

Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica
w Krakowie

Praca doktorska

**Niezmiennicze podprzestrzenie
typu Lorentza liniowych
operatorów w przestrzeniach
Banacha**

Renata Tłuczek-Pięciak

Praca napisana pod kierunkiem:
prof. dr hab. Ołeha Łopuszańskiego

Wydział Matematyki Stosowanej

Kraków 2006

Składam bardzo serdeczne podziękowania prof. dr hab. Ołehowi Łopuszańskiemu za cenne wskazówki i uwagi, które przyczyniły się do powstania i nadały kształt ostateczny niniejszej pracy.

Spis treści

Streszczenie	2
Rozdział 1. Wiadomości wstępne	4
1.1. Wektory gładkie i typu wykładniczego nieograniczonych liniowych operatorów	4
1.2. Przestrzenie interpolacyjne	7
Rozdział 2. Niezmiennicze podprzestrzenie typu Lorentza nieograniczonych operatorów	13
2.1. Niezmiennicze podprzestrzenie typu Lorentza	13
2.2. Związek z niezmienniczymi podprzestrzeniami typu wykładniczego	16
2.3. Interpolacyjne własności niezmienniczych podprzestrzeni typu Lorentza	20
2.4. Warunek nietrywialności klasy niezmienniczych podprzestrzeni typu Lorentza	21
Rozdział 3. Aproksymacja niezmienniczymi podprzestrzeniami typu Lorentza	23
3.1. Funkcjonał najlepszej aproksymacji	23
3.2. Oszacowania funkcjonału najlepszej aproksymacji	25
Rozdział 4. Inne klasy niezmienniczych podprzestrzeni nieograniczonych operatorów	28
4.1. Interpolacyjne własności wektorów gładkich	28
4.2. Przestrzenie typu Lorentza dla iteracji operatora	31
Rozdział 5. Przykłady niezmienniczych podprzestrzeni typu Lorentza	35
5.1. Niezmiennicze podprzestrzenie typu Lorentza operatora różniczkowania	35
5.2. Niezmiennicze podprzestrzenie typu Lorentza nieregularnych eliptycznych operatorów	37
Bibliografia	43

Streszczenie

Niniejsza praca poświęcona jest badaniu nowej klasy niezmienniczych podprzestrzeni

$$l_{q,p}^\nu(A), \quad 0 < \nu < \infty, \quad 1 \leq p, q \leq \infty,$$

w dziedzinie dowolnego domkniętego liniowego nieograniczonego operatora A , gęsto określonego w zespolonej przestrzeni Banacha \mathfrak{X} , nazwanych podprzestrzeniami typu Lorentza. W przypadku $q = p = \infty$ podprzestrzenie $l_\infty^\nu(A) = l_{\infty,\infty}^\nu(A)$ były zbadane przez Ya. Radyno w pracy [12]. W przypadku $q = p = 1$ podprzestrzenie $l_1^\nu(A) = l_{1,1}^\nu(A)$ zostały zbadane w pracach [7] i [8]. Związek pomiędzy tymi podprzestrzeniami opisany został w twierdzeniu 2.2.1 z rozdziału 2 w postaci izomorfizmu przestrzeni Banacha

$$\left(l_1^\nu(A), l_\infty^\nu(A) \right)_{1-\frac{1}{q}, p} = l_{q,p}^\nu(A),$$

gdzie po lewej stronie znajduje się przestrzeń Banacha zbudowana za pomocą metody Peetre-Lions'a tzn. metody rzeczywistej interpolacji pary przestrzeni Banacha $l_1^\nu(A)$ i $l_\infty^\nu(A)$. Zostały też zbadane własności rodziny podprzestrzeni $l_{q,p}^\nu(A)$: w twierdzeniu 2.1.1 udowodniono, że każda z nich jest niezmienniczą względem operatora A , przy czym odpowiednie zawężenie $A|_{l_{q,p}^\nu(A)}$ okazuje się operatorem ograniczonym (względem mocniejszej normy podprzestrzeni $l_{q,p}^\nu(A)$) z normą

$$\|A|_{l_{q,p}^\nu(A)}\| \leq \nu$$

i takim że ich spektra spełniają warunek

$$\sigma\left(A|_{l_{q,p}^\nu(A)}\right) \subset \sigma(A).$$

W twierdzeniu 2.4.1 udowodniono, że jeśli $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, to tzw. warunek Levinsona dla rezolwenty operatora A ze znanej pracy Ju. I. Ljubiča i V.I. Macaeva [6]

$$\int_0^\varepsilon \ln \ln M(r) dr < \infty, \quad M(r) = \sup_{|\operatorname{Im} \lambda| \geq r} \|(\lambda - A)^{-1}\|, \quad \varepsilon > 0$$

jest warunkiem wystarczającym dla gęstości mnogościowej sumy

$$l_{q,p}(A) = \bigcup_{\nu>0} l_{q,p}^{\nu}(A)$$

w przestrzeni Banacha \mathfrak{X} . Twierdzenie 2.4.1 rozszerza na przypadek podprzestrzeni $l_{q,p}^{\nu}(A)$ fakty analogiczne do udowodnionych wcześniej w pracy [1] dla podprzestrzeni $l_1^{\nu}(A)$ a w pracy [9] dla podprzestrzeni $l_{\infty}^{\nu}(A)$. W twierdzeniu 2.3.1 wykazano interpolacyjne równości rodziny podprzestrzeni $l_{q,p}^{\nu}(A)$, wynikające ze znanych własności klasycznych przestrzeni Lorentza.

W rozdziale 3 pracy został zbadany funkcjonał najlepszej aproksymacji

$$E_{q,p}^*(\nu, x) = \inf_{x_0 \in l_{q,p}^{\nu}(A)} \|x - x_0\|, \quad x \in \mathfrak{X}$$

”mierzący” najkrótszą odległość pomiędzy danym elementem $x \in \mathfrak{X}$ i podprzestrzenią $l_{q,p}^{\nu}(A)$. W tym celu pomiędzy przestrzenią $l_{q,p}(A)$ i przestrzenią Banacha \mathfrak{X} rozważa się pewną klasę quasi-unormowanych aproksymacyjnych podprzestrzeni

$$E_{\alpha}(l_{q,p}(A), \mathfrak{X}).$$

Główny wynik jest tutaj sformułowany w twierdzeniu 3.2.1 w postaci dwóch nierówności

$$\begin{aligned} |x|_{E_{\alpha}} &\leq c_1 |x|_{l_{q,p}}^{\alpha} \|x\|, & x \in l_{q,p}(A), & \quad c_1 > 0, \\ E_{q,p}^*(t, x) &\leq c_2 t^{-\alpha} |x|_{E_{\alpha}}, & x \in E_{\alpha}(l_{q,p}(A), \mathfrak{X}), & \quad c_2 > 0, \end{aligned}$$

gdzie przez $|x|_{E_{\alpha}}$ oznaczona została quasi-norma w $E_{\alpha}(l_{q,p}(A), \mathfrak{X})$ a przez $|x|_{l_{q,p}}$ pewna quasi-norma w $l_{q,p}(A)$. Twierdzenie 3.2.1 uogólnia odpowiednie wyniki z pracy [13], wykazane dla operatorów z dyskretnym spektrum.

W rozdziale 4 zbadano niezmiennicze podprzestrzenie typu Lorentza iteracji A^n nieograniczonego operatora A . Udowodnione tam twierdzenie 4.2.1 jest uogólnieniem twierdzenia 2.1.1 z rozdziału 2.

W ostatnim rozdziale znajdują się przykłady zastosowań teorii rozwijanej we wcześniejszej części pracy. Zostały obliczone niezmiennicze podprzestrzenie typu Lorentza dla operatora różniczkowania $A = \frac{d}{dt}$ w interpolacyjnych przestrzeniach Besowa $B_{\rho,g}^{\theta}(\mathbb{R})$ a także dla nieregularnych eliptycznych operatorów w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ określonych, w szczególności, poprzez wzór

$$Au = \rho^{\zeta}(t)(-\Delta)^m + \rho^{\eta}(t)u, \quad \eta \geq \zeta + 2m,$$

gdzie funkcja

$$\rho^{-1}(t) = d(t)$$

jest odległością punktu $t \in \Omega$ od brzegu otwartego obszaru Ω .

Słowa kluczowe

operator nieograniczony, wektor typu wykładniczego, niezmiennicza podprzestrzeń operatora, podprzestrzenie spektralne, interpolacyjne przestrzenie Lorentz’a, przestrzenie aproksymacyjne

Wiadomości wstępne

W pracy skorzystano głównie z definicji zaczerpniętych ze znanych książek [2] i [15] z teorii interpolacji przestrzeni Banacha oraz [3] i [14] z analizy funkcjonalnej i teorii liniowych operatorów. W pierwszym rozdziale przedstawiono też najważniejsze fakty wykorzystywane w tej pracy a znajdujące się jedynie w czasopiśmie.

Należy tu odnotować, że wszystkie przestrzenie wektorowe rozważane w pracy są zadane nad ciałem liczb zespolonych \mathbb{C} .

1.1. Wektory gładkie i typu wykładniczego nieograniczonych liniowych operatorów

Niech w przestrzeni Banacha \mathfrak{X} z normą $\|\cdot\|$ będzie dany dowolny liniowy nieograniczony operator

$$A: \mathfrak{X} \supset \mathfrak{X}^1 \longrightarrow \mathfrak{X}$$

o gęstej dziedzinie \mathfrak{X}^1 . Spektrum operatora A oznaczamy dalej przez $\sigma(A)$, niech $(\lambda - A)^{-1}$ będzie rezolwentą operatora A , która z definicji jest określona na zbiorze $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$. Poprzez

$$\mathfrak{X}^n = \{x \in \mathfrak{X}^{n-1} : A^{n-1}x \in \mathfrak{X}^{n-1}\}, \quad n = 2, 3, \dots$$

oznaczymy dziedzinę n -tej iteracji A^n operatora A na której z definicji określamy normę

$$\|x\|_{\mathfrak{X}^n} = \|x\| + \|Ax\| + \dots + \|A^n x\|, \quad x \in \mathfrak{X}^n.$$

Dalej $A^0 = I$ jest tożsamościowym operatorem w \mathfrak{X} . Zbiór

$$\mathfrak{X}^\infty = \bigcap \{\mathfrak{X}^n : n \in \mathbb{N}\},$$

na którym jest określona topologia poprzez ciąg norm

$$\{\|x\|_{\mathfrak{X}^n} : n \in \mathbb{N}\}, \quad x \in \mathfrak{X}^\infty$$

nazywa się podprzestrzenią wektorów gładkich operatora A . Czyli, \mathfrak{X}^∞ jest lokalnie wypukłą (F) -przestrzenią. Oczywiście, że jeżeli operator A jest ograniczony to $\mathfrak{X}^\infty = \mathfrak{X}$. Jeżeli operator A jest nieograniczony to podprzestrzeń \mathfrak{X}^∞ może okazać się trywialna. Poniższe twierdzenie rozstrzyga problem nietrywialności podprzestrzeni \mathfrak{X}^∞ w sytuacji ogólnej.

Twierdzenie 1.1.1. [4, twierdzenie 1.1] *Jeżeli operator A w przestrzeni Banacha \mathfrak{X} spełnia warunek $\rho(A) \neq \emptyset$, to podprzestrzeń \mathfrak{X}^∞ jest gęstą w \mathfrak{X} względem normy.*

Jak wynika z tego twierdzenia oraz na mocy [3, twierdzenie VII.9.7] warunek $\rho(A) \neq \emptyset$ jest też wystarczający na to aby operator A był domknięty.

Przytoczmy najczęściej używane przykłady przestrzeni wektorów gładkich:

(a) jeżeli $\mathfrak{X} = C_0(\mathbb{R})$ jest przestrzenią Banacha ciągłych funkcji f na \mathbb{R} zerujących się w nieskończoności z normą $\|f\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ i

$$A = \frac{d}{dt}$$

jest operatorem różniczkowania, to $\mathfrak{X}^\infty = C_0^\infty(\mathbb{R})$ jest podprzestrzenią w $C_0(\mathbb{R})$ funkcji nieskończenie wiele razy ciągle różniczkowalnych;

(b) jeżeli $\mathfrak{X} = L_2(\mathbb{R})$ jest przestrzenią Hilberta funkcji $f: \mathbb{R} \ni t \mapsto f(t)$ z normą $\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$ i operator A jest domknięciem operatora postaci

$$-\frac{d^2 f}{dt^2} + t^2 f$$

określonego na podprzestrzeni $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R})$, to \mathfrak{X}^∞ jest klasyczna (F) -przestrzenią Schwartza $S(\mathbb{R})$ funkcji szybko malejących.

Podprzestrzeń wektorów typu wykładniczego $\nu > 0$ operatora A

$$l_\infty^\nu(A) = \{x \in \mathfrak{X}^\infty : \|x\|_{l_\infty^\nu} < \infty\},$$

w której normę określono przez wzór

$$\|x\|_{l_\infty^\nu} = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|A^n x\|}{\nu^n},$$

była zdefiniowana i zbadana przez Ya.Radyno w pracy [12]. Tam wśród innych przykładów przytoczono też następujący przykład podprzestrzeni wektorów typu wykładniczego: jeżeli $\mathfrak{X} = C_b(\mathbb{R})$ jest przestrzenią Banacha ciągłych i ograniczonych funkcji f na \mathbb{R} z normą $\|f\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ i $A = d/dt$ jest operatorem różniczkowania, to podprzestrzeń postaci

$$l_\infty(A) := \bigcup_{\nu > 0} l_\infty^\nu(A)$$

jest podprzestrzenią w $C_b(\mathbb{R})$ funkcji posiadających jednoznaczne analityczne rozszerzenie z osi rzeczywistej \mathbb{R} na płaszczyznę zespoloną \mathbb{C} do pewnej całkowitej funkcji typu wykłaniczego.

W pracy [12] wykazano też prawdziwość poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 1.1.2. *Jeśli operator A jest generatorem jednostajnie ograniczonej i silnie ciągłej jednoparametrowej grupy w przestrzeni \mathfrak{X} , to podprzestrzeń $l_\infty(A)$ jest gęstą podprzestrzenią w \mathfrak{X} względem normy.*

W pracach [7] i [8] została zbadana nieco inna podprzestrzeń wektorów typu wykładniczego $\nu > 0$ operatora A

$$l_1^\nu(A) = \left\{ x \in \mathfrak{X}^\infty : \|x\|_{l_1^\nu} < \infty \right\},$$

z normą w postaci sumy

$$\|x\|_{l_1^\nu} = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|A^n x\|}{\nu^n}.$$

Podprzestrzenie $l_1^\nu(A)$ i $l_\infty^\nu(A)$ są związane z sobą w taki sposób, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ prawdziwe są zanużenia

$$l_1^\nu(A) \subset l_\infty^\nu(A) \subset l_1^{\nu+\varepsilon}(A).$$

W [7] został wykazany niżej opisany fakt.

Twierdzenie 1.1.3. *Jeżeli operator A w przestrzeni \mathfrak{X} posiada dyskretne spektrum*

$$\sigma(A) = \left\{ \lambda_j \in \mathbb{C} : j \in \mathbb{N} \right\},$$

to zachodzą równości

$$l_1^\nu(A) = \bigoplus_{|\lambda_j| < \nu} \mathfrak{S}(\lambda_j) \quad i \quad l_1(A) = \mathfrak{S}(A),$$

gdzie

$$l_1(A) := \bigcup_{\nu > 0} l_1^\nu(A)$$

a $\mathfrak{S}(\lambda_j)$ jest spektralną podprzestrzenią operatora A odpowiadającą wartości własnej λ_j , a $\mathfrak{S}(A)$ jest to powłoka liniowa wszystkich spektralnych podprzestrzeni operatora A .

Zaznaczmy, że w przypadku operatorów o dyskretnym spektrum podprzestrzenie $\mathfrak{S}(\lambda_j)$ są skończenie-wymiarowe, a powyższa suma prosta ma tylko skończoną liczbę składników.

