Dębniki
Rynek 6

Dr. Antoni Hoborski,
profesor zwycz. Akademji Górniczej.

ARYTMETYKA LICZB ZESPOLONYCH I ELEMENTY ALGEBRY.

1929
Kraków
Wydane nakładem Stowarzyszenia
Studentów Akademji Górniczej.

Przedmowa.

Niniejszy skrypt zawiera wykłady, jakie od kilku lat wygłaszam w Akademji Górniczej w ramach Analizy dla Studentów pierwszego roku.

Ze względu na cel wykładów, jak i na szczupłą liczbę godzin, które mogę temu przedmiotowi poświęcić, musiałem nietylko ograniczyć materjał w wysokim stopniu, ale i zrezygnować z metody, jeżeli wymaga znacznego przygotowania.

Niech więc będzie usprawiedliwieniem dla mnie, gdy uważny Czytelnik nie znajdzie teorji liczb zespolonych przedstawionej jako teorji par liczbowych, gdy znajdzie metodę Studdego zamiast metody Lagrange'a i t.d.

Głównym punktem niniejszego skryptu są praktyczne metody rozwiązywania równań stopnia trzeciego i czwartego.

W Krakowie dnia 5 maja 1929. Autor.

Wykłady spisywał p. Br. Rudnicki, ustalał rękopis autor, rękopis do litograficznego powielenia przepisywał p. Zbigniew Bolechowski, korektę przepisanego rękopisu przeprowadził p. Stanisław Turski asystent Akademji Górniczej, Spis rzeczy i errata ułożył autor.

Uwaga. Przed rozpoczęciem czytania poleca się poprawić tekst według załączonego spisu „Dostrzeżonych omyłek".

1 @ całk. bezwgl.
(naturalne + 0)

1) liczby naturalne
2) liczby wym. dod. $\left(\frac{m}{n}\right)$
3) liczby wymierne } dodat. o ujemne
4) liczby niewymierne
5) liczby rzeczyw.

Część I

Arytmetyka liczb zespolonych.

Rozdział I - Wstępne wiadomości.

§1. Dla lepszego zrozumienia arytmetyki liczb zespolonych należy przypomnieć sobie elementy arytmetyki; zaczyna się ją od poznania liczb naturalnych: 1, 2, 3, 4, ... Jeżeli do tych liczb dołączymy liczbę 0 to otrzymamy zbiór liczbowy zwany zbiorem liczb całkowitych bezwzględnych. Oznaczmy go przez Z_1. Poniżej poznamy dalsze zbiory liczbowe. Arytmetyka zbiorów liczbowych zasadza się na określeniu: 1). pojęcia równości i nierówności (-mniejszości i większości; dla liczb zespolonych mniejszości i większości nie określamy) i 2). na pojęciu działań na liczbach zbioru.

Obierzmy jakiekolwiek dwie liczby α i β z rozważanego zbioru liczbowego i wykonajmy na nich działania, których wyniki oznacza się przez: $\alpha+\beta$; $\alpha-\beta$; $\alpha.\beta$; $\frac{\alpha}{\beta}$; α^β i $\sqrt[\beta]{\alpha}$

Zbiór liczbowy do którego należą liczby α i β może być tego rodzaju, że niektóre z powyższych działań są w tym zbiorze niewykonalne. W zbiorze np. liczb całkowitych bezwzględnych dodawanie, mnożenie i potęgowanie (poza wyjątkiem 0^0) są zawsze wykonalne, to znaczy, że wynikiem tych działań jest zawsze liczba całkowita bezwzględna. Odejmowanie, dzielenie i pierwiastkowanie jednak nie zawsze są wykonalne. Aby np. odejmowanie o różnicy $\alpha-\beta$ było wykonalne muszą liczby α, β spełniać warunek konieczny i wystarczający wykonalności odejmowania streszczający się w nierówności $\alpha \geqslant \beta$

§ 2. Niech rozważany chwilowo zbiór liczbowy będzie takim, że pewne działania w tym zbiorze są wykonalne, a inne są niewykonalne. Powstaje więc nowy problem rozszerzenia pojęcia liczby, utworzenia nowego zbioru liczbowego tak, aby w nim stały się wykonalnemi te działania, które poprednio nie były wykonalne, albo żeby stały się wykonalnemi przy mniejszej ilości zastrzeżeń. Tak np. w zbiorze Z_1 liczb całkowitych bezwzględnych nie istnieje iloraz np. dzielenia 5 : 3, ani iloraz, dla którego dzielnik jest = 0.

Wprowadzamy więc nowy zbiór Z_2, zbiór liczb wymiernych bezwzględnych, a więc zbiór wszystkich liczb typu $\frac{m}{n}$, gdzie (m) jest jakąkolwiek liczbą całkowitą bezwzględną, a (n) jest liczbą naturalną. Dla liczb zbioru Z_2 należy (jak to wyjaśniliśmy powyżej) określić znowu równość i nierówność (także mniejszość i większość). Działania, jak dodawanie i mnożenie wykonalne są bez zastrzeżeń, ale pozostałe działania nie są zawsze wykonalne. Pod jednym jednak względem posuwamy się naprzód, bo dzielenie jest już wykonalne zawsze poza wyjątkiem, gdy dzielnikiem jest liczba 0. Odejmowanie, (potęgowanie) i pierwiastkowanie są nadal nie zawsze wykonalne. Np. $2^{\frac{3}{4}}$, gdy rozporządzamy tylko liczbami zbioru Z_2 t.j. w zbiorze liczb wymiernych bezwzględnych nie oznacza żadnej liczby.

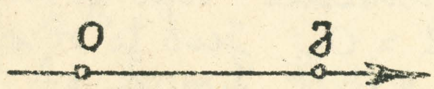
§ 3. Powstaje tedy nowe pytanie, czy nie można dalej rozszerzyć pojęcia liczb, aby mieć mniej warunków wykonalności działania. Uzupełnimy więc zakres liczb wymiernych, tworząc zbiór $Z_3 = Z_2 +$ liczby niewymierne bezwzględne. Cały ten zbiór Z_3 nazywamy zbiorem liczb rzeczywistych bezwzględnych. W tym nowym zbiorze liczb rzeczywistych bezwzględnych określimy równość, większość i mniejszość, następnie 6 działań. W tym nowym zbiorze Z_3 działania: dodawanie, mnożenie, dzielenie (poza dzieleniem przez 0), potęgowanie poza 0^0 i pierwiastkowanie poza $\sqrt[0]{a}$ są wykonalne zawsze. Nie można więc powiedzieć, że nie ma już żadnych zastrzeżeń dla wykonalności działań, ale są dość wąskie. Odejmowanie jest jednak jeszcze nie zawsze wykonalne; dla różnicy $\alpha - \beta$ mamy jeszcze i teraz ten sam warunek $\alpha \geqslant \beta$.

§ 4. Pojęcie liczby rozszerzamy jeszcze dalej tworząc zbiór Z_4 który obejmuje liczby dodatnie, ujemne i 0, czyli

tak zwane liczby rzeczywiste.
Dla tego zbioru liczb rzeczywistych tworzymy znowu pojęcie: równości, mniejszości i większości. (Jest to zarazem ostatni zbiór, dla którego określa się pojęcia większości i mniejszości).
Następnie określamy dla liczb tego zbioru działania arytmetyczne. Dla liczb zbioru Z_4 są dodawanie, odejmowanie i mnożenie działaniami wykonalnemi zawsze, dzielenie jest wykonalne za wyjątkiem gdy dzielnik jest równy 0. Teraz zwrócimy się do pierwiastkowania. Zauważamy jednak naprzód, że zamiast mówić o wykonalności dzielenia $\alpha : \beta$ możemy mówić o rozwiązalności $\beta\xi = \alpha$; Podobnie zamiast mówić o wykonalności odejmowania $\alpha - \beta$ możemy mówić o rozwiązalności równania $\beta + \xi = \alpha$; wreszcie zamiast o wykonalności pierwiastkowania $\sqrt[\beta]{\alpha}$ możemy mówić o rozwiązalności równania $\xi^\beta = \alpha$.

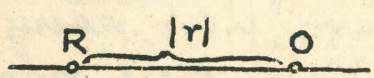
Otóż weźmy równanie tego rodzaju $x^2 = -1$ lub $x^2 + 1 = 0$. Jest to równanie bardzo proste o jednej niewiadomej, a jednak w zbiorze liczb Z_1, Z_2, Z_3 i Z_4 jest nierozwiązalnem. Widzimy więc, że pierwiastkowanie w zbiorze Z_4 nie zawsze jest wykonalnem. I tu można sobie postawić zagadnienie takie: czy da się się pojęcie liczb tak rozszerzyć aby równanie $x^2+1=0$ przy odpowiedniem rozszerzeniu pojęć równości i działań miało rozwiązania. Właśnie w następnym rozdziale poznamy dalszy zbiór liczbowy, w którym równanie to będzie posiadało rozwiązania, gdy mianowicie określimy zbiór liczb zespolonych.)

§ 5. Nim jednak do tej teorji liczb zespolonych przystąpimy uczynimy jeszcze kilka uwag. Mianowicie bardzo dobrze ułatwia zrozumienie pewnych zagadnień matematycznych interpretacja geometryczna liczb rzeczywistych na osi liczbowej. Rozważmy oś i każdy punkt tej osi uważajmy za obraz geometryczny liczby rzeczywistej. Przyjmijmy w tym celu



Rys. 1.

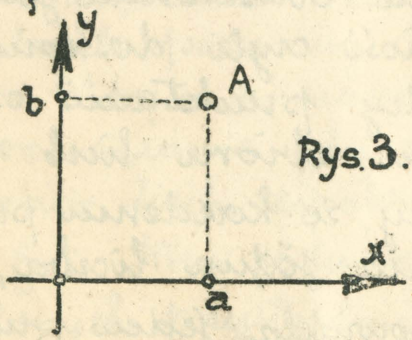
na prostej pewien punkt O za obraz liczby 0, następnie obieramy punkt J, różny od O; na tej prostej i prostą kierujemy od O ku J i punkt J uważać będziemy za obraz geometryczny liczby +1. Mając te dwa punkty można w znany sposób każdemu punktowi osi liczbowej przypisać pewną liczbę rzeczywistą i odwrotnie każdej liczbie rzeczywistej odpowiadać będzie jeden punkt tej osi. Wskutek tego zachodzić będzie obustronnie jednoznaczna odpowiedniość czyli doskonała odpowiedniość między punktami osi liczbowej, a liczbami zbioru liczb rzeczywistych. To znaczy, że każdemu punktowi tej osi odpowiada jedna liczba, a każdej liczbie odpowiada jeden punkt osi. Na takiej osi można zinterpretować rozmaite zagadnienia o liczbach rzeczywistych. Częstokroć zachodzi w rozważaniach wielkość $|r|$ t.j. bezwzględna wartość liczby rzeczywistej (r). Gdy punkt R jest obrazem liczby (r) to $|r|$, jak wiadomo jest długością odcinka OR



Rys 2.

Rozdział II. Liczby zespolone

§6. Jak wiadomo wszystkie liczby rzeczywiste można odwzorować na osi liczbowej. Obecnie zamiast osi liczbowej weźmiemy płaszczyznę odniesioną do dwu osi X i Y. Jakikolwiek punkt A tej płaszczyzny ma dwie współrzędne: odciętą (a) i rzędną (b). Istnieje odpowiedniość doskonała między punktami tej płaszczyzny i parami liczb, które stanowią pary uporządkowane liczb. [Punkt o odciętej (a) i rzędnej (b) jest wogóle różnym od punktu o odciętej (b) i rzędnej (a).]. Odpowiedniość doskonała oznacza tu, że każdemu punktowi rozważanej płaszczyzny odpowiada jedna para liczb rzeczywistych (a, b) i każdej parze liczb rzeczywistych (a, b) odpowiada jeden punkt płaszczyzny. Zauważmy nawiasowo, że związek taki nie zachodzi, gdy



Rys. 3.

użyjemy współrzędnych biegunowych dla wyznaczenia punktu płaszczyzny. Nasuwa się nowa myśl, aby każdemu punktowi naszej płaszczyzny przydać nową liczbę taką, że teraz punkt płaszczyzny będzie obrazem nowej liczby, liczby zespolonej, którą oznaczymy symbolem: $a+bi$. Uwaga na końcu książki.

Liczby zespolone będą więc odpowiednikami punktów płaszczyzny i mianowicie punkt o odciętej (a) i rzędnej (b) i liczbę zespoloną $a+bi$ uważać będziemy za sobie odpowiadające. Liczba zespolona będzie określona, gdy będą znane liczby rzeczywiste (a) i (b).

W symbolu liczby zespolonej występuje jeszcze liczba i, którą zaraz określimy. Otóż wiadomo, że każdą liczbę rzeczywistą można otrzymać przez pomnożenie liczby 1 przez odpowiednio dobraną liczbę rzeczywistą, a mianowicie jest $a = 1 . a$ Jeżeli więc chcemy otrzymać liczbę nie należącą do zbioru liczb rzeczywistych w sposób analogiczny, t.zn. przy pomocy liczb rze- Uwaga czywistych to musimy wprowadzić nową jednostkę i nią tu jest właśnie liczba (i) t. zw. jednostka urojona. Liczba zespolona jest utworzona przy pomocy jednostki rzeczywistej i urojonej (i) jest więc liczbą dwujednostkową. Liczba (a) nazywa się częścią rzeczywistą liczby zespolonej, (bi) - nazywa się częścią urojoną liczby zespolonej, a liczba (b) nazywa się współczynnikiem części urojonej. Gdy $b=0$ liczbę $a+0.i$ pisać będziemy krótko: a; jej obrazem geometrycznym jest punkt osi (x); powiemy, że wtedy liczba zespolona redukuje się do liczby rzeczywistej (x) albo jest liczbą rzeczywistą (a).

Gdy $a=0$, to liczbę $0+bi$ (przy $b\neq 0$) pisać będziemy dla krótkości: bi; nazywać ją będziemy liczbą (czysto) urojoną; jej obrazem jest punkt osi (y) poza początkiem układu. Wreszcie liczbę $0+0.i$ oznaczać będziemy krótko przez 0 i nazywać będziemy zerem - jak się bowiem później wykażemy liczba ta ma własności t. zw. zera.

§ 7. W myśl schematu podanego w § 1 określimy dla zbioru liczb zespolonych

1) pojęcie równości i nierówności, oraz
2) pojęcie działań.

Otóż definicja równości i nierówności liczb zespolonych. $a+bi$, $c+di$ jest bardzo prosta. Niech punkt A na naszej płaszczyźnie odpowiada liczbie $(a+bi)$, niech punkt B odpowiada liczbie $(c+di)$. Otóż $a+bi = c+di$ ma znaczyć, że się punkty A i B ze sobą schodzą; $a+bi \neq c+di$ ma znaczyć że się punkty A i B ze sobą nie schodzą. Dla liczb zespolonych nie określamy większości i mniejszości.

Wprost widocznem jest twierdzenie: jeżeli $a+bi = c+di$ to $a=c$, $b=d$ i naodwrót. Gdy jest:

$$a+bi \neq c+di \text{ to jest } a \neq c \text{ lub } b \neq d$$

i naodwrót.

W dwóch więc liczbach zespolonych równych sobie, muszą być części rzeczywiste tych liczb równe i zarazem równe współczynniki części urojonych. Jest więc:

$$3+4i = \frac{6}{2} + \frac{12}{3}i, \quad 3+4i \neq \frac{6}{2} + \frac{13}{3}i$$

$$3+4i \neq \frac{7}{2} + \frac{12}{3}i, \quad 3+4i \neq \frac{7}{2} + \frac{13}{3}i.$$

Widocznem, że – podobnie jak w arytmetyce liczb rzeczywistych – zachodzą następujące twierdzenia:

a). Dla każdej liczby zespolonej $a+bi$ jest

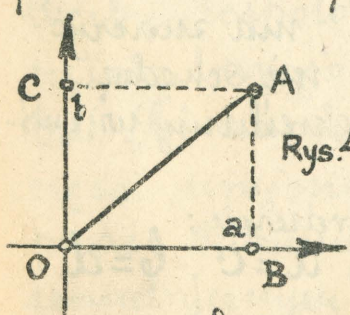
$$a+bi = a+bi$$

b). Jeżeli $a+bi = c+di$ to też jest:

$c+di = a+bi$

c). Jeżeli jest $a+bi = c+di$, $c+di = e+fi$ to jest też $a+bi = e+fi$

§8. Zdefiniujmy pojęcie bezwzględnej wartości liczby zespolonej $|a+bi|$ (zwaną także modułem liczby zespolonej) Geometrycznym obrazem liczby $a+bi$ jest punkt A o współrzędnych (a, b). Długość



Rys. 4.

odcinka AO (przyczem O jest początkiem układu) przedstawiać ma bezwzględną wartość: $|a+bi|$. Z figury jest widoczne, że:

$$|a+bi| = OA = \sqrt{OB^2+BA^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

Jest więc: $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5.$

Obliczmy teraz bezwzględną wartość liczby rzeczywistej (a) t. zn. liczby zespolonej $a+0.i$. Jest więc

$$|a+0.i| = \sqrt{a^2} = |a|$$

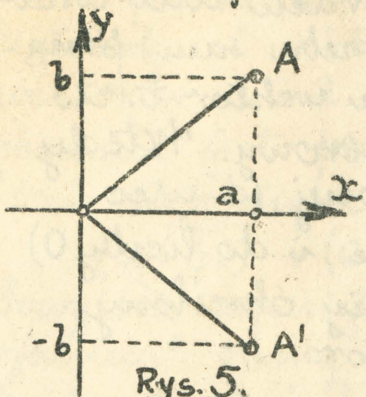
Pojęcie bezwzględnej wartości liczby ~~urojonej~~ zespolonej jest więc uogólnieniem dawnego pojęcia bezwzględnej wartości liczby rzeczywistej. Zauważmy jeszcze, że dwie liczby zespolone równe sobie mają bezwzględne wartości równe, a więc z równości:

$$a+bi = c+di$$

wynika też równość:

$$|a+bi| = |c+di|$$

§ 9. Weźmy jakąkolwiek liczbę zespoloną $a+bi$, jej obrazem niech będzie punkt A. Ten punkt A odbijmy jak w zwierciadle w stosunku do osi X. Otrzymamy punkt A' o odciętej (a), ale rzędnej $(-b)$, wobec tego punkt A' jest obrazem liczby $a-bi$. Takie dwie liczby: $a+bi$, oraz $a-bi$ nazywamy liczbami sprzężonemi wzajemnie.



Rys. 5.

Liczby te mają tę samą bezwzględną wartość: $|3+4i| = |3-4i| = 5$.

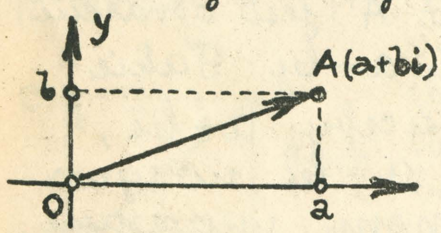
Widoczne, że liczby (i), $(-i)$ są ze sobą sprzężone. Liczba $(-i)$ nazywa się ujemną jednostką urojoną. Zauważmy jeszcze, że każda liczba rzeczywista

$a = a + 0.i$ jest ze sobą sprzężona.

Ponadto dwie liczby zespolone ze sobą sprzężone mają równe bezwzględne wartości: $|a+bi| = |a-bi|$, gdyż obie strony tej równości oznaczają liczbę $\sqrt{a^2+b^2}$

§ 10. Określimy teraz wektor należący do liczby zespolonej. Niech punkt A będzie obrazem liczby $a+bi$.

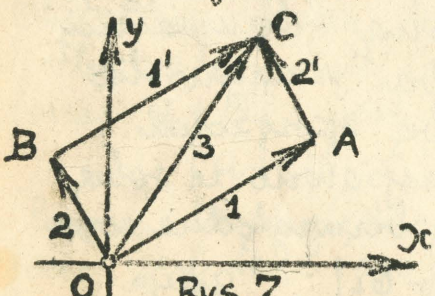
Wektor OA (gdzie O oznacza początek układu) nazwiemy wektorem liczby zespolonej $a+bi$. Aby można było mówić o takich wektorach dla wszelkich liczb zespolonych, trzeba sam początek układu uważać za wektor t. zw. wektor (niewłaściwy lub) zerowy. Wtedy do każdej liczby zespolonej, (a więc także i do liczby 0) należy określony wektor.



Rys. 6

§ 11. Obecnie przechodzimy do określenia działań na liczbach zespolonych. Najpierw określimy dodawanie. Co rozumiemy przez sumę $(a+bi)+(c+di)$?

Niechaj wektor 1 (rys 7) będzie wektorem liczby zespolonej $a+bi$, a wektor 2 wektorem liczby zespolonej $c+di$.

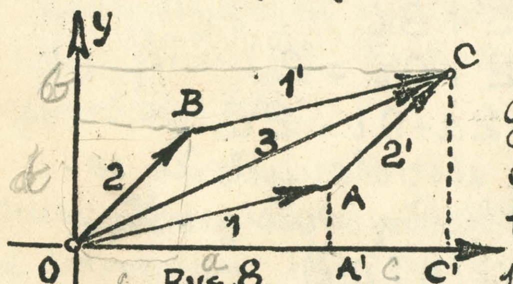


Rys. 7.

