



AGH

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

Praca magisterska

Damian Wróbel

kierunek studiów: **fizyka techniczna**

Rozszerzony dylemat więźnia z uwzględnieniem reputacji

Opiekun: **prof. dr hab. Krzysztof Kułakowski**

Kraków, czerwiec 2020

Oświadczenie studenta

Uprzedzony(-a) o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz. U. z 2018 r. poz. 1191 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystyczne wykonanie albo publicznie zniekształca taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, wideogram lub nadanie.”, a także uprzedzony(-a) o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 307 ust. 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.) „Student podlega odpowiedzialności dyscyplinarnej za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyn uchybiający godności studenta.”, oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem(-am) osobiście i samodzielnie i nie korzystałem(-am) ze źródeł innych niż wymienione w pracy.

Jednocześnie Uczelnia informuje, że zgodnie z art. 15a ww. ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych Uczelnia przysługuje pierwszeństwo w opublikowaniu pracy dyplomowej studenta. Jeżeli Uczelnia nie opublikowała pracy dyplomowej w terminie 6 miesięcy od dnia jej obrony, autor może ją opublikować, chyba że praca jest częścią utworu zbiorowego. Ponadto Uczelnia jako podmiot, o którym mowa w art. 7 ust. 1 pkt 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. — Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.), może korzystać bez wynagrodzenia i bez konieczności uzyskania zgody autora z utworu stworzonego przez studenta w wyniku wykonywania obowiązków związanych z odbywaniem studiów, udostępniać utwór ministrowi właściwemu do spraw szkolnictwa wyższego i nauki oraz korzystać z utworów znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych, w celu sprawdzania z wykorzystaniem systemu antyplagiatowego. Minister właściwy do spraw szkolnictwa wyższego i nauki może korzystać z prac dyplomowych znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych w zakresie niezbędnym do zapewnienia prawidłowego utrzymania i rozwoju tych baz oraz współpracujących z nimi systemów informatycznych.

.....
(czytelny podpis)

Kraków, 10 lipca 2020

**Tematyka pracy magisterskiej i praktyki dyplomowej Damiana Wróbla,
studenta drugiego roku studiów drugiego stopnia na kierunku fizyka techniczna**

**Temat pracy magisterskiej: Rozszerzony dylemat więźnia
z uwzględnieniem reputacji**

Opiekun pracy: prof. dr hab. Krzysztof Kułakowski
Recenzenci pracy: recenzent
Miejsce praktyki dyplomowej: WFİS AGH, Kraków

Program pracy magisterskiej i praktyki dyplomowej

1. Omówienie realizacji pracy magisterskiej z opiekunem.
2. Zebranie i opracowanie literatury dotyczącej tematu pracy.
3. Praktyka dyplomowa:
 - zapoznanie się z ideą i podstawami teoretycznymi teorii gier,
 - opracowanie podstaw modelu użytego w pracy magisterskiej,
 - dyskusja i analiza wniosków wynikających bezpośrednio z przyjętego modelu,
 - sporządzenie sprawozdania z praktyki.
4. Kontynuacja obliczeń związanych z tematem pracy magisterskiej.
5. Zebranie i opracowanie wyników obliczeń.
6. Analiza wyników obliczeń numerycznych, ich omówienie i zatwierdzenie przez opiekuna.
7. Opracowanie redakcyjne pracy.

Termin oddania w dziekanacie: 10 lipca 2020

.....
(podpis kierownika katedry)

.....
(podpis opiekuna)

Recenzja Opiekuna

Recenzja Recenzenta

Składam serdeczne podziękowania

Rodzicom

za okazane wsparcie

przez cały okres studiowania,

Panu prof. dr hab. Krzysztofowi Kułakowskiemu

za okazaną życzliwość

oraz wskazówki udzielone podczas pisania pracy.

Spis treści

1	Wstęp	8
2	Podstawy teoretyczne	10
2.1	Gra w postaci strategicznej	10
2.2	Gry dwuosobowe	12
2.3	Klasyczny dylemat więźnia	15
3	Rozszerzony dylemat więźnia	19
3.1	Nowe strategie	19
3.2	Punkty równowagi Nasha w grze dwuosobowej	21
3.3	Wartości wypłat	23
3.4	Reputacja w społeczeństwie	26
3.5	Społeczeństwo rozrastające się	32
3.6	Społeczeństwo o stałej liczebności	41
4	Paradoks Parrondo	49
4.1	Bohater w społeczeństwach	49
4.2	Gry w społeczeństwach	49
4.3	Gra łączona	52
5	Gra trzyosobowa	56
5.1	Strategie w grze trzyosobowej	56
5.2	Punkty równowagi Nasha	56
6	Podsumowanie	66

1 Wstęp

Celem niniejszej pracy było zaprojektowanie i rozwiązanie rozszerzonej wersji dylematu więźnia mając na uwadze reputację graczy. Rozszerzenie polega na zwiększeniu możliwości wyboru strategii, a za rozwiązanie uznaje się określenie punktów równowagi Nasha. Praca zakładała uwzględnienie reputacji graczy i sprawdzenie zmian zachowań w procesie ewolucji społeczeństwa.

Za narodziny teorii gier uznaje się publikację w 1944 r. Johna von Neumanna i Oskara Morgensterna pracy „Theory of Games and Economic Behaviour”, jest to zatem stosunkowo młody dział nauki rozwijany później przez Johna Nasha. Ten ostatni jest laureatem Nagrody Nobla z dziedziny Ekonomii i Nagrody Abela - matematycznego odpowiednika wyróżnień przyznawanych w myśl testamentu wynalazcy dynamitu. Poza zainteresowanymi najbardziej prestiżowymi nagrodami świata nauki, Nash znany jest też fanom kinematografii. Film „Piękny umysł” [1] opowiadający o życiu matematyka został nagrodzony czterema Oskarami. Jego nazwiskiem określa się punkty równowagi, będące przedmiotem zainteresowania tej pracy.

Konflikty interesów są nieodłącznym elementem rzeczywistości, dlatego istotna jest znajomość mechanizmów pozwalających na przewidzenie zachowania rywala czy wybrania najlepszej możliwej opcji. Teoria gier przedstawia sytuacje wyboru jako gry i szuka w nich optymalnych decyzji. Jednym z najpopularniejszych problemów teorii gier jest gra nazywana dylematem więźnia, gdzie gracze wybierają między dwoma strategiami (kooperacją i zdradą), a rozsądny z punktu widzenia interesu każdego wybór prowadzi do sytuacji mniej korzystnej od tej, która miałaby miejsce, gdyby każdy z nich wybrał tę „mniej rozsądną” opcję.

Dwie możliwości wyboru, jakie oferuje klasyczna wersja dylematu więźnia, są ograniczeniem graczy i zmuszają ich do określenia się jako naiwnych kooperantów lub bezwzględnych zdrajców. Brak opcji pośrednich powoduje, że jeszcze przed startem gry, gracze są nomen omen skazani na negatywne postrzeganie. Wybór między byciem naiwniakiem a zdrajcą jest jak łowienie ryb w zatrutym stawie: nie złowisz - słaby rybak, złowisz - zatruty rybak. Życiowe wybory rzadko dają możliwość takiej polaryzacji, zwykle gama zachowań jest szersza. Pojawia się zatem pytanie: czy rzeczywiście nie ma innych opcji? Analiza historii opisującej dylemat nasuwa propozycję nowego sposobu patrzenia na tę sytuację, który pozwala określić, oprócz kooperantów i zdrajców, charaktery uległych presji i histeryków. Poszerzenie palety zachowań prowadzi do określenia punktów równowagi, raczej niedyskutowanych dotąd w kontekście dylematu. Autorowi wydaje się jednak, że te równowagi są nieodłącznym elementem życia społecznego.

Wprowadzenie nowych charakterów implikuje konieczność dookreślenia sytuacji w grze. Nowe możliwości prowadzą do nowych rozwiązań, a te są siłą napędową rozwoju społeczeństwa. Czy w przypadku nowych charakterów jest podobnie? Czy szansa oderwania się od dwubiegunowego

schematu jest na tyle kusząca, by ten schemat porzucić? Aplikacja narzędzi teorii gier do procesu analizy rozwoju społeczeństwa odpowiada na te pytania, podważając przy tym wizję świata pełnego zdrajców. Opis przebiegu ewolucji społeczeństwa opiera się na określonych zasadach, z których podstawowa to własny interes każdego z członków społeczności.

Kolejny krok w rozważaniach przyjętego modelu w pierwszym skojarzeniu wydaje się stać w opozycji do zdroworozsądkowego podejścia. Próba dolewania wody do beczki z wodą celem otrzymania wina skazana jest na porażkę (może poza jednym wyjątkiem, opisanym szerzej przez Ewangelistę Jana [2]). Zamiarem autora było określenie w kontekście prezentowanego modelu dwóch społeczności, w których przebywanie daje efekt przegrywający, a odpowiednie przenoszenie się między nimi - wygrywający. Jest to jawne odniesienie do paradoksu Parrondo [3] i może być nazywane społecznym paradoksem Parrondo.

W znacznej części praca poświęcona jest dwuosobowej grze, ale nie są to ramy, w których model się zamyka. Założeniem pracy jest pokazanie zależności w możliwie ogólnym przypadku, dlatego ukazany zostaje sposób przejścia do gier wieloosobowych na przykładzie gry trzyosobowej, mimo komplikacji jakie narzuca proponowane rozszerzenie dylematu. Zwiększenie liczby graczy, potęguje możliwe strategie, co powoduje wzrost możliwych sytuacji w grze. Analiza preferencji graczy w każdej sytuacji prowadzi do określenia punktów równowagi, które okazują się wykazywać analogię do punktów równowagi w grze dwuosobowej.

2 Podstawy teoretyczne

2.1 Gra w postaci strategicznej

Słowo „gra” może budzić różne skojarzenia. Jedni będą je kojarzyć z rzucaniem kostką i przesuwaniem pionków po planszy, inni z jakąś dyscypliną sportową, a jeszcze inni z grami hazardowymi. Wszystkie te skojarzenia są dobre, ale nie pozwalają w jasny sposób określić czym jest gra w rozumieniu teorii gier. Na potrzeby dalszych rozważań należy uzmysłwić sobie czym ona właściwie jest. Straffin [4] definiuje grę, jako sytuację, w której:

1. możliwe jest wskazanie co najmniej dwóch stron - graczy (niekoniecznie ludzi; mogą to być też państwa, firmy czy nawet gatunki biologiczne),
2. każdy gracz wybiera spośród możliwych strategii, które określają sposób w jaki będzie rozgrywał grę,
3. strategie wybrane przez graczy definiują wynik gry,
4. wszystkie możliwe wyniki gry mają przypisane liczbowe wartości wypłaty poszczególnych graczy.

Jednym ze sposobów przedstawienia gry jest postać strategiczna (zwana też normalną postacią gry). W tej koncepcji kluczowe są strategie graczy oraz wypłaty. Każdy gracz, biorąc pod uwagę możliwe zachowania innych graczy, wybiera jedną ze swoich strategii, a jego wypłata jest zależna od tego jakie strategie wybiorą wszyscy. Istotne jest to, że gracze podejmują swoją decyzję jednocześnie, nie znając wyborów któregośkolwiek z rywali, a wypłata określona jest liczbowo. Z określeniem wypłaty nie ma problemów, gdy stawką gry są pieniądze lub obiektywnie wycenialne dobra materialne. Wypłatą może też być coś niematerialnego (satysfakcja, trafienie do więzienia itd.), niemniej jednak nawet w takich przypadkach wymagane jest przypisanie wartości liczbowej. Sposobami określania tych wartości zajmuje się teoria użyteczności.

Grę w postaci normalnej Ferguson [5] określa jako tryplet:

1. zbiór $N = \{1, 2, \dots, n\}$ graczy,
2. ciąg $A_1, A_2, \dots, A_n$ zestawów strategii graczy,
3. ciąg $f_1(a_1, a_2, \dots, a_n), f_2(a_1, a_2, \dots, a_n), \dots, f_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ funkcji o wartościach rzeczywistych, zwanych funkcjami wypłat graczy. Strategia $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ itd.

W skład trypletu wchodzi zbiór graczy N , każdy z graczy tego zbioru ma zestaw możliwych strategii i każdemu z graczy przypisana jest funkcja wypłat. W szczególności, gracz i ma swój zestaw strategii A_i oraz przypisaną funkcję wypłat f_i .

Innym sposobem przedstawienia gry jest postać ekstensywna - drzewko. Ten sposób jednak dużo lepiej sprawdza się w opisie gier sekwencyjnych, czyli takich, w których gracze podejmują decyzję (lub decyzje) w określonej kolejności. Przykładem takiej gry może być gra EGZAMIN, która szerzej została przez autora omówiona w [6].

Ważnym czynnikiem dotyczącym sposobu rozgrywania gry jest możliwość komunikacji graczy. W pracy uwaga poświęcona będzie grom, w których tej możliwości nie będzie, decyzja gracza zależeć będzie od jego własnego postrzegania sytuacji, bez możliwości formułowania ofert i gróźb współgraczom.

Dla gier niekoalicyjnych (bez możliwości zawierania koalicji między graczami) Nash [7] określił punkt równowagi. Jest to zestaw strategii graczy taki, że żadnemu z graczy nie opłaca się zmienić swojej strategii, jeżeli strategię jego rywali pozostaną niezmiennione. Zatem punktem równowagi w grze n -osobowej będzie punkt $(a_1^*, \dots, a_n^*)$, gdzie strategia a_i^* i -tego gracza będzie należeć do zestawu możliwych strategii A_i i -tego gracza oraz dla każdego gracza i funkcja wypłaty f_i , gdy wybierze on ze swojego zestawu możliwych strategii strategię inną niż a_i^* , nie wzrośnie. Można zapisać, że punkt $(a_1^*, \dots, a_n^*)$ jest punktem równowagi, gdy dla każdego gracza:

$$\forall a_i \in A_i, f_i(a_1^*, \dots, a_i^*, \dots, a_n^*) \geq f_i(a_1^*, \dots, a_i, \dots, a_n^*) \quad (1)$$

W celu uproszczenia zapisu, kombinację strategii graczy - argumentu funkcji wypłat - będziemy nazywać sytuacją w grze, oznaczać literą s i rozumieć następująco: $s = (a_1, \dots, a_n)$, gdzie a_i jest strategią gracza i należącą do zbioru możliwych strategii A_i .

Takie określenie gry i punktu równowagi sprawia, że dwie gry, które mają ten sam zbiór graczy, a gracze te same zbiory strategii, natomiast różnią się jedynie funkcjami wypłat w ściśle określony sposób, są strategicznie równoważne [8]. Powiemy zatem, że gry $\Gamma(N, \{A_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N})$ oraz $\Gamma'(N, \{A_i\}_{i \in N}, \{f'_i\}_{i \in N})$ są strategicznie równoważne, gdy istnieją stałe $c_i > 0$ oraz

$$k_i \in \mathbb{N}$$

dla każdego gracza i takie, że:

$$f'_i(s) = c_i \cdot f_i(s) + k_i \quad (2)$$

Gry strategicznie równoważne mają te same punkty równowagi. W celu udowodnienia [8] tego istotnego twierdzenia, wprowadza się oznaczenie $s||a'_l$, które oznacza sytuację s przy zastąpieniu strategii a_l l -tego gracza przez a'_l . Przy takich oznaczeniach sytuacja s :

$s = (a_1, \dots, a_l, \dots, a_n)$, natomiast sytuacja $s||a'_l$:

$s||a'_l = (a_1, \dots, a'_l, \dots, a_n)$. Załóżmy, że sytuacja s jest punktem równowagi gry Γ oraz gra Γ' jest strategicznie równoważna grze Γ . Wtedy z faktu, że sytuacja s jest punktem równowagi wynika, że dla dowolnego gracza i i jego dowolnej strategii a_i :

$$f_i(s||a_i) \leq f_i(s) \quad (3)$$

czyli żadnemu z graczy nie opłaca się zmienić swojej strategii na inną, gdy pozostali zostaną przy swoich strategiach. Po przemnożeniu obu stron równania przez stałą $c_i > 0$ nierówność zostanie utrzymana:

$$c_i \cdot f_i(s||a_i) \leq c_i \cdot f_i(s) \quad (4)$$

Również dodanie liczby rzeczywistej k_i (zgodnie z definicją gier równoważnych strategicznie) nie zmieni nierówności:

$$c_i \cdot f_i(s||a_i) + k_i \leq c_i \cdot f_i(s) + k_i \quad (5)$$

W otrzymanej nierówności można rozpoznać funkcję wypłat gry strategicznie równoważnej grze Γ . Zatem:

$$f'_i(s||a_i) \leq f'_i(s) \quad (6)$$

co jest warunkiem punktu równowagi w grze Γ' . Widać, że sytuacja s jest punktem równowagi w obu grach.

2.2 Gry dwuosobowe

Gra dwuosobowa to gra, w której uczestniczy dwóch graczy. Dla gier dwuosobowych o niewielkiej liczbie strategii wygodną formą przedstawienia jest postać macierzowa. Elementami tej macierzy są wartości funkcji wypłat, a wiersze i kolumny odpowiadają określonym strategiom graczy. Liczebność zbioru możliwych strategii graczy determinuje ilość wierszy i kolumn, stąd dla gier, w których gracze mają wiele możliwości zagrania, zapis macierzowy może nie być odpowiedni.

Szczególną klasą gier są gry o sumie zerowej. W takich grach suma wypłat w każdej sytuacji wynosi zero. Przykład takiej gry przedstawiono poniżej.

Gra 1 *Rozważmy dwóch graczy, którzy grają w kamień - papier - nożyce, a przegrany płaci wygranemu złotówkę. W tej grze gracze jednocześnie pokazują jeden z trzech symboli: kamień, papier lub nożyce. Gracz, który pokazuje kamień wygrywa, jeżeli przeciwnik wybrał nożyce, a przegrywa, gdy przeciwnik wybrał papier. Gracz, który wybierze papier przegra z tym, który wskaże nożyce, natomiast jeżeli obaj wskażą to samo, jest remis.*

Utożsamiając jednego z graczy z wierszami, a drugiego z kolumnami tabeli, grę można przedstawić w poniższej formie. Jako pierwsze zostały podane wypłaty gracza, którego strategię przedstawiają wiersze

Tabela 1: Gra w kamień, papier i nożyce.

	Kamień	Papier	Nożyce
Kamień	0 ; 0	-1 ; 1	1 ; -1
Papier	1 ; -1	0 ; 0	-1 ; 1
Nożyce	-1 ; 1	1 ; -1	0 ; 0

lub równoważnej postaci macierzowej - macierz G .

$$G = \begin{bmatrix} (0, 0) & (-1, 1) & (1, -1) \\ (1, -1) & (0, 0) & (-1, 1) \\ (-1, 1) & (1, -1) & (0, 0) \end{bmatrix}$$

Ze względu na to, że wypłata pierwszego gracza w danej sytuacji, determinuje wypłatę drugiego, zwykle podaje się tylko wypłatę pierwszego gracza, pamiętając, że gracz drugi otrzyma w danej sytuacji $f_2(s) = -f_1(s)$:

$$G' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierze G oraz G' opisują tę samą grę o sumie zerowej.

Gry o sumie zerowej stanowią podzbiór gier o sumie stałej, czyli takich, w których suma wypłat graczy w każdej sytuacji jest taka sama i równa pewnej stałej. Oczywiście dla gier o sumie zerowej stała ta ma wartość zero. Każda gra o sumie stałej jest strategicznie równoważna odpowiedniej grze o sumie zerowej.

O wielu grach można jednak powiedzieć, że suma wypłat graczy w każdej sytuacji jest różna - przykładem jest tutaj omawiany w dalszej części dylemat więźnia, jak również rozszerzony dylemat więźnia, któremu poświęcona jest ta praca. Przykładową grę o sumie niezerowej przedstawiono poniżej.

Gra 2 Rozważmy dwie rywalizujące firmy, które mogą zastosować dwie strategie reklamy pewnego produktu. Zysk danej firmy będzie zależał od tego na jaką reklamę się zdecyduje ta firma, ale i od wyboru konkurencji. Niech firma PIERWSZA ma do wyboru strategie A oraz B, a firma DRUGA strategie C oraz D. Firmę PIERWSZA będziemy utożsamiać z wierszami, a DRUGA z kolumnami.

Jeżeli firma PIERWSZA zdecyduje się na strategię A, to zarobi 1mln \$, gdy firma DRUGA zdecyduje się na strategię C i dwa razy więcej, gdy firma DRUGA zdecyduje się na strategię D. Jeżeli firma PIERWSZA zdecyduje się na strategię B, to zarobi 3 mln \$, gdy firma DRUGA zdecyduje się na strategię C i połowę mniej, gdy firma DRUGA zdecyduje się na strategię D. Jeżeli firma DRUGA zdecyduje się na strategię C, to zarobi 2 mln \$, gdy firma PIERWSZA

zdecyduje się na strategię A i 3 mln \$, gdy firma PIERWSZA zdecyduje się na strategię B. Jeżeli firma DRUGA zdecyduje się na strategię D, to zarobi 1 mln \$, gdy firma PIERWSZA zdecyduje się na strategię A i dwa razy więcej, gdy firma PIERWSZA zdecyduje się na strategię B.

Tę grę, przyjmując za jednostkę mln \$, można zapisać w postaci:

Tabela 2: Gra rywalizujących firm na polu reklamy.

	C	D
A	1 ; 2	2 ; 1
B	3 ; 3	1.5 ; 2

lub równoważnej postaci macierzowej:

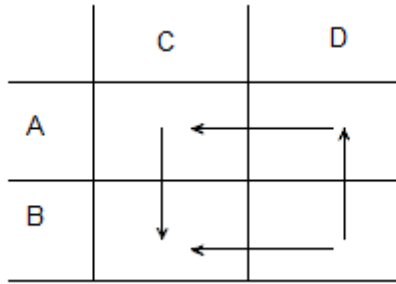
$$G = \begin{bmatrix} (1, 2) & (2, 1) \\ (3, 3) & (1.5, 2) \end{bmatrix}$$

Jako pierwsze zostały zapisane wypłaty firmy PIERWSZA (której strategię są reprezentowane przez wiersze), a jako drugie - firmy DRUGA (której strategię są reprezentowane przez kolumny).

Analiza wypłat w poszczególnych sytuacjach może pozwolić na znalezienie takiej sytuacji, w której żadnemu z graczy nie będzie się opłacało zmienić swojej strategii, jeżeli rywal nie dokona zmiany. Taki stabilny punkt został zdefiniowany wcześniej jako punkt równowagi Nasha.

