

NOWA METODA OBLICZEŃ KINETOSTATYCZNYCH PRZESZTYWNIONYCH ŁAŃCUCHÓW KINEMATYCZNYCH

STRESZCZENIE

W pracy przedstawiono zastosowanie pewnej nowej metody rozwiązywania ciągłych jednowymiarowych struktur sprężystych do obliczeń kinetostatycznych przesztywnionych łańcuchów kinematycznych. Sformułowano i rozwiązano problem brzegowy z uwzględnieniem sił bezwładności unoszenia dla płaskiego przesztywnionego mechanizmu czworoboku przegubowego. Wyznaczone zostały przemieszczenia członów mechanizmu, siły reakcji w parach kinematycznych oraz uogólniona siła równoważąca.

Słowa kluczowe: układ ciągły, układ dyskretno-ciągły, macierz sztywności węzła, metoda przemieszczeń, dystrybucja, ruchliwość, kinetostatyka, łańcuch kinematyczny, problem początkowo-brzegowy, problem brzegowy

NEW METHOD OF KINETOSTATIC CALCULATIONS OF OVER-RIGID KINEMATIC CHAINS

In the paper is presented application of a new method of solution of one-dimensional continuous elastic beam structures in kinetostatic calculations of over-rigid kinematic chains. There was formulated and solved boundary problem with the application of inertia forces in convection motion for the plane over-rigid four-bar linkage mechanism. There were evaluated the displacements of mechanism links, reactive forces in kinematic pairs and generalized equilibrating force.

Keywords: continous system, discrete-continuous system, node stiffness matrix, displacement method, distribution, mobility, kinetostatics, kinematic chain, initial-boundary problem, boundary problem

1. WPROWADZENIE

Rozwiązywanie teoretycznych i praktycznych problemów dotyczących struktury, analizy, syntezy oraz sterowania mechanizmów i maszyn wymaga budowy w każdym przypadku odpowiedniego modelu fizycznego.

Przejście od układu rzeczywistego do jego modelu fizycznego, czyli tzw. modelowanie fizyczne wymaga gruntownej wiedzy z wielu dziedzin fizyki i matematyki oraz dużo doświadczenia i intuicji inżynierskiej, gdyż modele kinematyczne i dynamiczne maszyn i mechanizmów odbiegają bardzo często znacznie od rzeczywistych konstrukcji.

Na tym etapie należy podjąć decyzję co do liczby stopni swobody modelu. Niektóre typy maszyn nadają się w sposób oczywisty do zastąpienia modelami dyskretnymi (czasem nawet jednomasowymi) inne wymagają koniecznie modelu ciągłego lub dyskretno-ciągłego o nieskończonej liczbie stopni swobody.

Łańcuchy kinematyczne maszyn i mechanizmów o strukturze płaskiej lub przestrzennej, otwartej lub zamkniętej mogą zatem w zależności od przyjętych założeń składać się z członów (ogniów) nieodkształcalnych traktowanych jako ciała sztywne lub odkształcalnych o ciągłym rozkładzie parametrów inercjalno-dyssypatywno-sprężystych.

Wzory strukturalne, na których podstawie oblicza się tzw. ruchliwość teoretyczną w_t łańcucha kinematycznego, bazują na założeniu, że wszystkie człony mechanizmu są nieodkształcalne. Ruchliwość teoretyczna w_t jest najczęściej tożsama z liczbą stopni swobody s mechanizmu względem podstawy. Niekiedy, szczególnie w otwartych

łańcuchach kinematycznych występuje zjawisko pochłaniania stopni swobody i wtedy $s < w_t$.

Względę konstrukcyjne, technologiczne i wytrzymałościowe decydują jednak o tym, że do układu kinematycznego wprowadza się dodatkowe człony oraz pary kinematyczne zwiększające sztywność i precyzję działania mechanizmu, ale równocześnie wywołujące powstanie przesztynienia, czyli tzw. **więzów biernych**. Więzy bierne są zatem dodatkowymi i zbędnymi kinematycznie ograniczeniami, będącymi powtórzeniem już istniejących. W niektórych przypadkach dodaje się również kinematycznie zbędne człony, których celem jest przede wszystkim zminimalizowanie szkodliwych efektów tarcia i które wprowadzają tzw. **lokalne stopnie swobody**. Z tych powodów ruchliwość teoretyczna w_t modelu kinematycznego wynikająca ze wzorów strukturalnych różni się od ruchliwości rzeczywistej w_{rz} , która jest równa liczbie wymaganych napędów łańcucha kinematycznego i którą oblicza się ze wzoru [13]

$$w_{rz} = w_t + R_b - w_L \quad (1)$$

gdzie:

w_L – ruchliwość lokalna,

R_b – liczba więzów biernych.

Po wyeliminowaniu z łańcucha kinematycznego lokalnych stopni swobody, bardzo często spotykamy się z sytuacją, że obliczona ruchliwość teoretyczna jest liczbą ujemną, podczas gdy ruchliwość rzeczywista równa wymaganej liczbie napędów łańcucha kinematycznego jest liczbą

* Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, Katedra Mechaniki i Wibroakustyki; jaworows@uci.agh.edu.pl; felis@uci.agh.edu.pl

** Artykuł wykonano w ramach prac statutowych, nr 11.11.130.137

dotadnią. Stan ten wynika z wystąpienia w układzie kinematycznym więzów biernych.

W praktyce inżynierskiej konieczność wprowadzania pewnych przeszywnień, a zatem i dodatkowych więzów biernych, możemy neutralizować poprzez obniżenie klas stosowanych par kinematycznych, co oznacza wprowadzenie dodatkowych stopni swobody.

Sytuacja taka występuje np. przy łożyskowaniu wałów. Aby zwiększyć sztywność poprzeczną wału, wprowadza się dodatkowe łożyska poprzeczne. W celu zmniejszenia liczby przeszywnień (więzów biernych) możemy zastosować łożyska wahlwe w miejsce łożysk zwykłych.