W pracy [1] poprzedni wynik został rozszerzony na ogólniejszą klasę operatorów zbadanych w [6] przez Ju. I. Ljubiča i V.I. Macaeva. Przypomnijmy teraz definicję uogólnionych spektralnych podprzestrzeni operatora w przestrzeni Banacha.

Definicja 1.1.4. Niech spektrum $\sigma(A)$ operatora A będzie zbiorem niepustym, leżącym na gładkiej krzywej Jordana Γ w płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C} . W szczególności krzywa Γ może być osią rzeczywistą \mathbb{R} . Niech Δ będzie domkniętym podzbiorem krzywej Γ . Domknięta podprzestrzeń $\mathfrak{L}(\Delta)$ przestrzeni Banacha \mathfrak{X} nazywa się uogólnioną spektralną podprzestrzenią operatora A , jeżeli są spełnione następujące warunki:

1. operator A jest określony i ograniczony na podprzestrzeni $\mathfrak{L}(\Delta)$;
2. podprzestrzeń $\mathfrak{L}(\Delta)$ jest przestrzenią niezmienniczą względem operatora A ;
3. spektrum $\sigma(A_\Delta)$, gdzie A_Δ oznacza zacieśnienie operatora A do podprzestrzeni $\mathfrak{L}(\Delta)$, spełnia warunki

$$\sigma(A_\Delta) \subset \Delta \quad \text{oraz} \quad \sigma(A_\Delta) \cap \text{int } \Delta = \sigma(A) \cap \text{int } \Delta,$$

gdzie $\text{int } \Delta$ oznacza wnętrze zbioru Δ ;

4. jeżeli operator A jest określony na pewnej domkniętej podprzestrzeni $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{X}$ i \mathfrak{M} jest niezmienniczą względem A , przy czym dla jego zacieśnienia $A_{\mathfrak{M}}$ do podprzestrzeni \mathfrak{M} prawdziwe jest zawieranie $\sigma(A_{\mathfrak{M}}) \subset \Delta$, to prawdziwym jest również zawieranie

$$\mathfrak{M} \subset \mathfrak{L}(\Delta).$$

Twierdzenie 1.1.5. Jeżeli spektrum operatora A w przestrzeni \mathfrak{X} spełnia założenia definicji 1.1.4, to zachodzi równość

$$l_1(A) = \mathfrak{S}(A),$$

gdzie $\mathfrak{S}(A)$ jest powłoką liniową wszystkich uogólnionych spektralnych podprzestrzeni operatora A .

Wcześniej zawieranie postaci

$$\mathfrak{S}(A) \subset l_\infty(A)$$

wykazane zostało w pracy [9].

1.2. Przestrzenie interpolacyjne

Na początek przypomnijmy pojęcie przestrzeni interpolacyjnych.

Definicja 1.2.1. Niech $(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)$ będzie parą dwóch topologiczno-wektorowych przestrzeni takich, że istnieje topologiczno-wektorowa przestrzeń Hausdorffa \mathfrak{U} , której \mathfrak{B}_0 i \mathfrak{B}_1 są podprzestrzelniami. Określono ich część wspólną $\mathfrak{B}_0 \cap \mathfrak{B}_1$ oraz sumę

$$\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 = \{b \in \mathfrak{U}: b = b_0 + b_1, b_0 \in \mathfrak{B}_0, b_1 \in \mathfrak{B}_1\}.$$

Przestrzeń \mathfrak{B} nazywa się przestrzenią środkową pomiędzy przestrzeniami \mathfrak{B}_0 i \mathfrak{B}_1 , jeżeli zachodzą ciągle zawierania

$$\mathfrak{B}_0 \cap \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1.$$

W przestrzeniach $\mathfrak{B}_0 \cap \mathfrak{B}_1$ i $\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1$ wprowadzono odpowiednio rodziny norm

$$\|\cdot\|_{\cap,t} = \sup_{x=x_0+x_1} \left(\|x_0\|_{\mathfrak{B}_0}, t\|x_1\|_{\mathfrak{B}_1} \right), \quad \text{dla } x \in \mathfrak{B}_0 \cap \mathfrak{B}_1,$$

$$\|\cdot\|_{\sum,t} = \inf_{x=x_0+x_1} \left(\|x_0\|_{\mathfrak{B}_0} + t\|x_1\|_{\mathfrak{B}_1} \right), \quad \text{dla } x \in \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1.$$

Przy tak dobranych normach i dowolnym ale ustalonym t , jeżeli przestrzenie wyjściowe \mathfrak{B}_0 i \mathfrak{B}_1 są przestrzeniami zupełnymi to również przestrzenie $\mathfrak{B}_0 \cap \mathfrak{B}_1$ oraz $\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1$ są przestrzeniami Banacha [2, 2.3 i 2.4].

Definicja 1.2.2. [2, definicja 2.4.1] *Mówimy, że przestrzenie \mathfrak{B} i \mathfrak{C} są przestrzeniami interpolacyjnymi względem par $(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)$ i $(\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1)$, jeżeli są odpowiednio przestrzeniami środkowymi dla tych par przestrzeni oraz dla dowolnego operatora liniowego T z faktu, że*

$$T : \mathfrak{B}_0 \rightarrow \mathfrak{C}_0 \quad i \quad T : \mathfrak{B}_1 \rightarrow \mathfrak{C}_1$$

wynika, że również

$$T : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}.$$

Teraz zostanie zdefiniowana klasyczna metoda otrzymywania klas przestrzeni interpolacyjnych pomiędzy danymi przestrzeniami Banacha, zwana metodą rzeczywistej interpolacji lub metodą Peetre-Lions'a.

Definicja 1.2.3. [2, 3.1 i 3.2] *Funkcjonał*

$$K(t, x, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1) = \inf_{x=x_0+x_1} \left(\|x_0\|_{\mathfrak{B}_0} + t\|x_1\|_{\mathfrak{B}_1} \right)$$

nazywać będziemy *K-funkcjonałem metody rzeczywistej*.

K-funkcjonał jest jedną z możliwych norm zadanych na sumie przestrzeni $\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1$. Jeżeli nie będzie to prowadziło do nieporozumień zamiennie z zapisem $K(t, x, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)$ będzie używany zapis $K(t, x)$.

Twierdzenie 1.2.4. *Przestrzeń*

$$(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)_{\theta,g} = \{x \in \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 : \|x\|_{\theta,g} < \infty\}$$

z normą

$$\|x\|_{\theta,g} = \begin{cases} \left[\int_0^\infty [t^{-\theta} K(t, x)]^g \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{g}} & \text{dla } 1 \leq g < \infty \\ \sup_{0 < t < \infty} t^{-\theta} K(t, x) & \text{dla } g = \infty \end{cases}$$

jest przestrzenią interpolacyjną dla pary przestrzeni \mathfrak{B}_0 i \mathfrak{B}_1 oraz istnieje dodatnia, zależna od parametrów θ, g stała $\gamma_{\theta,g}$ taka, że dla $x \in (\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)_{\theta,g}$ i dowolnego $0 < s < \infty$ prawdziwa jest nierówność

$$K(s, x, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1) \leq \gamma_{\theta,g} s^\theta \|x\|_{\theta,g}.$$

Ponadto istnieje dodatnia, zależna od parametrów stała $c_{\theta,g}$ taka, że dla dowolnego $x \in \mathfrak{B}_0 \cap \mathfrak{B}_1$ prawdziwa jest też nierówność

$$\|x\|_{\theta,g} \leq c_{\theta,g} \|x\|_{\mathfrak{B}_0}^{1-\theta} \|x\|_{\mathfrak{B}_1}^{\theta}.$$

Definicja 1.2.5. Funkcjonał

$$J(t, x, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1) = \sup_{x=x_0+x_1} \left(\|x_0\|_{\mathfrak{B}_0}, t\|x_1\|_{\mathfrak{B}_1} \right)$$

nazywać będziemy *J-funkcjonałem metody rzeczywistej*.

J-funkcjonał jest jedną z możliwych norm zadanych na przestrzeni $\mathfrak{B}_0 \cap \mathfrak{B}_1$. Także w tym przypadku, o ile nie będzie to prowadziło do nieporozumień, w sposób równoważny będą traktowane zapisy $J(t, x, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)$ i $J(t, x)$.

Twierdzenie 1.2.6. Przestrzeń

$$(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)_{\theta,g} = \{x \in \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 : \|x\|_{\theta,g} < \infty\}$$

z normą

$$\|x\|_{\theta,g} = \begin{cases} \left[\int_0^{\infty} [t^{-\theta} J(t, x)]^g \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{g}} & \text{dla } 1 \leq g < \infty \\ \sup_{0 < t < \infty} t^{-\theta} J(t, x) & \text{dla } g = \infty \end{cases}$$

jest przestrzenią interpolacyjną względem przestrzeni \mathfrak{B}_0 i \mathfrak{B}_1 oraz prawdziwa jest nierówność

$$\|x\|_{\theta,g} \leq C s^{-\theta} J(t, x, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1).$$

Twierdzenie 1.2.7. Jeżeli $0 < \theta < 1$ i $1 \leq g \leq \infty$ to normy na przestrzeni interpolacyjnej $(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)_{\theta,g}$ określone przez funkcjonały $K(t, x, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)$ i $J(t, x, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)$ są równoważnymi normami.

Twierdzenie 1.2.8. Niech będą dane dowolne liczby $0 < \eta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \theta_i < 1$ ($i = 0, 1$), $\theta = (1 - \eta)\theta_0 + \eta\theta_1$. Jeżeli przestrzenie \mathfrak{B}_0 i \mathfrak{B}_1 są przestrzeniami zupełnymi to zachodzi następujący izomorfizm przestrzeni Banacha

$$\left((\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)_{\theta_0, q_0}, (\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)_{\theta_1, q_1} \right)_{\theta, q} = (\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)_{\theta, q}$$

z równoważnymi normami.

W literaturze z tego tematu można znaleźć wiele przykładów interpolacji różnego rodzaju przestrzeni. W tej pracy będzie konieczne odwołanie się do interpolowania pewnej szczególnej klasy przestrzeni ciągłych, którą można znaleźć np. w [15, 1.18.2 1.18.3].

Definicja 1.2.9. Niech \mathfrak{B} będzie przestrzenią Banacha. Przy zadanych liczbach $\nu > 0$, $1 \leq p, q \leq \infty$ ciągowe przestrzenie Lorentza definiuje się jako:

$$l_p^{\nu}(\mathfrak{B}) = \left\{ \xi = \{\xi_j\}_{j=0}^{\infty} : \xi_j \in \mathfrak{B}, \|\xi\|_{l_p^{\nu}} := \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}_+} 2^{j\nu p} \|\xi_j\|_{\mathfrak{B}}^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

$$l_{\infty}^{\nu}(\mathfrak{B}) = \left\{ \xi = \{\xi_j\}_{j=0}^{\infty} : \xi_j \in \mathfrak{B}, \|\xi\|_{l_{\infty}^{\nu}} := \sup_{j \in \mathbb{Z}_+} 2^{j\nu} \|\xi_j\|_{\mathfrak{B}} < \infty \right\},$$

$$l_{p,q}(\mathfrak{B}) = \left\{ \xi = \{\xi_j\}_{j=0}^{\infty} : \xi_j \in \mathfrak{B}, \|\xi\|_{l_{p,q}} := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\xi_{j-1}^*\|^q j^{\frac{q}{p}-1} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

$$l_{p,\infty}(\mathfrak{B}) = \left\{ \xi = \{\xi_j\}_{j=0}^{\infty} : \xi_j \in \mathfrak{B}, \|\xi\|_{l_{p,\infty}} := \sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \|\xi_{j-1}^*\| j^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

gdzie ciąg

$$\{\xi_j^*\}_{j=0}^{\infty}$$

oznacza takie przedstawienie wyrazów ciągu $\{\xi_j\}_{j=0}^{\infty}$ aby ciąg norm $\{\|\xi_j^*\|\}$ był ciągiem nierosnącym.

Bez trudu można zauważyć, że między powyższymi przestrzeniami zachodzą następujące równości:

$$l_{1,1}(\mathfrak{B}) = l_1^0(\mathfrak{B}),$$

$$l_{\infty,\infty}(\mathfrak{B}) = l_{\infty}^0(\mathfrak{B}).$$

Twierdzenie 1.2.10. Dla $0 < \theta < 1$ i $1 \leq g \leq \infty$ zachodzi następujący izomorfizm ciągowych przestrzeni typu Lorentza

$$(l_1(\mathfrak{B}), l_{\infty}(\mathfrak{B}))_{\theta,g} = l_{\frac{1}{1-\theta},g}(\mathfrak{B}).$$

Interpolować można jednak nie tylko przestrzenie Banacha. Co więcej - nawet założenie o możliwości zadania normy w danej przestrzeni nie jest konieczne. Użyteczne własności mają także quasi-unormowane grupy abelowe.

Definicja 1.2.11. [2, 3.10 i 3.11] Niech \mathfrak{B} będzie grupą abelową. Quasi-normą na \mathfrak{B} nazywamy funkcję $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$ zdefiniowaną na \mathfrak{B} o wartościach rzeczywistych, taką że:

1. $\|x\|_{\mathfrak{B}} \geq 0$ i $\|x\|_{\mathfrak{B}} = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $x = 0$,
2. $\|-x\|_{\mathfrak{B}} = \|x\|_{\mathfrak{B}}$,
3. $\|x + y\|_{\mathfrak{B}} \leq c(\|x\|_{\mathfrak{B}} + \|y\|_{\mathfrak{B}})$, $c > 0$.

Przestrzeń, w której wprowadzono powyższą quasi-normę nazywamy quasi-unormowaną grupą abelową. Jeżeli jednak \mathfrak{B} jest przestrzenią wektorową, to nazywamy ją przestrzenią quasi-unormowaną.

Twierdzenie 1.2.12. Załóżmy, że $0 < \theta < 1$, zaś \mathfrak{P} jest przestrzenią środkową względem przestrzeni \mathfrak{B}_0 i \mathfrak{B}_1 , wtedy:

(a) $K(t, x, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1) \leq Ct^{\theta} \|x\|_{\mathfrak{P}}$ dla $x \in \mathfrak{P}$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy mają miejsce ciągle zawierania

$$\mathfrak{B}_0 \cap \mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{P} \subset (\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)_{\theta,\infty},$$

(b) $\|x\|_{\mathfrak{P}} \leq Ct^{-\theta} J(t, x, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)$ dla $x \in \mathfrak{B}_0 \cap \mathfrak{B}_1$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą ciągle zawierania

$$(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)_{\theta, q} \subset \mathfrak{P} \subset \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1,$$

gdzie $q \leq 1$ jeżeli \mathfrak{P} jest przestrzenią zupełną lub q spełnia równanie $(2c)^q = 2$ jeżeli \mathfrak{P} jest przestrzenią quasi-unormowaną.

W pracy poruszany jest problem aproksymacji. W tym celu użyteczne było posłużenie się funkcjonalem i zbudowanymi przy jego pomocy quasi-unormowanymi przestrzeniami rozumianymi w opisany poniżej sposób.

Definicja 1.2.13. [2, 7.1] Dla zadanej pary quasi-unormowanych przestrzeni $(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)$ funkcjonal postaci

$$E(t, x) = E(t, x, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1) = \inf_{\|x_0\|_{\mathfrak{B}_0} \leq t} \|x - x_0\|_{\mathfrak{B}_1},$$

gdzie $0 < t < \infty$, $x \in \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1$ nazywamy *E-funkcjonalem*.