Dodawanie takich wektorów uskutecznia się według określenia sumy wektorów, tworząc tak zwany równoległobok wektorów. A więc z punktu A będącego końcem wektora 1 budujemy wektor (2'), równy wektorowi 2, a z punktu B, będącego końcem wektora 2 wektor (1'), równy wektorowi 1. Dostaniemy wtedy jak wiadomo jedno nowy punkt C, czwarty wierzchołek równoległoboku i wektor (3) $\overrightarrow{OC}$ który jest sumą wektorów 1 i 2. Liczba zespolona, której obrazem jest punkt C, nazywa się sumą liczb zespolonych i oznaczamy znakiem:

$$(a+bi)+(c+di).$$

Powyższa definicja jest określeniem „wektorjalnem" sumy liczb zespolonych, obecnie trzeba znaleźć liczbę zespoloną, będącą sumą powyższych liczb. W tym celu (Rys. 8)



Rys. 8.

rzutujemy wektor 1 i wektor 2' na oś X. Gdy rzutujemy wektor $\overrightarrow{OA}$, — na oś (X) to otrzymamy na rut wektor $\overrightarrow{OA'}$, który na osi X mierzy się liczbą (a); rzutując zaś wektor (2'), otrzymamy wektor $\overrightarrow{A'C'}$, mierzący się na osi (X) liczbą (c). Wobec tego więc widoczne, że punkt C ma odciętą (a+c). Postępując analogicznie w stosunku do osi Y, można znaleźć rzędną punktu C, którą jest liczba (b+d). Znaleźliśmy więc współrzędne punktu C, i tem samem część rzeczywistą sumy, jak i współczynnik części urojonej. Jest więc:

$$(a+bi)+(c+di) = a+c+(b+d)i$$

Mamy więc następującą praktyczną regułę dodawania liczb zespolonych.

Liczby zespolone dodaje się w ten sposób, że suma ich części rzeczywistych daje część rzeczywistą sumy, a suma współczynników ich części urojonych daje współczynnik części urojonej sumy. Wykonajmy dla przykładu dodawania następujące:

1). $(3+4i)+(2+5i) = 5+9i$

2). $(1+5i)+(1-5i) = 2+0.i = 2.$

3). $(a+bi)+(a-bi) = 2a+0.i = 2a$

a więc suma liczb zespolonych ze sobą sprzężonych jest liczbą rzeczywistą.

4). $(a+bi)+0 = (a+bi)+(0+0.i)$

$$= (a+0)+(b+0)i = a+bi$$

a więc "zero" 0 ma tę samą własność o ile chodzi o dodawanie, co w teorji liczb rzeczywistych.

$$(a+0.i)+(0+b.i) = a+bi$$

Skąd widoczne, że liczba zespolona którą oznaczyliśmy przez $(a+bi)$ jest sumą liczb (a) i (bi)

§ 12. Rozpatrzmy teraz własności dodawania. Są to własności analogiczne do własności sumy liczb rzeczywistych. A więc 1) suma liczb zespolonych ma własność komutatywną (prawo przemienności składników sumy). Dowód tego twierdzenia jest widoczny już stąd, że dla sumy wektorów 1 i 2 mamy:

$$\vec{1} + \vec{2'} = \vec{2} + \vec{1'}$$

Prawo przemienności dla dodawania możemy krótko w następujący sposób podać. Liczbę zespoloną (a+bi) oznaczamy krótko następującym symbolem (z), a liczbę (c+di) przez (z'), to prawo komutatywne wyrazi się tak:

$$z + z' = z' + z$$

Suma dwu liczb zespolonych nie zależy od porządku składników.

2). Prawo assocjatywne czyli prawo dowolnego kojarzenia składników. Mamy dane trzy liczby zespolone z, z', z''. Te trzy liczby zespolone mamy dodać do siebie w porządku z, z', z''; możemy to uczynić w dwa sposoby: albo do liczby (z) dodamy liczbę (z') i do powstałej w ten sposób liczby (z+z') dodamy liczbę (z''), co oznaczymy krótko: $(z+z')+z''$. Albo też znajdujmy sumę $(z'+z'')$ i do liczby (z) dodamy „gotową" sumę $(z'+z'')$; ostatnią sumę oznaczymy znakiem $z+(z'+z'')$.

Prawo assocjatywne orzeka, że sumy w obu tych przypadkach są równe czyli, że $(z+z')+z'' = z+(z'+z'')$.

Więc sumę tych trzech składników można napisać w postaci: $z+z'+z''$ a sposób kojarzenia składników zostawić każdemu dowoli.

3). Zauważmy, że słuszne jest prawo następujące: jeżeli są dane dwie pary liczb zespolonych takich, że: $z=z'$ i zarazem $z''=z'''$, to z tego wynika, że $z+z''=z'+z'''$.

Prawo to wyraża się często słowami, że równe liczby dodane do równych dają sumy równe.

4). Wprost widocznem jest twierdzenie, że dodawanie liczb zespolonych jest zawsze wykonalnem.

Tak się przedstawiają cztery zasadnicze

prawa dodawania dwu składników.
Zauważmy, że zupełnie podobnie, jak dla liczb rzeczywistych określa się sumę dowolnej ilości składników.

§ 13. Przejdźmy teraz do odejmowania liczb zespolonych. Niech będą dane dwie liczby zespolone (z) i (z'); rozważmy najpierw następujące równanie:

$$\xi + z' = z$$

przyczem ξ jest liczbą szukaną. Wykażemy, że to równanie posiada rozwiązanie i tylko jedno.
Niech więc będzie $z = a+bi$, $z' = a'+b'i$.
Szukaną liczbę ξ napiszemy w postaci:

$$\xi = x+yi$$

Mamy więc:

$$(x+yi)+(a'+b'i) = a+bi$$

Szukamy liczb rzeczywistych: x, y.
Wykonywując dodawanie po stronie lewej ostatniej równości według reguły podanej w § 11 otrzymujemy:

$$(x+a')+(y+b')i = a+bi$$

Stąd na podstawie określenia równości liczb zespolonych (§ 7) wynika, że jest:

$$x+a' = a \; ; \; y+b' = b.$$

co daje natychmiast:

$$x = a-a' \; ; \quad y = b-b'$$

i przeto: $\xi = (a-a')+(b-b')i$.

Wynik dotychczasowy jest następujący: jeżeli liczbę ξ o żądanej własności istnieje, to ona jest postaci tej, którą dopiero co podaliśmy. Wykażemy więc jeszcze, że liczba ξ rzeczywiście spełnia powyżej podane równanie, że liczba:

$(a-a')+(b-b')i$ daje na sumę powiększoną o liczbę $(a'+b'i)$ daje ~~liczbę~~ $(a+bi)$

Rzeczywiście jest równość:

$$[(a-a')+(b-b')i]+(a'+b'i) = a+bi$$

od razu widoczną. Tę jedną i jedyną liczbę ξ oznaczymy znakiem $z-z'$ i nazwiemy różnicą liczb (z) i (z'), a działanie wyznaczające różnicę nazwiemy odejmowaniem. Zarazem widzimy, że jest:

$$(a+bi)-(a'+b'i) = a-a'+(b-b')i$$

co podaje praktyczną regułę odejmowania liczb zespolonych.

Jest więc: $(3+4i)-(1+5i) = 2-i$

$$(a+bi)-(a-bi) = 0+2bi = 2bi$$

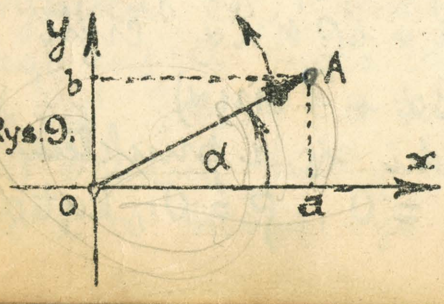
A więc różnica dwóch liczb zespolonych ze sobą sprzężonych jest liczbą (czysto) urojoną. Wreszcie obliczmy różnicę:

$$(a+bi)-0 = (a+bi)-(0+0.i) =$$
$$= (a-0)+(b-0)i = a+bi$$

To wykazuje, że „zero” 0 ma i przy odejmowaniu tę samą własność, co w teorji liczb rzeczywistych. Własności dodawania i odejmowania dla liczb rzeczywistych i liczb zespolonych, streszczające się w równościach, są jak widzieliśmy tesame, a więc i prawa pozostaną te same. Spotykamy się tu z tak zwaną permanencją czyli stałością praw arytmetyki, ogromnie arytmetykę upraszczającą.

§ 14. Dla definicji iloczynu liczb zespolonych, która będzie znowu wektorjalną, zajmiemy się dokładniej wektorem, należącym do liczby zespolonej, co nas doprowadzi do t. zw. trygonometrycznego przedstawienia liczby zespolonej. Niech więc będzie dana liczba zespolona

$a+bi = z$, różna od zera i jej obrazem geometrycznym niech będzie punkt A na płaszczyźnie o odciętej (a) i rzędnej (b)



Rys. 9.

Punkt A jest różnym od początku układu O. Wektor $\overrightarrow{OA}$ jest wektorem liczby zespolonej, nadto wektor ten ma pewną dodatnią długość, oznaczmy tę długość przez ρ. Liczba ρ jest bezwzględną wartością liczby zespolonej i jest:

$$\rho = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Wektor $\overrightarrow{OA}$ ma również pewne nachylenie do osi X, a kąt tego nachylenia oznaczmy przez α. Kąt α nie jest - jak wiadomo - przez to określony jednoznacznie, przeciwnie jest on nieskończenie wieloznaczny, ponieważ dowolny z nich powiększony o liczbę $2\pi n$ (gdzie (n) oznacza liczbę całą) znów daje nachylenie tego samego wektora $\overrightarrow{OA}$ do osi X.

Odciętą (a) i rzędną (b) wyrazimy we funkcji (ρ) i (α), a mianowicie jest:

$$a = \rho \cos\alpha \quad , \quad b = \rho \cdot \sin\alpha$$

Wskutek tego można napisać liczbę zespoloną w sposób następujący:

$$a+bi = \rho\cos\alpha + i\rho\sin\alpha \text{, czyli}$$

$$a+bi = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Gdy punkt A schodzi się z punktem O, wtedy jest $a+bi = 0$, $\rho = 0$, kąt α

4

może być wtedy zupełnie dowolny.
A więc dla wszelkich liczb zespolonych $a+bi$ można znaleźć liczbę $\rho \geq 0$ i liczbę (α) tak, że jest:

$$a+bi = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Zauważmy że w geometrji analitycznej układu biegunowego <u>nie</u> zakładaliśmy, że $\rho \geq 0$, owszem wartości ujemne na ρ były dopuszczalne. Tu rzecz jest zupełnie odmienną. Jeżeli liczbę zespoloną przedstawimy jako $\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ to mówić będziemy, że liczbę zespoloną przedstawiliśmy trygonometrycznie.
Przedstawienie trygonometryczne liczby zespolonej uwydatnia długość wektora liczby zespolonej, oraz <u>nachylenie</u> α które nazwiemy amplitudą liczby zespolonej.
Należy również zauważyć, że, jeżeli jest

$$a+bi = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) \text{ i zarazem}$$
$$a+bi = \rho'(\cos\alpha' + i\sin\alpha') \text{ to z tego}$$

wynika, że $\rho = \rho'$ $\quad \alpha \neq \alpha'$

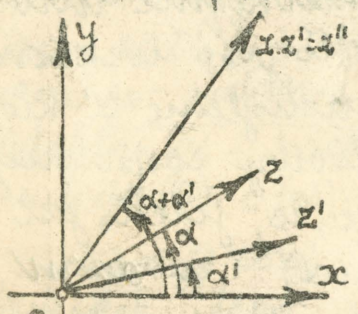
kąt zaś α może być różny od kąta α'. $\alpha \neq \alpha'$. Gdy $\rho \neq 0$ to $\alpha = \alpha' + 2\pi n$, gdzie (n) oznacza liczbę całą. Gdy zaś $\rho = 0$ to α, α' mogą być dowolnemi kątami.

kątami

§ 15. Niech teraz będą dane dwie liczby zespolone z i z'; wyznaczmy wektory, do nich należące.

Iloczyn: zz' zdefiniujemy przez określenie wektora, do którego iloczyn będzie należał, a to uczynimy przy pomocy wektorów liczb (z) i (z').

Aby określić ten nowy wektor trzeba podać jego długość i jego nachylenie do osi (x). Wektor ten skierujemy tak, aby jego kąt nachylenia równał się sumie $\alpha+\alpha'$ kątów α i α' nachylenia wspomnianych dwu wektorów, a długość nowego wektora



Rys. 10.

ma być równą iloczynowi długości tych wektorów, a więc długość będzie wynosiła $\rho\rho'$, jeżeli $\rho=|z|$, $\rho'=|z'|$. Powstały w ten sposób wektor należy do pewnej liczby zespolonej z'', którą nazywamy iloczynem liczb (z) i (z') i oznaczać będziemy znakiem $z.z'$. Jeżeli więc obie dane liczby zespolone z i z' są przedstawione trygonometrycznie:

$$z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad z' = \rho'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$$

to iloczyn:

$$z'' = [\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)][\rho'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')] =$$

$$= \rho\rho'[\cos(\alpha+\alpha') + i\sin(\alpha+\alpha')]$$

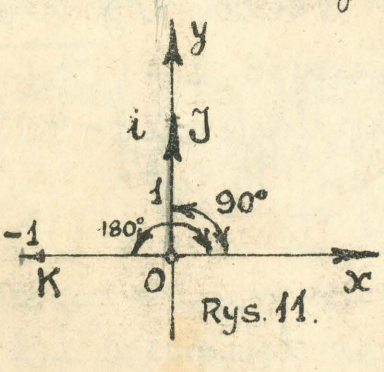
ale liczby zespolone mogą być dane w postaci:

$$z = a + bi, \quad z' = a' + b'i$$

Chodzi nam teraz o znalezienie iloczynu (zz') tych liczb, oraz o praktyczną regułę mnożenia.

§16. Nim jednak to uczynimy, wykonajmy mnożenie pewnych specjalnych liczb $i.i = i^2$, oraz $(-i).(-i) = (-i)^2$

Obrazem liczby $i = 0 + 1.i$ jest punkt J (Rys 11) o odciętej 0, rzędnej 1; Punkt J leży więc na osi (y). Gdy O oznacza początek układu, to $\overrightarrow{OJ}$ będzie wektorem liczby (i). Długość tego wektora wynosi

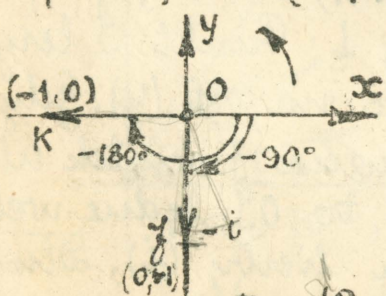


Rys. 11.

$1 = \sqrt{0^2 + 1^2}$. Wektor OJ jest nachylony pod kątem 90° do osi x. Według powyższego, by obliczyć $i.i = i^2$ trzeba utworzyć nowy wektor, mający długość $1.1 = 1$ i nachylenie $90°+90°=180°$. Otrzymamy więc wektor $\overrightarrow{OK}$, przyczem punkt K leży na ujemnej osi (x) i odcinek OK ma długość 1, więc K ma odciętą (−1) rzędną 0, jest więc K obrazem liczby $-1+0.i = -1$. Mamy przeto $i^2 = -1$. Dlatego też liczbę (i) nazywamy jednostką urojoną.

Wyszukajmy z kolei iloczyn:

$(-i)(-i) = (-i)^2$. Ponieważ $-1 = 0+(-1)i$, więc wektorem liczby $(-i)$ jest wektor $\overrightarrow{OJ}$ (Rys.12), przyczem punkt J ma współrzędne $(0,-1)$. Wektor OJ ma



Rys. 12

długość $1 = \sqrt{0^2+(-1)^2}$ i nachylenie (−90°) do osi (x). Aby znaleźć iloczyn $(-i)^2$, tworzymy nowy wektor o długości $1.1=1$ i nachyleniu:

$(-90°)+(-90°) = -180°$, widocznie, że znów otrzymamy wektor $\overrightarrow{OK}$, co po-

przednio, a więc jest $(-i)^2 = -1$
Rozważmy więc równanie $x^2 = -1$
Jak wiadomo, w zbiorze liczb rzeczywistych nie ma liczby spełniającej to równanie, gdyż kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze liczbą rzeczywistą i nieujemną. Obecnie widzimy, że w zbiorze liczb zespolonych są dwie $(+i)$ oraz $(-i)$, spełniające powyższe równanie.

§ 17. Niech będą dane liczby zespolone $z = a+bi$, $z' = c+di$.
W postaci trygonometrycznej niech będzie

$$z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$z' = \rho'(\cos\alpha' + i\sin\alpha');$$

też jest

$$a = \rho\cos\alpha, \quad b = \rho\sin\alpha, \quad c = \rho'\cos\alpha'$$
$$d = \rho'\sin\alpha'$$

Według § 15 jest iloczyn:

$$zz' = \rho\rho'[\cos(\alpha+\alpha') + i\sin(\alpha+\alpha')],$$

gdyż wektor iloczynu ma mieć długość równą $\rho\rho'$, a nachylenie (amplituda) równą sumie $\alpha+\alpha'$. Chodzi nam teraz o to, by część rzeczywistą iloczynu $\rho\rho'\cos(\alpha+\alpha')$ i współczynnik części urojonej $\rho\rho'\sin(\alpha+\alpha')$, wyrazić wprost przez a, b, c, d. Otóż jest:

$$\varrho\varrho'\cos(\alpha+\alpha') = \varrho\varrho'[\cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha'] =$$
$$= \varrho\cos\alpha . \varrho'\cos\alpha' - \varrho\sin\alpha . \varrho'\sin\alpha' =$$
$$= ac - bd.$$

Część rzeczywista iloczynu jest więc równa liczbie $ac-bd$.

Wyszukajmy teraz współczynnik części urojonej $\varrho\varrho'\sin(\alpha+\alpha')$. Z trygonometrycznego przedstawienia wynika, że jest:

$$\varrho\varrho'\sin(\alpha+\alpha') = \varrho\varrho'(\sin\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\cos\alpha) =$$
$$= \varrho\sin\alpha . \varrho'\cos\alpha' + \varrho\cos\alpha . \varrho'\sin\alpha' =$$
$$= bc + ad$$

wskutek tego współczynnik części urojonej wynosi $bc+ad$. Wobec tego jest:

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (bc+ad).i$$

Jak to zapamiętać?

W tym celu spróbujmy wykonać iloczyn: $(a+bi)(c+di)$, tak jakby te dwumiany $a+bi$, $c+di$ były dwumianami liczb rzeczywistych, a więc prawa mnożenia dwumianów liczb rzeczywistych przeniesiemy dla próby na liczby zespolone. W myśl tej próby jest przeto:

$$(a+bi)(c+di) = ac+bci+adi+bdi^2$$

ale $i^2=-1$, więc stąd mamy

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+i(bc+ad)$$

a to rzeczywiście jest zgodne z tym wynikiem, który przed chwilą uzyskaliśmy. Otrzymujemy tę praktyczną regułę: liczby zespolone mnoży się przez siebie tak, jakby były dwumianami liczb rzeczywistych, przyczem potęgę i^2 należy zastąpić przez liczbę (-1). Jest to więc reguła bardzo upraszczająca, ułatwiająca mnemotechnikę.

Obliczmy iloczyn:

$$(b+0.i)(0+1.i) = b.0+0.i+b.i+0i^2 = 0+bi = bi$$

A więc jest $b.i = bi$, czyli liczba (czysto) urojona (bi) jest iloczynem liczby rzeczywistej (b) i jedności urojonej (i).

§ 48 Własności mnożenia.

1). Zauważmy najpierw, że mnożenie liczb zespolonych jest zawsze wykonalne.

2). Do liczb zespolonych stosuje się prawo komutatywne $z.z' = z'.z$

i 3) prawo associatywne

$(z.z').z'' = z.(z'.z'')$, wobec tego ten iloczyn oznaczymy znakiem: $zz'z''$

4). Gdy jest $z = z'$, $z'' = z'''$, to wtedy $zz'' = z'z'''$

Powyższe cztery prawa są analogiczne do praw sumy. Nie mają analogji jednak następujące dwa prawa: dla mnożenia i dodawania względnie dla mnożenia i odejmowania, wyrażające się wzorami:

5). $(z+z')z'' = zz'' + z'z''$

6). $(z-z')z'' = zz'' - z'z''$

Prawa te noszą nazwę praw dystrybutywnych czyli rozdzielności. [Na podstawie tych praw można powiedzieć krótko: że zamiast najpierw dodawać, a potem mnożyć, można wpierw mnożyć, a później dodać iloczyny i.t.d.].

7). Wykonajmy wreszcie iloczyn liczb zespolonych ze sobą sprzężonych $(a+bi)(a-bi) =$
$= a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$.

Iloczyn ten jest liczbą rzeczywistą nieujemną, równą kwadratowi bezwzględnej wartości liczby $(a+bi)$ lub $(a-bi)$

§ 19. By określić ilorazliczb zespolonych rozważmy równanie: (1) $z' \cdot \xi = z$

przyczem z, z' oznaczają liczby dane: $z = a+bi$, $z' = c+di$. Liczba ξ jest szukaną. Zakładając, że ona istnieje, napiszmy ją w postaci:

$$\xi = x + yi$$

Równanie przyjmie więc postać:

(2) $$(x+yi)(c+di) = a+bi$$

Po lewej wykonamy mnożenie według reguły § 17; będzie tedy:

$$(xc-yd)+(cy+dx)i = a+bi$$

To zaś wyraża równość dwu liczb zespolonych, więc (§ 7) jest:

$xc^2 - ycd = ac$
$ycd + xd^2 = bd$

(3) $$\begin{cases} xc - yd = a & \mid \cdot c \\ cy + dx = b & \mid \cdot d \end{cases}$$

Jeżeli więc liczba $x+yi$ o żądanej własności istnieje, to jej część rzeczywista (x) i współczynnik (części) urojonej (y) spełniać muszą układ (3) równań linjowych o dwu niewiadomych.
Rozwiążmy ten układ. W tym celu mnożąc pierwsze z równań (3) przez (c), a drugie przez (d) i dodając iloczyny otrzymamy:

(4) $$x(c^2+d^2) = ac+bd$$

$-xcd + yd^2 = -ad$
$c^2y + cdx = bc$

Mnożąc zaś pierwsze z równań (3) przez ($-d$), a drugie przez (c) i dodając iloczyny, otrzymamy:

(5) $$y(c^2+d^2) = bc-ad$$

Z tych dwu równań (4) i (5), mamy wyznaczyć (x) i (y).