W kolumnie C najlepszym wyborem firmy PIERWSZA jest strategia B, w kolumnie D najlepszym wyborem firmy pierwszej jest strategia A (odpowiednio wypłaty 3 oraz 2 są lepsze od 1 oraz 1.5). W wierszu A najlepszym wyborem firmy DRUGA jest strategia C, w wierszu B najlepszym wyborem firmy DRUGA jest strategia C (odpowiednio wypłaty 2 oraz 3 są lepsze od 1 oraz 2). Wygodnym sposobem znajdowania punktów równowagi jest diagram przesunięć [4]. Umieszcza się na nim strzałki prowadzące do najlepszej decyzji gracza przy założeniu konkretnej decyzji rywala. Jeżeli jest miejsce, w którym groty strzałek związanych z decyzją obu graczy się spotykają - jest to punkt równowagi, jak zaznaczono na rysunku 1.

Sytuacja BC jest punktem równowagi w tej grze.



Rysunek 1: Diagram przesunięć w grze 2. Strzałki zbiegają się w polu BC, punkt ten jest punktem równowagi w grze 1. Żadnemu z graczy nie opłaca się zmieniać swojej strategii, jeżeli rywal tego nie zrobi.

Nietrudne do zauważenia jest to, że w podanym przykładzie strategia D jest nieopłacalna dla gracza DRUGA. Bez znaczenia, jaką formę reklamy wybierze firma PIERWSZA, zawsze więcej firma DRUGA zarobi, wybierając C zamiast D. O strategii, która bez względu na decyzję rywala daje wypłaty nie większe niż inna strategia, mówi się, że jest zdominowana [4].

Kolejnym pojęciem wykorzystywanym w dalszym opisie jest optymalność w sensie Pareto (inaczej: paretooptymalność) [4]. Sytuacja s jest paretooptymalna, gdy nie ma innego rozwiązania takiego, że wypłata jednego z graczy jest większa, a drugiego nie mniejsza od tej w sytuacji s . Zatem wynik gry nie jest optymalny w sensie Pareto, gdy gra ma inny możliwy wynik, dający:

1. jednemu z graczy więcej, a drugiemu tyle samo
lub
2. obu graczom większą wypłatę.

W przedstawionej przykładowej grze, rozwiązanie jest paretooptymalne - nie ma sytuacji, w której obaj gracze mają wypłatę nie mniejszą niż $(3, 3)$.

2.3 Klasyczny dylemat więźnia

Albert Tucker podczas seminarium w Uniwersytecie Stanforda w 1950 r. opisał pewną grę o sumie niezerowej [4]:

Gra 3 *Dwóch aresztowanych, podejrzewanych o popełnienie wspólnie przestępstwa, zostało zabranych do osobnych pokoi na przesłuchanie. Każdemu z nich prokurator oświadczył, że:*

- *jeśli tylko jeden z nich zdradzi swojego partnera, to zostanie nagrodzony (wypłata wyniesie 1), a milczący zostanie ukarany jako winny (wypłata wyniesie -2),*

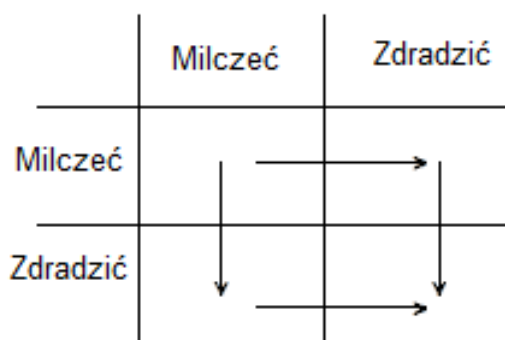
- jeśli obaj będą *milczeć*, to wyjdą wolni (wypłata wyniesie 0),
- jeśli obaj zdradzą partnera, to obaj zostaną ukarani (wypłata wyniesie -1).

Opis ten dotyczy gry zaproponowanej przez Dreshera i Flooda, która od tego czasu jest nazywana *dylematem więźnia*.

Tabela 3: Prezentowana przez Tuckera wersja dylematu więźnia

	Milczeć	Zdradzić
Milczeć	0 ; 0	-2 ; 1
Zdradzić	1 ; -2	-1 ; -1

Diagram przesunięć w tej grze prezentuje rysunek 2. Widać, że punkt równowagi nie jest paretooptimalny - w tej sytuacji gracze otrzymują wypłaty -1 , a jeżeli obaj zdecydowaliby się *milczeć*, otrzymaliby 0. Strategia *milczeć* jest zdominowana przez strategię *zdradzić*, niezależnie od zachowania drugiego gracza bardziej opłacalne jest zdradzanie.



Rysunek 2: Diagram przesunięć w dylemacie więźnia. Punktem równowagi jest sytuacja Zdradzić-Zdradzić.

Punkt równowagi Nasha w tej grze nie jest paretooptimalny, wynika to z zależności między wypłatami. W ogólnej wersji podaje się wypłaty [9]:

- R - nagroda za współpracę, gdy obaj milczą
- S - wypłata frajera, gdy milczy i zostanie zdradzony
- T - pokusa do zdrady
- P - kara za brak współpracy

Tabela 4: Postać ogólna dylematu więźnia.

	Milczeć	Zdradzić
Milczeć	R ; R	S ; T
Zdradzić	T ; S	P ; P

Rapoport zauważa, że wypłaty powinny spełniać warunek:

$$T > R > P > S \quad (7)$$

Taka konstrukcja wypłat sprawia, że gracz woli pokusę T od nagrody za współpracę R oraz karę za brak współpracy P od wypłaty zdradzonego S . W związku z tym punktem równowagi będzie tutaj Zdradzić-Zdradzić o wypłacie P dla graczy, chociaż wiąże się to z mniejszą wypłatą niż sytuacja Milczeć-Milczeć o wypłacie R dla każdego.

Drugim warunkiem, jaki stawia Rapoport jest nierówność mająca na celu określenie sytuacji Milczeć-Milczeć jako jedynej korzystnej kooperacyjnie.

$$2R > S + T \quad (8)$$

Spełnienie tego warunku zabezpiecza przed sytuacją w której gracze z premedytacją donosiliby na siebie na zmianę tak, by jeden z nich zgarniał pokusę T , a w kolejnej grze odbierał wypłatę frajera S . Drugi warunek prowadzi w konsekwencji do tego, że jedyna sytuacja (nawet w przypadku wielokrotnej gry), która jest paretooptimalna to obopólne milczenie.

Gra spełniająca oba warunki jawi się jako wybór między racjonalnością indywidualną, a racjonalnością grupową. Patrzenie na indywidualną korzyść nakazuje zdradę, ale dużo korzystniejsze jest milczenie. Jeżeli obaj gracze dążą do indywidualnego zysku, to obaj na tym tracą.

Straffin [4] znajduje tutaj odniesienie do dwóch pobliskich sklepów z podobnymi akcesoriami. Jeżeli któryś sklep obniży ceny, może liczyć na przejęcie części klientów drugiego, a co za tym idzie zysk (w domyśle: zdrada). Odpowiedzią na obniżenie cen u konkurencji jest obniżenie cen u siebie, aby nie tracić kupujących (w domyśle: zdrada). Efekt tego jest taki, że oba sklepy obniżają ceny, a rozkład klientów pozostaje ten sam, czyli obaj tracą względem stanu początkowego (w domyśle: milczenia).

Innym, często podawanym przykładem, jest wyścig zbrojeń. Rozważmy tutaj dwa sąsiadujące państwa, o których mówi się, że pokój jest stanem przejściowym. Jeżeli jedno z nich zwiększy wydatki na wojsko, odpowiedzią drugiego będzie to samo. W efekcie w obu państwach rozwój innych dziedzin zostanie spowolniony ze względu na mniejsze nakłady finansowe.

3 Rozszerzony dylemat więźnia

3.1 Nowe strategie

W historii zaproponowanej przez Tuckera zbiór możliwych strategii dla każdego gracza jest dwuelementowy i ogranicza się do skrajnych opcji: milczenia oraz zdrady. Ideą tej pracy jest dodanie możliwości wyboru nowych strategii graczom, które mogą zmienić oblicze gry. Warte odnotowania jest to, że opowieść Tuckera była tak ułożona, by odpowiadać zależnościom z gry Dreshe-ra i Flooda. Tutaj natomiast postępowanie jest odwrotne - klasyczna gra zostaje rozszerzona, by uwzględniać dodatkowe sytuacje, jakie mogą wynikać z historii o przestępcach.

Jednym z istotnych czynników przy świadomym popełnianiu przestępstwa jest motywacja do danego czynu zakazanego. Ze względu na to, że przestępstwa nie popełnia w omawianej grze jedna osoba, narzuca się warunek, by czynnik motywujący był podzielny. Dobrym skojarzeniem tutaj mogą być wycenialne dobra materialne - złodziejski łup. W dalszej części pracy całkowity łup, jaki mają do równego podziału omawiani gracze, zostanie oznaczony symbolem R .

Ze względu na pewne poszlaki policja podejrzewa graczy o rabunek i wzywa na przesłuchanie. Zanim jednak gracze udają się na przesłuchanie, udaje im się ukryć łup. Brak dostatecznych dowodów sprawia, że gracze, jeżeli nie wydadzą się, będą mogli na wolności cieszyć się swoją częścią łupu. Z drugiej strony jest to dla każdego okazja, by wydając jednego z kompanów, móc dzielić łup na mniej graczy. Możliwość zgarnięcia większego łupu po wydaniu kogoś jest odpowiednikiem pokusy w klasycznej wersji. Odpowiednikiem nagrody za współpracę jest należna każdemu część łupu.

Tak jak klasycznie, na moment przesłuchania gracze zostają rozdzieleni, by decyzja każdego z nich nie była podyktowana wiedzą na temat zachowania innych graczy. Bez względu na liczbę graczy, możliwe zachowania to:

- milczenie - całkowity brak współpracy z policją;
- wydanie siebie - przyznanie się do popełnienia czynu, wskazanie miejsca łupu;
- wydanie siebie i pewnej części kompanów - przekazania dowodów na udział kompanów w przestępstwie oraz przyznanie się do winy i wskazanie miejsca łupu;
- wydanie pewnej części kompanów - przekazanie dowodów na udział kompanów w przestępstwie bez wyjawiania informacji o swoim udziale;
- wydanie wszystkich - przekazanie dowodów na udział całej grupy w przestępstwie, wskazanie miejsca łupu i przyznanie się do winy;

W porównaniu z klasyczną wersją, ilość strategii wzrasta i jest zależna od ilości graczy, a konkretnie od ilości podzbiorów zbioru o liczebności równej liczbie graczy. Przy n graczach, każdy z nich ma 2^n możliwych strategii. Gracz może wydać policji pewien podzbiór graczy, a możliwości wybrania podzbioru ze zbioru n -elementowego jest właśnie 2^n . W grze dwuosobowej, na której teraz będzie skupiona uwaga, gracze będą mieli po 4 możliwe strategie, z tego wynika, że wszystkich sytuacji w grze będzie 16.

Dla ustalenia uwagi oznaczmy graczy jako *gracza A* oraz *gracza B*. Strategie *gracza A* w grze dwuosobowej:

1. D_0 - gracz milczy;
2. D_A - gracz przyznaje się i wydaje miejsce łupu;
3. D_B - gracz wydaje partnera;
4. D_{AB} - gracz przyznaje się, wydaje partnera i miejsce łupu;

Strategie *gracza B* są analogicznie.

Przyszłość obu graczy zależna jest od ich decyzji:

- gracz, który przyznaje się i wydaje miejsce łupu poniesie niewielką karę za popełniony czyn, bez względu na to, co zrobi jego partner. Wypłata związana z tym zdarzeniem będzie nazywana wypłatą ugody i oznaczana symbolem U .
- gracz, który przyznaje się i wydaje swojego partnera oraz miejsce łupu poniesie niewielką karę bez względu na zachowanie partnera, podobnie jak w poprzednim przypadku będzie to U .
- jeżeli obaj będą milczeć, wyjdą na wolność i będą mogli podzielić łup, otrzymają po $R/2$.
- jeżeli jeden gracz będzie milczał, a drugi doniesie na niego, milczący otrzyma karę więzienia oznaczaną P , natomiast donoszący, jeżeli nie przyznał się sam, będzie mógł zabrać cały łup R .
- jeżeli jeden będzie milczał, a drugi przyzna się i nie doniesie, milczący wyjdzie wolny, ale nie będzie mógł zabrać łupu, ponieważ przyznający się wskazał miejsce przechowywania łupu policji, w związku z tym milczący nie otrzyma nic poza wolnością oznaczaną symbolem F .
- jeżeli obaj oskarżą się wzajemnie, to obaj trafiają do więzienia.

Wynika z tego, że gracz, który się nie przyznaje, a jest na niego donos partnera, trafia do więzienia. Ten zaś, który się przyznaje, zawsze otrzymuje małą karę.

W grze pojawia się kilka możliwości wypłat:

- R - wartość całego łupu, otrzymuje ją gracz, który wyda partnera, a nie zostanie wydany,
- $R/2$ - wartość połowy łupu, otrzymują ją gracze, jeżeli obaj będą milczeć,
- P - wartość kary więzienia, otrzymuje ją gracz, który nie przyzna się, a zostanie wydany przez partnera,
- U - wartość ugody z policją, otrzymuje ją gracz, który wskaże miejsce łupu i przyzna się do winy,
- F - wartość wyjścia wolnym bez łupu, otrzymuje ją gracz, który nie został oskarżony, a jego partner się przyznał.

Powyższe wartości wypłat są użytecznościami związanymi z konkretnym wydarzeniem. Określeniem konkretnych wartości w rzeczywistych przypadkach zajmuje się teoria użyteczności. Na tym etapie uznaje się, że wartości te są określone liczbowo, bez wnikania w dokładną ich znajomość (co następuje w jednej z dalszych części).

3.2 Punkty równowagi Nasha w grze dwuosobowej

Znając zestawy możliwych strategii oraz wypłaty graczy we wszystkich sytuacjach, można zapisać grę w postaci strategicznej.

Należy zwrócić uwagę na kolejność zapisu strategii obu graczy. Strategie zapisane są w kolejności: milczeć, przyznać się, donieść na rywala, przyznać się i donieść na rywala. Dzięki takiemu zapisowi lepiej widoczna jest symetria w grze. Jeżeli przez G_A oznaczmy macierz wypłat gracza A , a symbolem G_B macierz wypłat gracza B , to macierze te będą spełniały warunek:

$$G_A = G_B^T \quad (9)$$

Żaden z graczy nie jest w tej grze uprzywilejowany.

Tabela 5: Ogólna postać rozszerzonego dylematu więźnia. W wierszach strategię gracza A , w kolumnach strategię gracza B .

	D_0	D_B	D_A	D_{AB}
D_0	R/2 ; R/2	F ; U	P ; R	P ; U
D_A	U ; F	U ; U	U ; F	U ; U
D_B	R ; P	F ; U	P ; P	P ; U
D_{AB}	U ; P	U ; U	U ; P	U ; U

$$G_A = \begin{bmatrix} R/2 & F & P & P \\ U & U & U & U \\ R & F & P & P \\ U & U & U & U \end{bmatrix}$$

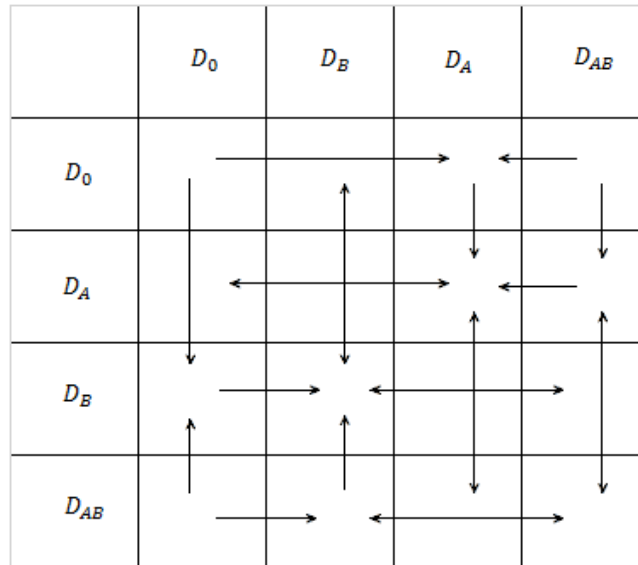
$$G_B = \begin{bmatrix} R/2 & U & R & U \\ F & U & F & U \\ P & U & P & U \\ P & U & P & U \end{bmatrix}$$

Z opisu gry wynika zależność między różnymi wypłatami. Oczywiście cały łup warty jest więcej niż jego część, stąd $R > R/2$. Jakakolwiek część łupu jest więcej warta niż jego brak, stąd wypłata wychodzącego wolno, ale bez łupu będzie mniejsza od wspomnianych opcji:

$R > R/2 > F$. Sytuacje, w których gracza czeka kara U lub P są z kolei mniej korzystne od chociażby wolności, a im większa kara, tym użyteczność związana z tym zdarzeniem jest mniejsza, stąd $F > U > P$. Ostatecznie:

$$R > R/2 > F > U > P \quad (10)$$

co jest odpowiednikiem pierwszego warunku Rapoporta w rozszerzonym dylemacie więźnia. Istotą pierwszego warunku Rapoporta było wskazanie punktu równowagi w grze. Tak samo tutaj, powyższy warunek pozwoli na wskazanie punktów równowagi. Diagram przesunięć pokazano na rysunku 3.



Rysunek 3: Diagram przesunięć w rozszerzonym dylemacie więźnia. Strzałki pochodzące od różnych graczy spotykają się w trzech polach, gra ma zatem trzy punkty równowagi.

Zgodnie z definicją, sytuacje, w których żadnemu z graczy nie opłaca się zmienić swojej strategii, jeżeli nie uczyni tego też rywal, to punkty równowagi. W przedstawionej grze można znaleźć 3 punkty równowagi Nasha:

1. $D_B D_B$
2. $D_A D_A$
3. $D_{AB} D_{AB}$

Można zauważyć, że każde z tych rozwiązań wymaga przyznania się co najmniej jednego z graczy, w związku z tym gracze tracą szansę na łup. Dwa z nich opierają się na doniesieniu na gracza, który się przyznaje, a trzecie polega na przyznaniu się i wydaniu współnika.

Przedstawione punkty równowagi nie są paretooptymalne, gwarantują one w najlepszej sytuacji wypłaty F oraz U , a sytuacja $D_0 D_0$ daje wypłaty $R/2$ obu graczom, czyli, w myśl warunku (10), dla każdego z nich jest to bardziej korzystne. Rapoport w swoim opisie dylematu więźnia podstawiał warunek (8), który ustanawiał strategię Milczeć - Milczeć jako jedyną korzystną kooperacyjnie. Również w rozszerzonej wersji stawia się takie wymaganie. Jedyną sytuacją, w której przynajmniej jedna wypłata jest lepsza od tej przy milczeniu obu graczy, jest sytuacja, w której jeden milczy, a drugi go zdradza. Należy narzucić taki warunek, by, w przypadku wielokrotnej gry, graczom nie opłacało się naprzemienne zdradzanie i milczenie. Zatem średnia wypłata gracza przy $D_0 D_0$ powinna być większa od średniej wypłaty przy naprzemiennym donoszeniu na partnera i milczeniu:

$$R/2 > \frac{P + R}{2} \quad (11)$$

I to właśnie jest odpowiednikiem drugiego warunku Rapoportu dla rozszerzonego dylematu więźnia. Warunki (10) i (11) określają punkty równowagi w prezentowanej grze i gwarantują, że obopólne milczenie jest najkorzystniejszym kooperacyjnie rozwiązaniem.

3.3 Wartości wypłat

Na potrzeby dalszej analizy rozszerzonego dylematu więźnia należy określić konkretne wartości wypłat. Bazą do ich określenia będą przedstawione w poprzedniej części warunki.

Wypłata $R/2$ jest podziałem łupu R na dwóch graczy, w związku z tym wartość $R/2$ będzie połową wartości R :

$$R/2 = \frac{R}{2} \quad (12)$$

Korzystając z tego oraz z warunku (10):

$$R > \frac{R}{2} \quad (13)$$

a to doprowadza do wniosku, że:

$$R/2 > 0 \quad (14)$$

oraz

$$R > 0 \quad (15)$$

Korzystając z drugiego warunku i podstawiając (12) do (11):

$$\frac{R}{2} > \frac{P + R}{2} \quad (16)$$

co doprowadza do:

$$P < 0 \quad (17)$$

Dodatkowo można zażądać, by wartość oczekiwana wypłaty przy założeniu równego prawdopodobieństwa każdej decyzji rywala była taka sama. Założenie to można uzasadnić brakiem znajomości drugiego gracza, który chcąc osiągnąć rozwiązanie paretooptymalne będzie milczał lub chcąc osiągnąć któryś z punktów równowagi przyzna się lub doniesie. Oznaczając przy tym wartość oczekiwaną wypłaty przy decyzji *dec* jako $EV(dec)$ można zapisać wartości oczekiwane wypłat przy konkretnych decyzjach, uznając każdy wybór rywala za równie możliwy, z perspektywy *gracza A* w postaci:

$$EV(D_0) = \frac{1}{4} \cdot [\frac{R}{2} + F + P + P] \quad (18)$$

$$EV(D_A) = \frac{1}{4} \cdot [U + U + U + U] = U \quad (19)$$

$$EV(D_B) = \frac{1}{4} \cdot [R + F + P + P] \quad (20)$$

$$EV(D_{AB}) = \frac{1}{4} \cdot [U + U + U + U] = U \quad (21)$$

Z powyższych równań wynika, że osiągnięcie równości wszystkich wartości oczekiwanych jest niemożliwe, ponieważ wymagałoby zerowania wartości R , a to w myśl warunku (15) nie może mieć miejsca. Zawsze wartość oczekiwana związana z doniesieniem na rywala będzie większa od tej związanej z milczeniem. Można natomiast przyrównać wartość oczekiwaną donosu na rywala z przyznaniem się lub z przyznaniem i doniesieniem.

$$EV(D_B) = EV(D_A) = EV(D_{AB}) \quad (22)$$

Prowadzi to do określenia wartości wypłaty U :

$$U = \frac{R + F + 2P}{4} \quad (23)$$

Korzystając z udowodnionego we wstępie twierdzenia o grach strategicznie równoważnych, pomnożenie wypłat gracza przez dodatnią stałą, a także dodanie do wypłat gracza stałej nie

zmieni punktów równowagi w grze. W związku z tym, omawianą grę można przedstawić w postaci strategicznie równoważnej gry, w której ustalone są dwie wartości wypłat, ponieważ będzie można dobrać tak wartości tych stałych, by dwie wybrane wypłaty miały konkretne wartości. Niech zatem:

$$F = 0 \quad (24)$$

$$P = -1 \quad (25)$$

Dobranie zerowej wartości do wypłaty związanej z wolnością wynika z tego, że gracz nie otrzyma ani łupu, ani kary. Wartość kary więzienia została ustalona tak, by spełniała (17).