Dla dowolnych stałych $0 < \alpha < \infty$ i $0 < q \leq \infty$ lub $0 \leq \alpha < \infty$ i $q = \infty$, przestrzenią aproksymacyjną nazywamy przestrzeń postaci

$$E_{\alpha, q}(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1) = \{x \in \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 : \|x\|_{\alpha, q; E} < \infty\},$$

gdzie norma jest zdefiniowana w sposób następujący

$$\|x\|_{\alpha, q; E} = \begin{cases} \left[\int_0^\infty [t^\alpha E(t, x)]^q \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{q}} & \text{dla } 1 \leq q < \infty \\ \sup_{0 < t < \infty} t^\alpha E(t, x) & \text{dla } q = \infty. \end{cases}$$

Twierdzenie 1.2.14. Dla $s > 0$ istnieje $t > 0$ takie, że

$$K_\infty(s, x) = t \quad \text{oraz} \quad E(t + 0, x) \leq \frac{t}{s} \leq E(t - 0, x),$$

gdzie

$$E(t + 0, x) = \limsup_{\tau \rightarrow t+0} E(\tau, x)$$

i

$$E(t - 0, x) = \limsup_{\tau \rightarrow t-0} E(\tau, x).$$

W szczególności jeżeli $E(t)$ jest ciągle, wtedy $K(t)$ jest inwersem $\frac{t}{E(t)}$.

Twierdzenie 1.2.15. Niech para $(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)$ będzie parą przestrzeni quasi-unormowanych. Funkcjonal $x \rightarrow \|x\|_{\alpha, q; E}$ definiuje quasi-normę na przestrzeni $E_{\alpha, q}(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)$.

Twierdzenie 1.2.16. *Niech para $(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)$ będzie quasi-unormowaną parą i niech*

$$\theta = \frac{1}{\alpha + 1}, \quad r = \theta q,$$

wtedy zachodzi algebraiczna oraz topologiczna równość przestrzeni quasi-unormowanych

$$[E_{\alpha,r}(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)]^\theta = (\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)_{\theta,q},$$

gdzie $[E_{\alpha,r}(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)]^\theta$ jest przestrzenią $E_{\alpha,r}(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)$ z quasi-normą postaci $|x|_{E_{\alpha,r}}^\theta$.

Niezmiennicze podprzestrzenie typu Lorentza nieograniczonych operatorów

W tym rozdziale przedstawiono własności jednej specjalnej klasy niezmienniczych podprzestrzeni, znajdującej się w dziedzinie dowolnego nieograniczonego i domkniętego operatora A , określonego w przestrzeni Banacha. Dzięki odpowiedniemu dobraniu normy w tych podprzestrzeniach udało się otrzymać przestrzenie izometryczne do pewnego typu podprzestrzeni ze znanej klasy interpolacyjnych przestrzeni Lorentza, posiadające wiele użytecznych właściwości. Między innymi zostało udowodnione, że te podprzestrzenie są pewnym uogólnieniem podprzestrzeni spektralnych operatora A , że są one zupełne, a klasa tych podprzestrzeni jest klasą niezmienniczą względem rzeczywistej metody interpolacji. W pracy klasa takich podprzestrzeni jest nazywana A -niezmienniczymi podprzestrzeniami typu Lorentza.

2.1. Niezmiennicze podprzestrzenie typu Lorentza

Niech będzie dany dowolny domknięty, liniowy i nieograniczony operator A , o dziedzinie \mathfrak{X}^1 , gęsto określony w zespolonej przestrzeni Banacha \mathfrak{X} z normą $\|\cdot\|$, tzn.

$$A: \mathfrak{X} \supset \mathfrak{X}^1 \longrightarrow \mathfrak{X}, \quad \overline{\mathfrak{X}^1} = \mathfrak{X},$$

gdzie kreska oznacza domknięcie względem normy przestrzeni \mathfrak{X} .

Dla dowolnego $r = 2, 3, \dots$ poprzez zbiór

$$\mathfrak{X}^r = \{x \in \mathfrak{X}^{r-1}; A^{r-1}x \in \mathfrak{X}^{r-1}\}$$

oznaczamy dziedzinę r -tej iteracji A^r operatora A . Podprzestrzeń wektorów gładkich operatora A oznaczamy przez

$$\mathfrak{X}^\infty = \bigcap \{ \mathfrak{X}^r : r \in \mathbb{N} \}.$$

Niech $A^0 = I$ będzie operatorem tożsamościowym w przestrzeni \mathfrak{X} .

W dalszej części tego rozdziału zostało przyjęte założenie, że dla rezolwentnego zbioru operatora A jest spełniony warunek

$$(2.1.1) \quad \rho(A) \neq \emptyset.$$

Dzięki tak przyjętym założeniom zgodnie z twierdzeniem 1.1.1 można stwierdzić, że spełniony jest warunek gęstości

$$\overline{\mathfrak{X}^\infty} = \mathfrak{X}$$

względem normy przestrzeni \mathfrak{X} . Ponadto na mocy założenia 2.1.1 każda iteracja naszego operatora A^r jest także domknięta w \mathfrak{X} .

Weźmy teraz dowolną liczbę rzeczywistą $0 < \nu < \infty$. Przypiszmy dowolnemu elementowi $x \in \mathfrak{X}^\infty$ ciąg elementów przestrzeni \mathfrak{X}

$$x^* = \left\{ \left(\frac{A}{\nu} \right)^{\mathfrak{s}(k)} x : k \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$

gdzie $\mathfrak{s} : \mathbb{Z}_+ \ni k \rightarrow \mathfrak{s}(k) \in \mathbb{Z}_+$ jest permutacją zbioru \mathbb{Z}_+ spełniającą poniższy warunek

$$\left\| \left(\frac{A}{\nu} \right)^{\mathfrak{s}(k)} x \right\| \geq \left\| \left(\frac{A}{\nu} \right)^{\mathfrak{s}(k+1)} x \right\|, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Dla dowolnych stałych $0 < \nu < \infty$, $1 \leq p, q \leq \infty$ można już zdefiniować przestrzeń

$$l_{q,p}^\nu(A) = \left\{ x \in \mathfrak{X}^\infty : \|x\|_{l_{q,p}^\nu} < \infty \right\},$$

w której normę określono w sposób następujący

$$\|x\|_{l_{q,p}^\nu} = \begin{cases} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (k+1)^{\frac{p}{q}-1} \left\| \left(\frac{A}{\nu} \right)^{\mathfrak{s}(k)} x \right\|^p \right)^{1/p} & \text{dla } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} (k+1)^{1/q} \left\| \left(\frac{A}{\nu} \right)^{\mathfrak{s}(k)} x \right\| & \text{dla } p = \infty. \end{cases}$$

Dla uproszczenia zapisu dalej przyjęte zostaną oznaczenia

$$l_p^\nu(A) := l_{p,p}^\nu(A),$$

w szczególności, gdy $p = 1$ lub $p = \infty$ otrzymujemy znane przestrzenie

$$l_1^\nu(A) = l_{1,1}^\nu(A), \quad l_\infty^\nu(A) = l_{\infty,\infty}^\nu(A).$$

Przestrzeń $l_\infty^\nu(A)$ składa się z wektorów typu wykładniczego, które wprowadzone zostały w pracy Radyno Ya [12], zaś przestrzeń $l_1^\nu(A)$ składa się z wektorów typu wykładniczego omówionych w pracy O. Łopuszańskiego i M. Dmytryszyna [8].

Twierdzenie 2.1.1. *Unormowana przestrzeń $l_{q,p}^\nu(A)$ jest przestrzenią niezmienniczą względem operatora A i dla dowolnego $\varepsilon > 0$ następujące zanurzenia*

$$(2.1.2) \quad l_{q,p}^\nu(A) \hookrightarrow \mathfrak{X}, \quad l_{q,p}^\nu(A) \hookrightarrow l_{q,p}^{\nu+\varepsilon}(A),$$

są ciągłe. Zacieśnienie operatora A do przestrzeni $l_{q,p}^\nu(A)$ jest operatorem ograniczonym spełniającym nierówność

$$(2.1.3) \quad \|A|_{l_{q,p}^\nu(A)}\| \leq \nu.$$

Spektrum operatora A i jego obcięcia $A|_{l_{q,p}^\nu(A)}$ spełniają warunek

$$\sigma(A|_{l_{q,p}^\nu(A)}) \subset \sigma(A).$$

Dowód.

Korzystając z definicji normy można natychmiast otrzymać, że

$$\|x\|_{l_{q,p}^{\nu+\varepsilon}} \leq \|x\|_{l_{q,p}^\nu} \quad \text{dla } x \in l_{q,p}^\nu(A).$$

Niech teraz element $x = \left(\frac{A}{\nu}\right)^0 x$ będzie zajmował k -te miejsce w ciągu x^* , wtedy $\mathfrak{s}(k) = 0$. Zatem dla wszystkich $x \in l_{q,p}^\nu(A)$ otrzymamy następujące nierówności

$$(k+1)^{\frac{p}{q}-1} \|x\|^p \leq \|x\|_{l_{q,p}^\nu}^p \quad \text{dla } 1 \leq p < \infty,$$

$$(k+1)^{1/q} \|x\| \leq \|x\|_{l_{q,p}^\nu} \quad \text{dla } p = \infty,$$

co dowodzi, że odpowiednie zawierania (2.1.2) są ciągłe.

Niech teraz element $\left(\frac{A}{\nu}\right)^{\mathfrak{s}(k)+1} x$ będzie zajmował k' -te miejsce w ciągu x^* , to oznacza, że $\mathfrak{s}(k) + 1 = \mathfrak{s}(k')$. Pociąga to za sobą, że

$$A \left(\frac{A}{\nu}\right)^{\mathfrak{s}(k)} x = \nu \left(\frac{A}{\nu}\right)^{\mathfrak{s}(k)+1} x = \nu \left(\frac{A}{\nu}\right)^{\mathfrak{s}(k')} x.$$

Odwzorowanie $\mathbb{Z}_+ \ni k \rightarrow k' \in \mathbb{Z}_+$ opisane przez równanie

$$\mathfrak{s}(k) + 1 = \mathfrak{s}(k')$$

nie zawiera jednego elementu ze zbioru \mathbb{Z}_+ , więc dla dowolnego elementu $x \in l_{q,p}^\nu(A)$ są spełnione nierówności

$$\|Ax\|_{l_{q,p}^\nu(A)}^p = \nu^p \sum_{k' \in \mathbb{Z}_+} (k'+1)^{\frac{p}{q}-1} \left\| \left(\frac{A}{\nu}\right)^{\mathfrak{s}(k')} x \right\|^p \leq \nu^p \|x\|_{l_{q,p}^\nu(A)}^p \quad \text{dla } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|Ax\|_{l_{q,p}^\nu(A)} = \nu \sup_{k' \in \mathbb{Z}_+} (k'+1)^{1/q} \left\| \left(\frac{A}{\nu}\right)^{\mathfrak{s}(k')} x \right\| \leq \nu \|x\|_{l_{q,p}^\nu(A)} \quad \text{dla } p = \infty.$$

To pozwala stwierdzić, że nasza przestrzeń spełnia warunek A -niezmienniczości oraz że nierówność (2.1.3) jest prawdziwa.

Dla dowolnego $\lambda \in \rho(A)$ i $x \in l_{q,p}^\nu(A)$ zachodzi równość

$$\left(\frac{A}{\nu}\right)^{\mathfrak{s}(k)} (\lambda - A)^{-1}x = (\lambda - A)^{-1} \left(\frac{A}{\nu}\right)^{\mathfrak{s}(k)} x.$$

Zatem dla $1 \leq p < \infty$ spełniona jest nierówność

$$\begin{aligned} \|(\lambda - A)^{-1}x\|_{l_{q,p}^\nu}^p &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (k+1)^{\frac{p}{q}-1} \left\| (\lambda - A)^{-1} \left(\frac{A}{\nu}\right)^{\mathfrak{s}(k)} x \right\|^p \\ &\leq \|(\lambda - A)^{-1}\|^p \|x\|_{l_{q,p}^\nu}^p, \end{aligned}$$

w przypadku gdy $p = \infty$ nierówność przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \|(\lambda - A)^{-1}x\|_{l_{q,\infty}^\nu} &= \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} (k+1)^{\frac{1}{q}} \left\| (\lambda - A)^{-1} \left(\frac{A}{\nu}\right)^{\mathfrak{s}(k)} x \right\| \\ &\leq \|(\lambda - A)^{-1}\| \|x\|_{l_{q,\infty}^\nu}. \end{aligned}$$

To już oznacza, że $\lambda \in \rho(A|_{l_{q,p}^\nu(A)})$. □

2.2. Związek z niezmienniczymi podprzestrzeniami typu wykładniczego

Zostanie tutaj udowodniona interpolacyjna równość dla niezmienniczych podprzestrzeni nieograniczonego operatora typu Lorentza, z której będzie wynikało, że każda taka podprzestrzeń jest interpolacyjną przestrzenią dla dwóch zbadanych wcześniej niezmienniczych podprzestrzeni wektorów typu wykładniczego. A mianowicie podprzestrzeni postaci $l_\infty^\nu(A)$, zbadanych w pracy [12] i podprzestrzeni postaci $l_1^\nu(A)$, zbadanych w pracy [8]. W szczególności dowiedzione zostanie, że klasa podprzestrzeni typu Lorentza $l_{q,p}^\nu(A)$ zawiera przestrzeń $l_1^\nu(A)$. Jako konsekwencja ostatniego faktu później zostanie wykazana nietrywialność tych podprzestrzeni.

Niech $0 < \nu < \infty$. Dla dowolnych liczb $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$ zdefiniujmy teraz przestrzeń interpolacyjną

$$(l_1^\nu(A), l_\infty^\nu(A))_{\theta,p} = \left\{ x \in l_1^\nu(A) + l_\infty^\nu(A) : \|x\|_{(l_1^\nu, l_\infty^\nu)_{\theta,p}} < \infty \right\}$$

z normą

(2.2.1)

$$\|x\|_{(l_1^\nu, l_\infty^\nu)_{\theta,p}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \tau^{-p\theta-1} K^p(\tau, x, l_1^\nu, l_\infty^\nu) d\tau \right)^{1/p} & \text{gdy } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{0 < \tau < \infty} \tau^{-\theta} K(\tau, x, l_1^\nu, l_\infty^\nu) & \text{gdy } p = \infty, \end{cases}$$

gdzie funkcjonal ma postać

$$K(\tau, x, l_1^\nu, l_\infty^\nu) = \inf_{x=x^0+x^1} \left(\|x^0\|_{l_1^\nu} + \tau \|x^1\|_{l_\infty^\nu} \right)$$

dla $x^0 \in l_1^\nu(A)$ i $x^1 \in l_\infty^\nu(A)$.

Twierdzenie 2.2.1. *Dla dowolnych $0 < \nu < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 < q < \infty$ zachodzi następujący topologiczny izomorfizm przestrzeni Banacha*

$$(2.2.2) \quad \left(l_1^\nu(A), l_\infty^\nu(A) \right)_{1-\frac{1}{q}, p} = l_{q,p}^\nu(A)$$

(równość z dokładnością do równoważnych norm). Unormowana przestrzeń $l_{q,p}^\nu(A)$ jest zupełna.

Dowód.

Ponieważ prawdziwa jest nierówność

$$\|x\|_{l_p^\nu} \geq \left\| \left(\frac{A}{\nu} \right)^k x \right\|, \quad x \in l_p^\nu(A), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad p = 1, \infty$$

natychmiast dostaniemy, że jeżeli $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w normie przestrzeni $l_p^\nu(A)$, to dla każdego $k \in \mathbb{Z}_+$ ciągi

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{i} \quad \left\{ \left(\frac{A}{\nu} \right)^k x_n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

są także ciągami Cauchy'ego w \mathfrak{X} . Ze względu na zupełność przestrzeni \mathfrak{X} istnieją w niej takie elementy $x, y \in \mathfrak{X}$, że gdy $n \rightarrow \infty$ to

$$x_n \rightarrow x \quad \text{i} \quad \left(\frac{A}{\nu} \right)^k x_n \rightarrow y,$$

w normie przestrzeni \mathfrak{X} . Wykres operatora A^k jest podprzestrzenią domkniętą w $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, co nam daje, że

$$y = \left(\frac{A}{\nu} \right)^k x \quad \text{oraz} \quad x \in \mathfrak{X}^k.$$

Ponieważ powyższe jest prawdą dla każdego $k \in \mathbb{Z}_+$, otrzymamy, że $x \in \mathfrak{X}^\infty$.

