

Marek Kawa, Dariusz Łydzba**

KRYTERIUM WYTRZYMAŁOŚCI GEOMATERIAŁÓW Z MIKROSTRUKTURĄ WARSTWOWĄ

1. Wstęp

Jedną z najpowszechniej występujących w geomateriałach mikrostruktur jest periodyczna mikrostruktura warstwowa. Powstaje ona zazwyczaj wskutek naturalnych procesów diagenetyczno-sedymentacyjnych. Sztandarowe przykłady takich ośrodków to ropy warwowe oraz skały fliszu karpackiego. Choć powszechnie wiadomo, że właściwości sprężyste i wytrzymałościowe materiałów o takiej mikrostrukturze są silnie anizotropowe, to związane z modelowaniem anizotropii trudności sprawiają, że ich zachowanie w stanie granicznym aproksymowane jest izotropowymi funkcjami ograniczającymi. Taka praktyka skutkuje bądź istotnym przewymiarowaniem konstrukcji, bądź jej niedowymiarowaniem. Rozmiar problemu łatwo zauważyć analizując dane odnośnie stateczności skarp na terenie Polski: na 100% zjawisk osuwiskowych 95% ma miejsce w Karpatach fliszowych [6]. Zaproponowanie odpowiedniego anizotropowego kryterium pozwalającego właściwie oszacować nośność konstrukcji wykonanych z takich materiałów ma duże znaczenie.

W niniejszym artykule prezentuje się anizotropowe kryterium przeznaczone do opisu wytrzymałości geomateriałów z mikrostrukturą warstwową. Kryterium to stanowi koniunkcję matematycznego opisu Pariseau oraz koncepcji płaszczyzny krytycznej. Rozważany jest materiał dwuskładnikowy. Wytrzymałość obydwu składników opisuje kryterium Druckera-Pragera, które jest izotropowym odpowiednikiem kryterium Pariseau.

Artykuł jest jedną z cyklu prac autorów poświęconych materiałom warstwowym. Podstawowym założeniem tych publikacji jest możliwość zastosowania teorii homogenizacji do identyfikacji kryterium makroskopowego. W ten sposób matematyczny model materiału zastępuje model fizyczny (próbkę), którego przygotowanie i badania są znacznie droższe i obciążone błędami. W publikowanej poprzednio pracy [2] przedstawiono w takim kontekście zastosowanie kryterium Hilla do opisu wytrzymałości materiałów warstwowych

* Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wrocławska, Wrocław

o składnikach pozbawionych wewnętrznego tarcia. Niniejsza praca, wykorzystując kryterium Pariseau, rozszerza ten opis na materiały warstwowe o składnikach kohezyjno-tarcio-
wych. Jednocześnie wprowadzenie dodatkowej modyfikacji w postaci płaszczyzny krytycz-
nej skutkuje lepszym opisem wytrzymałości także dla materiałów czysto kohezyjnych.

Układ pracy jest następujący: artykuł rozpoczyna krótki opis zastosowania metody ho-
mogenizacji do określenia wytrzymałości materiału warstwowego. W kolejnym punkcie
omawia się proponowane przez autorów kryterium wytrzymałości oraz przedstawia się
zidentyfikowane na podstawie wyników homogenizacji stałe materiałowe opisu. W sposób
graficzny prezentuje się weryfikację kryterium. Ostatnią część pracy stanowią wyniki za-
gadnienia brzegowego rozwiązane w programie FLAC, do którego proponowane kryte-
rium zostało zaimplementowane przez autorów. Pracę podsumowują wnioski.

