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} S(A, B, C, \dots) \bar{\wedge} P_2(a_2, b_2, c_2, \dots) \bar{\wedge} p(A_2, B_2, C_2, \dots)$$



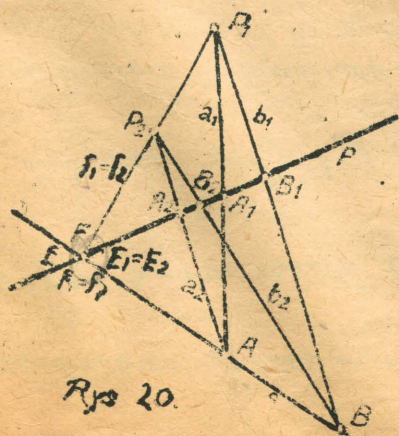
Rys. 19.

W jednokreślonych szeregach $p(A_1, B_1, C_1, \dots) \bar{\wedge} p(A_2, B_2, C_2, \dots)$ każdemu punktowi A_1 pierwszego szeregu odpowiada jeden i tylko jeden punkt A_2 szeregu drugiego i wzajemnie: każdemu elementowi A_2 drugiego szeregu odpowiada jeden ściśle oznaczony pkt. A_1 w szeregu pierwszym. Za pośrednictwem poszczególnych ogniw uważanego

łańcucha (por. rys. 19) konstruować możemy dwa homologiczne elementy A_1 i A_2 tych szeregów; w tym celu wystarczy wykreślić dwa odpowiadające sobie promienie a_1 i a_2 pęków $(P_1) \bar{\wedge} (P_2)$, które przecinają się w punkcie A na pomocniczej prostej s . Element A_2 , należący do szeregu $p(A_2, B_2, C_2, \dots)$ uważamy jako punkt Z_2 szeregu $p(A_1, B_1, C_1, \dots)$, to wówczas punktowi Z_2 odpow-

wie jeden i tylko jeden punkt Z_2 w szeregu $p(A_2, B_2, C_2, \dots)$. Aby skonstruować ów element Z_2 , wykreślmy homologiczne promienie $z_1 = P_1 Z_1$ i $z_2 = P_2 Z_2$ pęków $(P_1 i (P_2))$ - gdzie $Z = z, s$ jest punktem przecięcia się promienia $z_1 = P_1 Z_1$ z prostą s - wówczas pkt. $Z_2 = z_2 p$ (leżącej na prostych $z_2 i p$) jest szukany elementem Z_2 . A zatem: Każdemu punktowi $Z_1 = A_1$ prostej p , uwzględniającemu za element Z_1 pierwszego szeregu ^{względnie za punkt A_2 drugiego szeregu} odpowiada w ogólności dwa różne od siebie punkty Z_2 i A_2 w dwóch jednokreślnych szeregach o wspólnej podstawie p .

Możemy jednak zaliczyć że dwa homologiczne punkty tych szeregów nakrywają się w jednym punkcie. Oznaczmy przez $E = ps$ pkt. przecięcia się podstawy p z prostą s , to homologiczne promienie: $e_1 = P_1 E$ i $e_2 = P_2 E$ pęków $(P_1 i P_2)$ przetną podstawę p w dwóch pktach $E_1 = e_1 p$ i $E_2 = e_2 p$ schodzących się z punktem E . Punkt $E_1 = E_2$ w którym nakrywają się dwa homologiczne punkty E_1 i E_2 jednokreślnych szeregów o wspólnej podstawie p , nazywamy pkt. zjednoczonym (odpowiedziowym) tych szeregów. Oznaczony przez F pkt. przecięcia się prostej s z prostą $P_1 P_2$ promień zjednoczony $P_1 P_2 = f_1 = f_2$ z ust. 5) perspektywicznych pęków $(P_1 i (P_2))$ przetnie podstawę p w pkt. zjednoczonym $F_1 = F_2$. Możemy tedy powiedzieć: Jeżeli dwa perspektywiczne pęki promieni przetniemy prostą, nie przechodzącą przez wierzchołki tych pęków, to otrzymane z przekroju dwa rzutowe szeregi pktów posiadają zawsze dwa (razyn) pkt. zjednoczone $E_1 = E_2$ i $F_1 = F_2$.



Rys 20.

Jeżeli w szczególnym przypadku (rys. 20) przez punkt $E = ps$, przecięcia się podstawy p z pomocniczą prostą s , przechodzi prosta $P_1 P_2$, bieżąca wierzchołki perspektywicznych pęków (P_1) (P_2) - to wówczas w pkt. E nakrywają się

dwa zjednoczone punkty $E_1 = E_2$ i $F_1 = F_2$ jednokreślnych szeregów o wspólnej podstawie p . Na mocy prawa biegunowej dwójności dwumiany (ust. 2) analogiczne własności dwóch rzutowych wiązek promieni o wspólnym wierzchołku P .

17. Zamiast dwóch perspektywicznych wiązek promieni przyjmujemy teraz (rys. 21) dwa jednokreślne wiązki $P_1(P_2)$. Długość prosta p nie przechodząca przez wierzchołki P_1 i P_2 przecina (ust. 7) je w dwóch rzutowych szeregach punktów o wspólnej podstawie p . W tym przypadku zachodzi bowiem relacja następująca: $p_1(a_1, b_1, \dots) \bar{\wedge} P_1(u_1, v_1, p.e.) \bar{\wedge} S_3(A_3, B_3, p) \bar{\wedge} \bar{\wedge} S_1(a_1, b_1, \dots) \bar{\wedge} S_4(A_4, B_4, \dots) \bar{\wedge} P_2(a_2, b_2, \dots) \bar{\wedge} p(A_2, B_2, \dots)$.

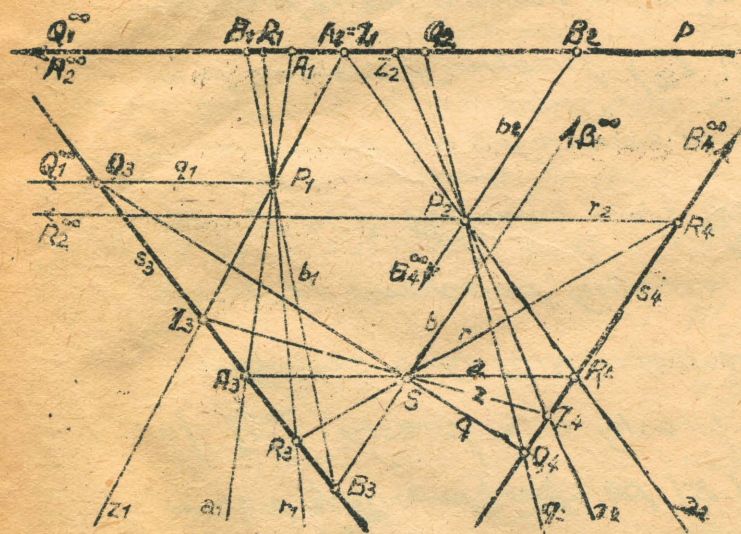
W sposób odwrotniejszy, niżeli w ust. 16 skonstruowaliśmy z danym dwóm jednokreślnym szeregów punktów o wspólnej podstawie: $p(A_2, B_2, C_2, \dots) \bar{\wedge} p(A_1, B_1, C_1, \dots)$ również i tutaj, pon rys. 21, zachodzi mn wiążek, że pktowi $A_2 = Z_1$ odpowiada dwa różne punkty A_1 i Z_2 i t.d., kładniog te i dwaście z niemi zbliżane oznaczamy, powiemy:

Dwa jednokreślne szeregi punktów

o wspólnej podstawie (względnie dwa piony promieni o wspólnym wierzchołku) posiadają tę własność, że każdemu elementowi, uważanemu za przynależny do pierwszego lub drugiego szwronu, odpowiadają w ogólności dwa elementy różne od siebie.

Punktowi elementarnemu $Q_2 \in R_2^\infty$ prostej p odpowiadają, zatem dwa różne od siebie punkty graniczne (sb. 12) Q_2 i R_1 tych szeregów.

Zbadajmy teraz, czy szeregi te posiadają elementy zjednoczone. Jeżeli przez E oznaczmy punkt zjednoczony $E_1 = E_2$ uwiecznych szeregów



Rys. 21.

izolowych - podstawie p , to ich potęga c_0 (ust. 12) wyrazi się wzorem:
 $c_0 = A_1 \bar{R}_1 \cdot A_2 \bar{Q}_2 = B_1 \bar{R}_1 \cdot B_2 \bar{Q}_2 = \dots = \bar{E}_1 \bar{R}_1 \cdot \bar{E}_2 \bar{Q}_2 = \bar{E} \bar{R}_1 \cdot \bar{E} \bar{Q}_2$. W równaniu:
 $\bar{E} \bar{R}_1 \cdot \bar{E} \bar{Q}_2 = c_0$ podstawmy (por. ust. 8) wartość $\bar{E} \bar{Q}_2 = \bar{E} \bar{R}_1 + \bar{R}_1 \bar{Q}_2$ - gdzie $\bar{R}_1 \bar{Q}_2$
 jest ilością stą i równą odległości punktów granicznych R_1 i Q_2 - to wów-
 czas uzyskamy: $\bar{E} \bar{R}_1^2 + \bar{R}_1 \bar{Q}_2 \cdot \bar{E} \bar{R}_1 = c_0$ - równanie 2^{go} stopnia ze względu
 na zmienną $\bar{E} \bar{R}_1$ wyrażającą odległość **szukanego** pktu zjednoczonego
 E od stałego elementu granicznego R_1 . Udowodniliśmy w ten sposób
 że dwa rzutowe szeregi o wspólnej podstawie p posiadają dwa punkty zje-
 dnoczone $E_1 = E_2 = E$ i $F_1 = F_2 = F$: a) rzeczywiste i różne od siebie, b) rzeczywiste
 i nakrywające się w jednym pktcie, c) urojone.

Jeżeli dwa jednokierunkowe szeregi o wspólnej podstawie p rzucimy z do-
 wolnego pktu P (nie leżącego na prostej p), to (por. ust. 7) otrzymamy dwa rzu-
 towie pęki promieni o wspólnym wierzchołku P . Promienie zjednoczone: $PE = e$
 i $PF = f$ tych pęków przechodzą przez pkty zjednoczone E i F uważa-
 nych szeregów. A zatem:

Dwa rzutowe szeregi punktów o wspólnej podstawie posiadają za- wsze dwa punkty zjednoczone.	Dwa rzutowe pęki promieni o wspól- nym wierzchołku posiadają zawsze dwa promienie zjednoczone.
---	--

Zależnie od tego, czy elementy zjednoczone tych utworów są:

a) rzeczywiste i różne od siebie b) rzeczywiste i nakrywające się wzyl.
 c) urojone, to utwory te nazywamy w przypadku: a) **hyperbolicznymi**,
 b) **parabolicznymi** wzgl **eliptycznymi**. - Pomiedzy punktami
 zjednoczonymi E i F a punktami homologicznymi rzutowych sze-
 regów o wspólnej podstawie p zachodzi - na mocy uogólnionego

tw. Pappusa (ust. 11) nast. związek: $(EFA_1B_1) = (EFA_2B_2)$ czyli:

$\frac{\bar{E}A_1}{\bar{F}A_1} \cdot \frac{\bar{E}B_1}{\bar{F}B_1} = \frac{\bar{E}A_2}{\bar{F}A_2} \cdot \frac{\bar{E}B_2}{\bar{F}B_2}$, mnożąc obie strony tego równania przez $\frac{\bar{E}B_1}{\bar{F}B_1}$ i
 dzieląc je przez $\frac{\bar{E}A_2}{\bar{F}A_2}$, otrzymamy: $\frac{\bar{E}A_1}{\bar{F}A_1} \cdot \frac{\bar{E}A_2}{\bar{F}A_2} = \frac{\bar{E}B_1}{\bar{F}B_1} \cdot \frac{\bar{E}B_2}{\bar{F}B_2}$ lub $(EFA_1A_2) = (EFB_1B_2)$
 Jeżeli zamiast elementów B_1 i B_2 , przyjmijemy parę homologicznych punktów:

C_1 i C_2 , D_1 i D_2 , ..., co zauważymy, że dwusłownik $(EFA_1A_2) = C_0$ jest ilościowo stały. - Jeżeli z wierzchołka P rzucimy grupę punktów E, F, A_1 i A_2 , co dwusłownik $(epa_1a_2) = (EFA_1A_2) = C_0$. A zatem:

Słownik podwójnego podziału dwóch elementów zjednoczonych dwóch elementów homologicznych w jednokreślnych utworach zasadniczych gatunku 1^{go}, które posiadają wspólną podstawę lub wspólny wierzchołek jest ilościowo stały.

18. Tw. podstawowe Staudta. W poprzednim ustępie udowodniliśmy, że dwa rzutowe szeregi o wspólnej podstawie p posiadają zawsze dwa punkty zjednoczone. Założymy teraz, że dwa jednokreślne szeregi na prostej p posiadają trzy punkty zjednoczone: E, F, G . Aby zbadać własności takich szeregów jednokreślnych:

$$p(A_1, B_1, C_1, \dots, E, F, G, \dots) \bar{\wedge} p(A_2, B_2, C_2, \dots, E, F, G, \dots)$$

zauważymy, że z ich rzutowości wynika (na podstawie tw. Pappusa) równość dwóch stosunków $(EFGA_1) = (EFGA_2)$, lub: $\frac{EG}{FG} \cdot \frac{EA_1}{FA_1} = \frac{EG}{FG} \cdot \frac{EA_2}{FA_2}$. Z otrzymanych stosunków poziatu $\frac{EA_1}{FA_1} = \frac{EA_2}{FA_2}$, wnosimy (por. ust. 8), że punkty

homologiczne A_1 i A_2 nakrywają się, tworząc czwarty punkt zjednoczony A . Ponieważ punkty A_1 i A_2 są dowolną parą odpowiadających sobie elementów uwzględnianych szeregów przeto uzyskaliśmy Twierdzenie podstawowe Staudta:

Jeżeli dwa rzutowe szeregi punktów o wspólnej podstawie wzgl. pęki promieni o wspólnym wierzchołku posiadają trzy elementy zjednoczone, to wówczas nakrywają się parami wszystkie elementy homologiczne tych utworów.

19. Kryterjum perspektywiczności utworów rzutowych. Uważajmy dwa rzutowe pęki promieni $P_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$ i założymy, że w pęku (P_1) promieniowi $z_1 = P_1P_2$, tnącemu wierzchołki tych pęków odpowiada tensam promień $P_2P_2 = z_2$.

w pęku (P_2) . Wyznaczymy punkty $A = a_1 a_2$ i $B = b_1 b_2$ przecięcia się homologicznych promieni a_1, a_2 i b_1, b_2 oraz prostą $s = AB$, przechodzącą przez punkty A i B . Prosta s przecina rzutowe pęki (P_1) i (P_2) w dwóch jednokreślnych szeregach punktów:

$$s(A, B, C_1, D_1, \dots, Z, \dots) \quad \bar{s}(A, B, C_2, D_2, \dots, Z, \dots)$$

które posiadają **trzy** punkty zjednoczone: A, B , i Z , jeżeli przez Z oznaczymy punkt przecięcia się prostej s z promieniem $P_1 P_2 = Z_1 = Z_2$. W otrzymanych szeregach o wspólnej podstawie s nakrywają się, zatem (ust. 18) parami wszystkie homologiczne punkty: $C_1 = C_2, D_1 = D_2, \dots$. Innymi słowy: pęki (P_1) i (P_2) , jako rzuty jednego szeregu punktów $s(A, B, \dots)$ są utworami perspektywicznymi.

Jeżeli prosta, tącząca wierzchołki dwóch jednokreślnych pęków promieni, jest elementem zjednoczonym tych utworów, to uważane pęki są perspektywiczne.

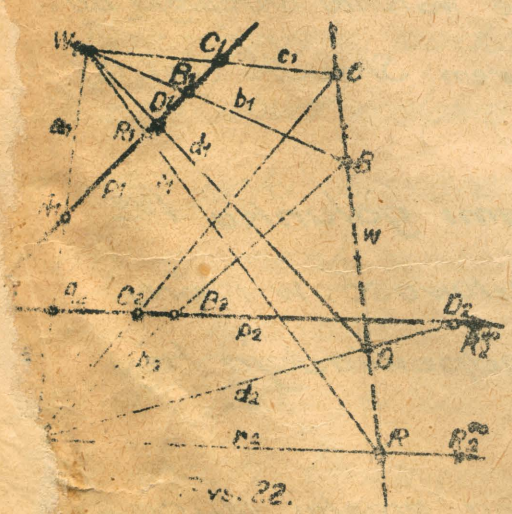
Jeżeli punkt przecięcia się podstaw dwóch jednokreślnych szeregów punktów, jest elementem zjednoczonym tych utworów, to uważane szeregi są perspektywiczne. *zwr.*

20. Ustalenie jednokreślności (izotopności) pęków i szeregów. W dotychczasowych rozważaniach omówiliśmy własności, wytykające z jednokreślności dwóch utworów zasadniczych gatunku 1^{go}. Zastanówmy się teraz, jakie warunki określają rzutowość tych utworów. Postępując się tw. podstawowym Staudta (ust. 18) dowiędziemy prawdziwości nast. twierdzenia:

Pomiędzy dwoma zasadniczymi utworami gatunku 1^{go} istnieje zawsze jedna i tylko jedna rzutowość, w której każdemu elementom danym jednego utworu odpowiadają trzy dane elementy utworu drugiego.

Tz. dowolnym punktom A_1, B_1 , i C_1 , leżącym na prostej p_1 (rys. 22)

wodporządku, my tedy dowolnie obrane punkty A_1, B_1, C_1 prostej p_1 . Aby wykazać, że te trzy pary homologicznych pktów wyznaczają jedno-
kresność szeregów (p_1) i (p_2) , postępnym dwa odpowiadające sobie ele-
menty np. A_1 i A_2 prostą A_1A_2 i na tej prostej obierzmy dwa dowol-
ne pkty W_1 i W_2 . Punkt W_1 nie może nakrywać się z elementem A_1
a pkt. W_2 nie może schodzić się z punktem A_2 . Z wierzchołka W_1
uciny: szereg (p_1) , a z pktu W_2 - szereg (p_2) . To (ust. 7) otrzymamy dwa
izotowe pęki promieni (W_1) i (W_2) . Ponieważ jednak promień $W_1W_2 = a; a_2$
jest elementem zjednoczonym tych pęków, przeto są one (ust. 19) per-
spektywiczne, a homologiczne promienie tych pęków przecinają się w
pktach. pomocniczego szeregu (w) . Uzyskaliśmy w ten sposób tarcuch
utworów perspektywicznych: $p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \dots) \bar{\wedge} W_1(a_1, b_1, c_1, d_1, \dots) \bar{\wedge} w(A, B, C, D, \dots) \bar{\wedge}$
 $\bar{\wedge} W_2(a_2, b_2, c_2, d_2, \dots) \bar{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \dots)$ czyli innemi słowy udowodniliśmy
(ust. 6), że pomiędzy jednokreślnymi szeregami pktów: $p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \dots) \bar{\wedge}$
 $\bar{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \dots)$ istnieje przynajmniej jedna izotowość, w której
tżem danym punktom A_1, B_1, C_1 prostej p_1 odpowiadają trzy dane elementy $A_2,$
 B_2, C_2 prostej p_2 . Dowolnemu punktowi D_1 (por. schemat) odpowiada punkt D_2 na pro-
stej p_2 . W celu wyznaczenia (por. rys. 22.) wyśisanego powyżej tarcucha ogniw per-
spektywicznych, użyliśmy do konstrukcji prostej A_1A_2 oraz dwu dowolnych punk-
tów W_1, W_2 . Przypuśćmy teraz, że obierzmy inne pkty W_1' i W_2' na prostej A_1A_2 wzgl.,
że na nowej prostej np. B_1B_2 lub C_1C_2 przy-
miemy dowolnie wierzchołki pomocniczych pęków
 (W_1') i (W_2') . Ustalamy - w sposób podany poprze-
dnio - nowy tarcuch - utworów perspekty-
wicznych, a mianowicie:



Rys. 22.

$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \dots) \bar{\wedge} W_1'(a_1', b_1', c_1', d_1', \dots) \bar{\wedge}$
 $\bar{\wedge} w'(A', B', C', D', \dots) \bar{\wedge} W_2'(a_2', b_2', c_2', d_2', \dots) \bar{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \dots)$
Ponieważ elementy W_1', W_2', w' są różne od

elementów W_1, W_2, w - więc moglibyśmy przypuszczać, że dowolnemu pktowi D_1 prostej p_1 odpowiadać będzie punkt D_2^* na prostej p_2 różny od poprzednio otrzymanego pktu D_2 . Gdyby tak było, to z ostatniego ranku utworów perspektywicznych wynika zależność: $p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \dots) \bar{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2^*, \dots)$.