Gdy $c^2+d^2 \neq 0$, to z równań (4) i (5) otrzymamy po jednej liczbie:

$$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \qquad y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Gdy zaś $c^2+d^2 = 0$, to ponieważ (c) i (d) są rzeczywiste, więc $c=0$, $d=0$ i wtedy równania ~~(4) i (5) mają postać:~~ (3) dają

$x.0 - y0 = a$

$0y + 0x = b$ gdy więc $a \neq 0$ lub $b \neq 0$ to stąd liczb (x, y) znaleźć nie możemy i iloraz szukany nie istnieje

Uwaga gdy zaś $a=0$ i $b=0$ to

~~$x.0 = a.0 + b.0 = 0$ czyli $x.0 = 0$~~

~~$y.0 = b0 - a.0 = 0$ czyli $y.0 = 0$~~

i stąd widać, że liczby (x, y) można zupełnie dowolnie obrać i przeto liczba ξ jest zupełnie dowolną. Wobec tego widocznie (ponieważ chcemy, by iloraz był jednoznacznie określony, by symbol ilorazu $z : z'$ oznaczał li tylko jedną liczbę, a nie nieskończenie wiele!) rozważać będziemy tylko ilorazy o dzielniku $(c+di)$, takim, że $c^2 + d^2 \neq 0$ t. zn.

$$|c+di|^2 \neq 0$$

a więc $\quad |c+di| \neq 0 \quad$ czyli $\quad c+di \neq 0+0.i$

lub krótko (6) $\quad c+di \neq 0$

Pozostaje nam do zbadania, że przy takiem założeniu liczba powyżej otrzymana

(7) $$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i$$ spełnia

równanie (2). Otóż widoczne, że:

$$\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\right)(c+di)=$$

$$=\frac{ac^2+bcd}{c^2+d^2}-\frac{bcd-ad^2}{c^2+d^2}+i\left(\frac{acd+bd^2}{c^2+d^2}+\frac{bc^2-acd}{c^2+d^2}\right)=$$

$$=\frac{ac^2+ad^2}{c^2+d^2}+\frac{bc^2+bd^2}{c^2+d^2}\cdot i=a+bi$$

Rachunek ten stwierdza, że liczba (7) spełnia równanie (2).

Wobec tego przyjmujemy następujące określenie: przy założeniu $z' \neq 0$ przez iloraz $z:z'$ rozumiemy (tę jedyną) liczbę ξ, która spełnia równanie (1) i na tę liczbę otrzymujemy wzór (7). Gdy $z'=0$ ilorazu $z:z'$ nie określamy.

Chodzi o regułę praktyczną wyszukania ilorazu dwu liczb zespolonych. W tym celu utwórzmy symbol ilorazu $\frac{a+bi}{c+di}$. Pomnóżmy dzielnik i dzielną przez tę samą liczbę zespoloną różną od zera - iloraz wtedy się nie zmieni - jak zresztą widoczne, stąd, że prawa mnożenia dla liczb zespolonych i rzeczywistych były te same. Ale pomnóżmy dzielną i dzielnik przez taką liczbę, żeby iloczyn w dzielniku był liczbą rzeczywistą. Jak wiemy z prawa (7) § 13, dość obrać na ten czynnik liczbę $(c-di)$ sprzężoną z dzielnikiem i tem samem różną od zera. Będzie więc:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bci-adi-bdi^2}{c^2+d^2}=$$

$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot i,$$

co jest identyczne z liczbą (7). Stąd wiadoma reguła praktyczna dzielenia.

Uwaga: Przy końcu ostatniego rozumowania oparliśmy się na wprost wiadomym wyniku dzielenia $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma}$ gdy dzielnik γ jest liczbą rzeczywistą i różną od zera, a mianowicie, że:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}i.$$

Rzeczywiście jest:

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}i\right)\gamma=\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}i\right)(\gamma+0\cdot i)=$$

$$=\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\gamma-\frac{\beta}{\gamma}\cdot 0\right)+\left(\frac{\beta}{\gamma}\cdot\gamma+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot 0\right)\cdot i=$$

$$=\alpha+\beta i.$$

Zauważmy wreszcie, że określenia równości liczb zespolonych i działań zostały w ten sposób dobrane, żeby prawa, które zostały uzasadnione dla liczb rzeczywistych pozostały słusznemi także dla liczb zespolonych, czyli, żeby były permanentne (stałe). Stwierdziliśmy to powy-

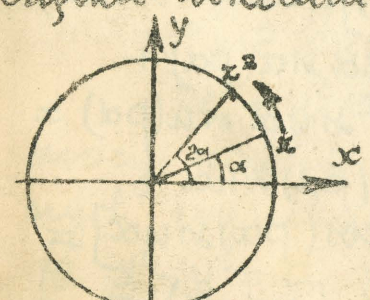
$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$

łej kilkakrotnie i poznaliśmy wielką doniosłość takiego stanu rzeczy.

§ 20. Potęgowanie liczb zespolonych o wykładnikach naturalnych określa się podobnie, jak dla liczb rzeczywistych, wobec tego definicji tej podawać nie będziemy, a zajmiemy się potęgą $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$ gdzie n oznacza liczbę naturalną.

Zauważmy, że liczba zespolona:

$\cos\alpha + i\sin\alpha$ ma bezwzględną wartość równą 1. Jej obrazem geometrycznym jest punkt koła (t. zw. obwodu koła) o promieniu 1 i o środku w początku układu współrzędnych (Rys 13)



Rys. 13

Jest bowiem:

$$|\cos\alpha + i\sin\alpha| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$$

Udowodnimy, że dla liczb naturalnych zachodzi równość:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$$

Równość ta wyraża t. zw. twierdzenie **De Moivre'a**. Twierdzenie to wyka-

wzór (Twierdzenie) de Moivre'a

żemy przy pomocy indukcji matematycznej. Otóż dla $n=1$ twierdzenie jest prawdziwe. Załóżmy, że twierdzenie jest słuszne dla liczby naturalnej $n=p$ gdzie $p \geqslant 1$, a więc załóżmy, że jest:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^p = \cos(p\alpha) + i\sin(p\alpha)$$

Wykażemy, że twierdzenie jest prawdziwe dla liczby $n=p+1$, czyli, jest prawdziwą równość

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{p+1} = \cos[(p+1)\alpha] + i\sin[(p+1)\alpha]$$

Otóż zauważmy, że jest na podstawie definicji potęgi i na mocy założenia

$$\boxed{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{p+1}} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^p \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$= [\cos(p\alpha) + i\sin(p\alpha)] \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$= \cos(p\alpha)\cos\alpha + i\cos\alpha\sin(p\alpha) +$$

$$+ i\sin\alpha\cos(p\alpha) + i^2\sin\alpha\sin(p\alpha) =$$

$$= \cos(p\alpha)\cos\alpha - \sin(p\alpha)\sin\alpha +$$

$$+ i[\sin(p\alpha)\cos\alpha + \cos(p\alpha)\sin\alpha] =$$

$$= \cos(p\alpha + \alpha) + i\sin(p\alpha + \alpha) =$$

$$= \cos[(p+1)\alpha] + i\sin[(p+1)\alpha]$$

c. b. d. o.

Wobec tego równość De Moivre'a jest

słuszna dla każdej liczby naturalnej (n).
Na podstawie powyższego wzoru obrazy geometryczne potęg: (dla $n = 1, 2, 3 \ldots$)
$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$ można znaleźć w sposób bardzo prosty.

§21. Zajmiemy się obecnie następującem zagadnieniem. Wyszukamy taką liczbę zespoloną, żeby jej kwadrat był równy danej z góry liczbie z, ma więc być:
$\xi^2 = z$, gdzie (z) oznacza daną liczbę. Niech będzie liczba dana
$z = a + bi$, a liczba szukana
$\xi = x + yi$. Ma więc być:

$$(x + yi)^2 = a + bi \text{, czyli:}$$

$$x^2 + 2xyi - y^2 = a + bi \text{ czyli:}$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi \text{;}$$

stąd na mocy pojęcia równości liczb zespolonych wynika, iż jest:

(1) $\boxed{x^2 - y^2 = a}$; $\boxed{2xy = b}$;

Rozważmy najpierw przypadek $b = 0$, wtedy drugie z równań (1) daje $2xy = 0$ skąd wynika, że jest: albo $x = 0$, $y \neq 0$ albo $y = 0$, $x \neq 0$, albo $x = 0$ i $y = 0$.

Przypadek $x=0$, $y\neq 0$ daje $-y^2=a$ czyli $a<0$, bo (y) jest liczbą rzeczywistą i wtedy jest: $y=\pm\sqrt{+a}$, więc $\xi=\pm i\sqrt{+a}$; ξ jest liczbą (czysto) urojoną.

Gdy $x\neq 0$, $y=0$ to otrzymujemy $x^2=a$, więc $a>0$ i wtedy $x=\pm\sqrt{a}$; przeto $\xi=\pm\sqrt{a}$; ξ jest więc liczbą rzeczywistą.

Gdy $x=0$ i $y=0$ to $a=0$, $b=0$ i wtedy $\xi=0$.

Załóżmy teraz, że jest $b\neq 0$. Wyszukajmy więc liczby (x,y) rzeczywiste, które spełniają układ równań (1). Z drugiego z równań (1) wynika, że $x\neq 0$, $y\neq 0$, skoro jest $b\neq 0$ i przeto: $y=\frac{b}{2x}$ co podstawiamy do pierwszego z równań (1); otrzymujemy kolejno:

$$x^2-\frac{b^2}{4x^2}=a^2;\quad x^4-a^2x^2-\frac{b^2}{4}=0.$$

Jest to równanie wprawdzie stopnia czwartego, które jednak łatwo sprowadza się do równania stopnia drugiego; dość bowiem położyć $x^2=\xi$, a wtedy otrzymamy:

(2) $\xi^2 - a\xi - \frac{b^2}{4} = 0$; stąd znajdziemy liczbę ξ, a potem liczbę (x) z równania: $x^2 = \xi$ t. zn. $x = \pm\sqrt{\xi}$.
Ponieważ na (x) szukamy liczby rzeczywistej, więc liczba ξ ma być nieujemną. Wobec tego szukamy nieujemnego pierwiastka równania (2); przeto z pierwiastków $\xi = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}$ wolno wziąć jedynie nieujemny, a nim jest tylko liczba.

$$(3) \qquad \xi = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}.$$

Rzeczywiście, ponieważ $b \neq 0$, więc:

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} > \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \left|\frac{a}{2}\right| \quad \text{i przeto:}$$

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} > \left|\frac{a}{2}\right| + \frac{a}{2} \geqslant 0$$

$$\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} < \frac{a}{2} - \left|\frac{a}{2}\right| \leqslant 0.$$

Wobec tego trzeba na (ξ) przyjąć wartość ξ, jaką wskazuje równość (3).
Wtedy równanie: $x^2 = \xi$ daje:

$$x = \varepsilon\sqrt{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}}$$

gdzie położyliśmy $\varepsilon = \pm 1$. W ten sposób otrzymaliśmy dla (x) tylko nie wartości.

Wyrachujmy teraz (y), otóż jest:

$$y = \frac{\varepsilon b}{2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\xi = \varepsilon\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \frac{bi}{2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}}\right]$$

Że kwadrat tej liczby równa się liczbie $(a+bi)$, łatwo przez podniesienie do kwadratu liczby ξ sprawdzić; można też otrzymać rozwiązanie obecnego zagadnienia, gdy założymy, że tak dana liczba (z), jak i szukana liczba (ξ) są trygonometrycznie przedstawione. Zostawiamy to czytelnikowi do rozwiązania. ✗

Część II. Elementy algebry.

Rozdział III. Równania stopnia 2^{go}

§ 22. Przechodzimy teraz do algebry, która w pierwszej swej części zajmuje się teorją równań.

Rozpoczynamy od równań stopnia 2^{go}

$$(1) \qquad x^2 + ax + b = 0.$$

ax^2+bx+c

przyczem zakładamy, że (a, b) oznaczają liczby rzeczywiste.

Dopóki nie poznaliśmy liczb zespolonych, to równanie (1) o wyróżniku:

$$\Delta = a^2 - 4b$$

ujemnym nie posiadało pierwiastka. Inaczej się ta rzecz przedstawia obecnie.

Zauważmy, że najpierw z równania (1) wyprowadzimy nowe równanie, które nie będzie posiadało wyrazu, zawierającego niewiadomą w stopniu 1^{szym}.

Rzeczywiście połóżmy: $x = y + h$, przyczem (y) ma być nową niewiadomą, (h) ma być stałą, którą mamy obrać tak, by równanie na (y) nie zawierało pierwszej potęgi niewiadomej (y). Jest więc:

$$(y+h)^2 + a(y+h) + b = 0$$

stąd:

$$y^2 + y(2h + a) + h^2 + ah + b = 0$$

Widoczne, że należy obrać (h) tak, by było: $2h + a = 0$ czyli $h = -\frac{a}{2}$

i wtedy otrzymamy:

(2) $x = y - \frac{a}{2}$; i wtedy będzie:

(3) $y^2 + p = 0$, gdzie $p = b - \frac{a^2}{4} = -\frac{\Delta}{4}$.

Będzie tedy: $y^2 = -p = \frac{\Delta}{4}$.

Przypadek $\Delta \geqslant 0$ – jako znany – pomijamy, a przystępujemy do przypadku, gdy jest $\underline{\Delta < 0}$.

W tym przypadku (y) nie jest liczbą rzeczywistą – owszem jest liczbą zespoloną, mianowicie (czysto) urojoną. Połóżmy bowiem $y = 0 + i\beta = i\beta$, gdzie β jest liczbą rzeczywistą. Będzie:

$$y^2 = (i\beta)^2 = i^2\beta^2 = -\beta^2 = \frac{\Delta}{4}.$$

Stąd : $$\beta = \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

przyczem $-\Delta > 0$. Wobec tego dane równanie (1) ma pierwiastki:

$$(2) \qquad x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{i\sqrt{\Delta}}{2}$$

i jak łatwo się rachunkiem przekonać, liczby te sprawdzają równanie (1).

Pierwiastki (2) są to dwie różne liczby zespolone ze sobą sprzężone.

Stwierdzimy z łatwością, że:

$$x_1 + x_2 = -a\,, \quad x_1 \cdot x_2 = b$$

a więc twierdzenie znane z przypadku $\Delta \geqslant 0$, o związku między pierwiastkami a współczynnikami równania stopnia 2^{go} jest też obecnie słuszne.

§ 23. Dla przykładu rozważmy równanie
$$x^2 + x + 1 = 0.$$
Tu jest $\Delta = -3$. Tedy:
$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$$
Udowodnimy dwie własności tych liczb: 1) każda z nich jest kwadratem drugiej z nich; 2) trzecia potęga każdej z nich wynosi 1.

Dla dowodu pierwszego twierdzenia zauważmy, że jest:
$$\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \mp \frac{i\sqrt{3}}{2} + \frac{i^2 . 3}{4} =$$
$$= \frac{1}{4} \mp \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \mp \frac{i\sqrt{3}}{2},$$
skąd to twierdzenie widoczne, bo biorąc, obustronnie znak górny mamy:
$$(x_1)^2 = x_2\ ;$$ biorąc zaś znak dolny obustronnie mamy $(x_2)^2 = x_1$

Dla dowodu 2^{go}) twierdzenia zauważymy, że iloczyn pierwiastków równania równa się wyrazowi wolnemu w równaniu; a więc $x_1 . x_2 = 1$; ponieważ według pierwszego twierdzenia jest $x_2 = (x_1)^2$, więc:
$x_1 . (x_1)^2 = 1$ czyli $(x_1)^3 = 1$. I podobnie

$(x_2)^3 = 1$.

Widzimy tedy, że trzy liczby zespolone mają tę własność, że ich sześcian równa się 1, a mianowicie liczba rzeczywista 1 i powyżej podane liczby zespolone i sprzężone ze sobą:

$$-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

§ 24. Rozważmy wreszcie równanie o współczynnikach zespolonych:

$$(1) \quad z^2 + az + b = 0.$$

Tak jak w § 22, usuniemy niewiadomą w stopniu pierwszym, kładąc

$$z = \xi - \frac{a}{2}$$

gdzie ξ będzie nową niewiadomą i znów otrzymamy równanie:

$$(2) \quad \xi^2 = \frac{\Delta}{4}.$$

przyczem Δ oznacza wyróżnik równania (1) t. zn. wyrażenie $\Delta = a^2 - 4b$

Oczywiście obecnie należy rozważać tylko następujące dwa przypadki

albo $\Delta = 0$ albo $\Delta \neq 0$

Gdy $\Delta = 0$, to $\xi = 0$ i $z = -\frac{a}{2}$. Ponieważ wtedy $b = \frac{a^2}{4}$ (bo $\Delta = 0$), więc

$$z^2 + az + b = z^2 + az + \frac{a^2}{4} = \left(z + \frac{a}{2}\right)^2$$

i równanie (1) ma postać: $(z+\frac{a}{2})^2=0$.
Dlatego znów jedyny pierwiastek równania, równy $(-\frac{a}{2})$ nazywamy podwójnym.
Gdy $\Delta \neq 0$, to równanie (1) jest równaniem rozważanem w § 21.
I w tym przypadku pozostają nadal słusznemi twierdzenia o związku między pierwiastkami, a współczynnikami równania.
Rozważmy następujący przykład:

(3) $z^2+z-1-3i=0$

Obecnie jest $\Delta=5+12i$. Kładąc $z=\xi-\frac{1}{2}$, otrzymujemy:

$$\xi^2=\frac{5+12i}{4}.$$

a kładąc wreszcie $u=2\xi$, otrzymamy $u^2=4\xi^2=5+12i$. W myśl metody podanej w § 21 kładziemy
$u=x+yi$, wtedy będzie:

$$(x+yi)^2=5+12i \text{ czyli } x^2-y^2+2xyi= =5+12i$$

ta zaś równość daje $x^2-\frac{36}{x^2}=5$ czyli
$x^4-5x^2-36=0$. Stąd $x^2=\frac{5}{2}\pm\frac{13}{2}$,
a że (x) ma być liczbą rzeczywistą,
więc, $x^2=\frac{18}{2}=9$, skąd $x=\pm 3$,

więc $y = \pm \frac{6}{3} = \pm 2$; tedy $u = \pm(3+2i)$;
a że $u = 2\xi$, więc $\xi = \pm\left(\frac{3}{2} + i\right)$,
wreszcie $x = \pm \frac{3}{2} \pm i - \frac{1}{2}$, więc:
$x_1 = 1+i$, $x_2 = -2-i$.
Zostawiamy czytelnikowi sprawdzenie, że pierwiastki poprawnie znaleziono.

Rozdział IV. Równanie stopnia trzeciego. —

§ 25. Równanie ogólne stopnia 3^{go} ma postać:

(1) $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$.

przyczem a, b, c, d oznaczają dane liczby i nadto $a \neq 0$.
Dzieląc przez (a) — co wolno uczynić — otrzymamy równanie:

(2) $y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$.

gdzie położyliśmy $\alpha = b:a$, $\beta = c:a$, $\gamma = d:a$. Równanie (2) ma te same pierwiastki, co równanie (1), czyli równanie (1) i (2) są równoważne. Wobec tego będę zajmuję się równaniem (2).
Na razie założymy, że α, β, γ są liczbami zespolonemi. Równanie (2)

nazwiemy zupełnem równaniem stopnia 3^{go}.
Wykażemy, że można je nieco uprościć, a mianowicie w ten sposób, że rozwiązanie sprowadzimy do rozwiązania równania t. zw. normalnego t. zn. równania bez wyrazu zawierającego kwadrat niewiadomej.
Rzeczywiście połóżmy $y = x + h$, przyczem stałą (h) dobierzmy tak, by nowe równanie nie posiadało wyrazu x^2 t. zn. by współczynnik przy x^2 był równy zeru. Otóż równanie:
$(x+h)^3 + \alpha(x+h)^2 + \beta(x+h) + \gamma = 0$.
będzie miało wyraz: $x^2(3h+\alpha)$;
gdy więc obierzemy $3h+\alpha=0$ czyli $h=-\frac{\alpha}{3}$ to otrzymamy równanie:

(3) $x^3 + px + q = 0.$ gdzie:

(4) $p = \beta - \frac{\alpha^2}{3}$, $q = \gamma - \frac{\alpha\beta}{3} + \frac{2\alpha^3}{27}$

Widzimy tedy: zamiast rozwiązywać równanie zupełne (2) mamy znaleźć (y) z równania:

(5) $y = x - \frac{\alpha}{3}$

po rozwiązaniu równania normalnego (3)

§ 26. Nim zajmiemy się równaniem (3) rozważymy, jako szczególny przypadek, równanie t. zw. dwumienne stopnia 3^{go} t. j. równanie:

$$(6) \qquad x^3 = c$$

gdzie (c) oznacza daną liczbę. Rozważymy po kolei dwie możliwości.

I) Niech (c) oznacza liczbę rzeczywistą i różną od zera. Jak wiadomo $\sqrt[3]{c}$ jest liczbą rzeczywistą (dodatnią gdy $c>0$, ujemną, gdy $c<0$) i różną od zera. Wprowadźmy nową niewiadomą (u) w ten sposób

$$(7) \qquad u = \frac{x}{\sqrt[3]{c}}, \quad \text{stąd} \quad x = u\sqrt[3]{c},$$

co wstawione w (6) daje: $cu^3 = c$ czyli $u^3 = 1$, bo $c \neq 0$. Liczba (u) spełnia więc równanie: $u^3 - 1 = 0$; ale wiadomo, że $u^3 - 1 = (u-1)(u^2+u+1)$, więc mamy

$(u-1)(u^2+u+1) = 0$, a to daje: $u_1 = 1$, dalsze pierwiastki spełniają równanie $u^2+u+1=0$, znane nam z § 23.

Wiemy także stamtąd, jeżeli jeden z pierwiastków równania $u^2+u+1=0$ oznaczymy przez ω, to drugim będzie liczba ω^2; wprowadźmy więc te oznaczenia:

(8) $\omega = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $\omega^2 = -\frac{1}{2} \mp \frac{i\sqrt{3}}{2}$

to obecnie $u_2 = \omega$, $u_3 = \omega^2$ stąd wynika na mocy (7), że otrzymujemy trzy pierwiastki na (x), a mianowicie:

(9) $\boxed{x_1 = u_1\sqrt[3]{C} = \sqrt[3]{C}}$, $x_2 = u_2\sqrt[3]{C} = \omega\sqrt[3]{C}$,
$x_3 = u_3\sqrt[3]{C} = \omega^2\sqrt[3]{C}$.