Na podstawie (24) oraz (25) można doprecyzować wypłatę U wynikającą z (23):

$$U = \frac{R - 2}{4} \quad (26)$$

Ponieważ $U < F$, to $U < 0$. Z drugiej strony $U > P$, więc $U > -1$. Wprowadzając te ograniczenia do (26):

$$-1 < \frac{R - 2}{4} < 0 \quad (27)$$

A to prowadzi do określenia przedziału wartości dla R :

$$-2 < R < 2 \quad (28)$$

ale $R > 0$, zatem:

$$0 < R < 2 \quad (29)$$

Na rysunku 4 przedstawiono możliwe wartości wypłat w zależności od wartości wypłaty R . W miarę wzrostu wartości R , rosną różnice między wypłatami, jedynie różnica między wolnością F a niewielką karą U się zaciera. Zdecydowano się przyjąć wartość wypłaty R równej wartości w środku przedziału dozwolonego. W związku z tym ostateczne wartości wypłat wynoszą:

- $R = 1$
- $R/2 = \frac{1}{2}$
- $F = 0$
- $U = -\frac{1}{4}$
- $P = -1$

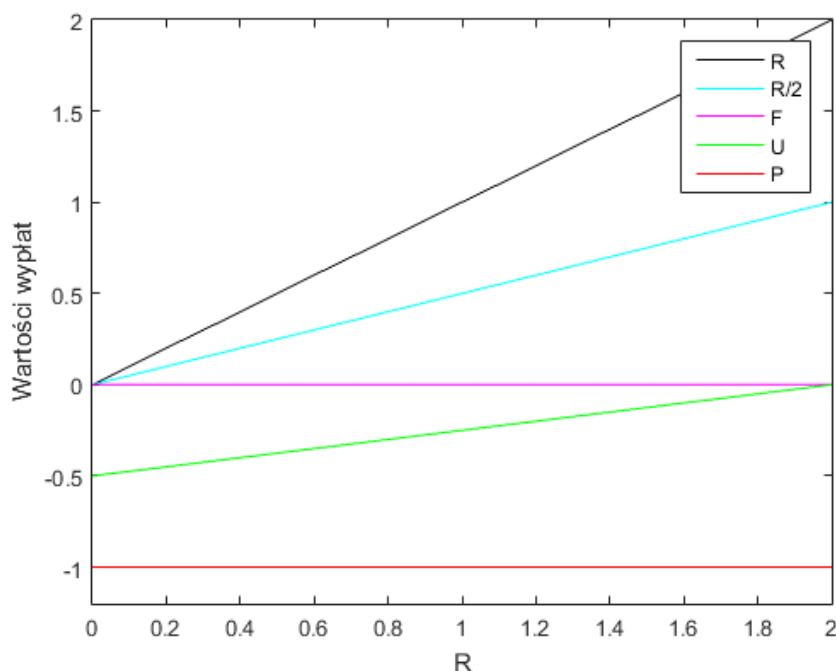
Oczywiście spełniony jest warunek (10), ponieważ:

$$R = 1 > R/2 = \frac{1}{2} > F = 0 > U = -\frac{1}{4} > P = -1 \quad (30)$$

oraz warunek (11), ponieważ:

$$R/2 = \frac{1}{2} > \frac{-1 + 1}{2} = \frac{P + R}{2} \quad (31)$$

I gra przyjmuje postać jak w tabeli 6.



Rysunek 4: Zależność wartości wypłat od wartości wypłaty R przy uwzględnieniu warunków omawianego problemu.

Tabela 6: Rozszerzony dylemat więźnia z liczbowymi wartościami wypłat graczy. W wierszach strategię gracza A , w kolumnach strategię gracza B .

	D_0	D_B	D_A	D_{AB}
D_0	$\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$	$0; \frac{-1}{4}$	$-1; 1$	$-1; \frac{-1}{4}$
D_A	$\frac{-1}{4}; 0$	$\frac{-1}{4}; \frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{4}; 0$	$\frac{-1}{4}; \frac{-1}{4}$
D_B	$1; -1$	$0; \frac{-1}{4}$	$-1; -1$	$-1; \frac{-1}{4}$
D_{AB}	$\frac{-1}{4}; -1$	$\frac{-1}{4}; \frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{4}; -1$	$\frac{-1}{4}; \frac{-1}{4}$

3.4 Reputacja w społeczeństwie

Rozszerzony dylemat więźnia nie jest tylko modelem pasującym do konkretnej historii. Patrząc szerzej, jest opisem zachowania człowieka w społeczeństwie w sytuacji wyboru między dobrem własnym, dobrem kolektywnym, rozwiązaniami bezpiecznymi i rozwiązaniami bezpiecześnie-agresywnymi (histerycznymi). Gracz kierujący się dobrem własnym będzie donosił na rywala, a dobrem kolektywnym - milczał. Rozwiązaniem bezpiecznym jest przyznanie się, a bezpiecześnie-agresywnym przyznanie się i doniesienie. Wraz z takim spojrzeniem, przychodzi potrzeba zbadania rozszerzonego dylematu więźnia w określonych społecznościach, w których gracze wchodzi w ciągle interakcje rozgrywając rozszerzony dylemat więźnia. Zbiór graczy, którzy będą rozgrywać ze sobą dwuosobowe gry w rozszerzony dylemat więźnia nazywany będzie **społeczeństwem**.

Bezpośrednio z gry wynika, że gracze woleliby za przeciwnika mieć kogoś, kto nie zdradza swojego partnera. Są ku temu trzy powody:

- gracz nie musi rozważać przyznania się, ponieważ nie zostanie obciążony zeznaniami współnika;
- jest szansa na osiągnięcie rozwiązania paretooptimalnego;
- jest szansa na wykorzystanie okazji i zgarnięcie całego łupu;

Natomiast woleliby uniknąć kogoś, kto zdradza, ponieważ racjonalną odpowiedzią na zdradę jest przyznanie się lub przyznanie się i zdrada, a to daje zawsze wypłatę U - drugą najmniej korzystną z możliwych. Wprowadza się w związku z tym parametr β nazywany **reputacją**, który określa gracza i bezpośrednio wynika z jego wyborów w poprzednich grach. Reputację gracza po n grach, w których d_0 razy milczał, d_b razy doniósł na rywala i d_{ab} razy przyznał się i doniósł określa wzór:

$$\beta = \frac{1}{n} \cdot [d_0 - d_b - \frac{1}{2}d_{ab}] \quad (32)$$

Bezpośrednio z tak zdefiniowanej reputacji wynika przedział wartości tego parametru.

$$\beta \in [-1; 1] \quad (33)$$

Jasne jest, że gracz, który zawsze zdradza będzie miał reputację $\beta = -1$, a ten, który zawsze milczy $\beta = 1$. Gracz, który tylko się przyznaje będzie miał reputację $\beta = 0$.

Kooperantem w społeczeństwie nazywany będzie gracz, który milczy i nie wydaje ani siebie, ani partnera. Jak zaznaczono wcześniej, reputacja takiego gracza będzie osiągać wartość maksymalną $\beta_{kooperant} = 1$.

Zdrajcą w społeczeństwie nazywany będzie gracz, który zdradza partnera nie wspominając o swoim udziale. Jego reputacja przyjmować będzie wartość najmniejszą z możliwych $\beta_{zdrajca} = -1$.

Uległym w społeczeństwie nazywany będzie gracz, który ulega presji i wybiera bezpieczne rozwiązanie przyznania się. Jego reputacja $\beta_{uległy} = 0$.

Histrykiem w społeczeństwie nazywany będzie gracz, który ulega presji i przyznaje się, ale przy okazji wydaje współnika. Reputacja takiego gracza $\beta_{histryk} = -\frac{1}{2}$.

Tak określonym charakterom można przypisać odpowiednie role w społeczności. Kooperanci są skoncentrowani na równym podziale łupu, nie donoszą, są żerem dla zdrajców. Ci natomiast, w imię własnego zysku, wykorzystują kooperantów. Ulegli są biernymi obserwatorami, wydającymi ciche zezwolenie na działania zdrajców. Histrycy jasno występują przeciw zdrajcom. Ich zachowanie jest wymierzone w działania zdrajców - po pierwsze nie dają się wykorzystać (przyznają się), po drugie atakują zdrajcę (donoszą). Można przypisać im rolę karzących [10],

którzy rezygnują z zysku na rzecz wymierzenia kary. Badania [10] pokazują skłonność ludzi do tego typu zachowań. I chociaż takie podejście zniechęca nowych do bycia zdrajcą, to rykoszetem obrywają kooperanci. Mimo, że opisane działanie ma wymiar kary, to przypomina naciśnięcie wszystkich przycisków w nieznanej maszynie, stąd rola pełniona w społeczeństwie nie powinna przysłaniać znamion działania historycznego.

Rozważmy społeczeństwo składające się tylko z kooperantów. W takim społeczeństwie jedyne pojedynki między graczami to pojedynki wzajemne kooperantów. Z faktu, że kooperant zawsze gra D_0 wynika, że wynikiem pojedynków będą podziały łupu. Gracze po każdym pojedynku zyskają $R/2 = \frac{1}{2}$. Średnia wypłata kooperanta na jedną grę będzie stała. Również reputacja średnia społeczeństwa będzie na niezmiennym poziomie $\beta = 1$.

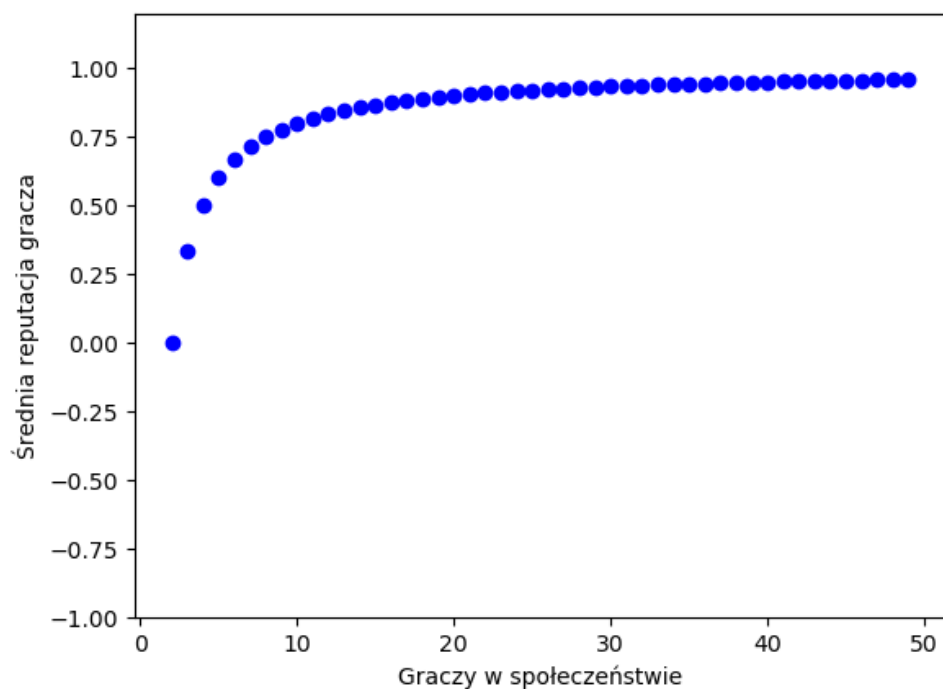
Takie społeczeństwo jest łatwym celem dla zdrajcy. Rozważmy pojawienie się jednego zdrajcy w społeczeństwie złożonym z kooperantów, na tym etapie nie jest istotne czy jest to nowa osoba w społeczeństwie, czy też któryś z kooperantów wyczuł szansę na zwiększenie swojej wypłaty. Niech społeczeństwo składa się z $N - 1$ kooperantów i jednego zdrajcy. Oprócz pojedynków kooperant - kooperant pojawi się pojedynek kooperanta ze zdrajcą. Zdrajca w takim pojedynku doniesie na milczącego kooperanta. Wynikiem gry będą wypłaty: $P = -1$ dla kooperanta oraz $R = 1$ dla zdrajcy. Z racji tego, że dla zdrajcy nie będzie innej możliwości pojedynku, jak pojedynek z kooperantem, zdrajca będzie średnio zarabiał $R = 1$ na pojedynek. Średni zarobek kooperanta zależy od łącznej liczby kooperantów w społeczeństwie. Również reputacja zależy od liczby kooperantów, im więcej, tym bliższa będzie wartości 1. Zależność średniej reputacji społeczeństwa w zależności od liczby graczy N prezentuje wykres 5. Na reputację społeczeństwa będzie składało się $N - 1$ reputacji kooperanta $\beta_{kooperant} = 1$ oraz jedna reputacja zdrajcy $\beta_{zdrajca} = -1$:

$$\beta_{spol.srednio} = \frac{(N - 1) - 1}{N} = \frac{N - 2}{N} \quad (34)$$

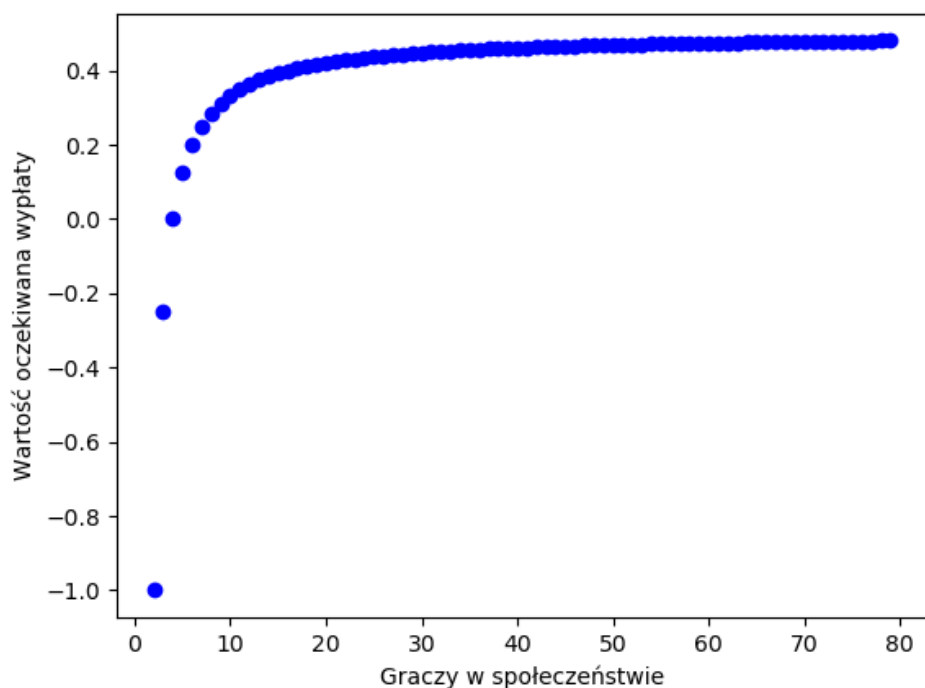
Średnia wypłata kooperanta na grę będzie mniejsza niż w przypadku, gdy społeczeństwo składało się tylko z kooperantów ze względu na pojedynek kooperant - zdrajca, na którym kooperant traci. Prawdopodobieństwo tego, że dany kooperant trafi na zdrajcę jest równe $\frac{1}{N-1}$, a na innego kooperanta $\frac{N-2}{N-1}$, w związku z tym wartość oczekiwana wypłaty kooperanta na jedną grę wynosi

$$\frac{N - 2}{N - 1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{N - 1} \cdot (-1) = \frac{\frac{N-2}{2} - 1}{N - 1} \quad (35)$$

Zależność wartości oczekiwanej wypłaty kooperanta od liczby graczy w takim społeczeństwie przedstawia rysunek 6. Wypłata zdrajcy jest większa niż średnia wypłata kooperanta. Można przypuszczać, że w takim społeczeństwie będzie (znów nie wchodząc w sposób) pojawiać się więcej zdrajców. Ale im więcej zdrajców, tym szansa na pojedynek zdrajca - zdrajca będzie coraz większa, a przy takim starciu obaj tracą (wypłaty $P = -1$ dla obu). Powstaje zatem pytanie



Rysunek 5: Średnia reputacja społeczeństwa złożonego z jednego zdrajcy i $N - 1$ kooperantów w zależności od liczebności społeczeństwa.



Rysunek 6: Wartość oczekiwana wypłaty kooperanta w społeczeństwie złożonym z jednego zdrajcy i $N - 1$ kooperantów w zależności od liczebności społeczeństwa. Im więcej graczy, tym bliższa jest wartości $R/2 = \frac{1}{2}$.

czy można zbudować takie społeczeństwo złożone ze zdrajców i kooperantów, w którym zdrajca nie zarabia więcej od kooperanta.

Rozważmy społeczeństwo złożone z z zdrajców oraz $N - z$ kooperantów. Jasne jest, że

$$N > z \geq 1 \quad (36)$$

Szansa kooperanta na grę z drugim kooperantem wynosi $\frac{N-z-1}{N-1}$, ponieważ jest $N - z$ kooperantów, ale nie można grać z samym sobą, natomiast szansa na pojedynek ze zdrajcą wynosi $\frac{z}{N-1}$. W pojedynku z kooperantem obaj otrzymują $R/2 = \frac{1}{2}$, a przy grze ze zdrajcą kooperant otrzymuje wypłatę $P = -1$. Stąd wartość oczekiwana EV_k wypłaty kooperanta w grze w takim społeczeństwie wynosi:

$$EV_k = \frac{N - z - 1}{N - 1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{z}{N - 1} \cdot (-1) \quad (37)$$

Szansa zdrajcy na grę z drugim zdrajcą wynosi $\frac{z-1}{N-1}$, ponieważ jest z zdrajców, a nie można grać z samym sobą, a szansa na pojedynek z kooperantem wynosi $\frac{N-z}{N-1}$. Na pojedynku z kooperantem zdrajca zyskuje $R = 1$, a z drugim zdrajcą $P = -1$. Wartość oczekiwana EV_z wypłaty zdrajcy w takim społeczeństwie jest równa:

$$EV_z = \frac{z - 1}{N - 1} \cdot (-1) + \frac{N - z}{N - 1} \cdot 1 \quad (38)$$

Przyrównując do siebie (37) oraz (38):

$$\frac{1}{N - 1} \cdot \left[\frac{N - z - 1}{2} - z \right] = \frac{1}{N - 1} \cdot [N - z - z - 1] \quad (39)$$

Dzieląc obie strony równania przez $\frac{1}{N-1}$ otrzymamy:

$$\frac{N}{2} - \frac{3}{2}z - \frac{1}{2} = N - 2z - 1 \quad (40)$$

Po dodaniu do obu stron równania wyrażenia $2z - \frac{N}{2} + \frac{1}{2}$ otrzymamy:

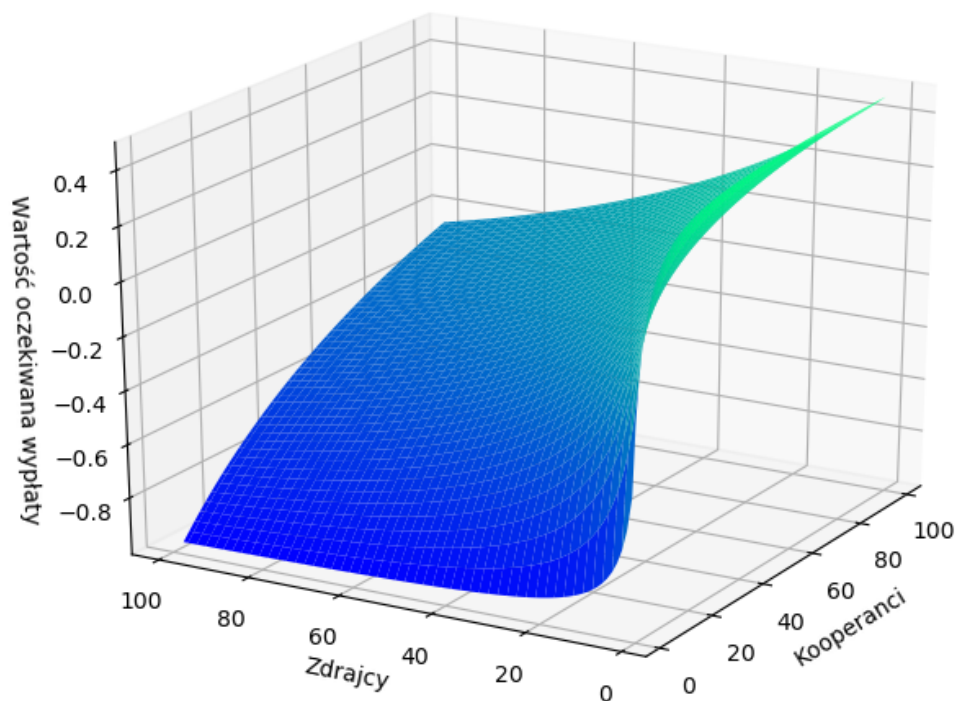
$$\frac{1}{2}z = \frac{1}{2}N + \frac{3}{2} \quad (41)$$

Ostatecznie:

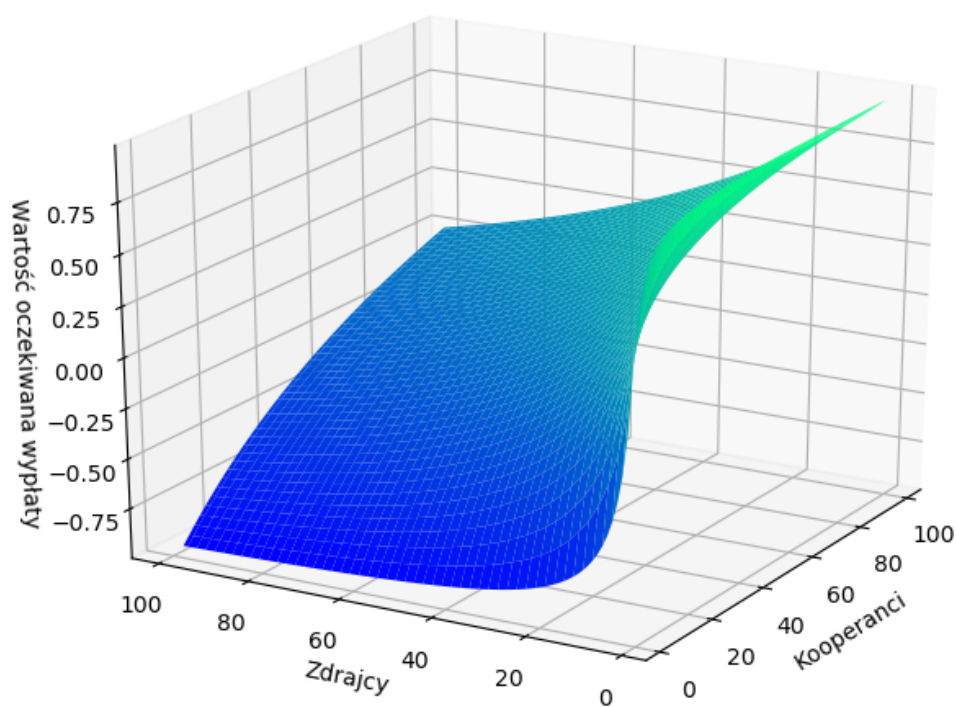
$$z = N + 3 \quad (42)$$

co jest sprzeczne z warunkiem (36), zatem nie ma takiego społeczeństwa zdrajców i kooperantów, w którym wartość oczekiwana ich wypłat jest równa. Wartości oczekiwane wypłat kooperanta i zdrajcy w zależności od liczebności obu grup przedstawiają wykresy 7 oraz 8.