I dalej gdy $n \rightarrow \infty$, to dla każdego $k \in \mathbb{Z}_+$ mamy

$$\left(\frac{A}{\nu} \right)^k x_n \rightarrow \left(\frac{A}{\nu} \right)^k x,$$

w normie przestrzeni \mathfrak{X} . Ponieważ $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $l_p^\nu(A)$ to dla każdego $\varepsilon > 0$ będzie istniało $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że $\|x_n - x_m\|_{l_p^\nu} < \varepsilon$ dla wszystkich $n, m \geq n_\varepsilon$. Z powyższego będziemy mieć, że dla dowolnych $k \in \mathbb{Z}_+$ i $n, m \geq n_\varepsilon$

$$\left\| \left(\frac{A}{\nu} \right)^k (x_n - x_m) \right\| < \varepsilon.$$

Ponieważ gdy $m \rightarrow \infty$ mamy

$$\left(\frac{A}{\nu}\right)^k (x_{n_\varepsilon} - x_m) \rightarrow 0 \quad \text{i} \quad \left(\frac{A}{\nu}\right)^k (x_m - x) \rightarrow 0,$$

więc dla każdego $k \in \mathbb{Z}_+$ będzie istniało $m_{\varepsilon,k} \geq n_\varepsilon$ takie, że dla dowolnych $m \geq m_{\varepsilon,k}$

$$\left\| \left(\frac{A}{\nu}\right)^k (x_m - x_{n_\varepsilon}) \right\| < \frac{\varepsilon}{2^k} \quad \text{i} \quad \left\| \left(\frac{A}{\nu}\right)^k (x_m - x) \right\| < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Teraz z nierówności

$$\left\| \left(\frac{A}{\nu}\right)^k x \right\| \leq \left\| \left(\frac{A}{\nu}\right)^k x_{n_\varepsilon} \right\| + \left\| \left(\frac{A}{\nu}\right)^k (x_m - x_{n_\varepsilon}) \right\| + \left\| \left(\frac{A}{\nu}\right)^k (x_m - x) \right\|$$

wynikać będzie, że dla dowolnych $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\left\| \left(\frac{A}{\nu}\right)^k x \right\| < \left\| \left(\frac{A}{\nu}\right)^k x_{n_\varepsilon} \right\| + \frac{2\varepsilon}{2^k}$$

co skutkuje nierównościami

$$\|x\|_{l_1^\nu} \leq \|x_{n_\varepsilon}\|_{l_1^\nu} + 4\varepsilon, \quad \text{gdy} \quad x \in l_1^\nu(A),$$

$$\|x\|_{l_\infty^\nu} \leq \|x_{n_\varepsilon}\|_{l_\infty^\nu} + 2\varepsilon, \quad \text{gdy} \quad x \in l_\infty^\nu(A).$$

Ponadto

$$\left\| \left(\frac{A}{\nu}\right)^k (x_n - x) \right\| \leq \left\| \left(\frac{A}{\nu}\right)^k (x_{m_{\varepsilon,k}} - x) \right\| + \left\| \left(\frac{A}{\nu}\right)^k (x_n - x_{m_{\varepsilon,k}}) \right\|,$$

więc jeżeli tylko $n \geq n_\varepsilon$ otrzymamy

$$\|x_n - x\|_{l_1^\nu} \leq 4\varepsilon, \quad \text{i} \quad \|x_n - x\|_{l_\infty^\nu} \leq 2\varepsilon,$$

a to kończy dowód tego, że przestrzenie $l_p^\nu(A)$ przy $p = 1, \infty$ są zupełne.

Rozważmy teraz standartową przestrzeń Lorentza

$$l_{q,p} = \{a: \|a\|_{l_{q,p}} < \infty\}$$

wszystkich ciągów postaci: $a = \{a_k \in \mathfrak{X}: k \in \mathbb{Z}_+\}$ z ograniczoną normą

$$\|a\|_{l_{q,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (k+1)^{\frac{p}{q}-1} \|a_k^*\|^p \right)^{1/p} & \text{dla } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} (k+1)^{1/q} \|a_k^*\| & \text{dla } p = \infty, \end{cases}$$

gdzie ciąg: $\{a_k^* \in \mathfrak{X} : k \in \mathbb{Z}_+\}$ zawiera elementy $\{a_k \in \mathfrak{X} : k \in \mathbb{Z}_+\}$, które są numerowane zgodnie z nierosnącymi normami, czyli

$$\|a_0^*\| \geq \|a_1^*\| \geq \|a_2^*\| \dots$$

Jak wcześniej przyjmijmy oznaczenia $l_1 := l_{1,1}$ i $l_\infty := l_{\infty,\infty}$. Niech $(l_1, l_\infty)_{\theta,p}$ będzie przestrzenią interpolacyjną generowaną przez rzeczywistą metodę interpolacji przy użyciu funkcjonału

$$K(\tau, a, l_1, l_\infty) = \inf_{a=a^0+a^1} (\|a^0\|_{l_1} + \tau\|a^1\|_{l_\infty}),$$

gdzie $a^0 \in l_1$, $a^1 \in l_\infty$ i $\tau \geq 0$. Zgodnie z [15, twierdzenie 1, §1.18.3, p.125]) zachodzi równość przestrzeni wektorowych

$$l_{q,p} = (l_1, l_\infty)_{\theta,p}, \quad \|a\|_{l_{q,p}} \sim \|a\|_{(l_1, l_\infty)_{\theta,p}}, \quad \theta = 1 - 1/q$$

z dokładnością do równoważności norm, gdzie powyższa norma $\|a\|_{(l_1, l_\infty)_{\theta,p}}$ jest też reprezentowana w formie (2.2.1) jeżeli funkcjonał $K(\tau, x, l_1^\nu, l_\infty^\nu)$ zastąpimy przez $K(\tau, a, l_1, l_\infty)$.

Położmy teraz jako

$$a_k = \left(\frac{A}{\nu}\right)^k x \quad \text{i} \quad a = \left\{ \left(\frac{A}{\nu}\right)^k x : k \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$

gdzie $x \in \mathfrak{X}^\infty$. Przez

$$\mathcal{A}_\nu : \mathcal{C}^\infty \ni x \longrightarrow a \subset \mathfrak{X}$$

oznaczymy liniowe odwzorowanie na pewną przestrzeń ciągów z \mathfrak{X} . Przestrzeń $l_{q,p}^\nu(A)$ jest izometryczna z podprzestrzenią złożoną z ciągów elementów przestrzeni \mathfrak{X} i odpowiednia izometria jest realizowana przez obcięcie odwzorowania \mathcal{A}_ν

$$\mathcal{A}_\nu : l_{q,p}^\nu(A) \ni x \longrightarrow \mathcal{A}_\nu(x) = a \in l_{q,p},$$

przy czym zachodzi równość dla norm

$$\|x\|_{l_{q,p}^\nu} = \|a\|_{l_{q,p}}.$$

W szczególności, w przypadku $p = q = 1$ i $p = q = \infty$ powyższa izometria także jest prawdziwa.

Pomiędzy K -funkcjonałami odpowiadającymi przestrzeniom interpolacyjnym $(l_1, l_\infty)_{\theta,p}$ i $(l_1^\nu(A), l_\infty^\nu(A))_{\theta,p}$ zachodzą następujące równości

$$\begin{aligned} K(\tau, \mathcal{A}_\nu(x), l_1, l_\infty) &= \inf_{\mathcal{A}_\nu(x)=\mathcal{A}_\nu(x_0)+\mathcal{A}_\nu(x_1)} (\|\mathcal{A}_\nu(x_0)\|_{l_1} + \tau\|\mathcal{A}_\nu(x_1)\|_{l_\infty}) \\ &\leq \|\mathcal{A}_\nu\|_{l_1^\nu \rightarrow l_1} K\left(\tau \frac{\|\mathcal{A}_\nu\|_{l_\infty^\nu \rightarrow l_\infty}}{\|\mathcal{A}_\nu\|_{l_1^\nu \rightarrow l_1}}, x, l_1^\nu, l_\infty^\nu\right). \end{aligned}$$

Podstawiając

$$\bar{\tau} = \tau \frac{\|\mathcal{A}_\nu\|_{l_\infty^\nu \rightarrow l_\infty}}{\|\mathcal{A}_\nu\|_{l_1^\nu \rightarrow l_1}}$$

do wzoru (2.2.1) dla norm, otrzymujemy

$$\|\mathcal{A}_\nu(x)\|_{(l_1, l_\infty)_{\theta, p}} \leq \|\mathcal{A}_\nu\|_{l_1^\nu \rightarrow l_1} \frac{\|\mathcal{A}_\nu\|_{l_\infty^\nu \rightarrow l_\infty}^\theta}{\|\mathcal{A}_\nu\|_{l_1^\nu \rightarrow l_1}^\theta} \|x\|_{(l_1^\nu, l_\infty^\nu)_{\theta, p}} = \|x\|_{(l_1^\nu, l_\infty^\nu)_{\theta, p}}.$$

Stosując te same rozumowania do odwzorowania odwrotnego \mathcal{A}_ν^{-1} , zdefiniowanego na obrazie $\mathcal{A}_\nu(l_1^\nu(A), l_\infty^\nu(A))_{\theta, p}$ odwzorowania \mathcal{A}_ν , otrzymamy

$$\|\mathcal{A}_\nu(x)\|_{(l_1, l_\infty)_{\theta, p}} = \|x\|_{(l_1^\nu, l_\infty^\nu)_{\theta, p}}, \quad x \in (l_1^\nu(A), l_\infty^\nu(A))_{\theta, p}.$$

Zatem diagram

$$\begin{array}{ccc} (l_1^\nu(A), l_\infty^\nu(A))_{\theta, p} & \xrightarrow{\mathcal{A}_\nu} & \mathcal{A}_\nu(l_1^\nu(A), l_\infty^\nu(A))_{\theta, p} \\ \uparrow & & \parallel \\ l_{q, p}^\nu(A) & \xleftarrow{\mathcal{A}_\nu^{-1}} & \mathcal{A}_\nu(l_{q, p}^\nu(A)) \end{array}$$

i jego odwrotny są przemienne. Z tego natychmiast otrzymujemy (2.2.2).

Z równości (2.2.2) i zupełności przestrzeni $l_p^\nu(A)$ przy $p = 1, \infty$ wynika, że przestrzeń $l_{q, p}^\nu(A)$ jest także zupełna. □

2.3. Interpolacyjne własności niezmienniczych podprzestrzeni typu Lorentza

W dalszej części pracy zbadano pewne interpolacyjne własności podprzestrzeni typu Lorentza. Tym samym, sprawdzono jak będzie wyglądała przestrzeń interpolacyjna zbudowana przy pomocy metody rzeczywistej interpolacji na klasie podprzestrzeni typu Lorentza.

Dla dowolnych $0 < t, \nu < \infty$, $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, $1 \leq p \leq \infty$ oraz $0 < \theta < 1$ zdefiniujemy podprzestrzeń interpolacyjną

$$\left(l_{q_0, p_0}^\nu(A), l_{q_1, p_1}^\nu(A) \right)_{\theta, p} = \left\{ x \in l_{q_0, p_0}^\nu(A) + l_{q_1, p_1}^\nu(A) : \|x\|_{(l_{q_0, p_0}^\nu, l_{q_1, p_1}^\nu)_{\theta, p}} < \infty \right\}$$

z normą

$$(2.3.1) \quad \|x\|_{(l_{q_0, p_0}^\nu, l_{q_1, p_1}^\nu)_{\theta, p}} = \begin{cases} \left[\int_0^\infty [t^{-\theta} K(t, x)]^p \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{p}} & \text{dla } p < \infty \\ \sup_{0 < t < \infty} t^{-\theta} K(t, x) & \text{dla } p = \infty, \end{cases}$$

gdzie

$$K(t, x) = \inf_{x=x_0+x_1} \left(\|x_0\|_{l_{q_0, p_0}^\nu} + t\|x_1\|_{l_{q_1, p_1}^\nu} \right)$$

dla $x_0 \in l_{q_0, p_0}^\nu(A)$ i $x_1 \in l_{q_1, p_1}^\nu(A)$ jest funkcjonalem metody rzeczywistej.

Twierdzenie 2.3.1. *Dla dowolnych liczb $\nu > 0$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq p, p_0, p_1 \leq \infty$ oraz $1 < q_0, q_1 < \infty$, takich, że*

$$q_0 \neq q_1, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},$$

zachodzi następujący topologiczny izomorfizmy przestrzeni Banacha

$$\left(l_{q_0, p_0}^\nu(A), l_{q_1, p_1}^\nu(A) \right)_{\theta, p} = l_{q, p}^\nu(A)$$

(równość z dokładnością do równoważnych norm).

Dowód.

Stosując twierdzenie 2.2.1, uzyskujemy

$$(2.3.2) \quad \left(l_{q_0, p_0}^\nu(A), l_{q_1, p_1}^\nu(A) \right)_{\theta, p} = \left(\left(l_1^\nu(A), l_\infty^\nu(A) \right)_{\sigma_0, p_0}, \left(l_1^\nu(A), l_\infty^\nu(A) \right)_{\sigma_1, p_1} \right)_{\theta, p},$$

gdzie $q_i = \frac{1}{1-\sigma_i}$ tzn. $\sigma_i = 1 - \frac{1}{q_i}$ dla $i = 1, 2$. Na podstawie twierdzenia 1.2.8 mamy

$$\left(\left(l_1^\nu(A), l_\infty^\nu(A) \right)_{\sigma_0, p_0}, \left(l_1^\nu(A), l_\infty^\nu(A) \right)_{\sigma_1, p_1} \right)_{\theta, p} = \left(l_1^\nu(A), l_\infty^\nu(A) \right)_{\eta, p},$$

przy czym

$$\eta = (1-\theta)\sigma_0 + \theta\sigma_1 = (1-\theta) \left(1 - \frac{1}{q_0} \right) + \theta \left(1 - \frac{1}{q_1} \right) = 1 - \left(\frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \right).$$

Wracając do równości (2.3.2), uzyskujemy

$$\left(l_{q_0, p_0}^\nu(A), l_{q_1, p_1}^\nu(A) \right)_{\theta, p} = \left(l_1^\nu(A), l_\infty^\nu(A) \right)_{\eta, p} = l_{\frac{1}{1-\eta}, p}^\nu(A),$$

gdzie $q = \frac{1}{1-\eta}$ więc $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$. □

2.4. Warunek nietrywialności klasy niezmienniczych podprzestrzeni typu Lorentza

W dalszej części pracy stosowane będą poniższe oznaczenia

$$l_1(A) := \bigcup_{\nu > 0} l_1^\nu(A), \quad l_\infty(A) := \bigcup_{\nu > 0} l_\infty^\nu(A).$$

Twierdzenie 2.4.1. Niech $1 \leq p \leq \infty$, $1 < q < \infty$. Jeżeli niepuste spektrum $\sigma(A)$ operatora A leży na osi rzeczywistej, tzn. $\text{Im } \sigma(A) = 0$ i dla dostatecznie małych $\varepsilon > 0$ rezolwenta tego operatora spełnia warunek

$$(2.4.1) \quad \int_0^\varepsilon \ln \ln M(r) dr < \infty,$$

gdzie oznaczono

$$M(r) := \sup_{|\text{Im } \lambda| \geq r} \|(\lambda - A)^{-1}\|,$$

to suma mnogościowa wszystkich A -niezmiennicznych przestrzeni typu Lorentza

$$l_{q,p}(A) := \bigcup_{\nu > 0} l_{q,p}^\nu(A)$$

jest gęsta (względem normy) w \mathfrak{X} .

Dowód.

