AKADEMIA GÓRNICZO – HUTNICZA
im. Stanisława Staszica w Krakowie
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn

PRACA DOKTORSKA

Krzysztof Michalczyk

WPŁYW SPOSOBU MOCOWANIA SPRĘŻYN ŚRUBOWYCH NACISKOWYCH NA ICH WYBRANE WŁAŚCIWOŚCI EKSPLOATACYJNE

Promotor:
dr hab. inż. Józef Salwiński Prof. AGH

Kraków 2009

Wpływ sposobu mocowania sprężyn śrubowych naciskowych na ich wybrane właściwości eksploatacyjne

Spis treści

Wprowadzenie.....1

Cel i zakres pracy.....3

1. Przegląd typowych sposobów podparcia sprężyn śrubowych naciskowych.....5
2. Naprężenia i odkształcenia sprężyny dla przypadku obrotowego i nieobrotowego podparcia końców.....31
3. Analiza naprężeń dla wybranych sposobów mocowania końców sprężyn śrubowych zwijanych z drutu.....51
4. Analiza naprężeń dla wybranych sposobów mocowania końców sprężyn śrubowych, wykonywanych technologią ubytkową.....64
5. Porównanie charakterystyk sprężyn o otwartych i zamkniętych zwojach końcowych.....74
6. Analiza nowej konstrukcji wkrętki mocującej sprężynę śrubową.....77
7. Analiza wpływu podparcia sprężyny na jej podatność na utratę stateczności.....85

Podsumowanie.....98

Literatura.....101

Wprowadzenie

Pomimo szybkiego rozwoju konstrukcyjnego i technologicznego elementów sprężystych z materiałów gumo-pochodnych, sprężyny stalowe stanowią podstawowy składnik zawieszeń samochodów, pojazdów szynowych, układów podparcia maszyn wibracyjnych, układów wibroizolacji i wielu innych. Dotyczy to szczególnie tych przypadków, w których wymagana jest długowieczność, odporność temperaturowa, odporność na paliwa płynne i smary, oddziaływanie światła, ozonu itp. Sprężyny stalowe wyróżniają się też stabilnością czasową właściwości sprężystych i nośności, jednakowymi wartościami statycznych i dynamicznych modułów sprężystości a także nie ulegają znacznemu nagrzewowi w trakcie długotrwałych wysokoamplitudowych cyklicznych zmian obciążeń. Korzystne cechy eksploatacyjne sprężyn stalowych występują jedynie wówczas, gdy nie zachodzi obawa ich zniszczenia zmęczeniowego na skutek miejscowej koncentracji naprężeń lub drgań własnych sprężyny. Praktyka wskazuje że zniszczenie elementu sprężystego następuje najczęściej w pobliżu zwojów końcowych. Istniejące w dostępnej literaturze zależności, służące do obliczania sprężyn śrubowych nie uwzględniają warunków zamocowania zwojów końcowych. Istnieje szereg konstrukcji sprężyn w odniesieniu do których zastosowanie klasycznych związków na naprężenia prowadzi do ich niedoszacowania. Przykład tego typu sprężyny przedstawiono poniżej.

Sprężyna śrubowa o zwojach końcowych zamkniętych

W większości przypadków użycia sprężyn śrubowych do mocowania elementów maszyn stosuje się najczęściej – nawet w konstrukcjach podwieszanych – sprężyny

śrubowe naciskowe. Sprężyny te, oprócz wymienionych wyżej czynników ryzyka, są narażone na utratę stateczności, już przy bardzo niewielkich smukłościach. Przykładowo smukłość graniczna, dla której zapewniona jest stateczność stalowej sprężyny zwijanej z drutu okrągłego i podpartej przegubowo wynosi około 2,6 natomiast przy mocowaniu końców sprężyny na stabilnych, płaskich podporach smukłość ta wynosi około 5,1. W praktyce inżynierskiej często spotyka się układy mocowania składające się z szeregowego połączenia podkładki elastomerowej i sprężyny a analiza literaturowa wykazała brak zależności określających siłę krytyczną dla tego rodzaju podparcia.

Oprócz czynników konstrukcyjnych i technologicznych o charakterze typowym dla wszystkich elementów pracujących przy obciążeniach zmiennych [25] sprężyny stalowe wykazują dużą wrażliwość na warunki zamocowania zwojów skrajnych [8], w tym na kształt zwojów końcowych i sposób przyłożenia do nich sił ustalających (zamocowania). Czynnikiem o decydującym znaczeniu dla wytrzymałości zmęczeniowej jest też odporność na wysokoczęstotliwościowe składowe wymuszeń wzbudzających drgania własne zwojów sprężyn. W warunkach niekorzystnych wzbudzić się na tej drodze mogą intensywne szybkozmienne drgania sprężyn, powodujące znaczne naprężenia zmienne zarówno w skrajnych jak i wewnętrznych zwojach sprężyny [37, 38]. Poszukiwane są zatem rozwiązania zapewniające równocześnie dobre właściwości tłumiące, niskie wartości naprężeń w okolicy podparcia i niską podatność na utratę stateczności.

Cel i zakres pracy

Celem głównym pracy jest określenie wpływu konstrukcji elementów mocujących końce sprężyn śrubowych naciskowych na ogólny stan naprężeń w sprężynie ze szczególnym uwzględnieniem lokalnej koncentracji naprężeń w zwojach końcowych.

Ponadto postawiono w pracy **cele dodatkowe** o charakterze aplikacyjnym, związane z realizacją zadań głównych ,takie jak:

- Dobór parametrów geometrycznych konstrukcji wybranych układów podparcia dla zapewnienia redukcji lokalnych stref podwyższonych naprężeń,
- opracowanie nowego rozwiązania konstrukcyjnego zapewniającego zarówno niski poziom maksymalnych naprężeń w sprężynie jak i zwiększenie tłumienia drgań przenoszonych przez układ podparcia na bazie sprężyn śrubowych.
- Określenie wpływu sposobu podparcia sprężyn śrubowych naciskowych na ich podatność na utratę stateczności

Realizacja powyższych celów narzuca następujący **zakres pracy:**

- Wyznaczenie wektora przemieszczeń punktu końcowego sprężyny, w celu określenia zmian średnicy zwoi współpracujących z podporą oraz kąta skręcenia czół sprężyny i naprężeń wynikających z narzuconych sprężynie więzów. Podjęcie tego problemu podyktowane zostało tym, że szeroka analiza literaturowa i wstępne badania wykazały że znana m. in. z [8] i [27] zależność

$$\vartheta(M_o = 0) = \frac{L}{EJ}\nu M \sin\gamma\cos\gamma$$

(gdzie: L – długość drutu sprężyny, M – moment siły poosiowej P na ramieniu równym promieniowi nominalnemu sprężyny, γ - kąt wzniosu linii śrubowej), daje wyniki rozbieżne z wynikami uzyskanymi na drodze doświadczalnej, costwierdzono w badaniach pilotażowych.

- Przeprowadzenie analiz MES rozkładu naprężeń w zwojach końcowych i środkowych sprężyn naciskowych zwijanych z drutu, dla typowych sposobów podparcia :

a) sprężyny o zwojach przygiętych i zeszlifowanych opartej swobodnie na podporach o znikomym tarciu,

b) sprężyny o zwojach przygiętych i zeszlifowanych opartej na podporze pozwalającej jedynie na swobodny obrót czół sprężyny,

c) sprężyny o zwojach przygiętych i zeszlifowanych opartej na podporach odbierających końcom sprężyny wszystkie stopnie swobody,

d) sprężyny posadowionej bezpośrednio na podkładce gumowej o typowej dla tego typu zastosowań twardości,

e) sprężyny nakręconej na wkrętkę ustalającą,

f) sprężyny nakręconej na wkrętkę o zmodyfikowanej konstrukcji.

- Przeprowadzenie analiz MES rozkładu naprężeń w sprężynach naciskowych, o zamkniętych zwojach końcowych uzyskiwanych metodą obróbki ubytkowej.
- Wykonanie analiz MES dla sprężyn o zamkniętych zwojach końcowych ze zmodyfikowanymi zakończeniami i określenie rozwiązania gwarantującego redukcję naprężeń w miejscach ich koncentracji do poziomu nie odbiegającego od wartości nominalnych.
- Porównanie charakterystyk siłowo – odkształceniowych dla sprężyn o zwojach końcowych zamkniętych i o zwojach końcowych otwartych.

  Do realizacji symulacji Metodą Elementów Skończonych wybrano pakiet ANSYS w postaci modułów Multiphysics oraz Workbench.
- Analiza stateczności sprężyn śrubowych naciskowych w przypadku elastycznego podparcia końców.

1. Przegląd typowych sposobów podparcia sprężyn śrubowych naciskowych.

Bardzo szerokie zastosowanie sprężyn śrubowych w budowie maszyn, sprawia że konstruktorzy poszukują sposobów ich mocowania, odpowiednich dla konkretnych zastosowań. W szczególności sprężyny śrubowe naciskowe wymagają podparcia zapewniającego niską koncentrację naprężeń w zwojach końcowych oraz odporność na utratę stateczności pod działaniem obciążeń. Istnieje wiele innych uwarunkowań wymuszających takie czy inne rozwiązania mocowań sprężyn śrubowych naciskowych. Do najczęstszych można zaliczyć zabezpieczenie przed wzbudzaniem w zwojach sprężyn drgań własnych, zabezpieczenie sprężyn naciskowych przed wypadnięciem z gniazda lub przesuwem poprzecznym w wyniku przypadkowego zadziałania siły w kierunku odwrotnym.

Rodzaj zamocowania wpływa również w sposób istotny na sztywność poprzez zmianę stosunku zwojów czynnych do biernych. Ponieważ sprężyny naciskowe pracują najczęściej pod obciążeniem cyklicznie zmiennym mogą zatem w wyniku współpracy z oporą lub pomiędzy sąsiednimi zwojami w miejscu mocowania ocierać się o siebie bądź też wygniatać co prowadzi do powstania karbu zmęczeniowego i w efekcie pęknięcia.

Najczęściej spotykanym sposobem mocowania sprężyny naciskowej jest podparcie płaskie pokazane na Rys.1.1.

Rys.1.1 Przykłady płaskiego podparcia sprężyn śrubowych naciskowych

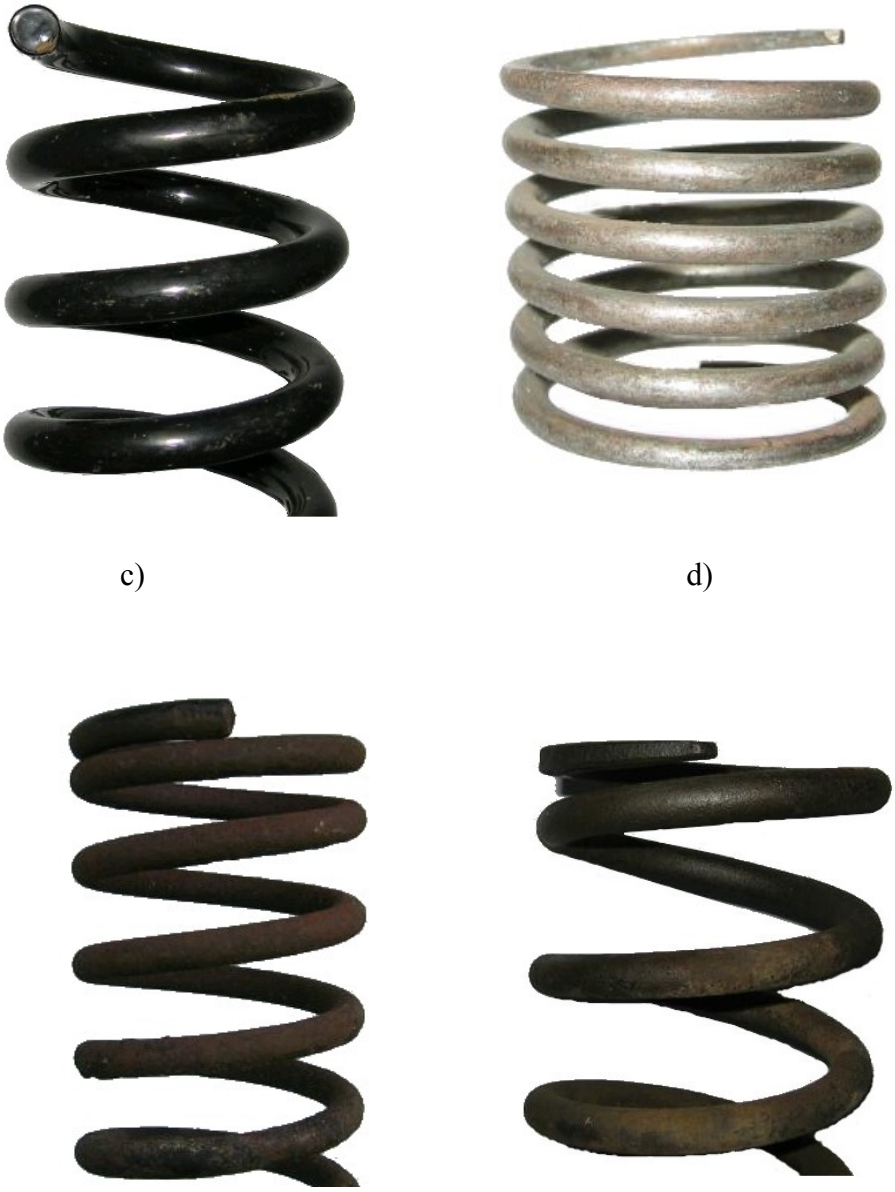
Podparcie tego typu charakteryzuje się najprostszą budową, niejednokrotnie może go stanowić płaska powierzchnia belki podporowej, fundamentu, itp. Mocowanie tego typu znajduje zastosowanie w układach zawieszeń pojazdów samochodowych, motocykli, w układach podparcia i wibroizolacji maszyn i urządzeń o dużych reakcjach dynamicznych na podłoże, takich jak dmuchawy, wentylatory, sprężarki, wirówki itp.

Można wyróżnić cztery podstawowe rodzaje zakończenia sprężyn współpracujących z tego typu mocowaniami:

- proste zakończenie zwoju ciętego (Rys.1.2a) charakteryzujące się stykiem punktowym, w wyniku czego występuje duża mimośrodowość obciążenia. W takim przypadku sprężyna na ogół musi być prowadzona na trzpieniu lub w tulei celem jej zabezpieczenia przed utratą stateczności. Aby zmniejszyć skłonność sprężyny do wyboczenia, liczba zwojów powinna być połówkowa. Zaletą tego rozwiązania jest natomiast brak zwojów biernych a co za tym idzie duża zwartość.
- Zwoje końcowe zostają zeszlifowane w płaszczyźnie prostopadłej do osi sprężyny (Rys.1.2b). Takie zakończenie zwoju sprężyny jest podatne na pęknięcie, charakteryzuje się niewielką powierzchnią styku z podporą, tym większą jednak im mniejszy jest kąt wzniosu linii śrubowej. Mimośrodowość obciążenia jest dosyć duża mniejsza jednak niż w przypadku poprzednim. Liczbę zwojów biernych w takiej sprężynie można przyjąć jako jeden.
- Końcowe zwoje są ucięte prosto i przyłożone bez szlifowania (Rys.1.2c). W trakcie ściskania takiej sprężyny w pewnym momencie dochodzi do styku krawędzi cięcia zwoju końcowego z sąsiednim zwojem w wyniku czego zwój ten ulega zginaniu [8]. Dodatkowo w miejscu styku dochodzi do wycierania i wygniatania co znacznie zmniejsza wytrzymałość zmęczeniową. Pod obciążeniem dodatkowo koniec zwoju odgina się co prowadzi do styku punktowego. Liczbę zwojów biernych przyjmuje się równą dwu.
- Zwoje końcowe są przygięte i zeszlifowane (Rys.1.2d). Duża płaszczyzna styku, niewielka mimośrodowość obciążenia, stąd wysoka stabilność. Liczba zwojów biernych wynosi dwa.