Na tej podstawie można wysnuć wniosek, że w takim społeczeństwie złożonym tylko ze zdrajców i kooperantów, jeżeli dopuścimy możliwość dołączenia nowych osób, stosunek liczby zdrajców do kooperantów będzie w miarę ewolucji społeczeństwa rósł, co doprowadzi do zaniku



Rysunek 7: Wartość oczekiwana wypłaty kooperanta w społeczeństwie złożonym ze zdrajców i kooperantów w zależności od liczebności obu grup.



Rysunek 8: Wartość oczekiwana wypłaty zdrajcy w społeczeństwie złożonym ze zdrajców i kooperantów w zależności od liczebności obu grup.

kooperantów w społeczeństwie. Można powiedzieć, że strategia kooperacji nie przetrwa ewolucji społeczeństwa, nie jest zatem to strategia stabilna ewolucyjnie. Straffin [4] określił warunek, który definiuje strategię stabilną ewolucyjnie:

strategia $strat_1$ jest stabilną ewolucyjnie, jeżeli jakakolwiek inna strategia $strat_2$ nie daje lepszej wartości oczekiwanej wypłaty, gdy prawie wszyscy grają $strat_1$, a niewielka grupa gra $strat_2$. Strategia zdrajców będzie strategią stabilną ewolucyjnie.

3.5 Społeczeństwo rozrastające się

W poprzedniej części odnotowano, że korzystnym wyborem w otoczeniu kooperantów jest zdrada. Rozszerzony dylemat więźnia daje jednak więcej opcji niż tylko kooperacja i zdrada. W rozważanym społeczeństwie rozrastającym się pod uwagę zostaną wzięte też strategie przyznania się oraz przyznania i doniesienia. Społeczeństwo graczy będzie budowane według następujących zasad:

1. stałość charakteru - gracze nie będą mogli zmieniać swojego charakteru w trakcie gry; Gracz może być kooperantem, zdrajcą, uległym lub histerykiem.
2. determinacja decyzji - decyzje, jakie podejmują gracze w grze wynikają z ich charakteru;
3. rozrost społeczeństwa - co rundę do społeczeństwa dołącza nowy gracz;
4. kryterium wartości oczekiwanej - nowy gracz ma taki charakter, jaki jest najbardziej korzystny dla niego w społeczeństwie w momencie dołączenia, w przypadku równości wartości oczekiwanej wypłaty dwóch charakterów, gracz wybiera ten, który wiąże się z lepszą reputacją;
5. kooperacja początkowa - na początku społeczeństwo składa się z $k > 0$ kooperantów, $z = 0$ zdrajców, $u = 0$ uległych i $h = 0$ histeryków.

Wartość oczekiwana wypłaty dla wyboru uległego i histeryka jest taka sama, równa U - jest to rozwiązanie bezpiecznie. Oba te wybory mają jednak inny wpływ na wypłaty będących już w społeczeństwie oraz reputację społeczności. Ze względu na równość wartości oczekiwanych, ciężko o wybór między nimi, dlatego obie wersje będą rozważone osobno. Jako pierwsza, wersja z uległymi. Na starcie w społeczeństwie są sami kooperanci. Dołączający do nich gracz rozważa jaki charakter byłby dla niego najkorzystniejszy. Wartość oczekiwaną wyboru charakteru *charakter* oznaczono $EV(charakter)$. Ponieważ jedyne pojedynki, jakie można rozegrać w tym społeczeństwie to pojedynki z kooperantami, to:

$$EV(kooperant) = R/2 = \frac{1}{2} \quad (43)$$

$$EV(zdrajca) = R = 1 \quad (44)$$

$$EV(ulegly) = U = -\frac{1}{4} \quad (45)$$

Wynika z tego, że pierwszy dołączający będzie zdrajcą, ponieważ wartość oczekiwana wypłaty będzie wtedy największa. Zatem po pierwszej rundzie społeczeństwo składać się będzie z k kooperantów i $z = 1$ zdrajców.

Wykazano wcześniej, że nie ma takiej kombinacji zdrajców i kooperantów, przy której opłacałoby się nowemu być kooperantem. Można wnioskować, że w społeczeństwie będzie zatem przybywało zdrajców. I będzie tak aż do momentu, w którym wartość oczekiwana wypłaty przy byciu zdrajcą osiągnie poziom wartości oczekiwanej wypłaty uległego. W sytuacji, gdy będą równe, nowy będzie uległy, ponieważ to wiąże się z lepszą reputacją. Wartość oczekiwaną wypłaty nowego zdrajcy w społeczeństwie k kooperantów i z zdrajców można obliczyć:

$$EV(zdrajca) = \frac{k}{k+z} - \frac{z}{k+z} = \frac{k-z}{k+z} \quad (46)$$

Korzystniejsza stanie się strategia uległego, gdy:

$$EV(ulegly) \geq EV(zdrajca) \quad (47)$$

$$U = -\frac{1}{4} \geq \frac{k-z}{k+z} \quad (48)$$

Mnożąc stronami przez $-4 \cdot (k+z)$, pamiętając o zmianie znaku, otrzymamy:

$$k+z \leq -4k+4z \quad (49)$$

Co prowadzi do warunku:

$$5k \leq 3z \quad (50)$$

Zapisany w innej formie warunek (50) określa pojawienie się pierwszego uległego w społeczeństwie. Pierwszy uległy pojawi się, gdy liczba zdrajców osiągnie:

$$z \geq \frac{5}{3}k \quad (51)$$

Na tym etapie mamy społeczeństwo złożone z k kooperantów, $z = \frac{5}{3}k$ zdrajców oraz $u = 1$ uległego. W związku z tym średnia reputacja społeczeństwa jest równa:

$$\beta = \frac{k-z}{k+z+1} = \frac{k-\frac{5}{3}k}{k+\frac{5}{3}k+1} = -\frac{2k}{8k+3} \quad (52)$$

Na początku reputacja średnia była równa 1, ponieważ społeczeństwo składało się z samych kooperantów (których reputacja wynosi 1), w miarę dołączania zdrajców spadało i osiągnęło wartość ujemną.

Analizując dalej rozrost społeczeństwa należy uwzględnić przy obliczaniu wartości oczekiwanej wypłat obecność uległego w społeczeństwie. Możliwe będą nowe starcia: kooperant - uległy oraz zdrajca - uległy. Analiza starć uległych nie jest konieczna, ponieważ ulegli zawsze otrzymują tę samą wypłatę. Na wymienionych potyczkach kooperanci i zdrajcy zarabiają $F = 0$. Wzory na wartości oczekiwane wypłat przyjmują postać:

$$EV(kooperant) = \frac{\frac{k}{2} - z}{k + z + u} \quad (53)$$

$$EV(zdrajca) = \frac{k - z}{k + z + u} \quad (54)$$

$$EV(uległy) = -\frac{1}{4} \quad (55)$$

Na obecnym etapie mamy: k kooperantów, $z = \frac{5}{3}k$ zdrajców oraz $u = 1$ uległych. Uwzględniając to, wzory (53) i (54) przyjmą postać odpowiednio:

$$EV(kooperant) = \frac{\frac{k}{2} - \frac{5}{3}k}{k + \frac{5}{3}k + 1} = -\frac{7k}{8k + 3} \quad (56)$$

$$EV(zdrajca) = \frac{k - \frac{5}{3}k}{k + \frac{5}{3}k + 1} = -\frac{2k}{8k + 3} \quad (57)$$

Z (56) i (57) wynika, że kolejnym w tym społeczeństwie będzie zdrajca, ponieważ:

$$EV(zdrajca) = -\frac{2k}{8k + 3} > -\frac{1}{4} = EV(uległy) > EV(kooperant) \quad (58)$$

Stan graczy wyniesie: k kooperantów, $z = \frac{5}{3}k + 1$ zdrajców oraz $u = 1$ uległych. Wzory (53) i (54) przyjmą postać odpowiednio:

$$EV(kooperant) = \frac{\frac{k}{2} - (\frac{5}{3}k + 1)}{k + \frac{5}{3}k + 1 + 1} = -\frac{7k + 3}{8k + 6} \quad (59)$$

$$EV(zdrajca) = \frac{k - (\frac{5}{3}k + 1)}{k + \frac{5}{3}k + 1 + 1} = -\frac{2k + 3}{8k + 6} \quad (60)$$

Z (59) i (60) wynika, że kolejnym w tym społeczeństwie będzie uległy, ponieważ:

$$EV(zdrajca) = -\frac{2k + 3}{8k + 6} < -\frac{1}{4} = EV(uległy) \quad (61)$$

Stan graczy wyniesie: k kooperantów, $z = \frac{5}{3}k + 1$ zdrajców oraz $u = 2$ uległych. Już na tym etapie widać, że każdy nowy zwiększa mianownik wyrażenia (60) o 3, a jeżeli jest to zdrajca, to licznik również zwiększa się o 3. Wartość oczekiwana wypłaty kooperanta zmienia się w podobny sposób, ale jest ona wyraźnie mniejsza od zdrajcy lub uległego, więc ten charakter nie będzie brany przez nowego pod uwagę. Tabela 7 prezentuje kilka kolejnych kroków rozbudowy społeczeństwa. Na podstawie tabeli można wyciągnąć wnioski:

Tabela 7: Wartości oczekiwane wypłat graczy przy obraniu strategii zdrajcy przy rozbudowie społeczeństwa od stanu k kooperantów, $z = \frac{5}{3}k$ zdrajców, $u = 1$ uległych. W ostatniej kolumnie określono charakter nowego.

z	u	$EV(zdrajca)$	nowy
$\frac{5}{3}k$	1	$-\frac{2k}{8k+3} > -\frac{1}{4}$	zdrajca
$\frac{5}{3}k + 1$	1	$-\frac{2k+3}{8k+6} < -\frac{1}{4}$	uległy
$\frac{5}{3}k + 1$	2	$-\frac{2k+3}{8k+9} < -\frac{1}{4}$	uległy
$\frac{5}{3}k + 1$	3	$-\frac{2k+3}{8k+12} \leq -\frac{1}{4}$	uległy
$\frac{5}{3}k + 1$	4	$-\frac{2k+3}{8k+15} > -\frac{1}{4}$	zdrajca
$\frac{5}{3}k + 2$	4	$-\frac{2k+6}{8k+18} < -\frac{1}{4}$	uległy
$\frac{5}{3}k + 2$	5	$-\frac{2k+6}{8k+21} < -\frac{1}{4}$	uległy
$\frac{5}{3}k + 2$	6	$-\frac{2k+6}{8k+24} \leq -\frac{1}{4}$	uległy
$\frac{5}{3}k + 2$	7	$-\frac{2k+6}{8k+27} > -\frac{1}{4}$	zdrajca

1. nowy będzie przybierał charakter zdrajcy raz na cztery rundy, a uległego w trzech na cztery kolejne gry;
2. wartości oczekiwane wypłat nowych graczy będą oscylowały wokół $-\frac{1}{4}$;

Można w związku z tym oczekiwać, że liczba uległych zrówna się z liczbą zdrajców. Od momentu pojawienia się pierwszego uległego, populacja zdrajców będzie rosła trzykrotnie wolniej od uległych, ale uległych będzie o $\frac{5}{3}k$ mniej na początku. Uśredniając, populacja zdrajców rośnie o $\frac{1}{4}$ zdrajcy na grę, a uległych o $\frac{3}{4}$ uległego na grę. Jeżeli przez x oznaczmy liczbę gier rozegranych od pojawienia się pierwszego uległego, oczekując równości tych populacji, można napisać równanie:

$$\frac{3}{4}x = \frac{5}{3}k + \frac{1}{4}x \quad (62)$$

Rozwiązaniem tego równania jest $x = \frac{10}{3}k$, zatem potrzeba $\frac{10}{3}k + \frac{5}{3}k = 5k$ gier, by zrównać populację uległych i zdrajców. Zdrajców będzie wtedy $z = \frac{5}{3}k + \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{3}k = 2.5k$, podobnie jak uległych $u = \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{3}k = 2.5k$.

W miarę dalszego rozrostu społeczeństwa, liczba zdrajców i uległych będzie zmierzać do osiągnięcia stanu, w którym $k \ll z$, wtedy zdrajcy i ulegli będą dzielić społeczeństwo w stosunku 1 : 3, czyli $z = \frac{u}{3} \gg k$. Wartość oczekiwana wypłat każdej grupy społecznej się zrówna, ponieważ:

$$EV(kooperant) = \frac{-z}{z+u} = -\frac{\frac{u}{3}}{\frac{u}{3}+u} = -\frac{1}{4} \quad (63)$$

$$EV(zdrajca) = \frac{-z}{z+u} = -\frac{1}{4} \quad (64)$$

$$EV(ulegly) = -\frac{1}{4} \quad (65)$$

Natomiast reputacja średnia społeczeństwa wyniesie:

$$\beta_{spol} = -\frac{1}{4} \quad (66)$$

Ponieważ wkład będzie pochodził od zdrajców, którzy stanowią ćwierć społeczeństwa.

Dla przykładu omówmy społeczeństwo, które na początku składa się z $k = 300$ kooperantów. Zgodnie z rozważaniami, zdrajcy powinni pojawiać się do momentu aż ich liczba osiągnie $z = \frac{5}{3}k = 500$, wartość oczekiwana wypłaty nowego do tego momentu prezentuje rysunek 9. Można zauważyć, że wartość oczekiwana wypłaty jest największa właśnie u zdrajcy, co tłumaczy przyrost graczy o tym charakterze.

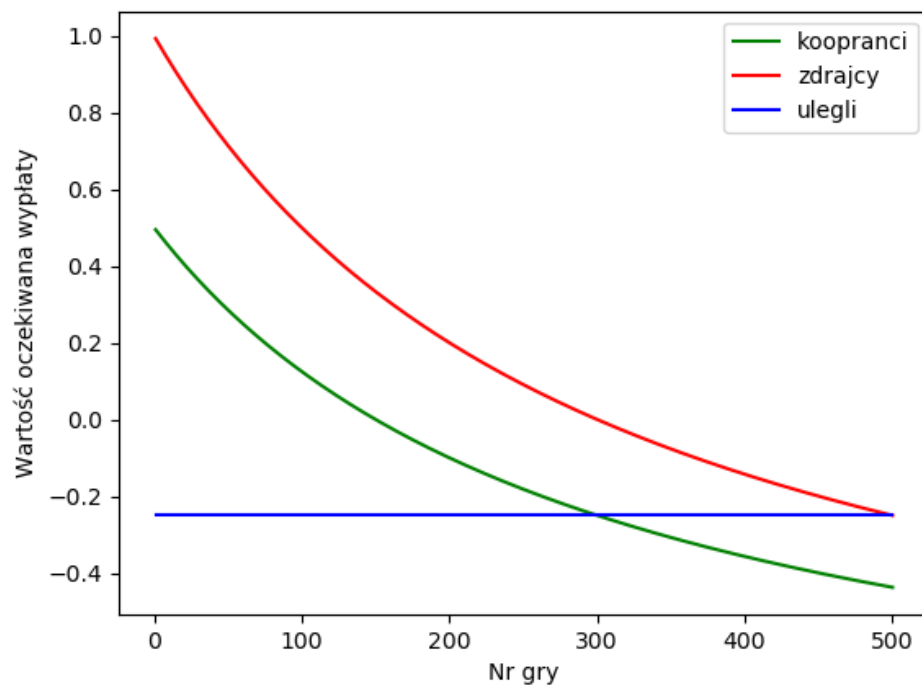
Kolejnym etapem będzie naprzemienny wzrost społeczeństwa uległych i zdrajców w stosunku 3 : 1, a po $5k = 1500$ gier powinno być ich tyle samo. Rozwój grup w społeczeństwie prezentuje rysunek 10.

Oczekuje się, że wypłaty uległych i zdrajców od momentu pojawienia się uległych będą się przecinały, a w miarę rozrostu społeczeństwa wraz z wypłatami kooperantów ustabilizują się na poziomie -0.25 . Ilustruje to rysunek 11, a oscylacje wypłat zdrajcy wokół wartości wypłaty uległego można zobaczyć na rysunku 12.

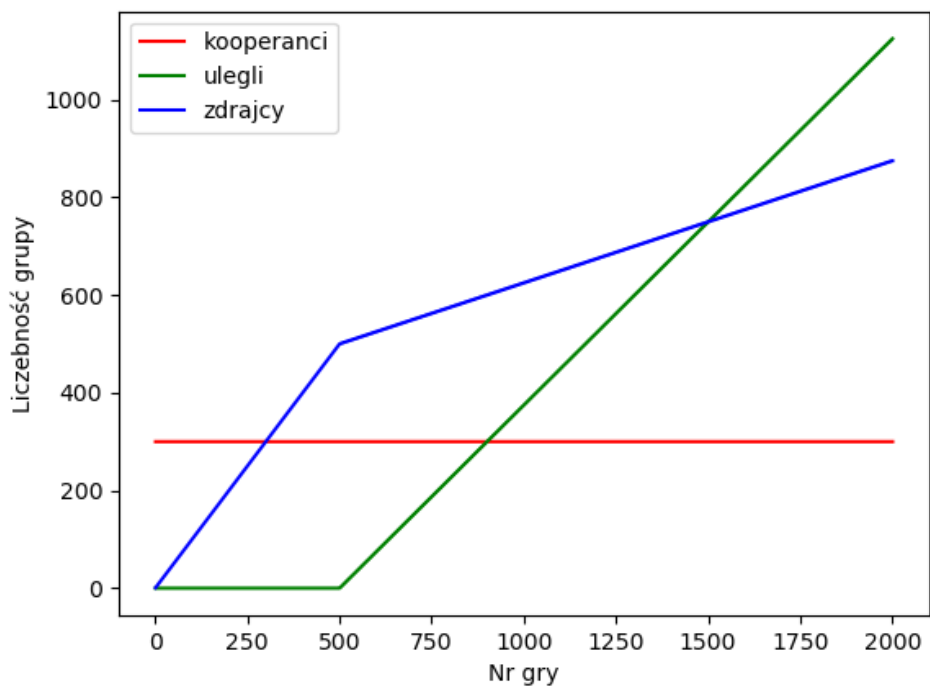
Ważną rolę, nie tylko ze względu na wyrównywanie wypłat, pełnią ulegli. Ich obecność utrzymuje reputację społeczeństwa, która w momencie, gdy $z = \frac{5}{3}k$ spadła z początkowego 1 do $\beta_{spol} = \frac{k-z}{k+z+u} = -\frac{1}{4}$. Zmianę reputacji średniej przykładowego społeczeństwa prezentuje rysunek 13.

Na podstawie zmiany liczebności grup w społeczeństwie można stwierdzić, że żadna prezentowana strategia nie przetrwa próby czasu - ewolucji społeczeństwa. Nie będzie przybywać kooperantów, a zdrajcy i ulegli będą naprzemiennie liderami w wypłatach. Raz na 4 gry liderem będzie zdrajca, a w trzech przypadkach uległy. Skoro w 0.75 przypadków najlepszym wyborem jest przyznanie się, a w 0.25 przypadków - zdrada, to strategią stabilną ewolucyjnie będzie strategia mieszana, polegająca na zdradzie w 1 grze na 4 i przyznaniu się w trzech pozostałych.

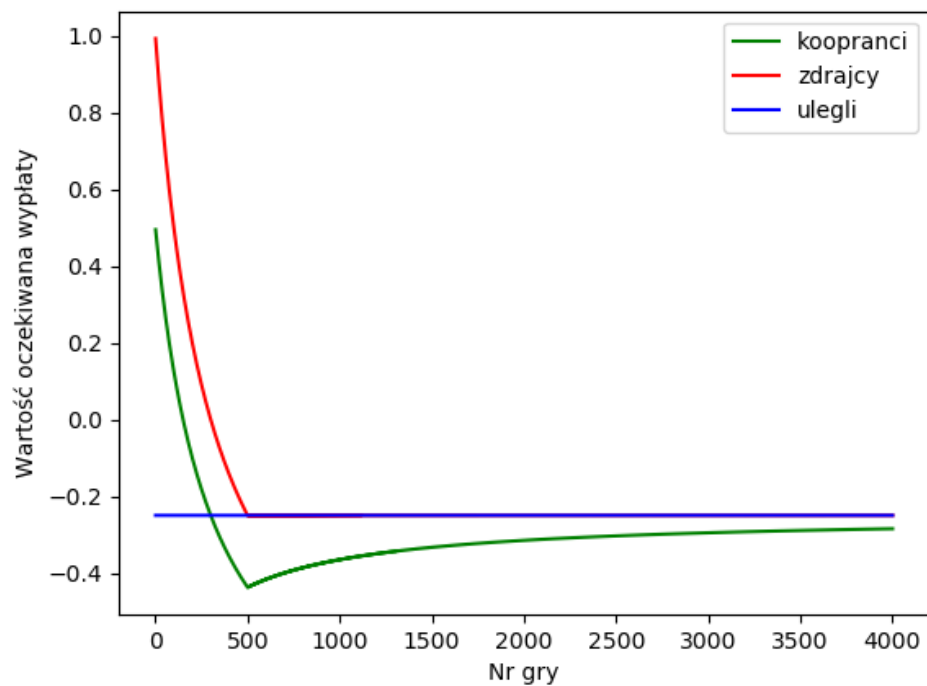
Rozważania, gdy zamiast uległego mamy histeryka, nie różnią się do momentu pojawienia się pierwszego o takim charakterze, czyli przy $z = \frac{5}{3}k$. Później jednak, zamiast naprzemiennego pojawiania się zdrajców i uległych, pojawią się sami histerycy. Wiąże się to z tym, że są oni



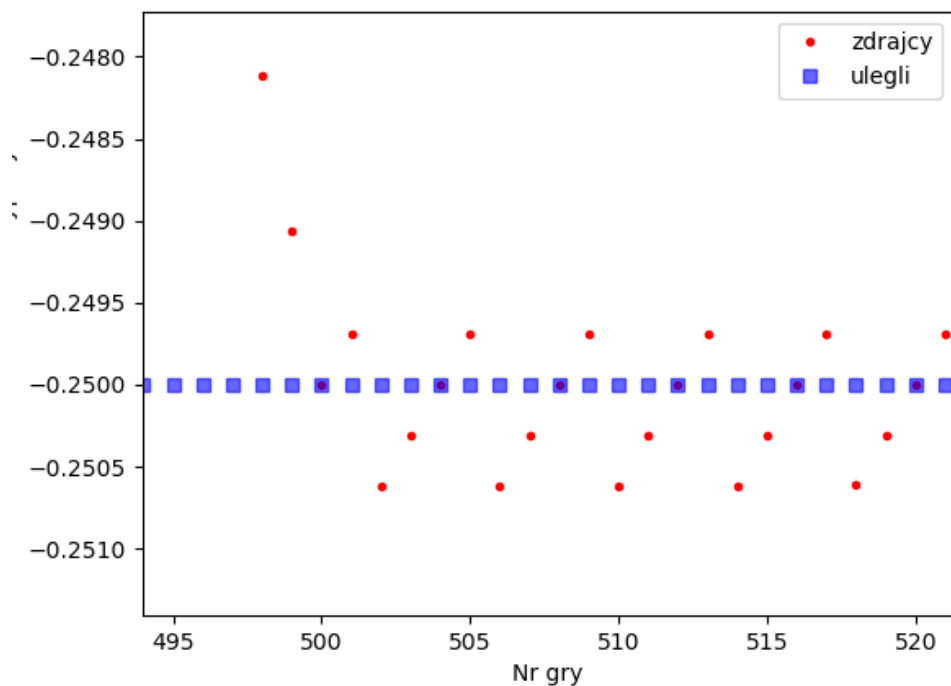
Rysunek 9: Wartość oczekiwana wypłaty nowego w zależności od wybranego charakteru dla społeczeństwa początkowego 300 kooperantów.