Warunkiem prawidłowego działania rzeczywistej przeszywnionej struktury jest precyzyjne zachowanie tolerancji wymiarowych.

Modele fizyczne układów rzeczywistych złożonych z elementów nieodkształcalnych są statycznie i dynamicznie wyznaczalne pod warunkiem, że ich ruchliwość teoretyczna $w_t > 0$.

W przypadku gdy $w_t \leq 0$, aby model był statycznie i dynamicznie wyznaczalny, należy założyć odkształcalność jego elementów.

W pracy przedstawiono zastosowanie pewnej nowej metody opartej na rachunku dystrybucyjnym [1–11], zwanej jednolitą metodą rozwiązywania ciągłych prętowych struktur sprężystych do obliczeń kinetostatycznych przeszywnionych łańcuchów kinematycznych.

Jednolita metoda rozwiązywania ciągłych prętowych struktur sprężystych w ujęciu dystrybucyjnym znajduje zastosowanie dla określonej klasy problemów technicznych, a mianowicie takich, których model fizyczny można przybliżyć płaskim lub przestrzennym ciągłym, dyskretnym lub dyskretno-ciągłym układem prętowym. Strukturę takiego układu tworzą odkształcalne elementy prętowe o stałym przekroju, połączone ze sobą więzami (parami kinematycznymi) w charakterystycznych punktach zwanych węzłami. Elementy traktowane są jako belki Eulera, a układ sprężysty zachowuje się zgodnie z prawem Hooke'a, jego temperatura jest stała i jest on układem Clapeyrona podlegającym zasadzie superpozycji.

Prętowe struktury sprężyste mogą stanowić model fizyczny mechanizmów, czyli układów o ruchliwości rzeczywistej dodatniej (w tym przypadku chodzi o łańcuchy kinematyczne lub układy geometrycznie zmienne), jak również układów o ruchliwości równej zero (statycznie wyznaczalnych, geometrycznie niezmiennych) lub układów o ruchliwości ujemnej (statycznie niewyznaczalnych, również geometrycznie niezmiennych).

W pracy przedstawiono zastosowanie nowej metody do obliczeń kinetostatycznych przeszywnionego płaskiego mechanizmu na przykładzie czworoboku przegubowego, dla którego ruchliwość teoretyczna $w_t = 0$, ruchliwość rzeczywista $w_{rz} = 1$, natomiast ruchliwość obliczeniowa $w_{obl} = -1$.

Algorytm jednolitej metody obejmuje następujące etapy:

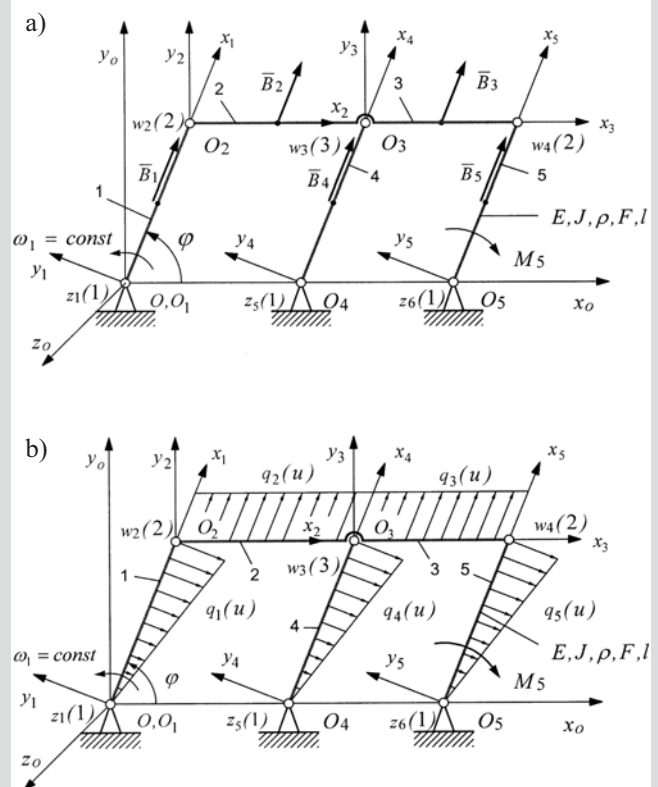
1. Dyskretyzację układu polegającą na budowie przestrzennego lub płaskiego modelu fizycznego.
2. Sformułowanie problemu początkowo-brzegowego lub brzegowego: analizę warunków brzegowych siłowych,

geometrycznych lub geometryczno-siłowych według własnego opracowanego algorytmu (zbudowanie macierzy sztywności węzłów) oraz obliczenie ruchliwości globalnej struktury, zapis równań ruchu ze współczynnikami dystrybucyjnymi dla każdego elementu dla problemu zginania w dwóch płaszczyznach oraz skręcania i rozciągania względem osi elementu.

3. Rozwiązywanie problemu, tzn. rozwiązywanie liniowych równań różniczkowych drugiego i czwartego rzędu o współczynnikach dystrybucyjnych: wyznaczenie przemieszczeń uogólnionych, wyznaczenie wewnętrznych sił uogólnionych, sił reakcji oraz naprężeń.

2. MODELE OBLICZENIOWE PRZESZTYWNIONEGO PŁASKIEGO MECHANIZMU CZWOROBOKU PRZEGUBOWEGO

Obliczenia kinetostatyczne przeszywnionego płaskiego mechanizmu czworoboku przegubowego przeprowadzono dla dwóch wariantów modelu mechanizmu różniących się sposobem przyłożenia sił bezwładności członów w oparciu o modele fizyczne przedstawione na rysunkach 1a i b.