Liczba zwojów biernych w rzeczywistości może się różnić od wartości podanych powyżej i jeżeli stanowi istotny parametr musi zostać określona dla konkretnej sprężyny.

a) b)



c) d)

Rys.1.2. Sposoby zakończenia sprężyn mocowanych na podporach płaskich

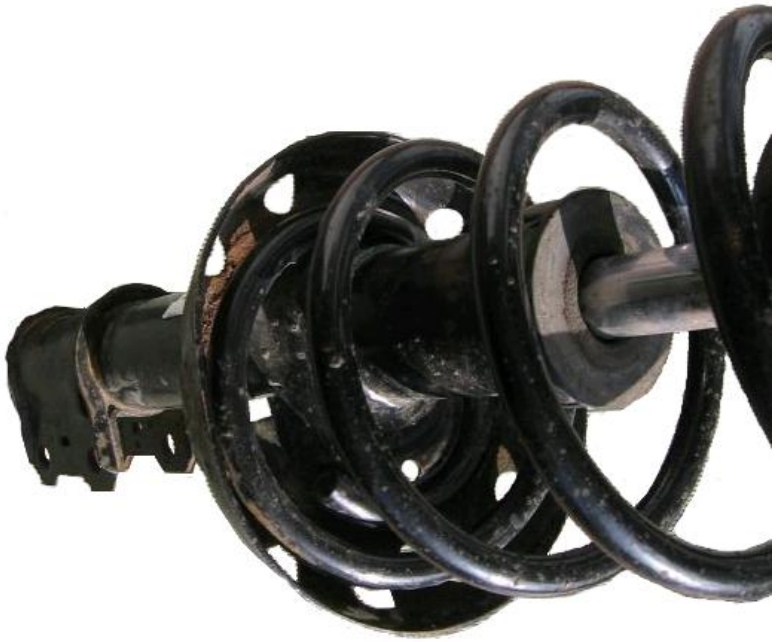
Innym, również często spotykanym sposobem mocowania sprężyn śrubowych naciskowych jest mocowanie przy pomocy blaszanego talerza z wytłoczonym kanałem o kształcie linii śrubowej. Kanał ten ma długość jednego zwoju sprężyny i pozwala na mocowanie na nim sprężyny o zwojach końcowych o kształcie jak na Rys.1.2a). Jest to

rozwiązanie korzystne w aspekcie ekonomicznym, gdyż sprężyna po zwinięciu i ucięciu nie wymaga żadnych dodatkowych operacji zmieniających kształt jej zwojów końcowych a tym samym jest tańsza. Na Rys.1.3. przedstawiono fragment amortyzatora samochodu *Łada Samara*, reprezentujący ten sam typ mocowania jednak zwój końcowy został nieco przygięty, dzięki czemu talerz nie wymaga tak głębokiego tłoczenia.

Rys.1.3. Mocowania na talerzu z kanałem prowadzącym o kształcie linii śrubowej

W trakcie ściskania kąt wzniosu linii śrubowej sprężyny maleje i zwiększa się powierzchnia styku pomiędzy nią a talerzem. Osiadanie zwojów końcowych na powierzchni talerzy powoduje zmniejszanie się liczby zwojów czynnych co wpływa na wzrost sztywności sprężyny, tym bardziej im mniejsza jest całkowita liczba zwojów. Progresywna charakterystyka jest szczególnie pożądana w wypadkach gdy obciążenie sprężyny ma charakter szybkozmiennego wymuszenia mogącego wzbudzać w niej drgania rezonansowe. Ponieważ częstość drgań własnych takiej sprężyny zmienia się wraz ze zmianą obciążenia zatem przy stałej częstości wymuszenia nie dochodzi do rezonansu. Bardzo szerokie użycie tego typu mocowania w pojazdach samochodowych ma jednak inną przyczynę. Progresywna charakterystyka sprężyny uzyskana dzięki osiadaniu zwojów korzystnie wpływa na komfort i bezpieczeństwo jazdy [47]. Podobny efekt osiadania zwojów końcowych uzyskuje się

poprzez zastosowanie mocowania pokazanego na Rys.1.4., gdzie zwoje skrajne mają zmniejszający się ku końcowi promień wodzący.

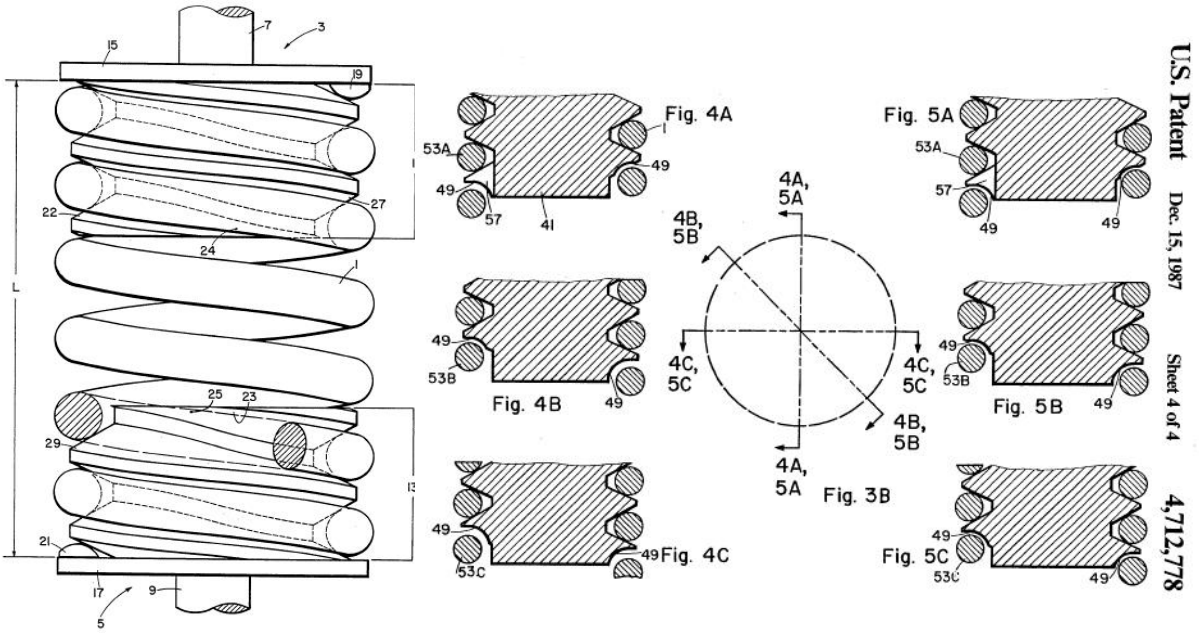


Rys.1.4. Mocowanie sprężyny na amortyzatorze przednim w samochodzie *Opel Vectra*

W maszynach wibracyjnych, w których często zdarza się że siła nie tylko nie ma stałego zwrotu ale również zmienia się jej kierunek, sprężyny poza przenoszeniem sił pionowych mają za zadanie przenosić obciążenia których składowa pozioma jest różna od zera. Muszą być wobec tego umocowane w sposób zapewniający stałe położenie zwojów końcowych. Zadanie to spełnia mocowanie pokazane na Rys.1.5., nazywane wkrętką. Dzięki głębokim rowkom o kształcie dopasowanym do kształtu zwojów sprężyny, wkrętka zabezpiecza sprężynę przed wypadnięciem z gniazda lub przesunięciem się w kierunku poziomym. Wadą wkrętek tego typu jest wywoływanie w trakcie ściskania sprężyny w zwoju opuszczającym rowek prowadzący zginania.

Rys.1.5. Mocowanie sprężyny we wkrętce

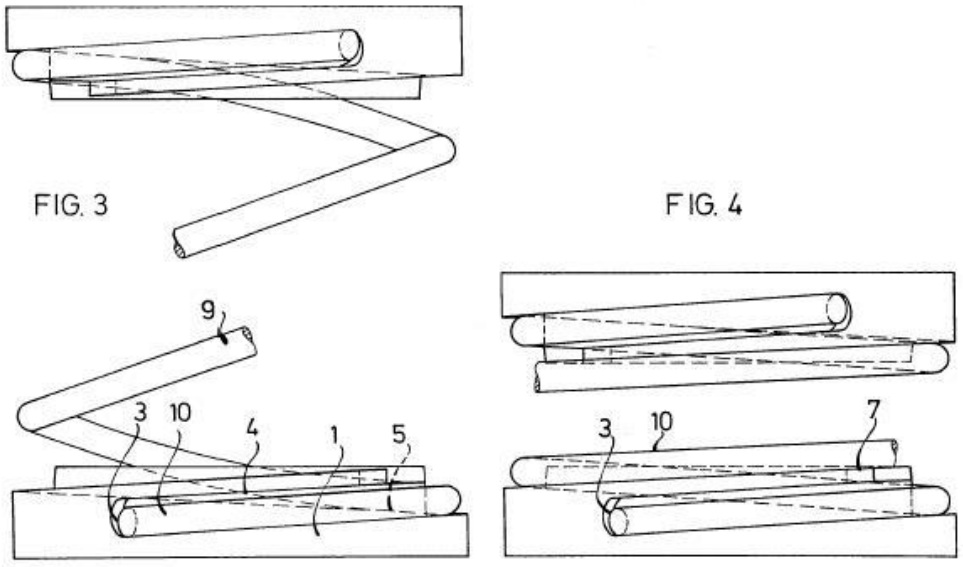
Podobne mocowanie będące przedmiotem wniosku patentowego [55] pokazano na Rys.1.6.



Rys.1.6. Mocowanie sprężyny we wkrętce zapewniającej stałą liczbę zwojów czynnych

Zastosowanie tego rodzaju rozwiązania autorzy upatrują w układach wibroizolacji mechanizmów o posuwisto-zwrotnym ruchu organu roboczego, gdzie sprężyna jest zarówno

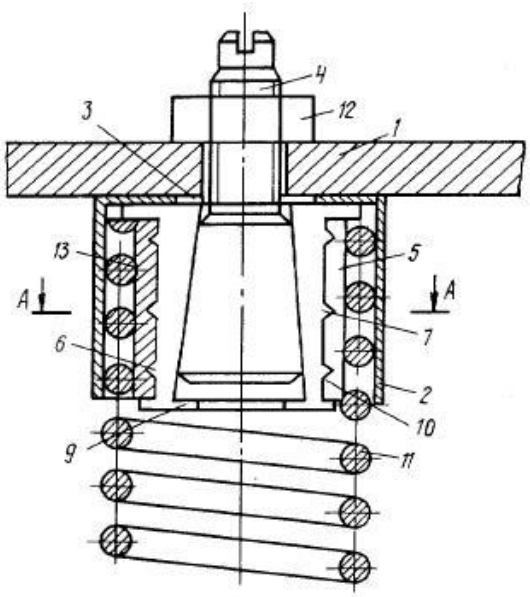
rozciągana jak i ściskana. O sztywności sprężyny oprócz innych parametrów geometrycznych decyduje liczba zwojów czynnych, która jak wspomniano powyżej może być różna dla sprężyn o jednakowej całkowitej liczbie zwojów ale o innych warunkach podparcia. W przypadku najczęściej stosowanych wkrętek (Rys.1.5) liczba zwojów czynnych sprężyny podczas ściskania jest mniejsza niż w trakcie rozciągania. Prezentowane rozwiązanie charakteryzuje się tym że czynna liczba zwojów sprężyny jest jednakowa zarówno przy ściskaniu jak i przy rozciąganiu. Może to stanowić istotną korzyść w przypadkach gdy wymagana jest ściśle określona i niezmienna częstość drgań własnych układu, np. w dynamicznym eliminatorze drgań Frahma. Jak widać na przekrojach pokazanych na Rys.1.6. zostało to uzyskane dzięki łukowym podtoczeniom rowka wyprowadzającego z wkrętki. Przekroje 4A, 4B, 4C pokazują współpracę sprężyny z wkrętką w stanie nieobciążonym a przekroje 5A, 5B, 5C podczas ściskania sprężyny.
Analogiczne rozwiązanie zaprezentowano w [47] przy czym rowek prowadzący ma przekrój prostokątny (Rys.1.7). Autorzy tego rozwiązania nie przewidują jednak jego zastosowania w układach w których sprężyny może być również rozciągana.



Rys.1.7. Mocowanie sprężyny we wkrętkach zmieniające liniową charakterystykę sprężyny na progresywną

Wkrętka ta może współpracować ze sprężynami o zwojach końcowych jak na Rys.1.2a a zatem ekonomicznie efektywnymi. Podobnie jak mocowania na Rys.1.3. i Rys.1.4. zmienia

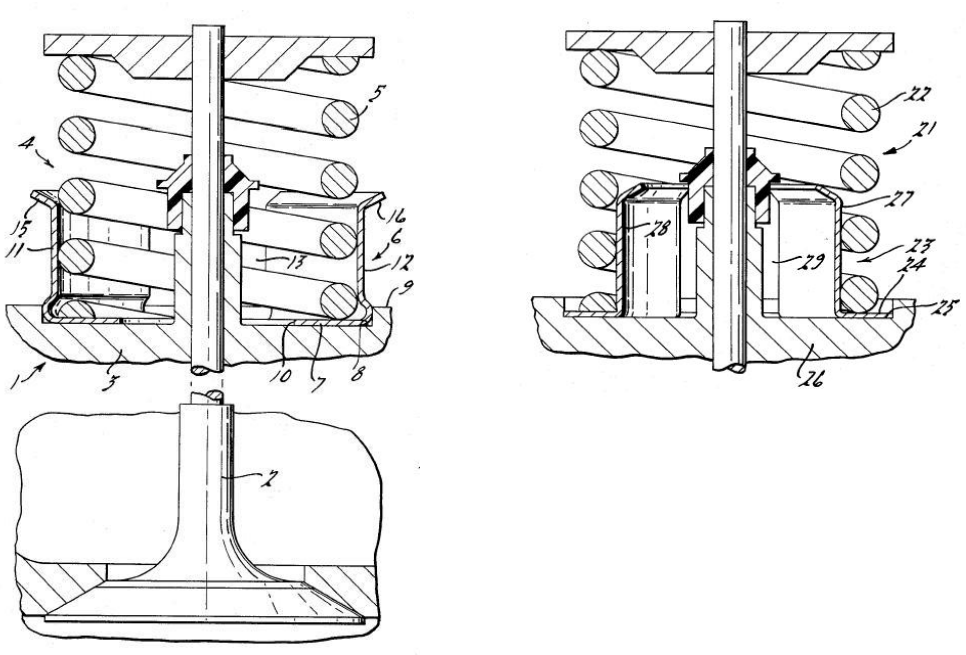
ona charakterystykę sprężyny z liniowej na progresywną jednak dzięki temu że zwoje końcowe mogą osiadać na rowku prowadzącym na długości znacznie większej od jednego zwoju, możliwa jest do osiągnięcia bardziej progresywna charakterystyka. Podobne wkrętki o nieco zmodyfikowanych wymiarach rowków prowadzących mają zastosowanie przy mocowaniu sprężyn naciągowych [50].
Rozwiązanie na Rys.1.8 posiadające podobne właściwości do mocowania we wkrętce przedstawiono w [49].



Rys.1.8. Opatentowany sposób mocowania sprężyn przy pomocy pośredniego połączenia ciernego

Mocowanie przedstawione na Rys.1.8 składa się ze stalowej tulei (2) w którą włożono kilka końcowych zwojów sprężyny. Wewnątrz sprężyny znajduje się pierścień sprężysty, przecięty i wypełniony w sposób pokazany na rysunku plastycznym materiałem np. aluminium. Nagwintowany pręt o zakończeniu stożkowym rozpiera pierścień i tym samym wywołuje sprzężenie cierne pomiędzy sprężyną a mocowaniem. Wadą takiego rozwiązania jest ocieranie się zwoju wychodzącego z mocowania o tuleję zewnętrzną i pierścień wewnętrzny. Może to być przyczyną powstania nieciągłości materiałowej, mogącej doprowadzić do gwałtownego zniszczenia sprężyny [73].