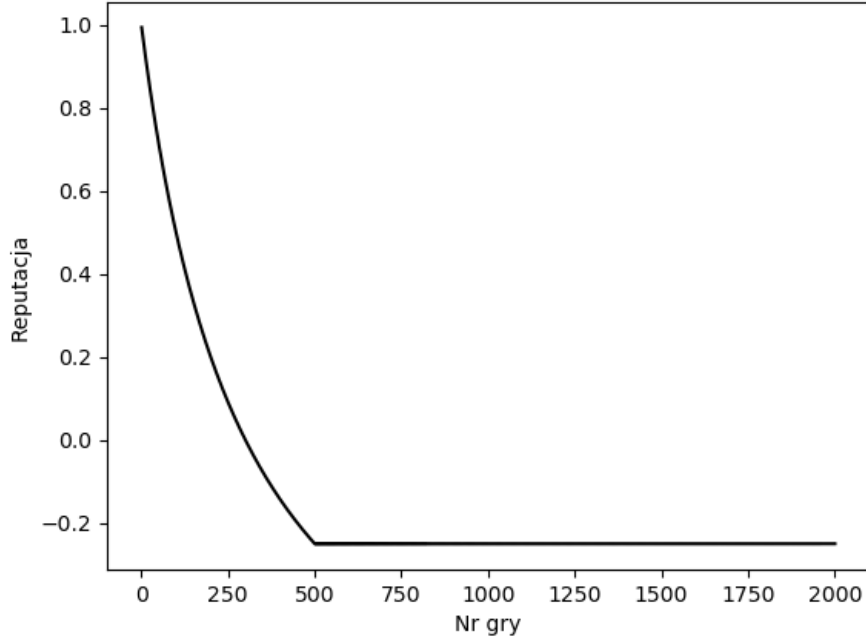
Rysunek 10: Zmiana liczebności grup społecznych w ciągu kolejnych gier dla społeczeństwa początkowego 300 kooperantów.



Rysunek 11: Wartość oczekiwana wypłaty nowego w zależności od charakteru w ciągu kolejnych gier dla społeczeństwa początkowego 300 kooperantów.



Rysunek 12: Oscylacje wartości oczekiwanej wypłaty zdraycy wokół wypłaty uległego przy punkcie, w którym pojawia się pierwszy uległy w społeczeństwie.



Rysunek 13: Zmiana średniej reputacji społeczeństwa w ciągu kolejnych gier dla społeczeństwa początkowego 300 kooperantów.

odbierani jak zdrajcy (całkiem słusznie, przecież zdrażają), stąd nie jest w interesie nowych przyjmowanie strategii zdrajców, ponieważ historycy ich zdrażają. Wartości oczekiwane wypłat można określić wzorami:

$$EV(kooperant) = \frac{k}{k+z+h} \cdot \frac{1}{2} - \frac{z}{k+z+h} - \frac{h}{k+z+h} \quad (67)$$

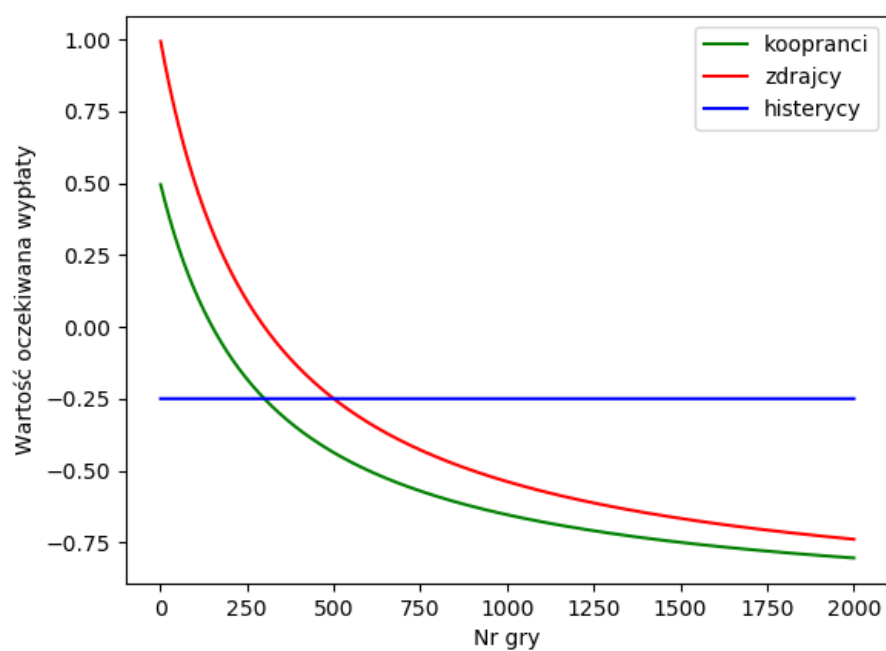
$$EV(zdrajca) = \frac{k}{k+z+h} - \frac{z}{k+z+h} - \frac{h}{k+z+h} \quad (68)$$

$$EV(historyk) = -\frac{1}{4} \quad (69)$$

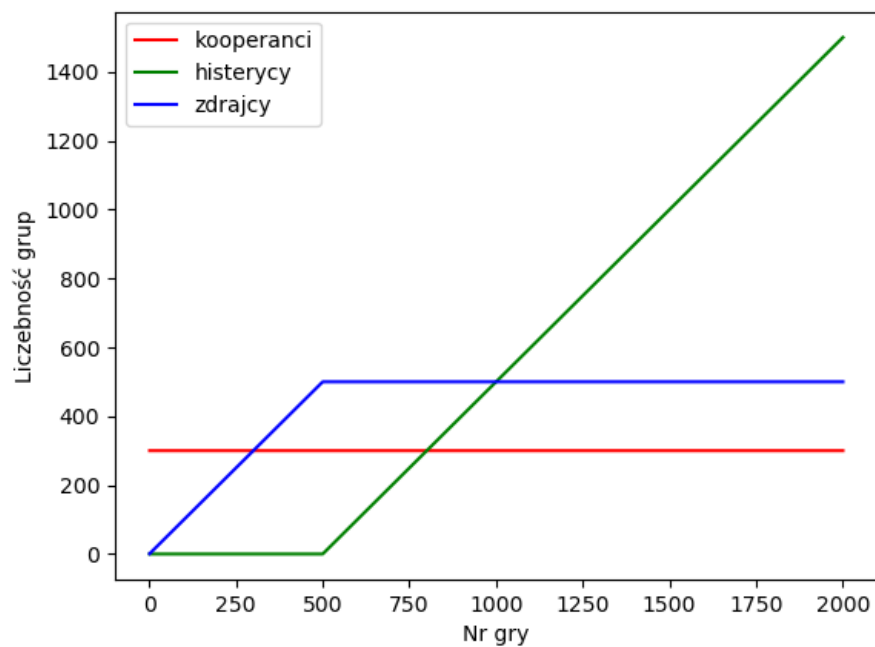
Wartości oczekiwane wypłaty w miarę rozrostu społeczeństwa w zależności od decyzji przedstawia rysunek 14.

Z tego bezpośrednio wynika wzrost grupy historyków. Ponieważ zdrajców od momentu pojawienia się pierwszego historyka nie przybywa, liczebność obu grup równa się po $\frac{5}{3}k$ grach od pojawienia się pierwszego historyka. W przykładzie ze społeczeństwem startowym złożonym z 300 kooperantów będzie to przy grze numer 1000. Zmianę liczebności grup ilustruje rysunek 15.

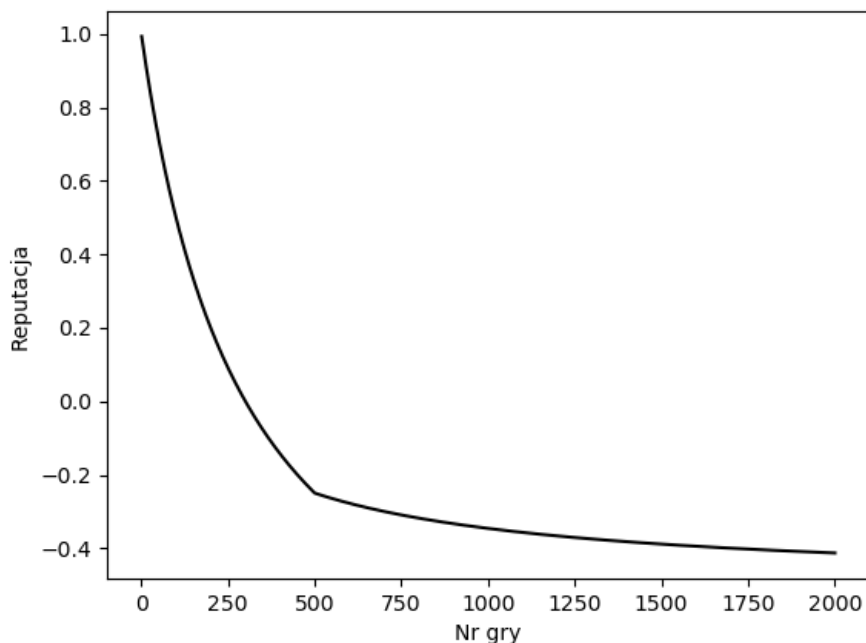
Inaczej będzie też wyglądać reputacja średnia. Wcześniej ulegli mieli reputację równą zero, co pozwoliło stabilizować reputację średnią. Historycy mają reputację $-\frac{1}{2}$, a że będą od pewnego



Rysunek 14: Wartość oczekiwana wypłaty w zależności od wybranego charakteru dla społeczeństwa początkowego 300 kooperantów.



Rysunek 15: Liczebność grup w społeczeństwie w ciągu kolejnych gier dla społeczeństwa początkowego 300 kooperantów.



Rysunek 16: Średnia reputacja społeczeństwa w ciągu kolejnych gier dla społeczeństwa początkowego 300 kooperantów.

momentu jedyną grupą zwiększającą liczebność, to do takiej wartości będzie dążyć reputacja średnia społeczeństwa - rysunek 16.

Wszystkie miejsca załamania przedstawionych funkcji wynikają z pojawienia się uległych lub histeryków, którzy całkowicie zmieniają dalsze losy populacji. Można na tej podstawie wnioskować, że wprowadzenie strategii, którymi grają ulegli lub histerycy było zasadne i w rozrastającym się społeczeństwie są one wykorzystywane.

Określenie w tej sytuacji strategii stabilnej ewolucyjnie jest prostsze, skoro histeryków będzie przybywać bez końca, a inne grupy zostaną od pewnego momentu na stałym poziomie liczebności, to właśnie histerycy będą wybierać strategię stabilną ewolucyjnie.

3.6 Społeczeństwo o stałej liczebności

Innym rodzajem społeczności będzie społeczność zamknięta. Nie będzie tu możliwości dołączania nowych, natomiast będący już w społeczeństwie będą zmieniali swoje charaktery. Jest to główna zmiana względem zasad budowy społeczeństwa w poprzedniej części. Zasady rozwoju społeczeństwa będą następujące:

1. zmienność charakteru - gracze będą mogli zmieniać swój charakter w trakcie gry; Gracz może być kooperantem, zdrajcą, uległym lub histerykiem.
2. determinacja decyzji - decyzje, jakie podejmują gracze w grze wynikają z ich charakteru;

3. rozwój społeczeństwa - co rundę w społeczeństwie, gracz, którego charakter daje najmniejszą wartość oczekiwaną wypłaty zmienia charakter;
4. kryterium wartości oczekiwanej - nowy charakter wybierany jest tak, by był najbardziej korzystny dla gracza w społeczeństwie w momencie zmiany, w przypadku równości wartości oczekiwanej wypłaty dwóch charakterów, gracz wybiera ten, który wiąże się z lepszą reputacją;
5. kooperacja początkowa - na początku społeczeństwo składa się z $k > 0$ kooperantów, $z = 0$ zdrajców, $u = 0$ uległych i $h = 0$ histeryków.

Również tym razem wprowadza się rozróżnienie na dwie grupy (uległych i histeryków), na początek analizowana będzie grupa uległych. Na podstawie wcześniejszych rozważań można przypuszczać, że na początkowym etapie miejsce kooperantów będą zajmować zdrajcy. Analiza wartości oczekiwanej wypłat potwierdzi to przypuszczenie. Tym razem pokazane będą wyrażenia opisujące wartość oczekiwaną wypłaty przedstawiciela grupy charakteru, równania przyjmą inną niż poprzednio postać, zmiana ta wynika z tego, że przedstawiciel grupy społecznej, której wypłaty określamy jest już w społeczeństwie, a skoro nie może pojedynkować się z samym sobą to:

$$EV(kooperant) = \frac{k-1}{k+z+u} \cdot \frac{1}{2} - \frac{z}{k+z+u} = \frac{\frac{k-1}{2} - z}{k+z+u} \quad (70)$$

$$EV(zdrajca) = \frac{k}{k+z+u} - \frac{z-1}{k+z+u} = \frac{k-z+1}{k+z+u} \quad (71)$$

$$EV(ulegly) = -\frac{1}{4} \quad (72)$$

Znów, nigdy wybór charakteru kooperanta nie będzie lepszy od wyboru zdrajcy, ponieważ, gdyby tak było to musiałby być spełniony warunek:

$$\frac{k-1}{2} - z > k - z + 1 \quad (73)$$

czyli

$$k-1 > 2k+2 \quad (74)$$

a to nie będzie spełnione dla $k > 0$.

Jasne jest w takim razie, że gracze o charakterze kooperantów będą zmieniać charakter na zdrajców. Wykazano poprzednio, że bycie zdrajcą przestaje się opłacać, gdy liczba zdrajców wynosi $z = \frac{5}{3}k$. Zdrajcy stanowiąc będą wtedy $\frac{\frac{5}{3}k}{\frac{5}{3}k+k} = \frac{5}{8}$ społeczeństwa, gdy zaczną pojawiać się ulegli. Wtedy wartości oczekiwane wypłat będą wynosić:

$$EV(kooperant) = \frac{\frac{k-1}{2} - \frac{5}{3}k}{k + \frac{5}{3}k} = -\frac{7k+3}{16k} \quad (75)$$

$$EV(zdrajca) = \frac{k - \frac{5}{3}k + 1}{k + \frac{5}{3}k} = -\frac{2k + 3}{8k} \quad (76)$$

$$EV(ulegly) = -\frac{1}{4} \quad (77)$$

Widać, że wartość oczekiwana wypłaty kooperanta jest najmniejsza, będziemy zatem obserwować dalszy zanik kooperantów. W związku z zanikiem kooperantów mniej opłacalne stanie się też bycie zdrajcą, przybywać będzie uległych. W momencie, gdy ze społeczeństwa znikną gracze o charakterze kooperantów, liczebność grup będzie następująca: $k = 0$, $z = \frac{5}{8}N$, zatem $u = \frac{3}{8}N$, gdzie przez N rozumie się rozmiar społeczeństwa. Wartości oczekiwane wypłat wyniosą:

$$EV(zdrajca) = -\frac{\frac{5}{8}N + 1}{N - 1} \quad (78)$$

$$EV(ulegly) = -\frac{1}{4} \quad (79)$$

Przybywać będzie zatem uległych kosztem zdrajców do momentu, w którym wartości oczekiwane wypłat się nie wyrównają. Wzory ogólne na wartość oczekiwaną wypłaty będą wyglądać następująco:

$$EV(zdrajca) = -\frac{z - 1}{N - 1} \quad (80)$$

$$EV(ulegly) = -\frac{1}{4} \quad (81)$$

Z (80) oraz (81) można wywnioskować, że wyrównanie się wartości oczekiwanych nastąpiłoby, gdy $z = \frac{N+3}{4}$, ale ze względu na to, że liczebność grupy musi być liczbą naturalną, ulegli i zdrajcy podzielą społeczeństwo w stosunku 3 : 1. Wartości oczekiwane wypłat wyniosłyby:

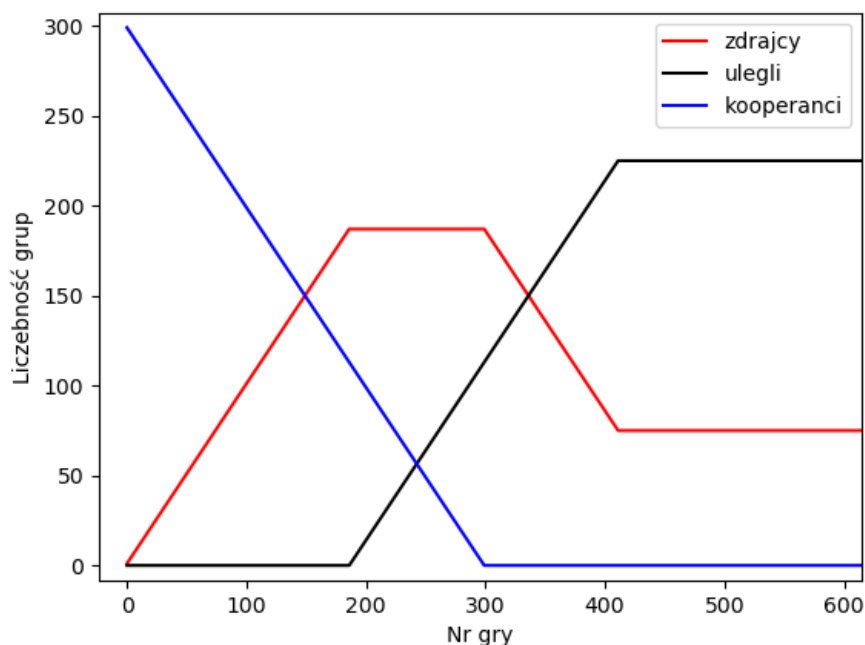
$$EV(kooperant) = -\frac{1}{4} \quad (82)$$

$$EV(zdrajca) = -\frac{1}{4} \quad (83)$$

ponieważ taką część społeczeństwa stanowią zdrajcy, brak jest kooperantów, a wypłata w pojedynku z uległym jest zerowa.

$$EV(ulegly) = -\frac{1}{4} \quad (84)$$

Można oczekiwać zatem, że przy równej wartości oczekiwanej wypłaty, pojawią się kooperanci za zdrajców, ponieważ w takim przypadku decyduje reputacja. Jeżeli jednak się pojawi kooperant, to wzrośnie wartość oczekiwana wypłaty zdrajcy, więc ze społeczeństwa odejdzie uległy (ma gorszą reputację niż kooperant), a jego miejsce zajmie zdrajca. To osłabi pozycję kooperanta, a na jego miejsce pojawi się uległy. I znów wyrównają się wartości oczekiwane wypłat. Cykl ten będzie się powtarzał.

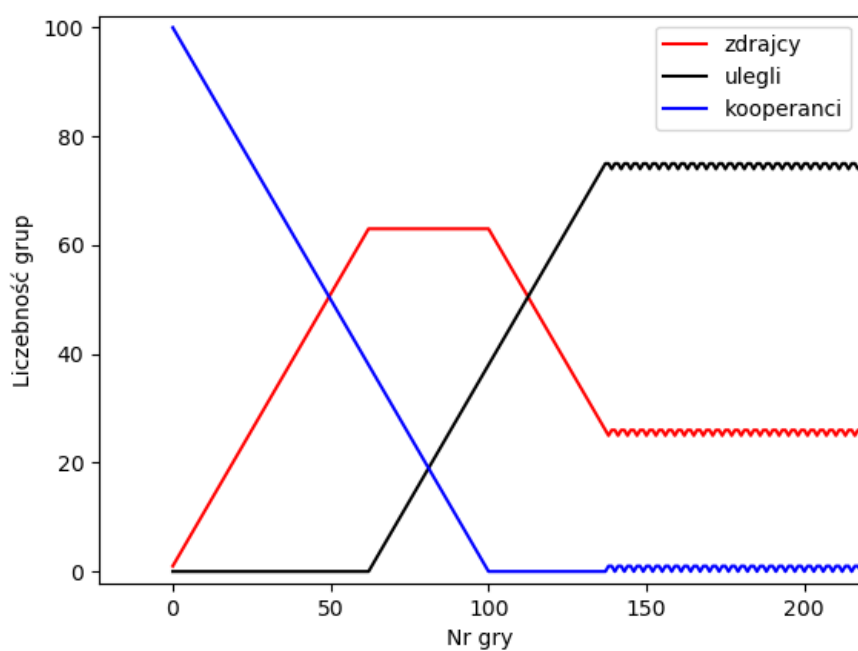


Rysunek 17: Zmiany liczebności grup w społeczeństwie o stałej liczebności różnej o od wielokrotności liczby 4 zwiększonej o jeden. Tutaj początkowo $k = 300$.