Czytelnik z łatwością stwierdzi, podstawiając (8), że x_2, x_3 są liczbami zespolonemi (nie rzeczywistemi) i ze sobą sprzężonemi.

Zauważmy jeszcze, że, gdy $C = 0$, to wzory (8) dają pierwiastki równania (6), w tym przypadku t. zn. równania $x^3 = 0$, które ma potrójny pierwiastek, równy zeru.

II). Załóżmy, że (c) jest liczbą zespoloną i przedstawioną trygonometrycznie:

$C = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, przyczem $\rho > 0$, $\sin\varphi \neq 0$ (ostatnie założenie zapewnia, że (c) nie jest liczbą rzeczywistą). Liczba szukana (x) będzie też liczbą zespoloną i niech będzie $x = \sigma(\cos\psi + i\sin\psi)$, gdzie $\sigma \geq 0$.
Mamy więc na mocy (6):

$$\sigma^3(\cos\psi + i\sin\psi)^3 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

49

na mocy tw. De Moivre'a uzyskujemy stąd:

(10) $\sigma^3(\cos 3\psi + i\sin 3\psi) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Równość ta, jako równość liczb zespolonych daje:

(11) $\sigma^3\cos 3\psi = \rho\cos\varphi$, $\sigma^3\sin 3\psi = \rho\sin\varphi$.

Podnosimy stronami do kwadratu i dodajemy; widoczne, że jest:

$$\sigma^6(\cos^2 3\psi + \sin^2 3\psi) = \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi).$$

czyli $\sigma^6 = \rho^2$; ponieważ σ, ρ są liczbami rzeczywistemi i do tego nieujemnemi, więc: $\sigma = \sqrt[3]{\rho}$. I zarazem widać, że $\sigma > 0$. Podstawiając znalezione (σ) w (11) i upraszczając przez (ρ), otrzymujemy:

(12) $\cos 3\psi = \cos\varphi$, $\sin 3\psi = \sin\varphi$.

Ale wiadomo (zob. Hoborski, Wyższa Matematyka, Część I. drugie wyd. str. 424), ponieważ $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, układ (12) posiada nieskończenie wiele rozwiązań; jedno z rozwiązań otrzymamy, kładąc $3\psi = \varphi$, wtedy widocznie te równania są spełnione. Wszystkie rozwiązania różnią się od tego rozwiązania o dowolną wielokrotność perjodu

(2π); a więc $3\psi = \varphi + 2k\pi$, gdzie (k) jest liczbą całą. Otrzymaliśmy wprawdzie nieskończenie wiele wartości na (ψ):

(13) $$\psi = \frac{\varphi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

mimo to nie nieskończenie wiele różnych od siebie liczb (x), które wyrażają się przez $\cos\psi$, $\sin\psi$. Otóż wszystkie (ψ) różnią się o wielokrotność liczby (2π) tylko od trzech liczb (ψ), które otrzymamy, kładąc kolejno $k = 0, 1, 2$:—

(14) $$\psi_0 = \frac{\varphi}{3}, \quad \psi_1 = \frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}, \quad \psi_2 = \frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}.$$

Weźmy bowiem jakąś z liczb (13) t. zn. obierzmy liczbę całą (k); gdy $k = 0$ to $\psi = \psi_0$; gdy $k > 0$, to dzielimy ją przez 3 i niech (j) oznacza całkowity iloraz tego dzielenia, (r) resztę dzielenia, tedy $k = 3j + r$, gdzie $r = 0$ lub $r = 1$ lub $r = 2$, przeto:

$$\psi = \frac{\varphi}{3} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi(3j + r)}{3} = \frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi r}{3} + 2\pi j$$

widoczne, że: $\psi = \psi_r + 2\pi j$. Gdy $k < 0$, to dodamy najpierw taką wielokrotność (2π) np. $2\pi h$, by było $\frac{2k\pi}{3} + 2\pi h > 0$ czyli by $3h + k > 0$. Liczbę $l = 3h + k$

dzielimy przez 3, niech (j) oznacza iloraz całkowity, (r) resztę tego dzielenia, to $l = 3j + r$, więc:

$$\psi + 2\pi h = \frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi(3h+k)}{3} = \frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi l}{3} =$$

$$= \frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi(3j+r)}{3} = \frac{\varphi}{3} + 2\pi j + \frac{2\pi r}{3} =$$

$$= \psi_r + 2\pi j, \text{ przeto } \psi = \psi_r + 2\pi(j-h).$$

Wystarcza więc wziąć tylko wartości (14) na ψ, by otrzymać wszystkie (x); pierwiastki szukane są:

(15) $$x_0 = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right);$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right];$$

$$x_2 = \sqrt[3]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)\right].$$

Zauważmy, że jeżeli kąty mierzyć będziemy w stopniach (a nie w radjanach), to liczbę $\frac{2\pi}{3}$ trzeba zastąpić przez $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$, $\frac{4\pi}{3}$ przez 240° tak, iż będzie:

(16) $$x_0 = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right);$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right)\right];$$

$$x_2 = \sqrt[3]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ\right)\right].$$

Stąd widać, że $|x_0| = |x_1| = |x_2|$, a więc obrazy liczb x_0, x_1, x_2 leżą na kole środkowem (o promieniu $\sqrt[3]{\rho}$) i są wierzchołkami trójkąta równobocznego wpisanego w to koło.

Pierwiastki (15) przedstawimy tak, aby je upodobnić do pierwiastków (9), w tym celu zauważmy, że jest – jak widać na mocy §15:

$$x_1 = \sqrt[3]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right)\right] =$$
$$=\sqrt[3]{\rho}\left[\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right]\cdot\left[\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ\right] =$$
$$= x_0\left[\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ\right].$$

Ale $\cos 120^\circ = \cos(90^\circ+30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$,

$\sin 120^\circ = \sin(90^\circ+30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

tedy $\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2} = \omega$ lub ω^2.

Podobnie:

$$x_2 = \sqrt[3]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right)\right] =$$
$$= \sqrt[3]{\rho}\left[\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right]\cdot\left[\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ\right] =$$
$$= x_0\left[\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ\right].$$

Ale $\cos 240^\circ = \cos(2.120^\circ) = \cos^2 120^\circ - \sin^2 120^\circ =$
$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$,

$\sin 240^\circ = \sin(2.120^\circ) = 2\sin 120^\circ \cos 120^\circ =$
$= 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, tedy:

$\cos 240° + i \sin 240° = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = \omega^2$ lub ω.

Przeto jest:

albo $x_2 = x_1 \omega$; $x_3 = x_1 \omega^2$ albo

$$x_2 = x_1 \omega^2; \quad x_3 = x_1 \omega.$$

Można tedy tak oznaczenia przyjąć, że pierwiastkami są liczby:

(15 bis) $$x_1 = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i \sin\frac{\varphi}{3}\right);$$

$$x_2 = \omega x_1 ; \quad x_3 = \omega^2 x_1 ;$$

Wzory te obejmują wzory (9). Zauważmy, że:

$$\omega x_2 = \omega^2 x_1 = x_3, \quad \omega^2 x_2 = \omega^3 x_1 = x_1$$

i podobnie:

$$\omega x_3 = \omega^3 x_1 = x_1, \quad \omega^2 x_3 = \omega^4 x_1 = \omega x_1 = x_2$$

Przeto pierwiastkami będą liczby:

$$x_2; \ \omega x_2, \ \omega^2 x_2, \text{ lub } x_3, \ \omega x_3, \ \omega^2 x_3.$$

Widzimy tedy, że równanie dwumienne stopnia 3^go ma następującą własność: jeżeli jeden z jego pierwiastków oznaczymy przez A, to pozostałymi pierwiastkami będą liczby:

$$\omega A, \ \omega^2 A.$$

(Twierdzenie to jest też słuszne, gdy $A = 0$, jak łatwo stwierdzić.)

§ 27. Rozważmy równanie w postaci

normalnej:

(1) $x^3 + px + q = 0$.

Gdy $p=0$, to otrzymamy przypadek załatwiony w § 26. Gdy zaś $q=0$ i $p\neq 0$, to otrzymujemy:

$$x^3 + px = 0 \quad \text{czyli:}$$

$$x(x^2+p) = 0$$

przeto jednym pierwiastkiem jest liczba zero, a dwa pozostałe pierwiastki spełniają równanie:

$$x^2+p = 0,$$

którego rozwiązanie było podane w rozdziale III cim.

§ 28. Wobec tego w dalszym ciągu założymy, że w równaniu

(1) $x^3 + px + q = 0$. liczby p i q

spełniają nierówności:

(1 bis) $p \neq 0$, $q \neq 0$.

Przedstawimy metodę rozwiązania w tym przypadku, metodę, może pod względem teoretycznym mniej interesującą, niż inne, ale za to najprostszą.

Jest to metoda J. Huddego (ur. 1624; um. 1704). Doprowadzimy do wzoru Cardana.

Metoda ta rozpoczyna się od tego, że za

(jedną) niewiadomą podstawiamy dwie nowe, mianowicie:

(2) $x = u + v$, które w następstwie tak zwiążemy ze sobą, że w rezultacie dochodzi się do równania stopnia 2^{go}; okaże się bowiem, że dojdziemy do równania stopnia 6^{go}, które jednak będzie można sprowadzić do równania stopnia 2^{go}. Stąd widoczny ogólny plan rozumowania. Podstawiając (2) w (1), otrzymujemy kolejno:

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0,$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0$$

$$u^3 + 3uv(u+v) + v^3 + p(u+v) + q = 0$$

(3) $u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0.$

Teraz zwiążemy u i v ze sobą w ten sposób, aby było:

(4) $3uv + p = 0$

Wtedy równanie (3) przybierze postać:

(5) $u^3 + v^3 + q = 0.$

Dla liczb (u, v) dostaliśmy równania (4) i (5), które rozwiążemy.

Ponieważ założyliśmy, że $p \neq 0$, więc z (4) wynika, że jest $u \neq 0$, $v \neq 0$, a więc otrzymamy z (4) równość:

$$(6) \qquad v = -\frac{p}{3u}$$

Równość ta pozwoli znaleźć (v), gdy znamy (u). By więc znaleźć (u) podstawimy (6) w równanie (5), a otrzymamy:

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0.$$

Skąd po wymnożeniu przez (u^3) wynika równanie:

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

wprawdzie stopnia 6^{go}, które jednak przez podstawienie:

$$(7) \qquad u^3 = \xi$$

daje równanie stopnia 2^{go}:

$$(8) \qquad \xi^2 + q\xi - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Stąd widoczne, co trzeba uczynić, aby rozwiązać równanie (1). A mianowicie:

A) najpierw należy rozwiązać równanie (8), co wyznaczy (ξ).

B). Znalazłszy (ξ), obliczamy (u) z równania (7), poczem

C) równanie (6) pozwoli wyznaczyć (v).

D). Znając (u) i (v) obliczamy pierwiastek (x) według równania (2).

Zorjentowawszy się w biegu rozumowania według powyższego szkicu (A, B, C, D),

przeprowadzimy szczegółową dyskusję.
Załóżmy odtąd, że nietylko $p \neq 0$, $q \neq 0$, ale też, że (p) i (q) są liczbami rzeczywistymi.
Rozpoczynamy szczegółową dyskusję od równania (8), które nosi nazwę **równania rozwiązującego**. Ono ma współczynniki rzeczywiste, więc rodzaj rozwiązań będzie zależał od wyróżnika równania:

$$\Delta = q^2 + 4 \cdot \frac{p^3}{27}$$

W rozwiązaniu zachodzić będzie czwarta część wyróżnika, którą dla krótkości oznaczymy przez:

(9) $$H = \frac{\Delta}{4} = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Widzimy stąd, że Δ i H są tego samego znaku.

§29. Rozważmy najpierw przypadek:

(10) $$H > 0$$

Wtedy równanie (8) ma dwa różne od siebie rzeczywiste pierwiastki, które oznaczymy przez (ξ_1) i (ξ_2), przyczem na mocy związku między pierwiastkami równania stopnia 2^{go}, a współczynnikami jest:

(11) $$\xi_1 + \xi_2 = -q$$

(12) $\xi_1 \cdot \xi_2 = -\frac{p^3}{27}$

a ostatnie równanie daje też:

(13) $\sqrt[3]{\xi_1} \cdot \sqrt[3]{\xi_2} = -\frac{p}{3}$

Widać też, że $\xi_1 \neq 0$, $\xi_2 \neq 0$. Jest:

(14) $\xi_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{H}$

$\xi_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{H}$

Rozwiązaliśmy równanie (8) wstawimy teraz znalezione (ξ) w równaniu (7); zauważmy jednak, że otrzymamy dwa nowe równania (7') i (7''):

(7') $u^3 = \xi_1$ (7'') $u^3 = \xi_2$.

Po kolei rozwiążymy każde z nich. Otóż równanie (7') jest równaniem dwumiennem, którem zajmowaliśmy się w § 26. Jak stamtąd wiadomo, równanie (7') ma 3 pierwiastki

(15) $u_1 = \sqrt[3]{\xi_1}$; $u_2 = \omega\sqrt[3]{\xi_1}$;

$u_3 = \omega^2\sqrt[3]{\xi_1}$;

gdzie ($\tilde{\omega}$) było podane w § 26

Liczba (u_1) jest rzeczywistą, liczby (u_2, u_3) są zespolone ze sobą sprzężone.

Obliczamy z kolei (v) według równania (6); oczywiście otrzymamy trzy wartości na (v), a mianowicie:

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1} = -\frac{p}{3\sqrt[3]{\xi_1}}$$

$$v_2 = -\frac{p}{3u_2} = -\frac{p}{3\omega\sqrt[3]{\xi_1}}$$

$$v_3 = -\frac{p}{3u_3} = -\frac{p}{3\omega^2\sqrt[3]{\xi_1}}$$

Korzystając z równania (13), mamy:

$$v_1 = \sqrt[3]{\xi_2}\,,\quad v_2 = \frac{\sqrt[3]{\xi_2}}{\omega}\,,\quad v_3 = \frac{\sqrt[3]{\xi_2}}{\omega^2}\,;$$

co przekształcimy w dalszym ciągu, bo:

$$\frac{1}{\omega} = \frac{\omega^2}{\omega.\omega^2} = \frac{\omega^2}{1} = \omega^2$$

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega}{\omega.\omega^2} = \frac{\omega}{1} = \omega$$

bo jak wiadomo jest $\omega^3 = 1$.

Będzie więc:

$$(16)\qquad v_1 = \sqrt[3]{\xi_2}\,,\quad v_2 = \omega^2\sqrt[3]{\xi_2}\,,\quad v_3 = \omega\sqrt[3]{\xi_2}\,.$$

Równanie (15) i (16) pozwalają na mocy (2) wyznaczyć trzy pierwiastki równania (1) a mianowicie:

$$(17)\quad \begin{cases} x_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{\xi_1} + \sqrt[3]{\xi_2} \\ x_2 = u_2 + v_2 = \omega\sqrt[3]{\xi_1} + \omega^2\sqrt[3]{\xi_2} \\ x_3 = u_3 + v_3 = \omega^2\sqrt[3]{\xi_1} + \omega\sqrt[3]{\xi_2} \end{cases}$$

Pierwszy z pierwiastków x_1 brzmi in extenso tak:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{H}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{H}},$$

jest on rzeczywistym i został po raz pierwszy znaleziony przez matematyka włoskiego XVI wieku Hieronima Cardano (ur. 1501; um. 1576).

Ponieważ jest:

$$\omega = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega^2 = -\frac{1}{2} \mp \frac{i\sqrt{3}}{2}$$ więc:

$$(18)\begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\xi_1}+\sqrt[3]{\xi_2}\right) \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\xi_1}-\sqrt[3]{\xi_2}\right) \\ x_3 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\xi_1}+\sqrt[3]{\xi_2}\right) \mp \frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\xi_1}-\sqrt[3]{\xi_2}\right). \end{cases}$$

Ponieważ $\sqrt[3]{\xi_1} \mp \sqrt[3]{\xi_2}$, więc liczby x_2, x_3 są zespolone i nadto ze sobą sprzężone.

Widzimy tedy, że w przypadku $H > 0$, równanie (1) ma jeden pierwiastek rzeczywisty, a dwa zespolone, ze sobą sprzężone.

Zapytajmy z kolei o związki między pierwiastkami równania, a jego współczynnikami.

Obliczmy sumę pierwiastków. Na mocy (17) i (18) mamy:

$$x_1+x_2+x_3=\sqrt[3]{\xi_1}+\sqrt[3]{\xi_2}-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\xi_1}+\sqrt[3]{\xi_2}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\xi_1}+\sqrt[3]{\xi_2}\right)=0.$$

Utwórzmy iloczyn pierwiastków; otrzymuje się wdocznie:

$$x_1x_2x_3=\left(\sqrt[3]{\xi_1}+\sqrt[3]{\xi_2}\right)\left(\omega\sqrt[3]{\xi_1}+\omega^2\sqrt[3]{\xi_2}\right)\left(\omega^2\sqrt[3]{\xi_1}+\omega\sqrt[3]{\xi_2}\right)=$$
$$=\left(\sqrt[3]{\xi_1}+\sqrt[3]{\xi_2}\right)\left(\omega^3\sqrt[3]{\xi_1^2}+\omega^4\sqrt[3]{\xi_1\xi_2}+\omega^2\sqrt[3]{\xi_1\xi_2}+\omega^3\sqrt[3]{\xi_2^2}\right)$$
$$=\left(\sqrt[3]{\xi_1}+\sqrt[3]{\xi_2}\right)\left[\sqrt[3]{\xi_1^2}+(\omega+\omega^2)\sqrt[3]{\xi_1\xi_2}+\sqrt[3]{\xi_2^2}\right].$$

Ale $\omega+\omega^2=-1$, więc:

$$x_1x_2x_3=\left(\sqrt[3]{\xi_1}+\sqrt[3]{\xi_2}\right)\left(\sqrt[3]{\xi_1^2}-\sqrt[3]{\xi_1\xi_2}+\sqrt[3]{\xi_2^2}\right)$$

Ale wiadomo, że:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$$

Tedy kładąc $a=\sqrt[3]{\xi_1}$, $b=\sqrt[3]{\xi_2}$, mamy:

$$x_1x_2x_3=\xi_1+\xi_2=-q$$ na mocy równości (11).

Nie otrzymaliśmy dotąd współczynnika (p) w funkcji pierwiastków.

Otóż weźmy w tym celu sumę iloczynów pierwiastków po dwa, t. zn.:

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3.$$

Będzie tedy kolejno na mocy (18):

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = x_1(x_2+x_3)+x_2x_3 =$$

$$= x_1\left[-\sqrt[3]{\xi_1}-\sqrt[3]{\xi_2}\right]+\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{\xi_1}+\sqrt[3]{\xi_2}\right)^2-\frac{3i^2}{4}\left(\sqrt[3]{\xi_1}-\sqrt[3]{\xi_2}\right)^2 =$$

$$= -\left(\sqrt[3]{\xi_1}+\sqrt[3]{\xi_2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{\xi_1}+\sqrt[3]{\xi_2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{\xi_1}-\sqrt[3]{\xi_2}\right)^2 =$$

$$= -\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{\xi_1}+\sqrt[3]{\xi_2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{\xi_1}-\sqrt[3]{\xi_2}\right)^2 = \frac{3}{4}(-4)\sqrt[3]{\xi_1\xi_2} =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot(-4)\cdot\left(-\frac{p}{3}\right) = p.$$

Wyniki ostatnie uważamy za tymczasowe; ostateczne z nich wnioski podamy dopiero w § 32.

Dotąd zajmowaliśmy się równaniem (7'). Weźmy teraz równanie:

$$(7'') \qquad u^3 = \xi_2$$

Zobaczymy, że nie otrzymamy nowych pierwiastków równania (1), tylko te same co poprzednio.

Na mocy § 26 daje nam równanie (7'') trzy pierwiastki, które oznaczymy tak:

$$u_4 = \sqrt[3]{\xi_2}, \quad u_5 = \omega\sqrt[3]{\xi_2}, \quad u_6 = \omega^2\sqrt[3]{\xi_2}$$

Równanie (6) daje wtedy:

$$v_4 = -\frac{p}{3\sqrt[3]{\xi_2}}, \quad v_5 = -\frac{p}{3\omega\sqrt[3]{\xi_2}}, \quad v_6 = -\frac{p}{3\omega^2\sqrt[3]{\xi_2}}$$

Korzystając z równania (13) z łatwością znajdziemy:

$$v_4 = \sqrt[3]{\xi_1}\,,\quad v_5 = \omega^2\sqrt[3]{\xi_1}\,,\quad v_6 = \omega\sqrt[3]{\xi_1}\,.$$

Przeto na mocy (2) mamy:

$$x_4 = u_4 + v_4 = \sqrt[3]{\xi_2} + \sqrt[3]{\xi_1}\,,$$

$$x_5 = \omega\sqrt[3]{\xi_2} + \omega^2\sqrt[3]{\xi_1}\,,$$

$$x_6 = \omega^2\sqrt[3]{\xi_2} + \omega\sqrt[3]{\xi_1}\,.$$

Jest więc:

$$x_4 = x_1\,,\quad x_5 = x_3\,,\quad x_6 = x_2\,.$$

A więc nie otrzymaliśmy żadnych nowych pierwiastków; inaczej być nie mogło, równanie 3go stopnia ma tylko 3 pierwiastki.

§ 30. Rozważmy teraz przypadek kiedy $H = 0$.

Wtedy równanie rozwiązujące (8) ma podwójny pierwiastek. Jest:

$$\xi_1 = \xi_2\,,\quad \text{więc}\quad \sqrt[3]{\xi_1} = \sqrt[3]{\xi_2}$$

Wzory (17), które do wyprowadzenia nie wymagały założenia $\xi_1 \neq \xi_2$, są i obecnie słuszne.