Inny sposób mocowania końców sprężyn, w którym tarcie jest zjawiskiem pożądanym przedstawiono na Rys.1.9. [54].



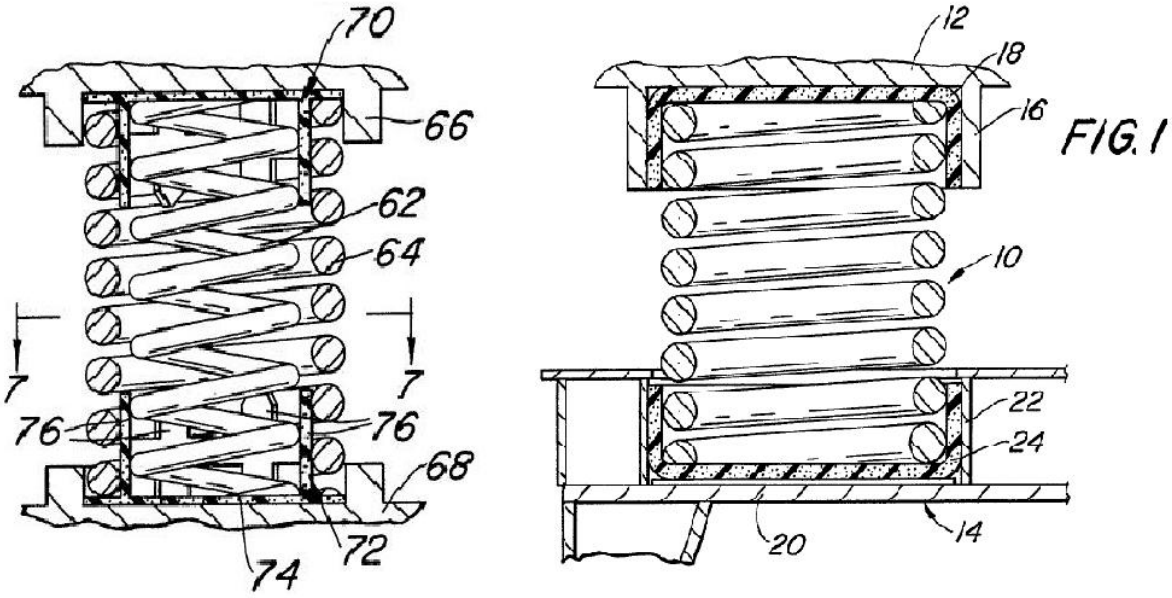
Rys.1.9. Mocowanie sprężyny zaworowej, tłumiące drgania na zasadzie tarcia

Sprężyny zaworowe podlegają ogromnym obciążeniom dynamicznym wywołującym na ich powierzchni naprężenia zastępcze o wartościach do 2000 MPa. W testach silnikowych poddawane są 3 x 10^8 cyklom obciążenia przy dopuszczalnej awaryjności 1,5% [40]. Ze wszystkich elementów w układzie rozrządu silnika spalinowego mają one najniższą częstość drgań własnych i z tego względu odgrywają decydującą rolę w obliczeniach oddziaływań dynamicznych [15]. W wyniku wystąpienia drgań własnych sprężyn zaworowych może dochodzić do rozszczelnienia zaworu, w następstwie czego dochodzi do kolizji pomiędzy nim a tłokiem co skutkuje poważną awarią silnika. Jak widać na Rys.1.9. tuleja może opasać sprężynę z zewnątrz jak i rozpierać ją od wewnątrz. Sposób pierwszy jest korzystniejszy gdyż sprężyna ściskana powiększa nieznacznie swą średnicę i zwiększa tym samym nacisk na tuleję. Pokazany na Rys.1.9. sposób mocowania zapewnia tłumienie drgań własnych sprężyny przy zachowaniu jej liniowej charakterystyki poprzez tarcie pomiędzy zwojami końcowymi a tuleją rozciętą na pół celem zwiększenia jej elastyczności. Tuleja wykonana jest z sprężystego metalu. Taki sposób tłumienia drgań nie jest jednak korzystny ze względu na wytrzymałość zmęczeniową sprężyny ponieważ powoduje wycieranie warstwy wierzchniej

sprężyny. Jak wskazano w [70, 75] poza geometrią istotny wpływ na wytrzymałość zmęczeniową wywiera stan powierzchni. Autorzy [6, 21] stwierdzają wręcz że w rzeczywistości stan powierzchni sprężyny ma znacznie większy wpływ na wytrzymałość zmęczeniową niż jej własności materiałowe.

Podobne rozwiązanie przedstawiono w [43] gdzie uniknięto niekorzystnego zjawiska wycierania drutu sprężyny poprzez zastąpienie metalowej elastycznej tulei, tuleją sztywną wyłożoną wewnątrz materiałem o wysokich właściwościach tłumiących (Rys.1.10).

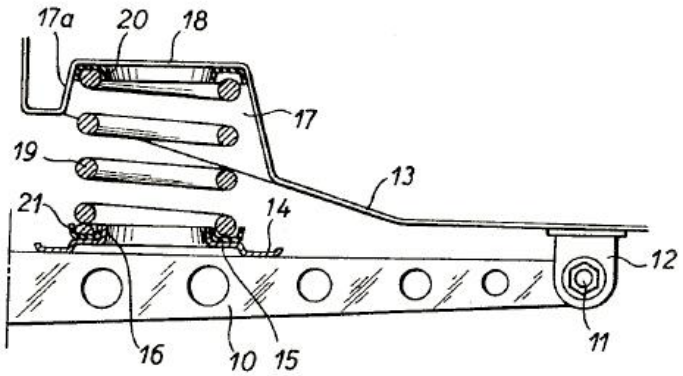
a) b)



Rys.1.10. Mocowanie sprężyn w układach podparcia wagonów kolejowych na wózkach

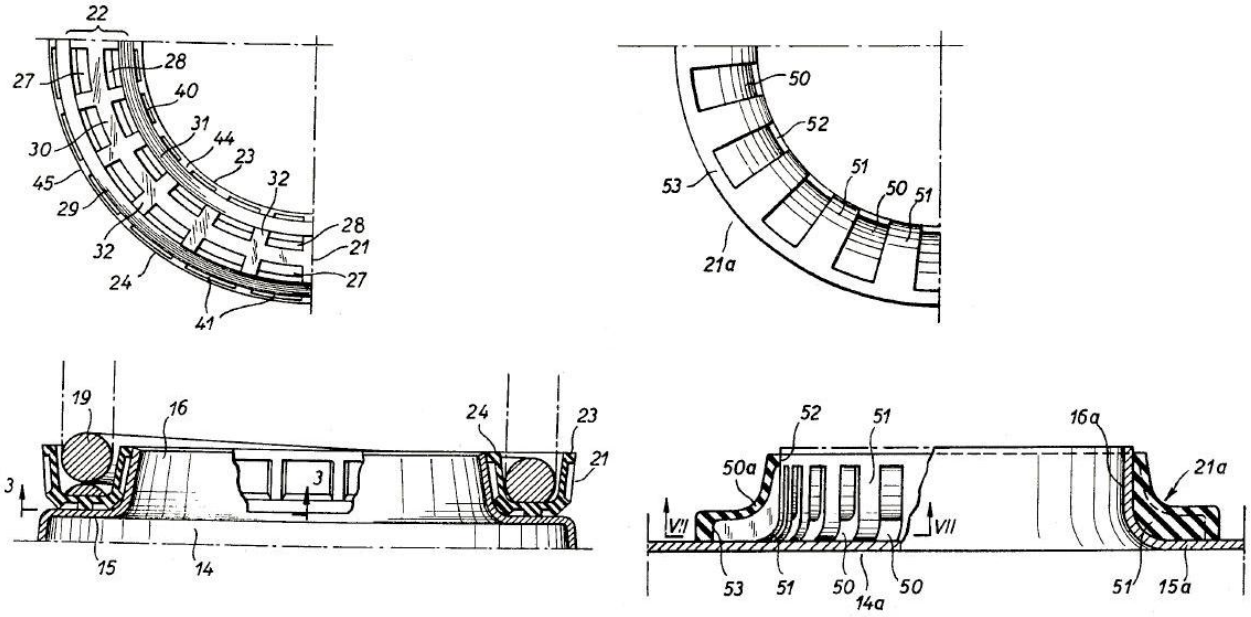
Patent ten dotyczy sposobu mocowania sprężyn utrzymujących wagon kolejowy na wózkach zwrotnych. Kilka końcowych zwojów sprężyn podpierających znajduje się w kontakcie z elementem tłumiącym wykonanym np. z gumy. W przypadku gdy celem zwiększenia nośności układu stosuje się współśrodkowe mocowanie sprężyn, tuleja z elastomeru może być umieszczona w przestrzeni pomiędzy sprężynami (Rys.1.10.b).

Nieco bardziej złożoną geometrię posiadają gumowe elementy podpierające sprężynę w układzie zawieszenia samochodowego zaproponowanego w [52] i przedstawionego na Rys.1.11.



Rys.1.11. Fragment zawieszenia samochodowego z zastosowaniem wibroizolującej podkładki (21) pod sprężyną podtrzymującą

Autorzy patentu zwracają uwagę że sprężyny metalowe dobrze blokują przenoszenie drgań o niskich częstotliwościach natomiast nie zapobiegają a czasem nawet wzmacniają fale o częstotliwościach słyszalnych i wyższych. Propagacja takich drgań w pojazdach samochodowych może skutkować niebezpiecznymi naprężeniami zmęczeniowymi, umacnianiem się metalu w połączeniach spawanych i zgrzewanych i równocześnie powodować nieprzyjemny hałas we wnętrzu samochodu. Próby eliminacji tego problemu poprzez oddzielanie zwojów końcowych sprężyn od metalowego talerza podpierającego za pomocą elastomerowej podkładki o przekroju w kształcie litery U lub L dają dobre rezultaty jedynie w przypadku częstotliwości wyższych niż około 5000 cykli/sekundę. Jednak najbardziej uciążliwe fizjologicznie częstotliwości wynoszące od 40 do 5000 cykli/sekundę są tym sposobem tłumione niewystarczająco. Autorzy patentu twierdzą iż jego zastosowanie daje wyniki znacząco lepsze od wspomnianych podkładek. Podają również że najlepsze rezultaty uzyskuje się przy użyciu gumy o twardości Shore`a 60 do 85 z odpowiadającym jej modułem sprężystości w granicach od 4 do 8 MPa.

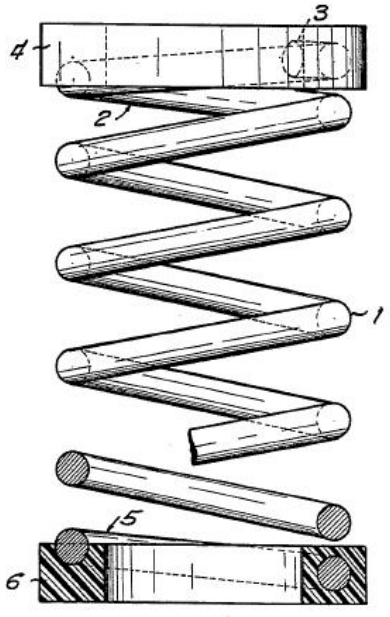


Rys.1.12. Dwa przykłady wibroizolujących podkładek gumowych, podpierających końce sprężyn w zawieszeniu samochodu

Rys.1.12 przedstawia dwa rozwiązania podkładek wibroizolujących. Obydwie charakteryzują się dużą ilością wgłębień rozmieszczonych równomiernie wzdłuż całego ich obwodu. Wgłębienia te zwiększają powierzchnię swobodną podkładki i pozwalają ściskanej gumie na przemieszczanie się i tym samym wykonywanie pracy. W przypadku wspomnianych gładkich podkładek U i L kształtnych guma ściśnięta pomiędzy zwojem sprężyny a metalowym talerzem ma niewielkie możliwości na „wypłynięcie. Pozbawiona możliwości „wypłynięcia" nie będzie pracować i dyssypować energii drgań. Tego typu podkładki znalazły szerokie zastosowanie w przemyśle samochodowym. Jedną z podobnych rozwiązań przedstawia Rys.1.13. Są to podkładki dostępne w obrocie handlowym .

Rys.1.13. Gumowe podkładki, dostępne handlowo, stosowane pod sprężyny w przednim zawieszeniu samochodu Ford Transit

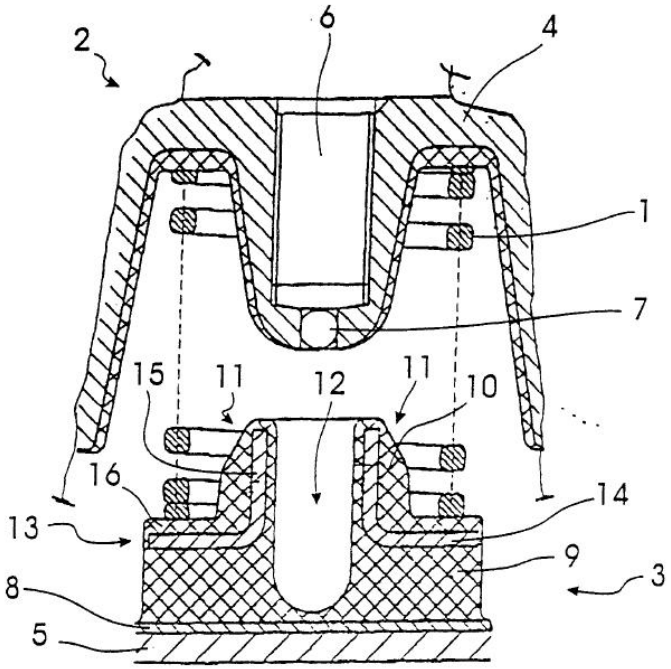
Ponieważ sprężyny jako elementy wykonane najczęściej ze stali posiadają znikome właściwości tłumiące, często mocowane są na podporach wykonanych w całości lub częściowo z elementów o wysokich właściwościach tłumiących. Takie rozwiązanie zaproponowane w [46] przedstawiono na Rys.1.14.



Rys.1.14. Mocowanie sprężyny w elastomerze

Autorzy tego patentu podają jako istotną zaletę swojego rozwiązania minimalizację kosztu wykonania sprężyny, która po ucięciu na odpowiednią długość nie wymaga żadnych dodatkowych zabiegów kształtujących jej zwoje końcowe przy zachowaniu wszystkich zalet mocowania na zeszlifowanych i przyłożonych zwojach końcowych. Dodatkową zaletą tego sposobu jest cicha praca sprężyny (brak styku metalicznego) oraz łatwość montażu np. w pojazdach samochodowych gdyż nie wymaga on stosowania specjalnie tłoczonych talerzy takich jak np. na Rys.1.3.

Nieco inne rozwiązanie (Rys.1.15) przedstawiono w [42]. Obydwa końce sprężyny muszą być przygięte i zeszlifowane, górne czoło sprężyny opiera się o cienką warstwę gumy zawulkanizowanej na powierzchni gniazda elementu podpieranego. Dolny koniec sprężyny oparty jest również na cienkiej warstwie gumy ale zawulkanizowanej na stalowym talerzu centrującym który przymocowany jest do podstawy za pomocą zawulkanizowanej, grubej gumowej podkładki o kształcie pierścieniowym.