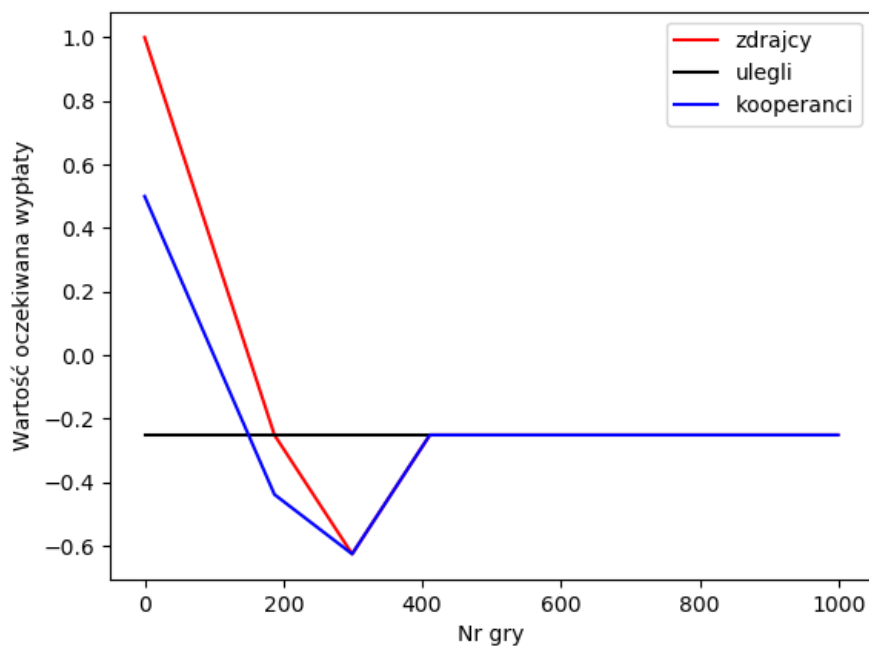
W praktyce taka sytuacja będzie mieć miejsce tylko, gdy rozmiar społeczeństwa jest o jeden większy od wielokrotności liczby 4. Jeżeli tak nie jest, to wypłata zdrajcy nie osiągnie wartości $-\frac{1}{4}$, będzie jedynie niewiele większa lub niewiele mniejsza, a to pozwoli na brak zmian w społeczeństwie, ponieważ gorszą opcją od bycia zdrajcą, będzie bycie uległym, w związku z tym uległy zmieni swój charakter. Po odejściu uległego bycie zdrajcą i kooperantem traci na wartości, w związku z czym najlepszym rozwiązaniem jest... bycie uległym.

Dla przykładu, w społeczeństwie, które składało się początkowo z 300 kooperantów, ponieważ $300 - 1$ nie jest wielokrotnością czwórki zobaczymy brak zmian w końcowym etapie ewolucji społeczeństwa - rysunek 17, a w społeczeństwie, które liczy 101 osobników ostatnim etapem ewolucji będą cykliczne zmiany liczebności - rysunek 18. Wartości oczekiwane wypłat przedstawia rysunek 19. Gdy ulegli pojawiają się kosztem kooperantów, wartość oczekiwana wypłaty zdrajców wciąż maleje, dopiero gry ulegli pojawiają się w miejsce zdrajców, zaczyna rosnąć. Średnia reputacja społeczeństwa zmienia się podobnie jak wypłaty zdrajców, co obrazuje rysunek 20.

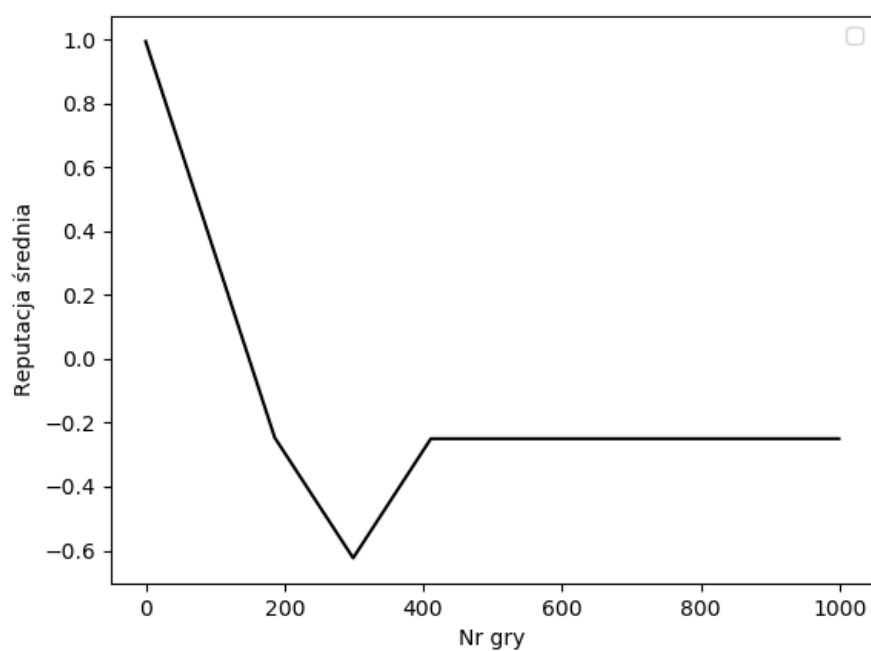
W społeczeństwie, w którym są historycy sytuacja będzie wyglądać nieco inaczej. Historycy są traktowani jak zdrajcy, a sami gwarantują sobie bezpieczną wypłatę, więc gdy wartość oczekiwana wypłaty - rysunek 21 - zdrajcy spadnie poniżej bezpiecznego poziomu ugody, w społeczeństwie przybywać będzie tylko historyków aż osiągną 100% udziałów - rysunek 22. Reputacja będzie



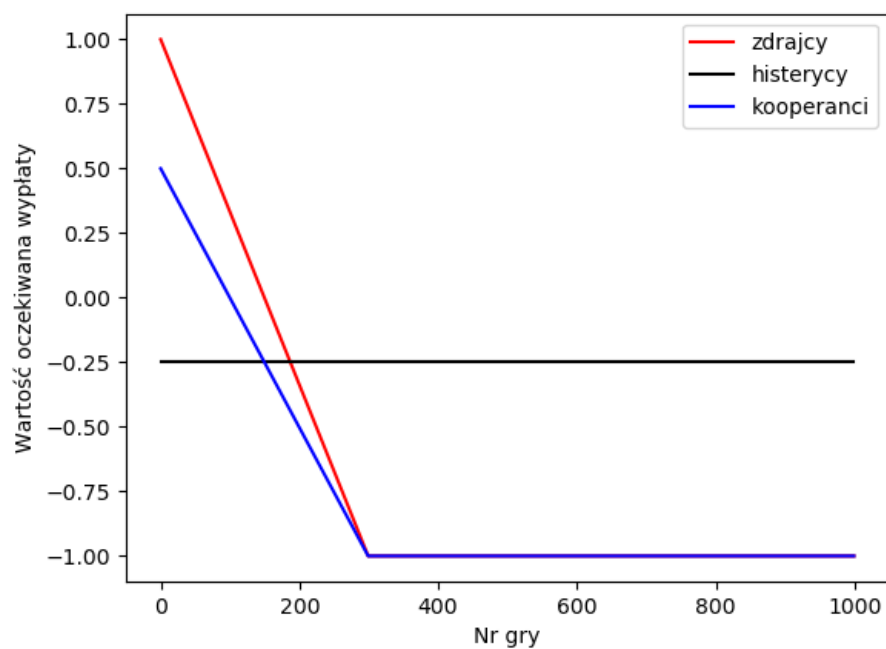
Rysunek 18: Zmiany liczebności grup w społeczeństwie o stałej liczebności równej wielokrotności liczby 4 zwiększonej o jeden. Tutaj początkowo $k = 101$.



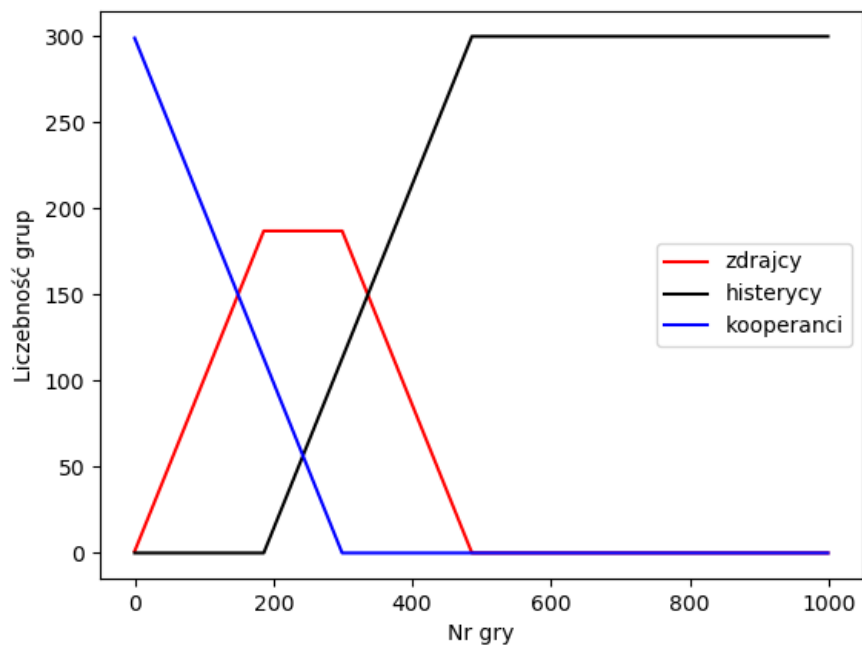
Rysunek 19: Wartości oczekiwane wypłaty graczy w zależności od charakteru w ciągu kolejnych gier w społeczeństwie o stałym rozmiarze. Tutaj początkowo $k = 300$.



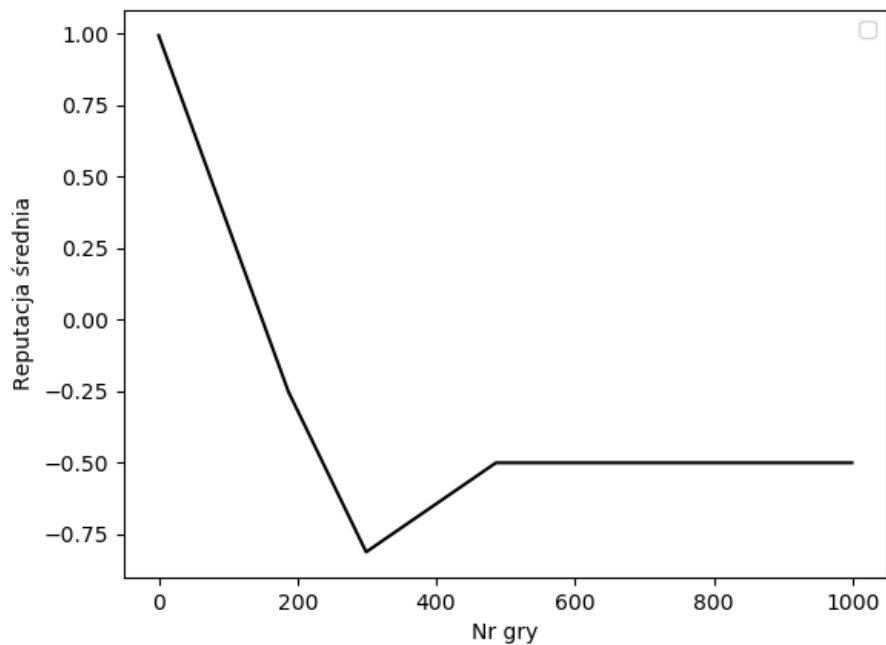
Rysunek 20: Średnia reputacja graczy w społeczeństwie w ciągu kolejnych gier w społeczeństwie stałym. Początkowo $k = 300$.



Rysunek 21: Wartości oczekiwane wypłaty graczy w zależności od charakteru w ciągu kolejnych gier w społeczeństwie o stałym rozmiarze. Tutaj początkowo $k = 300$.



Rysunek 22: Liczebność grup w ciągu kolejnych gier w społeczeństwie o stałym rozmiarze. Tutaj początkowo $k = 300$.



Rysunek 23: Reputacja średnia społeczeństwa w ciągu kolejnych gier w społeczeństwie o stałym rozmiarze. Tutaj początkowo $k = 300$.

spadać na początku ze względu na pojawianie się zdrajców w miejsce kooperantów, a później histeryków w miejsce kooperantów, ale gdy zdrajcy zaczną ustępować histerykom będzie zmierzając do typowej dla społeczeństwa złożonego z samych histeryków wartość $\beta = -\frac{1}{2}$ - rysunek 23.

Warte zauważenia jest to, że zarówno społeczeństwo rozrastające się, jaki i o stałym rozmiarze podczas ewolucji zmierzają do tych samych proporcji grup w społeczeństwie. Społeczeństwo o stałym rozmiarze potrzebuje na to mniejszej liczby gier.

Również wnioski dotyczące strategii stabilnych ewolucyjnie będą takie same. W społeczeństwie, które składa się w $\frac{3}{4}$ z uległych i $\frac{1}{4}$ zdrajców żadna możliwa strategia nie daje wyniku lepszego niż -0.25 . Można wykazać, że nie ma też lepszego wyniku w strategiach mieszanych.

Niech $x, y, z \geq 0$ oznaczają prawdopodobieństwo wyboru odpowiednio strategii kooperującej, zdradzającej i uległej w pewnej strategii mieszanej. Oczywiście $x + y + z = 1$. Wartość oczekiwana wypłaty wynosi wtedy:

$$EV_{xyz} = x\left(\frac{3}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot (-1)\right) + y\left(\frac{3}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot (-1)\right) + z\left(-\frac{1}{4}\right) = (x + y + z)\left(-\frac{1}{4}\right) \quad (85)$$

Na mocy założenia $x + y + z = 1$, zatem:

$$EV_{xyz} = -\frac{1}{4} \quad (86)$$

Żadna strategia nie daje lepszej wypłaty od strategii 0.25 zdrady i 0.75 uległości, co więcej, przy takim podziale wartość oczekiwana wypłaty dołączającego do społeczeństwa byłaby niezależna od jego charakteru.

W przypadku histeryków sytuacja jest jasna - ta grupa będzie grać strategią stabilną ewolucyjnie.

4 Paradoks Parrondo

4.1 Bohater w społeczeństwach

Niech dane będą trzy społeczeństwa: **społeczność A**, **społeczność B1** oraz **społeczność B2**, w których znajdują się zdrajcy, kooperanci oraz ulegli w ustalonej liczebności. **Bohaterem** nazywany będzie gracz, który rozgrywa grę przeciwko przedstawicielowi danej społeczności. Uwaga w tym rozdziale skupiona będzie głównie na bohaterze, stąd nazwa tego gracza. Rozgrywki między innymi członkami społeczeństwa nie będą istotne. Obserwowany bohater nie będzie miał określonego charakteru, będzie mógł dostosowywać swoje decyzje do przeciwnika, z którym gra. I tak, przeciwko:

- kooperantowi ($\beta = 1$) zagra strategią zdrady, co pozwoli mu na zgarnięcie całego łupu $R = 1$, ale będzie miało negatywny wpływ na reputację,
- zdrajcy ($\beta = -1$) zagra strategią ugody, co pozwoli mu na obronę przed karą więzienia $P = -1$ i wypłatę ugody $U = -\frac{1}{4}$,
- uległemu ($\beta = 0$) zagra strategią milczenia, ponieważ nie ma możliwości wypłaty większej od $F = 0$, a taką otrzymuje przy kooperacji dodatkowo polepszając swoją reputację.

Strategie, którymi gra bohater są najlepszymi wyborami przeciwko strategiom jego rywali.

Społeczność A składa się z graczy uległych i zdrajców, którzy stanowią zdecydowaną mniejszość w tej grupie. Stosunek uległych do zdrajców niech wynosi $499 : 1$. **Społeczność B1** składa się z uległych i zdrajców, tym razem w równej liczebności. Stosunek uległych do zdrajców wynosi $1 : 1$. **Społeczność B2** składa się z uległych i kooperujących w stosunku $8 : 1$.

4.2 Gry w społeczeństwach

Możliwe są dwie niezależne gry: gra A oraz gra B. Gra A polega na pojedynku bohatera z przeciwnikiem ze społeczeństwa A, natomiast gra B na pojedynku z przeciwnikiem z jednego ze społeczeństw B.

W grze A bohater stosuje w $\frac{499}{500}$ przypadków strategię kooperacji (w grach przeciw uległemu), otrzymując wypłatę $F = 0$, a reputacja pomnożona przez ilość rozegranych gier wzrasta o jeden (w dalszej części parametr ten nazywany będzie reputacją całkowitą δ), co wynika bezpośrednio ze definicji reputacji przy pomocy równania (32). Natomiast w $\frac{1}{500}$ przypadków bohater stosuje strategię uległego (w grze przeciwko zdrajcy), a taki pojedynek kończy się wypłatą ugody $U = -\frac{1}{4}$ i brakiem zmian w reputacji całkowitej δ . W związku z tym wartość oczekiwana wypłaty bohatera w grze A wynosi:

$$EV_A = \frac{499}{500} \cdot 0 + \frac{1}{500} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -0.0005 < 0 \quad (87)$$

Można stwierdzić, że gra A jest grą przegrywającą dla bohatera, ponieważ wartość oczekiwana wypłaty jest mniejsza od wypłaty neutralnej, którą w rozszerzonym dylemacie reprezentuje $F = 0$. Rysunek 24 pokazuje jak zmienia się średnio suma wypłat bohatera grającego w grę A w ciągu 200 gier.

W grze B gracz będzie rozgrywał pojedynek z przedstawicielem społeczeństwa B1 lub B2, w zależności od stanu reputacji całkowitej δ . Jeżeli reputacja całkowita jest podzielna bez reszty przez 3, to przeciwnik jest ze społeczeństwa B1, w przeciwnym wypadku - ze społeczeństwa B2.

Spółeczność B1 składa się z uległych graczy i zdrajców w stosunku 1:1. Bohater w pojedynku z uległym stosuje strategię kooperacyjną, co daje wypłatę $F = 0$, ale zwiększa reputację całkowitą, natomiast w pojedynku ze zdrajcą sam jest uległy, co daje wypłatę $U = -\frac{1}{4}$ i nie zmienia reputacji całkowitej. Wartość oczekiwana wygranej w pojedynku w społeczeństwie B1 wynosi

$$EV_{B1} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0 = -\frac{1}{8} \quad (88)$$

Spółeczność B2 składa się z graczy uległych i kooperujących w stosunku 8:1. Bohater w pojedynku z uległym stosuje strategię kooperacyjną co daje wypłatę $F = 0$, a zwiększa reputację całkowitą, natomiast kooperanta zdradza, co daje wypłatę $R = 1$, ale zmniejsza reputację całkowitą. Wartość oczekiwana wygranej w pojedynku z przedstawicielem społeczeństwa B2 wynosi:

$$EV_{B2} = \frac{1}{9} \cdot 1 + \frac{8}{9} \cdot 0 = 1/9 \quad (89)$$

W celu obliczenia wartości oczekiwanej wypłaty w grze B zostanie określona **macierz przejścia** [11]. Macierz ta będzie określać prawdopodobieństwo przejścia między wartościami stanów reputacji. Element a_{ij} macierzy A będzie określał prawdopodobieństwo zmiany reputacji ze stanu, w którym reszta z dzielenia reputacji przez 3 wynosi i do stanu, w którym reszta z dzielenia reputacji przez 3 wynosi j . Trzeci wiersz i trzecia kolumna odnoszą się do reszty z dzielenia równej zero.

W grze A stan reputacji nie ma wpływu na przebieg gry. Niezależnie od obecnej sytuacji, reputacja bohatera po starciu z uległym wzrośnie o 1 (w tym pojedynku bohater gra kooperacyjnie), a po pojedynku ze zdrajcą zostanie na tym samym poziomie (bohater gra ugodę). Ze względu na podział społeczeństwa A szanse na wzrost reputacji wynoszą $\frac{499}{500}$, a na pozostanie na tym samym poziomie $\frac{1}{500}$. Macierz przejścia w grze A wygląda zatem następująco:

$$A = \frac{1}{500} \begin{bmatrix} 1 & 499 & 0 \\ 0 & 1 & 499 \\ 499 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W grze B, gdy reputacja całkowita jest bez reszty podzielna przez 3 mamy do czynienia z inną grą, niż, gdy reszta z dzielenia wynosi 1 lub 2. Popatrzmy najpierw na tę sytuację, gdy reszta z dzielenia wynosi 1 lub 2. Gra będzie toczyła się w społeczeństwie B2, które w $\frac{8}{9}$ stanowią ulegli. W pojedynkach z nimi bohater gra kooperacyjnie, więc jego reputacja całkowita wzrasta. Pozostałą część społeczeństwa stanowią kooperujący, których bohater zdradza, czyli zmniejsza swoją reputację całkowitą. W przypadku, gdy reszta z dzielenia reputacji całkowitej przez 3 wynosi 1 lub 2 otrzymamy $\frac{1}{8}$ szans na spadek reputacji całkowitej, oraz $\frac{8}{9}$ szans na wzrost reputacji całkowitej. Natomiast, gdy reszta z dzielenia reputacji całkowitej przez 3 wyniesie zero (trzeci wiersz) bohater trafi do społeczeństwa B1, które stanowią ulegli i zdrajcy w tej samej liczebności. Bohater będzie miał zatem taką samą szansę na utrzymanie obecnej reputacji całkowitej (po pojedynku ze zdrajcą, w którym zachowa się ugodowo) oraz na podniesienie reputacji całkowitej (po pojedynku z uległym, gdzie zagra kooperacyjnie). Macierz przejścia w grze B wygląda zatem następująco:

$$B = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 8 \\ 4.5 & 0 & 4.5 \end{bmatrix}$$

Na potrzeby dalszej analizy zostaną zdefiniowane dwa wyrażenia:

Stanem reputacji nazywana będzie reszta z dzielenia reputacji przez 3. Jeżeli reszta wynosi zero, reputacja jest w trzecim stanie.

Wektorem stanu początkowego nazywany będzie rozkład prawdopodobieństwa początkowego stanu reputacji, w dalszej analizie przyjmie on postać $[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, by nie wyróżniać żadnego ze stanów reputacji.

Mnożąc wektor stanu początkowego przez macierz przejścia otrzymamy wektor opisujący rozkład prawdopodobieństwa kolejnych stanów reputacji po jednokrotnej rozgrywce. Tak otrzymany wektor można jeszcze raz przemnożyć przez macierz przejścia, a wynik będzie opisywał rozkład prawdopodobieństwa kolejnych stanów reputacji po dwukrotnej rozgrywce. Ostatecznie, aby otrzymać wektor rozkładu prawdopodobieństwa stanów reputacji po n rozgrywkach należy wektor stanu początkowego przemnożyć przez macierz przejścia w n -tej potęgze.