Z nich otrzymamy

$$x_1 = 2\sqrt[3]{\xi_1}\,,\quad x_2 = x_3 = (\omega + \omega^2)\sqrt[3]{\xi_1}$$

Ale natychmiast stwierdzamy, że:

$$\omega + \omega^2 = -1,$$

więc mamy:

$$x_1 = 2\sqrt[3]{\xi_1}, \quad x_2 = x_3 = -\sqrt[3]{\xi_1}.$$

A więc równanie posiada 3 pierwiastki rzeczywiste, z tych jeden dwukrotny. Zauważmy, że i w tym przypadku jest:

$$(19) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p \\ x_1 \cdot x_2 x_3 = -q \end{cases}$$

co wynika stąd, że takie związki były słuszne w przypadku $H > 0$, a dla ich wyprowadzenia rozumowanie powyżej podane wymagało założenia mniej ciasnego, bo założenia:

$$H \geqslant 0.$$

§ 31. Przejdźmy teraz do przypadku, kiedy jest:

$$H < 0.$$

Wtedy równanie (8) ma na mocy § 22 dwa pierwiastki różne od siebie, zespolone i ze sobą sprzężone; oznaczmy je znowu przez ξ_1, ξ_2. Liczby ξ_1, ξ_2 są więc zespolone nierzeczywiste. Jest:

$$\xi_1 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-H}$$

$$\xi_2 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-H} \quad (\text{skoro } H<0, \text{to } -H>0).$$

Znalazłszy ξ, wracamy się do równania (7). Liczba (u) będzie liczbą zespoloną:

$$u = a + bi$$

jednakowoż na stosunek $(a:b)$ otrzymamy znów równanie stopnia 3^{go}, które – doprowadzone do postaci normalnej – ma wielkość $H<0$. Dla efektywnego numerycznego rozwiązania musimy się zwrócić do innej metody, np. trygonometrycznej podanej w § 26.

W tym celu rozwiązania równania (8) napiszemy pod postacią:

$$\xi_1 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\xi_2 = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Skąd:

$$2\rho\cos\varphi = \xi_1 + \xi_2 = -q$$

$$\rho^2 = \xi_1 \xi_2 = -\frac{p^3}{27}$$

Otóż zauważmy, że jest $H<0$, więc być musi $p<0$, tedy $-\frac{p^3}{27}>0$, więc:

$$\rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} \tag{20}$$

jest liczbą rzeczywistą (dodatnią).

Stąd dalej wynika, że:

(21) $$\cos\varphi = -\frac{q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}.$$

Aby można było stąd wyznaczyć φ, trzeba wykazać, że jest:

(22) $$\left|-\frac{q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}\right| \leqq 1$$

co z łatwością wykażemy dowodem nie wprost.

Załóżmy więc na chwilę, że jest:

$$\left|\frac{-q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}\right| > 1.$$

Stąd wynika, że:

$$\left|\frac{q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}\right| > 1.$$

Przez podniesienie do kwadratu, na mocy równości:

$$|a|^2 = a^2,$$

otrzymujemy, że:

$$\frac{q^2}{4\left(-\frac{p^3}{27}\right)} > 1;$$ mnożąc ostatnią nierówność przez $\left(-\frac{p^3}{27}\right)$ [co – jak wiemy – jest liczbą dodatnią], otrzymamy:

$$\frac{q^2}{4} > -\frac{p^3}{27}$$ i wreszcie:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$$ czyli $H > 0$

Według założenia zaś jest $H < 0$, a więc chwilowe założenie prowadzi do sprzeczności

Jest zatem nierówność (22) słuszną i przeto równanie (21) pozwoli wyznaczyć φ. Wyznaczywszy ρ z równania (20) i kąt φ [nie jednoznacznie] z równania (21), określamy (u) z równania:

(23) $$u^3 = \rho[\cos\varphi + i\sin\varphi]$$

względnie:

(24) $$u^3 = \rho[\cos\varphi - i\sin\varphi]$$

[Zauważmy, że, jeżeli φ_0 oznacza jedno z rozwiązań równania (21), to wszystkie rozwiązania są zawarte w równości:

$$\varphi = \pm\varphi_0 + 2m\pi$$

gdzie (m) oznacza dowolną liczbę całą. Wtedy:

$$\cos\varphi = \cos\varphi_0, \quad \sin\varphi = \pm\sin\varphi_0$$

Otrzymamy więc tylko dwa równania analogiczne do równań (23) i (24).]

Weźmy najpierw pod uwagę równanie (23). Jak nam wiadomo z § 26, równanie to posiada trzy rozwiązania:

$$u_1 = \sigma\left[\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right]$$

$$u_2 = \sigma\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right)\right]$$

$$u_3 = \sigma\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right)\right],$$

przyczem:

$$\sigma = \sqrt[3]{\varrho} = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}} = \sqrt{\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}}$$

(25) $$\sigma = \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Skąd widoczne, że:

$$-\frac{p}{3} = \sigma^2$$

Znalazłszy (u), obliczmy (v); otóż:

$$v = -\frac{p}{3u} = \frac{\sigma^2}{u}$$

Tedy:

$$v_1 = \frac{\sigma^2}{\sigma\left[\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right]} = \frac{\sigma}{\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}}.$$

Dzielną i dzielnik ostatniego ilorazu mnożymy przez $\left(\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right)$ t.j. przez liczbę sprzężoną z dzielnikiem, tedy:

$$v_1 = \frac{\sigma\left[\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right]}{\cos^2\frac{\varphi}{3} + \sin^2\frac{\varphi}{3}} = \sigma\left[\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right].$$

Zupełnie podobnie otrzymuje się:

$$v_2 = \frac{\sigma^2}{u_2} = \sigma\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right) - i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right)\right]$$

$$v_3 = \frac{\sigma^2}{u_3} = \sigma\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right) - i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right)\right].$$

Stąd wynikają wzory na pierwiastki:

$$(26)\quad \begin{cases} x_1 = u_1 + v_1 = 2\sigma\cos\frac{\varphi}{3}, \\ x_2 = u_2 + v_2 = 2\sigma\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right), \\ x_3 = u_3 + v_3 = 2\sigma\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right). \end{cases}$$

Aby obliczyć te pierwiastki, trzeba wyliczyć σ z równania (25) i kąt φ z równania (21).

Zajmijmy się z kolei równaniem (24). Na mocy §26 otrzymamy znów 3 rozwiązania [zamiast φ należy położyć $(-\varphi)$ w odpowiednie wzory §26], a mianowicie:

$$u_4 = \sigma\left[\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right],$$

$$u_5 = \sigma\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right) - i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right)\right],$$

$$u_6 = \sigma\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right) - i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right)\right].$$

Wobec czego otrzymamy:

$$v_4 = \sigma\left[\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right],$$

$$v_5 = \sigma\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right)\right],$$

$$v_6 = \sigma\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right)\right].$$

I widoczne, że jest:

$$x_4 = u_4 + v_4 = x_1, \quad x_5 = u_5 + v_5 = x_2,$$

$$x_6 = u_6 + v_6 = x_3.$$

Zobacz uwagę na końcu.

Żadnych nowych pierwiastków nie otrzymujemy i nie może być też inaczej. Równanie rozważane ma trzy pierwiastki i jak widać z równań (26), są w przypadku $H<0$ wszystkie trzy nierzeczywiste. Przypadek $H<0$ zowie się casus irreductibilis (irreducibilis) – przypadek nieprzywiedlny: pierwiastki (26) nie dadzą się wyrazić przy pomocy pierwiastków (rzeczywistych) z liczb (p, q).

<u>Uwaga</u>. Dyskusję, dotyczącą ilości rzeczywistych pierwiastków równania (1) w zależności od znaku wyrażenia H (gdy p, q są rzeczywiste), można poprowadzić też na innej drodze. [zob. Hoborski, Wyższa Matematyka, Część I (nowe wydanie z r. 1928, str. 459 i nast.].

§ 32. Zastanówmy się nad przypadkiem, kiedy współczynniki równania (1) t.j. liczby (p, q) są zespolone. Wtedy jak w § 28, połóżmy (2) $x = u + v$ i znów przyjmiemy:

(6) $v = -\dfrac{p}{3u}$, przyczem (u) wyznaczy się z równania:

(7) $u^3 = \xi$, gdzie ξ jest pierwiastkiem równania rozwiązującego:

$$(8) \quad \xi^2 + q\xi - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Dla równania tego tworzymy znów H, ale rozważymy tylko dwa przypadki: albo $H \neq 0$ albo $H = 0$. Gdy $H \neq 0$, to równanie (8) [mając współczynniki zespolone – zob. § 24] ma dwa różne zespolone pierwiastki ξ_1, ξ_2. Otrzymamy więc dwa równania (7), których niewiadome odróżniamy: (7') $u^3 = \xi_1$; (7'') $\bar{u}^3 = \xi_2$.

Rozważmy najpierw równanie (7'). Według § 26 ono ma trzy rozwiązania: $A, \omega A, \omega^2 A$; oznaczymy je tak:

$$u_1 = A; \quad u_2 = \omega A; \quad u_3 = \omega^2 A \quad \text{czyli}$$

$$u_2 = \omega u_1, \quad u_3 = \omega^2 u_1.$$

Równanie (6) daje widocznie:

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1} = -\frac{p}{3A}; \quad v_2 = -\frac{p}{3u_2} = -\frac{p}{3A\omega} = v_1\omega^2,$$

$$v_3 = -\frac{p}{3u_3} = v_1\omega$$

Wobec tego pierwiastki równania (1) są:

$$x_1 = u_1 + v_1; \quad x_2 = u_2 + v_2 = \omega u_1 + \omega^2 v_1;$$

$$x_3 = \omega^2 u_1 + \omega v_1$$

Stąd stwierdzamy, że jest:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad \text{bo} \quad 1 + \omega + \omega^2 = 0$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = x_1(x_2 + x_3) + x_2 x_3 =$$

$= -(u_1+v_1)^2 + (\omega u_1 + \omega^2 v_1)(\omega^2 u_1 + \omega v_1) = -3u_1v_1 = p,$

$x_1 x_2 x_3 = -q.$

Pozostało nam jeszcze do rozwiązania równanie:

$$(7'') \qquad \bar{u}^3 = \xi_2 .$$

Ale zauważmy, że z mnożenia równań (7') i (7'') otrzymujemy: $(u\bar{u})^3 = \xi_1 \xi_2$

Wiadomo, że $\xi_1 \xi_2 = -\frac{p^3}{27}$, więc

$(u_1\bar{u}_1)^3 = -\frac{p^3}{27} = \left(-\frac{p}{3}\right)^3$. Równanie to ma według § 26 trzy rozwiązania; jednem z nich widocznie jest liczba $u\bar{u} = -\frac{p}{3}$, więc rozwiązaniami są liczby

$(*)$ $u\bar{u} = -\frac{p}{3}$; $(**)$ $u\bar{u} = -\frac{p}{3}\omega$; $(***)$ $u\bar{u} = -\frac{p}{3}\omega^2$.

Związek $(*)$ na mocy (6) daje: $\bar{u} = v$ i do tego więc należące $\bar{v} = u$; tedy równanie $(*)$ daje te same pierwiastki x_1, x_2, x_3, co poprzednio.

Mnożąc $(**)$ przez (ω^2) i uwzględniając równość $\omega^3 = 1$ otrzymujemy:

$u(\bar{u}\omega^2) = -\frac{p}{3}$, przeto jest $\bar{u}\omega^2 = v$, skąd wynika $\bar{u} = \frac{v}{\omega^2} = \frac{v \cdot \omega}{\omega^3} = v \cdot \omega$,

a więc $\bar{v} = -\frac{p}{3\bar{u}} = -\frac{p}{3v\omega} = -\frac{p}{3v}\omega^2 = u\omega^2$,

a więc $\bar{u}_1 + \bar{v}_1 = u_1\omega^2 + \omega v_1 = x_3$; $\bar{u}_2 + \bar{v}_2 =$

$$= v_2\omega + u_2\omega^2 = v_1\omega^2\cdot\omega + \omega u_1\omega^2 = v_1 + u_1 = x_1$$

$$\bar{u}_3 + \bar{v}_3 = v_3\omega + u_3\omega^2 = v_1\omega\cdot\omega + \omega^2 u_1\cdot\omega^2 = v_1\omega^2 + u_1\omega = x_2$$

A więc i związek (**) daje te same pierwiastki, co (7').

Wreszcie pomnóżmy związek (***) przez ω; otrzymamy $u\cdot\bar{u}\omega = -\frac{p}{3}$, więc $\bar{u}\omega = v$, skąd $\bar{u} = \frac{v}{\omega} = v\omega^2$, $\bar{v} = -\frac{p}{3v\omega^2} = u\omega$;
stąd:

$$\bar{u}_1 + \bar{v}_1 = v_1\omega^2 + u_1\omega = x_2, \quad \bar{u}_2 + \bar{v}_2 = v_2\omega^2 + u_2\omega =$$

$$= v_1\omega + u_1\omega^2 = x_3,$$

$$\bar{u}_3 + \bar{v}_3 = u_3\omega + v_3\omega^2 = u_1 + v_1 = x_1.$$

I równanie (***) nie dają nowych pierwiastków.

A więc równanie (7'') nie daje nowych pierwiastków, wszystkie (t.j. trzy) daje nam rozwiązanie równania (7').

§ 33. Zastanówmy się nad związkami między pierwiastkami, a współczynnikami równania stopnia 3^{go} oczywiście zupełnego.

Wiadomo nam z § 25, że zupełne równanie:

$$y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$$

przez podstawienie: $y = x - \frac{\alpha}{3}$

sprowadza się do postaci normalnej:

$$x^3 + px + q = 0$$

przyczem jest:

$$p = \beta - \frac{\alpha^2}{3}, \quad q = \gamma - \frac{\alpha\beta}{3} + \frac{2\alpha^3}{27}.$$

W § 26, 27, 28, 29, 30, 31 i 32 wykazaliśmy, że równanie normalne posiada trzy pierwiastki x_1, x_2, x_3 o własnościach następujących:

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p, \quad x_1x_2x_3 = -q.}$$

Stąd najpierw wynika, że równanie zupełne posiada również trzy pierwiastki, które oznaczymy przez y_1, y_2, y_3, przyczem jest:

$$y_1 = x_1 - \frac{\alpha}{3}, \quad y_2 = x_2 - \frac{\alpha}{3}, \quad y_3 = x_3 - \frac{\alpha}{3}.$$

Stąd widoczne, że mamy:

$$y_1 + y_2 + y_3 = x_1 + x_2 + x_3 - \alpha = -\alpha$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \left(x_1 - \frac{\alpha}{3}\right)\left(x_2 - \frac{\alpha}{3}\right) + \left(x_1 - \frac{\alpha}{3}\right)\left(x_3 - \frac{\alpha}{3}\right) +$$
$$+ \left(x_2 - \frac{\alpha}{3}\right)\left(x_3 - \frac{\alpha}{3}\right) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 -$$
$$- \frac{\alpha}{3}(x_1 + x_2 + x_1 + x_3 + x_2 + x_3) + 3 \cdot \frac{\alpha^2}{9} =$$
$$= p + \frac{\alpha^2}{3} = \beta - \frac{\alpha^2}{3} + \frac{\alpha^2}{3} = \beta.$$

$$y_1y_2y_3 = \left(x_1 - \frac{\alpha}{3}\right)\left(x_2 - \frac{\alpha}{3}\right)\left(x_3 - \frac{\alpha}{3}\right) =$$
$$= \left(x_1x_2 - \frac{\alpha x_2}{3} - \frac{\alpha x_1}{3} + \frac{\alpha^2}{9}\right)\left(x_3 - \frac{\alpha}{3}\right) =$$
$$= x_1x_2x_3 - \frac{\alpha x_2x_3}{3} - \frac{\alpha x_1x_3}{3} + \frac{\alpha^2}{9}x_3 -$$
$$- \frac{\alpha}{3}x_1x_2 + \frac{\alpha^2}{9}x_2 + \frac{\alpha^2}{9}x_1 - \frac{\alpha^3}{27} =$$
$$= -q - \frac{\alpha}{3}p = -\gamma + \frac{\alpha\beta}{3} - \frac{2\alpha^3}{27} - \frac{\alpha}{3}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{3}\right) - \frac{\alpha^3}{27} = -\gamma.$$

$-\frac{\alpha^3}{27}$

Mamy więc zasadnicze związki między pierwiastkami i współczynnikami zupełnego równania stopnia 3^go:

(I) $y_1+y_2+y_3=-\alpha$; $y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=\beta$;

$$y_1y_2y_3=-\gamma.$$

Związki te pozwalają rozwiązać zagadnienie, które możemy uważać za odwrotne do dotychczasowego: utworzyć równanie stopnia 3^go, mające dane z góry liczby, jako pierwiastki.

<u>Przykład</u>: Utworzyć równanie stopnia 3^go mające, jako pierwiastki liczby: 1, 2, 4. Jeżeli to równanie napiszemy pod postacią:

$$y^3+\alpha y^2+\beta y+\gamma=0,$$

to na mocy związków (I) będzie:

$$\alpha=-(1+2+4)=-7\ ;\quad \beta=1.2+1.4+2.4=14,$$

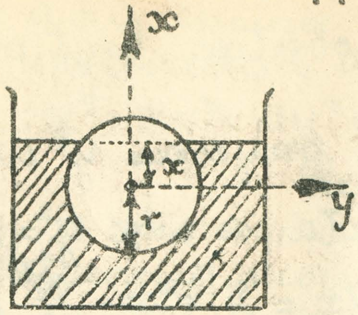
$$\gamma=-1.2.4=-8.$$

Tedy równanie szukane będzie:

$$y^3-7y^2+14y-8=0.$$

§ 34. Dla ilustracji rozwiążemy następujące zagadnienie z hydrostatyki:

W naczyniu z cieczą o ciężarze właściwym δ zanurzona jest kula, wykonana z jednorodnego materjału o ciężarze właściwym δ_0, mniejszym od ciężar-



Rys. 14.

ru właściwego cieczy. Wskutek tego kula pewną częścią wynurza się z cieczy. Nie uwzględniając włoskowatości, obliczymy do jakiego poziomu zanurzona jest kula, jeżeli promień jej wynosi r.

Celem rozwiązania powyższego zadania wprowadzamy dowolną pionową płaszczyznę przez środek kuli i w tej płaszczyźnie osie (x) i (y), a głębokość zanurzenia (x), liczona od środka kuli pionowo w górę jako dodatnia określimy z prawa Archimedesa. Mianowicie wiadomo, że ciało tak się zanurzy, iż ciężar kuli P_0 równa się ciężarowi P wody, wypartej przez zanurzoną część kuli. Ponieważ ciężar ciała jednorodnego równa się iloczynowi objętości ciała i ciężaru właściwego ciała, więc ciężar kuli jest:

$$P_0 = \frac{4}{3} r^3 \pi \delta_0.$$

Ciężar wypartej cieczy jest $P = v \cdot \delta$, gdzie (v) oznacza objętość zanurzonego odcinka kuli. Tę objętość obliczymy przy pomocy znanego wzoru na objętość bryt obrotowych, a więc:

$$V = \pi\int_{-r}^{x} y^2dx,$$ przyczem y^2 wyznaczymy z równania koła, a więc $y^2 = r^2 - x^2$, więc:

$$V = \pi\int_{-r}^{x}(r^2 - x^2)dx = \pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{x} =$$

$$= \pi\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right) - \pi\left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right) =$$

$$= \pi\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{2r^3}{3}\pi.$$

Ciężar wypartej cieczy wynosi więc:

$$P = \pi\delta r^2x - \pi\delta\cdot\frac{x^3}{3} + \delta\frac{2r^3}{3}\pi.$$

Prawo Archimedesa daje $P_0 = P$, a więc

$$\frac{4}{3}\pi r^3\delta_0 = \pi\delta r^2x - \pi\delta\frac{x^3}{3} + \delta\frac{2r^3}{3}\pi$$ czyli

$$x^3\delta - 3xr^2\delta + 2r^3(2\delta_0 - \delta) = 0.$$

Na głębokość zanurzenia (x) otrzymujemy więc równanie stopnia 3go i do tego w postaci normalnej. Rozwiązanie według poznanych metod zostawiamy czytelnikowi.

Rozdział V. Równania stopnia czwartego.

§ 35. Ogólne równanie stopnia czwartego

$$ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0.$$

o współczynnikach a, b, c, d, e, przyczem jest $a \neq 0$, można przez dzielenie przez (a) sprowadzić do postaci:

$$y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta = 0.$$

Równanie to dalej uprościmy, a mianowicie przez bardzo proste podstawienie można usunąć niewiadomą w stopniu trzecim.

W tym celu podstawmy $y = x + h$, gdzie (h) jest liczbą, dobraną w ten sposób, aby nowe równanie t. j. na (x) nie zawierało wyrazu (x^3). Otóż jest:

$$(x+h)^4 + \alpha(x+h)^3 + \beta(x+h)^2 + \gamma(x+h) + \delta = 0$$

Wyraz zawierający x^3 jest widocznie: $x^3(4h+\alpha)$. Aby on zniknął, należy dobrać (h) tak, aby było:

$$4h + \alpha = 0 \quad \text{czyli} \quad h = -\frac{\alpha}{4}$$

A zatem należy wykonać podstawienie $y = x - \frac{\alpha}{4}$, wtedy nowe równanie nie będzie zawierało (x^3). Otrzymamy równanie

$$(1) \quad x^4 + Px^2 + Qx + R = 0$$

gdzie P, Q, R są współczynnikami równania. Postać ta zowie się postacią uproszczoną równania stopnia czwartego.

§ 36. Będziemy się zajmowali głównie przypadkiem, gdy jest $Q \neq 0$ i zarazem

$R \neq 0$ bo we wszystkich innych równanie rozwiązać jest łatwo.

Wszystkich przypadków można odróżnić cztery, a mianowicie:

1). $Q = 0$, $R \neq 0$; 2). $Q \neq 0$, $R = 0$;

3). $Q = 0$, $R = 0$; 4). $Q \neq 0$, $R \neq 0$;

W przypadku 1) i 3) gdy $Q = 0$, to równanie przybiera postać:

$$x^4 + Px^2 + R = 0$$

Jest to wprawdzie równanie stopnia 4go ale przez podstawienie $x^2 = t$ można je doprowadzić do równania stopnia 2go.

$$t^2 + Pt + R = 0.$$

Gdy nadto $R = 0$ (przypadek 3), to otrzymujemy $t^2 + Pt = 0$ czyli $t(t+P) = 0$ co bardzo łatwo się rozwiązuje.