Skonstruowane w powyższy sposób dwa szeregi pktów o wspólnej podstawie p_2 jako rzutowe względem tego samego (ust. 7) szeregu (p_1) są utworami jednokreślnymi: $p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \dots) \bar{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2^*, \dots)$.

Ponieważ szeregi te posiadają trzy elementy zjednoczone: A_2, B_2, C_2 przeto na mocy tw. Staudta - nakrywają się parami wszystkie punkty homologiczne, czyli $D_2 = D_2^*, \dots$. Wykazaliśmy w ten sposób, że: niezależnie od położenia wieńców W_1 i W_2 na prostej p_1 (wzgl. B_1, B_2 lub C_1, C_2) istnieje jedna i tylko jedna rzutowość, w której rzem danym pktom A_1, B_1, C_1 prostej p_1 odpowiadają trzy dane elementy A_2, B_2, C_2 prostej p_2 .

Z tych i dwaisię z niemi związanych rozważań - wynika prawdziwość tw., wystawionego na początku tego ustępu. Tw. to stosuje się nie tylko do dwóch utworów jednokreślnych gal. 1^{go} o różnych podstawach (wzgl. wieńcówkach), ale również do dwóch utworów o wspólnej podstawie / wspólnym wieńcówku. Przyjmijmy bowiem, że dane pkty A_1, B_1, C_1 i A_2, B_2, C_2 leżą na prostej p . Aby sprowadzić ten problem do zagadnienia poprzedniego, wystarczy elementy A_2, B_2, C_2 rzucić z dowolnego pktu S , nie leżącego na p i otrzymać promienie: $a = SA_2, b = SB_2, c = SC_2$ przecięć dowolną prostą s w punktach: A_3, B_3, C_3 ; z jednokreślności szeregów $p(A_1, B_1, C_1, \dots) \bar{\wedge} s(A_3, B_3, C_3, \dots)$ wynika bezpośrednio prawdziwość naszego tw. również i dla dwóch rzutowych szeregów o wspólnej podstawie p .

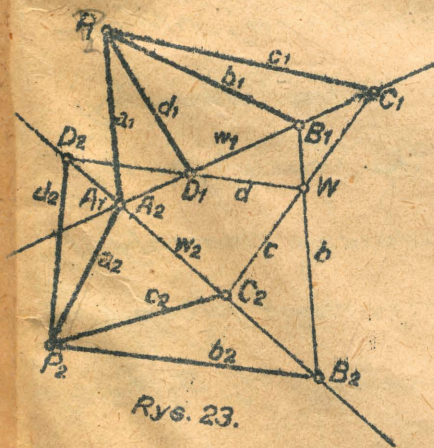
21. Uzupełnienie szeregów rzutowych. Zadanie.

Niechaj dane będą dwa rzutowe szeregi pktów: $p_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \bar{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$, których rzutowość jest wyznaczona przez trzy pary homologicznych elementów: A_1 i A_2, B_1 i B_2 oraz C_1 i C_2 . Należy uzupełnić te dwa utwory jednokreślne, t. zn. wyznaczyć konstrukcyjnie dla

każdego dowolnego pkt. K_1 szeregu (p_1) odpowiadający mu jeden ściśle oznaczony pkt. K_2 szeregu (p_2) i wzajemnie. W ust. 20 (por. rys. 22) omówiliśmy dokładnie kwestję ustalenia rzutowości, a zarazem i sprawę konstrukcyjnego uzupełnienia szeregów p_1 i p_2 za pomocą poszczególnych ogniw taniucha utworów perspektywicznych. Aby skonstruować pkt. D_2 (rys. 22) na prostej p_2 , odpowiadający dowolnie przyjętemu punktowi D_1 szeregu (p_1) , wyznaczamy promień $d_1 = W_1 D_1$ w pkt. (W_1 następnie pkt. $D = d_1 W$ w szeregu, w oraz promień $d_2 = W_2 D$ w pkt. (W_2). Prosta d_2 przecnie wówczas podstawę p_2 w szukanym punkcie. $D_2 = \frac{1}{2} d_2$. Na rys. 22. wyznaczaliśmy pkt. graniczny R_1 szeregu (p_1) , przyjmując pkt. niewłaściwy R_2^∞ na prostej p_2 i prowadząc pomocniczy promień $r_2 = W_2 R_2^\infty$ równoległe do p_2 .

Punkt. $R = r_2 W$, przecięcia się prostych r_2 i W , połączymy z wierzchołkiem W_1 . to promień $r_1 = W_1 R$ przecnie podstawę p_1 w żądanym punkcie granicznym R_1 .

Korzystając z prawa biegunowej dwoistości, rozwiązać potrafimy następujące
Zadanie: Uzupełnić dwa rzutowe pęki promieni, skoro ich rzutowość określona jest przez trzy pary homologicznych elementów: a_1, a_2 ; b_1, b_2 i c_1, c_2 .



Na rys. 23 skonstruowaliśmy odpowiadające sobie promienie d_1 i d_2 tych pęków.

Uwaga: Konstrukcję, odnoszącą się do uzupełnienia dwóch rzutowych pęków o wspólnym wierzchołku podamy w ust. 30.

22. Rzutowość utworów przystających. Zadanie. Niechaj na

prostych p_1 i p_2 dane będą odpowiednio

takie dwie czwórki pktów: A_1, B_1, C_1, D_1 i A_2, B_2, C_2, D_2 , że stosunki podwójnego porządku: $(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2)$ są sobie równe. Aby udowodnić, że owe dwie czwórki punktów są grupami rzutowymi, ustalimy pomiędzy szeregami pktów (p_1) i (p_2) jednokreślność (ust. 20) przez trzy pary homologicznych elementów A_1, A_2 ; B_1, B_2 ; C_1, C_2 . Punktowi D_1 szeregu (p_1) odpowiada wówczas (ust. 6) jeden

Ścisłe oznaczony pkt. D_2^* szeregu (p_2) różny w ogólności od danego punktu D_2 . Na mocy uogólnionego tw. Pappusa (ust. 11) zachodzi równość stosunków: $(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2^*)$, a ponieważ wedle założenia: $(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2)$, przeto: $(A_2 B_2 C_2 D_2^*) = (A_2 B_2 C_2 D_2)$ lub $\frac{A_2 C_2}{B_2 D_2} : \frac{A_2 D_2^*}{B_2 D_2} = \frac{A_2 C_2}{B_2 D_2} : \frac{A_2 D_2}{B_2 D_2}$. Z otrzymanych stosunków podziatu:

$\frac{A_2 D_2^*}{B_2 D_2} = \frac{A_2 D_2}{B_2 D_2}$ wnosimy (ust. 8), że pkty.: D_2 i D_2^* się nakrywają. Z równości:

$(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2)$ wynika zależność: $(A_1, B_1, C_1, D_1) \wedge (A_2, B_2, C_2, D_2)$, a zatem:

Dwie czwórki punktów, leżące odpowiednio na dwóch prostych, są rzutowe wówczas, jeżeli wartości stosunków podwójnego podziału tych czwórek są sobie równe.

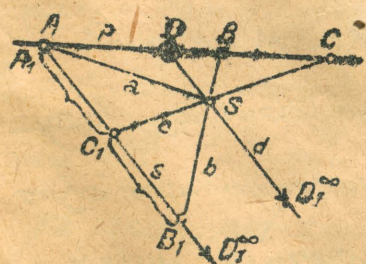
Dwie czwórki promieni, przechodzące odpowiednio przez dwa punkty, są rzutowe wówczas, jeżeli wartości stosunków podwójnego podziału tych czwórek są sobie równe.

Składamy szereg pktów. $p_1(A_1, B_1, C_1, \dots)$ jako układ sztywny i przesunimy go w nowe położenie $p_1'(A_1', B_1', C_1', \dots)$. Dla tych dwóch przystających szeregów (p_1) i (p_1') zachodzą relacje: $A_1 B_1 = A_1' B_1'$, $A_1 C_1 = A_1' C_1'$, $\dots$, $B_1 C_1 = B_1' C_1'$.

Cztery dowolne pkty.: A_1, B_1, C_1 i D_1 szeregu (p_1) po dokonaniem przesunięcia, nakryją się, odpow. z pktami: A_1', B_1', C_1' i D_1' szeregu (p_1') . Ponieważ zachodzi równość: $\frac{A_1 C_1}{B_1 D_1} : \frac{A_1 D_1}{B_1 C_1} = \frac{A_1' C_1'}{B_1' D_1'} : \frac{A_1' D_1'}{B_1' C_1'}$ czyli: $(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_1' B_1' C_1' D_1')$, przeto szeregi te są utworami jednokreślnymi. Wykazaliśmy tedy, że: Dwa przystające utwo-

ry zasadnicze gatunku 1^{go} są utworami rzutowymi.

Zadanie: Dane są trzy pkty A, B i C na prostej p ; wyznaczyć taki pkt. D ,



Rys. 24.

aby czwórka tych pktów tworzyła grupę harmoniczną o stosunku $(ABCD) = -1$.

Przez pkt. A poprowadzimy (rys 24) dowolną prostą S i odłożymy na niej od pktu. $A = A_1$ począwszy, odcinki $A_1 C_1 = C_1 B_1$. Z równych wartości grup

harmonicznich $(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1) = -1$ wnosimy, że szeregi (p) i (S) są jednokreślne; ponieważ pkt. $A = A_1$ jest elementem zjednoczonym, przeto sze-

te (ust. 19) są perspektywiczne. Przy pomocy pęku $s(a, b, c, \dots)$ którego wierzchołek S jest pktm. przecięcia się prostych $b = BB_1$ i $c = CC_1$, wyznaczamy szukany pkt. D , odpowiadający punktowi niewłaściwemu D_1^∞ prostej s .



Rozdział IV. Słożkowe.

23. Utwory rzutowych pęków i szeregów. Na dowolnej płaszczyźnie α obierzmy:

Dwa rzutowe pęki promieni (rys. 25) $P_1(a_1, \dots) \bar{\wedge} P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$, których rzutowość wyznaczona jest przez trzy pary homologicznych promieni: $a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2$.

Uzupełniając je (ust. 21) otrzymać możemy dalsze pary odpowiadających sobie promieni: l_1 i $l_2, \dots$. Jeżeli promień a_1 pierwszego pęku obracać się będzie w sposób ciągły (por. ust. 4) okato wierzchołka P_1 , to i homologiczny promień a_2

przenikać będzie również położenie swoje w sposób ciągły w pęku (P_2). Równocześnie pkt. $A = a_1 a_2$ (przecięcia się elementów a_1 i a_2) poruszać się będzie w sposób ciągły na płaszczyźnie α .

Tak, że ciąg tych punktów utworzy linię krzywą. Poszczególnymi punktami tej krzywej są oczywiście

pkt. $A = a_1 a_2; B = b_1 b_2; C = c_1 c_2; \dots$
 $l = l_1 l_2; \dots$. Krzywą tę nazywamy utwo-

rem dwóch jednokreślnych pęków pro-

sta rzutowe szeregi punktów (Rys. 26)

$p_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \bar{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$, których

rzutowość wyznaczona jest przez trzy pary homologicznych pktów: $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$.

Uzupełniając je, otrzymać możemy dalsze pary odpowiadających sobie pktów:

L_1 i $L_2, \dots$. Jeżeli pkt. A_1 pierwszego szeregu poruszać się będzie w sposób ciągły (por. ust. 3) po prostej p_1 , to i ho-

nologiczny pkt. A_2 zmieniać będzie również w sposób ciągły swe położenie na podstawie p_2 . Równocześnie prosta $a = A_1 A_2$ (łącząca pkt. A_1 i A_2) poruszać się będzie też w sposób ciągły na płaszczyźnie α - tak że ciąg

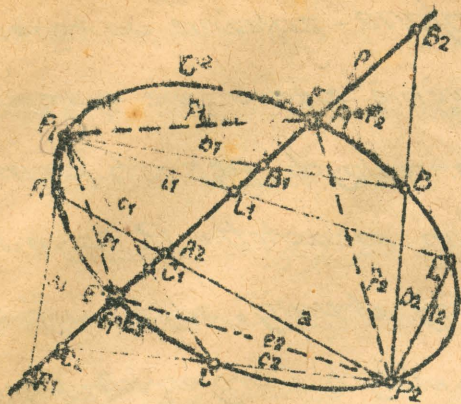
tych prostych obwiedzie (powtórzy) krzywą-obwiednię. Poszczególnymi stycznymi tej krzywej-obwiedni są, proste:

$a = A_1 A_2; b = B_1 B_2; c = C_1 C_2; \dots; l = L_1 L_2, \dots$

Krzywą tę nazywamy utworem dwóch jednokreślnych szeregów punktów $p_1 \bar{\wedge} p_2$.

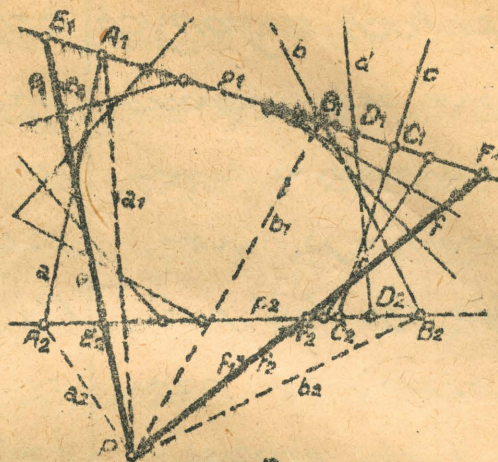
Krzywą tę nazywamy utworem dwóch jednokreślnych szeregów punktów $p_1 \bar{\wedge} p_2$.

mięni $(P_1) \wedge (P_2)$ i oznaczamy symbo-
lem C^2 .



Rys. 25.

i oznaczamy symbolem C_2 .



Rys. 26.

Aby zbadać własności tej krzywej, obierz-
my na pt. α dowolną prostą p - nie
przechodzącą przez wierzchołki P_1 i P_2
i przetnijmy nią rzutowe pęki $(P_1) \wedge (P_2)$
w dwóch (ust. 7) jednokreślnych szere-
wach pktów: $p(A_1, B_1, C_1, \dots) \wedge p(A_2, B_2, C_2, \dots)$.
Szeregi te (ust. 17) posiadają dwa pkty.
Zjednoczone $E_1 = E_2$ i $F_1 = F_2$. Homolo-
giczne promienie $e_1 = P_1 E_1$ i $e_2 = P_2 E_2$, pe-
ków $(P_1) \wedge (P_2)$, przecinają się w pktcie $E =$
 $E_1 = E_2$ badanej krzywej C^2 . Pkt. zje-
dnoczony $E_1 = E_2$ szeregów rzutowych o
wspólnej podstawie p , leży więc na krzy-
wej C^2 podobnie i drugi pkt. zjednoczo-
ny $F_1 = F_2$ jest pktm przecięcia się pro-
stej p z krzywą C^2 .

Prosta p przecina zatem badaną
linię krzywą C^2 w dwóch punktach.

Aby zbadać własności tej krzywej, obier-
my na pt. α dowolny pkt. P - nie leżą-
cy na podstawach P_1 i P_2 - i rzucimy
z niego jednokreślne szeregi $(p_1) \wedge (p_2)$,
a otrzymamy dwa rzutowe pęki pro-
mięni: $P(a_1, b_1, c_1, \dots) \wedge P(a_2, b_2, c_2, \dots)$.
Pęki te posiadają dwa promienie zjedno-
czone: $e_1 = e_2$ i $f_1 = f_2$. Homologiczne
pkt. $E_1 = p_1 e_1$ i $E_2 = p_2 e_2$ szeregów
 $(p_1) \wedge (p_2)$ wyznaczają styczną $e = e_1 = e_2$
badanej krzywej C_2 . Promień zjednoczony
 $e_1 = e_2$ pęków rzutowych o wspólnym wierz-
chołku P , jest więc styczną krzywej C_2 ; po-
dobnie i drugi promień zjednoczony $f_1 = f_2$
jest styczną, poprowadzoną z pktu. P do
krzywej C_2 .

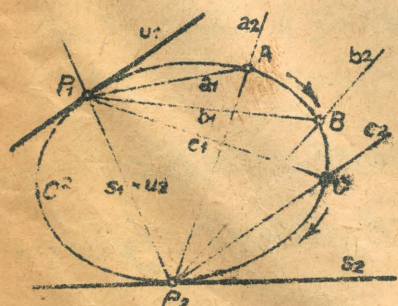
Przez pkt. P przechodzi zatem
do badanej krzywej C_2 dwie styczne

płach rzeczywistych: roznych od się-
 bie E i F lub nakrywających się $E=F$
 mzi. w dwóch pktach. urojonych
 zależnie od tego, jakie pkty zjednoczo-
 ne występują w jednokreslinowych szere-
 gach o wspólnej podstawie p . Nazywa
 C^2 jest rzędu drugiego gdyż ilość pun-
 któw (rzeczywistych i urojonych) prze-
 cięcia się dowolnej prostej z płaską
 krzywą algebraiczną określa rząd
 tej krzywej. Udowodniliśmy zatem dwi-
 dzenia:

Utworem dwóch rzutowych
pęków promieni jest krzy-
wa rzędu drugiego.

Uwaga: Uprzecznie. P mówimy, że leży „zewnątrz” lub „wewnątrz” krzywej klasy drugiej, zależnie od tego, czy prezeni przechodzą dwie (różne od siebie) stycz-
ne: rzeczywiste wzgl. urojone. Jeżeli obie styczne rzeczywiste się nakrywają, to P
leży na krzywej. W ust. 28 wykazemy, że każda krzywa rzędu drugiego jest za-
razem krzywą klasy drugiej i wzajemnie. Jeżeli dla krzywej algebraicznej
rzad = klasie = n , to powiadamy, że krzywa ta jest stopnia n -go. W na-
szych badaniach występują zatem krzywe stopnia 2-go, które nazywać be-
dziemy stożkowerni.

24. Własności stożkowych. Tw. Steinerja. Stożkowa c^2



Rys. 27.

(rys. 27) niechaj będzie utworem dwóch jednokreś-
 nych pęków: $P_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$

Pracownikowi $S_1 = P_1 P_2$ uważanemu za element pęku

(P_2) odpowiada jeden ściśle oznaczony promień

S_2 w pęku (P_2) . Wierzchołek pęku (P_2) jako pkt. $P_2 = S_1 S_2$ przecięcia się homologicznych elementów s_1 i s_2 , jest punktem stożkowej C^2 . Podobnie i wierzchołek P_1 pęku (P_1) leży również na tej krzywej, gdyż $P_1 = u_1 u_2$ jest punktem przecięcia się odpowiadających sobie promieni $u_2 = P_1 P_2$ i u_1 . Niechaj pkt. A , poruszając się w sposób ciągły po stożkowej C^2 , zajmuje kolejne położenia $B, C, \dots$ i zbliża się nieograniczenie ku pktowi P_2 . Równocześnie promień $\alpha_1 = P_1 A$ obraca się około wierzchołka P_1 i dąży do granicznego położenia s_1 , a odpowiadający mu promień $\alpha_2 = P_2 A$ obraca się około wierzchołka P_2 , zajmując kolejne położenia $\beta_2, \gamma_2, \dots$ zdąża do promienia s_2 . Prosta s_2 nazywamy styczną krzywej C^2 w pktcie P_2 . Mówimy też, że stożkowa C^2 jest styczna w pktcie P_2 do prostej s_2 . Styczną s_2 uważać możemy tedy za położenie graniczne zmiennej siecznej $\alpha_2 = P_2 A$, obracającej się około P_2 , której drugi pkt. A przecięcia się ze stożkową C^2 , zajmując położenia $B, C, \dots$, zdąża do granicy P_2 . O stycznej s_2 mówimy, że tyczy ona dwa nieskończenie bliskie („sasiędnie”) pktty. stożkowej C^2 .