2. Homogenizacja

Makroskopowe kryterium wytrzymałości w ujęciu teorii homogenizacji określa się
poprzez zbiór statycznie i plastycznie dopuszczalnych naprężeń makroskopowych. Definicję
tego zbioru, prezentowaną w pracy [2], dla dwuskładnikowej struktury warstwowej można
zapisać jako:

$$F(\sigma_{ij}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left\{ \{\sigma_{ij}\} \in A = \left\{ \{\sigma_{ij}\} \mid \exists \{\tau_{ij}^{(1)}, \tau_{ij}^{(2)}\} : \right. \right. \\ \left. \left. f_1(\tau_{ij}^{(1)}) \leq 0 \wedge f_2(\tau_{ij}^{(2)}) \leq 0 \wedge t^{(1)}\tau_{ij}^{(1)} + (1-t^{(1)})\tau_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij} \right\} \right\}$$

gdzie:

- $\sigma_{ij}, \tau_{ij}^{(k)}$ — oznaczają odpowiednio składowe tensora makronaprężenia
oraz mikronaprężenia dla składnika;
- $k, t^{(1)}$ — udział frakcyjny w mikrostrukturze pierwszego składnika;
- $f_1(\tau_{ij}^{(1)}), f_2(\tau_{ij}^{(2)})$ — kryteria wytrzymałości odpowiednio pierwszego oraz drugiego
składnika.

W niniejszej pracy przyjęto, że wytrzymałość obydwu składników opisuje izotropowe
kryterium Druckera-Pragera tj.:

$$f_k(\tau_{ij}^{(k)}) = a^{(k)} I_1(\tau_{ij}^{(k)}) + \sqrt{J_2(\tau_{ij}^{(k)})} - c^{(k)} \leq 0, \quad k \in \{1, 2\}$$

gdzie:

- $I_1(\tau_{ij}^{(k)})$ — pierwszy niezmiennik tensora mikronapężenia dla składnika k ,
 $J_2(\tau_{ij}^{(k)})$ — drugi niezmiennik dewiatora mikronapężenia dla składnika k .

Poszukiwanie brzegu zbioru (1) może być rozumiane jako rozwiązanie zadania optymalizacji. Szczegółowo opisano to pracach autorów [2–4]. Oczywiście dla ciała anizotropowego rozwiązanie jest funkcją nie tylko wartości makronapężeń, ale zależy również od orientacji tensora napężenia względem głównych kierunków struktury.

Wykorzystując solver IPOpt wraz ze studencką wersją środowiska AMPL rozwiązano cały szereg takich zagadnień dla różnie przyjmowanych udziałów frakcyjnych $t^{(1)}$ oraz różnych kątów orientacji pomiędzy kierunkami głównymi tensora makronapężenia a kierunkami materiałowymi.

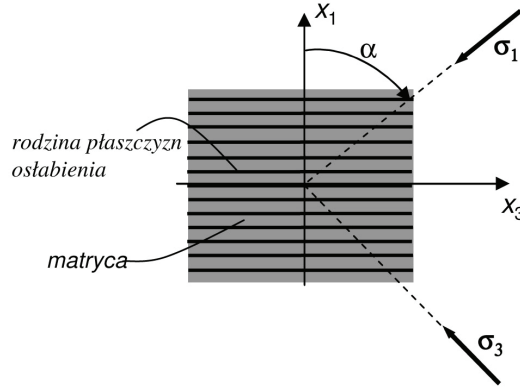
Zastosowana metoda pozwoliła stwierdzić, że w wielu przypadkach wytrzymałość materiału warstwowego zdeterminowana jest mechanizmem ścicia w płaszczyźnie słabszego składnika. W pozostałych przypadkach wytrzymałość określona w ten sposób zawyża rzeczywiste wartości wytrzymałości materiału warstwowego (ilustruje to praca [5] dla materiału Treski).

Dla kierunków materiałowych struktury, tj. kierunku uwarstwienia i kierunku do niego normalnego, wytrzymałość na jednoosiowe ściskanie i rozciąganie udało się określić w sposób analityczny.

3. Proponowane kryterium: identyfikacja i weryfikacja

Tak jak już wcześniej powiedziano, jednym z mechanizmów zniszczenia struktury warstwowej jest ścicie w płaszczyźnie słabszego składnika. Grupa modeli z taką płaszczyzną osłabienia analizowana jest w ramach tzw. koncepcji płaszczyzny krytycznej. Takie podejście zaproponowane zostało po raz pierwszy przez Jaegera [1] i zakłada zniszczenie materiału bądź wskutek zniszczenia matrycy, bądź właśnie ścicia jednej z rodziny płaszczyzn osłabienia (rys. 1). Płaszczyzna krytyczna bardzo rzadko ma wpływ na wytrzymałość w kierunku do niej równoległym i prostopadłym. Identyfikacja modelu zazwyczaj polega na określeniu parametrów matrycy na podstawie wyników wytrzymałości dla orientacji $\alpha = 0^\circ$ i $\alpha = 90^\circ$ (rys. 1) oraz parametrów płaszczyzny krytycznej na podstawie wytrzymałości dla pośrednich orientacji.