W przypadku 2), gdy $R = 0$ równanie sprowadza się do postaci:

$$x^4 + Px^2 + Qx = 0$$, a to znów do równania:

$$x(x^3 + Px + Q) = 0$$

Stąd na podstawie własności iloczynu czynników wnioskujemy, że albo $x = 0$, albo

$$x^3 + Px + Q = 0.$$

To ostatnie jest równaniem normalnem stopnia 3go, a metoda rozwiązania jest już nam znany.

Najbardziej interesującym jest przypadek (4) gdy jest $Q \neq 0$ i zarazem $R \neq 0$ i tym przypadkiem zajmiemy się poniżej.

§ 37. Metoda rozwiązania takiego równania rozpoczyna się podobnie, jak dla równań stopnia 3^{go}.

Kładziemy: $x = u + v + w$, a więc zamiast jednej niewiadomej (x) wprowadzamy trzy niewiadome v, u, w

Oczywiście gdy będziemy wyszukali u, v, w, to będziemy znali (x). Zamiast jednak szukać u, v, w, wyszukajmy (u^2), (v^2), (w^2), a stanie się to w ten sposób, że wyszukamy równanie, które będzie miało (u^2, v^2, w^2), jako pierwiastki. To nowe równanie będzie więc stopnia 3^{go} (3 pierw.), ono będzie oczywiście „rozwiązującem" dla naszego zagadnienia. To nowe równanie na (u^2, v^2, w^2) wyprowadzimy w następujący sposób. Znajdziemy równanie stopnia 4^{go}, którego jednym z pierwiastków jest liczba $u + v + w$.

W tym celu równość:

$x = u + v + w$ podniesiemy do kwadratu; jest więc:

$$x^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + vw),$$

a po przeniesieniu wyrazów kwadratowych na lewą stronę, otrzymamy:

$$x^2 - (u^2 + v^2 + w^2) = 2(uv + uw + vw),$$

co znów podniesiemy do kwadratu. Otrzymujemy:

$$x^4 - 2x^2(u^2 + v^2 + w^2) + (u^2 + v^2 + w^2)^2 =$$
$$= 4(uv + uw + vw)^2.$$

Ale $(uv + uw + vw)^2 = u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 +$
$+ 2(u^2vw + uv^2w + uvw^2) =$
$= u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 + 2uvw(u + v + w).$

Tu znów kładziemy $u + v + w = x$, tedy jest:

$$(uv + uw + vw)^2 = u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 + 2uvwx.$$

Przeto otrzymujemy:

$$(2)\quad \begin{aligned} &x^4 - 2x^2(u^2 + v^2 + w^2) - 8uvwx + \\ &+ \left[(u^2 + v^2 + w^2)^2 - 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2)\right] = 0. \end{aligned}$$

Zauważmy, że równanie (2) jest równaniem stopnia 4^{go} uproszczonem (t. zn. bez x^3), ponadto z powyższego sposobu, za pomocą którego je otrzymaliśmy, wiemy, że ono ma pierwiastek

$$x = u + v + w.$$

Gdyby więc teraz równanie (2) udało nam się uczynić identycznem z równaniem (1), to moglibyśmy mieć na-

dzieję obliczenia jednego pierwiastka równania (1).
Aby zaś równanie (1) stało się identycznem z równaniem (2) to widocznie oba równania muszą mieć odpowiednio jednakowe współczynniki, a więc ma być:

$$P = -2(u^2+v^2+w^2) \quad \ldots\ldots (a)$$

$$Q = -8uvw \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

$$R = (u^2+v^2+w^2)^2 - 4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2) \ldots (c).$$

Ponieważ liczby P, Q i R są naprzód dane, bo dane jest równanie (1), więc należy liczby (u, v, w) dobrać tak, aby powyższe trzy równania były spełnione. Z równania (a) otrzymujemy:

$$u^2+v^2+w^2 = -\frac{P}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Z równania (c) wnosimy, że jest:

$$u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2 = \frac{P^2}{16} - \frac{R}{4} \quad \ldots\ldots (4).$$

i wreszcie z równania (b) przez podniesienie do kwadratu otrzymujemy:

$$u^2 \cdot v^2 \cdot w^2 = \frac{Q^2}{64} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Zauważmy, że z powodu $Q \neq 0$ jest też $u \neq 0$, $v \neq 0$, $w \neq 0$.
Aby więc równanie (1) i (2) stały się identyczne, to (u^2, v^2, w^2) trzeba dobrać tak,

aby spełniały związki (3, 4, 5).
Szukane równanie na (u^2, v^2, w^2) będzie miało postać:

$$\xi^3 + A\xi^2 + B\xi + C = 0,$$

przyczem współczynniki A, B, C wyznaczymy w myśl § 33, a mianowicie będzie:

$$A = -(u^2+v^2+w^2) = \frac{P}{2},$$

$$B = u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2 = \frac{P^2}{16} - \frac{R}{4},$$

$$C = -u^2v^2w^2 = -\frac{Q^2}{64}.$$

Wobec tego rozwiązujące równanie ma postać:

$$(6) \qquad \xi^3 + \frac{P}{2}\xi^2 + \left(\frac{P^2}{16} - \frac{R}{4}\right)\xi - \frac{Q^2}{64} = 0.$$

Teorja rozwiązania takiego równania jest już nam znana z Rozdz. IV.
Będziemy więc znali jeden pierwiastek równania (1), a mianowicie:

$x = u + v + w$, gdy za u^2, v^2, w^2 podstawimy pierwiastki równania (6); oznaczając przez ξ_1, ξ_2, ξ_3 pierwiastki równania (6) mamy przyjąć:

$$(7) \quad u^2 = \xi_1; \quad v^2 = \xi_2; \quad w^2 = \xi_3$$

Równania (7) są równaniami dwumiennemi stopnia 2go, każde z nich ma po dwa pierwiastki różniące się znakiem; oznaczając jedną trójkę [po jednym pierwiastku dla każdego z równań (7)] pierwiastków przez:

$$\sqrt{\xi_1}\,,\ \sqrt{\xi_2}\,,\ \sqrt{\xi_3}\,,$$

[nawet w przypadku, gdy ξ_1 lub ξ_2 lub ξ_3 są liczbami zespolonemi] to na drugą trójkę otrzymamy liczby:

$$-\sqrt{\xi_1}\,,\ -\sqrt{\xi_2}\,,\ -\sqrt{\xi_3}\,.$$

Nie chcąc więc decydować o wyborze znaku, napiszemy:

$$u = \varepsilon_1\sqrt{\xi_1}\,;\quad v = \varepsilon_2\sqrt{\xi_2}\,;\quad w = \varepsilon_3\sqrt{\xi_3}$$

gdzie $\varepsilon_i = \pm 1$, przyczem $i = 1, 2, 3.$

Ze względu na znaki trójek liczb u, v, w może być osiem możliwości, a mianowicie zależnie od wyboru liczb ε_i; wszystkie te możliwości zestawiamy w następującej tabelce:

	ε_1	ε_2	ε_3
1)	+1	+1	+1
2).	+1	+1	−1
3).	+1	−1	+1
4).	+1	−1	−1
5).	−1	+1	+1
6).	−1	+1	−1
7).	−1	−1	+1
8).	−1	−1	−1

8 wypadków jedna tylko 2, 3, 5, 8 spełniają

$C = + v^2u^2w^2 = -\frac{Q^2}{64}$

Zaraz jednak zobaczymy, że nie wszystkie tu podane ewentualności są zgodne z naszymi związkami. Zauważmy bowiem, że zamiast związku (6) wzięliśmy związek (5), który wprawdzie wynika ze związku (6), ale jemu nie jest równoważny. A więc trzeba dodatkowo uwzględnić związek (6).

Załóżmy więc, że obraliśmy liczby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ tak, że wtedy (u, v, w) spełniają związek (6); niech niemi będą liczby u_0, v_0, w_0, a więc:

(8) $$Q = -8 u_0 v_0 w_0,$$

wtedy oczywiście mamy jeden pierwiastek: $x_1 = u_0 + v_0 + w_0$ dla równania (1).

Ale zauważmy że związek (6) spełnimy, gdy przy dwu z tych liczb u_0, v_0, w_0 zmienimy znaki na przeciwne, bo będzie też:

$$Q = -8(-u_0)(-v_0)w_0 \quad \text{lub} \quad Q = -8(-u_0)v_0(-w_0)$$

lub wreszcie $Q = -8u_0(-v_0)(-w_0)$.

Każda z tych ewentualności daje nam pierwiastek równania (1), mianowicie trzy dalsze pierwiastki.

$$x_2 = -u_0 - v_0 + w_0,$$

$$x_3 = -u_0 + v_0 - w_0,$$

$$x_4 = u_0 - v_0 - w_0.$$

W ten sposób uzyskaliśmy rozwiązanie równania stopnia 4^{go}.

Stąd praktyczna reguła rozwiązywania równań stopnia 4^{go}.

Zupełne równanie należy doprowadzić do postaci uproszczonej:

$$(1) \quad x^4 + Px^2 + Qx + R = 0 \quad \text{gdzie}$$

$Q \neq 0$, $R \neq 0$; przy pomocy współczynników P, Q, R tworzy się równanie rozwiązujące:

$$(6) \quad \xi^3 + \frac{P}{2}\xi^2 + \left(\frac{P^2}{16} - \frac{R}{4}\right)\xi - \frac{Q^2}{64} = 0,$$

którego pierwiastki oznaczymy przez ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Potem obieramy trzy liczby u_0, v_0, w_0 tak, by spełniały związki:

$$(8) \quad u_0^2 = \xi_1, \; v_0^2 = \xi_2, \; w_0^2 = \xi_3, \; u_0 v_0 w_0 = -\frac{Q}{8}.$$

Wtedy pierwiastkami równania (1) są liczby:

$$(9) \quad \begin{cases} x_1 = u_0 + v_0 + w_0, \\ x_2 = -u_0 - v_0 + w_0, \\ x_3 = -u_0 + v_0 - w_0, \\ x_4 = u_0 - v_0 - w_0. \end{cases}$$

Uwaga. W przypadku $Q = 0$ powyższa metoda prowadzi także do rozwiązania. Wtedy jeden z pierwiastków równania (6) jest zerem np. $\xi_1 = 0$, wobec czego jest $u_0 = 0$; przeto v_0, w_0 wybieramy tak, by było $v_0^2 = \xi_2$, $w_0^2 = \xi_3$. Pierwiastkami będą liczby:

$$x_1 = v_0 + w_0; \quad x_2 = -v_0 + w_0, \quad x_3 = v_0 - w_0,$$
$$x_4 = -v_0 - w_0.$$

§ 38. Rozwiążmy następujące równanie:
$$y^4 - 6y^3 + 3y^2 + 26y - 24 = 0$$
Kładąc $y = x + \frac{3}{2}$, otrzymujemy równanie uproszczone:
$$x^4 - \frac{21}{2}x^2 + 8x + \frac{105}{16} = 0$$
Jest więc obecnie $P = -\frac{21}{2}$, $Q = 8$, $R = \frac{105}{16}$, więc $\frac{P}{2} = -\frac{21}{4}$, $\frac{P^2}{16} - \frac{R}{4} = \frac{21}{4}$, $\frac{Q^2}{64} = 1$

Wobec tego równanie rozwiązujące ma postać: $$\xi^3 - \frac{21}{4}\xi^2 + \frac{21}{4}\xi - 1 = 0.$$
Równanie to należałoby teraz rozwiązać metodą podaną w rozdziale IV i radzimy czytelnikowi to uczynić; zresztą równanie to jest t. zw. odwrotnem, z czego poniżej korzystamy.
Rozwiążemy je jednak inaczej, gdyż równanie to ma widoczny pierwiastek 1

jak łatwo stwierdzić, wobec czego lewa strona jest podzielna przez $(\xi-1)$, dla reszty pierwiastków na (ξ) otrzymujemy równanie:

$$\xi^2 - \frac{17}{4}\xi + 1 = 0.$$

Równanie to daje $\xi = \frac{17}{8} \pm \sqrt{\frac{289}{64} - 1}$

$$= \frac{17}{8} \pm \frac{15}{8} = 4, \frac{1}{4}.$$

A więc mamy: $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 4$, $\xi_3 = \frac{1}{4}$,

stąd $u = \varepsilon_1$, $v = 2\varepsilon_2$, $w = \frac{1}{2}\varepsilon_3$, gdzie $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, 3.)$.

Ponieważ $Q = 8$, więc u_0, v_0, w_0 należy obrać tak, by było $u_0 v_0 w_0 = -1$,

a więc np.: $u_0 = -1$, $v_0 = 2$, $w_0 = \frac{1}{2}$

Pierwiastki równania stopnia 4^{go} uproszczonego są tedy:

$$x_1 = -1 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = 1 - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$x_3 = 1 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \quad x_4 = -1 - 2 - \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}.$$

A pierwiastki danego równania są:

$$y_1 = 3, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 4, \quad y_4 = -2.$$

§ 39. Nie będziemy uzasadniali związków, jakie zachodzą między pierwiastkami równania stopnia 4^{go}, a jego współczynnikami, gdyż odnośne twierdzenia wynikną nam wprost z rozważań ogólnych następnego rozdziału. Ograniczymy się do podania tych związków bez uzasadnienia.

Rozważmy więc równanie zupełne:

$$y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta = 0$$

Jak z §§ poprzednich wynika, równanie to posiada cztery pierwiastki, które oznaczmy przez y_1, y_2, y_3, y_4.

Utwórzmy sumę pierwiastków

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4$; otóż suma ta jest równa liczbie $(-\alpha)$:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = -\alpha.$$

Dla sumy iloczynów z dwu pierwiastków otrzymuje się:

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_1y_4 + y_2y_3 + y_2y_4 + y_3y_4 = \beta.$$

Dla sumy iloczynów z 3-ch pierwiastków otrzymuje się:

$$y_1y_2y_3 + y_1y_2y_4 + y_1y_3y_4 + y_2y_3y_4 = -\gamma,$$

a wreszcie iloczyn czterech pierwiastków:

$$y_1y_2y_3y_4 = \delta$$

Związki te pozwalają rozwiązać zadanie następujące: znaleźć równanie 4-go stopnia, którego pierwiastkami są

cztery, z góry dane liczby.
Rozdział niniejszy kończymy uwagą następującą: istnieje twierdzenie Abela, które orzeka, że ogólnych równań stopnia wyższego niż czwarty, nie można rozwiązać sposobem algebraicznym zapomocą wyciągania pierwiastków. Przez „ogólne równanie stopnia (n)-go" rozumieć będziemy równanie stopnia (n)-go, o którego współczynnikach założymy tylko, że są liczbami zespolonemi. Z tego twierdzenia bynajmniej nie wynika, że żadnych specjalnych równań stopnia wyższego, niż 4ty, nie można algebraicznie rozwiązać. Owszem wiadomo, że równanie t. zw. odwrotne stopnia 5go można rozwiązać algebraicznie.

Rozdział VI. Ogólne własności równań stopnia (n)-go.

§ 40. Niech będzie dane ogólne równanie stopnia n^{go}, o którem założymy, że współczynnik przy x^n jest już równy liczbie 1; przeto ogólne równanie stop. $(n)^{go}$ jest postaci:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots\dots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

gdzie $a_1; a_2; a_3; \dots\dots; a_n$ oznaczają dowolne liczby zespolone.

Zadajmy sobie teraz pytanie: czy równanie ogólne stopnia $(n)^{go}$ ma zawsze pierwiastki? Na to pytanie odpowiada t. zw. zasadnicze twierdzenie algebry, zwane też twierdzeniem D'Alambert'a, które orzeka, że <u>każde równanie algebraiczne (dowolnego stopnia) posiada conajmniej jeden pierwiastek.</u>

Twierdzenie to przyjmiemy bez dowodu. Z twierdzenia tego wynika nowe: <u>każde równanie stopnia $(n)^{go}$ posiada (dokładnie) n pierwiastków.</u>

Dowód przeprowadzimy zapomocą indukcji zupełnej.

§41. Przedtem jednak udowodnimy twierdzenie pomocnicze: <u>gdy równanie $W_n(x) = 0$ ma pierwiastek ξ,</u> to wiel. $W_n(x)$ (lewa strona tego równania) <u>jest po-</u>

dzielny przez dwumian $(x-\gamma)$ czyli tak zwany czynnik (dwumian) pierwiastkowy.

Dowód tw. pomocniczego jest bardzo prosty, mianowicie podzielmy $W_n(x)$ przez $(x-\gamma)$; otrzymamy na iloraz $J_{n-1}(x)$ wielomian stopnia $(n-1)$ i resztę R, która ma być stopnia niższego niż dzielnik, czyli jest stopnia 0^{go} t. zn. jest wielkością stałą.

$$\frac{W_n(x)}{R} : (x-\gamma) = J_{n-1}(x)$$

Wykażemy, że reszta R, jaką otrzymaliśmy jest równa 0, czyli, że wielomian $W_n(x)$ jest podzielny przez $(x-\gamma)$. Z ostatnio napisanego dzielenia wynika, że jest identycznie:

$$W_n(x) \equiv (x-\gamma) . J_{n-1}(x) + R$$

Ponieważ równość ta zachodzi dla wszelkich wartości x, więc podstawmy $x=\gamma$, wtedy wypadnie:

$$W_n(\gamma) = R,$$

ale (γ) jest pierwiastkiem równania

$W_n(x)=0$, a więc jest $W_n(\gamma)=0$.
Stąd wynika, że jest $R=0$. c.b.d.u.
Wielomian $W_n(x)$ jest więc podzielny przez dwumian $(x-\gamma)$.

§42. W następstwie udowodnimy teraz drugie z twierdzeń §40, które orzeka, że każde równanie algebraiczne stopnia $(n)^{go}$ ma (dokładnie) (n) pierwiastków.

Dowód przeprowadzimy na zasadzie indukcji zupełnej.

A.) Twierdzenie powyższe jest prawdziwe dla liczby $n=1$, bo równanie stopnia pierwszego:

$$x+a_1=0$$

ma rzeczywiście i tylko jeden pierwiastek

$$x=-a_1$$

B). Załóżmy, że twierdzenie jest słuszne dla dowolnej liczby naturalnej $n=p$ czyli załóżmy, że każde równanie stopnia p^{tego} ma (p) pierwiastków.

Wykażemy wniosek: twierdzenie powyższe jest również prawdziwe dla liczby $n = p+1$ czyli wykażemy, że każde równanie stopnia $(p+1)$ ma $(p+1)$ pierwiastków.

Obierzmy więc dowolne równanie stopnia $(p+1)$:

$$W_{p+1}(x) = 0.$$

Według twierdzenia D'Alamberta (§40) równanie to posiada przynajmniej jeden pierwiastek; niech nim będzie γ. Podzielmy teraz wielomian $W_{p+1}(x)$ przez czynnik pierwiastkowy $(x-\gamma)$. Na mocy tw. pomocniczego z §41 jest:

$$W_{p+1}(x) = (x-\gamma) \cdot \mathfrak{I}_p(x),$$

gdzie $\mathfrak{I}_p(x)$ oznacza wielomian stopnia p^{go}. A więc równanie $W_{p+1}(x)=0$ przyjmie teraz postać:

$$(x-\gamma) \cdot \mathfrak{I}_p(x) = 0.$$

Iloczyn czynników jest równy zeru, gdy conajmniej jeden z nich jest równy zeru. Może więc być $x-\gamma=0$, co daje znany pierwiastek $x_1 = \gamma$. Ale iloczyn będzie zerem, gdy będzie

$$J_p(x) = 0.$$

To jest jednak równaniem stopnia p^{go}, na mocy założenia ma (p) pierwiastków. Razem więc posiada równanie $W_{p+1}(x) = 0$ co było do udowodnienia (p+1) pierwiastków. c.b.d.u.

Twierdzenie główne z obecnego paragrafu zostało więc udowodnione.

Jak widać z dowodu nie wyklucza to możliwości, że jakiś pierwiastek może się kilkakrotnie powtórzyć.

§ 43. Z twierdzenia o ilości pierwiastków równania wyprowadzimy następujący wniosek.

Rozważmy równość.

(1) $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0.$

przyczem $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_{n-1}, a_n$ oznaczają dane liczby zespolone. Załóżmy, że ta równość sprawdza się dla conajmniej (n+1) równych liczb (x). Wtedy twierdzimy, że wszystkie współczynniki równości są równe zeru:

(2) $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_{n-1} = a_n = 0$

i równość (1) spełnia wtedy każda liczba zespolona, więc (1) jest identycznością:

$$(3)\quad a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n \equiv 0$$

Rzeczywiście oznaczmy przez a_k pierwszą (idąc od lewej ku prawej) z liczb:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}, a_n,$$

różną od zera. Nie może być $k = n$, bo dałoby to, że $a_n \neq 0$, kiedy $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_{n-1} = 0$ i równocześnie (1) dałoby $a_n = 0$, a więc sprzeczność widoczną. Jest więc $0 \leqq k < n$. Ponieważ $a_0 = a_1 = \ldots\ldots = a_{k-1} = 0$, $a_k \neq 0$, więc (1) będzie równoważne równaniu:

$$(4)\quad x^{n-k} + \frac{a_{k+1}}{a_k}x^{n-k-1} + \ldots\ldots + \frac{a_{n-1}}{a_k} + \frac{a_n}{a_k} = 0,$$

przyczem $0 < n-k \leqq n$. Równanie (4) według dopieroco udowodnionego twierdzenia ma tylko $n-k < n+1$ pierwiastków. Sprzeczność więc widoczna i przeto liczby (a_k) o podanej własności nie ma, prawdziwemi są więc równości (2).

i identyczność (3).

Wykazaliśmy więc twierdzenie: jeżeli równość (1) jest spełniona dla conajmniej (n+1) różnych liczb (x), to zachodzą równości (2) i równość (1) tem samem jest identycznością (3) t. zn. jest spełnioną dla wszystkich (x).

§ 44. Oznaczmy przez $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ (n) pierwiastków równania:

$$W_n(x) = 0.$$

Udowodnimy, że jest:

$$W_n(x) \equiv (x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_n).$$

Udowodnimy to twierdzenie przez indukcję zupełną.