Rys. 1. Model fizyczny analizowanego mechanizmu czworoboku przegubowego. Obciążenie mechanizmu w postaci sił bezwładności unoszenia zredukowanych do środków mas członów (a); model fizyczny analizowanego mechanizmu czworoboku przegubowego. Siły bezwładności unoszenia stanowią ciągłe obciążenie członów. Uwaga: obciążenie $q_1(u)$, $q_4(u)$, $q_5(u)$ siłami bezwładności obrócono o kąt 90° dla uzyskania przejrzystości rysunku (b)

Na rysunku 1 wprowadzono następujące oznaczenia:

$Ox_o y_o$ – globalny układ współrzędnych,

$O_i x_i y_i = (Oxy)_i, i = 1, 2, \dots, 5$ – lokalne układy współrzędnych,

$z_1(1), z_5(1), z_6(1)$ – węzły zewnętrzne jednokrotne $k = 1$,

$w_2(2), w_3(3), w_4(2)$ – węzły wewnętrzne dwu lub trzykrotne $k = 2, 3$,

EJ – jednakowa sztywność na zginanie względem osi $(Oz)_i$ wszystkich elementów, $N \cdot m^2$,

EF – jednakowa sztywność na rozciąganie wzdłuż osi $(Ox)_i$ wszystkich elementów, N ,

l – jednakowa długość elementów, m ,

B_i – skupione siły bezwładności unoszenia, N ,

q_i – obciążenie ciągłe siłami bezwładności unoszenia, $N \cdot m^{-1}$,

M_5 – moment oporu przyłożony do elementu 5, $N \cdot m$,

u – niezależna współrzędna określająca położenie punktu na osi elementu nieodkształcalnego, m ,

$x_i(u), y_i(u)$ – przemieszczenie bezwzględne punktów o współrzędnej u wynikające odpowiednio z rozciągania (ściskania) oraz zginania elementu, m ,

ω – stała prędkość kątowa elementu 1, s^{-1} .

Ruchliwość teoretyczna mechanizmu $w_t = 3n - 2p_5 - p_4 = 0$, bo $n = 4, p_4 = 0$ oraz $p_5 = 6$.

Ruchliwość rzeczywista ze względu na szczególne wymiary mechanizmu $w_{rz} = 1$.

Ruchliwość obliczeniową wyznacza się na podstawie liczby i rodzaju warunków brzegowych narzuconych na układ ze wzoru [6]

$$w_{obl} = \frac{s - g}{2} \quad (2)$$

gdzie:

$$s = \sum_{j=1}^m s_j, g = \sum_{j=1}^m g_j \quad \text{– odpowiednio liczba warunków brzegowych siłowych i geometrycznych dla całego układu,}$$

s_j, g_j – odpowiednio liczba warunków brzegowych siłowych i geometrycznych dla j -tego węzła.

Ruchliwość obliczeniową wyznaczoną ze wzoru (2) ma ścisły związek z ruchliwością teoretyczną i rzeczywistą: $w_{obl} = w_t$ dla $w_{rz} \leq 0$ oraz $w_{obl} = w_t - w_{rz}$ dla $w_{rz} > 0$, przy założeniu, że została wyeliminowana ruchliwość lokalna.

Liczbę warunków brzegowych dla jednego węzła w przypadku układu płaskiego wyznacza się ze wzoru

$$L_{wbj} = 3k_j \quad (3)$$

gdzie k_j – krotność j -tego węzła, równa liczbie elementów stykających się w danym węźle, nie licząc podpór (ostoi).

Liczbę warunków brzegowych dla całej struktury wyznacza się ze wzoru

$$L_{wb} = \sum_{j=1}^n L_{wbj} = 3 \sum_{j=1}^m k_j = 3 \cdot 2n = 6n \quad (4)$$

gdzie:

m – liczba węzłów,

n – liczba elementów.

Liczbę warunków brzegowych geometrycznych dla całego układu określa zależność

$$g = \sum_{i=4}^6 (i-3)p_i \quad (5)$$

natomiast liczbę warunków brzegowych siłowych

$$s = L_{wb} - g \quad (6)$$

W rozważanym zagadnieniu mamy: $n = 5, m = 6, L_{wb} = 30, p_5 = 5, p_6 = 2, g = 16, s = 14, p_6$ – określa liczbę zeszywnień.

Stąd ruchliwość obliczeniową $w_{obl} = \frac{s - g}{2} = -1$.

Liczbę i rodzaj warunków brzegowych dla poszczególnych węzłów zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Liczba i rodzaj warunków brzegowych dla węzłów

	$3k_j$	g_j	s_j
$z_1(1)$	3	3	0
$w_2(2)$	6	2	4
$w_3(3)$	9	5	4
$w_4(2)$	6	2	4
$z_5(1)$	3	2	1
$z_6(1)$	3	2	1
	$3 \sum k_j$	g	s
	30	16	14

Ponieważ $w_{obl} = -1$, układ jest jednokrotnie przesztyniony i aby był statycznie i dynamicznie wyznaczalny, niezbędne jest założenie, że elementy układu są odkształcalne.

3. PROBLEM BRZEGOWY

W celu przeprowadzenia analizy kinetostatycznej rozważanego łańcucha kinematycznego założono, że działają na niego siły bezwładności unoszenia w postaci sił skupionych $\bar{B}_i$ oraz obciążeń ciągłych $q_i(u)$. Dla uproszczenia obliczeń pominięto obciążenie układu siłami ciężkości. Na układ działa dodatkowo zewnętrzny moment oporu M_5 oraz moment równoważący M_{R1} , który zapewnia, że kąt obrotu członu 1 w początku lokalnego układu współrzędnych $(Oxy)_1$ jest równy zero $\varphi_{1z}(0) = 0$.