Z równości (2.2.2), twierdzenia 2.2.1 i znanych własności interpolacyjnych przestrzeni wiadomo, że $l_1^\nu(A) \subset l_{q,p}^\nu(A)$. Zatem

$$l_1(A) \subset \bigcup_{\nu > 0} l_{q,p}^\nu(A).$$

W twierdzeniu 1.1.5 z pracy [1] dowiedziono, że jeżeli spełniony jest warunek Levinsona (2.4.1) to podprzestrzeń $l_1(A)$ jest równa sumie wszystkich uogólnionych podprzestrzeni spektralnych operatora A (w sensie definicji 1.1.4). Oznaczając ostatnią sumę przez $\mathfrak{S}(A)$, dostajemy

$$(2.4.2) \quad \mathfrak{S}(A) = l_1(A).$$

Zgodnie z twierdzeniem wykazanim przez Ju. I. Ljubiča i V.I. Macaeva [6, twierdzenie 6] suma mnogościowa uogólnionych podprzestrzeni spektralnych $\mathfrak{S}(A)$ jest gęsta w przestrzeni \mathfrak{X} względem normy. Zatem uzyskaliśmy, że również $\bigcup_{\nu > 0} l_{q,p}^\nu(A)$ jest gęsta w \mathfrak{X} względem normy. \square

Uwaga 2.4.2. Jeżeli spektrum $\sigma(A)$ operatora A jest dyskretne, to zbiór $\mathfrak{S}(A)$ jest równy sumie wszystkich podprzestrzeni spektralnych. W twierdzeniu 1.1.5 z pracy [8] dowiedziono, że prawdziwa jest równość (2.4.2). Zatem w tym przypadku twierdzenie 2.4.1 ustanawia warunek dostateczny na to żeby rodzina podprzestrzeni spektralnych operatora A była gęsta w przestrzeni Banacha \mathfrak{X} .

Aproksymacja niezmienniczymi podprzestrzeniami typu Lorentza

3.1. Funkcjonał najlepszej aproksymacji

Teraz rozważany będzie problem najlepszej aproksymacji dowolnego elementu przestrzeni \mathfrak{X} poprzez elementy pochodzące z A -niezmiennicznych podprzestrzeni typu Lorentza $l_{q,p}^t(A)$ z ustalonymi indeksami $0 < t < \infty, 1 \leq p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$. Aby tego dokonać określić należy najpierw funkcjonał

$$E_{q,p}^*(t, x) = \inf_{x_0 \in l_{q,p}^t(A)} \|x - x_0\|, \quad x \in \mathfrak{X}$$

”mierzący” odległość pomiędzy danym elementem x przestrzeni \mathfrak{X} i A -niezmienniczną podprzestrzenią $l_{q,p}^t(A)$. Jak zaznaczono w poprzednim rozdziale sumę wszystkich przestrzeni A -niezmiennicznych o ustalonych indeksach p i q oznaczono przez

$$l_{q,p}(A) = \bigcup_{t>0} l_{q,p}^t(A).$$

Tak więc dla każdego elementu $x \in l_{q,p}(A)$ istnieje liczba $t > 0$ taka, że $x \in l_{q,p}^t(A)$. Odnajdujemy, że dla elementów przestrzeni $l_{q,p}^t(A)$ z równości

$$(3.1.1) \quad \|x\|_{l_{q,p}^t}^p = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (k+1)^{\frac{p}{q}-1} \frac{\|A^{s(k)}x\|^p}{t^{ps(k)}}$$

wprost wynika zbieżność szeregu potęgowego, znajdującego się po prawej stronie. Można więc wprowadzić następujący funkcjonał

$$r_{q,p}(x) = \limsup_{s(k) \rightarrow \infty} \sqrt[s(k)p]{(k+1)^{\frac{p}{q}-1} \|A^{s(k)}x\|^p}$$

mający skończone wartości. Dość łatwo zauważyć, że

$$\begin{aligned} r_{q,p}(x+y) &= \limsup_{s(k) \rightarrow \infty} (k+1)^{\frac{p-q}{s(k)pq}} \left\| A^{s(k)}(x+y) \right\|^{\frac{1}{s(k)}} \\ &\leq \limsup_{s(k) \rightarrow \infty} (k+1)^{\frac{p-q}{s(k)pq}} \left(\left\| A^{s(k)}x \right\|^{\frac{1}{s(k)}} + \left\| A^{s(k)}y \right\|^{\frac{1}{s(k)}} \right) \\ &\leq r_{q,p}(x) + r_{q,p}(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{q,p}(\lambda x) &= \limsup_{s(k) \rightarrow \infty} |\lambda|^{\frac{1}{s(k)}} (k+1)^{\frac{p-q}{s(k)pq}} \left\| A^{s(k)}x \right\|^{\frac{1}{s(k)}} \\ &= r_{q,p}(x), \end{aligned}$$

dla wszystkich

$$x, y \in l_{q,p}(A) \quad \text{i} \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq 0.$$

Z ostatniej równości w szczególności wynika, że

$$r_{q,p}(x) = r_{q,p}(-x).$$

Co dowodzi, że funkcja postaci

$$|x|_{l_{q,p}} = r_{q,p}(x) + \|x\|, \quad x \in l_{q,p}(A)$$

jest quasi-normą przestrzeni $l_{q,p}(A)$ taką, że

$$|x+y|_{l_{q,p}} \leq |x|_{l_{q,p}} + |y|_{l_{q,p}}, \quad x, y \in l_{q,p}(A).$$

Korzystając z definicji 1.2.13 przy pomocy tej quasi-normy można zbudować funkcjonal postaci

$$E_{q,p}(t, x) := \inf_{|x_0|_{l_{q,p}} \leq t} \|x - x_0\|, \quad x_0 \in l_{q,p}(A).$$

Lemat 3.1.1. *Zachodzi następująca nierówność*

$$(3.1.2) \quad E_{q,p}^*(t, x) \leq E_{q,p}(t, x) \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathfrak{X}, \quad t > 0.$$

Dowód.

Jeżeli

$$|x|_{l_{q,p}} = r_{q,p}(x) + \|x\| < t,$$

wtedy

$$r_{q,p}(x) < t - \|x\|.$$

Zatem $x \in l_{q,p}^s(A)$ dla $r_{q,p} < s < t - \|x\|$, z twierdzenia 2.1.1 mamy

$$l_{q,p}^s(A) \subset l_{q,p}^t(A).$$

Więc $x \in l_{q,p}^t(A)$ i nierówność (3.1.2) została wykazana. □

3.2. Oszacowania funkcjonału najlepszej aproksymacji

Dla liczb $0 < \alpha < \infty$ rozważmy rodzinę aproksymacyjnych przestrzeni pomiędzy quasi-unormowaną przestrzenią $l_{q,p}(A)$ i przestrzenią Banacha \mathfrak{X} postaci

$$E_\alpha(l_{q,p}(A), \mathfrak{X}) = \{x \in \mathfrak{X} : |x|_{E_\alpha} < \infty\},$$

gdzie zgodnie z twierdzeniem 1.2.15 funkcja

$$|x|_{E_\alpha} = \left(\int_0^\infty t^{-\vartheta} E_{q,p}^\vartheta(t, x) dt \right)^{1/\vartheta}, \quad \vartheta = \frac{1}{\alpha + 1}$$

jest quasi-normą w przestrzeni $E_\alpha(l_{q,p}(A), \mathfrak{X})$.

Twierdzenie 3.2.1. *Niech $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ i $0 < \alpha < \infty$. Istnieją stałe $c_1 > 0$ i $c_2 > 0$ takie, że*

$$(3.2.1) \quad |x|_{E_\alpha} \leq c_1 |x|_{l_{q,p}}^\alpha \|x\|, \quad x \in l_{q,p}(A),$$

$$(3.2.2) \quad E_{q,p}^*(t, x) \leq c_2 \frac{|x|_{E_\alpha}}{t^\alpha}, \quad x \in E_\alpha(l_{q,p}(A), \mathfrak{X}).$$

Dowód.

Niech $[E_\alpha(l_{q,p}(A), \mathfrak{X})]^\vartheta$ będzie przestrzenią $E_\alpha(l_{q,p}(A), \mathfrak{X})$ z quasi-normą postaci $|x|_{E_\alpha}^\vartheta$. Zdefiniujmy teraz przestrzeń interpolacyjną $(l_{q,p}(A), \mathfrak{X})_{\vartheta,1}$ z quasi-normą

$$|x|_{(l_{q,p}(A), \mathfrak{X})_{\vartheta,1}} = \int_0^\infty \frac{\mathcal{K}(t, x)}{t^{\vartheta+1}} dt,$$

gdzie

$$\mathcal{K}(t, x) = \inf_{x=x_0+x_1} (|x_0|_{l_{q,p}} + t \|x_1\|), \quad x_0 \in l_{q,p}(A), \quad x_1 \in \mathfrak{X}.$$

Na mocy twierdzenia 1.2.16 [2] zachodzi następujący izomorfizm przestrzeni quasi-unormowanych

$$(3.2.3) \quad [E_\alpha(l_{q,p}(A), \mathfrak{X})]^\vartheta = (l_{q,p}(A), \mathfrak{X})_{\vartheta,1}$$

w tym sensie, że zachodzi równość algebraiczna i quasi-normy są równoważnymi

$$|x|_{E_\alpha}^\vartheta \sim |x|_{(l_{q,p}(A), \mathfrak{X})_{\vartheta,1}}, \quad x \in (l_{q,p}(A), \mathfrak{X})_{\vartheta,1}.$$

Korzystając z zawierania $l_{q,p}(A) \hookrightarrow \mathfrak{X}$ otrzymujemy

$$l_{q,p}(A) \cap \mathfrak{X} = l_{q,p}(A),$$

zatem

$$\mathfrak{X} = l_{q,p}(A) + \mathfrak{X}.$$

Stąd otrzymujemy następujące zawierania

$$l_{q,p}(A) \subset (l_{q,p}(A), \mathfrak{X})_{\vartheta,1} = [E_\alpha(l_{q,p}(A), \mathfrak{X})]^\vartheta \subset \mathfrak{X}.$$

Teraz stosując znany fakt opisany w twierdzeniu 1.2.12(b) na mocy którego dla pewnej stałej $c > 0$ mamy

$$|x|_{(l_{q,p}(A), \mathfrak{X})_{\vartheta,1}} \leq c |x|_{l_{q,p}}^{1-\vartheta} \|x\|^\vartheta, \quad x \in l_{q,p}(A).$$

Zatem z izomorfizmu (3.2.3) wynika, że istnieje stała $c_1 > 0$ taka, że zachodzi nierówność (3.2.1).

Z kolei z twierdzenia 1.2.12(a) dla pewnej stałej $c > 0$ otrzymujemy

$$\mathcal{K}(t, x) \leq ct^\vartheta |x|_{(l_{q,p}(A), \mathfrak{X})_{\vartheta,1}}, \quad x \in (l_{q,p}(A), \mathfrak{X})_{\vartheta,1}.$$

Z powyższej nierówności i izomorfizmu (3.2.3) można wywnioskować, że istnieje stała $c_0 > 0$ taka, że

$$\mathcal{K}(t, x) \leq c_0 t^\vartheta |x|_{E_\alpha}^\vartheta, \quad x \in E_\alpha(l_{q,p}(A), \mathfrak{X}).$$

Określmy teraz funkcjonal

$$\mathcal{K}_\infty(t, x) := \inf_{x=x_0+x_1} \{|x_0|_{l_{q,p}}, t \|x_1\|\}.$$

Oczywistym jest, że zachodzi nierówność

$$\mathcal{K}_\infty(t, x) \leq \mathcal{K}(t, x),$$

więc mamy

$$(3.2.4) \quad t^{-\vartheta} \mathcal{K}_\infty(t, x) \leq c_0 |x|_{E_\alpha}^\vartheta, \quad x \in E_\alpha(l_{q,p}(A), \mathfrak{X}).$$

Na mocy twierdzenia 1.2.14 dla wszystkich $t > 0$ istnieje $s > 0$ takie, że

$$\mathcal{K}_\infty(t, x) = s \quad \text{i} \quad E(s+0, x) \leq \frac{s}{t}.$$

Dla każdego $s_1 > 0$ będzie istniała liczba $t > 0$ taka, że

$$s_1 \leq \mathcal{K}_\infty(t, x) = s.$$

Dla ustalonego elementu x funkcja $E(t, x)$ jest malejąca, zatem

$$E(s, x) \leq E(s_1+0, x) \leq \frac{s_1}{t}.$$

Z tego można wywnioskować

$$[E(s, x)]^\vartheta \leq \left(\frac{s_1}{t}\right)^\vartheta \leq \frac{s_1 s^{\vartheta-1}}{t^\vartheta}.$$

Czyli

$$s^{1-\vartheta}[E(s, x)]^\vartheta \leq \left(\frac{s_1}{t}\right)^\vartheta \leq \frac{\mathcal{K}_\infty(t, x)}{t^\vartheta}.$$

Stosując to do (3.2.4), mamy

$$s^{1-\vartheta}[E(s, x)]^\vartheta \leq c_0|x|_{E_\alpha}^\vartheta.$$

Jako, że $\alpha = \frac{(1-\theta)}{\theta}$ będzie prawdą, że

$$s^\alpha E(s, x) \leq c_0^{1/\vartheta}|x|_{E_\alpha}, \quad x \in E_\alpha(l_{q,p}(A), \mathfrak{X}).$$

Stąd dla $c_1 = c_0^{1/\vartheta}$ z nierówności (3.1.2) natychmiast otrzymujemy (3.2.2). \square

Uwaga 3.2.2. Niech $p = q = 1$. W twierdzeniu 1.1.3 z [8] autorzy dowiedli, że w przypadku operatora A o dyskretnym spektrum, przestrzeń $l_1^t(A)$ jest równa przestrzeni liniowej jego przestrzeni spektralnych odpowiadających wartościom własnym w kuli o promieniu $t > 0$. Zgodnie z uwagą 2.4.2 w tym przypadku zachodzi równość

$$l_1(A) = \mathfrak{S}(A).$$

Zatem nierówność (3.2.2) daje oszacowanie odległości dowolnego elementu $x \in \mathfrak{X}$ od wektorów z podprzestrzeni

$$(l_1(A), \mathfrak{X})_{\vartheta,1} = (\mathfrak{S}(A), \mathfrak{X})_{\vartheta,1}.$$

Inne klasy niezmienniczych podprzestrzeni nieograniczonych operatorów

W tym rozdziale zbadano jak będzie się zachowywał nieograniczony operator A zacieśniony do przestrzeni interpolacyjnej zbudowanej przy pomocy metody rzeczywistej interpolacji na parze składającej się z dziedzin dwóch kolejnych iteracji operatora A .

4.1. Interpolacyjne własności wektorów gładkich

Na potrzeby dalszej części pracy zostało przyjęte, że w dziedzinie m -tej iteracji operatora \mathfrak{X}^m , ($m \in \mathbb{N}$) jest zdefiniowana w sposób następujący

$$\|x\|_{\mathfrak{X}^m} = \sum_{k=0}^m \|A^k x\|, \quad x \in \mathfrak{X}^m.$$

Przy tak przyjętej normie z domkniętości dowolnej iteracji operatora A^m jak było odnotowane na początku wynikać będzie zupełność jego dziedziny względem normy $\|x\|_{\mathfrak{X}^m}$. Co więcej wiadomo też, że operator A^m jest ograniczony, jako odwzorowanie $A^m: \mathfrak{X}^m \rightarrow \mathfrak{X}$. Dalej oznaczmy przez $A^0 = I$, $\mathfrak{X}^0 = \mathfrak{X}$ i

$$\mathfrak{X}^\infty = \bigcap \{\mathfrak{X}^m : m \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Używając metody interpolacji rzeczywistej w sposób standardowy można skonstruować przestrzenie środkowe pomiędzy \mathfrak{X}^m i \mathfrak{X}^{m+1} dla każdego $m \in \mathbb{Z}_+$. Na sumie przestrzeni $\mathfrak{X}^m + \mathfrak{X}^{m+1}$ zdefiniujemy normę w następujący sposób

$$K_m(t, x) = \inf_{x=x_0+x_1} (\|x_0\|_{\mathfrak{X}^m} + t\|x_1\|_{\mathfrak{X}^{m+1}}), \quad t > 0,$$

gdzie $x_0 \in \mathfrak{X}^m$, $x_1 \in \mathfrak{X}^{m+1}$. Na części wspólnej tych przestrzeni $\mathfrak{X}^m \cap \mathfrak{X}^{m+1}$ normę wprowadza się poprzez funkcjonal

$$J_m(t, x) = \max \left(\|x\|_{\mathfrak{X}^m}, t\|x\|_{\mathfrak{X}^{m+1}} \right), \quad x \in \mathfrak{X}^m \cap \mathfrak{X}^{m+1}.$$

Dla każdej pary liczb rzeczywistych $0 < \theta < 1$ oraz $1 \leq g \leq \infty$ można teraz wprowadzić definicję przestrzeni środkowej

$$\left(\mathfrak{X}^m, \mathfrak{X}^{m+1} \right)_{\theta, g} = \left\{ x \in \mathfrak{X}^m + \mathfrak{X}^{m+1} : \|x\|_{\theta, g, m} < \infty \right\}$$

z normą

$$\|x\|_{\theta, g, m} = \begin{cases} \left[\int_0^\infty [t^{-\theta} \Phi_m(t, x)]^g \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{g}} & \text{dla } 1 \leq g < \infty \\ \sup_{0 < t < \infty} t^{-\theta} \Phi_m(t, x) & \text{dla } g = \infty, \end{cases}$$

gdzie $\Phi_m(t, x) = K_m(t, x)$ albo $J_m(t, x)$. Zgodnie z twierdzeniem 1.2.7 normy zdefiniowane przy pomocy funkcjonałów $K_m(t, x)$ i $J_m(t, x)$ na przestrzeni $(\mathfrak{X}^m, \mathfrak{X}^{m+1})_{\theta, g}$ są równoważne.