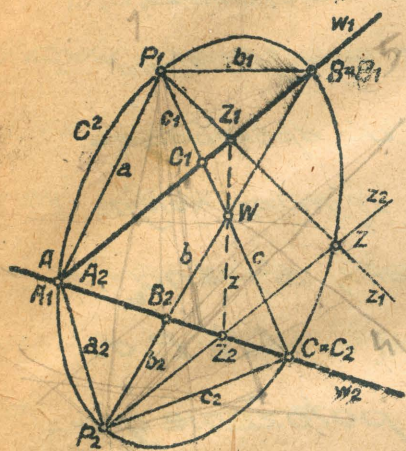
Z tych i dwoście z niemi związanych rozważań wynika tw. Steinera:

Krzywa rzędu drugiego, jako utwor dwóch rzutowych (ale nie perspektywicznych) pęków promieni, przechodzi przez ich wierzchołki i jest styczna w tych punktach do dwu prostych, które odpowiadają wspólnemu promieniowi (taczającemu wierzchołki) uważanych pęków. 17.V. 10. 25

Krzywa klasy drugiej, jako utwor dwóch rzutowych (ale nie perspektywicznych) szeregow okół, jest styczna do ich podstaw i styka się z niemi w dwóch pktach, które odpowiadają punktowi przecięcia się podstaw uważanych szeregów.

25. Twierdzenie Steinera. Niechaj dane będą (Rys. 28) dwa jednakowe pęki: $P_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \wedge P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$ których utworem jest stożkowa C^2 , przechodząca przez pktty $A = a_1 a_2$, $B = b_1 b_2$, $C = c_1 c_2$ oraz P_1 i P_2 .

Aby wyznaczyć dalsze pkty. tej krzywej, przeprowadzimy konstrukcję uzupełnienia (ust. 21) tych pęków, przy czem - jedynie dla uproszczenia tej konstrukcji - użyjemy do pomocy prostych: $w_1 = AB$ i $w_2 = AC$. Za po-



Rys. 28.

srednictwem tancucha ogniw perspe-
ktywicznych: $P_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} W_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \bar{\wedge}$
 $\bar{\wedge} W(a, b, c, \dots) \bar{\wedge} W_2(A_2, B_2, C_2, \dots) \bar{\wedge} P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$
wyznamy dowolny pkt. $Z = Z_1 Z_2$ stożka-
wej C^2 , przy czem pkty. $Z_1 = z_1 w_1$, W i $Z_2 = z_2 w_2$
leżą na tym samym promieniu z pomocni-
czego pęku (W).

W celu wykazaniu, że wierzchołki P_1 i P_2 przy-
jętych pęków nie są wcale punktami chara-
kterystycznymi stożkowej C^2 , uważamy pkty:

P_1, P_2, B, C, Z za pkty. stałe krzywej C^2 . Jeżeli pkt. A porusza się po stożka-
wej C^2 , to równocześnie proste $w_1 = BA$ i $w_2 = CA$ obracają się, odpowiednio
około pktów B i C , a pkty: $Z_1 = w_1 z_1$ i $Z_2 = w_2 z_2$ poruszają się, odpowiednio
po dwu statych prostych $z_1 = P_1 Z$ i $z_2 = P_2 Z$. Pkty: Z_1 i Z_2 utworzą dwa
perspektywiczne szeregi (z_1) i (z_2) , gdyż prosta $z = Z_1 Z_2$ stale prze-
chodzi przez wierzchołek $W = bc$ pęku (W). Rzucając szereg (z_1) z wierzchoł-
ka B , a szereg (z_2) z wierzchołka C , otrzymamy w rezultacie dwa pęki
jednokreślne $B(w_1, \dots)$ i $C(w_2, \dots)$ jako ogniwa końcowe tancucha utwo-
rów perspektywicznych: $B(w_1, \dots) \bar{\wedge} z_1(Z_1, \dots) \bar{\wedge} W(z, \dots) \bar{\wedge} z_2(Z_2, \dots) \bar{\wedge} C(w_2, \dots)$
Stożkową C^2 uważać możemy tedy za utwór dwóch nulowych pęków pro-
mieni, których wierzchołkami są: zupełnie dowolne punkty B i C tej
krzywej. Homologiczne promienie tych pęków otrzymaliśmy w ten sposób, że
połączyliśmy poszczególne pkty. $A, \dots$ stożkowej C^2 ze statymi punktami B i C .

Uzyskaliśmy zatem bardzo ważne twierdzenie Steiner'a:

Rzucając pkty krzywej 2^{go}
rzędu (bez punktu podwójnego,

Przecinając poszczególne styczne
krzywej 2^{ej} klasy (bez stycznej podwójnej)

z dwóch dowolnych punktów tej krzywej - otrzymujemy dwa jednokresłne pęki promieni.

dwiema dowolnymi stycznymi tej krzywej - otrzymujemy dwa jednokresłne szeregi punktów.

Z tych i poprzednich (ust. 24) tw. Steinera wynika bezpośrednio, że:

Krzywa rzędu drugiego (bez p.w. podwójnego) posiada w każdym punkcie jedną i tylko jedną styczną. Krzywa klasy drugiej (bez stycznej podwójnej) posiada na każdej stycznej jeden i tylko jeden pkt. styczności.

26. Tw. Pascala i Brianchona. Uważajmy (rys. 28) sześć

pktów: $P_1, Z_1, P_2, B_2, A_2, C_2$ - tworzą sześć prostych wpisanych w krzywą

C^2 - wierzchołki sześciokąta, wpisanego w słózkową C^2 . Proste, łączące

parami wierzchołki sąsiednie nazywamy bokami tego wielokąta. Sześciokąt

(niezupetny!) posiada zatem sześć wierzchołków i sześć boków: $P_1Z_1, Z_1P_2, P_2B_2,$

B_2A_2, A_2C_2, C_2P_1 . Takie boki, jak: P_1Z_1 i B_2A_2, Z_1P_2 i A_2C_2, P_2B_2 i C_2P_1 nazywamy boka-

mi przeciwległymi. Z ust. 25 (por. rys. 28 str. 42) wynika bezpośrednio, że:

trzy pkty. Z_1, Z_2, W leżą na jednej prostej Z . Symbolicznie wypisać możemy

te związki za pomocą schematu:

P_1Z_1	BAC
P_1Z_1	$BA \dots Z_1$
Z_1P_2	$AC \dots Z_2$
P_2B_2	$CP_1 \dots W$

W ten sposób udowodniliśmy słynne twierdzenie Pa-

scala (odkryte przez 16 letniego młodzianca w r.

1639), a zarazem otrzymaliśmy dwaście odpowia-

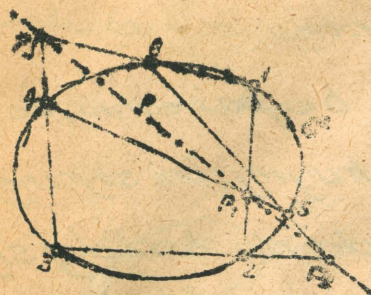
dające mu twierdzenie Brianchona (ogłosza-

ne dopiero w r. 1806) a mianowicie:

Sześciokąt wpisany w krzywą rzędu drugiego - którego wierzchołkami są dowolne pkty tej krzywej - posiada tę własność, że trzy pary boków przeciwległych przecinają się w trzech pktach jednej prostej (prostej Pascala).

Sześciobok opisany na krzywej klasy drugiej - którego bokami są dowolne styczne tej krzywej - posiada tę własność, że trzy pary wierzchołków przeciwległych wyznaczają trzy proste, przecinające się w jednym punkcie (punkcie Brianchona).

Niechaj dany będzie (rys. 29) sześciokąt 123456, wpisany w krzywą C^2 , a prosta Pascala p przechodzi przez punkty P_1, P_2, P_3 . Zaczynając od wierzchołka 1, możemy ów sześciokąt



Rys. 29.

123	456
12	45 ... P_1
23	56 ... P_2
34	61 ... P_3

ka 1, możemy sześciokąt

Pascala wypisać w 2ch

formach: 123456 i 165432;

Wychodząc z pktu. np. 3,

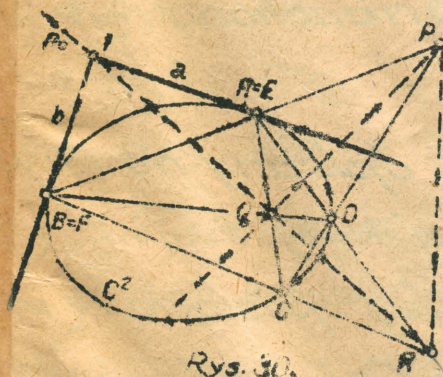
uzyskam znowu dwie formy: 345612 i 321654. Za-

czynając wypisywanie kolejno następujących po so-

bie wierzchołków uwzględnionego sześciokąta od poszczególnych jego wierzchołków, uzyskamy 12 form, oznaczających jeden i ten sam sześciokąt.

Zauważmy jednak, że sposób taczania tych sześciu okręgów jest zupełnie dowolny; możemy tedy wziąć pod uwagę np. sześciokąt 136254, dla którego wypiszemy znów 12 form i wyznaczymy nową prostą Pascala, przechodzącą przez pkty: 13, 25, 36, 54, 62, 41. Dla uwzględnionych sześciu stycznych wierzchołków otrzymamy tedy (uwzględniając wszystkie permutacje): $\frac{6!}{12} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{12} = 60$ różnych sześciokątów, wpisanych w stożkową C^2 , oraz 60 różnych prostych Pascala. Z rozważań dwójnych wynika, że: dla sześciu stycznych krzywej kl. 2^{ej} otrzymamy 60 sześcioboków, opisanych na tej krzywej, oraz 60 punktów Brianchona.

27 Konfiguracja Maca Laurina. Dla czworokąta zupełnego ABCD którego wierzchołkami (rys 30) są dowolne pkty krzywej rzędu 2^{go} C^2 ,



Rys. 30.

wyznamy (ust. 15) trójkąt przekątny PQR. Oznaczmy następnie przez a i b styczne, poprowadzone w pktach A wzgl. B do krzywej C^2 . Styczna $a = AE$ taczy 2 nieskończenie bliskie pkty P i E tej krzywej; styczna $b = BF$ przechodzi przez dwa "sąsiednie" pkty B i F tej krzywej. Aby zbadać własność pktu $1 = ab$, przecięcia się stycznych a i b

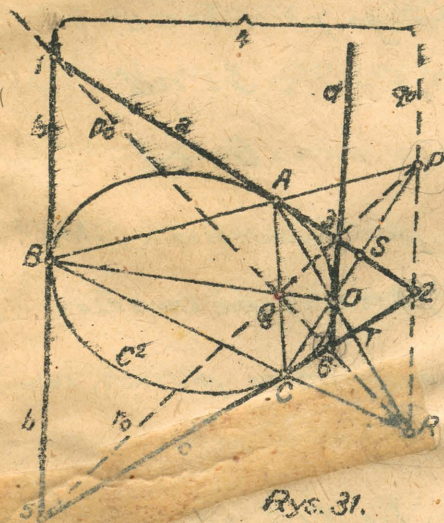
uwzględnimy sześciokąt AEDBFC wpisany w stożkową C^2 . Prosta Pascala p , przechodzi przez pkty R i Q jak to wynika ze schematu:

AED	BFC
$a = AE$	$b = BF \dots 1$
ED	$FC \dots R$
DB	$CH \dots u$

Natomiast styczne $a = AE$ i $b = BF$ przecinają się w pktcie. 1 na prostej Pascala p_0 . Z konstrukcji tej p_0 wynika bezpośrednia nast. twierdzenie:

Na przekątnej czworokąta zupełnego, wpisanego w krzywą rzędu $2^{\text{go}} C^2$, przecinają się dwie styczne, poprowadzone do C^2 w takich wierzchołkach tego czworokąta, które leżą na jednym boku z pozostałym trzecim punktem przekątnym.

Oznaczmy przez $2 = aq_0$ i $3 = ar_0$ punkty przecięcia się stycznej a (rys. 31) z przekątnymi q_0 i r_0 uważanego czworokąta $ABCD$, to - na mocy poprzedniego twierdzenia - proste $c = 2C$ i $d = 3D$ (tęzące odpowiednio pkty. 2 i 3 z wierzchołkami C i D) są stycznymi w pktach C i D do krzywej C^2 . Uwzględniając po-



Rys. 31.

wyżej wystawione twierdzenie, zauważymy z łatwością, że pkty: $4 = bd$, $5 = bc$ i $6 = cd$ leżą również na przekątnych naszego czworokąta zupełnego.

Styczne a, b, c, d , tworzą czworobok zupełny, opisany na krzywej C^2 , którego trójbokiem przekątnym (por. ust. 15 i rys. 31) jest trójbok $p_0 q_0 r_0$. Uzyskaliśmy w ten sposób następujące twierdzenie: Czworokąt zupełny, wpi-

sany w krzywą rzędu 2^{go} i czworobok zupełny, opisany na tej krzywej, którego bokami są styczne w wierzchołkach czworokąta, posiadają wspólny trójkąt przekątny (konfiguracja Mac Laurina).

28. Identyczność krzywej 2^{go} rzędu z krzywą klasy 2^{ej} . Na krzywej rzędu drugiego C^2 (rys. 31) niechaj dane będą trzy stałe pkty A, C i D , oraz dwie stałe styczne a i c . W dowolnym (zmiennym) punkcie B

poprowadzimy styczną b do krzywej C^2 ; dla czworokąta zupełnego $ABCD$ wyznaczmy trójkąt przekątny PQR .

Grupa harmoniczna (ust. 15) promieni: PA, PD, p_0 i q_0 przecinamy styczną a w czwor. ce harmonicznej pktów: $A, S, 3, 2$, o stosunku $(AS32) = -1$. Z naszego założenia wynika, że pkty: $A, S = a \cdot CD$ i $2 = ac$ są stałe, przeto i czwarty element 3 tej grupy harmonicznej (ust. 9) musi być pkt. statym. W zupełnie analogiczny sposób wykazać możemy - przecinając styczną c grupę harmoniczną RA, RC, p_0, q_0 - że pkt. 6 jest również elementem statym.

Niechaj zmienny pkt. B porusza się po krzywej rzędu 2^{go} C^2 , to równocześnie - dla zmiennego czworokąta zupełnego $ABCD$ - jego pkt. przekątny Q zmieniać będzie swe położenie po stałej prostej AC , a dwa dalsze pkty. przekątne P i R poruszać się będą odpowiednio po statych prostych CD i AD w ten sposób, że: przekątna $q_0 = PR$ obracać się będzie około stałego pktu. $2 = ac$

"	p_0	"	"	"	"	"	"	"	$3 = ad$
"	p_0	"	"	"	"	"	"	"	$6 = cd$

Równocześnie (ust. 25) jedna i tylko jedna styczna δ , poprowadzona w pkt. zmiennym B do krzywej C^2 , poruszać się będzie w płaszczyźnie uważanej krzywej i przecinać będzie stałe styczne a i c odpowiednio w pktach. ruchomych $1 = ab$ i $5 = bc$.

Z łatwością zauważymy, że szeregi pktów $a(1, \dots)$ i $c(5, \dots)$, jako końcowe ogniwa łańcucha utworów perspektywicznych: $a(1, \dots) \bar{\wedge} 6(p_0, \dots) \bar{\wedge} AD(R, \dots) \bar{\wedge} 2(q_0, \dots) \bar{\wedge} CD(P, \dots) \bar{\wedge} 3(r_0, \dots) \bar{\wedge} c(5, \dots)$ są (ust. 6) szeregami jednakresłnymi. Dowiedliśmy zatem prawdziwości dwóch, odpowiadających sobie dwójście twierdzeń fundamentalnych dla stożkowych, a mianowicie:

Styczne w poszczególnych pktach. krzywej rzędu 2^{go}, przecięte dwiema dowolnymi stycznymi tej krzywej, wyznaczają	Punkty styczności, poszczególnych stycznych krzywej klasy 2^{go}, rzucone z dwóch dowolnych pktów. tej krzywej, wyznaczają dwa rzu-
--	--

ją dwa rzutowe szeregi pktów. | łowe pęki promieni.

Niechaj pkt. B porusza się (rys. 31 str. 45) w sposób ciągły po krzywej rzędu 2^{90} . Ponieważ krzywa C^2 w każdym pktcie posiada (ust. 25) jedną ściśle oznaczoną styczną, przeto równocześnie z pktm. B porusza się w sposób ciągły styczna t i obwodzi krzywą C^2 . Styczna t jednak - wedle twierdzenia z lewej strony - łączy homologiczne pktty. szeregów jednokreślnych $a(1, \dots) \wedge C(5, \dots)$ i powtórzy (ust. 23) krzywą klasy $2^9 C^2$. Wnosimy stąd, że:

Krzywa rzędu 2^{90} (bez pktu. podwójnego) jest identyczna z krzywą klasy 2^9 .	Krzywa klasy 2^9 (bez stycznej podwójnej) jest identyczna z krzywą rzędu 2^{90} .
---	---

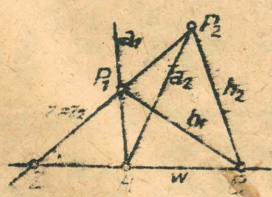
Przez stożkową lub krzywą 2^{90} stopnia rozumieć zawsze będziemy krzywą 2^{90} rzędu i 2^9 klasy.

29. Utwory perspektywiczne pęków i szeregów.

Kof. Dotychczas omawialiśmy własności stożkowej, uważanej za utwór dwóch jednokreślnych pęków promieni wzgl. szeregów pktów. Teraz zbadajmy własności utworów dwóch perspektywicznych pęków promieni i dwóch perspektywicznych szeregów punktów.

Homologiczne promienie dwóch pęków perspektywicznych (P_1) i (P_2) przecinają się w pktach. szeregu $W(A, B, C, \dots)$

Każdy pkt., leżący na elemencie zjednoczonym $Z_1 = Z_2 = p_1 p_2$ tych pęków



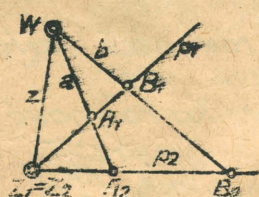
Rys. 32.

rys 32) uważać możemy za punkt przecięcia się odpowiadających sobie promieni z_1 i z_2 . ~~3 L-em~~

Utworem dwóch perspektywicznych

Homologiczne pktty. dwóch szeregów perspektywicznych (p_1) i (p_2) wyznaczają promienie pęku $W(a, b, c, \dots)$ Każda prosta, przechodząca przez pkt. zjednoczony tych szeregów

$Z_1 = Z_2 = p_1 p_2$, uważać możemy (rys. 33) za promień, łą-



Rys. 33.

czący odpowiadające sobie pktty. Z_1 i Z_2 .

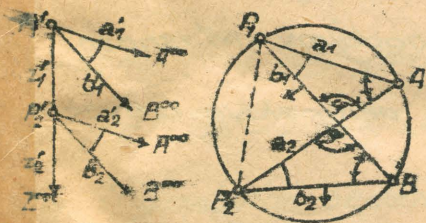
A zatem:

Utworem dwóch perspektywicznych szeregów pktów. jest

wiecznych pęków promieni jest krzywa rzędu 2^{go} z jednym pktm. podwójnym, która rozpada się na 2 proste: promieni zjednoczony P_1P_2 i podstawę W szeregu pktów. (W).

Punkt przecięcia się prostych W i P_1P_2 jest pktm. podwójnym.