W pracy [8] wyprowadzono równania różniczkowe drgań wzdłużnych i giętnych członów mechanizmów płaskich w układzie ruchomym. Założono, że każdy człon mechanizmu wykonuje ruch złożony. Ruchem unoszenia członu jest ruch wymuszony kinematyką mechanizmu zgodnie z narzuconymi więzami przy złożeniu, że człon jest absolutnie sztywny. Na ruch unoszenia nakłada się ruch względny wynikający z drgań wzdłużnych i giętnych członów, gdyż w rzeczywistości są to człony podatne o ciągłym rozkładzie parametrów masowo-dyssypatywno-sprężystych. Prowadzi to do nieliniowych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych opisujących drgania elementów w układzie względnym.

W rozważanym w niniejszej pracy przykładzie przyjęto dodatkowe założenia: pominięto tłumienie wewnętrzne i zewnętrzne oraz przyjęto, że człony mechanizmu, mimo iż są podatne, nie wykonują drgań wzdłużnych i giętnych w układzie ruchomym, a jedynie odkształcają się statycznie pod wpływem zmiennego obciążenia zewnętrznego. Znikają w ten sposób w równaniach ruchu siły bezwładności w ruchu względnym $d\bar{B}_w$ oraz siły bezwładności Coriolisa $d\bar{B}_C$, a problem początkowo-brzegowy staje się problemem brzegowym. Został on w pracy rozwiązany w oparciu o statyczne równania odkształceń elementów zapisane w klasie funkcji uogólnionych. Wymuszenie stanowią siły bezwładności unoszenia $d\bar{B}_u$ oraz momenty obciążające.

W analizowanym mechanizmie obciążenia skupionymi siłami bezwładności wynoszą:

$$B_1 = B_4 = B_5 = \frac{1}{2} \rho F l^2 \omega^2 = \frac{B}{2} \quad (7)$$

$$B_2 = B_3 = \rho F l^2 \omega^2 = B$$

Natomiast obciążenia ciągłe od sił bezwładności wynoszą:

$$q_2(u) = q_3(u) = \frac{m}{l} \omega^2 l = m \omega^2 \quad (8)$$

$$q_1(u) = q_4(u) = q_5(u) = \frac{m}{l} \omega^2 u$$

Dla uproszczenia obliczeń założono, że prędkość kątowa członu napędzającego 1 jest stała, $\omega_1 = \omega = \text{const}$.

Każdy element układu przedstawionego na rysunku 1 podlega odkształceniom wzdłużnym (rozciąganie, ściskanie) i poprzecznym (zginanie).

Równania różniczkowe odkształceń zapisane w klasie funkcji uogólnionych dla przedziału otwartego w układach lokalnych dla obciążenia skupionymi siłami bezwładności (rys. 1a) mają postać:

– dla elementu 1:

$$EFx_1''(u) = -\frac{B}{2} \cdot \delta\left(u - \frac{l}{2}\right), \quad u \in (0, l)$$

$$EJy_1^{IV}(u) = 0$$

– dla elementu 2:

$$EFx_2''(u) = -B \cos \varphi \delta\left(u - \frac{l}{2}\right), \quad u \in (0, l)$$

$$EJy_2^{IV}(u) = B \sin \varphi \delta\left(u - \frac{l}{2}\right)$$

– dla elementu 3:

$$EFx_3''(u) = -B \cos \varphi \delta\left(u - \frac{l}{2}\right), \quad u \in (0, l)$$

$$EJy_3^{IV}(u) = B \sin \varphi \delta\left(u - \frac{l}{2}\right)$$

– dla elementu 4:

$$EFx_4''(u) = -\frac{B}{2} \delta\left(u - \frac{l}{2}\right), \quad u \in (0, l)$$

$$EJy_4^{IV}(u) = 0$$

– dla elementu 5:

$$EFx_5''(u) = -\frac{B}{2} \delta\left(u - \frac{l}{2}\right), \quad u \in (0, l)$$

$$EJy_5^{IV}(u) = 0$$

gdzie $\delta\left(u - \frac{l}{2}\right)$ jest dystrybucją Diraca skoncentrowaną w punkcie o współrzędnej $u = \frac{l}{2}$.

Równania różniczkowe odkształceń zapisane w klasie funkcji uogólnionych dla przedziału otwartego w układach lokalnych dla obciążenia ciągłego siłami bezwładności (rys. 1b) mają postać:

– dla elementu 1:

$$EFx_1^{II}(u) = -\frac{m}{l} \omega^2 u \cdot H(u-0), \quad u \in (0, l)$$

$$EJy_1^{IV}(u) = 0$$

– dla elementu 2:

$$EFx_2^{II}(u) = -m\omega^2 (\cos \varphi) \cdot H(u-0), \quad u \in (0, l)$$

$$EJy_2^{IV}(u) = m\omega^2 (\sin \varphi) \cdot H(u-0)$$

– dla elementu 3: (10)

$$EFx_3^{II}(u) = -m\omega^2 (\cos \varphi) \cdot H(u-0), \quad u \in (0, l)$$

$$EJy_3^{IV}(u) = m\omega^2 (\sin \varphi) \cdot H(u-0)$$

– dla elementu 4:

$$EFx_4^{II}(u) = -\frac{m}{l} \omega^2 u \cdot H(u-0), \quad u \in (0, l)$$

$$EJy_4^{IV}(u) = 0$$

– dla elementu 5:

$$EFx_5^{II}(u) = -\frac{m\omega^2}{l} u \cdot H(u-0), \quad u \in (0, l)$$

$$EJy_5^{IV}(u) = 0$$

gdzie:

$H(u-0)$ – funkcja Heaviside’a: $H = 1$ dla $u \geq 0$,
 $H = 0$ dla $u < 0$,

$$x_i^{II} = \frac{d^2 x_i}{du^2};$$

$$y_i^{IV} = \frac{d^4 y_i}{du^4}; \quad \varphi = \omega \cdot t.$$

Równania (9) i (10) można otrzymać bezpośrednio z równań drgań wzdłużnych i giętych elementów [8] przy założeniu, że elementy nie wykonują drgań w układzie ruchomym.