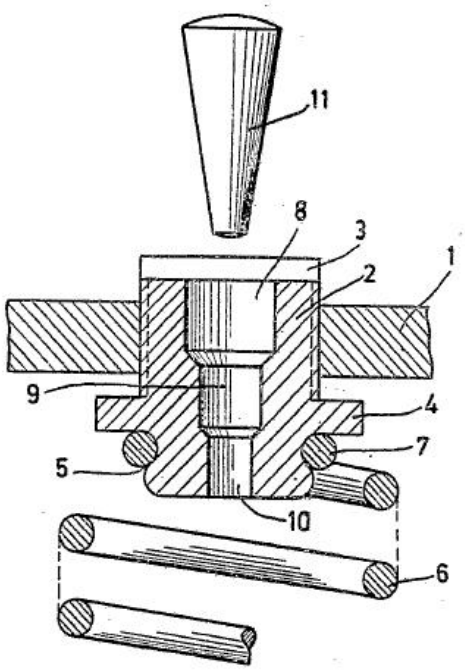


Rys.1.15. Mocowanie elastyczne

Autorzy tego rozwiązania upatrują jego zastosowanie w elastycznych mocowaniach silników pojazdów samochodowych. Dzięki zastosowaniu cienkich warstw gumy oddzielających sprężynę od elementów łączonych uniknięto styku metalicznego, mogącego powodować wycieranie warstwy ochronnej na drucie sprężyny i tym samym powstawanie ognisk korozji.

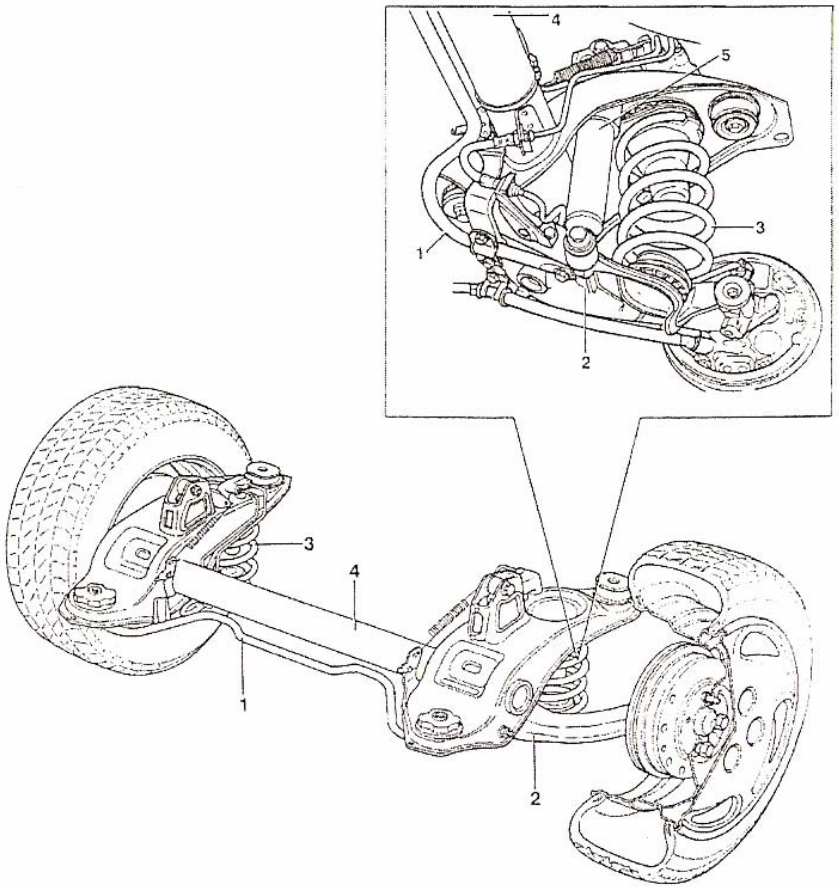
Z kolei gruba pierścieniowa podkładka gumowa w dolnym mocowaniu zapewnia dobre tłumienie drgań własnych sprężyny. Jak wspomniano powyżej guma posiada *liczbę Poissona* równą około 0,5 a więc jest praktycznie nieściśliwa. Aby zatem element gumowy mógł poprawnie pracować musi posiadać możliwie dużą powierzchnię swobodną. Pierścieniowy kształt podkładki gumowej nie jest więc przypadkowy. Autorzy patentu zwrócili również uwagę na fakt że elastyczne podparcie zwiększa ryzyko utraty stateczności przez sprężynę, dlatego też górne gniazdo ma kształt stożka, działającego w razie wyboczenia sprężyny jako odbojnik.

Inny sposób mocowania został opatentowany przez firmę Philips w [45]. Jest on wykorzystywany do elastycznego podparcia elementów wibrujących niewielkich rozmiarów. Zaletą tego rozwiązania jest odebranie wszystkich stopni swobody końcom sprężyny, dzięki czemu może ona przenosić obciążenia we wszystkich kierunkach. Dodatkową zaletę stanowi prostota wykonania i montażu oraz niski koszt jednostkowy.



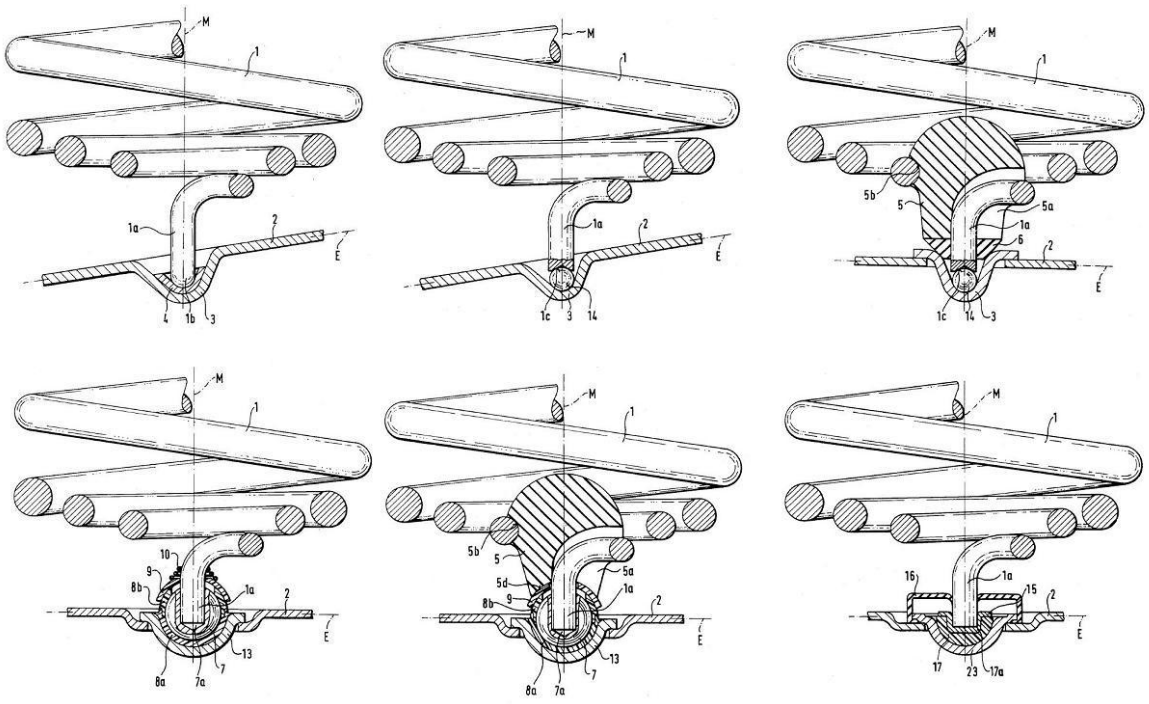
Rys.1.16. Mocowanie sprężyny z użyciem elastycznego łącznika

Autorzy wskazują że kołki są dostępne w sprzedaży a elastyczny element mocujący może być wykonywany bądź to przez toczenie prętów lub poprzez formowanie wtryskowe. Kwestie wytrzymałościowe ze względu na zastosowanie przy bardzo niskich obciążeniach nie odgrywają w tym wypadku istotnej roli. Mocowanie składa się z elementu mocującego (4), wykonanego z materiału elastycznego oraz kołka (11) (Rys.1.16). Element mocujący posiada gwint zewnętrzny, służący do przykręcenia go do bazy, otwór w który wbijany jest kołek oraz rowek w którym mocowany jest końcowy zwój sprężyny. Zwój ten ma mniejszą średnicę od średnicy nominalnej sprężyny i ma kształt pierścienia. Jak podają autorzy oprócz konfiguracji przedstawionej na Rys.1.16. możliwe jest zastosowanie kołka walcowego i otworu stożkowego.



Rys.1.17. Sposób mocowania sprężyn w układzie zawieszenia samochodu Fiata Punto

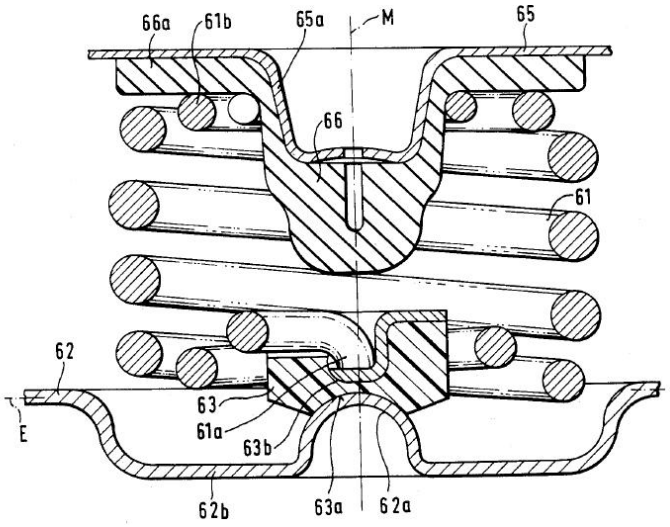
W układach zawieszenia samochodów osobowych oraz motocykli bardzo często znajduje zastosowanie zawieszenie z pojedynczymi wahaczami wzdłużnymi. Przykład takiego zawieszenia przedstawiono na Rys.1.17. [17]
Jak widać na Rys.1.17 w takim rozwiązaniu, sprężyna podlega zarówno ściskaniu jak i zginaniu na boki. Jest to niekorzystne ze względu na zwiększoną podatność sprężyny na utratę stateczności oraz nierównomierny rozkład naprężeń. Rozwiązanie tego problemu w wielu odmianach konstrukcyjnych przedstawiono w [56]. Na Rys.1.18. pokazano kilka odmian tego mocowania.



Rys.1.18. Przegubowe mocowanie sprężyny

Ten rodzaj mocowania zapewnia uwolnienie sprężyny od zginania co korzystnie wpływa na naprężenia oraz dokładność charakterystyki. Poza tym styk pomiędzy sprężyną a oporą występuje w miejscu, gdzie występują jedynie naprężenia ściskające. Zatem wycieranie powierzchni drutu mogące spowodować uszkodzenie warstwy ochronnej i powstanie ogniska korozji nie obniża właściwości wytrzymałościowych sprężyn jak ma to miejsce na przykład w przypadku mocowań z Rys.1.3 czy Rys.1.9 . Widoczny na Rys.1.18 element 5 to poduszka

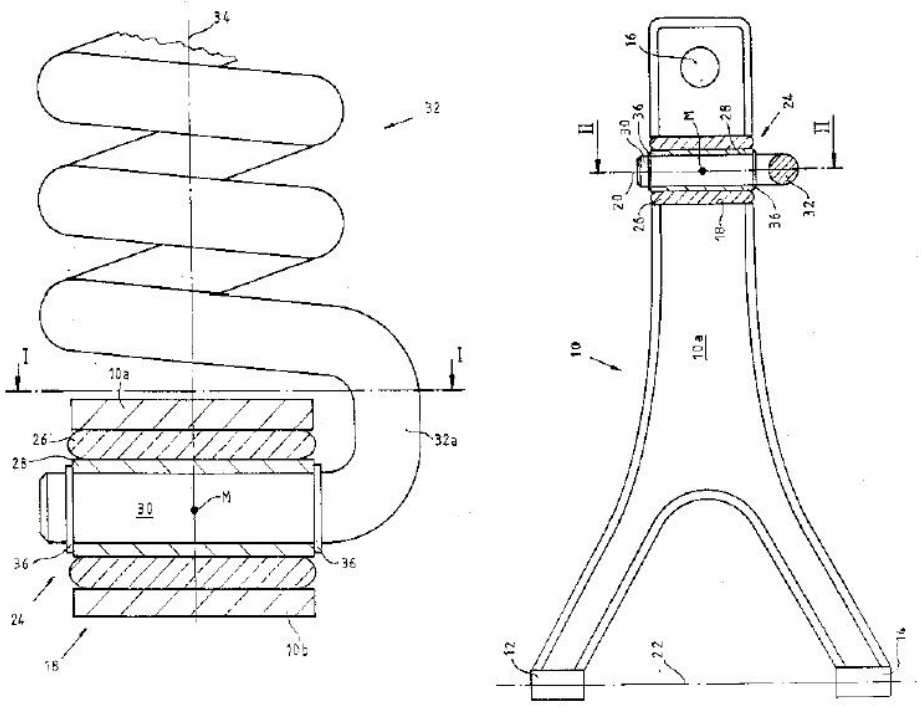
wykonana z twardej gumy. Pełni ona funkcję odbojnika przy szczególnie dużych obciążeniach. Na Rys.1.19 przedstawiono pełną wersję tego mocowania sprężyny w układzie zawieszenia motocykla.



Rys.1.19. Mocowanie sprężyny w układzie zawieszenia motocykla

Istotną zaletą tego rozwiązania oprócz wymienionych jest zastosowanie gumowych podkładek pomiędzy sprężyną a oporami. Zapewnia to dobre tłumienie drgań własnych sprężyny i ochronę górnych zwojów końcowych przed wycieraniem. Dzięki zastosowaniu zmniejszającego się promienia nawinięcia drutu zwojów końcowych układ stanowi zwartą konstrukcję. Wadę tego rozwiązania stanowi jednak wysoki koszt wykonania sprężyny o zmiennym promieniu nawinięcia oraz zmiennej średnicy drutu. Mimo to sprężyny tego typu są często stosowane w układach zawieszeń samochodów.

Inne rozwiązanie uwolnienia sprężyny w układach podobnych do przedstawionego na Rys.1.17 od naprężeń gnących pokazano na Rys.1.20. Elementy przedstawione na Rys.1.20 stanowią część układu kierowniczego w motocyklu [44].