Dla gry B, przy liczbie rozgrywek dążącej do nieskończoności, otrzymamy wektor stanu

$$b_n = [0.2709, 0.2408, 0.4883] \quad (90)$$

Co oznacza, że blisko połowa gier będzie rozgrywana w stanie 3, czyli w społeczności B1, a tam wartość oczekiwana wygranej w pojedynku wynosi $-\frac{1}{8}$. Pozostałe gry będą w społeczności B2,

gdzie wartość oczekiwana wygranej wynosi $\frac{1}{9}$. Zatem wartość oczekiwana wygranej w grze B wynosi:

$$EV_B = 0.2709 \cdot \frac{1}{9} + 0.2408 \cdot \frac{1}{9} + 0.4883 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = 0.0301 + 0.0268 - 0.061 = -0.0041 \quad (91)$$

Wniosek: gra B jest grą przegrywającą, ponieważ wartość oczekiwana wypłaty jest mniejsza od wypłaty neutralnej $F = 0$. Rysunek 25 pokazuje jak zmienia się średnio suma wypłat bohatera w grze B w ciągu 200 gier.

4.3 Gra łączona

Gra łączona AB jest kombinacją gry A oraz gry B. Tutaj to, czy gracz trafia do społeczeństwa A, czy jednego ze społeczeństw B zależy od losowania, w którym gra A oraz gra B mają takie same szanse wylosowania. Macierz przejścia będzie więc kombinacją liniową macierzy przejścia obu gier: $AB = 0.5A + 0.5B$. Postać macierzy AB:

$$AB = \begin{bmatrix} 0.0010 & 0.9434 & 0.0556 \\ 0.0556 & 0.0010 & 0.9434 \\ 0.7490 & 0 & 0.2510 \end{bmatrix} \quad (92)$$

Dla gry AB, przy liczbie rozgrywek dążącej do nieskończoności otrzymamy wektor stanu

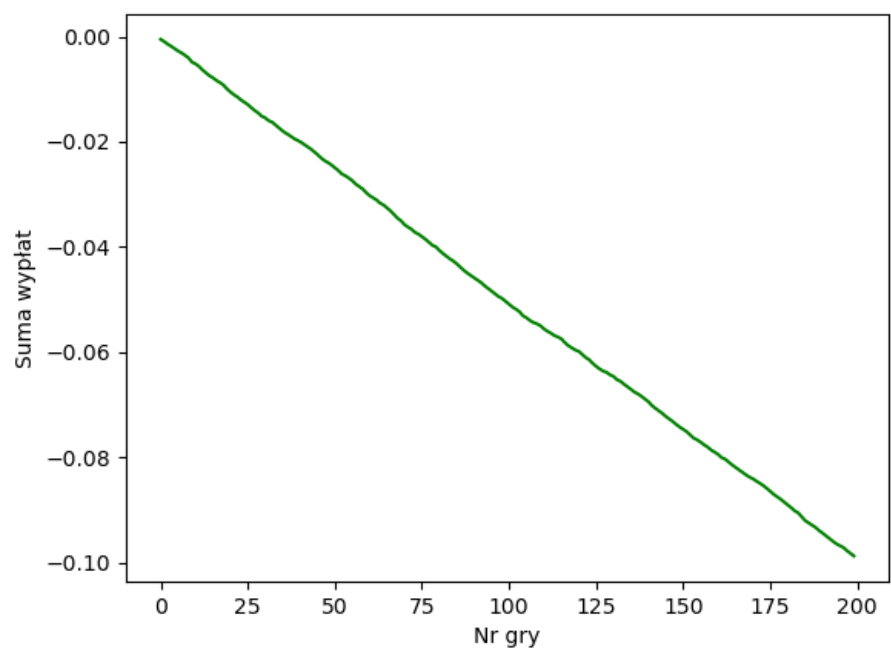
$$ab_n = [0.3117, 0.2944, 0.3939] \quad (93)$$

Zatem wartość oczekiwana wypłaty wyniesie tutaj

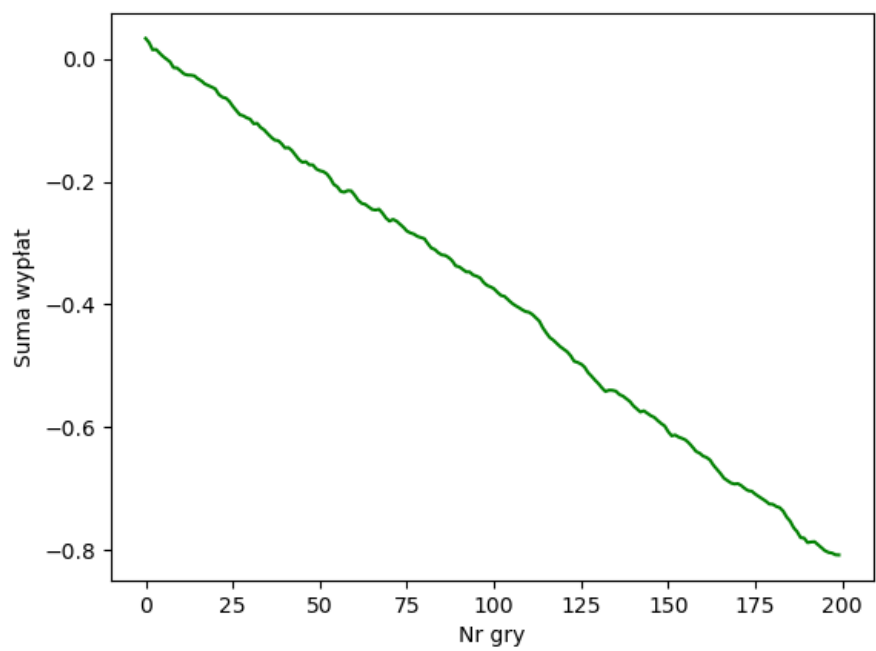
$$\begin{aligned} EV_{AB} &= 0.3117 \cdot \frac{\frac{1}{9} - 0.25 \cdot \frac{1}{500}}{2} \\ &\quad + 0.2944 \cdot \frac{\frac{1}{9} - 0.25 \cdot \frac{1}{500}}{2} \\ &\quad - 0.3939 \cdot \frac{0.25 \cdot \frac{1}{2} + 0.25 \cdot \frac{1}{500}}{2} \\ &= 0.0172 + 0.0163 - 0.0247 = 0.0088 > 0 \end{aligned} \quad (94)$$

Ponieważ wartość oczekiwana wygranej jest większa od wypłaty neutralnej $F = 0$, przedstawiona gra łączona jest grą wygrywającą. Można się zatem spodziewać, że po 200 grach wartość oczekiwana sumy wypłat wyniesie ponad 1.75, co ilustruje rysunek 26.

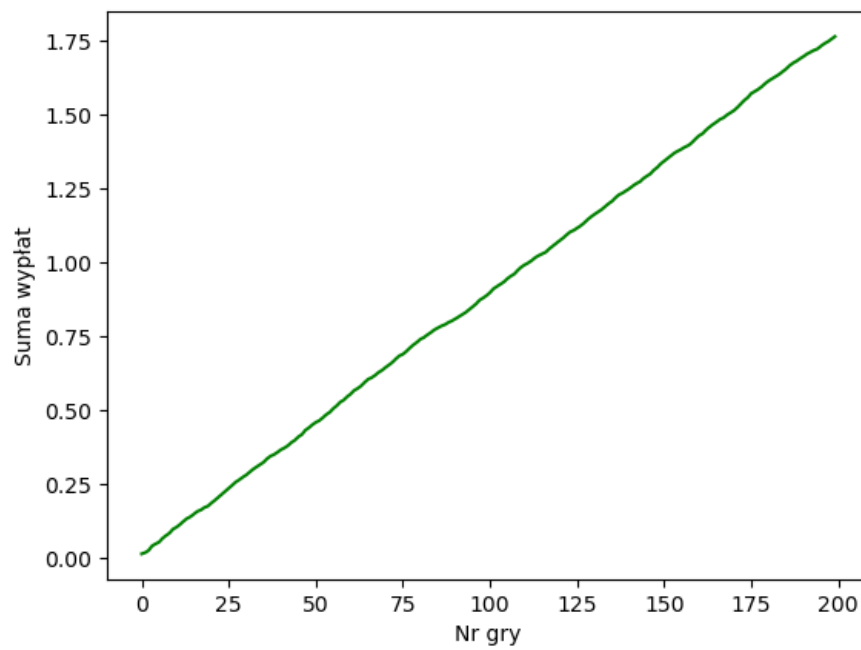
Zjawisko, w którym dwie gry grane indywidualnie są przegrywające, a w przypadku grania ich naprzemiennie stają się wygrywające nazywane jest **paradoksem Parrondo** [3].



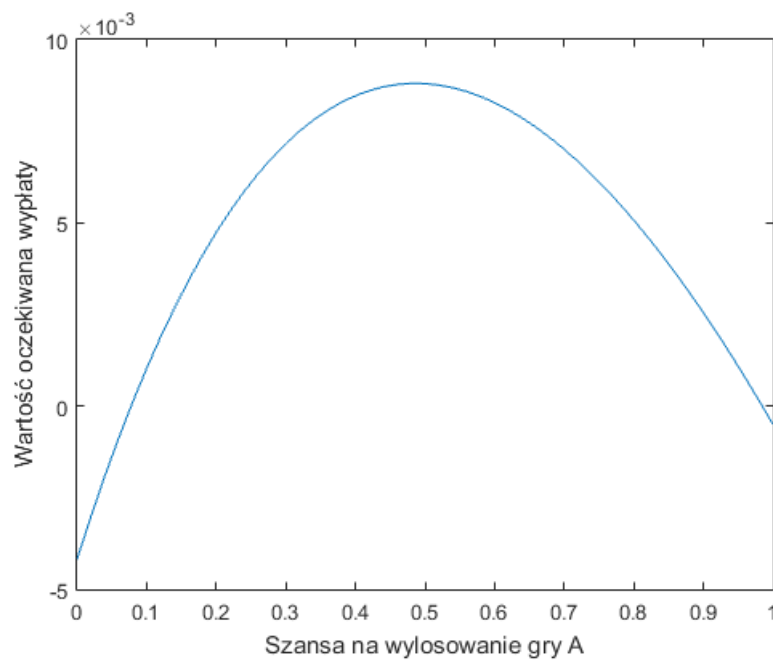
Rysunek 24: Suma wypłat bohatera w ciągu 200 kolejnych gier A uśredniona z 10000 powtórzeń.



Rysunek 25: Suma wypłat bohatera w ciągu 200 kolejnych gier B uśredniona z 10000 powtórzeń.



Rysunek 26: Suma wypłat bohatera w ciągu 200 kolejnych gier łączonych A i B granych losowo z równym prawdopodobieństwem wyboru każdej z nich uśredniona z 10000 powtórzeń.



Rysunek 27: Wartość oczekiwana wypłaty w grze łączonej w zależności od szansy na wylosowanie gry A.

Gra łączona może być grą wygrywającą dla różnej częstości grania w grę A i B. Rysunek 27 prezentuje wartość oczekiwaną wypłaty w zależności od szansy wylosowania gry A. Oczywiście szanse na wylosowanie każdej z gier sumują się do jedności. Kiedy szansa na wybór gry A wynosi zero, wartość oczekiwana wypłaty jest taka, jak przy grze B, ponieważ wtedy grana jest tylko gra B. I odwrotnie. Gry łączone $\theta A + (1 - \theta B)$ są wygrywające, gdy

$$\theta \in [0.08; 0.98] \tag{95}$$

5 Gra trzyosobowa

5.1 Strategie w grze trzyosobowej

Gra dwuosobowa dawała każdemu z graczy $2^2 = 4$ możliwych strategii i celem jej analizy należało rozważyć wypłaty dwóch graczy w $4 \cdot 4 = 16$ sytuacjach. W przypadku gry trzyosobowej pojawiają się nowe strategie, co znacznie utrudni analizę. Każdy z graczy będzie miał $2^3 = 8$ możliwych strategii, a że graczy będzie trzech, to liczba sytuacji w grze wyniesie $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$, a w każdej z nich należy brać pod uwagę wypłaty trzech graczy.

Z punktu widzenia *gracza A* możliwe strategie przedstawiają się następująco:

1. D_0 - gracz milczy;
2. D_A - gracz przyznaje się i wydaje miejsce łupu;
3. D_B - gracz wydaje jednego ze współników, *gracza B*;
4. D_C - gracz wydaje jednego ze współników, *gracza C*;
5. D_{AB} - gracz przyznaje się i wydaje jednego ze współników, *gracza B*, oraz miejsce łupu;
6. D_{AC} - gracz przyznaje się i wydaje jednego ze współników, *gracza C*, oraz miejsce łupu;
7. D_{BC} - gracz wydaje obu partnerów;
8. D_{ABC} - gracz przyznaje się i wydaje obu partnerów oraz miejsce łupu;

Strategie *gracza B* oraz *gracza C* są analogiczne.

Można się spodziewać, że każdy z graczy, chcąc wykluczyć pozostałych z podziału łupu, będzie donosił na nich, ale z drugiej strony, wiedząc, że podobne plany mają rywale, należy zabezpieczyć się na okoliczność donosu i samemu przyznać się do winy.

5.2 Punkty równowagi Nasha

Nakreślone wcześniej zasady się nie zmieniają. Nadal karę więzienia P otrzyma ten, kto nie przyzna się, a ktoś na niego doniesie. Jeżeli nikt się nie przyzna, to łup będzie dzielony między tych, którzy nie trafią do więzienia. Jedynym novum, jest wypłata $R/3$, którą otrzymają gracze, jeżeli wszyscy będą milczeć. Jest to wartość podziału łupu na trzech, która spełnia zależność

$$R/2 > R/3 > F \quad (96)$$

Logiczne jest, że przy równym podziale łupu na trzech graczy, każdy z udziałowców otrzyma mniej, niż przy podziale na dwóch, a jakakolwiek część łupu jest lepsza niż jego brak. Stąd wypłaty w grze trzyosobowej będą spełniać warunek:

$$R > R/2 > R/3 > F > U > P \quad (97)$$

Mając określone wypłaty można zbudować tabele wypłat. Będą one prezentować wypłaty trzech graczy w kolejności alfabetycznej. Decyzje *gracza A* będą reprezentowane przez wiersze, *gracza B* przez kolumny, wybór *gracza C* oznaczony będzie w kolejnych tabelach.

Tabela 8: Tabela wypłat graczy w trzyosobowym rozszerzonym dylemacie więźnia przy decyzji D_0 gracza C . W wierszach decyzje gracza A , w kolumnach gracza B .

	D_0	D_B	D_C	D_A	D_{BC}	D_{AB}	D_{AC}	D_{ABC}
D_0	R/3 ; R/3 ; R/3	F ; U ; F	R/2 ; R/2 ; P	P ; R/2 ; R/2	F ; U ; P	P ; U ; F	P ; R ; P	P ; U ; P
D_A	U ; F ; F	U ; U ; F	U ; F ; P	U ; F ; F	U ; U ; P	U ; U ; F	U ; F ; P	U ; U ; P
D_B	R/2 ; P ; R/2	F ; U ; F	R ; P ; P	P ; P ; R	F ; U ; P	P ; U ; F	P ; P ; P	P ; U ; P
D_C	R/2 ; R/2 ; P	F ; U ; P	R/2 ; R/2 ; P	P ; R ; P	F ; U ; P	P ; U ; P	P ; R ; P	P ; U ; P
D_{AB}	U ; P ; F	U ; U ; F	U ; P ; P	U ; P ; F	U ; U ; P	U ; U ; F	U ; P ; P	U ; U ; P
D_{AC}	U ; F ; P	U ; U ; P	U ; F ; P	U ; F ; P	U ; U ; P	U ; U ; P	U ; F ; P	U ; U ; P
D_{BC}	R ; P ; P	F ; U ; P	R ; P ; P	P ; P ; P	F ; U ; P	P ; U ; P	P ; P ; P	P ; U ; P
D_{ABC}	U ; P ; P	U ; U ; P	U ; P ; P	U ; P ; P	U ; U ; P	U ; U ; P	U ; P ; P	U ; U ; P

Tabela 9: Tabela wypłat graczy w trzyosobowym rozszerzonym dylemacie więźnia przy decyzji D_C gracza C . W wierszach decyzje gracza A , w kolumnach gracza B .

	D_0	D_B	D_C	D_A	D_{BC}	D_{AB}	D_{AC}	D_{ABC}
D_0	F ; F ; U	F ; U ; U	F ; F ; U	P ; F ; U	F ; U ; U	P ; U ; U	P ; F ; U	P ; U ; U
D_A	U ; F ; U	U ; U ; U	U ; F ; U	U ; F ; U	U ; U ; U	U ; U ; U	U ; F ; U	U ; U ; U
D_B	F ; P ; U	F ; U ; U	F ; P ; U	P ; P ; U	F ; U ; U	P ; U ; U	P ; P ; U	P ; U ; U
D_C	F ; F ; U	F ; U ; U	F ; F ; U	P ; F ; U	F ; U ; U	P ; U ; U	P ; F ; U	P ; U ; U
D_{AB}	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; U ; U
D_{AC}	U ; F ; U	U ; U ; U	U ; F ; U	U ; F ; U	U ; U ; U	U ; U ; U	U ; F ; U	U ; U ; U
D_{BC}	F ; P ; U	F ; U ; U	F ; P ; U	P ; P ; U	F ; U ; U	P ; U ; U	P ; P ; U	P ; U ; U
D_{ABC}	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; U ; U

Tabela 10: Tabela wypłat graczy w trzyosobowym rozszerzonym dylemacie więźnia przy decyzji D_A gracza C . W wierszach decyzje gracza A , w kolumnach gracza B .

	D_0	D_B	D_C	D_A	D_{BC}	D_{AB}	D_{AC}	D_{ABC}
D_0	P ; R/2 ; R/2	P ; U ; F	P ; R ; P	P ; R/2 ; R/2	P ; U ; P	P ; U ; F	P ; R ; P	P ; U ; P
D_A	U ; F ; F	U ; U ; F	U ; F ; P	U ; F ; F	U ; U ; P	U ; U ; F	U ; F ; P	U ; U ; P
D_B	P ; P ; R	P ; U ; F	P ; P ; P	P ; P ; R	P ; U ; P	P ; U ; F	P ; P ; P	P ; U ; P
D_C	P ; R ; P	P ; U ; P	P ; R ; P	P ; R ; P	P ; U ; P	P ; U ; P	P ; R ; P	P ; U ; P
D_{AB}	U ; P ; F	U ; U ; F	U ; P ; P	U ; P ; F	U ; U ; P	U ; U ; F	U ; P ; P	U ; U ; P
D_{AC}	U ; F ; P	U ; U ; P	U ; F ; P	U ; F ; P	U ; U ; P	U ; U ; P	U ; F ; P	U ; U ; P
D_{BC}	P ; P ; P	P ; U ; P	P ; P ; P	P ; P ; P	P ; U ; P	P ; U ; P	P ; P ; P	P ; U ; P
D_{ABC}	U ; P ; P	U ; U ; P	U ; P ; P	U ; P ; P	U ; U ; P	U ; U ; P	U ; P ; P	U ; U ; P

Tabela 11: Tabela wypłat graczy w trzyosobowym rozszerzonym dylemacie więźnia przy decyzji D_B gracza C . W wierszach decyzje gracza A , w kolumnach gracza B .

	D_0	D_B	D_C	D_A	D_{BC}	D_{AB}	D_{AC}	D_{ABC}
D_0	R/2 ; P ; R/2	F ; U ; F	R ; P ; P	P ; P ; R	F ; U ; P	P ; U ; F	P ; P ; P	P ; U ; P
D_A	U ; P ; F	U ; U ; F	U ; P ; P	U ; P ; F	U ; U ; P	U ; U ; F	U ; P ; P	U ; U ; P
D_B	R/2 ; P ; R/2	F ; U ; F	R ; P ; P	P ; P ; R	F ; U ; P	P ; U ; F	P ; P ; P	P ; U ; P
D_C	R ; P ; P	F ; U ; P	R ; P ; P	P ; P ; P	F ; U ; P	P ; U ; P	P ; P ; P	P ; U ; P
D_{AB}	U ; P ; F	U ; U ; F	U ; P ; P	U ; P ; F	U ; U ; P	U ; U ; F	U ; P ; P	U ; U ; P
D_{AC}	U ; P ; P	U ; U ; P	U ; P ; P	U ; P ; P	U ; U ; P	U ; U ; P	U ; P ; P	U ; U ; P
D_{BC}	R ; P ; P	F ; U ; P	R ; P ; P	P ; P ; P	F ; U ; P	P ; U ; P	P ; P ; P	P ; U ; P
D_{ABC}	U ; P ; P	U ; U ; P	U ; P ; P	U ; P ; P	U ; U ; P	U ; U ; P	U ; P ; P	U ; U ; P

Tabela 12: Tabela wypłat graczy w trzyosobowym rozszerzonym dylemacie więźnia przy decyzji D_{AB} gracza C . W wierszach decyzje gracza A , w kolumnach gracza B .

	D_0	D_B	D_C	D_A	D_{BC}	D_{AB}	D_{AC}	D_{ABC}
D_0	P ; P ; R	P ; U ; F	P ; P ; P	P ; P ; R	P ; U ; P	P ; U ; F	P ; P ; P	P ; U ; P
D_A	U ; P ; F	U ; U ; F	U ; P ; P	U ; P ; F	U ; U ; P	U ; U ; F	U ; P ; P	U ; U ; P
D_B	P ; P ; R	P ; U ; F	P ; P ; P	P ; P ; R	P ; U ; P	P ; U ; F	P ; P ; P	P ; U ; P
D_C	P ; P ; P	P ; U ; P	P ; P ; P	P ; P ; P	P ; U ; P	P ; U ; P	P ; P ; P	P ; U ; P
D_{AB}	U ; P ; F	U ; U ; F	U ; P ; P	U ; P ; F	U ; U ; P	U ; U ; F	U ; P ; P	U ; U ; P
D_{AC}	U ; P ; P	U ; U ; P	U ; P ; P	U ; P ; P	U ; U ; P	U ; U ; P	U ; P ; P	U ; U ; P
D_{BC}	P ; P ; P	P ; U ; P	P ; P ; P	P ; P ; P	P ; U ; P	P ; U ; P	P ; P ; P	P ; U ; P
D_{ABC}	U ; P ; P	U ; U ; P	U ; P ; P	U ; P ; P	U ; U ; P	U ; U ; P	U ; P ; P	U ; U ; P

Tabela 13: Tabela wypłat graczy w trzyosobowym rozszerzonym dylemacie więźnia przy decyzji D_{AC} gracza C . W wierszach decyzje gracza A , w kolumnach gracza B .