Warunki brzegowe dla poszczególnych węzłów zapisane w układzie globalnym $Ox_o y_o$ mają postać:

– dla węzła $z_1(1)$:

$$g_{z_1} = 3: x_1^o = 0, y_1^o = 0, y_1^{o'} = \varphi_{1z}^o = 0, s_{z_1} = 0$$

– dla węzła $w_2(2)$:

$$g_{w_2} = 2: x_1^o = x_2^o, y_1^o = y_2^o$$

$$s_{w_2} = 4: R_{x_1}^o + R_{x_2}^o = 0, R_{y_1}^o + R_{y_2}^o = 0$$

$$M_{Rz_1}^o = 0, M_{Rz_2}^o = 0$$

– dla węzła $w_3(3)$:

$$g_{w_3} = 5: x_2^o = x_3^o = x_4^o = 0, y_2^o = y_3^o = y_4^o = 0, y_2^{o'} = y_3^{o'}$$

$$s_{w_3} = 4: R_{x_2}^o + R_{x_3}^o + R_{x_4}^o = 0, R_{y_2}^o + R_{y_3}^o + R_{y_4}^o = 0 \quad (11)$$

$$M_{Rz_4}^o = 0, M_{Rz_2}^o + M_{Rz_3}^o = 0$$

– dla węzła $w_4(2)$:

$$g_{w_2} = 2: x_3^o = x_5^o, y_3^o = y_5^o$$

$$s_{w_4} = 4: R_{x_3}^o + R_{x_5}^o = 0, R_{y_3}^o + R_{y_5}^o = 0$$

$$M_{Rz_3}^o = 0, M_{Rz_5}^o = 0$$

– dla węzła $z_5(1)$:

$$g_{z_5} = 2: x_4^o = 0, y_4^o = 0, s_{z_5} = 1; M_{Rz_4}^o = 0$$

– dla węzła $z_6(1)$:

$$g_{z_6} = 2: x_5^o = 0, y_5^o = 0, s_{z_6} = 1; M_{Rz_5}^o = -M_5$$

Warunki brzegowe (11) w układzie globalnym otrzymano w wyniku transformacji warunków brzegowych zapisanych w układach lokalnych.

Transformacji dokonano z zależności

$$\bar{W}_i^o = M_{io} \bar{W}_i^i \quad (12)$$

gdzie:

$\bar{W}_i^i$ – i -ty wektor przemieszczenia uogólnionego lub siły uogólnionej w i -tym układzie lokalnym,

$\bar{W}_i^o$ – i -ty wektor w układzie globalnym,

M_{io} – macierz transformacji z i -tego układu lokalnego do układu globalnego.

Dla rozważanego problemu mamy:

$$\begin{aligned} M_{1o} = M_{4o} = M_{5o} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ M_{2o} = M_{3o} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

4. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

W przypadku obciążenia siłami skupionymi $\bar{B}_i$ rozwiązanie problemu brzegowego polega na scałkowaniu równań (9) przy uwzględnieniu warunków brzegowych (11). Przykładowo podano równania dla elementu 2 po całkowaniu:

$$\begin{aligned} EFx_2(u) &= -B(\cos \varphi) \left(u - \frac{l}{2} \right) + C_7 u + C_8 \\ EJy_2(u) &= B(\sin \varphi) \frac{\left(u - \frac{l}{2} \right)^3}{6} H \left(u - \frac{l}{2} \right) + C_9 \frac{u^3}{2} + \\ &+ C_{10} \frac{u^3}{2} + C_{11} u + C_{12} \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie $H \left(u - \frac{l}{2} \right)$ jest funkcją Heaviside'a.

Przykładowo rozpisano również warunki brzegowe dla węzła $w_2(2)$ w układzie globalnym $Ox_o y_o$:

- warunki brzegowe geometryczne:

$$\bar{r}_1^o(l) = \bar{r}_2(0)$$

czyli na podstawie (12) $M_{10}\bar{r}_1(l) = M_{20}\bar{r}_2(0)$
stąd:

$$x_1(l) \cos \varphi - y_1(l) \sin \varphi = x_2(0)$$

$$x_1(l) \sin \varphi + y_1(l) \cos \varphi = y_2(0)$$

- warunki brzegowe siłowe: (15)

$$\bar{R}_1^o(l) + \bar{R}_2(0) = \bar{0}$$

czyli na podstawie (12) $M_{10}\bar{R}_1(l) + M_{20}\bar{R}_2(0) = \bar{0}$
stąd:

$$R_{x1}(l) \cos \varphi - R_{y1}(l) \sin \varphi + R_{x2}(0) = 0$$

$$R_{x1}(l) \sin \varphi + R_{y1}(l) \sin \varphi + R_{y2}(0) = 0$$

oraz:

$$M_{10}\bar{M}_{R1}(l) = 0, \text{ stąd } M_{Rz1}(l) = 0$$

$$M_{20}\bar{M}_{R2}(0) = 0, \text{ stąd } M_{Rz2}(l) = 0$$

Ostatecznie na podstawie tabeli 2:

$$\begin{aligned} EFx_1^I(l) \cos \varphi + EJy_1^{III}(l) \sin \varphi - EFx_2^I(0) &= 0 \\ EFx_1^I(l) \sin \varphi + EJy_1^{III}(l) \cos \varphi - EFy_2^{III}(0) &= 0 \\ EJy_1^{II}(l) &= 0 \\ EJy_2^{II}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