Pszczególne pkty. niewłaściwego szeregu $l^{\infty}(A, B, C, \dots)$ rzucimy (rys. 34) z dwóch dowolnych pktów. P_1' i P_2' , to otrzymamy dwa perspektywiczne pęki promieni: $P_1'(a_1', b_1', c_1', \dots) \bar{\wedge} P_2'(a_2', b_2', c_2', \dots)$. Ponieważ homologiczne elementy tych pęków są równoległe: $a_1' \parallel a_2'; b_1' \parallel b_2'; c_1' \parallel c_2'; \dots$ przeto występuje równość kątów: $\overline{a_1'b_1'} = \overline{a_2'b_2'}; \overline{a_1'c_1'} = \overline{a_2'c_2'}, \dots \overline{b_1'c_1'} = \overline{b_2'c_2'}, \dots$ co pociąga za sobą przystawanie pęków: $(P_1') \cong (P_2')$. Uważając te pęki



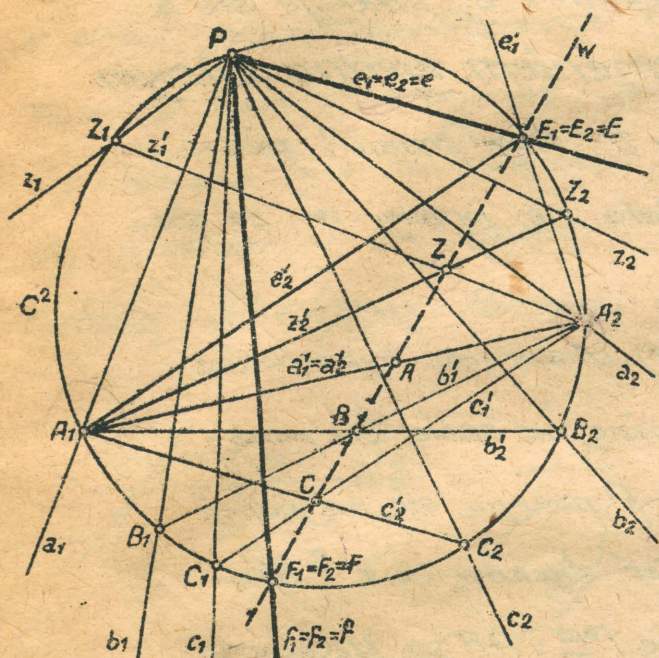
Rys. 34

za utwory sztywne, obróćmy je około wierzchołków P_1' i P_2' o różne kąty, a następnie przesunimy je tak, aż wierzchołki ich zajmą nowe położenia P_1 i P_2 . - Skonstruowane w ten sposób dwa przystające pęki promieni:

$(a_1, b_1, c_1, \dots)$ i $P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$ o zgodnym kierunku obrotu są (por. ust. 22) tworami jednokreślnymi i utworzą (ust. 23, 24) krzywą C^2 , przechodzącą przez pkty $P_1, P_2, A = a_1a_2, B = b_1b_2, \dots$. Z równości kątów $\overline{a_1b_1} = \overline{a_2b_2}$ oraz kątów wierzchołkowych φ (patrz. rys. 34) wynika równość kątów obwodowych: $\angle P_1AP_2 = \angle P_1BP_2$, wspierających się na cięciwie P_1P_2 . Krzywa C^2 jest więc kołem. Wykazaliśmy zatem, że: **Koło, jako utwor dwóch rutowych i przystających (o zgodnym kierunku obrotu) pęków promieni jest krzywą rzędu drugiego.**

30. Konstrukcja Steiner'a. Zadanie. Omówić teraz możemy

kwesję uzupełnienia dwóch jednokreślnych pęków promieni: $P(a_1, a_2, c_1, \dots) \bar{\wedge} \bar{\wedge} P(a_2, b_2, c_2, \dots)$ o wspólnym wierzchołku P (por. ust. 17) i przeprowadzić konstrukcję Steinera. Przez wierzchołek P poprowadzimy dowolną stożkową C^2 .



Rys. 35.

na rys. 35. użyta koto w celu uproszczenia konstrukcji i wyznaczmy pkty.

$A_1, B_1, C_1, \dots, A_2, B_2, C_2, \dots$ przecięcia się tej stożkowej (por. ust. 23) z poszczególnymi promieniami uważanych pęków współśrodkowych. Elementy $A_1, B_1, C_1, \dots$ rzucimy z pktu np. A_2 , a pkty $A_2, B_2, C_2, \dots$ rzucimy z wierzchołka A_1 , to (ust. 25) otrzymamy 2 pęki promieni, jednokreślne względem danych pęków, a mianowicie:

$$P(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} P(a_2, b_2, c_2, \dots) \\ A_2(a'_1, b'_1, c'_1, \dots) \bar{\wedge} A_1(a'_2, b'_2, c'_2, \dots)$$

Z rozważań ust. 7 wynika, że pęki promieni $(A_2), (A_1)$ jako końcowe ogniwa funicucha utworów rzutowych, są jednokreślne. Ponieważ nadto pęki te posiadają promień zjednoczony $A_1 A_2 = a'_1 = a'_2$, więc (ust. 19) są utworami perspektywicznymi. Promienie homologiczne pęków: $(A_2) \bar{\wedge} (A_1)$ przecinają się zatem w pktach szeregu $w(A, B, C, \dots)$; prosta w przechodzi przez pkty $B = b'_1 b'_2$ i $C = c'_1 c'_2$. Korzystając ze schematu: $P(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} P(a_2, b_2, c_2, \dots)$

$$A_2(a'_1, b'_1, c'_1, \dots) \bar{\wedge} A_1(a'_2, b'_2, c'_2, \dots) \\ \bar{\wedge} w(A, B, C, \dots) \bar{\wedge}$$

przeprowadzić możemy z łatwością konstrukcję uzupełnienia pęków o wspólnym wierzchołku P . Dowolny promień

z_1 pierwszego pęku $P(a_1, \dots)$ przecię stożkową C^2 w pkt. Z_1 . Promień $z'_1 = Z_1 A_2$ wyznaczy na podstawie w pkt. Z , który rzucony z wierzchołka A_1 daje prostą $z'_2 = Z A_1$, przecinającą stożkową C^2 w pkt. Z_2 . Promień $z_2 P = z_2$ pęku $P(a_2, b_2, c_2, \dots)$ jest szukany element i odpowiada danemu promieniowi z_1 . Podstawa w pomocniczego szeregu przecina stożkową C^2 w dwóch

punktach: E i F , które (por. ust. 23) mogą być a) rzeczywiste, różne od siebie lub nakrywające się $E=F$, wzgl. b) urojone.

Jeżeli przeprowadzimy dla promienia $PE = e_1$ tę samą konstrukcję, co poprzednio dla elementu z_1 , to homologiczny promień e_2 nakryje się z prostą e_1 . Promień PE jest zatem (ust. 17) elementem zjednoczonym pęków jednokreslnych o wspólnym wierzchołku P ; drugi promień zjednoczony PF przechodzi przez drugi pkt. F przecięcia się prostej w ze stożkową C^2 .

Na rys. 35 przyjęte pęki o wierzchołku P są (ust. 17) utworami hyperbolicznymi, gdyż elementy zjednoczone są rzeczywiste i różne od siebie. Dla parabolicznych pęków promienie zjednoczone $PE = PF = e = f$ nakryją się na jednej prostej, co jest wówczas możliwe, gdy prosta w jest styczną do C^2 . Wreszcie dla eliptycznych pęków - promienie zjednoczone PE i PF są urojone co jest możliwe wówczas, gdy prosta w nie przecina stożkowej C^2 w pktach rzeczywistych. O takiej prostej powiadamy (por. ust. 23) że w „przecina stożkową C^2 w dwóch pktach urojonych E i F ”

Zadanie: Na prostej p dane są trzy pary homologicznych pktów: $A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2$, dwóch jednokreslnych szeregów: $p(A_1, B_1, C_1, \dots) \wedge p(A_2, B_2, C_2, \dots)$ uzupełnić te szeregi i wyznaczyć pkt. zjednoczone.

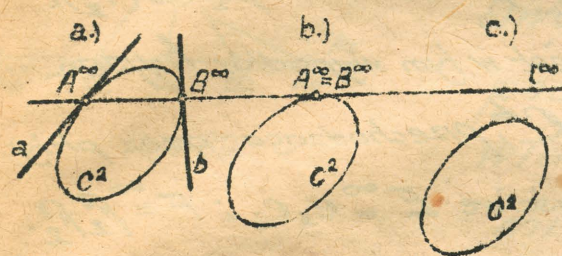
Rozwiązanie 1: Z dowolnego pktu P , nie leżącego na p , rzucimy uwzględniane szeregi, a dla otrzymanych rzutowych pęków o wspólnym wierzchołku P , przeprowadzimy powyżej podaną konstrukcję.

Rozwiązanie 2: Konstrukcję przeprowadzić bezpośrednio, stosując zasadę biegunowej dwoistości do podanej konstrukcji Steinera. Do pomocy użyć należy stożkowej C^2 stycznej w dowolnym punkcie do danej podstawy p tych szeregów.

31. Podział stożkowych. W dotychczasowych rozważaniach poznaliśmy sposoby rzutowego tworzenia i zasadnicze własności

stożkowych. Zajmiemy się teraz podziałem tych krzywych. Każda prosta, leżąca na płaszczyźnie tej krzywej, przecina stożkową C^2 w dwóch pktach: rzeczywistych lub urojonych. Prosta niewłaściwa l^∞ przecina stożkową C^2 również w dwóch pktach niewłaściwych A^∞, B^∞ , które mogą być: 1°) rzeczywiste i różne od siebie, 2°) rzeczywiste i schodzące się w jednym pktcie $A^\infty = B^\infty$, 3°) urojone.

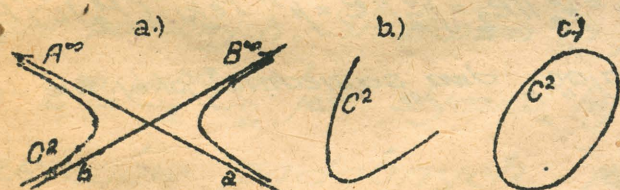
Symboliczny rys. 36^{2a} naznacza zachowanie się stożkowej C^2 względem prostej niewłaściwej l^∞ . Krzywą C^2 nazywamy w przypadku: 1°) hyperbolą, 2°) parabolą, 3°) elipsą. Ponieważ w każdym pktcie stożkowej C^2 poprowadzić



Rys. 36 a-c.

można (ust. 25) jędną, i tylko jędną, styczną. Jeżeli hyperbola (rys. 36 i 37a) posiada w pktach niewłaściwych A^∞, B^∞ dwie rzeczywiste styczne a i b zwane asymptotami. Parabola (rys. 36 i 37b) jest sty-

czną w pktcie $A^\infty = B^\infty$ do prostej l^∞ . Elipsa (rys. 36 i 37c) posiada wyłącznie tylko pkt. własciwe (leżące w skończoności). Elipsę określić możemy też



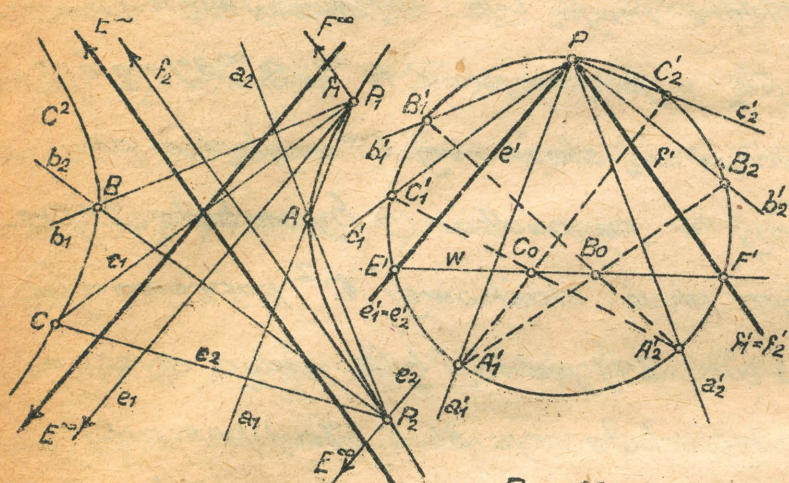
Rys. 37 a-c.

jako stożkowa, którą przecina prosta niewłaściwa l^∞ w dwóch pktach urojonych.

Elipsa posiada tedy dwie asymptoty urojone. Szczególnym przypadkiem elipsy jest koło.

32. Badanie utworu pęków izotowych. Obiętny dwa jędnokreslne pęki promieni (P_1) i (P_2) , których rzutowość (rys 38) wyznaczona jest trzema parami homologicznych elementów: $a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2$. Utworem tych pęków jest stożkowa C^2 , przechodząca przez pkt. $P_1 P_2$, $A = a_1 a_2$, $B = b_1 b_2$, $C = c_1 c_2$. Zbadajmy warunki, jakie muszą być spełnione, aby utworem tych pęków była: elipsa, parabola lub hyperbola. W tym celu poprowadźmy przez dowolny pkt. P proste, równoległe do poszczególnych promieni pęków (P_1) i (P_2) a mianowicie: $a'_1 \parallel a_1, b'_1 \parallel b_1, c'_1 \parallel c_1$ oraz $a'_2 \parallel a_2, b'_2 \parallel b_2, c'_2 \parallel c_2$. Wówczas (por. ust. 29) otrzymamy następujące zależności:

$P_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$ Do otrzymanych w ten sposób dwóch
 $\bar{\wedge}$ $\bar{\wedge}$
 $P(a'_1, b'_1, c'_1, \dots) \bar{\wedge} P(a'_2, b'_2, c'_2, \dots)$ rzutowych wiązków promieni o wspól-
nym wierzchołku P zastosujemy (ust. 30) konstrukcję Steiner'a i wyznaczy-



Rys. 38.

my elementy zjednoczone: $e'_1 = e'_2 = e'$
 $f'_1 = f'_2 = f'$ tych wiązków. Elementom tym odpowiadają w wiązkach (P_1) i (P_2) promienie e_1, e_2 i f_1, f_2 , przy czym: $e_1 \parallel e_2 \parallel e'$ i $f_1 \parallel f_2 \parallel f'$. Utworem wiązków (P_1) i (P_2) jest w tym wypadku **hyperbola** C^2 , przechodząca przez pkty. niewłaściwe $E^\infty = e_1 e_2$ i $F^\infty = f_1 f_2$.

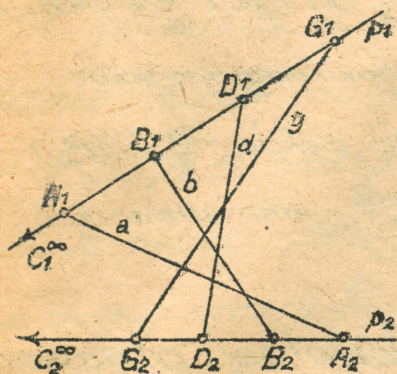
Uwaga: W celu wyznaczenia asymptot tej hyperboli, porównaj ostatnie zadanie ust. 35. Jeżeli promienie zjednoczone e' i f' współwierzchołkowych wiązków (P) nakryją się na jednej prostej, to również nakryją się promienie e_1 i f_1 wiązki (P_1) oraz promienie e_2 i f_2 wiązki (P_2) , przy czym: $e_1 = f_1 \parallel e_2 = f_2 \parallel e' = f'$. Wiązki (P_1) i (P_2) utworzą w tym wypadku **parabolę**, posiadającą dwa „sąsiednie” pkty. niewłaściwe $E^\infty = F^\infty$.

Jeżeli wiązki o wspólnym wierzchołku P posiadają dwa urojone promienie zjednoczone, to rzutowe wiązki (P_1) i (P_2) nie posiadają żadnej rzeczywistej pary równoległych promieni homologicznych i utworzą **elipsę**. A zatem:

Dwa jednakowe wiązki promieni utworzą hyperbolę, parabolę, lub elipsę, zależnie od tego, czy wiązki te posiadają dwie, jedną, wzgl. nie posiadają żadnej pary homologicznych, promieni równoległych.

33. Szeregi podobne. Parabola. Cwiczenie. Przyjmijmy dwa rzutowe szeregi pktów. (p_1) i (p_2) - (rys. 39 na str. 53) których jednakowość wyznaczona jest (ust. 20) przez trzy pary homologicznych elementów: A_1, A_2 ; B_1, B_2 ; C_1, C_2 . Z tw. Pappusa (ust. 11.) wynika równość sto-

sunków: $(A_1 B_1 C_1^\infty D_1) = (A_2 B_2 C_2^\infty D_2)$, czyli: $\frac{\overline{A_1 C_1^\infty}}{\overline{B_1 C_1^\infty}} : \frac{\overline{A_1 D_1}}{\overline{B_1 D_1}} = \frac{\overline{A_2 C_2^\infty}}{\overline{B_2 C_2^\infty}} : \frac{\overline{A_2 D_2}}{\overline{B_2 D_2}}$ Ponieważ (ust. 8) $\frac{\overline{A_1 C_1^\infty}}{\overline{B_1 C_1^\infty}} = +1$, $\frac{\overline{A_2 C_2^\infty}}{\overline{B_2 C_2^\infty}} = +1$, przeto: $\frac{\overline{A_1 D_1}}{\overline{B_1 D_1}} = \frac{\overline{A_2 D_2}}{\overline{B_2 D_2}}$ lub stosunek odcinków: $\frac{\overline{A_1 D_1}}{\overline{A_2 D_2}} = \frac{\overline{B_1 D_1}}{\overline{B_2 D_2}} = \dots = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{A_2 B_2}}$ zawartych między parami homologicznych pktów tych szeregów, jest ilością stałą. Korzystając z tej własności, możemy uzupełnić



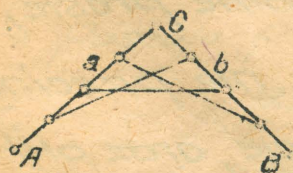
Rys. 39.

uważane szeregi w sposób bardzo łatwy; wystarczy bowiem odmierzyć odcinki $\overline{A_1 B_1} = \overline{B_1 D_1} = \overline{D_1 G_1} = \dots$ na prostej p_1 a odcinki $\overline{A_2 B_2} = \overline{B_2 D_2} = \overline{D_2 G_2} = \dots$ na podstawie p_2 .

Dwa jednokresłne szeregi nazywamy podobnymi wówczas, jeżeli pkty. niewłaściwe ich podstaw są elementami homologicznymi.

Proste $a = A_1 A_2$, $b = B_1 B_2$, $c^\infty = C_1^\infty C_2^\infty$, $d = D_1 D_2 \dots$, łączące pary odpowiadających sobie pktów. Szeregów (p_1) i (p_2) obwodzi (ust. 23) linję krzywą 2g klasy, która styka się również z podstawami p_1 i p_2 tych szeregów podobnych. Stożkowa ta jest parabola, gdyż prosta niewłaściwa $c^\infty = C_1^\infty C_2^\infty$ jest styczną tej krzywej. A zatem: **Utworem dwóch szeregów podobnych jest parabola.**

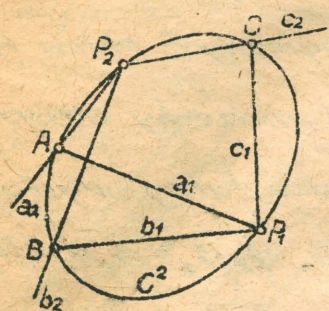
Cwiczenie: Parabola jest wyznaczona dwiema stycznymi a i b (rys. 39a) i ich punktami styczności A i B . Jeżeli $C = ab$, to dzieląc odcinki $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$ na równą ilość części i łącząc punkty podziału - otrzymamy styczne tej krzywej. Dlaczego? 17.12.24.



Rys. 39a.

34. Warunki, określające stożkowdę: Poszczególne pkty. A, B, C stożkowej C^2 (rys. 4a. str. 54) rzucimy z dwóch dowolnych punktów P_1 i P_2 tej krzywej, to (ust. 25) otrzymamy dwa jednokresłne pęki promieni: $P_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \wedge P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$. Jednokresłność tych utworów ustalona jest (ust. 20) przez trzy pary homologicznych promieni: a_1, a_2 i

$a_1, b_1; c_1, c_2$; przecinających się w pktach $A = a_1 a_2$, $B = b_1 b_2$, $C = c_1 c_2$.



Rys. 40.

Obróćmy przeciwnie pięć dowolnych pktów:

A, B, C, P_1, P_2 na płaszczyźnie i rzucimy np.

z pktów P_1 i P_2 trzy pozostałe pkty. Jeżeli pa-

ry promieni: $P_1 A; P_2 A; P_1 B; P_2 B; P_1 C; P_2 C$ uwa-

żać będziemy za elementy odpowiadające sobie,

to wyznaczana jest rzutowość pktów (P_1) i (P_2)

a temsamem i stożkowa C^2 , jako utwor tych

pktów. A zatem:

Pięć pktów. dowolnej płasz-
czyzny, z których żadne trzy
nie leżą na jednej prostej, wy-
znacza jedną i tylko jedną

stożkową, przechodzącą przez nie. dla której owe proste są st stycznymi:

Niechaj pkt. A porusza się po stożkowej C^2 i dąży ku jej wierzchołkowi P_2 ,
to w granicy promieniowi $P_1 P_2 = a_1$ odpowie (ust. 24) styczna a_2 w pktcie P_2
do stożkowej. Podobnie gdy pkt. B dąży do P_1 , to promieniowi $P_1 P_2 = b_2$ od-
powie styczna b_1 w wierzchołku P_1 ; możemy tedy powiedzieć, że:

Stożkową wyznaczają:

a) cztery dowolne pkty, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, oraz styczna w je-
dnym z nich, nie przechodząca przez żaden z pozosta-
łych danych punktów.

a) cztery dowolne proste, z któ-
rych żadne trzy nie przecinają się
w jednym punkcie, oraz pkt. stycz-
ności jednej z nich, nie leżący na
żadnej z pozostałych danych
prostych.

b) Trzy dowolne punkty, nie le-
żące na jednej prostej, oraz
dwie styczne w dwóch z tych
dwóch punktach styczności dwóch

b) Trzy dowolne styczne, nie prze-
chodzące przez jeden pkt. oraz
dwa punkty styczności dwóch

punktów, nie przechodzące przez żaden z pozostałych danych pktów.

z tych stycznych, nie leżące na żadnej z pozostałych prostych danych.