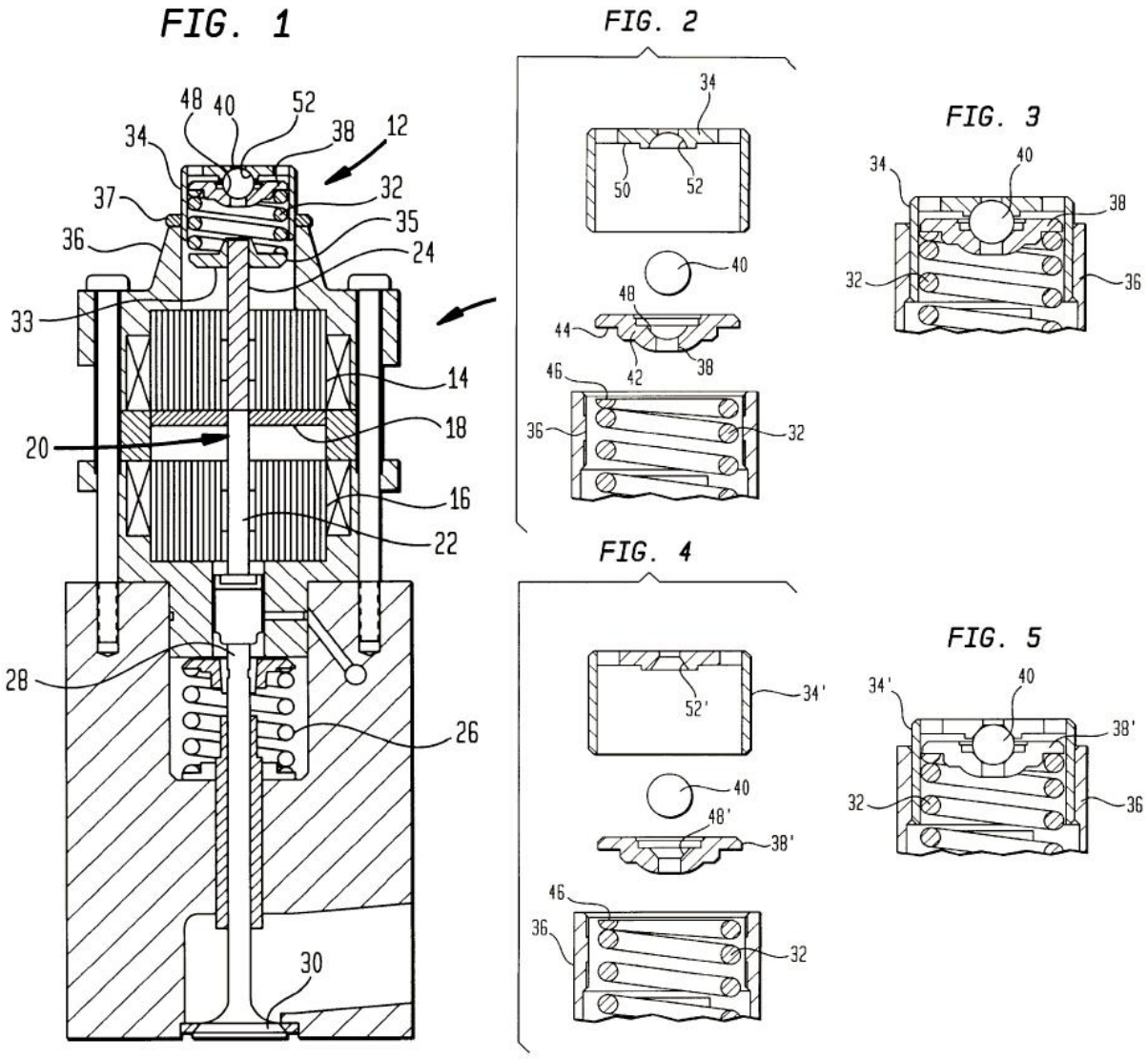


Rys.1.20. Mocowanie sprężyny na przegubie osiowym w układzie kierowniczym motocykla

Ponieważ zginanie sprężyny zachodzi jedynie w jednej płaszczyźnie, zatem zamiast przegubu kulistego zastosowano mocowanie osiowe. Rozwiązanie to ma jednak pewną wadę. W trakcie ściskania końce sprężyny dążą do wzajemnego obrotu. Umocowanie ich w łożyskach ślizgowych spowoduje wprowadzenie dodatkowych naprężeń. Zagadnienie to zostało szeroko przeanalizowane w rozdziale drugim.

Jak wspomniano powyżej sprężyny mają szerokie zastosowanie w układach rozrządu silników spalinowych. Przykład przedstawiono na Rys.1.9. Najczęściej obecnie spotykane mechanizmy rozrządu oparte są na sprzężeniu pomiędzy wałem korbowym a wałem rozrządu poprzez łańcuch, pasek zębaty lub wałek królewski. Sprężyny zaworowe w tych rozwiązaniach mają za zadanie jak najszybciej docisnąć zawór do gniazda, który został uprzednio otwarty za pośrednictwem dźwigni sprzężonej z krzywką na wałku rozrządu. Zastosowanie tego mechanizmu wymusza jednak zastosowanie przepustnicy, która znacząco zmniejsza sprawność obiegu przy niepełnym obciążeniu silnika benzynowego.

W najnowszych konstrukcjach silników spalinowych można spotkać inny sposób otwierania i zamykania zaworów. Został on przedstawiony na Rys.1.21 [57].



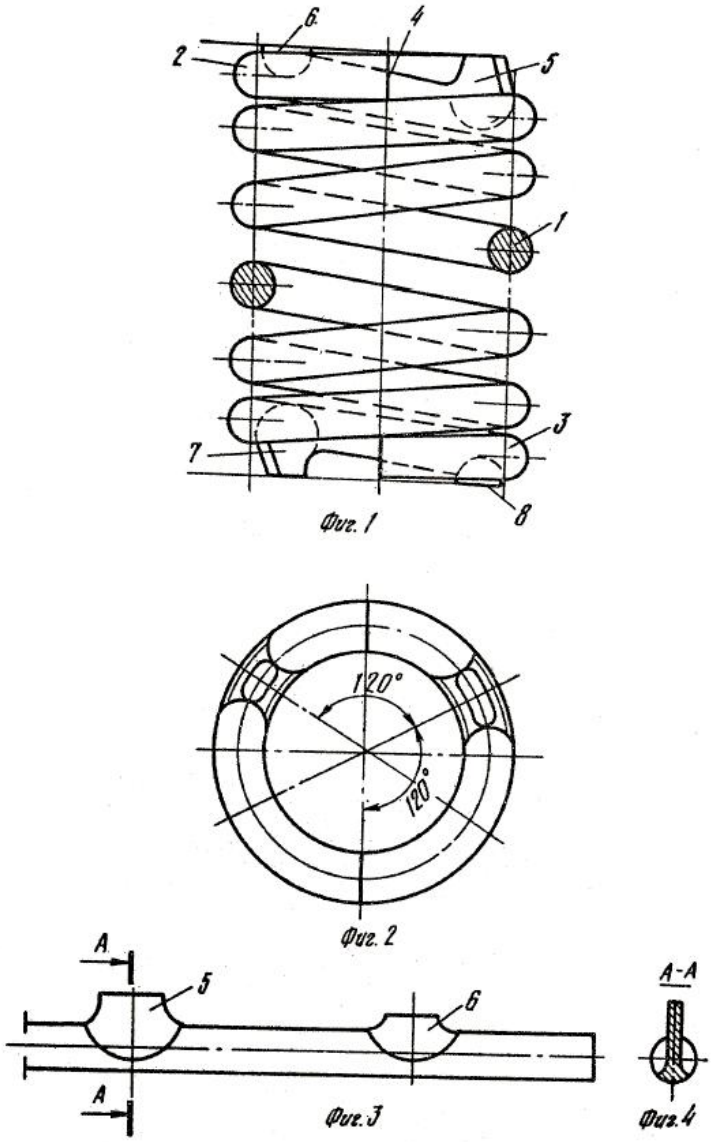
Rys.1.21. Szkic elektromagnetycznego sterowania zaworem (Fig.1) oraz sposób podparcia sprężyn śrubowych ustalających zawór (Fig.2, 3, 4, 5)

Na trzpieniu **22** osadzona jest tarcza **18** z materiału ferromagnetycznego. Tarcza ta jest przyciągana przez elektromagnes 14 i zawór jest domykany lub przez elektromagnes **16** i wówczas zawór jest otwierany. W przypadku braku napięcia w obydwu elektromagnesach sprężyny **26** i **32** utrzymują płytkę **18** pośrodku odległości pomiędzy dolnym i górnym elektromagnesem. Do regulacji napięcia wstępnego sprężyn służy pokrywa regulacyjna **34** ustalana za pomocą gwintu w obudowie. Każda sprężyna śrubowa w trakcie ściskania

doznaje wzajemnego obrotu przeciwległych końców. Zjawisko to zostało szerzej opisane w rozdziale poświęconym analizie geometrii i odkształceń sprężyn niniejszej pracy. Gdyby sprężyna **32** była oparta bezpośrednio na pokrywie regulacyjnej, wówczas w czasie pracy musiałby się obracać albo jej górny albo dolny koniec. Tarcza **18** nie powinna się obracać pomiędzy elektromagnesami. Obracanie się górnego końca sprężyny mogłoby spowodować powolne odkręcanie się pokrywy regulacyjnej **34**. Autorzy tego patentu uniknęli negatywnego wpływu skręcania się sprężyn śrubowych podczas ich ściskania na pracę układu poprzez zastosowanie oddzielenia talerza oporowego sprężyny **38** od pokrywy regulacyjnej **34** kulką stalową **40** stanowiącą w tym przypadku główny element przegubu kulistego.

Sprężyny o nie przygiętych i nie szlifowanych zwojach końcowych wymagają specjalnych sposobów podparcia, takich jak na Rys.1.3, Rys.1.4 lub Rys.1.5. Ustawienie tego rodzaju sprężyn na płaskiej podporze powoduje mimośrodowe, ukośne działanie sił a zatem skłonność sprężyny do zsunięcia się z podpory oraz zwiększoną podatność na utratę stateczności. Sprężyna o takich zakończeniach zwojów końcowych, postawiona na płaskiej powierzchni po prostu się przewróci. Aby była zapewniona stabilność, sprężyna musi się podpierać na co najmniej połowie obwodu a w praktyce przyjmuje się że ¾ zwoju końcowego musi stykać się z podłożem. W przypadku sprężyn o małym początkowym kącie wzniosu linii śrubowej wystarczy uciąć sprężynę w płaszczyźnie prostopadłej do jej osi aby uzyskać wystarczającą stabilność podparcia. Jednak w przypadku sprężyn o większych kątach wzniosu linii śrubowej oprócz szlifowania konieczne staje się również przyginanie zwojów końcowych. Jak wspomniano wyżej przyginanie i szlifowanie zwojów końcowych jest znacznie kosztowniejsze od zwykłego ucięcia sprężyny w trakcie jej zwijania. Autorzy [51] rozwiązali ten problem poprzez nagniecenie występów na zwojach końcowych sprężyny, jak pokazano na Rys.1.22.

Występy **5** i **8** mają być wykonywane w trakcie zwijania sprężyny na gorąco na specjalnym urządzeniu. Autorzy twierdzą że takie wykonanie zwojów końcowych pozwala podwyższyć wytrzymałość sprężyny.

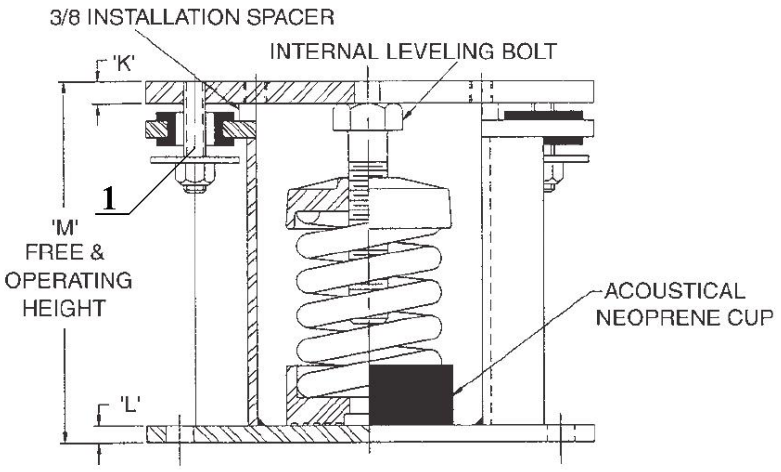


Rys.1.22. Zwiększenie stabilności sprężyny poprzez nagniecenie specjalnych występów na zwojach końcowych

Jak widać na Rys.1.22. wysokość występów jest dopasowana do kąta wzniosu sprężyny zapewniając jej stabilność na płaskim podłożu. Podparte jest bowiem 2/3 zwoju końcowego. Pierwszy punkt podparcia to ucięty koniec sprężyny, drugi to pierwszy występ **6** na górze, **8** na dole, trzeci punkt podparcia to występ **5** na górze i **7** na dole.

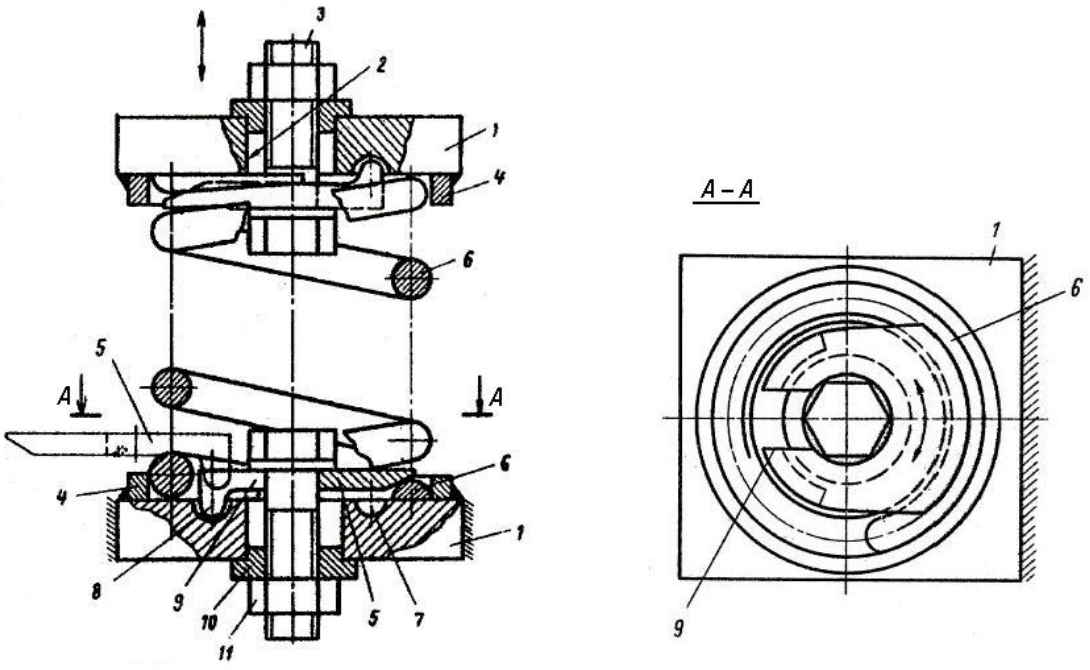
Jak wspomniano powyżej, przy prezentowaniu rozwiązań przedstawionych na Rys.1.5. i Rys.1.6. często w warunkach eksploatacji maszyn i urządzeń zdarza się że sprężyna śrubowa

naciskowa musi również przenieść siły rozciągające. Typowy przykład stanowi maszyna posadowiona na sprężynach naciskowych izolujących ją od otoczenia, która podlega siłom pochodzącym od grawitacji, drgań i innych czynników. W normalnych warunkach pracy wypadkowa wszystkich tych sił działa zawsze w kierunku podłoża. Zdarza się jednak że w sytuacji przeciążenia czy innego zakłócenia normalnej pracy maszyny, składowa pionowa sił na nią działających może mieć zwrot ku górze. Wówczas – jeżeli zawieszenie nie jest odpowiednio zabezpieczone – może dojść do wypadnięcia sprężyn z gniazd, wywrócenia się ich i w efekcie awarii całego układu. Najczęstszym sposobem zabezpieczenia się przed tego typu sytuacją jest zastosowanie śrub przejmujących w sytuacjach awaryjnych obciążenia rozciągające (na Rys.1.23. są to śruby **1**). Przykład takiego rozwiązania przedstawia wibroizolator na (Rys.1.23).