W przypadku obciążenia ciągłego $\bar{q}_i$ rozwiązanie problemu brzegowego polega na scałkowaniu równań (10) przy uwzględnieniu warunków brzegowych (11). Przykładowo podano równania dla elementu 3 po scałkowaniu:

$$\begin{aligned} EFx_3(u) &= -m\omega^2 \cos \varphi \frac{(u-0)^2}{2} H(u-0) + C_{13}u + C_{14} \\ EJy_3(u) &= m\omega^2 \sin \varphi \frac{(u-0)^2}{24} H(u-0) + C_{15} \frac{u^3}{6} + \\ &+ C_{16} \frac{u^2}{2} + C_{17}u + C_{18} \end{aligned} \quad (17)$$

Również przykładowo rozpisano warunki brzegowe dla węzła $w_4(2)$ w układzie globalnym $Ox_o y_o$:

- warunki brzegowe geometryczne:

$$\bar{r}_3^o(l) = \bar{r}_5^o(l)$$

czyli na podstawie (12) $M_{30}\bar{r}_3(l) = M_{50}\bar{r}_5(l)$
stąd:

$$x_3(l) = x_5(l) \cos \varphi - y_5(l) \sin \varphi$$

$$y_3(l) = x_5(l) \sin \varphi + y_5(l) \cos \varphi$$

- warunki brzegowe siłowe:

$$\bar{R}_3^o(l) + \bar{R}_5(l) = \bar{0}$$

$$\text{czyli } M_{30}\bar{R}_3(l) + M_{50}\bar{R}_5(l) = \bar{0} \quad (18)$$

$$\text{oraz } \bar{M}_{R3}^o(l) = \bar{M}_{R5}^o(l) = \bar{0}$$

czyli na podstawie (12) $M_{30}\bar{M}_{R3}(l) = 0$

$$\text{oraz } M_{50}\bar{M}_{R5}(l) = 0$$

stąd:

$$R_{x3}(l) + R_{x5}(l) \cos \varphi - R_{y5}(l) \sin \varphi = 0$$

$$R_{y3}(l) + R_{x5}(l) \sin \varphi + R_{y5}(l) \cos \varphi = 0$$

oraz:

$$M_{Rz3}(l) = 0$$

$$M_{Rz5}(l) = 0$$

Tabela 2. Współrzędne uogólnionych sił wewnętrznych oraz reakcji na brzegach elementów

Brzeg	Współrzędne sił tnących i rozciągających oraz momentów gnących i skręcających	Współrzędne reakcji podpór oraz momentów utwierdzeń gnących i skręcających	Rząd równania Rodzaj obciążenia
Lewy	$T_x(0^+) = -EFx^I(0^+)$	$R_x(0^+) = -EFx^I(0^+)$	Równanie II rzędu, rozciąganie wzdłuż osi Ox
Prawy	$T_x(l^-) = -EFx^I(l^-)$	$R_x(l^-) = +EFx^I(l^-)$	
Lewy	$M_x(0^+) = -GJ_o\phi_x^I(0^+)$	$M_{Rx}(0^+) = -GJ_o\phi_x^I(0^+)$	Równanie II rzędu, skręcanie względem osi Ox
Prawy	$M_x(l^-) = -GJ_o\phi_x^I(l^-)$	$M_{Rx}(l^-) = +GJ_o\phi_x^I(l^-)$	
Lewy	$T_y(0^+) = +EJ_z y^{III}(0^+)$	$R_y(0^+) = +EJ_z y^{III}(0^+)$	Równanie IV rzędu, zginanie w płaszczyźnie Oxy (zginanie względem osi Oz)
Prawy	$T_y(l^-) = +EJ_z y^{III}(l^-)$	$R_y(l^-) = -EJ_z y^{III}(l^-)$	
Lewy	$M_z(0^+) = -EJ_z y^{II}(0^+)$	$M_{Rz}(0^+) = -EJ_z y^{II}(0^+)$	
Prawy	$M_z(l^-) = -EJ_z y^{II}(l^-)$	$M_{Rz}(l^-) = +EJ_z y^{II}(l^-)$	
Lewy	$T_z(0^+) = +EJ_y z^{III}(0^+)$	$R_z(0^+) = +EJ_y z^{III}(0^+)$	Równanie IV rzędu, zginanie w płaszczyźnie Oxz (zginanie względem osi Oy)
Prawy	$T_z(l^-) = +EJ_y z^{III}(l^-)$	$R_z(l^-) = -EJ_y z^{III}(l^-)$	
Lewy	$M_y(0^+) = +EJ_y z^{II}(0^+)$	$M_{Ry}(0^+) = +EJ_y z^{II}(0^+)$	
Prawy	$M_y(l^-) = +EJ_y z^{II}(l^-)$	$M_{Ry}(l^-) = -EJ_y z^{II}(l^-)$	

Ostatecznie na podstawie tabeli 2:

$$\begin{aligned}
 &EFx_3^I(l) + EFx_5^I(l) \cos \varphi + EJy_5^{III}(l) \sin \varphi = 0 \\
 &-EJy_3^{III}(l) + EFx_5^I(l) \sin \varphi - EJy_5^{III}(l) \cos \varphi = 0 \\
 &EJy_3^{II}(l) = 0 \\
 &EJy_5^{II}(l) = 0
 \end{aligned} \quad (19)$$