Lemat 4.1.1. *Obcięcie $A|_{(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta, g}}$ nieograniczonego operatora A do przestrzeni środkowej $(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta, g}$ jest nieograniczonym operatorem domkniętym, z gęstą dziedziną, zawierającą podprzestrzeń $(\mathfrak{X}^1, \mathfrak{X}^2)_{\theta, g}$.*

Dowód.

Jak wynika wprost z definicji norm na przestrzeniach \mathfrak{X}^m , zawierania $\mathfrak{X}^{m+r} \hookrightarrow \mathfrak{X}^m \hookrightarrow \mathfrak{X}$, ($m, r \in \mathbb{Z}_+$) są zwięzające i gęste. Dzięki czemu dla dowolnego rozkładu

$$x = x_0 + x_1 \in \mathfrak{X}^m$$

udaje się uzyskać

$$\|x\|_{\mathfrak{X}^m} = \|x_0 + x_1\|_{\mathfrak{X}^m} \leq \|x_0\|_{\mathfrak{X}^m} + \|x_1\|_{\mathfrak{X}^m} \leq \|x_0\|_{\mathfrak{X}^m} + \|x_1\|_{\mathfrak{X}^{m+1}}.$$

A to oznacza, że

$$\|x\|_{\mathfrak{X}^m} \leq K_m(1, x).$$

Stosując twierdzenie Banacha o odwzorowaniu otwartym do tożsamościowego odwzorowania, otrzymujemy następujący izomorfizm przestrzeni Banacha (z dokładnością do równoważnych norm)

$$\mathfrak{X}^m + \mathfrak{X}^{m+1} = \mathfrak{X}^m.$$

Z drugiej strony oczywistym jest, że

$$\|x\|_{\mathfrak{X}^{m+1}} \leq J_m(1, x).$$

Co na mocy analogicznych rozumowań daje izomorfizm

$$\mathfrak{X}^m \cap \mathfrak{X}^{m+1} = \mathfrak{X}^{m+1}$$

(też z dokładnością do równoważnych norm).

Ponieważ

$$\|A^m x\|_{\mathfrak{X}^r} \leq \|x\|_{\mathfrak{X}^{r+m}},$$

to operator A^m , jako odwzorowanie $A^m : \mathfrak{X}^{r+m} \rightarrow \mathfrak{X}^r$, jest ciągły dla wszystkich $r \in \mathbb{Z}_+$, co dowodzi, że założenia twierdzenia 1.2.4 są spełnione. Pozwala to stwierdzić, że operator A^m jest ciągły jako odwzorowanie z przestrzeni $(\mathfrak{X}^m, \mathfrak{X}^{m+1})_{\theta,g}$ w przestrzeń $(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$. Co więcej, istnieje pewna stała $\beta_m > 0$ taka, że

$$K_m(1, x) \leq \beta_m \|x\|_{\theta,g,0}, \quad x \in (\mathfrak{X}^m, \mathfrak{X}^{m+1})_{\theta,g}$$

oraz zachodzą następujące ciągle zawierania

$$(\mathfrak{X}^m, \mathfrak{X}^{m+1})_{\theta,g} \hookrightarrow \mathfrak{X}^m \hookrightarrow \mathfrak{X}.$$

Biorąc ciąg

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset (\mathfrak{X}^m, \mathfrak{X}^{m+1})_{\theta,g}$$

mający tą własność, że

$$x_n \rightarrow x \quad \text{oraz} \quad A^m x_n \rightarrow y$$

w przestrzeni $(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$, można stwierdzić, że w normie \mathfrak{X}

$$x_n \rightarrow x \quad \text{oraz} \quad A^m x_n \rightarrow y.$$

Z domkniętości operatora A^m na przestrzeni \mathfrak{X} wynika, że $A^m x = y$. A zatem operator A^m na przestrzeni $(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$ jest domknięty.

Dzięki twierdzeniu 1.2.6 wiemy, że istnieje stała $\gamma_m > 0$ taka, że

$$\|x\|_{\theta,g,m} \leq \gamma_m J_m(1, x), \quad x \in \mathfrak{X}^{m+1}$$

oraz, że zawierania

$$\mathfrak{X}^{m+2} \hookrightarrow \mathfrak{X}^{m+1} \hookrightarrow (\mathfrak{X}^m, \mathfrak{X}^{m+1})_{\theta,g}$$

są ciągłe. Niech teraz f będzie nietrywialnym funkcjonałem liniowym posiadającym własność

$$f \perp \mathfrak{X}^{m+2}$$

(czyli jest ortogonalnym do podprzestrzeni \mathfrak{X}^{m+2}) i takim, że

$$f \in (\mathfrak{X}^m, \mathfrak{X}^{m+1})'_{\theta,g},$$

gdzie przez $(\mathfrak{X}^m, \mathfrak{X}^{m+1})'_{\theta,g}$ oznaczyliśmy przestrzeń dualną wszystkich funkcjonałów liniowych i ciągłych na przestrzeni interpolacyjnej $(\mathfrak{X}^m, \mathfrak{X}^{m+1})_{\theta,g}$. Ze względu na ciągłe zawieranie $\mathfrak{X}^{m+1} \hookrightarrow (\mathfrak{X}^m, \mathfrak{X}^{m+1})_{\theta,g}$, mamy

$$f \in (\mathfrak{X}^{m+1})',$$

gdzie $(\mathfrak{X}^{m+1})'$ jest przestrzenią dualną do \mathfrak{X}^{m+1} . Natomiast, ze względu na ciągłość oraz gęstość zawierania $\mathfrak{X}^{m+2} \hookrightarrow \mathfrak{X}^{m+1}$, jak wynika z twierdzenia Hahna-Banacha, dla odpowiednich przestrzeni dualnych będziemy mieć następujące zawieranie

$$(\mathfrak{X}^{m+1})' \subset (\mathfrak{X}^{m+2})'.$$

Więc mamy

$$f \in (\mathfrak{X}^{m+1})' \quad \text{oraz} \quad f \perp \mathfrak{X}^{m+2}.$$

Z gęstości inkluzji $\mathfrak{X}^{m+2} \hookrightarrow \mathfrak{X}^{m+1}$ w końcu dostajemy, że $f|_{\mathfrak{X}^{m+1}} = 0$. Wreszcie, jak wiadomo, zawieranie $\mathfrak{X}^{m+1} \hookrightarrow (\mathfrak{X}^m, \mathfrak{X}^{m+1})_{\theta,g}$ jest gęste, a to znaczy, że zawieranie

$$\mathfrak{X}^{m+2} \subset (\mathfrak{X}^m, \mathfrak{X}^{m+1})_{\theta,g}$$

jest również gęste. Ponieważ

$$\mathfrak{X}^2 \subset (\mathfrak{X}^1, \mathfrak{X}^2)_{\theta,g} \subset (\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g},$$

więc przestrzeń $(\mathfrak{X}^1, \mathfrak{X}^2)_{\theta,g}$ jest gęsta w $(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$. Z twierdzenia 1.2.4 wynika, że ponieważ odwzorowania $A: \mathfrak{X}^1 \rightarrow \mathfrak{X}$ oraz $A: \mathfrak{X}^2 \rightarrow \mathfrak{X}^1$ są ciągłe, więc odwzorowanie

$$A: (\mathfrak{X}^1, \mathfrak{X}^2)_{\theta,g} \rightarrow (\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$$

jest dobrze określone i również ciągłe co oznacza, że dziedzina zacieśnienia operatora A na przestrzeń $(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$ jest gęsta. □

4.2. Przestrzenie typu Lorentza dla iteracji operatora

Dla dowolnych liczb $0 < \nu < \infty$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $m \in \mathbb{Z}_+$ zdefiniujemy przestrzeń

$$l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}^m, \mathfrak{X}^{m+1})_{\theta,g} = \left\{ x \in \mathfrak{X}^\infty : \|x\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}^m, \mathfrak{X}^{m+1})_{\theta,g}} < \infty \right\}$$

z normą

$$\|x\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}^m, \mathfrak{X}^{m+1})_{\theta,g}} = \begin{cases} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{\frac{p}{q}-1} \left(\sup_{n \geq m} \frac{\|A^n x\|_{\theta,g,m}}{\nu^n} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} & \text{dla } p < \infty \\ \sup_{m \in \mathbb{Z}_+} \left[(m+1)^{\frac{1}{q}} \left(\sup_{n \geq m} \frac{\|A^n x\|_{\theta,g,m}}{\nu^n} \right) \right] & \text{dla } p = \infty. \end{cases}$$

Dla tego typu przestrzeni prawdziwe jest poniższe twierdzenie będące uogólnieniem twierdzenia 2.1.1.

Twierdzenie 4.2.1. *Dla dowolnych $\nu > 0$ unormowana przestrzeń $l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$ jest zupełna i jest przestrzenią niezmienniczą względem operatora A . Obcięcie*

operatora A do przestrzeni $l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$ jest ograniczonym operatorem spełniającym nierówność

$$(4.2.1) \quad \left\| A \Big|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}} \right\| \leq \nu.$$

Zawierania

$$l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g} \hookrightarrow (\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g} \hookrightarrow \mathfrak{X}$$

oraz dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zawieranie

$$l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g} \hookrightarrow l_{q,p}^{\nu+\varepsilon}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$$

są ciągłe.

Spektrum operatora A oraz spektra jego zawężeń $A \Big|_{(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}}$, $A \Big|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}}$ spełniają inkluzje

$$\sigma\left(A \Big|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}}\right) \subset \sigma\left(A \Big|_{(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}}\right) \subset \sigma(A).$$

Dowód.

Niech $x \in l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$ i $p = \infty$. Ponieważ $1 \leq (m+1)^{\frac{1}{q}}$, ($m \in \mathbb{Z}_+$) będziemy mieć, że

$$\frac{\|A^m x\|_{\theta,g,0}}{\nu^m} \leq \sup_{n \geq m} \frac{\|A^n x\|_{\theta,g,0}}{\nu^n} \leq (m+1)^{\frac{1}{q}} \sup_{n \geq m} \frac{\|A^n x\|_{\theta,g,0}}{\nu^n} \leq \|x\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}}.$$

Niech $1 \leq p < \infty$. Dla wszystkich $m \in \mathbb{Z}_+$ otrzymamy:

$$(4.2.2) \quad (m+1)^{\frac{p}{q}-1} \sup_{n \geq m} \frac{\|A^n x\|_{\theta,g,0}^p}{\nu^{np}} \leq \|x\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}}^p.$$

Jeżeli $p \geq q$, to $1 \leq \frac{p}{q}$ i $1 \leq (m+1)^{\frac{p}{q}-1}$. Teraz dla wszystkich $m \in \mathbb{Z}_+$ można zapisać

$$\sup_{n \geq m} \frac{\|A^n x\|_{\theta,g,0}}{\nu^n} \leq \|x\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}}$$

oraz

$$\frac{\|A^m x\|_{\theta,g,0}}{\nu^m} \leq \|x\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}}.$$

Jeżeli $p < q$, to dla wszystkich $m \in \mathbb{Z}_+$ i $n \geq m$ mamy

$$(n+1)^{\frac{p}{q}-1} \sup_{n \geq m} \frac{\|A^n x\|_{\theta,g,0}^p}{\nu^{np}} \leq (m+1)^{\frac{p}{q}-1} \sup_{n \geq m} \frac{\|A^n x\|_{\theta,g,0}^p}{\nu^{np}}.$$

Z tej nierówności i z (4.2.2) dla dowolnych $n \geq m$ uzyskamy

$$(n+1)^{\frac{p}{q}-1} \frac{\|A^m x\|_{\theta,g,0}^p}{\nu^{mp}} \leq (n+1)^{\frac{p}{q}-1} \sup_{n \geq m} \frac{\|A^n x\|_{\theta,g,0}^p}{\nu^{np}} \leq \|x\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}}^p.$$

W szczególności dla $n = m$, otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{\|A^m x\|_{\theta,g,0}}{\nu^m} &\leq (m+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|x\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}} \\ &= (m+1)^{\left(1-\frac{p}{q}\right)\frac{1}{p}} \|x\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}}. \end{aligned}$$

Zatem prawdziwa jest nierówność

$$(4.2.3) \quad \|A^m x\|_{\theta,g,0} \leq \begin{cases} \nu^m \|x\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}} & \text{dla } q \leq p \\ \nu^m (m+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|x\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}} & \text{dla } p < q. \end{cases}$$

Z nierówności (4.2.3) wynika natychmiast, że: jeżeli $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$, to dla dowolnych $m \in \mathbb{Z}_+$ ciągi $\{A^m x_n\}$ i $\{x_n\}$ będą również ciągami Cauchy'ego w $(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$. Na mocy zupełności $(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$ istnieją $x, y \in (\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$ takie, że $x_n \rightarrow x$ i $A^m x_n \rightarrow y$.

Wykres A^m na mocy lematu 4.1.1 jest podprzestrzenią domkniętą w $(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$, co daje

$$y = A^m x \quad \text{i} \quad x \in (\mathfrak{X}^m, \mathfrak{X}^{m+1})_{\theta,g}.$$

Ponieważ to zachodzi dla wszystkich $m \in \mathbb{Z}_+$, można stwierdzić, że

$$x \in \bigcap_{m \in \mathbb{Z}_+} (\mathfrak{X}^m, \mathfrak{X}^{m+1})_{\theta,g} = \mathfrak{X}^\infty.$$

W końcu dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnych $n \geq n_\varepsilon$ mamy

$$\begin{aligned} \|x_n\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}} &\leq \|x_{n_\varepsilon}\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}} + \|x_n - x_{n_\varepsilon}\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}} \\ &\leq \|x_{n_\varepsilon}\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy $n \rightarrow \infty$, otrzymamy

$$\|x\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}} \leq \|x_{n_\varepsilon}\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}} + \varepsilon < \infty,$$

co dowodzi że

$$x \in l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}.$$

Przechodząc do granicy gdy $m \rightarrow \infty$ w nierówności

$$\|x_n - x_m\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}} \leq \|x_{n_\varepsilon} - x_m\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}} + \|x_n - x_{n_\varepsilon}\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}}$$

uzyskamy

$$\|x_n - x\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}} \leq 2\varepsilon$$

dla $n \geq n_\varepsilon$. Zatem przestrzeń $l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$ jest zupełna.