Uwaga: W ust. 50 wykazemy, że trzy dowolne pkty. rzeczywiste i dwa urojone (t. zw. kotowe) wyznaczają koto.

35. Zadania i ćwiczenia o stożkowych.

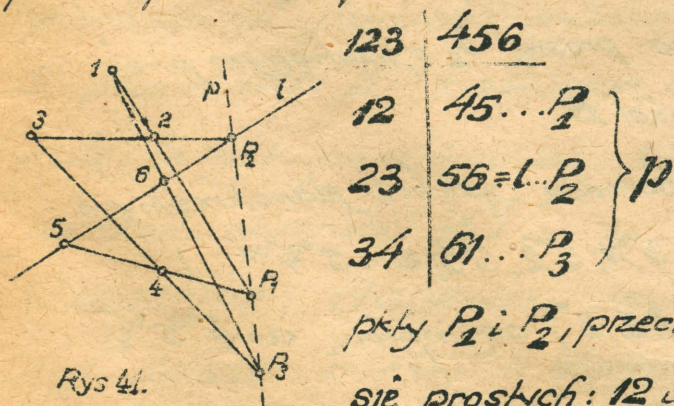
Zadanie: Mając danych pięć punktów: 1, 2, 3, 4, 5 stożkowej C^2 (rys. 41), wyznaczyć pkt. 6, przecięcia się tej samej z daną prostą L , przechodzącą przez pkt. 5.

Zadanie: Mając danych pięć stycznych: I, II, III, IV i V stożkowej C^2 (rys. 42), wyznaczyć styczną VI tej samej, przechodzącą przez dany pkt. L, leżący na stycznej V.

Rozwiązanie: Uważamy pkty. 5 i 4 za wierzchołki jednakrębnych promieni 5 (51, 52, 53, ...) i 4 (41, 42, 43, ...) to promieniowi l pęku promieni (5) odpowiada jeden ściśle oznaczony promień n pęku (4), który przecięnie prostą L w szukany pkt. 6 = nl .

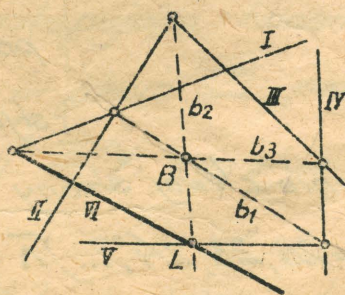
O wiele szybsze rozwiązanie uzyskamy przy pomocy tw. Pascala, wzgl. Brianchona (ust. 26), uważając:

dane pkty. i szukany element 6 za wierzchołki sześciokąta, wpisanego w stożkową C^2 . Z podanego schematu wynika, że prosta Pascala p przechodzi przez punkt Brianchona B jest



123	456
12	45... P_1
23	56 = L ... P_2
34	61... P_3

pkt. P_1 i P_2 , przecięcia się prostych: 12 i 45



I II III	IV V VI
I II	IV V... b_1
II III	V VI = L ... b_2
III IV	VI I... b_3

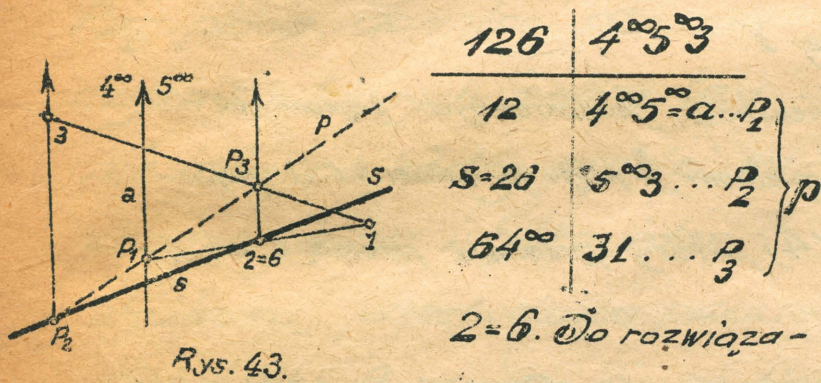
pkt. przecięcia się prostych b_1 i b_2 , ta-

wzgl. 23 i 56 = L . Przez pkt. P_3 przecięcia się stycznych pkt. I II i IV V, wzgl. II III i V VI = L .

34 i p, przejść musi prosta 16; pkt. przecięcia się, l z prostą 1P₃ jest zatem żądanym pktm. 6.

Zadanie: Hyperbola C^2 wyznaczona jest pktami 1, 2, 3 i asymptotą a; skonstruować styczną S w pktcie. 2 do tej krzywej.

Rozwiązanie: Uważajmy asymptotę $a = 4^\infty 5^\infty$ za prostą, tangentą pkty sąsiednie 4^∞ i 5^∞ , a styczną $s = 26$ za prostą, przechodzącą przez pkty sąsiednie



Rys. 43.

126	4 [∞] 5 [∞] 3
12	4 [∞] 5 [∞] = a...P ₁
s=26	5 [∞] 3...P ₂
64 [∞]	31...P ₃

2=6. Do rozwiązania zadania użyjemy

my takiego sześciokąta 1264[∞]5[∞]3, którego wierzchołkami, obok siebie wypisanymi są pkty: 2=6 i 4[∞]=5[∞]. Prosta Pascala $p = P_1P_3$ przecina w pktcie. P₂ z prostą 5[∞]3 || a. Szukana styczna s przechodzi przez pkty: P₂ i 2=6.

Cwiczenie: Rozwiązać zadanie z lewej strony zapomocą dwóch jednokreslinowych promieni: 2(21, s=26, 23, 24, ...) i 5[∞](5[∞]1, 5[∞]2, 5[∞]3, a=5[∞]4, ...)

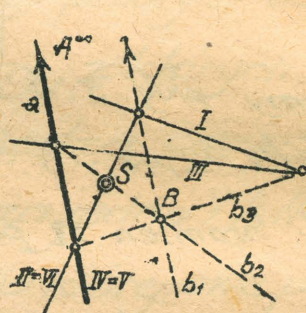
Cwiczenie: Hyperbola C^2 wyznaczona jest pktami: 1, 2, 3; asymptotą $a = 4^\infty 5^\infty$; konstruować drugą asymptotę $b = 3^\infty 6^\infty$.

Cwiczenie: Dane są dwie styczne: s_1 i s_2 , ich pkty styczności 1, 2, oraz trzeci

Na prostej b_3 , wyznaczonej pktami: III IV i B, leżeć musi pkt. IV. Prosta, tangentą L z pktm 1b₃ jest zatem żądaną styczną VI.

Zadanie: Hyperbola C^2 wyznaczona jest stycznymi I II III i asymptotą a; skonstruować pkt. styczności stycznej II z tą krzywą.

Rozwiązanie: Uważajmy punkt niewłaściwy A^∞ przecięcia się dwu sąsiednich stycznych IV i V nakrywających się z prostą a. Punkt S niechaj będzie



Rys. 44.

III IV	IV V III
III	IV V = A...b ₂
II VI = S	V III...b ₂
II IV	III I...b ₃

pktm. przecięcia się dwu sąsiednich stycznych

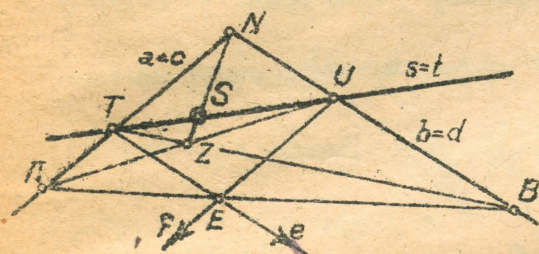
II=VI. Do rozwiązania zadania użyjemy sześcioboku takiego, którego bokami obok siebie wypisanymi są styczne: II=VI i IV=V. Pkt. Brianchona = b₁b₃ = B i pkt. V III wyznaczają prostą b₂. Styczna II=VI przecina prostą b₂ w szukanym pktcie styczności S.

punkt. 3 stożkowej C^2 ; konstruować dalsze punkty i styczne tej krzywej: a) przy pomocy tw. Pascala, b) przy pomocy dwóch rzutowych pęków promieni.

Cwiczenie: Dane są trzy styczne i pkty styczności dwu z nich; dla stożkowej, określonej tymi elementami, wyznaczyć jej dalsze styczne (Brianchon) i pkty. styczności.

Cwiczenie: Dane są cztery styczne paraboli; wyznaczyć dalsze styczne i pkty. styczności tej paraboli przy pomocy: a) tw. Brianchona b) dwóch jednokreślnych szeregów pktów.

Zadanie: Parabola wyznaczona jest (rys. 44a) przez dwie styczne a i b i ich pkty. styczności A i B . Z pktu. T prostej a poprowadzić styczną s do tej paraboli i konstruować pkt. styczności S tej stycznej.



Rys. 44a.

Oznaczmy przez l^∞ styczną niewłaściwą

paraboli i uważajmy pkty. styczności A wzgl. B jako pkty. przecięcia się „sąsiednich” stycznych $a=c$ wzgl. $b=d$. Poprowadzimy następnie z pktu.

T prostą $e \parallel b$, a z pktu. $E = e \cap b$, prostą $f \parallel a$

i wyznaczmy pkt. $U = f \cap b$. Prosta $s = TU$ jest szukana styczna (Konstrukcja wypływa z tw. Brianchona, zastosowanego do sześcioboku $acldbs$, opisanego na paraboli.)

Niechaj t będzie styczna „sąsiednią” względem s , to z sześcioboku $acstbd$ opisanego na paraboli, wynika następująca konstrukcja pktu. styczności S : proste AU i BT przecinają się w pktcie Z , proste a i b w pktcie $N = ab$, to pkt. przecięcia się prostej ZN ze styczną s jest szukany punktem styczności S .

Cwiczenie: Dane są asymptoty i jeden pkt. hyperboli; wyznaczyć dalsze punkty i styczne w nich (Pascal).

Zadanie: Wyznaczyć pkty. prze- | Zadanie: Wyznaczyć styczne z do-
cięcia się dowolnej prostej p ze | wolnego punktu P do stożkowej C^2

stożkową², określona przecięcia punkta- określonej przecięcia stycznymi a, b ,
mi A, B, C, D, E . c, d, e .

Rozwiązanie: Pełni promieni $A(AC, AD, AE, \dots) \cap B(BC, BD, BE, \dots)$, przecięcia prosta p i dla otrzymanych szeregów wyznaczyć (ust. 30) pty z'eanoczone.

Zadanie: Skonstruować asymptoty hiperboli, wyznaczonej punktami 1, 2, 3, 4 i 5.

Rozwiązanie: Dla pełni promieni $4(41, 42, 43, \dots) \cap 5(51, 52, 53, \dots)$ wyznaczymy (ust. 32) dwie pary homologicznych promieni równoległych: $e_1 \parallel e_2$, $f_1 \parallel f_2$. Następnie przez dwukrotnie zastosowanie tw. Pascala skonstruujemy asymptoty hiperboli, jako styczne w jej pktach niewłaściwych: $6^\infty = e_1 e_2$; $7^\infty = f_1 f_2$. Założymy, że z pktm 6^∞ schodzi się pkt. 8^∞ , a z pktm 7^∞ pkt. 9^∞ , to obie asymptoty: $a_1 = 6^\infty 8^\infty$, $a_2 = 7^\infty 9^\infty$ otrzymamy np. przy pomocy schematów: $12456^\infty 8^\infty$ i $13547^\infty 9^\infty$.

3.204

Rozdział V.

Rzutowość inwolucyjna utworów zasadniczych gatunku 1^{go}

36. Szeregi i pełni inwolucyjne. Wiadomo, że dla dwóch jednokreślnych szeregów pktów o wspólnej podstawie, wzgl. pełni promieni o wspólnym wierzchołku - zachodzi (ust. 17) następujący związek: Każdemu elementowi $\alpha_1 = \beta_2$, uważanemu za należący do pierwszego lub drugiego utworu, odpowiadają dwa różne od siebie elementy α_2 i β_1 . Wiadomo też, że (ust. 20), że pomiędzy dwoma utworami zasadniczymi gatunku 1^{go} istnieje zawsze jedna i tylko jedna rzutowość, w której każdemu elementowi jednego utworu odpowiadają trzy dane elementy utworu drugiego. Dla dwóch jednokreślnych szeregów: $p(A_1, B_1, C_1, \dots) \cap p(A_2, B_2, C_2, \dots)$ o



Rys. 45.

wspólnej podstawie p , ustalmy ich rzutowość przez takie trzy pary homologicznych pktów: A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 ; (rys. 45) aby elementowi $A_1 = B_2$ odpowiadał pkt. $A_2 = B_1$.

Homologiczne pkty. $A_1 = B_2$ i $A_2 = B_1$ tych szeregów odpowiadają sobie w sposób podwójny i tworzą parę zamienną, tzn. punktow $A_1 = B_2$ uważanemu za element pierwszego czy drugiego szeregu, odpowiada w drugim wzgl. pierwszym szeregu ten sam pkt. $A_2 = B_1$.

W celu zbadania własności uważanych szeregów o wspólnej podstawie p , obierzmy pkt. D_1 tak, aby zeszedł się z elementem C_2^2 , to wówczas na mocy tw. Pappusa (ust. 11) zachodzi relacja: $(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2)$, czyli $(A_1 B_1 C_1 D_1) = (B_1 A_1 D_1 D_2)$. Ponieważ jednak (ust. 13) stosunek $(B_1 A_1 D_1 D_2) = (A_1 B_1 D_2 D_1)$, przeto: $(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_1 B_1 D_2 D_1)$ lub: $\frac{A_1 C_1}{B_1 C_1} : \frac{A_1 D_1}{B_1 D_1} = \frac{A_1 D_2}{B_1 D_2} : \frac{A_1 D_1}{B_1 D_1}$. Z otrzymanych stosunków podziału $\frac{A_1 C_1}{B_1 C_1} = \frac{A_1 D_2}{B_1 D_2}$ wnosimy (ust. 8), że nakrywają się pkty: C_1 i D_2 . Przyjęcie tedy jednej pary zamiennych elementów homologicznych $A_1 = B_2$ i $A_2 = B_1$, pociąga za sobą wystąpienie i drugiej pary zamiennych $C_1 = D_2$ i $C_2 = D_1$ w uważanych szeregach rzutowych. Ponieważ jednak pkty. C_1 i C_2 są dowolną parą elementów homologicznych uważanych szeregów o wspólnej podstawie p , przeto dowiedliśmy prawdziwości następujących twierdzeń:

Jeżeli w dwóch jednokreślnych szeregach pktów o wspólnej podstawie jedna para homologicznych elementów jest zamienna, to wówczas wszystkie pary homologicznych pktów są zamienne. Jeżeli pomiędzy punktami dwóch rzutowych szeregów o wspólnej podstawie

Jeżeli w dwóch jednokreślnych pękach promieni o wspólnym wierzchołku jedna para homologicznych elementów jest zamienna, to wówczas wszystkie pary homologicznych promieni są zamienne. Jeżeli pomiędzy promieniami dwóch rzutowych pęków o wspólnym wierzchołku

faka

Zachodzi jednokreślność (por. ust. 6), dla której każda para homologicznych elementów odpowiada sobie w sposób podwójny, tworząc parę zamienną - to zależność tę zdefiniujemy jako: rzutowość (wzgl. jednokreślność) inwolucyjną, lub wprost jako izwolucję.

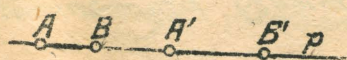
Dla dwóch homologicznych pktów. $A_1 = B_2$ i $A_2 = B_1$, odpowiadających sobie w sposób podwójny - wprowadzimy nowe oznaczenia: A i A' , to wówczas uwzględniane szeregi rzutowe wyrazimy symbolem: $p(A, A', C, C', \dots) \bar{\wedge} p(A', A, C', C, \dots)$ lub $p(AA', CC', \dots)$ wypisując obok siebie punkty, tworzące parę zamienną tych szeregów. Na podstawie p otrzymujemy zatem jeden szereg, złożony z nieskończenie wielu par pktów: $AA', CC', \dots$ tego rodzaju, że każdy element podstawy p należy do jednej i tylko jednej pary. Taki szereg pktów. na prostej p nazywać będziemy szeregiem inwolucyjnym.

Szereg inwolucyjny tworzą takie dwa rzutowe szeregi punktów o wspólnej podstawie, które posiadają jedną parę homologicznych elementów, odpowiadających sobie w sposób podwójny.

Pęk inwolucyjny tworzą takie dwa rzutowe pęki promieni o wspólnym wierzchołku, które posiadają jedną parę homologicznych elementów, odpowiadających sobie w sposób podwójny.

37. Elementy podwójne pęków i szeregów inwolucyjnych. Ustalenie jednokreślności inwolucyjnej.

Z rozważań poprzedniego ustępu wynika, że szereg inwolucyjny $p(AA', BB', \dots)$ jest szczególnym przykładem (rys. 46) dwóch jednokreślnych szeregów punktów o wspólnej podstawie p , a mianowicie: $p(A, A', B, \dots) \bar{\wedge} p(A', A, B', \dots)$



Rys. 46.

Do szeregu inwolucyjnego zastosować możemy tedy bezpośrednio twierdzenia (por. ust. 17) o pktach. zjednoczonych dwóch rzutowych szeregów, złączonych na wspólnej podstawie. Pkty. zjednoczone $E = E'$ i $F = F'$ szeregu inwolucyjnego nazywać będziemy punktami podwójnymi.

Z ust. 17 wynika, że:

Inwolucyjny szereg punktów posiada zawsze dwa pkty. podwójne. | Inwolucyjny pęk promieni posiada zawsze dwa promienie podwójne.

Szereg inwolucyjny oraz pęk inwolucyjny nazywamy: *hyperbolicznym*, *parabolicznym*, wzgl. *eliptycznym* zależnie od tego, czy dwa elementy podwójne tych utworów są: rzeczywiste i różne od siebie, rzeczywiste i nakrywające się, wzgl. urojone.

W ust. 17 wykazaliśmy, że dla dwóch jednokreślnych szeregów na podstawie p stosunek podwójnego podziału $(EFA, A_2) = c_0$ jest ilością stałą.

W naszym przypadku, dla szeregu inwolucyjnego otrzymamy: $(EFAA') = (EFA'A)$ czyli (ust. 14) stosunek $(EFAA') = -1$. A zatem:

W szeregu (wzgl. w pęku) inwolucyjnym hyperbolicznym dwa elementy podwójne tworzą z każdą parą elementów homologicznych grupę harmoniczną. Na podstawie tego twierdzenia szereg (wzgl. pęk) inwolucyjny hyperboliczny jest wyznaczony wówczas, skoro dane są elementy podwójne $E = E'$; $F = F'$; wystarczy bowiem do każdego pktu A wyznaczyć element A' z nim harmonicznie sprzężony w grupie $(EFAA') = -1$. Aby omówić ogólnie sprawę wyznaczenia dowolnego szeregu inwolucyjnego, zauważmy, że szereg $p(AA', BB', \dots)$ jest szczególnym przypadkiem (rys. 46.) dwóch jednokreślnych szeregów

$$p(A, A', B, \dots) \wedge p(A', A, B', \dots)$$

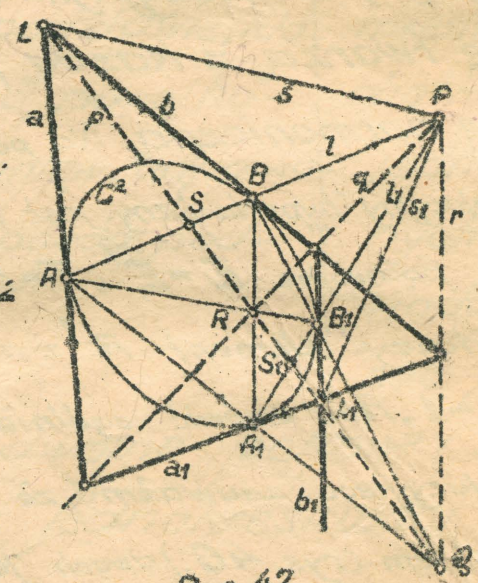
Ponieważ (ust. 20) rzutowość tych szeregów ustalają trzy pary homologicznych punktów: $A: A'$, $A': A$, $B: B'$ - o ile przynajmniej $A: A'$ są różnymi od siebie pktami, prostej p - przeto szereg inwolucyjny $p(AA', BB', \dots)$ wyznaczony jest przez dwie pary homologicznych pktów: $AA': BB'$. Uwzględniając nadto, że szereg inwolucyjny hyperboliczny wyznaczony jest również i wtedy, gdy dane są dwa pkty. podwójne, dochodzimy do następującego twierdzenia: W utworze zasadniczym gatunku 19a istnieje jedna i tylko jedna rzutowość inwolucyjna (in-

wolucja), do której należą dwie dane pary homologicznych elementów.