Rys.1.23. Wibroizolator firmy *Vibration Mountings & Controls Inc.*

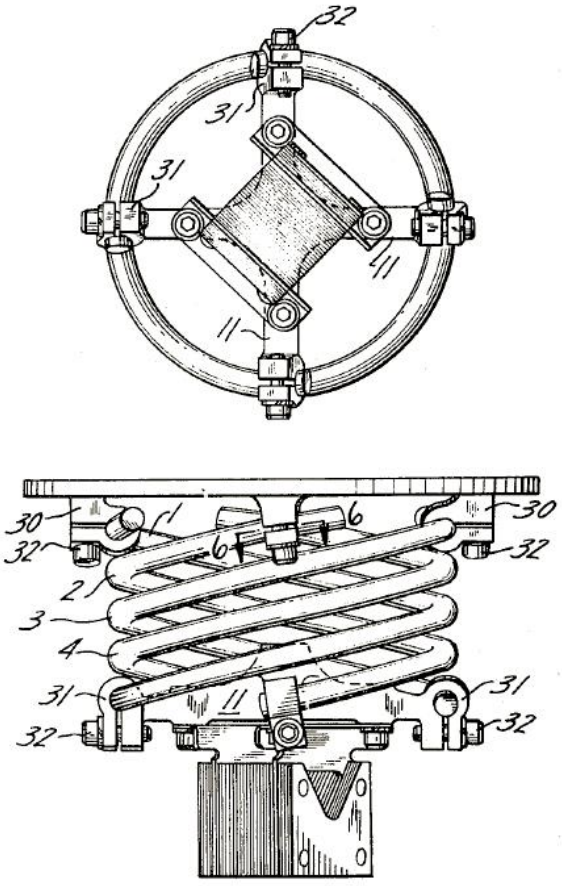
Inny, opatentowany w [48] sposób zabezpieczenia spójności układu: element podpierany – sprężyny – element podpierający pokazano na Rys.1.24. Sprężyna posiada zeszlifowane i przygięte zwoje końcowe posadowione na płaskich płytach **1**. Przed ich przesuwaniem się po płytach zabezpieczają pierścienie **4**. Płytka **9** wsunięta pomiędzy zwój końcowy a płytę podpierającą **1** posiada pierścieniowy występ **8** osadzony w rowku płyty. Płytka **9** posiada również rowek przez który przechodzi śruba **3** dociskająca ją do płyty podpierającej. Przekrój *A – A* pokazuje kształt płytki z góry.



Rys.1.24. Ustalające w wszystkich kierunkach mocowanie sprężyny śrubowej naciskowej

W układach zawieszeń ciężkich maszyn często zdarza się że miejsce przeznaczone dla zawieszenia jest niewielkie natomiast jego wymagana nośność i sztywność jest bardzo wysoka. Wówczas często stosuje się współosiowe mocowanie sprężyny o większej średnicy i włożonej do niej sprężyny o mniejszej średnicy. Sposób mocowania sprężyn pokazany na Rys1.25. opiera się na kilku identycznych sprężynach ustawionych współśrodkowo i umocowanych w obejmach rozłożonych równomiernie po okręgu. Autorzy tego rozwiązania [53] podają jako jego główną zaletę możliwość rozłożenia obciążenia równomiernie na kilka sprężyn zamiast na jedną a tym samym zmniejszenie naprężeń co skutkuje zwiększoną wytrzymałością zmęczeniową. Jednak rozwiązanie to posiada również szereg wad. Aby kilka sprężyn dało się umocować w ten sposób, każda z nich musi posiadać odpowiednio duży kąt wzniosu linii śrubowej. Im większy jest ten kąt tym większa nierównomierność naprężeń na przekroju drutu sprężyny spowodowana zwiększonym udziałem naprężeń zginających, pomijanych w klasycznych obliczeniach wytrzymałościowych sprężyn śrubowych. Duży kąt wzniosu linii śrubowej powoduje również że zwoje końcowe sprężyn mają tendencję do

wzajemnego obrotu o wartości tym większej im większy jest ten kąt. Podobnie średnica nominalna sprężyny ulega dużym wahaniom. Wszystko to przy skrępowaniu końców sprężyn prowadzi do wzrostu naprężeń, szczególnie w okolicy zwojów końcowych.



Rys.1.25. Mocowanie współśrodkowe kilku identycznych sprężyn

Inną wadą tego rozwiązania jest dosyć duża ilość miejsca potrzebna do montażu takiego układu. Wady tej pozbawiona jest sprężyna śrubowa wielozwojna, wycinana z tulei cylindrycznej. Sprężyny tego typu, produkowane przez firmę *Helical Products Company Inc.* przedstawiono na Rys.1.26. Istotną zaletą takich sprężyn jest ich mniejsza podatność na utratę stateczności oraz łatwość montażu. Mocowania stanowiące wraz ze sprężyną monolit zostały poddane szczegółowej analizie w rozdziale czwartym.

Rys.1.26. Sprężyny wielozwojne o zintegrowanym mocowaniu

Podsumowanie

Przegląd rozwiązań sposobów podparcia sprężyn śrubowych naciskowych wykazał że rozwiązań tych istnieje bardzo wiele. Najczęściej w opisach patentowych ich autorzy wskazują jedną lub więcej cech, które stanowią o przydatności tych rozwiązań w konkretnych zastosowaniach. Analizując poszczególne rozwiązania można jednak zauważyć że obok zalet, każde rozwiązanie posiada również pewne wady. I tak na przykład elastyczne mocowanie sprężyny przedstawione na Rys.1.14 lub Rys1.15 obok zalety w postaci braku metalicznego styku z podporą charakteryzuje się wysoką podatnością na utratę stateczności. Z kolei rozwiązania pokazane na Rys.1.5 lub Rys.1.8 posiadają niską podatność na utratę stateczności ale charakteryzują się stykiem metalicznym między drutem sprężyny a elementem mocującym. Trudno więc znaleźć rozwiązanie uniwersalne o szerokich możliwościach aplikacyjnych. Analiza literaturowa wykazuje że w pracach poświęconych problematyce sprężyn śrubowych naciskowych, zagadnienia związane z wpływem sposobu mocowania sprężyn na ich właściwości eksploatacyjne są traktowane pobieżnie lub pomijane. Mnogość rozwiązań konstrukcyjnych wskazuje że wpływ ten ma niejednokrotnie istotne znaczenie praktyczne.

2. Naprężenia i odkształcenia sprężyny dla przypadku obrotowego i nieobrotowego podparcia końców.

Sposób zamocowania końców sprężyn ma wpływ zarówno na charakterystykę sprężyny jak i na jej obciążalność. Sprężyna naciskowa utwierdzona na obu końcach, podlegająca obciążeniom wielocyklowym wytrzyma mniejszą liczbę cykli przy tym samym obciążeniu od sprężyny, której jeden z końców posiada możliwość obrotu wokół osi sprężyny. Dodatkowo, sprężyna w trakcie ściskania powiększa swoją średnicę. Oszacowanie zmiany średnicy sprężyny pod obciążeniem może mieć istotne znaczenie przy projektowaniu połączeń sprężystych, w których sprężyna podparta na końcach punktowo, jest prowadzona w odpowiedniej tulei. Aby wyznaczyć minimalną średnicę wewnętrzną tulei należy znać maksymalną średnicę zewnętrzną sprężyny pod obciążeniem.

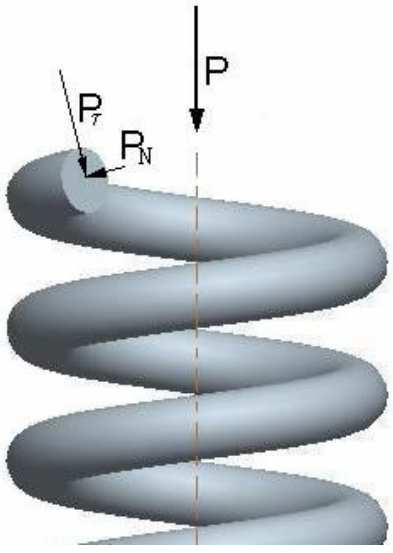
Aby dało się oszacować wpływ nieobrotowego zamocowania końców sprężyny na stan wytężenia jej materiału konieczne jest znalezienie zależności pomiędzy ugięciem sprężyny a kątem wzajemnego obrotu jej czół. Sprężyny śrubowe są elementami wykonanymi z prętów o przekroju najczęściej okrągłym. W literaturze można znaleźć analityczne opisy zmian geometrii sprężyn śrubowych pod obciążeniem statycznym [8, 80], ale poczynione w nich uproszczenia uniemożliwiają ich zastosowanie w przypadku dużych odkształceń występujących w mocowaniach sprężyn np. w układach zawieszeń samochodów czy w maszynach wibracyjnych. Jednym z uproszczeń jest pominięcie zmiany kąta wzniosu linii śrubowej wraz ze wzrostem obciążenia. W rezultacie otrzymuje się wyniki obarczone dużym błędem. Co więcej, po wprowadzeniu do obliczeń poprawek wynikających z uwzględnienia zmiany kąta wzniosu linii śrubowej wyniki okazują się być jeszcze dalsze od wyników eksperymentalnych.

Na temat zjawisk związanych z dynamicznie zmieniającym się obciążeniem sprężyn, powstało wiele prac. Do pierwszych, najbardziej znaczących należy zaliczyć pracę Mitchella z 1890 roku w której autor sformułował trzy równania ruchu dla odkształceń dynamicznych sprężyn w oparciu o równania Lagrange'a pierwszego rodzaju. W wyprowadzeniu Mitchell uwzględnił odkształcenia w trzech kierunkach oraz obrót wokół jednej osi, nie uzależnił go jednak od odkształceń poosiowych. Na tych samych założeniach oparł się Love w [36]. Równania te później zmodyfikował Wittrick w [72] redukując liczbę założeń upraszczających. W [11] Costello opisuje wpływ drgań skrętnych wokół położenia równowagi sprężyny na zmiany jej średnicy pod wpływem poosiowego uderzenia. Analizę tą

przeprowadza dla liniowego modelu sprężyny. W [60] wraz z Philipsem podaje jednowymiarowe równanie opisujące ruch sprężyny przy dużych, dynamicznych odkształceniach, dla których sprężyna przestaje zachowywać się liniowo. Ayadi i Hadj-Taïeb w [2, 4] rozwiązali liniowy model Costella przy użyciu metod numerycznych. Stokes w [66] badał zagadnienie zwiększenia wymiarów poprzecznych sprężyny pod wpływem poosiowego uderzenia zarówno analitycznie jak i eksperymentalnie. Należy zaznaczyć że wynikiem wymienionych wyżej i wielu innych prac (m.in. [58]) były bardzo złożone równania dla których nie sposób jest znaleźć ścisłych rozwiązań metodami analitycznymi. Problem wzajemnych relacji pomiędzy poszczególnymi odkształceniami sprężyn poddanych obciążeniom dynamicznym pozostaje zatem nierozwiązany [23]. Konsekwencją tego jest szereg prac w których temat zachowania się sprężyny pod wpływem zjawisk dynamicznych, rozwijany jest przy użyciu przybliżonych metod numerycznych jak np. w [3, 12, 39, 64, 77, 78].

Na Rys.2.1 przedstawiono wycinek sprężyny naciskowej na którym odciętą myślowo prawą część drutu zastąpiono układem sił.

Siła ściskająca sprężynę został rozłożona na dwie składowe P_τ – siłę styczną i P_N – siłę normalną do pewnego myślowo wybranego przekroju normalnego drutu sprężyny (Rys.2.1).



Rys.2.1. Obciążenie sprężyny siłą poosiową *P*

Następnie przesunięto te dwie składowe do środka powyższego przekroju. Aby warunki równowagi były zachowane po przesunięciu sił z osi sprężyny dodano momenty

spowodowane występowaniem tych sił na osi:

$M_\tau = P_\tau \frac{D}{2} = P\frac{D}{2}\cos\gamma$ - moment skręcający pręt

$M_N = P_N \frac{D}{2} = P\frac{D}{2}\sin\gamma$ - moment gnący od składowej P_N

gdzie: γ - kąt wzniosu linii śrubowej sprężyny, D – średnica podziałowa sprężyny.

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$M = P \cdot \frac{D}{2}$$

Można napisać

$$M_\tau = M\cos\gamma$$

$$M_N = M\sin\gamma$$

Ze względu na warunki ustalenia sprężyny (obrotowo podatne lub niepodatne podparcie) oraz zamiar zastosowania twierdzenia Castigliana do obliczania odkształceń sprężyny, przyłożono moment skręcający M_o sprężynę jako całość, którego wektor pokrywa się z osią sprężyny. Można zatem napisać równania momentów:

- gnącego drut $M_g = M\sin\gamma - M_o\cos\gamma$ (2.1)

- skręcającego drut $M_s = M\cos\gamma + M_o\sin\gamma$ (2.2)

Energia sprężysta zginania wynosi [69]: $U_G = \int_0^L \frac{M_g{}^2}{2EJ} dL$ (2.3)

Energia sprężysta skręcania wynosi $U_S = \int_0^L \frac{M_s{}^2}{2GJ_o} dL$ (2.4)

Najczęściej wykorzystywaną i najwygodniejszą miarą długości sprężyny śrubowej jest liczba zwojów czynnych. Całkowanie następuje po długości drutu. Długość drutu sprężyny:

$$L = \frac{\pi D_0}{\cos\gamma_0} z_c \quad (2.5)$$

gdzie: γ_0 - kąt wzniosu linii śrubowej sprężyny nieobciążonej;

D_0 - średnica sprężyny nieobciążonej

Podstawiając (2.1) do (2.3) i (2.2) do (2.4) i całkując otrzymamy:

$$U_G = \frac{L}{2EJ}(M^2\sin^2\gamma - 2MM_0\sin\gamma\cos\gamma + M_0{}^2\cos^2\gamma)$$

$$U_S = \frac{L}{2GJ_o}(M^2\cos^2\gamma + 2MM_o\sin\gamma\cos\gamma + M_o{}^2\sin^2\gamma$$

Całkowita energia sprężysta odkształcenia drutu sprężyny wynosi

$$U_C = U_G + U_S$$

Uwzględniając że [33]: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ oraz $J_o = 2J$ można napisać:

$$U_C = \frac{L}{2EJ}(M^2 \sin^2\gamma - 2MM_o \sin\gamma\cos\gamma + M_o{}^2\cos^2\gamma) + \frac{L}{2EJ}(M^2\cos^2\gamma + 2MM_o\sin\gamma\cos\gamma +$$

$$+ M_o{}^2\sin^2\gamma) + \frac{\nu L}{2EJ}(M^2\cos^2\gamma + 2MM_o\sin\gamma\cos\gamma + M_o{}^2\sin^2\gamma)$$

Ostatecznie

$$U_C = \frac{L}{2EJ}\left(\left(M^2 + M_o{}^2\right) + \nu\left(M^2\cos^2\gamma + 2MM_o\sin\gamma\cos\gamma + M_o\sin^2\gamma\right)\right) \qquad (2.6)$$

Zgodnie z twierdzeniem Castigliana pochodna energii potencjalnej względem uogólnionej siły jest równa współrzędnej uogólnionej odpowiadającej tej sile uogólnionej [74]:

$$\frac{\partial U}{\partial P_n} = w_n \qquad (2.7)$$

Stąd w ogólnym przypadku kąt skręcenia końców sprężyn przyjmie postać:

$$\vartheta = \frac{\partial U_c}{\partial M_o} = \frac{L}{EJ}(M_o + \nu M\sin\gamma\cos\gamma + \nu M_o\sin^2\gamma) \qquad (2.8)$$

W przypadku swobodnego skrętnie umocowania jednego z końców sprężyny (np. podparcia na łożysku poprzeczno - wzdłużnym) moment skręcający wyniesie zero.

$$M_o = 0$$

Wtedy $$\vartheta(M_o = 0) = \frac{L}{EJ}\nu M\sin\gamma\cos\gamma \qquad (2.9)$$

W najczęściej spotykanym przypadku końce sprężyny mocowane są w sposób uniemożliwiający im wzajemny obrót ($\vartheta = 0$) wówczas w sprężynie powstaną dodatkowe naprężenia wywołane momentem skręcającym.

$$0 = \frac{L}{EJ}(M_o + \nu M\sin\gamma\cos\gamma + \nu M_o\sin^2\gamma)$$

stąd $$M_o = -\frac{\nu M\sin\gamma\cos\gamma}{1+\nu\sin^2\gamma} \qquad (2.10)$$

Wzory (2.8), (2.9), (2.10) znane z literatury w podobnych postaciach [8, 27] nie mogą stanowić podstawy do obliczeń wymiarów wkrętki i naprężeń w sprężynie, gdyż występujący w nich kąt nachylenia linii śrubowej γ nie jest w rzeczywistości stały lecz stanowi funkcję obciążenia sprężyny. Przekształcimy zależność (2.8) do postaci (2.11) uzależniającej elementarny obrót $d\vartheta$ od elementarnego obciążenia *dP*.