W oryginalnej metodzie dla matrycy stosowane jest izotropowe kryterium wytrzymałości, co skutkuje identyczną jej wartością dla orientacji $\alpha = 0^\circ$ i $\alpha = 90^\circ$. Analiza wyników z teorii homogenizacji pokazuje, że w wielu przypadkach wytrzymałość dla tych orientacji jest różna. W niniejszej pracy klasyczne sformułowanie Jaegera zostało zatem zmodyfikowane poprzez zastosowanie anizotropowego warunku wytrzymałości dla matrycy. Wybrane do opisu matrycy kryterium Pariseau stanowi anizotropowy odpowiednik zastosowanego na poziomie składników kryterium Druckera-Pragera.



Rys. 1. Koncepcja płaszczyzny krytycznej

Równanie płaszczyzny krytycznej uzyskuje się zapisując odpowiednio przekształcony warunek Druckera-Pragera z parametrami słabszego składnika. Przyjmując drugi składnik struktury jako słabszy dla kierunków materiałowych jak na rysunku 1, warunek ten ma postać:

$$\sqrt{1-12(a^{(2)})^2} \frac{\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}}{c^{(2)}} + \frac{3a^{(2)}\sigma_{11}}{c^{(2)}} - 1 \leq 0 \quad (3)$$

Warunek wytrzymałości Pariseau w tej samej bazie można zapisać jako:

$$A_{ij}\sigma_{ij} + \sqrt{A_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}} - 1 \leq 0 \quad (4)$$

gdzie wszystkie niezerowe współczynniki macierzy A_{ij} i A_{ijkl} można przedstawić w postaci pięciu stałych:

$$\begin{aligned} A_{11} &= U, \quad A_{22} = A_{33} = V, \quad A_{1111} = 2G, \quad A_{2222} = A_{3333} = F + G, \\ A_{1122} &= A_{1133} = -G, \quad A_{2233} = -F, \quad 2A_{1212} = 2A_{2121} = 2A_{1221} = 2A_{2112} = M \\ 2A_{1313} &= 2A_{3131} = 2A_{1331} = 2A_{3113} = M, \quad 2A_{2323} = 2A_{3232} = 2A_{2332} = 2A_{3223} = 2F + G \end{aligned} \quad (5)$$

Wyniki analityczne testów na ściskanie i rozciąganie w kierunkach materiałowych pozwoliły na sformułowanie zależności określających stałe materiałowe: U , V , F i G . Stałą materiałową M określono poprzez analizę numerycznych wyników procedury homogenizacji.

Ostatecznie stałe te można wyrazić w funkcji parametrów składników i udziału frakcyjnego $t^{(1)}$ jako:

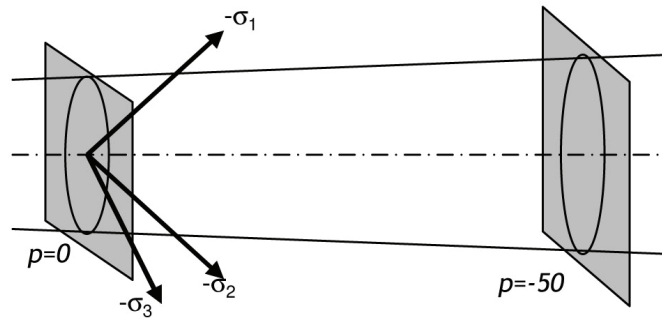
$$\begin{aligned}
U &= \frac{3c^{(1)}t^{(1)}(3a^{(2)}(1-t^{(1)})+a^{(1)}(3t^{(1)}-2-12(a^{(2)})^2))}{(c^{(1)}t^{(1)}(\sqrt{3}-6a^{(2)})+c^{(2)}(1-t^{(1)})(\sqrt{3}-6a^{(1)}))(c^{(1)}t^{(1)}(\sqrt{3}+6a^{(2)})+c^{(2)}(1-t^{(1)})(\sqrt{3}+6a^{(1)}))} + \\
&+ \frac{3c^{(2)}(1-t^{(1)})(3a^{(1)}t^{(1)}+a^{(2)}(3(1-t^{(1)})-2-12(a^{(1)})^2))}{(c^{(1)}t^{(1)}(\sqrt{3}-6a^{(2)})+c^{(2)}(1-t^{(1)})(\sqrt{3}-6a^{(1)}))(c^{(1)}t^{(1)}(\sqrt{3}+6a^{(2)})+c^{(2)}(1-t^{(1)})(\sqrt{3}+6a^{(1)}))} \\
V &= \frac{3c^{(1)}a^{(1)}t^{(1)}(1-3(a^{(2)})^2)+3c^{(2)}a^{(2)}(1-t^{(1)})(1-3(a^{(1)})^2)}{(c^{(2)}(1-t^{(1)}))^2(3-9(a^{(1)})^2)+6c^{(1)}c^{(2)}(1-t^{(1)})t^{(1)}(1-3a^{(1)}a^{(2)})+(c^{(1)}t^{(1)})^2(3-9(a^{(2)})^2)} \quad (6) \\
F = G &= \frac{1}{6(c^{(1)}t^{(1)}+c^{(2)}(1-t^{(1)}))^2} \\
M &= \frac{1-\frac{c^{(2)}}{2(t^{(1)}c^{(1)}+(1-t^{(1)})c^{(2)})}}{(t^{(1)}c^{(1)}+(1-t^{(1)})c^{(2)})^2}
\end{aligned}$$

Przydatność kryterium, będącego koniunkcją warunków (3) i (4), do opisu materiałów warstwowych sprawdzono przez porównanie, dla wybranych stanów naprężenia, wyników tego kryterium z wynikami uzyskanymi metodą homogenizacji. W artykule, dla kilku wybranych orientacji, przedstawiają to rysunki 3–4 w postaci zbiorów na płaszczyźnie oktaedrycznej. Schematycznie sposób przygotowania zbiorów pokazano na rysunku 2.