Własność A -niezmienniczości dla przestrzeni $l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$ i nierówność (4.2.1) wynika wprost z następujących przeliczeń opierających się wprost na określeniu normy

$$\begin{aligned} & \|Ax\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}} = \\ & = \begin{cases} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{\frac{p}{q}-1} \left(\sup_{n \geq m} \frac{\nu \|A^{n+1}x\|_{\theta,g,0}}{\nu^{n+1}} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} & \text{dla } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{m \in \mathbb{Z}_+} \left[(m+1)^{\frac{1}{q}} \left(\sup_{n \geq m} \frac{\nu \|A^{n+1}x\|_{\theta,g,0}}{\nu^{n+1}} \right) \right] & \text{dla } p = \infty \end{cases} \\ & \leq \begin{cases} \nu \left[\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{\frac{p}{q}-1} \left(\sup_{n \geq m} \frac{\|A^n x\|_{\theta,g,0}}{\nu^n} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} & \text{dla } 1 \leq p < \infty \\ \nu \sup_{m \in \mathbb{Z}_+} \left[(m+1)^{\frac{1}{q}} \left(\sup_{n \geq m} \frac{\|A^n x\|_{\theta,g,0}}{\nu^n} \right) \right] & \text{dla } p = \infty \end{cases} \\ & = \nu \|x\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}}. \end{aligned}$$

Z definicji normy mamy natychmiast nierówności

$$\|x\|_{l_{q,p}^{\nu+\epsilon}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}} \leq \|x\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}}$$

i

$$\|x\|_{\theta,g,0} \leq \|x\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}}$$

dla dowolnych $x \in l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$, co daje nam ciągłość odpowiadających im zawieraniań.

Niech $\lambda \in \rho(A)$, gdzie $\rho(A)$ będzie zbiorem rezolwentnym operatora A na przestrzeni \mathfrak{X} . Ponieważ rezolwenta $(\lambda - A)^{-1}$ jest ciągła na przestrzeniach \mathfrak{X} oraz \mathfrak{X}^1 jednocześnie, więc zgodnie z twierdzeniem 1.2.4 jest ciągła na przestrzeni $(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$. Zatem, jeśli $\lambda \in \rho(A)$, to $\lambda \in \rho(A|_{(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}})$. Co sprawia, że inkluzja $\sigma(A|_{(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}}) \subset \sigma(A)$ jest prawdziwa. Wreszcie dla $m = 1$ z nierówności

$$K_1[t, (\lambda - A)^{-1}x] \leq \|(\lambda - A)^{-1}\| K_1(t, x)$$

wynika

$$\|(\lambda - A)^{-1}x\|_{\theta,g,0} \leq \|(\lambda - A)^{-1}\| \|x\|_{\theta,g,0}$$

dla wszystkich $x \in (\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$. Na mocy A -niezmienniczości przestrzeni $l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}$, otrzymamy

$$\|(\lambda - A)^{-1}x\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}} \leq \|(\lambda - A)^{-1}\| \|x\|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}}, \quad x \in l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}.$$

Zatem dla zbioru rezolwentnego operatora $A|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}}$ uzyskamy, że jeśli $\lambda \in \rho(A)$, to $\lambda \in \rho(A|_{l_{q,p}^\nu(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^1)_{\theta,g}})$. □

Przykłady niezmienniczych podprzestrzeni typu Lorentza

5.1. Niezmiennicze podprzestrzenie typu Lorentza operatora różniczkowania

Weźmy teraz jako $\mathfrak{X} = L_\rho(\mathbb{R})$, ($1 \leq \rho \leq \infty$). Wtedy $\mathfrak{X}^1 = W_\rho(\mathbb{R})$ będzie zespoloną przestrzenią Sobolewa funkcji $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \varphi(t)$ z normą

$$\|\varphi\|_{W_\rho} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^\rho dt \right)^{1/\rho} + \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi'(t)|^\rho dt \right)^{1/\rho} & : 1 \leq \rho < \infty \\ \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| + \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} |\varphi'(t)| & : \rho = \infty. \end{cases}$$

Zauważmy, że norma $\|\cdot\|_{L_\rho}$ przestrzeni L_ρ zawiera jedynie pierwszy składnik z sumy w pierwszej formule. Jako operator A weźmy operator różniczkowania d/dt i zauważmy, że operator d/dt jest generatorem izometrycznej grupy przesunięć $T_s : \varphi(t) \rightarrow \varphi(t+s)$, ($t, s \in \mathbb{R}$) w przestrzeni L_ρ , a zatem jest domknięty.

Dzięki twierdzeniu 6.7.4 [2] dla zespolonych przestrzeni Besowa $B_{\rho,g}^\theta(\mathbb{R})$ funkcji na \mathbb{R} zachodzi następujący izomorfizm przestrzeni Banacha

$$B_{\rho,g}^\theta(\mathbb{R}) = (L_\rho(\mathbb{R}), W_\rho(\mathbb{R}))_{\theta,g}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Należy odnotować, że w przypadkach $g = 1, \infty$ korzystając z [2, twierdzenie 3.5.2] ostatnią równość daje się rozszerzyć na wszystkie wartości $0 \leq \theta \leq 1$, gdzie jak zwykle kładziemy $B_{\rho,\infty}^0(\mathbb{R}) = L_\rho(\mathbb{R})$ i $B_{\rho,1}^1(\mathbb{R}) = W_\rho(\mathbb{R})$. Zatem dla dowolnych liczb $\nu > 0$ i $1 \leq p, q \leq \infty$ można zdefiniować przestrzeń typu Lorentza w sposób następujący

$$l_{q,p}^\nu(B_{\rho,g}^\theta(\mathbb{R})) = l_{q,p}^\nu(L_\rho(\mathbb{R}), W_\rho(\mathbb{R}))_{\theta,g}.$$

Jako, że operator d/dt jest domknięty, przestrzeń $l_{q,p}^\nu(B_{\rho,g}^\theta(\mathbb{R}))$ będzie zupełna na mocy twierdzenia 2.2.1. Ponadto $l_{q,p}^\nu(B_{\rho,g}^\theta(\mathbb{R}))$ jest też niezmiennicza względem operatora różniczkowania d/dt .

Oznaczmy przez M_ν przestrzeń funkcji analitycznych

$$\Phi : \mathbb{C} \ni t + i\tau \longrightarrow \Phi(t + i\tau) \in \mathbb{C}$$

spełniających nierówność

$$|\Phi(t + i\tau)| \leq C_\Phi \exp(\nu|\tau|), \quad t + i\tau \in \mathbb{C},$$

gdzie $C_\Phi > 0$ jest pewną stałą. Wiadomo [11, n.3.1], że przestrzeń M_ν jest niezmiennicza względem różniczkowania i zawiera całkowite funkcje wykładniczego typu $\nu > 0$. Wprowadzimy teraz przestrzeń funkcji

$$M_{\rho,g,\nu}^\theta := \left\{ \Phi(t + i\tau) \in M_\nu : \varphi(t) := \Phi(t + i0) \in B_{\rho,g}^\theta(\mathbb{R}) \right\}.$$

Twierdzenie 5.1.1. *Dla liczb $1 < \rho < \infty$ zawężenie funkcji do osi rzeczywistej \mathbb{R}*

$$M_{\rho,g,\nu}^\theta \ni \Phi(t + i\tau) \longrightarrow \varphi(t) \in l_\infty^\nu(B_{\rho,g}^\theta(\mathbb{R}))$$

realizujące liniowy izomorfizm postaci

$$M_{\rho,g,\nu}^\theta = l_\infty^\nu(B_{\rho,g}^\theta(\mathbb{R})).$$

Dowód.

Niech $\Phi \in M_{\rho,g,\nu}^\theta$. Ponieważ $B_{\rho,g}^\theta(\mathbb{R}) \subset L_\rho(\mathbb{R})$, więc obcięcie φ funkcji $\Phi(t + i\tau)$ do osi rzeczywistej \mathbb{R} spełnia nierówność Bernsteina [11, 3.2.2]

$$(5.1.1) \quad \|\varphi^{(k)}\|_{L_\rho} \leq \nu^k \|\varphi\|_{L_\rho}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

W szczególności wynika z tego, że $\varphi^{(k)} \in L_\rho(\mathbb{R})$ jako, że $\varphi^{(k)} \in M_\nu$. Z (5.1.1) mamy

$$\|\varphi^{(k+1)}\|_{L_\rho} \leq \nu \|\varphi^{(k)}\|_{L_\rho}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \|\varphi^{(k+1)}\|_{W_\rho} &= \|\varphi^{(k+1)}\|_{L_\rho} + \|\varphi^{(k+2)}\|_{L_\rho} \\ &\leq \nu \left(\|\varphi^{(k)}\|_{L_\rho} + \|\varphi^{(k+1)}\|_{L_\rho} \right) \\ &= \nu \|\varphi^{(k)}\|_{W_\rho} \\ &\leq \nu^{k+1} \|\varphi\|_{W_\rho} \end{aligned}$$

i następująca nierówność

$$K_1(t, \varphi^{(k)}) \leq \nu^k K_1(t, \varphi)$$

jest prawdziwa dla wszystkich $t > 0$. Po scałkowaniu nierówności dostajemy

$$\|\varphi^{(k)}\|_{\theta,g,0} \leq \nu^k \|\varphi\|_{\theta,g,0}, \quad \Phi \in M_{\rho,g,\nu}^\theta.$$

A z tego już wynika, że:

$$\|\varphi\|_{l_\infty^\nu(B_{\rho,g}^\theta)} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|\varphi^{(k)}\|_{\theta,g,0}}{\nu^k} \leq \|\varphi\|_{\theta,g,0},$$

więc $\varphi \in l_\infty^\nu(B_{\rho,g}^\theta(\mathbb{R}))$.

Na odwrót, niech teraz $\varphi \in l_\infty^\nu(B_{\rho,g}^\theta(\mathbb{R}))$. Wtedy w szczególności otrzymujemy że $\varphi \in W_\rho(\mathbb{R})$. Jako funkcję Φ weźmy szereg

$$\Phi(t + i\tau) := \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\varphi^{(k)}(t)}{k!} (i\tau)^k.$$

Z definicji normy w przestrzeni $l_\infty^\nu(B_{\rho,g}^\theta(\mathbb{R}))$ otrzymamy

$$(5.1.2) \quad \|\varphi^{(k)}\|_{\theta,g,0} \leq \nu^k \|\varphi\|_{l_\infty^\nu(B_{\rho,g}^\theta)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Obliczając normę funkcji $\Phi(t + i\tau)$ względem zmiennej $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\|\Phi(\cdot + i\tau)\|_{\theta,g,0} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|\tau^k| \|\varphi^{(k)}\|_{\theta,g,0}}{k!} \leq \exp(\nu|\tau|) \|\varphi\|_{l_\infty^\nu(B_{\rho,g}^\theta)}.$$

Zatem $\Phi(\cdot + i\tau) \in B_{\rho,g}^\theta(\mathbb{R})$ dla wszystkich $\tau \in \mathbb{R}$. Pozostało dowieść, że $\Phi \in M_\nu$. Niech $C_b(\mathbb{R})$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych i ograniczonych na \mathbb{R} z normą $\|\cdot\|_{L_\infty}$. Z twierdzenia Sobolewa [15, 2.8.1] otrzymujemy ciągłe zawieranie

$$W_\rho(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}).$$

A zatem istnieje stała $\alpha > 0$ taka, że

$$\|\varphi^{(k)}\|_{L_\infty} \leq \alpha \|\varphi^{(k)}\|_{W_\rho} \leq \alpha \nu^k \|\varphi\|_{l_\infty^\nu(B_{\rho,g}^\theta)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Z tego wynika następująca nierówność

$$\|\Phi(\cdot + i\tau)\|_{L_\infty} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|\tau^k| \|\varphi^{(k)}\|_{L_\infty}}{k!} \leq \alpha \exp(\nu|\tau|) \|\varphi\|_{l_\infty^\nu(B_{\rho,g}^\theta)}$$

dla wszystkich $\tau \in \mathbb{R}$. Co pokazuje, że $\Phi \in M_\nu$. □

5.2. Niezmiennicze podprzestrzenie typu Lorentza nieregularnych eliptycznych operatorów

Rozważamy teraz pewną klasę nieregularnych eliptycznych operatorów zdefiniowaną np. w [15, n.6.2.1]. Rozpocznijmy od definicji przestrzeni funkcji zaczerpniętej z pracy [15, n.3.2.3]. W przestrzeni tej będzie określona klasa nieregularnych eliptycznych operatorów.

Definicja 5.2.1. Niech Ω będzie dowolnym obszarem w \mathbb{R}^n a $\rho(t)$ należy do przestrzeni $C^\infty(\Omega)$ funkcji nieskończenie wiele razy ciągle różniczkowalnych w Ω oraz spełnia warunki:

- (a) $\rho(t)$ jest dodatnią funkcją;
- (b) $|\nabla\rho(t)| \leq c\rho^2(t)$;
- (c) dla każdej dodatniej liczby K istnieją liczby $\varepsilon_K > 0$ i $r_K > 0$ takie, że

$$\rho(t) > K, \quad \text{jeśli } d(t) \leq \varepsilon_K \quad \text{albo} \quad |t| \geq r_K, \quad (t \in \Omega),$$

gdzie $d(t)$ jest odległością t od brzegu Ω .

Kładziemy

$$\Omega^{(j)} = \left\{ t : t \in \Omega, \quad \rho(t) < 2^j \right\}, \quad j = N, N+1, \dots,$$

gdzie liczba N jest tak duża, że $\Omega^{(N)} \neq \emptyset$ i

$$\Omega_j := \Omega^{(j+2)} \setminus \Omega^{(j-1)}, \quad j = N+1, N+2, \dots, \quad \Omega_N = \Omega^{(N+2)}.$$

Przez $\Psi(\Omega; \rho)$ oznaczamy zbiór układów funkcji $\{\psi_j\}_{j=N}^\infty$ takich, że

$$0 \leq \psi_j(t) \leq 1, \quad \psi_j(t) \in C_0^\infty(\Omega_j), \quad \sum_{j=N}^\infty \psi_j(t) = 1 \quad \text{dla wszystkich } t \in \Omega,$$

gdzie $C_0^\infty(\Omega_j)$ oznacza podprzestrzeń $C^\infty(\Omega_j)$ funkcji ψ_j zierających się na brzegu Ω_j oraz poza Ω_j , przy czym funkcje ψ_j spełniają dodatkowo następujący warunek: dla każdego multiindeksu $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ istnieje dodatnia liczba $c(\alpha)$ taka, że

$$(5.2.1) \quad |D^\alpha \psi_j(t)| \leq c(\alpha) 2^{j|\alpha|}, \quad j = N, N+1, \dots, \quad 0 < |\alpha| < \infty,$$

gdzie $|\alpha| := |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$.

Należy zaznaczyć, że jeżeli Ω jest ograniczonym obszarem klasy C^∞ w \mathbb{R}^n , to w pobliżu brzegu można kłaść $\rho^{-1}(t) = d(t)$ dla wszystkich $t \in \Omega$. Gdy $\Omega = \mathbb{R}^n$ funkcje ρ mają postać

$$\rho(t) = (1 + |t|^2)^\eta \quad \text{albo} \quad \rho(t) = e^{(1+|t|^2)^\eta}, \quad \eta > 0,$$

gdzie $t = (t_1, \dots, t_n) \in \Omega$ i $|t| := |t_1| + \dots + |t_n|$.

Definicja 5.2.2. Niech $1 < p < \infty$, $m = 0, 1, 2, \dots$, i ζ, η będą liczbami takimi, że $\eta \geq \zeta + mp$. Kładziemy teraz

$$W_p^m(\Omega; \rho^\zeta; \rho^\eta) = \left\{ u : u \in L_p^{\text{loc}}(\Omega), \quad \|u\|_{W_p^m(\Omega; \rho^\zeta; \rho^\eta)} < \infty \right\},$$

gdzie

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega; \rho^\zeta; \rho^\eta)} = \left[\sum_{j=N}^\infty \left(2^{j\zeta} \|\psi_j u\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)}^p + 2^{j\eta} \|\psi_j u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p \right) \right]^{1/p} < \infty,$$

$L_p^{\text{loc}}(\Omega)$ jest zbiorem wszystkich zespolonych funkcji u na Ω , takich że funkcja $|u|^p$ jest lokalnie całkowna.

Dla $m = 0$ kładziemy $\zeta = \eta$ i $W_p^0(\Omega; \rho^\zeta; \rho^\eta) := L_p(\Omega; \rho^\zeta)$.