A). Twierdzenie to jest słuszne dla $n=1$. Rzeczywiście w tym przypadku równanie ma postać:

$$x + a_1 = 0$$

więc $W_1(x) = x + a_1$ i pierwiastkiem jego jest liczba $x_1 = -a_1$, więc $a_1 = -x_1$ i przeto:

$$W_1(x) = x + a_1 = x - x_1 \quad \text{c.b.d.u.}$$

B). Załóżmy, że twierdzenie jest słuszne, gdy stopień równania jest dowolna liczba naturalna (p).

Rozważmy równanie stopnia $(p+1)$-go:

$$W_{p+1}(x) = 0.$$

Ono — jak już wiemy — ma $(p+1)$ pierwiastków: $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_p, x_{p+1}$.

Jak wiemy, wielomian $W_{p+1}(x)$ jest podzielny przez $(x - x_{p+1})$ i niech ilorazem tego dzielenia będzie wielomian $\mathfrak{I}_p(x)$, oczywiście stopnia (p)-go:

$$W_{p+1}(x) \equiv (x - x_{p+1})\,\mathfrak{I}_p(x)$$

Stąd widoczne, że każdy pierwiastek równania:

$$\mathfrak{I}_p(x) = 0$$

będzie pierwiastkiem równania $W_{p+1}(x)=0$.

Ale równanie $\mathfrak{I}_p(x) = 0$ ma (p) pierwiastków, przeto niemi być muszą liczby $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_p$.

Na mocy założenia jest więc:

$$\mathfrak{I}_p(x) \equiv (x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_p)$$

przeto będzie:

$$W_{p+1}(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_p)(x-x_{p+1}).$$

Tem samem tw. na mocy indukcji zupełnej udowodnione.

Stąd praktyczna reguła rozwiązania

następującego zagadnienia:
rozłożyć wielomian:

$$\phi_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1}x + a_n$$

(gdzie $a_0, a_1, \dots, a_n$ są danemi liczbami, nadto $a_0 \neq 0$) na czynniki stopnia 1^{go}. A mianowicie rozwiązać równanie pomocnicze:

$$x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \dots\dots + \frac{a_{n-1}}{a_0}x + \frac{a_n}{a_0} = 0,$$

które ma (n) pierwiastków: $x_1, x_2, \dots x_n$, wtedy jest:

$$\frac{\phi_n(x)}{a_0} \equiv (x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_n).$$

Skąd wynika, że jest identycznie:

$$\phi_n(x) \equiv a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n),$$

co podaje szukany rozkład.

§ 45. Z twierdzenia o rozkładzie wyprowadzimy związki między pierwiastkami i współczynnikami równania.

Niech będzie dane równanie

$$W_n(x) = 0,$$

gdzie $W_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_{n-1}x + a_n$.

Niech $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ będą pierwiastkami tego równania; utwórzmy iloczyn

$$V_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_n),$$

jest to też wielomian stopnia $(n)^{\text{go}}$ i jak wiemy, jest

(1) $W_n(x) \equiv V_n(x)$

Twierdzimy, że oba wielomiany $W_n(x)$, $V_n(x)$ mają równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej. Rzeczywiście: niech będzie po wymnożeniu

$$V_n(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + b_{n-1}x + b_n.$$

Twierdzimy, że jest:

(2) $a_i - b_i = 0$ dla $i = 1, 2, 3, \ldots n-1, n.$

Utwórzmy bowiem równość:

$$W_n(x) - V_n(x) = 0$$

ona będzie miała postać:

(3) $(a_1 - b_1)x^{n-1} + (a_2 - b_2)x^{n-2} + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1})x + a_n - b_n = 0.$

Równość (1) jest spełnioną dla wszelkich liczb (x), a więc także dla (n) liczb, dla tych liczb jest więc spełnioną też równość (3) czyli równość (3) jest spełnioną dla (n) liczb. Stąd na mocy tw. z § 43 wynika, że muszą zachodzić równości (2).

Aby więc znaleźć związki między pierwiastkami równania, a jego współczynnikami, trzeba tylko w równościach (2) podstawić obliczone liczby b_i. Otóż z łatwością widać, że

$$b_1 = -(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n)$$
$$b_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots\ldots + x_1x_n + \ldots\ldots + x_{n-1}x_n$$
$$b_3 = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_1x_2x_n + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n),$$

i.t.d.; b_k jest równe iloczynowi potęgi $(-1)^k$ i sumy iloczynów po (k) czynników wszystkich z liczb $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Wreszcie. $b_n = (-1)^n x_1x_2\ldots\ldots x_n$.

Wobec tego i (2) jest:

$$(4)\quad \begin{cases} a_1 = -(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n), \\ a_2 = x_1x_2 + \ldots + x_1x_n + \ldots\ldots + x_{n-1}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k = (-1)^k[x_1x_2\ldots x_k + \ldots\ldots], \\ a_n = (-1)^n x_1x_2\ldots\ldots x_n. \end{cases}$$

Są to właśnie związki między pierwiastkami a współczynnikami równania.

One pozwalają bezpośrednio rozwiązać zadanie: znaleźć równanie stopnia $(n)^{go}$, którego pierwiastkami są dane liczby

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$.

§ 46. Zauważmy, że powyżej tworzyliśmy przy pomocy pierwiastków równania funkcje:

$$(I)\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n ; \quad x_1x_2 + \ldots + x_1x_n + \ldots + x_{n-1}x_n ; \\ x_1x_2x_3 + \ldots\ldots + x_1x_2x_n + \ldots\ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2x_3 \ldots\ldots\ldots x_n . \end{cases}$$

Wszystkie te funkcje (n) zmiennych mają tę wspólną własność, iż są „symetryczne" t. zn. nie zmieniają się, gdy dowolnie przestawimy (przetasujemy) między sobą pierwiastki. Ale zauważmy, że podobną własność ma funkcja:

$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots\ldots + x_n^4 \text{ lub } x_1^5 + x_2^5 + \ldots\ldots + x_n^5 .$$

Aby je od siebie odróżnić nazywamy funkcje (I) elementarnemi funkcjami symetrycznemi. Elementarnych funkcyj symetrycznych (n) pierwiastków jest (dokładnie) (n).

W poprzednim paragrafie otrzymaliśmy twierdzenie, które możemy tak wysłowić: każda elementarna funkcja symetryczna pierwiastków równania

jest równa odpowiednio współczynnikowi równania ze znakiem (+) lub (-). To twierdzenie daje się uogólnić do wszelkich (wymiernych) funkcyj symetrycznych, a mianowicie: każda wymierna funkcja symetryczna pierwiastków równania jest funkcją wymierną współczynników równania. Tem samem możemy ją obliczyć mimo, że pierwiastków równania nie znamy. Weźmy np. pod uwagę równanie:
$$x^3-7x+6=0$$
i oznaczmy jego pierwiastki przez x_1, x_2, x_3. Bez rozwiązywania równania możemy obliczyć:
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2$$
Jest to symetryczna funkcja pierwiastków. Widoczne, że:
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=$$
$$=0^2-2.(-7)=14. \quad \text{, gdyż}$$
$$x_1+x_2+x_3=0$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-7$$
Powyższe ogólne twierdzenie przyjmiemy bez dowodu.

§47. W równaniach pierwiastek może się powtarzać czyli może być wielokrotnym.

Załóżmy, że dla równania:

$$W_n(x) \equiv (x-x_1)(x-x_2).....(x-x_n)=0,$$

zachodzą równości:

$$x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_k$$

i zarazem nierówności:

$$x_1 \neq x_{k+1},\ x_1 \neq x_{k+2},...,x_1 \neq x_n$$

czyli jest dokładnie (k) pierwiastków jednakowych. Wtedy liczbę x_1, czy x_2, ... czy x_k nazywamy k-krotnym pierwiastkiem równania, a wielomian $W_n(x)$ można przedstawić w postaci

$$W_n(x) = (x-x_1)^k (x-x_{k+1})....(x-x_n).$$

albo $W_n(x) = (x-x_1)^k \mathcal{J}_{n-k}(x)$, gdzie $\mathcal{J}_{n-k}(x)$ jest widocznie wielomianem stopnia (n-k) $\not k$. Nadto widać też, że

$$\mathcal{J}_{n-k}(x_1) = (x_1-x_{k+1}).....(x_1-x_n) \neq 0.$$

Równanie może posiadać kilka różnych pierwiastków wielokrotnych. Powstaje zatem pytanie w jaki sposób można poznać czy dany pierwiastek równania jest wielokrotnym i jak wyznaczyć jego krotność. Innemi słowy chodzi o warunki konieczne i wystarczające na to, by liczba (γ) była (k) krotnym pierwiastkiem równania

$$W_n(x) = 0.$$

Znajdziemy najpierw warunek konieczny, o którym wykażemy, że jest również wystarczającym. Załóżmy więc, że równanie $W_n(x) = 0$ ma liczbę (γ), jako k-krotny pierwiastek; jest więc

$W_n(x) \equiv (x-\gamma)^k \mathcal{J}_{n-k}(x)$, przyczem wielomian $\mathcal{J}_{n-k}(x)$ jest stopnia $(n-k)$-go i ma tę własność, że jest:

$$\mathcal{J}_{n-k}(\gamma) \neq 0.$$

Obliczmy pierwszą pochodną:

$$W_n'(x) \equiv k(x-\gamma)^{k-1} \cdot \mathcal{J}_{n-k}(x) + (x-\gamma)^k \mathcal{J}_{n-k}'(x) =$$

$$= (x-\gamma)^{k-1}\left[k.\mathcal{J}_{n-k}(x) + \mathcal{J}_{n-k}'(x)(x-\gamma)\right].$$

Stąd widoczne, że

$$W_n'(\gamma) = 0 \qquad \text{gdy } k > 1.$$

Przeto <u>wielokrotny pierwiastek równania $W_n(x) = 0$ jest również pierwiastkiem równania $W_n'(x) = 0$.</u>

Aby móc to twierdzenie odwrócić, zauważmy, że:

$$W_n'(x) \equiv (x-\gamma)^{k-1} \cdot \Phi_{n-k}(x),$$

gdzie położyliśmy:

$$\phi_{n-k}(x) = k \cdot J_{n-k}(x) + (x-\gamma) J'_{n-k}(x).$$

Jest to wielomian stopnia $(n-k)$-go nadto:

$$\phi_{n-k}(\gamma) = k\, J_{n-k}(\gamma) \neq 0.$$

Jeżeli (γ) jest pojedynczym pierwiastkiem ($k=1$) równania $W_n(x)=0$, to $W'_n(x) = \phi_{n-1}(x)$ i $W'_n(\gamma) = \phi_{n-1}(\gamma) \neq 0$.

Teraz możemy odwrotnie wykazać twierdzenie: jeżeli (γ) jest pierwiastkiem równań $W_n(x)=0$, $W'_n(x)=0$, to (γ) jest wielokrotnym pierwiastkiem równania $W_n(x)=0$. Rzeczywiście (γ) pierwiastkiem pojedynczym równania $W_n(x)=0$ być nie może, bo w tym przypadku byłoby $W'_n(\gamma) \neq 0$, wbrew założenia.

Wobec tego warunek konieczny i wystarczający, by (γ) było pierwiastkiem wielokrotnym równania $W_n(x)=0$ polega na tem, by ono było też pierwiastkiem równania $W'_n(x)=0$.

Przykład: Zbadać, czy liczba 1 jest wielokrotnym pierwiastkiem równania.

a). $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

b) $x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 34x^2 + 23x - 6 = 0$

że liczba 1 jest pierwiastkiem stwierdzonym z łatwością.

W przypadku (a) przez różniczkowanie otrzymuje się równanie:

$$3x^2-12x+11=0,$$

które nie ma pierwiastka 1. W przypadku (b) przez różniczkowanie otrzymuje się równanie:

$$5x^4-32x^3+72x^2-68x+23=0,$$

które ma liczbę 1, jako pierwiastek. Liczba 1 jest więc pierwiastkiem pojedyńczym równania (a), wielokrotnym równania (b).

§ 48. Załóżmy, że przekonaliśmy się o tem, że liczba (γ) jest wielokrotnym pierwiastkiem równania

$$(1) \quad W_n(x) = 0$$

Jak wyznaczyć jego krotność?

W tym celu zauważmy, że według oznaczeń § 47 jest:

$$W_n(x) \equiv (x-\gamma)^k \cdot \mathcal{J}_{n-k}(x), \quad W_n'(x) = (x-\gamma)^{k-1} \phi_{n-k}(x)$$

nadto jest:

$$\mathcal{J}_{n-k}(\gamma) \neq 0, \quad \phi_{n-k}(\gamma) \neq 0, \quad k > 1.$$

Stąd widzimy, że równanie pomocnicze:

$$(2) \quad W_n'(x) = 0.$$

ma liczbę (γ), jako $(k-1)$ krotny pierwiastek. Tu jest $k-1>0$, więc $k-1 \geqslant 1$. Utwórzmy kolejno pochodne $W_n''(x)$, ... $W_n^{(k-1)}(x)$, $W_n^{(k)}(x)$.

Twierdzimy, że jest:

$$(3) \quad W_n^{(i)}(x) \equiv (x-\gamma)^{k-i} \cdot \phi_{n-k,i}(x);$$

$$\phi_{n-k,i}(\gamma) \neq 0.$$

dla $i = 1, 2, \ldots, k$., przyczem $\phi_{n-k,i}(x)$ oznaczają wielomiany stopnia $(n-k)$-go; wielomiany te zostały oznaczone podwójnym wskaźnikiem, by nie wprowadzać coraz to innych liter: $\phi, \psi, \ldots$, dla zmiennych (i).

Wykażemy to tw. metodą indukcji zupełnej:

A). Dla $i = 1$ jest związek (3) słuszny, jak to wiemy z § 47.

B). Przypuśćmy, że jest:

$$W_n^{(p)}(x) \equiv (x-\gamma)^{k-p} \cdot \phi_{n-k,p}(x); \quad \phi_{n-k,p}(\gamma) \neq 0,$$

gdy $1 \leqq p \leqq k-1$.

Stąd

$$W_n^{(p+1)}(x) \equiv \left(W_n^{(p)}(x)\right)' \equiv (k-p)(x-\gamma)^{k-p-1} \phi_{n-k,p}(x) +$$

$$+ (x-\gamma)^{k-p}\, \phi'_{n-k,p}(x) \equiv$$

$$\equiv (x-\gamma)^{k-p-1}\left[(k-p)\,\phi_{n-k,p}(x) + (x-\gamma)\,\phi'_{n-k,p}(x)\right].$$

Połóżmy

$$(k-p)\,\phi_{n-k,p}(x) + (x-\gamma)\,\phi'_{n-k,p}(x) = \psi(x),$$

to

$$W_n^{(p+1)}(x) = (x-\gamma)^{k-p-1} \cdot \psi(x).$$

Zauważmy, że $1 \leqslant p \leqslant k-1$, tedy

$$k-p \geqslant k-(k-1) = 1, \text{ więc } k-p \neq 0.$$

I jest

$$\psi(\gamma) = (k-p)\,\phi_{n-k,p}(\gamma) \neq 0.$$

Ponieważ pochodna $W_n^{(p+1)}(x)$ jest stopnia $(n-p-1)$, więc $\psi(x)$ jest wielomianem stopnia $(n-p-1)-(k-p-1) = n-k$.

Możemy więc przyjąć $\psi(x)$ za $\phi_{n-k,p+1}(x)$, przez co (3) będzie słuszne dla $i = p+1$. Wobec tego możemy uważać (3) za słuszne dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Stąd otrzymujemy, że:

$$W_n'(\gamma) = 0,\ W_n''(\gamma) = 0, \ldots\ W_n^{(k-1)}(\gamma) = 0, \text{ ale}$$

$$W_n^{(k)}(\gamma) \neq 0.$$

Udowodniliśmy więc twierdzenie: <u>jeżeli (γ) jest k-krotnym pierwiastkiem równania (1) $W_n(x) = 0$, to (γ) jest</u>

pierwiastkiem równań:

$$(4)\qquad W_n'(x)=0,\ W_n''(x)=0, \ldots\ldots,\ W_n^{(k-1)}(x)=0.$$

i zarazem **nie** jest pierwiastkiem równania:

$$(5)\qquad W_n^{(k)}(x) \neq 0.$$

To twierdzenie można odwrócić w ten sposób: jeżeli (γ) jest pierwiastkiem równania (1) i wszystkich równań (4) i nie jest pierwiastkiem równania (5) to jest k-krotnym pierwiastkiem równania (1).

Dowód, jako łatwy, pomijamy.

Stąd widzimy, że warunek konieczny i wystarczający, by (γ) było k-krotnym pierwiastkiem równania (1) polega na tem, by (γ) było również pierwiastkiem równań (4), a nie było pierwiastkiem równania (5).

Stąd widoczna reguła praktyczna na wyznaczanie krotności pierwiastków i wysłowienie jej zostawiamy czytelnikowi. Zastosujmy ją do równania b) przykład z § 47. Tworzymy kolejno równania:

(raz różniczkując)

$$5x^4-32x^3+72x^2+68x+23=0 \quad ..(c)$$

(drugi raz różnicz.)

$$20x^3-96x^2+144x-68=0 \quad ....(d)$$

(trzeci raz różn.)

$$60x^2-192x+144=0 \quad ....(e)$$

Liczba 1 nie tylko jest pierwiastkiem wspomnianego równania (b), ale jak widać także równań (c, d), <u>nie</u> jest zaś pierwiastkiem równania (e); tedy w rozważanym $k=3$, przeto liczba 1 jest trójkrotnym pierwiastkiem równania (b) z § 47.

§ 49. Dotąd zakładaliśmy, iż było nam wiadomem, że ta lub owa liczba jest pierwiastkiem równania i chodziło o to, by wyznaczyć jego krotność. Zajmiemy się zagadnieniem następującem: zbadać, czy dane równanie algebraiczne ma pierwiastki wielokrotne i określić równanie, któremu czynią zadość tylko wielokrotne pierwiastki danego równania.

Nim jednak tem zagadnieniem się zajmiemy, przypomnimy algorytm

 algorytm euklidesowy kolejnego dzielenia

euklidesowy (kolejnego dzielenia), służący do wyszukania największego wspólnego dzielnika wielomianów całkowitych. W tym celu przypomnijmy tę metodę dla wyszukania największego wspólnego dzielnika liczb (naturalnych), co wyjaśnimy na przykładzie liczebnym:

a). Mamy znaleźć największy wspólny podzielnik liczb: 624, 1430.

Większą dzielimy przez mniejszą, aż otrzymamy na resztę dzielenia liczbę mniejszą od dzielnika:

$$\frac{1430}{182} : 624 = 2.$$

Wtedy dzielnik dzielimy przez resztę, aż otrzymamy znów resztę mniejszą od (nowego) dzielnika:

$$\frac{624}{78} : 182 = 3.$$

Dzielimy znów dzielnik przez resztę:

$$\frac{182}{26} : 78 = 2.$$

Podobnie dalej:

$$\frac{78}{0} : 26 = 3$$

Gdy resztą jest 0, a do tego zawsze dojść musimy, to wiadomo, że największym wspólnym podzielnikiem danych liczb jest ostatni dzielnik (tutaj 26), [a więc reszta przedostatniego dzielenia].

Analogicznego algorytmu należy stosować w przypadku, gdy mamy znaleźć największy wspólny podzielnik dwu wielomianów całkowitych wymiernych jednej zmiennej (x).

Zauważmy jednak jeszcze, że odnośne rachunki można niekiedy uprościć mianowicie z następującego powodu: dwa wielomiany np:

x^2+4x+7, $2x^2+8x+14 = 2(x^2+4x+7)$,

różniące się stałym czynnikiem [tu 2], różnym od zera, uważać będziemy w tem zagadnieniu za jednakowe. O tem należy pamiętać. Wyjaśnimy to na przykładzie.

Gdy dane dwa wielomiany, których największy wspólny podzielnik mamy znaleźć, są jednakowego stopnia, to którykolwiek z nich dzielimy przez drugi; gdy są stopni różnych, to wielomian stopnia wyższego dzielimy przez wielomian stopnia niższego, aż otrzymamy na resztę wielomian stopnia niższego, niż dzielnik.

Dla przykładu wyszukajmy największy wspólny podzielnik wielomianów:

$$x^4+5x^3+9x^2+7x+2;$$

$$4x^3+15x^2+18x+7.$$

Gdybyśmy podzielili pierwszy z nich przez drugi, to najpierw otrzymalibyśmy $\frac{1}{4}x$. Możemy jednak uniknąć współczynników ułamkowych. W tym celu pomnożymy pierwszy wielomian przez 4, a więc przez stałą $\neq 0$; przez to szukanego dzielnika nie zmienimy. Wykonajmy dzielenie:

$$(4x^4+20x^3+36x^2+28x+8):(4x^3+15x^2+18x+7)=x$$

$$-4x^4 \pm 15x^3 \pm 18x^2 \pm 7x$$

$$5x^3+18x^2+21x+8.$$

Żeby uniknąć dalszych współczynników ułamkowych pomnóżmy resztę przez 4 i następnie dzielmy:

$$
\begin{array}{l}
(20x^3+72x^2+84x+32):(4x^3+15x^2+18x+7)=5 \\
\underline{-20x^3\pm75x^2\pm90x\pm35} \\
\quad -3x^2-6x-3=-3(x^2+2x+1)
\end{array}
$$

Reszta już jest stopnia drugiego t. j. niższego, niż dzielnik. Więc dzielimy dzielnik przez resztę, względnie przez resztę pomniejszoną (-3) razy, by uniknąć współczynników ułamkowych. A więc:

$$
\begin{array}{l}
(4x^3+15x^2+18x+7):(x^2+2x+1)=4x+7. \\
\underline{-4x^3\pm8x^2\pm4x} \\
\qquad 7x^2+14x+7 \\
\qquad \underline{-7x^2\pm14x\pm7} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Skoro resztą jest zero, to największym wspólnym podzielnikiem danych wielomianów jest wielomian x^2+2x+1 t. zn. dzielnik ostatniego dzielenia. Oba dane wielomiany są więc podzielne przez (x^2+2x+1). Uwaga patrz powyżej: nie są jednocześnie podzielne przez wielomian stopnia wyższego.