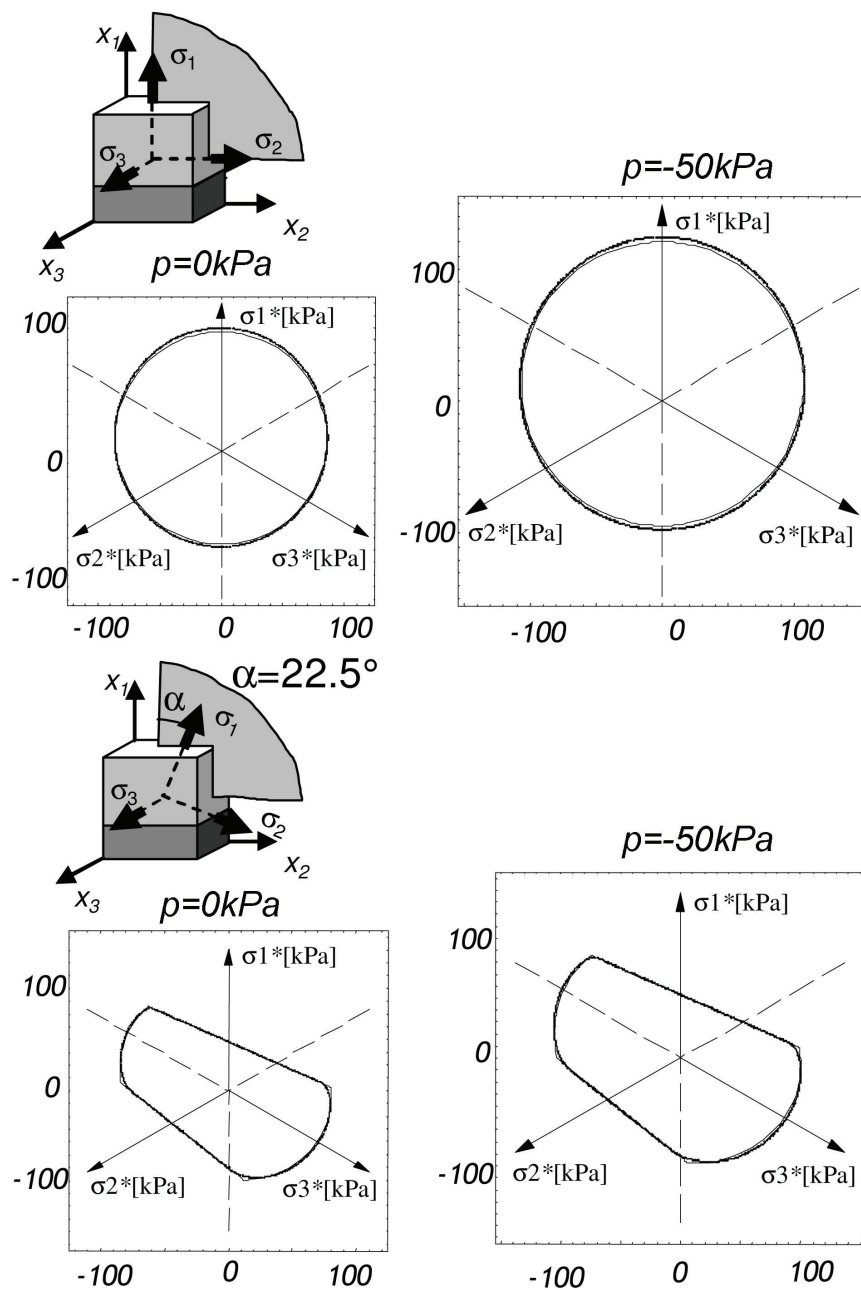
Prezentowane wyniki odpowiadają strukturze warstwowej o równym udziale frakcyjnym składników i parametrach wytrzymałościowych odpowiednio równych: $c^{(1)}=100$ kPa, $c^{(2)}=20$ kPa, $a^{(1)}=0,15$, $a^{(2)}=0,05$.

Dla innych wartości parametrów, geometrii i ciśnień okólnych uzyskano podobną zbieżność wyników jak przedstawiona na rysunkach.