38. Biegunowa i biegun względem stożkowej.

Na stożkowej C^2 (rys. 47) obróźmy cztery dowolne pkty. A, B, A_1, B_1 i poprowadźmy w tych pktach styczne a, b, a_1, b_1 do krzywej C^2 . Następnie dla uważanego czworokąta zupełnego ABB_1A_1 wpisanego w stożkową C^2 , skonstruujmy (ust. 15) trójkąt przekątny PQR . Podobnie dla czworoboku zupełnego abb_1a_1 , opisanego na krzywej C^2 wyznaczmy trójbok przekątny pqr . Z ust. 27 wynika bezpośrednio, że trójkąt PQR identyczny jest z trójbokiem pqr . Przeprowadźmy teraz inną interpretację rys. 47, a mianowicie:

Przez dany pkt. P poprowadźmy dwie dowolne proste l i l_1 i wyznaczmy pkty: A, B, A_1 i B_1 , przecięcia się tych prostych ze stożkową C^2 . Dla czworokąta zupełnego ABB_1A_1 , wpisanego w stożkową C^2 , określić możemy wówczas jego przekątną p :



Rys. 47.

Na danej prostej p obróźmy dwa dowolne pkty. L i L_1 i poprowadźmy z tych pktów styczne: a, b, a_1 i b_1 do stożkowej C^2 . Dla czworoboku zupełnego aba_1b_1 , opisanego na stożkowej C^2 określić możemy

- | | |
|---|---|
| <p>1.^o jako prostą $p = RQ$, tającą dwa pozostałe wierzchołki R i Q trójkąta przekątnego PQR (uważanego czworokąta ABB_1A_1).</p> <p>2.^o jako prostą $p = LL_1$, przechodzącą przez pkt. $L = ab$ i $L_1 = a_1b_1$, przecięcia się stycznych a i b wzgl. a_1 i b_1 stożkowej C^2, poprowadzonych w wierzchołkach uważanego czworokąta.</p> <p>3.^o jako prostą $p = SS_1$, tającą pkty: S i S_1</p> | <p>wówczas jego pkt. przekątny P:</p> <p>1.^o jako punkt $P = rq$, przecięcia się pozostałych boków r i q trójboku przekątnego pqr (uważanego czworoboku abb_1a_1)</p> <p>2.^o jako pkt. $P = ll_1$, przecięcia się prostych $l = AB$ i $l_1 = A_1B_1$, tających pkty. styczności A i B, wzgl. A_1 i B_1 boków uważanego czworoboku ze</p> |
|---|---|

S_1 harmonicznie sprzężone (ust. 15) z pktm. stożkową C^2

P w grupach $(ABPS) = (a_1b_1ps_1) = -1$

3.º jako pkt. $P = ss_1$, przecięcia się pro-

Bardzo ważną będzie konstrukcja prostej p , niezależna od owego czworokąta zupełnego ABB_1A_1 . Przez dany pkt. P po-

stych s i s_1 , harmonicznie sprzężone (ust. 15) z prostą p w grupach: $(abps) = (a_1b_1ps_1) =$

prowadźmy dowolną prostą l , przecina-

-1 . Bardzo ważną będzie konstru-

jącą stożkową C^2 w pktach A i B . Nastę-

baku zupełnego aa_1b_1b . Na danej pro-

pnie wyznaczmy styczne a i b w owych

stych p objeźmy dowolny pkt. L i po-

pktach. do krzywej C^2 , to wówczas:

prowadźmy przez L dwie styczne a i

Prosta $p = LS$ przechodzi przez do stożkowej C^2 . Następnie wyzna-

pkt. $L = ab$, przecięcia się sty-

czmy pkt. styczności A i B owych stycz-

cznych a i b , oraz przez pkt. S , nych z krzywą C^2 , to wówczas: Punkt

harmonicznie sprzężony z da-

$P = ls$ jest pktm. przecięcia się

nym pktm. P w grupie $(ABPS = -1)$ prostej $l = AB$ z prostą s , har-

Ponieważ konstrukcja ta wcale nie zależy rmonicznie sprzężoną z daną

od prostej l_1 , przeto: każda prosta l_1 prze prostą P w grupie $(abps) = -1$.

cina stożkową C^2 w pktach. A_1 i B_1 , a

Ponieważ konstrukcja ta wcale nie za-

prostą p w pkt. S_1 , przyczem stale

leży od pkt. L_1 przeto: przez każdy pkt.

$(A_1B_1PS_1) = -1$. Prosta p nazywamy bie-

L_1 przechodzą dwie styczne a_1b_1 do sto-

gunową danego punktu P ze wzgl. na

żkowej C^2 , a przez P prostą s_1 , przy-

stożkową C^2 .

czem stale $(a_1b_1ps_1) = -1$. Pkt. P nazy-

P zatem:

wamy biegunem danej prostej p ze

Biegunowa p danego punktu

względem stożkowej C^2 . A zatem:

P względem stożkowej C^2 ,

Biegun P danej prostej p wzglę-

jest miejscem geometrycz-

dem stożkowej C^2 , jest miej-

scem punktów S , harmonicznie

scem geometrycznem promieni

sprzężonych z elementem P w gru-

scem geometrycznem promieni

pach $(ABPS) = -1$, przyczem A i

mentem p w grupach $(abps) = -1$

B są punktami przecięcia

przyczem a i b są stycznymi

się prostej PS z krzywą C^2 krzywej C^2 , przechodzącymi przez pkt. ps

39. Uzupełnienie pęku inwolucyjnego. Wyznaczenie promieni podwójnych. Zadanie. Po zdefiniowaniu i poznaniu własności biegunu i biegunowej dla słazkowej C^2 , rozwiązać możemy teraz kwestję konstrukcyjnego uzupełnienia pęku inwolucyjnego. - Przyjmijmy dowolny pęk inwolucyjny $P(a_1 a_2, b_1 b_2, \dots)$, którego inwolucja (jednokreśtność inwolucyjna) ustalona jest przez dwie pary homologicznych promieni:

a_1 i a_2 , b_1 i b_2 . Oznaczmy zamien-

ną parę promieni b_1 i b_2 przez c_1 i

c_2 , to pęk inwolucyjny (Puwagać mi-

zemy (rys. 48) za dwa rzutowe pęki:

$P(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} P(a_2, b_2, c_2, \dots)$ a wspól-

nym wierzchołku P . Aby uzupełnić te pę-

ki, przeprowadzimy konstrukcję Stei-

nera (ust. 30), korzystając z następu-

jącego schematu:

$P(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} P(a_2, b_2, c_2, \dots)$

$A_1(a'_1, b'_1, c'_1, \dots) \bar{\wedge} A_2(a'_2, b'_2, c'_2, \dots)$

$\bar{\wedge} W(A, B, C, \dots) \bar{\wedge}$

Dla dowolnego promienia x_1 pierwszego

pęku wyznaczmy pkt. $X = x'_1 x'_2$ na prostej w i promień homologiczny x_2 pę-

ku drugiego. Ponieważ otrzymana w ten sposób para promieni homologicznych x_1, x_2

pęku inwolucyjnego jest zmienną - przez to dla $x_1 = z_2$, promień z_2 nakryje się

z elementem $x_2 = z_1$. Dla pary homologicznych promieni z_1 i z_2 pęków o wspól-

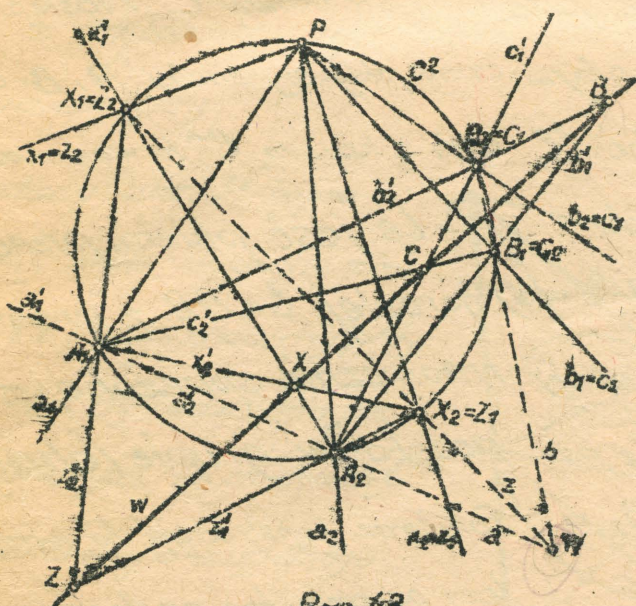
nym wierzchołku P zachodzi - wedle podanego schematu - ten związek, że pro-

mień $z'_2 = A_1 z_2$ i $z'_1 = A_2 z_2$ przecinają się w pkt. $Z = z'_1 z'_2$ na prostej w .

Przeprowadzimy teraz inną interpretację rys. 48. W tym celu weźmy pod uwa-

gę czworokąt zupełny $A_1 A_2 B_1 B_2$ wpisany w słazkową C^2 (na rys. koła)

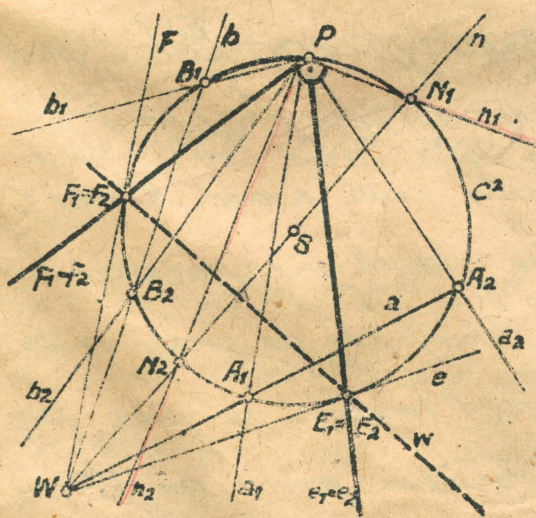
oraz jego przekątną $w = BC$, łączącą dwa pkty. przekątne $B = b'_1 b'_2$ i $C = c'_1 c'_2$



Rys. 48.

Trzeci wierzchołek przekątnej $W = A_1 A_2 \cdot B_1 B_2$ jest, ust. 33, 1) biegunem prostej $w = BC$. Dla drugiego czworokąta wpisanego $A_1 A_2 Z_1 Z_2$ wpisanego w stożkową C^2 , prosta $w = XZ$ jest przekątną, łączącą dwa pkty. przekątne $X = x_1' x_2'$ i $Z = z_1' z_2'$. Punkt przecięcia się prostych $A_1 A_2 \cdot Z_1 Z_2$ jest trzecim punktem przekątnym tego czworokąta, a jako biegun prostej $w = BC = XZ$ musi być identyczny z pktm. W .

Udowodniliśmy zatem, że: proste $A_1 A_2 = a$, $B_1 B_2 = b$ i $Z_1 Z_2 = z$ (rys. 48) przecinają się w jednym i tylko jednym pktcie. W . Ponieważ pkty. $Z_1' Z_2'$ są punktami przecięcia się stożkowej C^2 z dowolną parą homologicznych promieni z_1 i z_2 pęku inwolucyjnego (P) przeto (por. rys. 48 i 49) wykazaliśmy prawdziwość następującego twierdzenia: Skoro poszczególne pary homologicznych promieni pęku inwolucyjnego przetniemy dowolną stożkową C^2 , przechodzącą przez wierzchołek tego pęku, to owe pkty. przecięcia leżą parami na promieniach pomocniczego pęku. Dowolna zatem para a_1 i a_2 homologicznych promieni pęku inwolucyjnego (P) przecina stożkową C^2 w takich pktach A_1 i A_2 , że prosta $A_1 A_2 = a$ jest elementem pęku (W). Ponieważ promień podwójny $e_1 = e_2$ pęku inwolucyjnego przecina stożkową C^2 w dwóch „sąsiednich” punktach $E_1 = E_2$, przeto prosta $E_1 E_2 = e$ pęku (W) jest styczną do C^2 . Podobnie promień podwójny $f_1 = f_2$ przecina C^2 w pktach „sąsiednich” $F_1 = F_2$, a prosta $F_1 F_2 = f$ pęku (W) jest styczną do C^2 . Z ust. 38 wynika jednak bezpośrednio, że pkty. styczności $E_1 = E_2$ i $F_1 = F_2$ stycznych e i f , poprowadzonych z pktu. W do stożkowej C^2 leżą na biegunowej w owego punktu. -



Rys. 49

Dr. Plamitzer. Elementy Geometrii płukowej. ark. 9.

Chcąc zatem wyznaczyć promienie podwójne pęku inwolucyjnego $P(a_1, a_2, b_1, b_2, \dots)$ konstruujemy pęk pomocniczy $W(a, b, \dots)$ oraz styczne e i f (wzgl. biegunową w) do stożkowej C^2 ; proste, łączące pkty styczności z wierzchołkiem P , są promieniami podwójnymi $e_1 = e_2$ i $f_1 = f_2$ uważanego pęku. -

Zależnie od tego, czy pęk inwolucyjny (P) jest pękiem hyperbolicznym, eliptycznym wzgl. parabolicznym - wierzchołek pomocniczego pęku (W) leży (por. ust. 23) zewnątrz, wewnątrz stożkowej C^2 wzgl. na tej krzywej.

Zadanie: Na prostej p dane są dwie pary homologicznych punktów: H_1, H_2 i B_1, B_2 szeregu inwolucyjnego $p(H_1, H_2, B_1, B_2, \dots)$. Uzupełnić i wyznaczyć pkty podwójne tego szeregu.

Rozwiązanie 1^e: Z dowolnego pktu P , nie leżącego na podstawie p , rzuciemy uważany szereg, a dla otrzymanego w ten sposób pęku inwolucyjnego $P(a_1, a_2, b_1, b_2, \dots)$ przeprowadzimy powyżej podaną konstrukcję.

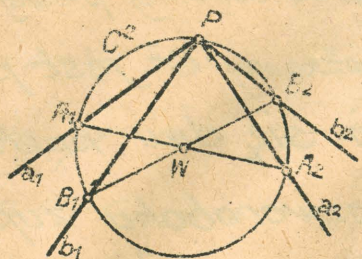
Rozwiązanie 2^e: Stosując zasadę biegunowej dwolności do konstrukcji uzupełnienia pęku inwolucyjnego - przeprowadzić uzupełnienie szeregu inwolucyjnego (p) przy pomocy kota stycznego do podstawy p .

40. Promienie normalne pęku inwolucyjnego. Pęk cykliczny. W pęku inwolucyjnym $P(a_1, a_2, b_1, b_2, \dots)$ obierzmy (rys 49) taki promień $n_1 = PN_1$, aby prosta $N_1W = n$ przechodziła przez środek S kota C^2 . Promień $n_2 = PN_2$, tworzący z elementem n_1 parę homologicznych promieni pęku inwolucyjnego, przecina kota C^2 w pktcie N_2 , który leży na prostej $n = WN_2$. Promienie homologiczne n_1 i n_2 są tedy prostopadłe i tworzą t.zw. parę promieni normalnych pęku inwolucyjnego (P). Ponieważ prosta $n = WS$, łącząca środek S kota C^2 z wierzchołkiem W - bez względu na to, czy pkt W leży na kole C^2 , zewnątrz wzgl. wewnątrz kota C^2 , przecina kota C^2 zawsze w dwóch pktach rzeczywistych N_1 i N_2 , przeto:

Każdy pęk inwolucyjny posiada zawsze jedną rzeczywistą parę homologicznych promieni normalnych.

Wiadomo, że pęk inwolucyjny $P(a_1, a_2, b_1, b_2, \dots)$ wyznaczają (ust. 37) dwie pary

homologicznych promieni. Jeżeli homologiczne promienie (rys. 50) są prostopadłe: $a_1 \perp a_2$, $b_1 \perp b_2$, to z łatwością za-



Rys. 50.

uważymy, że wierzchołek W pomocniczego pęku jest środkiem koła C^2 . Otrzymany pęk inwolucyjny eliptyczny posiada tę własność, że wszystkie promienie homologiczne są parami do siebie prostopadłe. Pęk inwolucyjny eliptyczny, którego wwszy-

stkie pary homologicznych promieni są elementami normalnymi, nazywamy pękiem kotowym (cyklicznym).

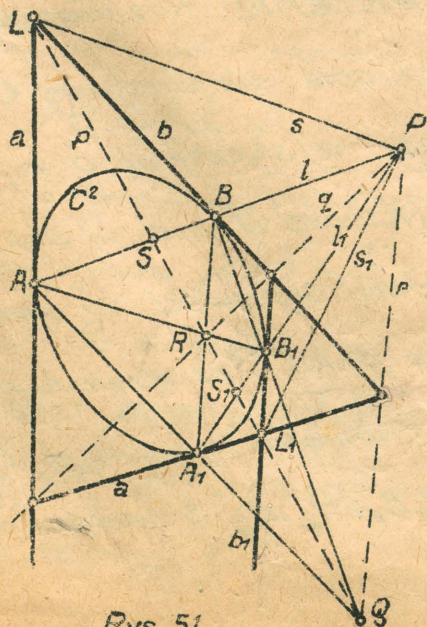
Zbadajmy w końcu związek, zachodzący pomiędzy promieniami podwójnymi i normalnymi pęku inwolucyjnego hyperbolicznego. Z rys. 49. czytamy: $WS \perp W$, więc $N_2 E_2 = N_2 F_2$ oraz $\angle N_2 P E_2 = \angle N_2 P F_2$, a zatem:

W pęku inwolucyjnym hyperbolicznym promienie normalne są symetralnemi kątów, zawartych pomiędzy promieniami podwójnymi.

Rozdział VI.

Teoria biegunów i biegunowych względem stożkowej.

41. Własności biegunowej i biegunu. Zadania i ćwiczenia. Niechaj dana jest stożkowa C^2 i dowolny pkt. P , nie leżący na niej. W celu wyznaczenia biegunowej p pktu. P wzgl. stożkowej C^2



Rys. 51.

(rys. 51), prowadzimy - jak to z poprzednich rozważań ust. 38 wynika - dwie dowolne styczne l i l_1 ; wyznaczamy czworokąt zupełny ABB_1A_1 , wpisany w krzywą C^2 . Prosta $p = RQ$, łącząca pkty. przekątne R i Q (por. ust. 38, 12) czworokąta ABB_1A_1 , jest biegunową pktu. P .

Zyko sie
marny
czar
uoz

Mozemy tezy wypowiedzieć następujące twierdzenie:

Bięgunowa p danego punktu P względem stożkowej C^2 łączy dwa przekątne punkty takiego czworokąta zupełnego, wpisanego w C^2 , którego trzecim punktem przekątnym jest uważany pkt. P .
Wnosimy stąd, że dla pktów P, Q, R - ich bięgunowe $p = QR, q = RP$ i $r = PQ$ są przeciętymi bokami trójkąta przekątnego PQR . Dlatego też (ust. 15) trójkąt przekątny PQR nazywamy trójkątem bięgunowym.

Zadanie: Dany jest pkt. P i stożkowa C^2 , wyznaczona pktami A, A_1, C, D, E . Skonstruować bięgunową p pktu P ze względu na C^2 .

Rozwiązanie: Poprowadzimy proste $l = PA$ i $l_1 = PA_1$ i wyznaczmy (stosując dwukrotnie tw. Pascala) pkt. B, B_1 przecięcia się tych prostych ze stożkową C^2 . Bięgunowa $p = RQ$ łączy pkt. przekątne $R = AB_1, A_1B$ i $Q = AA_1, BB_1$ (por. rys. 47) czworokąta zupełnego ABB_1A_1 wpisanego w krzywą C^2 .

Cwiczenie: Rozwiązać powyższe zadanie dla stożkowej C^2 , wyznaczonej: a) pktami A, A_1, C, D i stycznią d w pktcie D ; b) pktami A, A_1, C i stycznymi w dwóch z nich.

Uwaga: Aby wyznaczyć bięgunową p danego pktu P ze względu na „narysowaną” stożkową C^2 , prowadzimy przez P trzy dowolne styczne, l, l_1 i l_2 , przecięte krzywą C^2 odpowiednio w pktach A, B, A_1, B_1 i A_2, B_2 ; Skonstruujemy pkt.

Bięgun P dowolnej prostej p względem stożkowej C^2 jest pkt. przecięcia się dwu przekątnych takiego czworoboku zupełnego, opisanego na C^2 , którego trzecia przekątna jest uważana prostą p .
Wnosimy stąd, że dla prostych p, q, r - ich bięguny $P = qr, Q = rp$ i $R = pq$ są przeciwnymi wierzchołkami trójboku przekątnego pqr . Dlatego też (ust. 15) trójbok przekątny pqr nazywamy trójbokiem bięgunowym.