Dla przypadku często spotykanego – wkrętka lub innego typu opora sprężyny pozwala na swobodny obrót jej końca (np. wkrętka mocowana za pomocą łożyska)

$$d\vartheta = (\frac{L}{EJ} \nu R \sin\gamma \cos\gamma) dP \tag{2.11}$$

Wysokość sprężyny wynosi $H = L\sin\gamma$. Dla sprężyny nieobciążonej $H_0 = L\sin\gamma_0$. Pod obciążeniem sprężyna ugnie się o wartość f i jej wysokość wyniesie $H = H_0 - f$. Ponieważ sztywność sprężyny $c = \frac{P}{f} \cong idem.$ skąd $f = \frac{P}{c}$ zatem przekształcając wzór na wysokość sprężyny można zapisać:

$$\sin\gamma = \frac{H_0 - \frac{P}{c}}{L} \tag{2.12}$$

Stąd $$\cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{(H_0 - \frac{P}{c})^2}{L^2}} \tag{2.13}$$

Z zależności geometrycznych pomiędzy średnicą sprężyny, kątem nachylenia linii śrubowej γ a długością drutu wynika że: $\cos\gamma = \frac{2\pi R \cdot z_c}{L}$,

Stąd $$R = \frac{L}{2\pi z_c} \sqrt{1 - \frac{(H_0 - \frac{P}{c})^2}{L^2}} \tag{2.14}$$

Podstawiając (2.12), (2.13), (2.14) do (2.11) otrzymamy:

$$d\vartheta = \frac{L\nu}{EJ} \cdot \frac{L}{2\pi z_c} \sqrt{1 - \frac{(H_0 - \frac{P}{c})^2}{L^2}} \cdot \frac{H_0 - \frac{P}{c}}{L} \cdot \sqrt{1 - \frac{(H_0 - \frac{P}{c})^2}{L^2}} dP$$

Ponieważ zawsze $H_0 < L$ więc upraszczając:

$$d\vartheta = \frac{\nu}{2\pi LEJ \cdot z_c} (L^2 - (H_0 - \frac{P}{c})^2) \cdot (H_0 - \frac{P}{c}) dP$$

Stąd $$\vartheta = \int_0^{P_M} \frac{\nu}{2\pi LEJ \cdot z_c} (L^2 - (H_0 - \frac{P}{c})^2) \cdot (H_0 - \frac{P}{c}) dP$$

Po całkowaniu w granicach od zera do maksymalnej siły ściskającej P_M otrzymamy:

$$\vartheta(M_o = 0) = \frac{P_M \nu}{2\pi LEJ \cdot z_c} \left(H_0 L^2 - {H_0}^3 + \frac{3{H_0}^2 P_M}{2c} - H_0 \left(\frac{P_M}{c}\right)^2 - \frac{L^2 P_M}{2c} + \frac{1}{4}\left(\frac{P_M}{c}\right)^3 \right) \tag{2.15}$$

Podstawiając we wzorze (2.15) za P_M / c maksymalne ugięcie f otrzymamy:

$$\vartheta(M_o = 0) = \frac{P_M \nu}{2\pi LEJ \cdot z_c}\left(H_0 L^2 - {H_0}^3 + \frac{3}{2}{H_0}^2 f - H_0 f^2 - \frac{1}{2}L^2 f + \frac{1}{4} f^3 \right)$$

Zależność (2.15) może być już zastosowana dla dużych odkształceń, przy których założenie stałości kąta wzniosu linii śrubowej nie może być przyjęte.

Przyjmując następujące oznaczenia: z_c - liczba zwojów sprężyny nieobciążonej, z_{cP} - liczba zwojów sprężyny pod obciążeniem *P* można ustawić równanie: $z_{cP} = z_c - \frac{\vartheta}{2\pi}$

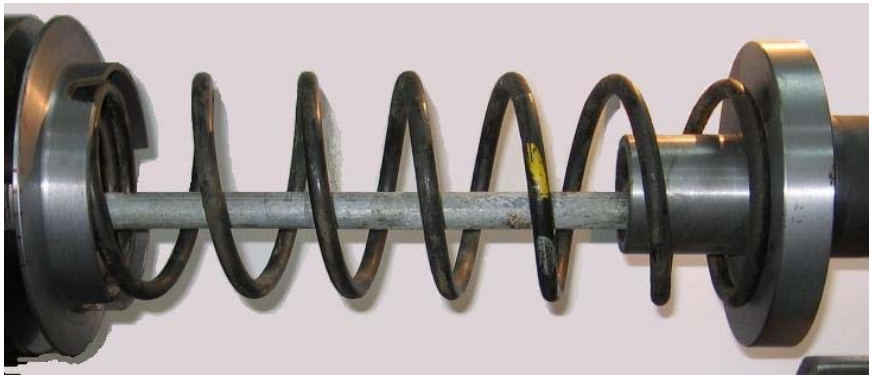
Obwód jednego zwoju sprężyny pod obciążeniem wyniesie: $L_{1P} = \frac{L}{z_{cP}}$ stąd średnica sprężyny pod obciążeniem wyniesie: $D_P = \frac{L_{1P}}{\pi}\cos\gamma$

Indeks dolny „P" oznacza parametr przy obciążeniu sprężyny siłą ściskającą *P*. Podstawiając do powyższego wzoru zależności przedstawione wcześniej i upraszczając, otrzymamy ostatecznie:

$$D_P = \frac{\sqrt{L^2 - (H_0 - \frac{P}{c})^2}}{z_c \cdot \pi - \frac{\vartheta}{2}} \qquad (2.16)$$

Ze wzoru (2.15) można więc wyliczyć wzajemny kąt obrotu końców sprężyny wokół jej osi przy obciążeniu jej siłą ściskającą *P*, natomiast ze wzoru (2.16) można obliczyć zwiększenie średnicy wywołane obciążeniem tą siłą.

Poprawność wyprowadzonych powyżej wzorów została sprawdzona za pomocą eksperymentu na rzeczywistym elemencie jakim była sprężyna z układu zawieszenia samochodu osobowego (Rys.2.2). Parametry badanej sprężyny:
wysokość całkowita – 395 *mm*;
średnica nominalna sprężyny – 119 *mm*;
grubość drutu sprężyny – 11 *mm*;
liczba zwojów czynnych –6,27;
skok – 63 *mm*



Rys.2.2. Badana sprężyna na stanowisku doświadczalnym

Wzajemne skręcenie końców sprężyny zostało zbadane przy ściśnięciu sprężyny o wartość $f = 200mm$. Wartości kątów skręcenia według wzorów (2.9), (2.15) oraz wynik doświadczenia przedstawiono w tabeli 2.1. Parametry materiału sprężyny przyjęto typowe dla stali: E = 206000 MPa, $\nu = 0{,}3$.

Tabela 2.1.

Według:	wzoru (2.9)	wzoru (2.15)	doświadczenia
ϑ [°]	7,44	5,8	12,7

Jak widać z tabeli 2.1. wzór (2.9) daje wynik prawie dwukrotnie zaniżony w stosunku do wartości otrzymanej na drodze doświadczalnej. Co więcej wzór (2.15) uwzględniający zmianę kąta nachylenia linii śrubowej daje wyniki jeszcze gorsze od wzoru (2.9) nie uwzględniającego tego czynnika.

W celu poznania dokładniejszych relacji pomiędzy wynikami otrzymanymi przy pomocy wzoru (2.9) a rzeczywistymi wartościami kątów skręcenia przeprowadzono szereg doświadczeń z użyciem kolejnych osiemnastu sprężyn o różnych parametrach geometrycznych. Doświadczenia te zostały przeprowadzone na specjalnie do tego celu skonstruowanym stanowisku pomiarowym, które przedstawiono na Rys.2.3.

Rys.2.3. Stanowisko do badania kąta wzajemnego obrotu czół sprężyny

Na poprzeczce dolnej maszyny wytrzymałościowej posadowiono okrągłą tarczę na której pobocznicy została przymocowana podziałka kątowa o dokładności do 0,5 [°]. W okrągłym rowku wytoczonym w górnej podstawie płyty wstawiono łożysko oporowe kulkowe. Górna bieżnia łożyska została ustalona w rowku tarczy do której przymocowano wskazówkę. Tarcza ta stanowiła dolną podporę dla badanych sprężyn. Górną, nieruchomą obrotowo podporę sprężyn stanowiła tarcza przymocowana do poprzeczki górnej. W trakcie badań doświadczenia były powtarzane celem większej wiarygodności otrzymanych wyników. Wartości ugięć badanych sprężyn zostały tak dobrane aby nie dochodziło do zblokowania ich zwojów.

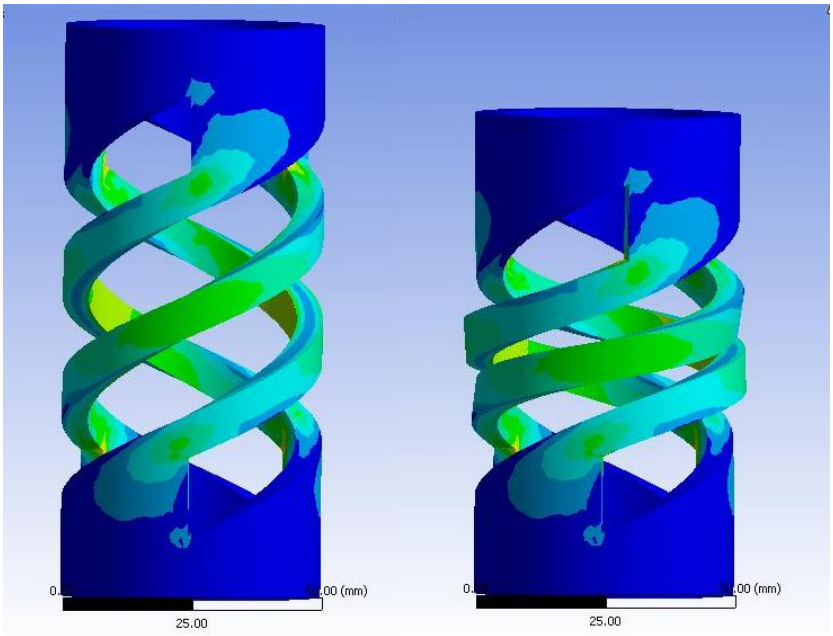
Tabela 2.2

Nr	l_o [mm]	D_{nom} [mm]	g [mm]	h [mm]	n [-]	n_c [-]	f [mm]	ϑ_d [°]	P [N]	ϑ_l [°]	ϑ_d/ϑ_l [-]
1	190	64	10	26.25	8,5	6,5	90	7,5	5280	4,8	1,56
2	87	46,1	6,9	21	6	3,5	48	7,0	3195	4,0	1,75
3	90	39,4	6	14,25	8	5,5	39	4,5	1505	3,0	1,5
4	87	36,7	7,8	16,2	7	4,8	37	4,5	5070	3,7	1,21
5	83	34,5	4	9,8	10	7,8	40	5,0	320	2,8	1,78
6	67	30,8	3,2	10	8,5	6,5	38	4,5	209	3,4	1,32
7	68	24,7	2,3	10,88	8,3	6,3	48	11,0	143	7,2	1,53
8	69	25,5	4	9	9	7	29	4,5	640	3,4	1,32
9	114	32,5	2,5	16	9,5	7,5	84	16,0	127	10,7	1,5
10	315	100	13	36,6	10	8	130	5,0	4640	4,0	1,25
11	320	144	12	103	4,5	3,5	171	11,0	3395	7,0	1,57
12	390	119	11	58	7,5	6	238	14,0	3445	8,9	1,57
13	155	77	15	32	6,1	3,6	65	4,5	20020	2,9	1,55
14	275	90	4	30	10,5	9,5	180	10,0	66	5,37	1,86
15	260	80	4	30	10,5	9,5	180	12,0	95	6,38	1,88
16	275	70	4	30	10,5	9,5	180	13,5	141	8,84	1,53
17	275	60	4	30	10,5	9,5	180	20,0	225	11,96	1,67
18	275	50	4	30	10,5	9,5	180	27,5	388	17,2	1,6
								Wartość średnia ϑ_d/ϑ_l			**1,55**

W ostatniej kolumnie tabeli 2.2 przedstawiono stosunek wartości kątów skręcenia czół sprężyn otrzymanych w doświadczeniu do wartości uzyskanych według wzoru (2.9). Jak widać błąd wartości wg wzoru (2.9) jest znaczący.

Niedoskonałość wzoru (2.9) można prześledzić na symulacji ściskania sprężyny śrubowej o zamkniętych zwojach końcowych i dużym kącie wzniosu linii śrubowej – Rys.2.4. Dolnej podstawie sprężyny odebrano wszystkie stopnie swobody. Górnej podstawie pozostawiono możliwość przesuwu i obrotu w płaszczyźnie prostopadłej do osi sprężyny. Jak widać czoła sprężyny ulegają wzajemnemu obrotowi ale w kierunku przeciwnym niż wszystkie przedstawione powyżej sprężyny zwijane z drutu. Sposób zamocowania końców tej sprężyny uniemożliwia zwojom końcowym poszerzenie średnicy nominalnej w trakcie ściskania.

Długość drutu sprężyny w trakcie jej ściskania nie ulega istotnej zmianie. Jeżeli uniemożliwimy sprężynie wzrost jej średnicy np. umieszczając ją w tulei ściśle do niej dopasowanej, wówczas sprężyna ściśnięta musi zwiększyć liczbę zwojów aby zmieścić tę samą długość drutu przy mniejszej wysokości. Zatem kąt skręcenia powinien mieć znak ujemny. Uzyskanie wyniku ze znakiem ujemnym ze wzoru (2.9) jest niemożliwe.



Rys.2.4. Symulacja ściskania sprężyny o zamkniętych zwojach końcowych

Wzór (2.9) nie uwzględnia zmiany kąta wzniosu linii śrubowej i nie daje również powtarzalnego błędu, który można by skorygować odpowiednim współczynnikiem. Nie pozwala również na uzyskanie wyniku o ujemnym znaku. Zastosowanie twierdzenia Castigliano wymaga aby rozwiązywany przy jego pomocy układ był układem Clapeyrona. Muszą być zatem spełnione dwa założenia: odkształcenia nie przekraczają granicy stosowalności prawa Hooka oraz działanie jednych sił nie powoduje zmiany oddziaływania innych sił na układ. Przykładem obiektu, który nie spełnia drugiego z tych założeń jest belka dwupodporowa, poddana działaniu siły osiowej ściskającej oraz siły poprzecznej, działającej w środku długości belki. Jeżeli siła osiowa jest równa zeru wówczas belka podlega zginaniu i jej ugięcie jest proporcjonalne do wartości siły poprzecznej. Jeżeli jednak siła osiowa osiągnie pewną wartość krytyczną, wówczas zależność pomiędzy siłą poprzeczną a ugięciem belki przestanie być liniowa i nawet niewielka siła poprzeczna spowoduje bardzo silne ugięcie belki. Podobnie jest w wypadku sprężyny śrubowej poddanej ściskaniu i skręcaniu, gdyż jak pokazuje doświadczenie ściskanie sprężyny powoduje jej równoczesne skręcanie. Zatem

nawet niewielki moment skręcający sprężynę jako wyrób wpływa na sposób w jaki siła ściskająca odkształca sprężynę. Nie można superponować oddziaływania siły ściskającej sprężynę z oddziaływaniem momentu skręcającego sprężynę jako całość. Niespełnienie warunku liniowej sprężystości układu jest jedną z przyczyn dla której zastosowanie twierdzenia Castigliano do obliczania kąta wzajemnego obrotu czół sprężyny daje wyniki niezgodne z doświadczeniem.
Określenie zależności pomiędzy kątem wzajemnego obrotu czół sprężyny a jej ugięciem jest bardzo trudne gdyż rzeczywiste warunki mocowania sprężyn śrubowych odbiegają od teoretycznych, w których poczyniono wiele uproszczeń. Sprężyna o końcach przygiętych ale nie szlifowanych nie oprze się na całym obwodzie ostatniego zwoju o podstawę ale jedynie na jego części. W trakcie ściskania sprężyny, jej zwoje końcowe będą się „kładły" na podstawie zwiększając powierzchnię styku. Może wówczas dojść do poślizgów umożliwiających zwiększenie średnicy sprężyny wynikające z osiadania zwojów. Jeżeli współczynnik tarcia będzie wystarczająco wysoki może jednak dojść do zablokowania przesuwów zwojów końcowych a tym samym do lokalnego wzrostu naprężeń.