Postępując podobnie dla pozostałych elementów oraz węzłów i wykorzystując równania (9) i (10) oraz warunki brzegowe (11), otrzymano układ 30 równań liniowych o współczynnikach zależnych od czasu, które zapisano w postaci macierzowej

$$A(t) \cdot C(t) = b(t) \quad (20)$$

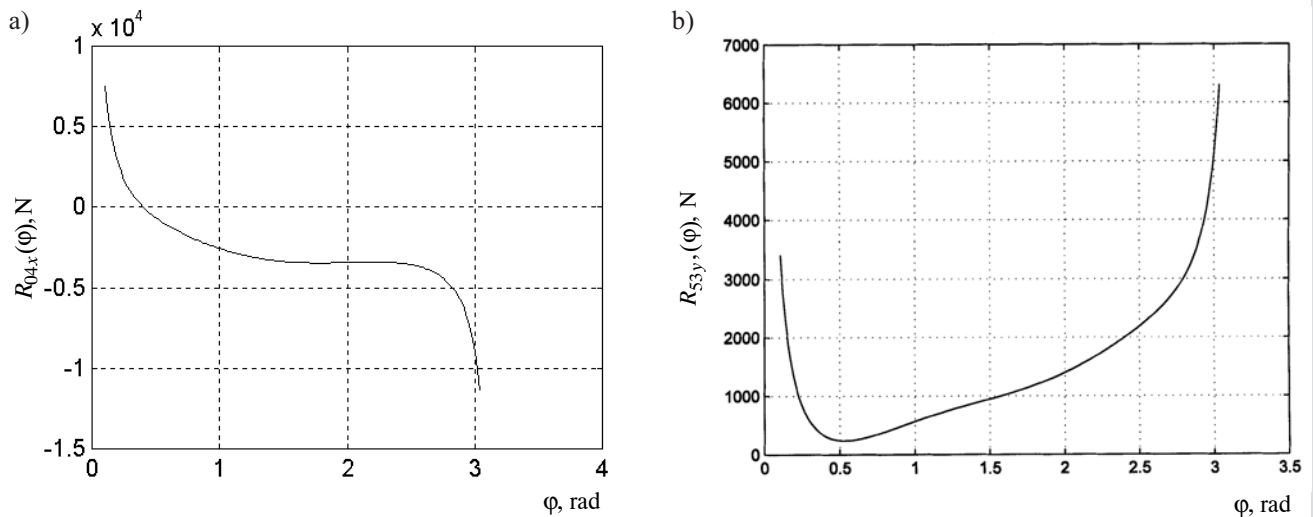
Układ równań rozwiązano, wyznaczając stałe $C_i(t)$ za pomocą programu MATLAB dla danych liczbowych:

$$\begin{aligned}
 l &= 0,5 \text{ m}, F = (0,02)^2 \text{ m}^2, J = (0,02)^4 \cdot 1/12 \text{ m}^4, \\
 \rho &= 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \omega = 50 \text{ s}^{-1}, \\
 \rho F l^2 \omega^2 &= 1950 \text{ N}, E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, M_5 = 500 \text{ N} \cdot \text{m}.
 \end{aligned}$$

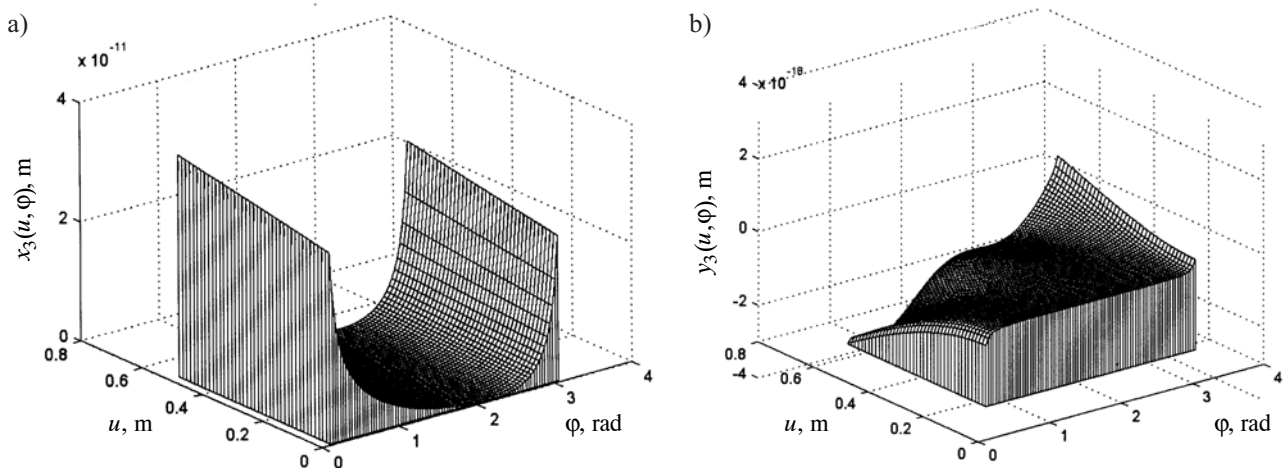
W wyniku rozwiązania problemu wyznaczono pole przemieszczeń uogólnionych $x_i(u)$ oraz $y_i(u)$ dla poszczególnych elementów struktury, na których podstawie można wyznaczyć współrzędne uogólnione sił wewnętrznych, sił reakcji na brzegach i ewentualnie naprężeń z odpowiednich zależności [2, 7].

Na rysunku 2 pokazano przykładowe wykresy przedstawiające współrzędne niektórych reakcji na brzegach elementów dla kąta $\varphi \in (0, \pi)$ dla dwóch rodzajów wymuszeń siłami bezwładności. Na przykład wykres $R_{04x}(0, \varphi)[N] = -EFx_4^I(0) = -C_{19}$ przedstawia współrzędną x reakcji, z jaką podstawa 0 działa na element 4 na jego lewym brzegu w węźle $z_5(1)$ w funkcji kąta obrotu korby $(0, \varphi)$, natomiast wykres $R_{53y}(l, \varphi)[N] = -EJy_3^{III}(l) = -B \sin \varphi - C_{15}$ przedstawia współrzędną y reakcji, z jaką element 5 działa na element 3 w węźle $w_4(2)$ w funkcji kąta obrotu korby $(0, \varphi)$.