Zadanie: Dana jest prosta p i stożkowa C^2 , wyznaczona stycznymi a, a_1, c, d, e . Skonstruować bięgun P prostej p ze względu na C^2 .

Cwiczenie: Rozwiązać powyższe zadanie dla stożkowej C^2 , wyznaczonej: a) stycznymi a, a_1, c, d i pkt. styczności D na d ; b) stycznymi a, a_1, c i pktami styczności na dwóch z nich.

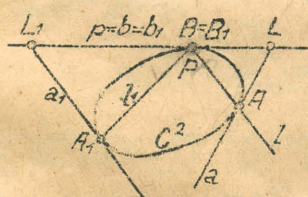
$R_1 = AB_1 \cdot A_1B$ i $R_2 = A_1B_2 \cdot A_2B_1$, to prosta $p = R_1R_2$ jest biegunową pktu. P .

42. Dalsze własności biegunu i biegunowej.

Biegunową punktu P wzgl. stożkowej C^2 określić możemy (ust. 38. 2°) jako prostą $p = LL_1$ (rys. 51) przechodzącą przez pkty. $L = ab$ i $L_1 = a_1b_1$. Proste a, b i a_1, b_1 są stycznymi do stożkowej w pktach. A, B i A_1, B_1 leżących na dowolnych stycznych l i l_1 . A zatem:

Biegunowa dowolnego pktu P wzgl. stożkowej C^2 przechodzi przez pkty. przecięcia się stycznych, poprowadzonych w takich pktach do C^2, które leżą na jednej prostej z pktm. P.	Biegun dowolnej prostej p wzgl. stożkowej C^2 jest pktm. przecięcia się prostych, taczających pkty. styczności takich stycznych do C^2, które przecinają się na prostej. p.
---	--

Przez pkt. P stożkowej C^2 (rys. 52) poprowadzimy dowolne styczne l i l_1 ;



Rys. 52.

wyznamy pkty: $A, A_1, B = B_1 = P$ przecięcia się tych prostych z krzywą C^2 . Z łatwością zauważymy, że pkty. B i B_1 zjednoczyły (zlewają) się z pktm. P . Na mocy powyższego twierdzenia, biegunowa $p = LL_1$ wyznaczona jest pktami. $L = ab$ i $L_1 = a_1b_1$, przecięcia się stycznych do C^2 w pktach A, B, A_1, B_1 . Ponieważ styczne b i b_1 nakrywają się ze stycznią p , przeto L i L_1

leżą na prostej p , czyli innymi słowy: styczna p jest biegunową pktu. P .

Uważajmy teraz stycznią p stożkowej C^2 jako daną i wyznaczmy jej biegun P . Biegun $P = LL_1$ jest pktm. przecięcia się prostych $L = AB$ i $L_1 = A_1B_1$, taczających pkty. styczności A, B, A_1 i B_1 stycznych a, b, a_1 i b_1 , poprowadzonych do C^2 z dwóch dowolnych pktów. L, L_1 (stycznej) prostej p . Ponieważ styczne b i b_1 schodzą się z daną stycznią $p = b = b_1$, przeto proste L i L_1 przecinają się w pktcie styczności $P = B = B_1$ elementu p ze stożkową C^2 . A zatem:

Biegunowa punktu P, leżącego na stożkowej C^2, jest stycznią w owym pktcie. do krzywej C^2.	Biegun stycznej p do stożkowej C^2 jest pktm. styczności owej prostej z krzywą C^2.
---	---

Słyczne, poprowadzone w pkcie. przecięcia się stożkowej C^2 z dowolną prostą, przechodzącą przez biegun tej prostej względem krzywej C^2 .

Pkty. słyczności słycznych, poprowadzonych z dowolnego pktu. do stożkowej C^2 , leżą na biegunowej tego pktu względem krzywej C^2 .

Na podstawie tych twierdzeń rozwiązać możemy następujące:

Zadanie: Dana jest prosta l i stożkowa C^2 , wyznaczona pięcioma słycznymi. Skonstruować pkty. przecięcia się prostej l z krzywą C^2 .

Zadanie: Dany jest pkt. L i stożkowa C^2 , wyznaczona pięcioma pktami. Skonstruować słyczne z pktu. L do krzywej C^2 .

Rozwiązanie: Dla pktu. L wyznaczymy (por. zadanie ust. 41) biegunową l względem stożkowej C^2 , a następnie pkty. przecięcia się tej biegunowej (ust. 35 zadanie) z krzywą C^2 .

Cwiczenie: Rozwiązać powyższe zadania, jeżeli stożkowa C^2 wyznaczona jest:

1^o przez cztery słyczne i punkt słyczności jednej z nich; 2^o przez trzy słyczne i pkty. słyczności dwóch z tych słycznych.

1^o przez cztery pkty. i słyczną w jednym z nich. 2^o przez trzy pkty. i słyczne w dwóch z tych pktów.

44. Zasada biegunowej dwoistości. Korzystając z ostatnich rozważań, możemy się teraz zająć uzasadnieniem prawa biegunowej dwoistości. Na dowolnej płaszczyźnie α niechaj dana będzie stała stożkowa K^2 , zwana kierownicą biegunowej dwoistości. Każdemu pktowi, A płaszczyzny α odpowiada jedna i tylko jedna biegunowa a (uwazanego pktu A) względem stożkowej K^2 ; wzajemnie: każdej prostej a podporządkować można jeden ściśle określony pkt., mianowicie: biegun A prostej a względem krzywej K^2 .

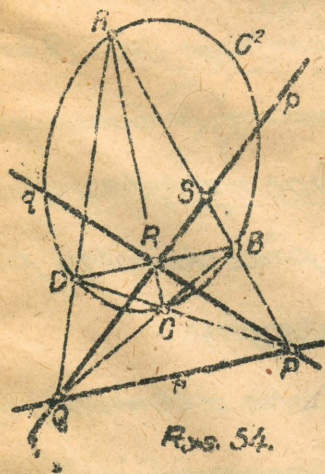
Uważajmy na płaszczyźnie α jakiś utwór geometryczny Φ_1 (Figure), to za pośrednictwem stożkowej K^2 skonstruować możemy w płaszczyźnie α drugi utwór geometryczny Φ_2 , odpowiadający dwoiście utworowi Φ_1 w tem rozumieniu tego słowa, że: każdemu pktowi A_1 i każdej prostej a_1 utworu Φ_1 - odpowiada w utworze Φ_2 jedna i tylko jedna prosta a_2 biegu-

nowa pktu. A_1 - oraz ściśleznaczony pkt. B_2 - biegun prostej $\bar{a}_1$ względem stożkowej K^2 . - Każdemu szeregowi pktów. $p_1(A_1, B_1, \dots)$ i pękowi promieni $B_1(a_1, b_1, \dots)$ utworu Φ_1 - podporządkowujemy w utworze Φ_2 pęk promieni $P_2(a_2, b_2, \dots)$ i szereg pktów $Q_2(A_2, B_2, \dots)$. - Stożkowej C_1^2 jako utworowi dwóch rzutowych pęków promieni $(P_1) \wedge (R_1)$ należącemu do Φ_1 - odpowiada dwójście w Φ_2 stożkowa C_2^2 , utworzona przez dwa jednokresłne szeregi punktów $(p_2) \wedge (r_2)$. Własnościom opisowym i konstrukcjom, odnoszącym się do utworu Φ_1 , odpowiadają dwójście własności opisowe i konstrukcje, odnoszące się do utworu Φ_2 . Związki te dla Φ_2 otrzymamy bezpośrednio, jeżeli w twierdzeniach i konstrukcjach utworu Φ_1 zamiast elementów: punkt i prosta na: prosta i punkt. Wspomnę tutaj o np. o twierdzeniach: Pascala i Brianchona (ust. 26) oraz o konstrukcjach uzupełnienia jednokresłnych pęków promieni i szeregów pktów. (ust. 21 i 30), które odpowiadają sobie dwójście. - W ust. 2 zauważyliśmy, że zasada biegunowej dwójściłości odnosi się do **własności opisowych** utworów geometrycznych; natomiast **własności miarowe** wogóle nie podlegają prawu biegunowej dwójściłości. Jako przykład wymienię tu twierdzenie o połędzie dwóch rzutowych szeregów punktów (ust. 12) oraz konstrukcję kota (ust. 29), jako utworu dwóch przystających pęków promieni. Twierdzeń ani konstrukcji dwójści z niemi związanych podać nie możemy, gdyż własności, odnoszące się do pktów. granicznych i do równości kątów, nie mają swego odpowiednika w układzie biegunowym. Zauważmy jednak, że istnieje przecież taka grupa własności miarowych utworów geometrycznych, która podlega prawu biegunowej dwójściłości. Do tej właśnie grupy należą: własności miarowe utworów jednokresłnych, objęte tw. Pappusa (ust. 11) własności miarowe grup harmonicznych czworokąta i czworoboku zupełnego (ust. 15) twierdzenia ust. 17, o elementach zjednoczonych i tw. podstawowe Staudta (ust. 18). Zwrócimy jeszcze uwagę na to, że nie tylko twierdzenia ust. 15 i 18, ale i

dowody tych twierdzeń odpowiadają sobie dokładnie. Ta własność nie jest spełniona np. w twierdzeniach ust. 47; przeprowadzamy ten dowód dla szeregu pktów i wyzstawiamy twierdzenie o istnieniu dwóch pktów, zjednoczonych tych szeregu, a zasadę biegunowej dwójności stosujemy dopiero do głównego twierdzenia -

Własnościami rzutowymi utworów geometrycznych nazywamy takie własności, które nie ulegają zmianom, przechodząc na analogiczne własności utworów, otrzymanych przez rzuty i przekroje z utworów zasadniczych. Wszystkie własności opisowe utworów geometrycznych i niektóre ich własności miarowe (np. wyżej wymienionej) należą do jednej grupy własności rzutowych. Możemy tedy powiedzieć, że: Prawu biegunowej dwójności podlegają własności rzutowe płaskich utworów geometrycznych.

45. Bieguny i biegunowe sprzężone. Punkty przecięcia prostej ze stożkową. Styczne do stożkowej. Dana jest stożkowa C^2 i dowolny pkt. P . Biegunowa p tego pkt. względem krzywej C^2 (rys 54) jest miejscem geometrycznym pktów (ust. 38) S , harmonicznie sprzężonych z pkt. P w grupie $(ABPS) = -1$. Z tw. Desarguesa wynika (ust. 43)



Rys. 54.

że skoro pkt. R porusza się po prostej p , to biegunowa r tego pkt. względem C^2 obraca się około pkt. P . Pkty. P i R nazywać będziemy biegunami harmonicznie sprzężonymi lub **biegunami sprzężonymi** względem stożkowej C^2 . Proste p i r są biegunowymi (harmonicznie) sprzężonymi. -

Dwa bieguny sprzężone względem stożkowej posiadają tę

Własność, że bieguny każdej z nich leżą na prostej biegunowej.

Własność, że biegunowa każdego z nich przechodzi przez pozostały biegun.

Uważajmy szereg pktów. $p(A_1, B_1, C_1, \dots)$, którego podstawa

biegunowa p (rys. 55 str. 73)

pktu. P względem stożkowej C^2 . Każdemu pktowi. A_1 odpowiada jedna i tylko jedna biegunowa

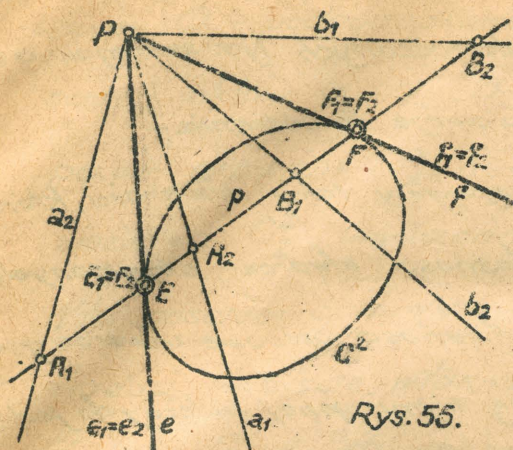
a_1 względem krzywej C^2 , która przechodzi przez P , jako biegun sprzężony z elementem A_1 .

Niechaj prosta a_2 przecina prostą p w pkt. $A_2 = a_1 p$, to biegunowa a_2 pktu A_2

Dr. Plamitzer. Elementy geometrii rzutowej.

ark. 10

względem C^2 jest prosta, $a_2 = PA_1$. Proste $a_1 = PA_2$ i $a_2 = PA_1$ są zatem bie-



Rys. 55.

gunowemi sprzężonemi, a pkty. A_1 i A_2 są biegunami sprzężonymi względem stożkowej C^2 .

Niemaż zachodzi relacja $p(A_1, A_2, B_1, B_2, \dots)$

$\bar{A}P(a_1, a_2, b_1, b_2, \dots) \bar{A}P(A_1, A_2, B_1, B_2, \dots)$

przeło końcowe ogniwa tego łańcucha są (ust. 7)

jednokreślne; ale A_1 i A_2 ; B_1 i B_2 , ... odpowia-

dają sobie w sposób podwójny, tworząc pary

zamiennne, więc (ust. 36) na prostej p otrzymu-

jemy szereg inwolucyjny $p(A_1, A_2, B_1, B_2, \dots)$ biegunów sprzężonych względem stożko-

wy C^2 . Oznaczmy przez E i F pkty przecięcia się prostej p ze stożkową C^2 .

Biegunowa e_1 pktu. $E_1 = E$ przechodzi zatem przez P ; jest (ust. 42 i 43) styczną w owym

pktcie E_1 do krzywej C^2 . Pkt. E_2 , tworzący z pktm. E_1 parę homologicznych elemen-

tów uważanego szeregu inwolucyjnego (p) - jako pkt. $E_2 = e_1p$ przecięcia się bieguno-

wy e_1 z podstawą p - schodzi się z elementem E_1 . Wykazaliśmy tedy, że pkt.

$E = E_1 = E_2$ jest elementem podwójnym E (ust. 37) szeregu inwolucyjnego (p) . A za-

tem uzyskaliśmy dwa odpowiadające sobie dwójście bardzo ważne twierdzenia:

Bieguny sprzężone względem stożkowej C^2 , leżące na dowolnej prostej, tworzą szereg inwolucyjny.

Punkty przecięcia się dowolnej prostej ze stożkową C^2 są punktami podwójnymi inwolucyjnego szeregu biegunów sprzężonych względem krzywej C^2 , którego podstawą jest owa prosta.

Prosta p przecina zatem stożkową C^2 zawsze w dwóch pktach: rzeczywistych lub urojonych, zależnie od tego, czy ów szereg inwolucyjny jest hyperboliczny (paraboliczny),

Biegunowe sprzężone względem stożkowej C^2 , przechodzące przez dowolny pkt., tworzą parę inwolucyjny.

Styczne, poprowadzone z dowolnego pktu. do krzywej C^2 , są promienniami podwójnymi pęku inwolucyjnego biegunów sprzężonych względem krzywej C^2 , którego wierzchołkiem jest ów punkt.

Przez pkt. P przechodzi zatem do stożkowej C^2 zawsze dwie styczne: rzeczywiste, lub urojone, zależnie od tego, czy ów pęk jest hyperboliczny (paraboliczny) lub eli-

lub eliptyczny.

| płyczny

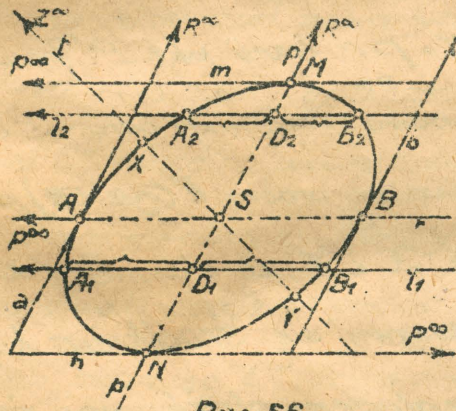
Uwaga: Na podstawie tych twierdzeń wykazać możemy (por. ust. 28) że:

krzywa rzędu drugiego jest zarazem i klasy drugiej.

i wzajemnie. Uważajmy krzywą rzędu drugiego C^2 (rys. 55) oraz dowolną prostą p , przecinającą ją w dwóch (rzeczywistych lub urojonych) pktach. E i F . Przez biegun P owej dowolnej prostej p względem C^2 , przechodzi dwie i tylko dwie styczne e i f , zatem C^2 jest krzywą klasy drugiej, c. b. d. o.

46. Średnica stożkowej. Średnice sprzężone. Zada-

121Q. Dla pktu. niewłaściwego P^∞ (leżącego w nieskończoności) wyznaczmy jego biegunową p względem danej stożkowej C^2 . W tym celu przez P^∞ poprowadźmy dwie dowolne styczne równoległe $l_1 \parallel l_2$ (rys. 56), które przecinają krzywą C^2 w pktach. A_1, B_1, A_2, B_2 . Przez pkty. D_1, D_2 , połowiące odcinki A_1B_1 i A_2B_2 , przechodzi (ust. 38 i 8)



Rys. 56.

biegunową $p = D_2D_1$ punktu P^∞ względem stożkowej C^2 , gdyż zawiera pkty. D_1 i D_2 harmonicznie sprzężone z punktem P^∞ w grupach: $(A_1B_1D_1P^\infty) = (A_2B_2D_2P^\infty) = -1$.

Biegunowa p punktu. niewłaściwego P^∞ względem stożkowej nazywa się średnicą tej krzywej.

Na średnicy p , która przecina krzywą C^2

w pktach. M i N , obróćmy pkt. niewłaściwy R^∞ i pkt. S , połowiący cięciwę (odcinek) $\overline{MN}$. Dla pktu. R^∞ jego biegunowa $r = SP^\infty$ łączy S z elementem P^∞ jest średnicą sprzężoną (ust. 45) ze średnicą p . Średnicami sprzężonymi stożkowej C^2 nazywamy dwie biegunowe sprzężone, których bieguny są pktami. niewłaściwymi.

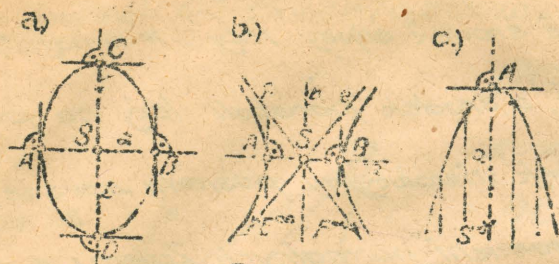
Dwie średnice sprzężone posiadają tę własność, że każda z nich połowi cięciwy, równoległe do średnicy drugiej. Z ust. 43. wynika bezpośrednio, że styczne m i n , poprowadzone w pktach. M i N (rys. 56) do stożkowej C^2 , przechodzą przez biegun P^∞ średnicy p . Podobnie styczne a i b , poprowadzone w pktach. A i B do C^2 , przechodzą przez R^∞ . A zatem: Styczne do stożkowej C^2 , poprowadzone w pktach. prze-

cięcia się krzywej C^2 z jej średnicami sprzężonymi, wyznaczają równoległobok opisany do tej stożkowej. **Zadanie:** Danych jest pięć pktów. $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ stożkowej C^2 . Wyznaczyć średnicę p tej stożkowej, jeżeli biegun P jest pkt. niewłaściwym prostej $\ell_1 = A_1 B_1$. **Rozwiązanie:** Przez A_2 poprowadzimy $\ell_2 \parallel \ell_1$ i wyznaczymy (Pascala) pkt. B_2 przecięcia się prostej ℓ_2 ze stożkową C^2 . Szukana średnica $p = D_1 D_2$ łączy środki D_1, D_2 odcinków $A_1 B_1$ i $A_2 B_2$ (pon rys. 56). **Cwiczenie:** Dla średnicy p powyżej danej stożkowej C^2 wyznaczyć (stosując dwukrotnie tw. Pascala) średnicę p' sprzężoną z prostą p .