	D_0	D_B	D_C	D_A	D_{BC}	D_{AB}	D_{AC}	D_{ABC}
D_0	P ; F ; U	P ; U ; U	P ; F ; U	P ; F ; U	P ; U ; U	P ; U ; U	P ; F ; U	P ; U ; U
D_A	U ; F ; U	U ; U ; U	U ; F ; U	U ; F ; U	U ; U ; U	U ; U ; U	U ; F ; U	U ; U ; U
D_B	P ; P ; U	P ; U ; U	P ; P ; U	P ; P ; U	P ; U ; U	P ; U ; U	P ; P ; U	P ; U ; U
D_C	P ; F ; U	P ; U ; U	P ; F ; U	P ; F ; U	P ; U ; U	P ; U ; U	P ; F ; U	P ; U ; U
D_{AB}	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; U ; U
D_{AC}	U ; F ; U	U ; U ; U	U ; F ; U	U ; F ; U	U ; U ; U	U ; U ; U	U ; F ; U	U ; U ; U
D_{BC}	P ; P ; U	P ; U ; U	P ; P ; U	P ; P ; U	P ; U ; U	P ; U ; U	P ; P ; U	P ; U ; U
D_{ABC}	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; U ; U

Tabela 14: Tabela wypłat graczy w trzyosobowym rozszerzonym dylemacie więźnia przy decyzji D_{BC} gracza C . W wierszach decyzje gracza A , w kolumnach gracza B .

	D_0	D_B	D_C	D_A	D_{BC}	D_{AB}	D_{AC}	D_{ABC}
D_0	F ; P ; U	F ; U ; U	F ; P ; U	P ; P ; U	F ; U ; U	P ; U ; U	P ; P ; U	P ; U ; U
D_A	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; U ; U
D_B	F ; P ; U	F ; U ; U	F ; P ; U	P ; P ; U	F ; U ; U	P ; U ; U	P ; P ; U	P ; U ; U
D_C	F ; P ; U	F ; U ; U	F ; P ; U	P ; P ; U	F ; U ; U	P ; U ; U	P ; P ; U	P ; U ; U
D_{AB}	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; U ; U
D_{AC}	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; U ; U
D_{BC}	F ; P ; U	F ; U ; U	F ; P ; U	P ; P ; U	F ; U ; U	P ; U ; U	P ; P ; U	P ; U ; U
D_{ABC}	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; U ; U

Tabela 15: Tabela wypłat graczy w trzyosobowym rozszerzonym dylemacie więźnia przy decyzji D_{ABC} gracza C . W wierszach decyzje gracza A , w kolumnach gracza B .

	D_0	D_B	D_C	D_A	D_{BC}	D_{AB}	D_{AC}	D_{ABC}
D_0	P ; P ; U	P ; U ; U	P ; P ; U	P ; P ; U	P ; U ; U	P ; U ; U	P ; P ; U	P ; U ; U
D_A	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; U ; U
D_B	P ; P ; U	P ; U ; U	P ; P ; U	P ; P ; U	P ; U ; U	P ; U ; U	P ; P ; U	P ; U ; U
D_C	P ; P ; U	P ; U ; U	P ; P ; U	P ; P ; U	P ; U ; U	P ; U ; U	P ; P ; U	P ; U ; U
D_{AB}	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; U ; U
D_{AC}	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; U ; U
D_{BC}	P ; P ; U	P ; U ; U	P ; P ; U	P ; P ; U	P ; U ; U	P ; U ; U	P ; P ; U	P ; U ; U
D_{ABC}	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; P ; U	U ; U ; U	U ; U ; U	U ; P ; U	U ; U ; U

	D_0	D_B	D_C	D_A	D_{BC}	D_{AB}	D_{AC}	D_{ABC}
D_0		→	→	→	→	→	→	→
D_A	←	↑	←	↓	←	↓	←	↓
D_B	→	↑	←	↑	→	→	→	→
D_C	→	↑	→	←	→	→	→	→
D_{AB}	→	←	→	↓	→	↓	→	↓
D_{AC}	←	→	←	↓	←	↓	←	↓
D_{BC}	↓	→	→	↓	→	→	→	→
D_{ABC}	→	→	→	↓	→	→	→	→

Rysunek 28: Diagram przesunięć w trzyosobowym dylemacie więźnia w przypadku decyzji D_0 gracza C .

Równanie (97) warunkuje relacje między wypłatami i jest podstawą do znalezienia punktów równowagi Nasha. Przykładowy diagram przesunięć w trzyosobowym rozszerzonym dylemacie więźnia prezentuje rysunek 28. Można na nim znaleźć 12 sytuacji podejrzanych o bycie punktami równowagi - dwóm graczom nie opłaca się zmienić swoich strategii, jeżeli inni jej nie zmieniają. W większości z nich oskarżany jest *gracz C*, więc milczenie nie może być jego optymalną strategią. Stąd, ze znalezionych 12 punktów podejrzanych o bycie punktami równowagi, tylko 3 takimi punktami są rzeczywiście. W każdym z nich *gracz C* otrzymuje wypłatę F i są to:

- $D_A - D_A - D_0$
- $D_B - D_B - D_0$
- $D_{AB} - D_{AB} - D_0$

Wyodrębniając w każdej tabeli sytuacje, w których *gracz A* oraz *gracz B* nie mają korzyści w zmianie swojej strategii, a następnie sprawdzając czy w tych sytuacjach *gracz C* ma strategię dającą lepszą wypłatę można określić punkty równowagi. Tak znalezione punkty równowagi zebrano w tabeli 16.

Można wyróżnić 63 punkty równowagi. Z perspektywy dowolnego gracza:

- 3 wymagają milczenia
- 12 wymaga przyznania się
- 8 wymaga wydania jednego ze współników
- 4 wymagają wydania obu współników
- 24 wymagają przyznania się i wydania jednego ze współników
- 12 wymagają przyznania się i wydanie obu współników

W żadnej z sytuacji równowagi gracze nie gwarantują sobie więcej niż F . Można dostrzec podobieństwo do gry dwuosobowej - punktami równowagi są sytuacje, w której gracze donoszą na tych, którzy się przyznali. Jasnym jest, że nie są to sytuacje paretooptymalne, ponieważ gdyby wszyscy milczeli, każdy z nich otrzymałby wypłatę większą niż w którymkolwiek z punktów równowagi.

Tabela 16: Punkty równowagi w trzysobowym rozszerzonym dylemacie więźnia wraz z wypłatami.

<i>gracz A</i>	<i>gracz B</i>	<i>gracz C</i>	wypłata <i>gracza A</i>	wypłata <i>gracza B</i>	wypłata <i>gracza C</i>
D_A	D_A	D_0	U	F	F
D_B	D_B	D_0	F	U	F
D_{AB}	D_{AB}	D_0	U	U	F
D_0	D_C	D_C	F	F	U
D_A	D_{AC}	D_C	U	F	U
D_B	D_{BC}	D_C	F	U	U
D_C	D_0	D_C	F	F	U
D_C	D_C	D_C	F	F	U
D_{AB}	D_{ABC}	D_C	U	U	U
D_{AC}	D_A	D_C	U	F	U
D_{AC}	D_{AC}	D_C	U	F	U
D_{BC}	D_B	D_C	F	U	U
D_{BC}	D_{BC}	D_C	F	U	U
D_{ABC}	D_{AB}	D_C	U	U	U
D_{ABC}	D_{ABC}	D_C	U	U	U
D_A	D_0	D_A	U	F	F
D_A	D_A	D_A	U	F	F
D_{AB}	D_B	D_A	U	U	F
D_{AB}	D_{AB}	D_A	U	F	F
D_0	D_B	D_B	F	U	F
D_A	D_{AB}	D_B	U	U	F
D_B	D_B	D_B	F	U	F
D_{AB}	D_{AB}	D_B	U	U	F
D_A	D_B	D_{AB}	U	U	F
D_A	D_{AB}	D_{AB}	U	U	F
D_{AB}	D_B	D_{AB}	U	U	F
D_{AB}	D_{AB}	D_{AB}	U	U	F
D_A	D_C	D_{AC}	U	F	U
D_A	D_{AC}	D_{AC}	U	F	U
D_{AB}	D_{BC}	D_{AC}	U	U	U

Tabela 17: Punkty równowagi w trzyosobowym rozszerzonym dylemacie więźnia wraz z wypłatami. Ciąg dalszy.

<i>gracz A</i>	<i>gracz B</i>	<i>gracz C</i>	wypłata <i>gracza A</i>	wypłata <i>gracza B</i>	wypłata <i>gracza C</i>
D_{AB}	D_{ABC}	D_{AC}	U	U	U
D_{AC}	D_0	D_{AC}	U	F	U
D_{AC}	D_C	D_{AC}	U	F	U
D_{AC}	D_A	D_{AC}	U	F	U
D_{AC}	D_{AC}	D_{AC}	U	F	U
D_{ABC}	D_B	D_{AC}	U	U	U
D_{ABC}	D_{BC}	D_{AC}	U	U	U
D_{ABC}	D_{AB}	D_{AC}	U	U	U
D_{ABC}	D_{ABC}	D_{AC}	U	U	U
D_0	D_{BC}	D_{BC}	F	U	U
D_A	D_{ABC}	D_{BC}	U	U	U
D_B	D_{BC}	D_{BC}	F	U	U
D_C	D_C	D_{BC}	F	U	U
D_C	D_{BC}	D_{BC}	F	U	U
D_{AB}	D_{ABC}	D_{BC}	U	U	U
D_{AC}	D_{AB}	D_{BC}	U	U	U
D_{AC}	D_{ABC}	D_{BC}	U	U	U
D_{BC}	D_B	D_{BC}	F	U	U
D_{BC}	D_{BC}	D_{BC}	F	U	U
D_{ABC}	D_{AB}	D_{BC}	U	U	U
D_{ABC}	D_{ABC}	D_{BC}	U	U	U
D_A	D_{BC}	D_{ABC}	U	U	U
D_A	D_{ABC}	D_{ABC}	U	U	U
D_{AB}	D_{BC}	D_{ABC}	U	U	U
D_{AB}	D_{ABC}	D_{ABC}	U	U	U
D_{AC}	D_B	D_{ABC}	U	U	U
D_{AC}	D_{BC}	D_{ABC}	U	U	U
D_{AC}	D_{AB}	D_{ABC}	U	U	U
D_{AC}	D_{ABC}	D_{ABC}	U	U	U
D_{ABC}	D_B	D_{ABC}	U	U	U
D_{ABC}	D_{BC}	D_{ABC}	U	U	U
D_{ABC}	D_{AB}	D_{ABC}	U	U	U
D_{ABC}	D_{ABC}	D_{ABC}	U	U	U

6 Podsumowanie

Przytoczone rozważania nie miały być jedynie opisem pewnej modyfikacji popularnego problemu. Rozszerzenie dylematu więźnia polega na dodaniu nowych strategii, co pozwala odnieść grę do nowych sytuacji życia społecznego, a otrzymanymi rezultatami tłumaczyć postawy w społeczeństwie. Prezentowany model jest podstawą wyodrębnienia czterech różnych charakterów i wskazuje wśród nich te, które są w stanie przetrwać ewolucję społeczności. Dzięki odpowiedniemu doborowi grup charakterów stworzono warunki, w których mimo, że przebywanie w dwóch społecznościach jest przegrywające, to przemieszczanie się między nimi daje efekt wygrywający. Określono trzysobową wersję gry, co pokazuje sposób adaptacji prezentowanego modelu do gier, w których uczestniczy więcej niż dwie osoby. Wskazano w tej grze punkty równowagi.

Dodanie nowych strategii do klasycznej wersji dylematu więźnia jest zwiększeniem możliwości nie tylko wyboru u graczy, ale przede wszystkim modelu, który teraz uwzględnia sytuacje pośrednie. Wcześniej decyzję gracza można było poznać znając odpowiedź na pytanie „czy doniósł?”, w rozszerzonej wersji zasadne jest pytanie „na kogo doniósł?”. W pracy **określono dla dwuosobowej gry 4 możliwe strategie: milczeć, donieść na siebie - przyznać się, donieść na rywala, donieść na siebie (przyznać się) i na rywala**. Stanowi to podstawę realizacji głównego celu - budowy modelu. Można zauważyć, że każda z podanych strategii jest inną odpowiedzią na postawione wyżej pytanie. Ponadto opcje te wyczerpują możliwości donosu w przypadku dwuosobowej gry.

Kolejny fundament budowy modelu rozszerzonego dylematu więźnia to wypłaty graczy, które są wynikiem gry we wszystkich możliwych sytuacjach (a tych jest 4 razy więcej niż w klasycznej wersji). Przy ich konstrukcji zadbano o to, by **przyznający się otrzymywał wartość wypłaty ugody U** , a ten, który **się nie przyznał, a ktoś na niego doniósł, wypłatę więzienia P** . Łup, który w przypadku obopólnego milczenia, jest dzielony między graczy, wynosi R i tyle też można otrzymać wydając współnika, jeżeli ten milczał. **Wypłatą neutralną jest wolność F** . Wypłaty, w połączeniu z zestawem możliwych strategii, stanowią model rozszerzonego dylematu więźnia.

Wartości wypłat spełniają zależność $R > F > U > P$, co jest podstawą do osiągnięcia głównego celu pracy - wyznaczenia punktów równowagi. Istotne w przyjętym modelu jest to, że do znalezienia punktów równowagi wystarczy świadomość wspomnianej relacji wartości wypłat, bez konieczności ich dokładnej znajomości. To sprawia, że przyjęty model jest opisem możliwie ogólnym. **Określone punkty równowagi to sytuacje, gdzie jeden z graczy donosi na drugiego, który się przyznaje lub sytuacja, gdzie obaj przyznając się, donoszą na siebie**. Osiągnięcie tego wyniku jest realizacją głównego celu pracy. Należy zaznaczyć, że od rozwiązań określonych jako punkty równowagi istnieje rozwiązanie lepsze - dające każdemu

z graczy większą wypłatę. Jest to sytuacja, kiedy gracze milczą i dzielą się łupem, ale nie wybierają go ze względu na chęć większego zysku, którego ostatecznie nie osiągają.

Bazując na warunkach wynikających z analizy gry w postaci ogólnej, określone zostały konkretne wartości wypłat. I tak **ustalono wartość kary więzienia $P = -1$, ugody $U = -\frac{1}{4}$, wolności $F = 0$, całego łupu $R = 1$, a wynik jego podziału na dwóch $R/2 = \frac{1}{2}$** . Ustalenie konkretnych wartości jest krokiem w stronę analizy ewolucji społeczności, które rozgrywają wewnętrzne gry dające się opisać rozszerzonym dylematem więźnia.

Na potrzeby analizy zachowań społecznych, **praca określa cztery charaktery: kooperanta, zdrajcę, uległego i histeryka**. Kooperant nigdy nie zdradza, jest naiwny - liczy, że on też nie zostanie zdradzony. A zostaje, chociażby przez zdrajcę, który mierząc w zysk wykorzystuje tę naiwność. Jest jednak cecha, która łączy te dwa charaktery - żaden z nich nie zabezpiecza się na wypadek bycia zdradzonym. Robi to natomiast uległy - gracz wybierający rozwiązanie bezpieczne oraz histeryk, który nie tylko zabezpiecza się przed zdrajcami, ale też sam zdradza. Wyodrębnienie tych charakterów, które różnią się swoimi decyzjami w grze, a co za tym idzie, mają różną reputację w społeczności, stanowi krok w stronę badania procesu ewolucji społeczności.

Śledzenie zmian w społeczności w trakcie jego ewolucji pokazuje odejście od kooperacji na rzecz uległości i zdrady oraz ich kombinacji. Stabilność uzyskano dla grupy złożonej z uległych i zdrajców w stosunku 3 : 1 oraz grupy złożonej z samych histeryków. Stąd **za strategie stabilne ewolucyjnie uznaje się: strategię mieszaną 0.25 zdrady 0.75 uległości (w społeczności z uległymi) oraz strategię histeryków (w społeczności z histerykami)**. Wynik ten sugeruje, że w społeczności, w której każdy dba jedynie o własny interes, nie ma miejsca na współpracę.

Kolejny wniosek dotyczy wypłat - ewolucja społeczności nastawionej na własny zysk doprowadza do wyrównania się wypłat wszystkich członków na poziomie dużo niższym niż byłby osiągnięty przy współpracy. Pokazano, że **wypłaty będą dążyć do wypłaty uległego $U = -\frac{1}{4}$** . Mówiąc inaczej, z tego, że każdy chciałby mieć możliwie najwięcej, wynika w procesie rozwoju społeczności, że każdy będzie miał tyle samo, ale rezultat ten będzie mniej korzystny niż, gdyby od początku chcieli się dzielić po równo.

Inną istotną kwestią jest reputacja. Początkowo modelowane społeczności składały się z kooperantów o maksymalnej reputacji. Z czasem ich udział w populacji malał, bez względu na to, czy społeczność rozwijała się przez dołączenie nowych graczy, czy wymianę tych z najgorszymi wynikami. Podobnie reputacja. **Reputacja** średnia społeczności jest bezpośrednio związana

z charakterami jej członków, stąd też **ulegała zmianie, by ustabilizować się na poziomie $-\frac{1}{4}$ w społeczności z uległymi i na poziomie $-\frac{1}{2}$ w społeczności z histerykami.** Odejście od współpracy i mierzenie w większy zysk doprowadziły do spadku reputacji społeczności bez względu na to, że rzeczzone zyski nie zwiększyły się.

Pokazano ponadto, że odpowiednie przemieszczanie się między społecznościami, w których jest się przegrywającym daje szansę odniesienia wygranej. Stworzono unikalne połączenie rozszerzenia jednego z najbardziej popularnych problemów teorii gier z jednym z najmniej intuicyjnych - dylematu więźnia z paradoksem Parrondo. **Gra w społeczności A daje wartość oczekiwaną wypłaty -0.0005 , a gra w społeczności B -0.0041 . Gra w losowo wybraną jedną z gier daje wartość oczekiwaną 0.0088 .** Uzyskane wyniki przynoszą nadzieję tym, którzy nie czują się wygranymi w pewnych społecznościach, na zmianę tego nie przez porzucanie owych społeczności, ale umiejętne przemieszczanie się między nimi.

Prezentowany model gry jest zbudowany tak, by łatwo można było go zaimplementować do gier wieloosobowych. Rozważenie rozszerzonego problemu dla gier dwuosobowych opiera się na grze, w której jeden gracz miał 4 możliwe strategie, a gra ma 3 punkty równowagi. Przejście do gier uwzględniających więcej graczy dodaje nowe strategie - w grze trzyosobowej każdy z graczy ma ich 8, a punktów równowagi jest 63. **W trzyosobowej grze punkty równowagi związane są z donoszeniem na gracza bądź graczy, którzy się przyznają.** Określenie takich punktów równowagi jest osiągnięciem postawionego celu pracy. Uzyskany wynik można interpretować podobnie jak w przypadku dwuosobowym - w trosce o własny interes gracze wybierają rozwiązania, które nie są korzystniejsze od rozwiązania kooperacyjnego.

Skupiając się na modelu i matematycznych zależnościach praca nie pomija jego związku z sytuacjami rzeczywistymi. Gry analogiczne do tych w rozszerzonym dylemacie więźnia są częste w świecie polityki czy biznesu. Patrząc na kampanię wyborczą, można zauważyć, że strategią kooperacji byłoby prezentowanie własnych idei - rozwiązanie dobre, gdy wszyscy tak robią. Zdrada odpowiada skupieniu się na atakowaniu przeciwników politycznych. Bycie uległym to odejście od swoich postulatów na rzecz obrony przed ewentualnym atakiem rywala. Czwarty wybór to obrona połączona z atakiem. Wzajemne ataki i obrony są elementami punktów równowagi.

Patrząc na pracujących w grupie, kooperantami można nazwać tych, którzy liczą na osiągnięcie dobrego wyniku przez zespół często wspierając innych. Zdrajcy będą wykorzystywać zaangażowanie kooperantów, zwiększając swoje wyniki ich kosztem. Ulegli nie będą oczekiwać wsparcia kooperantów, a histerycy dodatkowo skupią się na sabotowaniu działań innych. Jeżeli każdy z pracujących będzie mierzył w własny zysk, to (jak wynika z ewolucji) osiągnięte wyniki in-

dywidualne będą na poziomie, na jakim byłyby bez współpracy, a liczba kooperantów będzie spadać.

Można popatrzeć też na grupę uczniów korzystających podczas testu z niedozwolonej pomocy. Za kooperantów uznawać będzie się tych, którzy korzystają z nielegalnego wsparcia. Zdrajcy będą ściągać i wydawać tych, którzy ściągają. Ulegli nie będą ściągać, ale i nie doniosą. Histerycy nie będą ściągać, ale będą donosić. Test należy traktować jako wieloosobową grę w rozszerzony dylemat więźnia.

Odniesienia rozszerzonego dylematu więźnia do sytuacji rzeczywistych potwierdzają, że zrealizowane cele pracy w postaci budowy modelu, określenia punktów równowagi i badania ewolucji społeczności nie miały być oderwaną od życia teorią, a próbą wyjaśnienia i przewidzenia pewnych socjofizycznych zjawisk.

Literatura

- [1] Filmweb. Piękny umysł. <https://www.filmweb.pl/film/Pi%C4%99kny+umys%C5%82-2001-31864>.
- [2] Pismo Święte Starego i Nowego Testamentu. *Biblia Tysiąclecia*. Pallottinum, 1989. J 2, 1-11.
- [3] Gregory Harmer and Derek Abbott. Losing strategies can win by Parrondo's paradox. *Nature* 402, page 864, 1999.
- [4] Philip Straffin. *Teoria gier*. Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR, 2001.
- [5] Thomas Ferguson. *Game theory*. Mathematics Department, UCLA, 2014.
- [6] Damian Wróbel. Gra EGZAMIN. *Foton - pismo dla nauczycieli i studentów fizyki oraz uczniów*, (140 Wiosna), 2018.
- [7] John Nash. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 54:286–295, 1951.
- [8] Dominik Mielczarek. Teoria gier wykład, 2019/20. Wydział Matematyki Stosowanej AGH Kraków.
- [9] Anatol Rapoport, Albert Chammah, and Carol Orwant. *Prisoner's Dilemma: A Study in Conflict and Cooperation*. University of Michigan Press, 1965.
- [10] Anna Dreber, David G. Rand, Drew Fudenberg, and Martin A. Nowak. Winners Don't Punish. *Nature*, 452:348–351, 2008.
- [11] Paul A. Gagniuc. *Markov Chains: From Theory to Implementation and Experimentation*. John Wiley & Sons, 2017.

Podane adresy internetowe dostępne na 7.07.2020 r.