Na rysunku 3 pokazano przykładowe wykresy przedstawiające współrzędne przemieszczeń dla elementu 3 mechanizmu $x_3(u, \varphi)$ i $y_3(u, \varphi)$ w funkcji przemieszczenia kątowego φ członu napędzającego oraz współrzędnej bieżącej u punktu leżącego na osi elementu nieodkształconego.



Rys. 2. Współrzędne wybranych sił reakcji na brzegach elementów: a) reakcja R_{04x} ; b) reakcja R_{53y}



Rys. 3. Współrzędne przemieszczeń dla elementu 3 mechanizmu: a) $x_3(u, \varphi)$; b) $y_3(u, \varphi)$

5. WNIOSKI

- Zastosowana nowa metoda obliczeń zwana jednolitą pozwala przeprowadzić obliczenia statyczne, dynamiczne lub kinetostatyczne ciągłych (płaskich lub przestrzennych) struktur sprężystych złożonych z elementów jednowymiarowych o dowolnej dodatniej lub ujemnej ruchliwości globalnej [6]. Metoda jest szczególnie przydatna w obliczeniach wytrzymałościowych układów statycznie niewyznaczalnych i daje wyniki zbliżone z takimi metodami, jak: metoda energetyczna, superpozycji i inne.
- Przesztyniony mechanizm równoległoboku przegubowego nie może pracować w położeniach członu napędzającego $\varphi = n\pi$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$, gdyż siły wewnętrzne w elementach mechanizmu, jak również siły reakcji na brzegach elementów w tych położeniach, dążą wówczas do nieskończoności. Podobny wniosek można otrzymać z analizy kinetostatycznej wykonanej metodą tradycyjną dla nieprzesztynionego mechani-

zmu równoległoboku przegubowego złożonego z elementów nieodkształcalnych.

- Wykresy przedstawione na rysunkach 2 i 3 dotyczą jedynie wymuszenia skupionymi siłami bezwładności unoszenia $\bar{B}_i$. Niemal identyczne wykresy otrzymuje się dla wymuszenia ciągłego siłami bezwładności $\bar{q}_i(u)$. Ponieważ różnice są praktycznie niezauważalne, ograniczono się do zilustrowania graficznego jedynie pierwszego przypadku. Wynika stąd wniosek, że na przebiegi wybranych wielkości fizycznych decydujący wpływ ma struktura układu zdefiniowana poprzez warunki brzegowe (11), natomiast charakter wymuszenia ma znaczenie drugorzędne.

Literatura

- [1] Jaworowski H.: *Analiza warunków brzegowych dla ciągłych prętowych struktur sprężystych*. VIII Sympozjum Rzeszowsko-Lwowskie „Zagadnienia Budownictwa i inżynierii środowiska”, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, wrzesień 1993

- [2] Jaworowski H., Kasprzyk S.: *Jednolita metoda rozwiązywania statycznych problemów brzegowych*. Kwartalnik AGH Mechanika, t. 12, z. 3, 1993, s. 161–181
- [3] Jaworowski H.: *Statyczna i dynamiczna analiza belki ciągłej z przegubami*. IV Międzynarodowe Sympozjum „Zastosowanie Metod Matematycznych w Nauce i Technice”, AGH, Kraków 20–21.06.1995, t. 2, s. 117–128
- [4] Jaworowski H.: *Obliczenia ram w ujęciu dystrybucyjnym*. Praca wykonana w ramach badań własnych, umowa 10.130.544, 1995
- [5] Jaworowski H.: *An Uniform Method of Solution of Continuous Elastic Bar Systems*. The VI International Symposium on Application of Mathematical Methods and Computers in Mining and Metallurgy, Prague, 6–19.10.1997
- [6] Jaworowski H.: *Zapis warunków brzegowych i wyznaczanie ruchliwości dla ciągłych prętowych struktur sprężystych*. Kwartalnik AGH Mechanika, t. 16, z. 1, 1997, s. 129–150
- [7] Jaworowski H.: *Obliczenia ram w ujęciu dystrybucyjnym*. Kwartalnik AGH Mechanika, t. 16, z. 3, 1997, s. 411–427
- [8] Jaworowski H., Majkut L.: *Analityczny opis mechanizmów z członami podatnymi*. Kwartalnik AGH Mechanika, t. 20, z. 3, 2001, s. 299–309
- [9] Jaworowski H., Felis J.: *Zastosowanie jednolitej metody rozwiązywania ciągłych prętowych struktur sprężystych w obliczeniach kinostatycznych przesztywnionych łańcuchów kinematycznych*. Materiały XVIII Ogólnopolskiej Konferencji Naukowo-Dydaktycznej „Teoria Maszyn i Mechanizmów”, Wrocław-Lądek Zdrój 18–20 września 2002
- [10] Jaworowski H., Marczuk R.: *Wpływ podatności więzów na widmo częstości drgań ramy*. Wibrotech 2003, X Konferencja Naukowa Wibrotechniki i Wibroakustyki, V Ogólnopolskie Seminarium „Wibroakustyka w Systemach Technicznych”, AGH, Kraków 24–25.03.2003
- [11] Jaworowski H., Felis J.: *Obliczenia kinostatyczne przesztywnionych łańcuchów kinematycznych*. Materiały XIX Ogólnopolskiej Konferencji Naukowo-Dydaktycznej „Teoria Maszyn i Mechanizmów”, Kraków 2004
- [12] Kolovsky M.Z., Efgrafov A.N., Semenov Ya.A., Slousch A.V.: *Advanced Theory of Mechanisms and Machines*. NY, Springer 2000
- [13] Miller S.: *Teoria maszyn i mechanizmów. Analiza układów kinematycznych*. Wrocław, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej 1996, ISBN 83-7085-208-4
- [14] Solecki R., Szymkiewicz J.: *Układy prętowe i powierzchniowe*. Warszawa, Arkady 1964