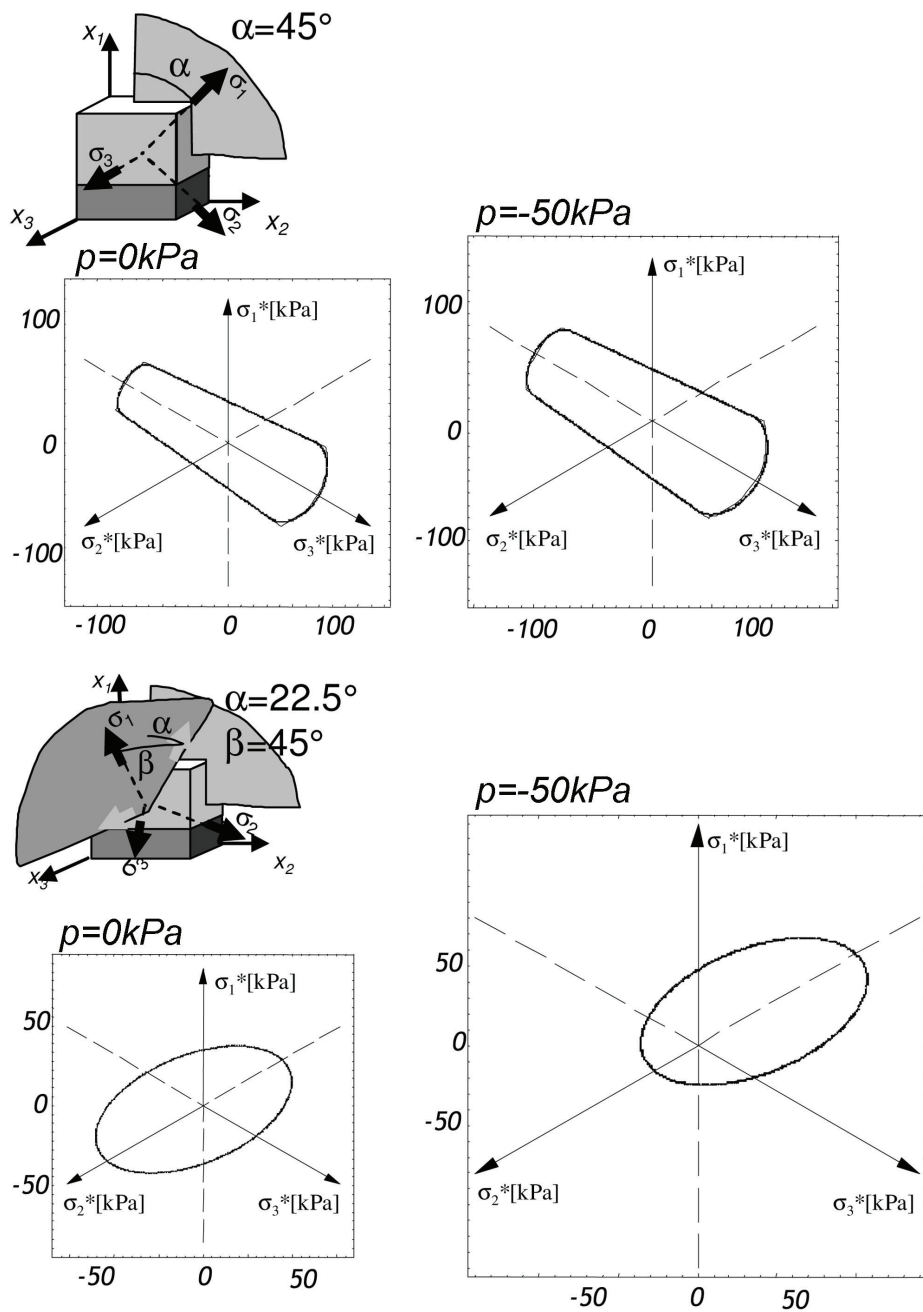
Łatwo zauważyć, że kryterium prawie idealnie wpisuje się w wyniki numeryczne z teorii homogenizacji.



Rys. 2. Schemat przygotowania zbiorów z rysunków 3 i 4



Rys. 3. Porównanie zidentyfikowanego kryterium (cienka linia) i wyników homogenizacji (gruba linia) na płaszczyźnie oktaedrycznej. Wartość ciśnienia okólnego oraz orientacja głównych kierunków obciążenia względem kierunków materiałowych przedstawione są na rysunku

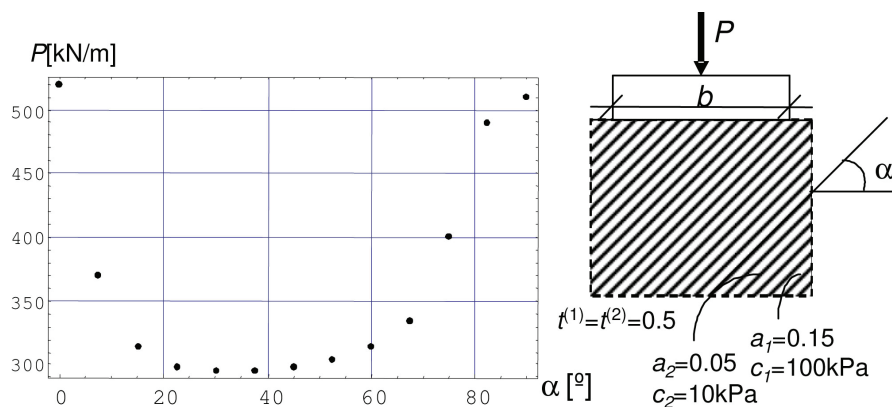


Rys. 4. Porównanie zidentyfikowanego kryterium (cienka linia) i wyników homogenizacji (gruba linia) na płaszczyźnie oktaedrycznej. Wartość ciśnienia okólnego oraz orientacja głównych kierunków obciążenia względem kierunków materiałowych przedstawione są na rysunku