§50. Zajmijmy się zagadnieniem o którem wspomnieliśmy na wstępie §49. Mamy znaleźć warunek konieczny i wystarczający na to, by równanie algebraiczne miało wielokrotne pierwiastki.

Załóżmy, że równanie

(1) $W_n(x) = 0$.

ma k-krotny pierwiastek (γ). Przeto jest

$$W_n(x) = (x-\gamma)^k \cdot J_{n-k}(x);$$
$$J_{n-k}(\gamma) \neq 0.$$

Wiemy już, że jest:

$$W_n'(x) = (x-\gamma)^{k-1} \cdot \Phi_{n-k}(x); \quad \Phi_{n-k}(\gamma) \neq 0.$$

Stąd widzimy, że, jeżeli utworzymy największy wspólny podzielnik wielomianów (2) $W_n(x)$; $W_n'(x)$; to on będzie podzielny przez $(x-\gamma)^{k-1}$. I widocznie naodwrót: jeżeli największy wspólny podzielnik wielomianów (2) jest podzielny przez $(x-\gamma)^m$, gdzie (m) oznacza liczbę naturalną, to (γ) jest pierwiastkiem równania (1) i conajmniej $(m+1)$ krotnym.

Wobec tego dla rozwiązania zadania naszego wyszukamy największy wspólny podzielnik wielomianów (2); niech nim będzie wielomian $P_p(x)$ stopnia (p)-ego. Albo jest $p=0$ albo $p \geq 1$. Gdy $p=0$, to $P_p(x) \equiv P_0(x)$ jest stałą, (różną od zera) i mówimy, że wielomiany (2) „nie mają" największego wspólnego podzielnika. Tedy równanie (1) nie ma wielokrotnych pierwiastków.

Gdy zaś $p \geqslant 1$, to równanie (1) ma wielokrotne pierwiastki i wszystkie je otrzymamy, rozwiązując równanie pomocnicze:

$$(3) \quad P_p(x) = 0,$$

które samo jeszcze może mieć wielokrotne pierwiastki.

Rozważmy przykłady a) i b). z § 47.

Dla przykładu (a) jest:

$$W_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \quad W_3'(x) = 3x^2 - 12x + 11.$$

Dzielenie tu tak się przedstawia

$$
\begin{array}{l}
(\cancel{3x^3} - 18x^2 + 33x - 18) : (3x^2 - 12x + 11) = x - 2 \\
\underline{-\cancel{3x^3} \mp 12x^2 \pm 11x} \\
\quad -\cancel{6x^2} + 22x - 18 \\
\quad \underline{\mp \cancel{6}x^2 \pm 24x \mp 22} \\
\qquad -2x + 4 = -2(x-2).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(3\cancel{x^2} - 12x + 11) : (x - 2) = 3x - 6 \\
\underline{-\cancel{3x^2} \mp 6x} \\
\quad -6\cancel{x} + 11 \\
\quad \underline{\mp \cancel{6}x \pm 12} \\
\qquad -1
\end{array}
$$

Największy wspólny podzielnik jest liczba (-1), więc $p = 0$. Dane równanie ma same pierwiastki pojedyncze.

W przykładzie 2) jest:

$$W_5(x) = x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 34x^2 + 23x - 6,$$
$$W'_5(x) = 5x^4 - 32x^3 + 72x^2 - 68x + 23.$$

Dzielenie kolejne tu się tak przedstawia:

$$(\cancel{5x^5} - 40x^4 + 120x^3 - 170x^2 + 115x - 30) : (5x^4 - 32x^3 + 72x^2 - 68x + 23) = x - 8$$
$$\underline{\mp \cancel{5x^5} \mp 32x^4 \pm 72x^3 \mp 68x^2 \pm 23x}$$
$$(-8x^4 + 48x^3 - 102x^2 + 92x - 30)\,5$$
$$-\cancel{40x^4} + 240x^3 - 510x^2 + 460x - 150$$
$$\underline{\mp \cancel{40x^4} \pm 256x^3 \mp 576x^2 \pm 544x \mp 184}$$
$$-16x^3 + 66x^2 - 84x + 34 = -2(8x^3 - 33x^2 + 42x - 17)$$

$$8(5x^4 - 32x^3 + 72x^2 - 68x + 23) : (8x^3 - 33x^2 + 42x - 17)$$

$$(\cancel{40x^4} - 256x^3 + 576x^2 - 544x + 184) : (8x^3 - 33x^2 + 42x - 17) = 5x - 91$$
$$\underline{\mp \cancel{40x^4} \mp 165x^3 \pm 210x^2 \mp 85x}$$
$$(-91x^3 + 366x^2 - 459x + 184)\,8$$
$$(-\cancel{728x^3} + 2928x^3 - 3672x + 1472)$$
$$\underline{\mp \cancel{728x^3} \pm 3003x^2 \mp 3822x \pm 1547}$$
$$-75x^2 + 150x - 75 = -75(x^2 - 2x + 1)$$

$$(8\cancel{x^3} - 33x^2 + 42x - 17) : (x^2 - 2x + 1) = 8x - 17$$
$$\underline{-\cancel{8x^3} \mp 16x^2 \pm 8x}$$
$$-17x^2 + 34x - 17$$
$$\underline{\mp \cancel{17x^2} \pm 34x \mp 17}$$
$$0$$

Największym wspólnym podzielnikiem jest trójmian stopnia 2-go: $x^2 - 2x + 1$; tedy wszystkie wielokrotne pierwiastki równania (6) otrzymamy rozwiązując równanie:

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$

które samo ma pierwiastek (podwójny) 1. Równanie (b) ma więc tylko pierwiastek 1 wielokrotny i jak widzimy, potrójny. Pozostałe dwa pierwiastki równania (b) są pojedyncze i można je łatwo otrzymać, przyrównując do zera iloraz dzielenia wielomianu $W_5(x)$ przez $(x-1)^3$.

Uwaga. Inne rozwiązanie, podanego zagadnienia, oparte o teorję funkcyj symetrycznych, z powodu szczupłości czasu pomijamy.

§ 51. Wreszcie zajmiemy się jeszcze równaniami o współczynnikach rzeczywistych, które mają pierwiastki zespolone.

Dla przykładu weźmy równanie stopnia 2go:

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

które rozważaliśmy w § 23. Współczynniki równania tego:

$$1, 1, 1$$

są liczbami rzeczywistemi. Pierwiastki tego równania $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$, są więc liczbami sprzężonemi. Podobnie widzieliśmy, że równanie stopnia 3go [rozdz. IV] o współczynnikach rzeczywistych, gdy nadto $H>0$ (zob. § 29), miało jeden pierwiastek rzeczywisty, a dwa zespolone, ze sobą sprzężone.

Powstaje więc pytanie następujące: gdy równanie ma współczynniki rzeczywiste i ma pierwiastek zespolony, czy musi mieć także pierwiastek zespolony z nim sprzężony? Odpowiedź na to pytanie dają nam następujące dwa twierdzenia:

A). Jeżeli równanie $W_n(x)=0$, czyli równanie:

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

ma współczynniki $a_1, a_2, \ldots a_n$ wszystkie rzeczywiste i jeżeli posiada pierwiastek zespolony $\alpha+\beta i$ (a więc $\beta\neq0$), to posiada także pierwiastek z nim sprzężony $\alpha-\beta i$.

B). Jeżeli równanie $W_n(x)=0$ ma wszystkie współczynniki rzeczywiste i jeżeli ma k-krotny pierwiastek zespolony $\alpha+i\beta$ (a więc $\beta\neq0$), to posiada również k-krotny pierwiastek $(\alpha-i\beta)$.

Dowód twierdzenia A). Skoro $\alpha+\beta i$ jest

jest pierwiastkiem równania $W_n(x)=0$, to wielomian $W_n(x)$ jest podzielny przez czynnik pierwiastkowy $(x-\alpha-\beta i)$, przyczem otrzymany iloraz, który jest wielomianem stopnia $(n-1)^{go}$, ale o współczynnikach zespolonych:

$$W_n(x):(x-\alpha-\beta i)=\mathcal{J}_{n-1}(x)$$

Korzystając z własności ilorazu $\mathcal{J}_{n-1}(x)$ napiszemy: $W_n(x)\equiv(x-\alpha-\beta i)\mathcal{J}_{n-1}(x)$

Ponieważ wielomian $\mathcal{J}_{n-1}(x)$ ma współczynniki zespolone, więc możemy przedstawić go pod postacią:

$$\mathcal{J}_{n-1}(x)=\mathcal{J}^{(1)}_{n-1}(x)+i\mathcal{J}^{(2)}_{n-1}(x)$$

przyczem oba wielomiany $\mathcal{J}^{(1)}_{n-1}(x)$, $\mathcal{J}^{(2)}_{n-1}(x)$ mają już rzeczywiste współczynniki, oba są conajwyżej stopnia $(n-1)^{go}$, a conajmniej jeden z nich jest (dokładnie) stopnia $(n-1)^{go}$.

Wyjaśnimy tę rzecz na następującym przykładzie.

Równanie
$$(x^2+x+1)(x+1)=0$$
czyli
$$x^3+2x^2+2x+1=0$$
ma współczynniki rzeczywiste i widocznie pierwiastek $-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$. Dzielenie

$$(x^3+2x^2+2x+1):\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

daje nam iloraz:

$$J_2(x)=x^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2},$$

a więc iloraz ma współczynniki:

$$1,\quad \frac{3}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2},\quad \frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

zespolone i możemy go przedstawić pod postacią:

$$J_2(x)=\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)-i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

i jest:

$$J_2^{(1)}(x)=x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2},\quad J_2^{(2)}(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x+1)\cdot i$$

są to już wielomiany o współczynnikach rzeczywistych. Wracając do rozważań ogólnych mamy:

$$W_n(x):(x-\alpha-\beta i)=J_{n-1}^{(1)}(x)+i\,J_{n-1}^{(2)}(x).$$

Ponieważ dzielna równa się dzielnikowi pomnożonemu przez iloraz, otrzymamy:

$$W_n(x)=\left[(x-\alpha)-\beta i\right]\cdot\left[J_{n-1}^{(1)}(x)+i\,J_{n-1}^{(2)}(x)\right]=$$

$$\text{I}).\qquad =(x-\alpha)J_{n-1}^{(1)}(x)-\beta i\,J_{n-1}^{(1)}(x)+(x-\alpha)i\,J_{n-1}^{(2)}(x)+$$

$$+\beta J_{n-1}^{(2)}(x)=$$

$$=(x-\alpha)J_{n-1}^{(1)}(x)+\beta J_{n-1}^{(2)}(x)+i\left[(x-\alpha)J_{n-1}^{(2)}(x)-\beta J_{n-1}^{(1)}(x)\right].$$

Prawa strona ostatniej równości jest sumą dwu wielomianów; pierwszy składnik ma współczynniki rzeczywiste, a drugi ma współczynniki (czysto) urojone, kiedy po lewej stronie wielomian $W_n(x)$ ma tylko współczynniki rzeczywiste; aby więc zachodziła równość, to być musi drugi składnik zerem:

$$(x-\alpha).\,\mathcal{Y}^{(2)}_{n-1}(x) - \beta.\,\mathcal{Y}^{(1)}_{n-1}(x) = 0.$$

Według założenia jest $\beta \neq 0$, więc z ostatniej równości wynika, że:

$$\mathcal{Y}^{(1)}_{n-1}(x) = \frac{(x-\alpha)\,\mathcal{Y}^{(2)}_{n-1}(x)}{\beta}.$$

Iloraz $\frac{\mathcal{Y}^{(2)}_{n-1}(x)}{\beta}$ jest nadal wielomianem conajwyżej stopnia $(n-1)^{go}$ o współczynnikach rzeczywistych, oznaczmy go przez $\mathcal{K}(x)$.

Jest więc:

$$\frac{\mathcal{Y}^{(2)}_{n-1}(x)}{\beta} = \mathcal{K}(x),$$

stąd $\mathcal{Y}^{(2)}_{n-1}(x) = \beta.\,\mathcal{K}(x)$

i przeto jest:

$$\mathcal{Y}^{(1)}_{n-1}(x) = (x-\alpha).\,\mathcal{K}(x).$$

Znalezione wartości wstawmy do równania (I). Jest tedy

$$W_n(x) = (x-\alpha-\beta i)\big[(x-\alpha)\mathcal{K}(x) + i\beta.\,\mathcal{K}(x)\big]$$

czyli

$$W_n(x) = [x-\alpha-\beta i]\cdot[x-\alpha+\beta i]\cdot K(x).$$

Stąd widać, że $K(x)$ jest wielomianem stopnia $(n-2)^{go}$, będziemy go więc oznaczali znakiem $K_{n-2}(x)$ i przeto jest:

$$W_n(x) = [x-\alpha-\beta i]\cdot[x-\alpha+\beta i]\cdot K_{n-2}(x) \quad \dots \boxed{II}$$

Z tego rozkładu widzimy, że równanie $W_n(x)=0$ ma także pierwiastek $(\alpha-i\beta)$.
Rzeczywiście jest po podstawieniu $\alpha-\beta i$ za (x) w $(\boxed{II})$:

$$W_n(\alpha-\beta i) = [\alpha-\beta i-\alpha-\beta i]\cdot\underbrace{[\alpha-\beta i-\alpha+\beta i]}_{=0} K_{n-2}(\alpha-\beta i)=0.$$

Temsamem udowodniliśmy tw. A
Dowód tw. B mieści się w dowodzie tw. A i opierać się będzie na tw. A.

W tym celu załóżmy, że $\alpha+\beta i$ jest k-krotnym pierwiastkiem równania $W_n(x)=0$, którego wszystkie współczynniki są liczbami rzeczywistemi i że jest $k>1$, aby tw. B wyrażało coś nowego wobec tw. A.

Z rozkładu $\boxed{II}$ wynika, że, ponieważ $(x-\alpha+\beta i)$ nie jest podzielne przez $(x-\alpha-\beta i)$, więc równanie o współczynnikach rzeczywistych:

$$K_{n-2}(x) = 0$$

musi mieć jako pierwiastek (k-1)-krotny liczbę $(\alpha+\beta i)$.

Stosując więc do tego równania tw. A, widzimy, że ono musi mieć także pierwiastek $(\alpha-\beta i)$ i że dla niego można napisać analogicznie do $\underline{II}$:

$$K_{n-2}(x) = (x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)K_{n-4}(x).$$

Itd. Rozumowanie to można tyle razy powtórzyć, ile wynosi krotność pierwiastka $(\alpha+\beta i)$, za każdym razem otrzymamy jeszcze pierwiastek $\alpha-i\beta$. Tem samem tw. B udowodnione.

§ 52. Jest więc

$$W_n(x) = (x-\alpha-i\beta)^k \cdot (x-\alpha+i\beta)^k \cdot \phi_{n-2k}(x)$$

przyczem $\phi_{n-2k}(x)$ jest wielomianem stopnia $(n-2k)$ o współczynnikach rzeczywistych.

Ponieważ

$$(x-\alpha-i\beta)^k \cdot (x-\alpha+i\beta)^k = \left[(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)\right]^k =$$
$$= \left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k,$$

więc

$$W_n(x) = \left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k \cdot \phi_{n-2k}(x).$$

jest to rozkład wielomianu o współ-

czynnikach rzeczywistych na czynniki o współczynnikach też rzeczywistych.
Jeżeli więc równanie

$$W_n(x) = 0$$

ma współczynniki rzeczywiste i pierwiastki:

a) rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m$

b) zespolone i sprzężone ze sobą

$$\alpha_\lambda + i\beta_\lambda, \quad \alpha_\lambda - i\beta_\lambda,$$

$$\lambda = 1, 2, 3, \ldots\ldots, p$$

to musi być według (§ 40) tw. o ilości pierwiastków:

$$m + 2p = n,$$

nadto

$$W_n(x) \equiv (x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_m)\cdot$$
$$\cdot\left[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\right]\left[(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2\right]\ldots\left[(x-\alpha_p)^2+\beta_p^2\right].$$

Jest to rozkład wielomianu na czynniki stopnia 1^{go} i 2^{go} o współczynnikach rzeczywistych. Niektóre pierwiastki mogą się powtarzać, czynników odpowiadających pierwiastkom (a) lub (b) może brakować. Czynników stopnia 2^{go} tu podanych nie można już rozłożyć na czynniki stopnia 1^{go} o współczynnikach rzeczywistych. Na tem to twierdzeniu, jak wiadomo, opiera się rozkład funkcji wymiernej na ułamki częściowe.

Spis rzeczy.

Część I. Arytmetyka liczb zespolonych.

Rozdział I. Wstępne wiadomości.

Rozdział II. Liczby zespolone.

Strona.

Strona.

Dostrzeżone omyłki.

Drobnych omyłek poniżej nie prostujemy (np. braki interpunkcyj).

Str. 5. w. 2 z dołu zamiast zbiorze ma być zbiorach

Str. 9. w. 8 z góry. Po symbolu $a+bi$. należy dodać: Na razie znak + nie oznacza dodawania ani (bi) nie oznacza mnożenia liczby (b) przez (i). Dopiero w § 11 czytelnik pozna, że znak +, który w § 6 mógłby zastąpić np. przecinkiem, jest celowo użytym. Podobnie w § 15 nauczy się czytelnik, że (bi) jest iloczynem.

Str. 9 w. 4, 3, 2, 1 z dołu i str. 10 w. 1 i 2 z góry. Tekst należy w ten sposób sprostować: liczby zespolone są liczbami dwujednostkowemi, jedną jednostką jest liczba 1 (= 1+0.i), drugą jest liczba (i), którą zowiemy dodatnią jednostką urojoną.

Str. 12 w. 9 i 8 z dołu zamiast urojonej ma być zespolonej.

Str. 20 w. 11 z góry. Po znaku $(a'+b'i)$ dodać słowo liczbę.

Str. 21 w. 13 z góry. Zamiast pormanencją ma być permanencją

Str. 26 w. 5 z góry. Zamiast osi ma być półosi

Str. 26 w. 10 z dołu. Zamiast $(0, -i)$ ma być $(0, -1)$.

Str. 31 w. 13 z dołu. Po słowie współczynnik dodać części

Str. 32 w. 7, 8 i 9 z góry opuścić, a w. 6 z góry po słowie wtedy ma być równania (3) dają: $x.0 - y.0 = a$, $0.y + 0.x = b$. Gdy więc $a \neq 0$ lub $b \neq 0$, to stąd liczb (x, y) znaleźć nie możemy i iloraz szukany nie istnieje. Gdy zaś $a = 0$ i zarazem $b = 0$, to stąd wtedy, ... (zob. dalej w. 10 z góry).

Str. 34 w. 3 z góry. W dzielnej ostatniego ilorazu zamiast $-bci$ ma być $+bci$

Str. 37 w. 3 z dołu. Po znaku $=$ dodać $0,$

Str. 39 w. 1 z góry. Zamiast b^4 ma być b^2

Str. 42 w. 10 z dołu. Zamiast $\sqrt{\Delta}$ ma być $\sqrt{-\Delta}$

Str. 48. w. 12 z dołu. Po x ma być $= u\sqrt{c}$,

Str. 49 w. 3 z góry. Zamiast $u_3 = w$ ma być $u_3 = w^2$.

Str. 49 w. 11 z dołu Zamiast równanie ma być równania

Str. 52. w. 4 z góry. Zamiast $\psi \mp$ ma być $\psi +$

Na str. 53 zamiast x_1 ma być x_0, zamiast x_2 ma być x_1 i zamiast x_3 ma być x_2

Str. 56 w. 4 z góry. Zamiast związe ma być związany

Str. 62 w. 1 z dołu. Zamiast (8) ma być (18)

22.XI

Str. 63 w. 3 z góry. W ostatnim nawiasie ma być znak $-$ zamiast znaku $+$

Na str. 70 wzory na u_5, u_6 powstają ze wzorów str. 69 na u_2 u_3 w ten sposób, że zamiast φ kładziemy $(-\varphi)$, a więc z (u_2) otrzymamy:

$$\sigma\left[\cos\left(-\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right)+i\sin\left(-\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right)\right]=$$

$=\sigma\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}-120^\circ\right)-i\sin\left(\frac{\varphi}{3}-120^\circ\right)\right]$, ale można dodać period 360°, więc:

$$\sigma\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}-120^\circ+360^\circ\right)-i\sin\left(\frac{\varphi}{3}-120^\circ+360^\circ\right)\right]=$$

$$=\sigma\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right)-i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right)\right]=u_6.$$

Podobnie z (u_3) otrzymuje się:

$$\sigma\left[\cos\left(-\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right)+i\sin\left(-\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right)\right]=$$

$$=\sigma\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}-240^\circ\right)-i\sin\left(\frac{\varphi}{3}-240^\circ\right)\right]=$$

$$=\sigma\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}-240^\circ+360^\circ\right)-i\sin\left(\frac{\varphi}{3}-240^\circ+360^\circ\right)\right]=$$

$$=\sigma\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right)-i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right)\right]=u_5.$$

Str. 73. w. 12 z góry. Zamiast rozwiązania ma być rozwiązaniami

Str. 73. w. 2 z dołu. Zamiast V ma być $\overline{V}$

Str. 74 w. 9 z góry. Zamiast $\overline{u}_1+v_1$ ma być $\overline{u_1+v_1}$

Str. 75 w. 1 z dołu. Zamiast $-\frac{\alpha}{3}p=$ ma być $-\frac{\alpha}{3}p-\frac{\alpha^3}{27}=$

Str. 79 w. 14 z dołu. Zamiast y^3 ma być x^3

Str. 79 w. 12 z dołu. Zamiast $4h-\alpha$ ma być $4h+\alpha$

Str. 86 w. 5 z dołu. Zamiast $Q=(-u_0)v_0(-w_0)$
ma być $Q=-8(-u_0)v_0(-w_0)$

Str. 107 w. 7 z góry. Zamiast równanie ma być równania

Str. 112 w. 11 z góry. Po słowie rozważanym dodać przypadku

Str. 116. w. 6 z dołu. Dodać: i nie są równocześnie podzielne przez żaden wielomian stopnia wyższego, niż 2 gi.

25.1

14.II 55