Przestrzenie $W_p^m(\Omega; \rho^\zeta; \rho^\eta)$ są zupełnymi i nie zależą (z dokładnością do równoważności norm) od wyboru rozkładu jedności $\{\psi_j\}_{j=N}^\infty \in \Psi(\Omega; \rho)$ [15, n.3.2.4].
Wzór

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega; \rho^\zeta; \rho^\eta)} = \left[\int_\Omega \left(\sum_{|\alpha|=m} \rho^\zeta(t) |D^\alpha u(t)|^p + \rho^\eta(t) |u(t)|^p \right) dt \right]^{1/p}$$

zadaje równoważną normę w przestrzeni $W_p^m(\Omega; \rho^\zeta; \rho^\eta)$ [15, n.3.2.4].

Dla przestrzeni $W_p^m(\Omega; \rho^\zeta; \rho^\eta)$ jest prawdziwe następujące twierdzenie o zanurzeniu [15, n.3.5.1].

Twierdzenie 5.2.3. Jeżeli

$$s = 0, 1, 2, \dots, \quad 1 < p \leq q < \infty, \quad m - \frac{n}{p} = s - \frac{n}{q}, \quad \eta \geq \zeta + mp,$$

to

$$W_p^m(\Omega; \rho^\zeta; \rho^\eta) \subset W_p^s(\Omega; \rho^\gamma; \rho^\mu),$$

gdzie

$$\frac{\gamma}{q} = \frac{\zeta}{p}, \quad \frac{\mu}{q} = \frac{\zeta}{p} \frac{m-s}{m} + \frac{\eta}{p} \frac{s}{m}.$$

Twierdzenie 5.2.4. [15, n.3.2.4]. *Niech*

$$s \leq m, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad 1 < p \leq q < \infty, \quad \eta \geq \zeta + mp.$$

Niech ponadto

$$\aleph_s = \eta \frac{s}{m} + \zeta \frac{m-s}{m} = \eta + (\zeta - \eta) \frac{m-s}{m}.$$

Wtedy istnieje taka liczba $c > 0$, że dla wszystkich funkcji $u \in W_p^m(\Omega; \rho^\zeta; \rho^\eta)$

$$\sum_{|\alpha|=s} \int_\Omega \rho^{\aleph_s}(t) |D^\alpha u(t)|^p dt \leq c \|u\|_{W_p^m(\Omega; \rho^\zeta; \rho^\eta)}^p.$$

Definicja 5.2.5. [15, n.6.2.1] *Poprzez $S_{\rho(t)}(\Omega)$ oznaczamy przestrzeń lokanie wypukłą postaci*

$$S_{\rho(t)}(\Omega) = \left\{ u : u \in C^\infty(\Omega), \|u\|_{l,\alpha} := \sup_{t \in \Omega} \rho^l(t) |D^\alpha u(t)| < \infty \right.$$

dla wszystkich $l = 0, 1, 2, \dots$ i wszystkich multiindeksów α $\left. \right\}$.

Z definicji wprost wynika, że jeśli istnieje liczba $a > 0$ taka, że $\rho^{-a}(t) \in L_1(\Omega)$, to dla wszystkich p , $1 \leq p < \infty$ prawdziwe jest topologiczne zanurzenie

$$(5.2.2) \quad S_{\rho(t)}(\Omega) \subset L_p(\Omega).$$

Prawdziwe jest też pewne twierdzenie odwrotne [15, n.6.2.3]: jeśli warunek (5.2.2) zachodzi dla pewnego p , $1 \leq p < \infty$, to istnieje taka liczba $a > 0$, że $\rho^{-a}(t) \in L_1(\Omega)$.

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym obszarem i niech $\rho(t)$ będzie pewną funkcją z definicji przestrzeni $S_{\rho(t)}(\Omega)$. Niech też m będzie liczbą naturalną, zaś ζ i η będą liczbami rzeczywistymi, przy czym $\eta \geq \zeta + 2m$. Kładziemy

$$\aleph_l = \frac{1}{2m} (\eta(2m - l) + \zeta l), \quad l = 0, 1, \dots, 2m.$$

Definicja 5.2.6. [15] Przez $\mathfrak{U}_{\zeta, \eta}^m(\Omega; \rho(t))$ oznaczamy klasę operatorów różniczkowych postaci

$$Au = \sum_{l=0}^m \sum_{|\alpha|=2l} \rho^{\aleph_{2l}}(t) b_{\alpha}(t) D^{\alpha} u + \sum_{|\beta| < 2m} a_{\beta}(t) D^{\beta} u,$$

gdzie $b_{\alpha}(t) \in C^{\infty}(\Omega)$ ($|\alpha| = 2l$, $l = 0, 1, \dots, m$) są rzeczywistymi funkcjami których pochodne (a też same funkcje) są ograniczone w Ω . Ponadto, zakłada się, że istnieje taka liczba $C > 0$, że dla wszystkich $\xi \in \mathbb{R}^n$ i wszystkich $t \in \Omega$

$$(-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} b_{\alpha}(t) \xi^{\alpha} \geq C |\xi|^{2m}, \quad b_{(0, \dots, 0)}(t) \geq C,$$

$$(-1)^l \sum_{|\alpha|=2l} b_{\alpha}(t) \xi^{\alpha} \geq 0, \quad l = 1, \dots, m-1.$$

Wreszcie zakłada się też, że $a_{\beta}(t) \in C^{\infty}(\Omega)$ ($0 \leq |\beta| < 2m$) oraz, że dla dowolnych $0 \leq |\beta| < 2m$ i dla wszystkich multiindeksów α istnieje liczba dodatnia $\delta > 0$ taka, że

$$D^{\alpha} a_{\beta}(t) = O(\rho^{\aleph_{|\beta|+|\alpha|-\delta}}).$$

Klasa $\mathfrak{U}_{\zeta, \eta}^m(\Omega; \rho(t))$ zawiera nieregularne eliptyczne operatory, np. jeśli Ω jest dowolnym ograniczonym obszarem i $\rho^{-1}(t)$ asymptotycznie (gdy t zmieża do brzegu) równa się $d(t)$, to operator A zadany poprzez wzór

$$Au = \rho^{\zeta}(t)(-\Delta)^m + \rho^{\eta}(t)u, \quad \eta \geq \zeta + 2m,$$

należy do $\mathfrak{U}_{\zeta, \eta}^m(\Omega; \rho(t))$. W przypadku gdy Ω jest ograniczonym obszarem klasy C^{∞} , to w pobliżu brzegu można kłaść $\rho(t) = d^{-1}(t)$.

Operatory klasy $\mathfrak{U}_{\zeta, \eta}^m(\Omega; \rho(t))$ były badane też w pracach [10], [5].

Istotnym jest fakt, że iteracje operatorów należą do tej samej klasy, tzn. [15, n.6.2.2] jeżeli $A \in \mathfrak{U}_{\zeta, \eta}^m(\Omega; \rho(t))$ to $A^k \in \mathfrak{U}_{k\zeta, k\eta}^{km}(\Omega; \rho(t))$ dla $k = 1, 2, \dots$

Niech $A \in \mathfrak{U}_{\zeta, \eta}^m(\Omega; \rho(t))$ i niech

$$\eta > 0, \quad 1 < p < \infty \quad \text{i} \quad \rho^{-a}(t) \in L_1(\Omega) \quad \text{dla pewnego} \quad a \geq 0.$$

Wtedy operator A o dziedzinie

$$(5.2.3) \quad \mathcal{D}(A) = W_p^{2m}(\Omega; \rho^{p\zeta}; \rho^{p\eta})$$

jest domknięty w przestrzeni $L_p(\Omega)$ i posiada dyskretne spektrum [15, n.6.6.2]. Ponadto, spektralne funkcje operatora A należą do $S_{\rho(t)}(\Omega)$ a ich liniowa powłoka jest gęstą w $S_{\rho(t)}(\Omega)$ i w $L_p(\Omega)$.

Twierdzenie 5.2.7. Niech $A \in \mathfrak{U}_{\zeta, \eta}^m(\Omega; \rho(t))$ i niech $\eta > 0$ oraz $\rho^{-a}(t) \in L_1(\Omega)$ dla pewnego $a \geq 0$. Dalej, niech operator A o dziedzinie $W_p^{2m}(\Omega; \rho^{p\zeta}; \rho^{p\eta})$ będzie określony w przestrzeni $\mathfrak{X} = L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Wtedy prawdziwe są następujące relacje:

$$\begin{aligned} l_{q,p}^\nu(A) &= \left\{ u : u \in S_{\rho(t)}(\Omega) : \|u\|_{l_{q,p}^\nu} < \infty \right\} \subset \mathfrak{S}(A), \\ l_1(A) &= \mathfrak{S}(A), \end{aligned}$$

gdzie $\mathfrak{S}(A)$ jest powłoką liniową wszystkich funkcji spektralnych operatora A i liczba $\nu > 0$ jest dowolna.

Dowód.

Na mocy twierdzenia z [15, n.6.5.2] operator A realizuje izomorfizm przestrzeni $W_p^{2m}(\Omega; \rho^{p\zeta}; \rho^{p\eta})$ na przestrzeń $L_p(\Omega)$. Stąd, uwzględniając że dla $k = 1, 2, \dots$ mamy $A^k \in \mathfrak{U}_{k\zeta, k\eta}^{km}(\Omega; \rho(t))$, otrzymujemy, że następujące normy są równoważne

$$\|u\|_{\mathfrak{X}^k} \sim \|u\|_{W_p^{2km}(\Omega; \rho^{pk\zeta}; \rho^{pk\eta})}$$

dla wszystkich $u \in W_p^{2km}(\Omega; \rho^{pk\zeta}; \rho^{pk\eta})$. Przy czym zachodzi równość

$$(5.2.4) \quad W_p^{2km}(\Omega; \rho^{pk\zeta}; \rho^{pk\eta}) = \mathfrak{X}^k,$$

gdzie $\|u\|_{\mathfrak{X}^k} := \sum_{k=0}^k \|Au\|_{L_p(\Omega)}$ jest normą wykresu na dziedzinie \mathfrak{X}^k k -ej iteracji operatora A .

Niech $u \in S_{\rho(t)}$. Ponieważ $\rho^{-a}(t) \in L_1(\Omega)$ dla pewnego $a \geq 0$, więc stosując nierówność Höldera, mamy

$$\begin{aligned} & \|u\|_{W_p^{2mk}(\Omega; \rho^{pk\zeta}; \rho^{pk\eta})} \\ &= \left[\int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha|=2mk} \rho^{pk\zeta+a}(t) \rho^{-a}(t) |D^\alpha u(t)|^p + \rho^{pk\eta+a}(t) \rho^{-a}(t) |u(t)|^p \right) dt \right]^{1/p} \\ &\leq c_{|\alpha|} \int_{\Omega} \rho^{-a}(t) dt < \infty. \end{aligned}$$

dla pewnej stałej $c_{|\alpha|} > 0$. Stąd wynika następujące zanużenie

$$(5.2.5) \quad S_{\rho(t)}(\Omega) \subset W_p^{2km}(\Omega; \rho^{pk\zeta}; \rho^{pk\eta}).$$

Na mocy [15, twierdzenie 6.6.2] w $S_{\rho(t)}(\Omega)$ istnieje podzbiór gęsty w \mathfrak{X}^k dla każdego $k \in \mathbb{Z}_+$, a mianowicie zbiór wszystkich kombinacji liniowych spektralnych funkcji operatora. Równość (5.2.5) pokazuje, że prawdziwe jest topologiczne zanużenie

$$S_{\rho(t)}(\Omega) \subset \bigcap_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathfrak{X}^k = \mathfrak{X}^\infty,$$

gdzie \mathfrak{X}^k traktujemy jako przestrzeń lokalnie wypukłą względem ciągu norm $\{\|u\|_{\mathfrak{X}^k} : k \in \mathbb{Z}_+\}$. Niech teraz $u \in \mathfrak{X}^\infty$. Wtedy zgodnie z twierdzeniem 5.2.4,

$$\rho^l D^\alpha u \in L_p(\Omega) \quad \text{dla wszystkich indeksów } \alpha \text{ i } l = 0, 1, 2, \dots$$

Oznaczmy przez $C^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{Z}_+$, uzupełnienie przestrzeni zespolonych funkcji szybko malejących i nieskończenie wiele razy ciągle różniczkowalnych, określonych na \mathbb{R}^n z normą

$$\|u\|_{C^s(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq s} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha u(t)|.$$

Dla $m > s + \frac{n}{p}$, na mocy [15, twierdzenie 2.8.1] prawdziwe jest ciągłe zanurzenie $W_p^m(\mathbb{R}^n) \subset C^s(\mathbb{R}^n)$. Zatem istnieje stała $c > 0$ taka, że

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \Omega} \rho^l(t) |D^\alpha u(t)| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \left| \rho^l(t) \sum_{j=N}^k \psi_j(t) D^\alpha u(t) \right| \leq \\ &c \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \rho^l \sum_{j=N}^k \psi_j D^\alpha u \right\|_{W_p^n(\mathbb{R}^n)} \leq c \sum_{j=N}^{\infty} \|\psi_j \rho^l D^\alpha u\|_{W_p^n(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &c_1 \left[\int_{\Omega} \left(\sum_{|\beta|=n} |D^\beta(\rho^l D^\alpha u(t))|^p \right) dt \right]^{1/p} < \infty, \end{aligned}$$

gdzie każda ψ_j jest funkcją z definicji 5.2.1 a stała $c_1 > 0$ wynika z nierówności (5.2.1). Stąd mamy, że $u \in S_{\rho(t)}(\Omega)$. A zatem dostajemy

$$\mathfrak{X}^\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathfrak{X}^k = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}_+} W_p^{2km}(\Omega; \rho^{pk\zeta}; \rho^{pk\eta}) = S_{\rho(t)}(\Omega).$$

Teraz wystarczy wykorzystać definicję przestrzeni typu Lorentza i równość (2.4.2).
□

Bibliografia

- [1] A. Bednarz and O. Lopushansky, *Exponential type vectors of isometric group generators*, *Matem. Studii (Proc. Lviv Math. Soc.)* **18** (2002), no. 1, 99–106.
- [2] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1976.
- [3] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, Interscience, New York, 1957.
- [4] V.I. Gorbachuk and A. Knyazyuk, *The boudary value of solutions of differential-operators equations*, *Uspekhi Matem. Nauk* **44** (1989), no. 3, 55–91.
- [5] B. Langemann, *Über greensche funktionen singularer elliptischer differentialoperatoren*, *Studia Math.* **45** (1973), 241–255.
- [6] Ju. I. Ljubič and V. I. Macaev, *On operators with a separable spectrum*, *Amer. Math. Soc. Transl. (2)* **47** (1965), 89–129.
- [7] O. Lopushansky and M. Dmytryshyn, *Vectors of exponential type of operators with discrete spectrum*, *Matem. Studii (Proc. Lviv Math. Soc.)* **9** (1998), no. 1, 70–77.
- [8] O. Lopushansky and M. Dmytryshyn, *Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum (in book "General Topology in Banach Spaces")*, Nova Sci. Publ., Huntingon, New York, 2001.
- [9] V.I. Gorbachuk M.L. Gorbachuk, *On approximation of smooth vectors of closed operator by entire exponential type vectors*, *Ukrain. Math. J.* **47** (1995), no. 5, 616–628.
- [10] E. Muller-Pfeiffer, *Zur Theorie Elliptischer und Hypoelliptischer Differentialoperatoren*, Habilitationsschrift, Jena, 1967.
- [11] S.M. Nikolskii, *Approximation of Functions of Several Variables and Embeddings Theorems*, Science, Moskow, 1977.
- [12] Ya. Radyno, *The vectors of exponential type in operators calculus and differential equations*, *Diferencialnye Urawnienija* **21** (1985), no. 9, 1559–1569.
- [13] G. Radzievskii, *The direct and invert theorems in approximation problems by finite degree vectors*, *Matem. Sbornik* **189** (1998), no. 4, 83–124.
- [14] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [15] H. Triebel, *Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators.*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1995.