4. Nośność graniczna podłoża uwarstwowionego

Zaproponowane kryterium zostało zaimplementowane przez autorów do programu FLAC. Jako przykład zastosowania rozwiązano zagadnienie brzegowe nośności granicznej podłoża obciążonego ławą fundamentową. Fundament założono jako nieskończenie sztywny o szerokości $b = 1$ m. Materiał podłoża przyjęto jako warstwowy, złożony z dwóch składników o parametrach odpowiednio $c^{(1)} = 100$ kPa, $c^{(2)} = 20$ kPa, $a^{(1)} = 0,15$, $a^{(2)} = 0,05$ i równym udziale frakcyjnym.

Na rysunku 5 przedstawiono rozwiązanie tego zagadnienia w płaskim stanie odkształcenia w zależności od orientacji kierunku uwarstwienia.



Rys. 5. Nośność podłoża obliczona programem FLAC z zaimplementowanym kryterium

5. Wnioski

W pracy przedstawiono anizotropowe kryterium wytrzymałości dedykowane materiałom ze strukturą warstwową. Przedstawiono prosty sposób identyfikacji kryterium poprzez parametry struktury oraz pokazano bardzo dobrą zgodność proponowanego opisu fenomenologicznego z wartościami wytrzymałości uzyskanymi metodą homogenizacji. W świetle licznych problemów z modelowaniem wytrzymałości struktur warstwowych w geotechnice, proponowane kryterium wydaje się być idealne.

Jako przykład zastosowania kryterium pokazano rozwiązanie zagadnienia nośności granicznej podłoża uwarstwowionego w funkcji kąta uwarstwienia. Wyniki te pokazują duże możliwości zastosowania implementacji numerycznej proponowanego kryterium. Silna anizotropia rozwiązania zagadnienia brzegowego pokazana na rysunku 5 z jednej strony częściowo tłumaczy liczne błędy powstające przy projektowaniu konstrukcji z materiału uwarstwowionego — z drugiej pokazuje, jak ważne jest uwzględnienie specyficznych właściwości tego materiału w praktyce projektowej.

LITERATURA

- [1] *Jaeger J.C.*: Shear failure of anisotropic rocks, *Geological Magazine*, tom 27 nr 1, 1960, s. 65–72
- [2] *Kawa M., Łydźba D.*: Przydatność kryterium Hilla do opisu wytrzymałości geomateriałów warstwowych. XXX Zimowa Szkoła Mechaniki Górniczej i Geoinżynierii, Instytut Geotechniki i Hydrotechniki Politechniki Wrocławskiej, Szklarska Poręba 13–18 marca 2007, s. 303–314
- [3] *Kawa M., Łydźba D.*: Niezwykła anizotropia wytrzymałości kompozytu warstwowego. XXVIII Zimowa Szkoła Mechaniki Górniczej i Geoinżynierii, Instytut Geotechniki i Hydrotechniki Politechniki Wrocławskiej, Szklarska Poręba 11–16 marca 2005, s. 283–290
- [4] *Łydźba D., Kawa M.*: Anizotropia wytrzymałości skał uwarstwionych: koncepcja płaszczyzny krytycznej i homogenizacja. XXVII Zimowa Szkoła Mechaniki Górniczej, Katedra Geomechaniki, Budownictwa i Geotechniki AGH, Zakopane 14–19 marca 2004, s. 161–171
- [5] *Łydźba D., Kawa M.*: Nośność graniczna geomateriałów z mikrostrukturą warstwową, [w:] Brząkała W., Butra J., Gałczyński S., *Geotechnika w budownictwie i górnictwie*, Wrocław, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2003
- [6] *Stopkiewicz A., Cała M.*: Analiza stateczności zboczy zlokalizowanych we fliszu karpackim z zastosowaniem metod numerycznych. XXVII Zimowa Szkoła Mechaniki Górniczej, Katedra Geomechaniki, Budownictwa i Geotechniki AGH, Zakopane 14–19 marca 2004, s. 519–529