47. Środek stożkowej. Zadanie i ćwiczenia. Zbadajmy własności pktu $S = pr$ (rys. 56) przecięcia się średnic sprzężonych p i r . Z grup barmonicznych $(ABSP^\infty) = (NMSP^\infty) = -1$ wynika równość odcinków $\overline{AS} = \overline{SB}$ i $\overline{NS} = \overline{SM}$. Aby wykazać, że własność ta zachodzi dla każdej cięciwy, weźmy pod uwagę prostą niewłaściwą $s^\infty = P^\infty R^\infty$. Biegunowe p i r pktów P^∞, R^∞ względem stożkowej C^2 przecinają się w pktcie $S = pr$. Jeżeli pkt. P^∞ porusza się podzieli po prostej s^∞ , to (ust. 43) jego biegunowa (średnica) obracać się będzie moko pktu S , jako bieguna prostej s^∞ . Długość prosta ℓ (rys. 56) przecina s^∞ w pktcie Z^∞ , a stożkową C^2 w takich pktach X i Y , że stosunek $(XYZS^\infty) = -1$; pkt. S połowi zatem każdą cięciwę XY i nazywa się środkiem krzywej C^2 . Biegun S prostej niewłaściwej s^∞ względem stożkowej jest środkiem tej krzywej. Dla poszczególnych pktów $I, \dots$ prostej niewłaściwej s^∞ ich biegunowe tzn. średnice $\ell, \dots$ stożkowej C^2 przechodzą przez środek S tej krzywej. A zatem każda prosta, poprowadzona przez środek S krzywej C^2 jest średnicą tej stożkowej. Dla elipsy i hyperboli (rys. 57 a, b) środek S jest pkt. właściwym. Dla paraboli (rys. 57 c) prosta s^∞ jest styczną, a środek paraboli, jako biegun tej stycznej, jest (ust. 42) pkt. styczności S^∞ . Parabola posiada środek S^∞ w nieskończoności i styka się w punkcie S^∞ z prostą niewłaściwą s^∞ . Ponieważ średnice stożkowej C^2 przechodzą przez jej środek, przeto: średnice paraboli tworzą pęk promieni równoległych, którego wierzchołkiem jest środek S^∞ paraboli. **Zadanie:** Dla stożkowej C^2 wyznaczonej pięcioma punktami $ABCDE$, skonstruować środek.

Rozwiązanie: Oznaczmy przez P^{∞}, Q^{∞} pkty. niewłaściwe prostych AB i AC ;

biegunowe p i q tych pktów. (por. zadanie ust. 46) względem stożkowej C^2 , przecina się w środku $S = pq$.



Rys 57 a-c.

Cwiczenie: Rozwiązać powyższe zadanie dla stożkowej C^2 , określonej: a) punktami A, B, C i pktami. niewłaściwymi D^{∞}, E^{∞} danych prostych m i n ; b) pktami A, B, C i styczniemi a, b w pktach A i B .

Cwiczenie: Wyznaczyć środek paraboli, określonej czterema stycznymi a, b, c i d . Przyjmując, że styczna niewłaściwa s^{∞} nakrywa się z prostą l^{∞} , wyznaczmy środek (Środek paraboli $S^{\infty} = s^{\infty} l^{\infty}$).

48. Asymptoty, oś i wierzchołki stożkowej. Zadanie. Na

podstawie rozważań zawartych w ust. 45, otrzymujemy nast. związki dla krzywych

2^{go} stopnia: Bieguny sprzężone względem stożkowej C^2 , leżące na prostej niewłaściwej s^{∞} tworzą szereg inwolucyjny. Punkty podwójne szeregu inwolucyjnego biegunów sprzężonych względem stożkowej C^2 , leżące na prostej niewłaściwej s^{∞} są pktami. przecięcia się tej prostej z uwzględnianą stożkową.

Dwie promienie podwójne e i f stykają się (por. ust. 45 rys. 55) bowiem ze stożkową C^2 w pktach. podwójnych E^{∞}, F^{∞} szeregu inwoluc. biegunów sprzężonych. leżących na s^{∞} .

Zależnie od tego, czy omawiany szereg inwolucyjny (s^{∞}) jest szeregiem: a) eliptycznym, b) hyperbolicznym i c) parabolicznym - stożkowa C^2 jest: a) elipsą, b) hyperbolą i c) parabolą.

Średnice sprzężone krzywej C^2 przechodzą przez jej środek i tworzą pak inwolucyjny. Promienie podwójne paku inwolucyjnego średnic sprzężonych stożkowej C^2 są stycznymi tej krzywej, poprowadzonymi z jej środka i nazywają się asymptotami.

Zależnie od tego, czy omawiany pak inwolucyjny (S) jest pakiem: a) eliptycznym, b) hyperbolicznym i c) parabolicznym - to stożkowa C^2 jest: a) elipsą, b) hyperbolą i c) parabolą.

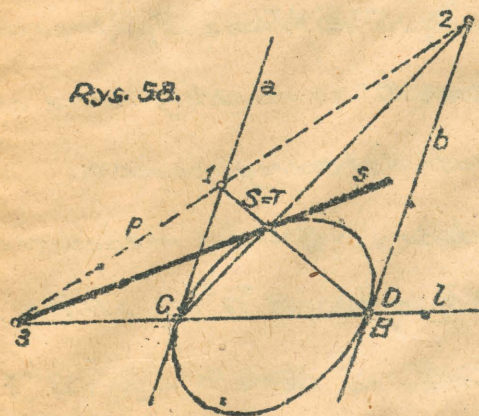
Elipsa posiada zatem dwie asymptoty urojone, a hyperbola - dwie asymptoty

ty rzeczywiste. Dla paraboli obie asymptoty schodzą się z prostą niewłaściwą S^∞ . Wnosimy stąd (por. ust. 23) że środek elipsy leży „wewnątrz”, środek hyperboli leży „zewnątrz” tej krzywej, a środek paraboli leży na paraboli. W ust. 40 udowodniliśmy, że każdy pęk inwolucyjny posiada zawsze jedną rzeczywistą parę homologicznych promieni normalnych. Zatem w pęku inwolucyjnym średnic sprzężonych (S) wystąpi jedna para średnic sprzężonych a i b , do siebie prostopadłych. Ponieważ każda średnica stożkowej C^2 (por. ust. 46, rys. 56) zawiera środki cięciw, równoległych do średnicy z nią sprzężonej, przebiega: Para homologicznych promieni normalnych pęku inwolucyjnego średnic sprzężonych stożkowej C^2 jest parą osi symetrii prostokątnej tej krzywej i zwiędzie się parą osi uważanej stożkowej. Hyperbola i elipsa (rys. 57) posiada zatem dwie osie a i b , parabola zaś - jedną oś (właściwą) a , oraz drugą oś niewłaściwą S^∞ . Punkty, w których osie stożkowej C^2 przecinają się z tą krzywą, nazywamy wierzchołkami. Styczna do stożkowej w jej wierzchołku jest prostopadła (por. ust. 46) do osi tej krzywej. Styczne w wierzchołkach elipsy - tworzą (por. ust. 46) prostokąt, opisany na tej krzywej. Z ostatniego twierdzenia ust. 40 wynika, że: osie hyperboli są symetralnemi kąta, zawartego pomiędzy jej asymptotami.

Zadanie: Dla stożkowej C^2 , określonej pięcioma pktami: $ABCDE$, wyznaczyć: osie, asymptoty i wierzchołki tej krzywej. **Rozwiązanie:** W sposób, podany w ust. 47 (zadanie) skonstruujemy dwie średnice p, q , oraz środek $S = pq$ tej krzywej. Jeżeli biegunami tych średnic są pkty P^∞, Q^∞ prostych AB i AC , to poprowadzimy przez środek S (ust. 46) proste $p_2 \parallel AB, q_2 \parallel AC$ i otrzymamy pęk inwolucyjny średnic sprzężonych $S(p p_2, q q_2, \dots)$ dla krzywej C^2 . Promienie normalne tego pęku są osiami, a promienie podwójne - asymptotami krzywej C^2 . Pkty. przecięcia się osi ze stożkową C^2 (por. przedostatnie zad. ust. 35) są wierzchołkami tej krzywej.

49. Wyznaczenie stycznych do stożkowych. Konstrukcja paraboli. **Zadanie:** Stożkową C^2 wyznaczają trzy pkty. A, B, S (rys. 58)

oraz styczne a i b w pktach A i B średnicy $AB = l$; skonstruować styczną s w pktcie S do krzywej C^2 . **Rozwiązanie:** Stosując tw. Pascala (ust. 26) do sześciokąta



Rys. 58.

$ACBDST$, wpisanego w stożkową C^2 , wyznaczymy za pomocą schematu: prostą Pascala $p = 12$ i żądaną styczną

ACB | DST

$AC = a$ | $DS \dots 1$

$CB = l$ | $ST = s \dots 3$

$BD = b$ | $TA \dots 2$

na $s = 3S$, łącząc pkt. $3 = p1$ z da-

nym pktem S . Praktycznie, przepro-

wadźmy konstrukcję stycznej w ten

sposób: Wyznaczymy pkt. 1 i 2

przecięcia się stycznych a i b z prostymi SB i SA . Pro-

sta $12 = p$ przecięnie średnicę $l = AB$ w pktcie 3 , przez któ-

ry przechodzi szukana styczna $s = 3S$. Na rys. 58-a przeprowadzona jest konstrukcja w przypadku, gdy dla stożkowej C^2 dane są: pkt. dowolny S , wierzchołki A, B i oś $l = AB$.

Zadanie: Wyznaczyć styczną s w pktcie S paraboli;

skoro dane są (rys 59) pkt. S, A , średnica $l = AB$,[∞]

styczna a w pktcie A tej paraboli. **Rozwiązanie:** Pa-

rabola styka się w pktcie $B^{\infty}D^{\infty}$ z prostą niewłaściwą

$b^{\infty} = B^{\infty}D^{\infty}$. W sposób poprzednio omówiony wyznaczy-

my dla tej paraboli (wedle podanego schematu) pro-

stą Pascala $p = 12^{\infty}$, pkt. $3 = p1$ i styczną $s = 3S$. Po-

niemaj jednak proste: $p \parallel AS$ i $l \parallel SD$, przeto odcinek $3A = 1S$. Przez dany pkt. S

poprowadźmy prostą $S4 \parallel a$, to odcinek $1S = A4$.

ACB^{∞} | $D^{\infty}ST$

$AC = a$ | $D^{\infty}S \dots 1$

$CB^{\infty} = l$ | $ST = s \dots 3$

$BD^{\infty} = b^{\infty}$ | $TA \dots 2^{\infty}$

A zatem $A4 = 3A$.

Praktycznie przeprowadźmy

tę konstrukcję w sposób nast:

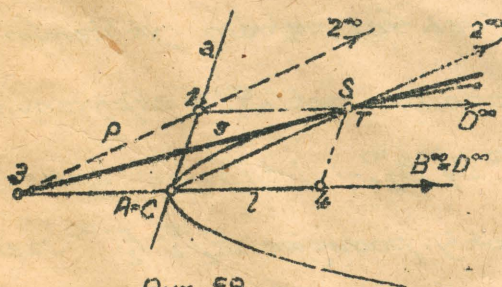
Przez S (rys 60) kreślimy pro-

stą $n \parallel a$, wyznaczamy pkt.

$4 = n1$ i na średnicy l odkta-

damy odcinki $4A = A3$. Pro-

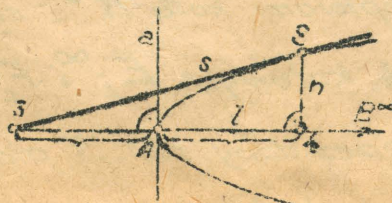
sta $s = 3S$ jest szukaną stycz-



Rys. 59.



Rys. 60.

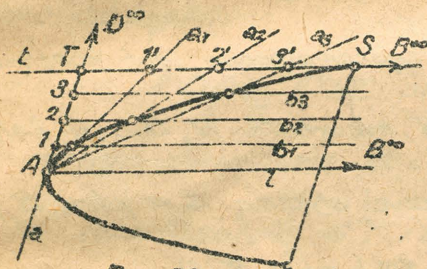


Rys. 60a.

na w pktcie S do paraboli. - Na rys. 60-a (str. 79) podane jest rozwiązanie tego zadania wówczas, gdy dla paraboli dane są: Pkt. S , wierzchołek A , oś l , i styczna a w wierzchołku paraboli.

Zadanie: Parabola wyznaczona jest (rys. 61) pktami A, S , średnicą $l = AB^\infty$ i styczną a w pktcie A . Skonstruować dalsze pkty tej paraboli. **Rozwiązanie:** Przez S poprowadzimy prostą $\ell \parallel l$ i wyznaczmy pkt. $T = a\ell$. Podzielimy nast. odcinek AT np. na cztery równe części oraz odcinek TS również na cztery równe części. Otrzymane (ust. 33) szeregi podobne:

$a(A, 1, 2, 3, T, \dots, D^\infty, \dots), lA\ell(T, 1', 2', 3', S, \dots, B^\infty, \dots)$ rzucimy odpow. z wierzchołka B^∞ i A , to otrzymamy dwa rzutowe pęki promieni $B^\infty l, b_1, b_2, \dots, B^\infty D^\infty, \dots$ i $A(a, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ które utworzą stożkową C^2 Promieniowi $l = AB^\infty$, uważanemu za element pędu (B^∞), odpow.

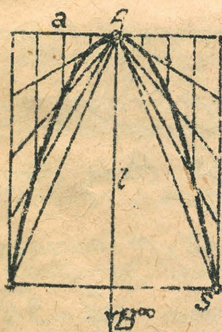


Rys. 61.

wiada w pęku (A) promień a , który jest (ust. 24) styczną w pktcie A do stożkowej C^2 Promieniowi $l = AB^\infty$ uważanemu za element pędu (A), odpow. wiada w pęku (B^∞) styczna $B^\infty D^\infty = a^\infty$ do stożkowej. Krzywa ta jest zatem parabola.

Na rys. 62 podana jest konstrukcja paraboli, wy-

znaczonej wierzchołkiem A , osią l i dowolnym pktm S .

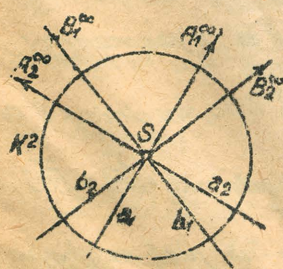


Rys. 62.

50. Punkty kotowe i promienie izotropowe. Wyznaczenie kota. Wiadomo, że w kole średnice sprzężone są wzajemnie prostopadłe. Dlatego też eliptyczny pęk inwolucyjny średnic sprzężonych $S(a, a_2, b_2, b_2, \dots)$ kota κ^2 (rys 63) jest (ust. 40) pękiem cyklicznym (kotowy).

Prosta niewąsaciwa S^∞ przecina pęk (S) w eliptycznym szeregu inwolucyjnym $s^\infty(A_2^\infty, A_2^\infty, B_2^\infty, B_2^\infty, \dots)$ biegunów sprzężonych względem kota κ^2 . Urojone pkty. podwójne E_i^∞ i F_i^∞ szeregu (s^∞)

t. zw. punkty kotowe są pktami przecięcia się kota κ^2 z prostą S^∞ .



Rys. 63.

Promienie podwójne $e_i = SE_i^\infty$ i $f_i = SF_i^\infty$ pędu (S) są urojonymi asymptotami kota κ^2 i stykają się z nim (ust. 45) w pktach kotowych E_i^∞ i F_i^∞ . Promienie e_i i f_i , które przechodzą przez dany pkt. S , płaszczyzny kota nazywamy prostymi izotropowymi. -

z łatwością zauważymy, że (por. ust. 45 i 48) Na dowolnej płaszczyźnie leżące kąta współśrodkowe z danym kątem K^2 t. zn. posiadające wspólny środek S stykają się w pktach katowych E_i^∞, F_i^∞ prostymi izotropowymi e_i i f_i .

Uważajmy poszczególne pky $S, S', \dots$ układu płaskiego α za środki kąt o promieniach dowolnych i doprowadźmy przez owe pky. proste, do siebie równoległe: $a_1 \| a_1', \dots; b_1 \| b_1', \dots$; Pełni inwolucyjne $S(a_1 a_2, a_2 b_1, \dots), S'(a_1' a_2', a_2' b_1', \dots)$ średnic sprzężonych względem poszczególnych kąt. są pkami katowymi i przecinają prostą niewłaściwą S^∞ w jednym i tym samym szeregu $S^\infty(a_1^\infty, a_2^\infty, b_1^\infty, b_2^\infty, \dots)$ biegunów sprzężonych względem wszystkich uważanych kąt. A zatem:

Wszystkie kąta, leżące na dowolnej płaszczyźnie, przechodzą przez te same (urojone) dwa punkty katowe uważanej płaszczyzny.

Widomo (ust. 34) że stożkowa $\mathcal{C}^2$ wyznacza pięć dowolnych punktów, leżących na jednej płaszczyźnie. Kąta wyznaczone jest również przez pięć punktów, a mianowicie: przez dwa urojone punkty katowe i trzy rzeczywiste punkty właściwe, nie leżące na jednej prostej. -

Koniec.



Rozdział I.

W wiadomości początkowe. Perspektywiczność i rzutowość utworów zasadniczych 1^{go} gatunku.

1. Utwory zasadnicze	str. 5
2. Zasada biegunowej dwoistości	" 7
3. Pewnik ciągłości	" 9
4. Perspektywiczność pęków promieni i szeregu pktów. Działania podstawowe.	" 11
5. " dwóch szeregów pktów. wzgl. pęków promieni.	" 12
6-7. Utwory rzutowe (jednokreślne)	" 14-16

Rozdział II.

Własności miarowe jednokreślnych utworów zasadniczych gat. 1^{go}

8. Stosunek podziału trzech punktów	str. 17
9. " podwójnego podziału czterech punktów	" 18
10. " " " " promieni	" 19
11. Tw. Pappusa	" 20
12. Punkty graniczne i polega utworów rzutowych	" 22
13. Przekształcenie stosunku podwójnego podziału	" 23
14. Własność grupy harmonicznej	" 24
15. Tw. o czworokacie i czworoboku zupełnym. Zadanie	" 25

Rozdział III.

Ustalenie rzutowości między utworami zasadniczymi gat. 1^{go}

16-17. Rzutowe szeregi o wspólnej podst. i pęki o wspól. wierz. Elementy zjednoczone	28
18. Tw. podstawowe Steuarta	31
19. Kryterjum perspektywiczności utworów rzutowych	32
20. Ustalenie jednokreślności rzutowości pęków i szeregów	33
21. Uzupełnienie szeregów rzutowych. Zadanie	34
22. Rzulowosc utworów przysłajających. Zadanie	36

Rozdział IV.

Słózkowe.

23. Utwory rzutowych pęków i szeregów	str. 38
24-25. Własności słózkowych. Tw. Steinerja	40-41
26. Tw. Pascala i Brianchona	43
27. Konfiguracja Mac Laurina	44
28. Identyfikacja krzywej 2 ^{go} rzędu z krzywą 2 ^{giej} klasy	" 45
29. Utwory perspektywiczne pęków i szeregów. Kato	" 47
30. Konstrukcja Steinerja. Zadanie	" 49
31. Podział słózkowych	" 50
32. Badanie utworu pęków rzutowych	" 51
33. Szeregi podobne. Parabola. Cwiczenie	" 52

34.	Warunki określające stożkowe	str.	53
35.	Zadania i ćwiczenia o stożkowych	"	55

Rozdział V

Rzutowość inwolucyjna utworów zasadniczych gat. 1^{go}

36.	Szeregi i pęki inwolucyjne	"	58
37.	Elementy podwójne pęków i szeregów inwolucyjnych. Ustalenie jednokreślności inwolucyjnej	"	60
38.	Bięgunowa i bięgun względem stożkowej	"	62
39.	Uzupełnienie pędu inwolucyjnego. Wyznaczenie promieni podwójnych. Zadanie	"	64
40.	Promień normalny pędu inwolucyjnego. Pęk cykliczny	"	66

Rozdział VI

Teoria bięgunów i bięgunowych względem stożkowej

41.	Własności bięgunowej i bięguna. Zadania i ćwiczenia	"	67
42.	Dalsze własności bięguna i bięgunowej	"	69
43.	Twierdzenie Desarguesa. Styczne do stożkowej. Zadania i ćwiczenia	"	70
44.	Zasada bięgunowej dwoistości	"	71
45.	Bięguny i bięgunowe sprzężone. Punkty przecięcia prostej ze stożkową. Styczne do stożkowej	"	73
46.	Średnica stożkowej. Średnice sprzężone. Zadania	"	75
47.	Środek stożkowej. Zadania i ćwiczenia	"	76
48.	Asymptoty, oś i więzchołki stożkowej. Zadanie	"	77
49.	Wyznaczenie stycznych do stożkowej. Konstrukcja paraboli	"	78
50.	Punkty kotowe i promienie izotropowe. Wyznaczenie kota	"	80

BIBLIOTEKA
GŁÓWNA



AKADEMII
GÓRNICZO
HUTNICZEJ

32148

Nie
wypożycza się
NLB 8110