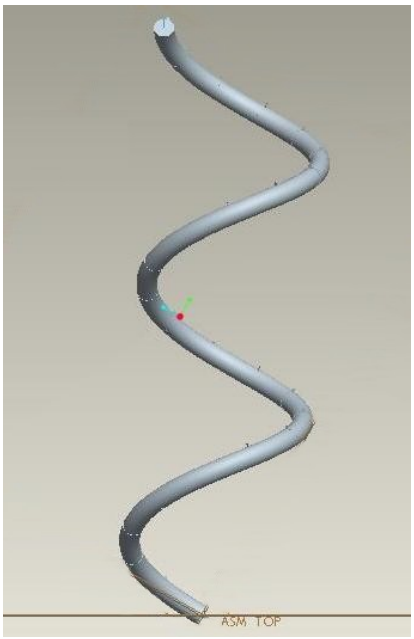
Zależności (2.1) do (2.16) zostały wyprowadzone w oparciu o wiedzę z zakresu wytrzymałości materiałów. Ponieważ ich wyniki są niezadowalające należy znaleźć inną metodę do uzyskania zależności na zmianę średnicy sprężyny oraz zmianę kąta skręcenia jej czół pod działaniem osiowego obciążenia. Inżynierskie wzory na sztywność i naprężenia w sprężynach śrubowych opierają się na założeniu że wszystkie naprężenia – poza naprężeniami skręcającymi – są pomijalnie małe. Dzieje się tak ze względu na zwykle niewielką w sprężynach śrubowych wartość kąta wzniosu linii śrubowej. Jednak w przypadku obliczeń zmiany kąta skręcenia czół sprężyny założenie takie jest niewystarczające. Moment gnący, wynikający z niezerowej wartości kąta wzniosu linii śrubowej sprężyny nie może zostać pominięty.

Na Rys.2.5 pokazano wirtualny model sprężyny o dwóch zwojach. Sposób stworzenia tej sprężyny był następujący. Przecięty pierścień, będący sprężyną o jednym zwoju i kącie wzniosu równym zero podzielono na 12 równych elementów, każdy o długości kątowej 30 stopni. Następnie każdy element skręcono względem sąsiedniego o pewien kąt β, przy czym płaszczyzny przecięcia nadal pozostały styczne względem siebie a oś obrotu była styczna do średnicy nominalnej pierścienia w miejscu przecięcia. Następnie dodano do powstałej w ten sposób sprężyny następnych 12 elementów tak że powstała sprężyna o dwóch zwojach. Rys.2.5 przedstawia sprężynę dla kątów skręcenia równych 0,2 stopnia. Zwoje się przenikają,

ponieważ jest to model wirtualny. Z rysunku tego widać że początek i koniec sprężyny leżą prawie w tej samej płaszczyźnie a więc sprężyna ma prawie dokładnie dwa zwoje.

Rys.2.5. Uproszczony model sprężyny o dwóch zwojach i dyskretnym kącie skręcenia równym 0,2 [°]

Rys.2.6 przedstawia tą samą sprężynę ale o dyskretnych kątach skręcenia równych 15 stopniom.



Rys.2.6. Uproszczony model sprężyny o dwóch zwojach i dyskretnym kącie skręcenia równym 15 [°]

Jak widać z porównania Rys.2.5. z Rys.2.6. Sprężyna po rozciągnięciu zwiększyła liczbę zwojów. Wynik ten jest zgodny jakościowo z doświadczeniami.

Należy zaznaczyć że krzywizna poszczególnych elementów sprężyny nie uległa zmianie w wyniku „rozciągania" powyższego modelu sprężyny. Zmianom ulegało tylko skręcenie linii śrubowej. Obliczenia przedstawione poniżej będą opierać się na założeniu że dominującą rolę w zmianie geometrii sprężyny odgrywa skręcanie jej drutu, natomiast

zginanie drutu jest czynnikiem korygującym. Równania parametryczne linii śrubowej mają postać [34]:

$$x = R\cos\varphi\,; \quad y = R\sin\varphi\,; \quad z = k\varphi \tag{2.24}$$

gdzie: R odpowiada połowie średnicy podziałowej sprężyny, k – to przyrost współrzędnej z odpowiadający przyrostowi kąta od wartości 0 do wartości 2π. Wielkość $2\pi k$ oznacza skok linii śrubowej.

Parametrami charakteryzującymi w pewien sposób linię śrubową są:

- krzywizna linii śrubowej

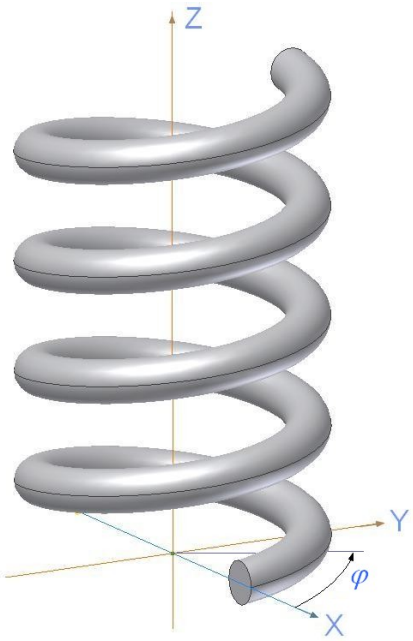
$$\frac{1}{\rho} = \frac{R}{k^2 + R^2} \tag{2.25}$$

- skręcenie linii śrubowej

$$\frac{1}{T} = \frac{|k|}{k^2 + R^2} \tag{2.26}$$

Dla danej linii śrubowej krzywizna i skręcenie są stałe.

Uogólnienie zależności (2.25) i (2.26) w odniesieniu do sprężyn o zmiennym promieniu nawinięcia i skoku można znaleźć w pracy [35].



Rys.2.7. Analizowany model sprężyny

Rozważmy sprężynę o następujących parametrach:

H_{ocz} – wysokość sprężyny nieobciążonej, mierzona jedynie wzdłuż zwojów czynnych;

n_{0cz} – liczba czynnych zwojów sprężyny nieobciążonej;

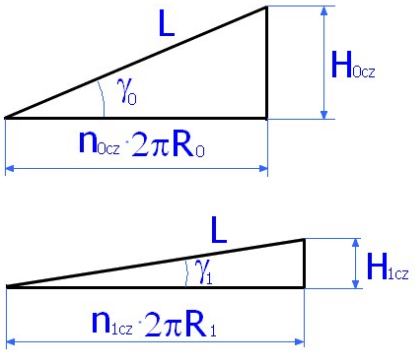
h_0, γ_0 – odpowiednio skok i kąt wzniosu linii śrubowej sprężyny nieobciążonej;

$H_{1cz} = H_{0cz} - f$ – czynna wysokość sprężyny pod obciążeniem.

Sprężyna ta jest ustawiona względem układu współrzędnych jak na Rys.2.7.

Zatem współrzędne dolnego końca sprężyny wynoszą x = R, y = 0, z = 0.

Rozwinięcie linii śrubowej sprężyny w stanie początkowym i pod obciążeniem przedstawia Rys.2.8.



Rys.2.8. Rozwinięcia linii śrubowej sprężyny dla dwóch różnych ugięć

Współrzędne górnego końca sprężyny w stanie początkowym (nieobciążonym) i obciążonym wyniosą odpowiednio:

$$x_0 = R_0 \cos(2\pi \cdot n_{0cz}), \quad y_0 = R_0 \sin(2\pi \cdot n_{0cz}), \quad z_0 = k_0 \cdot (2\pi \cdot n_{0cz}) = H_{0cz}$$

$$x_1 = R_1 \cos(2\pi \cdot n_{1cz}), \quad y_1 = R_1 \sin(2\pi \cdot n_{1cz}), \quad z_1 = k_1 \cdot (2\pi \cdot n_{1cz}) = H_{1cz} \qquad (2.27)$$

Ponieważ z_0 jest wysokością sprężyny a więc $z_0 = H_{0cz}$ zatem współczynnik k_0 wyniesie:

$$k_0 = \frac{H_{0cz}}{2\pi \cdot n_{0cz}} \qquad (2.28)$$

Na podstawie (2.25) i (2.28) znajdziemy wartość krzywizny, którą wstępnie przyjmiemy jako stałą dla danej sprężyny, niezależnie od jej ugięcia. Z założenia tego zrezygnujemy w dalszej części obliczeń, w której uwzględnimy również działanie momentu gnącego sprężynę na kąt skręcenia jej końców.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{R_0}{\left(\frac{H_{0cz}}{2\pi \cdot n_{0cz}}\right)^2 + R_0^{\,2}} = idem \qquad (2.29)$$

Znając wartość krzywizny drutu sprężyny ρ, możemy na podstawie (2.25) obliczyć wartość współczynnika k w stanie obciążonym:

$$k_1 = \sqrt{\rho R_1 - R_1^{\,2}} \qquad (2.30)$$

Z kolei na podstawie (2.28) mamy:

$$k_1 = \frac{H_{1cz}}{2\pi \cdot n_{1cz}} \tag{2.31}$$

Na podstawie Rys.2.8, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, można napisać:

$$L^2 = {H_{1cz}}^2 + (2\pi \cdot n_{1cz} \cdot R_1)^2$$

Skąd liczba zwojów w stanie obciążonym wyniesie:

$$n_{1cz} = \frac{\sqrt{L^2 - {H_{1cz}}^2}}{2\pi \cdot R_1} \tag{2.32}$$

Porównując (2.30) i (2.31) otrzymamy:

$$\sqrt{\rho R_1 - {R_1}^2} = \frac{H_{1cz}}{2\pi \cdot n_{1cz}} \tag{2.33}$$

Podstawiając (2.32) do (2.33) i wykonując odpowiednie przekształcenia, otrzymamy:

$$R_1 = \rho \frac{L^2 - {H_{1cz}}^2}{L^2} \tag{2.34}$$

Podstawiając równanie (2.34) do (2.32) otrzymamy po przekształceniach wzór na liczbę zwojów sprężyny po obciążeniu:

$$n_{1cz} = \frac{\left({H_{0cz}}^2 + (2\pi \cdot n_{0cz} \cdot R_0)^2\right) R_0}{2\pi \left(\left(\frac{H_{0cz}}{2\pi \cdot n_{0cz}} \right)^2 + {R_0}^2 \right) \sqrt{{H_{0cz}}^2 + (2\pi \cdot n_{0cz} \cdot R_0)^2 - {H_{1cz}}^2}} \tag{2.35}$$

Kąt skręcenia sprężyny ϑ w trakcie jej ściskania jest różnicą kąta skręcenia sprężyny nieobciążonej i kąta skręcenia sprężyny obciążonej:

$$\vartheta = \varphi_0 - \varphi_1 \tag{2.35}$$

Ostatecznie

$$\vartheta = 2\pi \cdot \left(n_{0cz} - \frac{\left({H_{0cz}}^2 + (2\pi \cdot n_{0cz} \cdot R_0)^2\right) R_0}{2\pi \left(\left(\frac{H_{0cz}}{2\pi \cdot n_{0cz}} \right)^2 + {R_0}^2 \right) \sqrt{{H_{0cz}}^2 + (2\pi \cdot n_{0cz} \cdot R_0)^2 - {H_{1cz}}^2}} \right) \tag{2.36}$$

Powyższe obliczenia zostały wykonane przy założeniu że krzywizna drutu sprężyny jest stała a zmienia się jedynie jego skręcenie. Obecnie zrezygnujemy z założenia o stałości krzywizny drutu i uwzględnimy wpływ jej zmiany na wartość kąta skręcenia czół sprężyny. Za zmianę torsji drutu odpowiada moment skręcający a za zmianę krzywizny – moment gnący. Można zatem napisać

$$\frac{1}{T} = f(M_s) \qquad \frac{1}{\rho} = f(M_g)$$

Zależność pomiędzy krzywizną, modułem sprężystości podłużnej, momentem bezwładności przekroju poprzecznego i momentem gnącym opisana jest zależnością [33]:

$$\frac{1}{\rho_z} = \frac{M_g}{EJ} \tag{2.37}$$

Indeks „z" w zależności (2.37) oznacza że jest to zmiana krzywizny a nie jej całkowita wartość. Całkowita wartość krzywizny będzie zatem sumą lub różnicą wartości krzywizny drutu sprężyny nieobciążonej i jej zmiany w wyniku działaniu momentu gnącego W przypadku sprężyny ściskanej będzie to suma, w przypadku rozciąganej – różnica.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_z} \tag{2.38}$$

Ponieważ $M_g = 0{,}5\ PD\sin\gamma$ stąd podstawiając do (2.37) mamy

$$\frac{1}{\rho_z} = \frac{PD}{2EJ}\sin\gamma_1 \tag{2.39}$$

Korzystając z podstawowej zależności na ugięcie sprężyny [74] pod działaniem siły P otrzymamy po przekształceniu, wartość tej siły

$$P = \frac{(H_{0cz} - H_{1cz})Gd^4}{8 \cdot D^3 \cdot n_{cz}} \tag{2.40}$$

Założenie w tym przypadku stałej wartości średnicy podziałowej sprężyny $D = 2R_0$ oraz jej liczby zwojów czynnych nie spowoduje znaczącego błędu.

Przy tych samych założeniach obliczymy kąt wzniosu linii śrubowej sprężyny. Na podstawie Rys.2.8 można zapisać

$$\sin\gamma_1 = \frac{H_{1cz}}{L} \tag{2.41}$$

Na podstawie powyższych równań po dokonaniu odpowiednich przekształceń można zapisać wzór na krzywiznę drutu sprężyny obciążonej

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{(H_{0cz} - H_{1cz})G}{\pi R_0^{\,2} \cdot n_{0cz} \cdot E} \cdot \frac{H_{1cz}}{L} \tag{2.42}$$

Skąd wykorzystując zależność że $E / G = 2(1+\nu)$ [33] oraz równanie (2.29) na podstawie (2.34) otrzymamy

$$R_{1cz} = \left(\frac{L^2}{L^2 - {H_{1cz}}^2} \cdot \left(\frac{R_0}{\left(\frac{H_{0cz}}{2\pi \cdot n_{0cz}} \right)^2 + {R_0}^2} + \frac{\left(H_{0cz} - H_{1cz} \right)}{2\pi {R_0}^2 \cdot n_{0cz} \cdot (1+\nu)} \cdot \frac{H_{1cz}}{L} \right) \right)^{-1} \tag{2.43}$$

Zatem liczba zwojów czynnych sprężyny pod obciążeniem, przy uwzględnieniu zmiany krzywizny drutu wyniesie

$$n_{1cz} = \frac{L^2}{2\pi\sqrt{L^2 - H_{1cz}}} \left(\frac{R_0}{\left(\frac{H_{0cz}}{2\pi \cdot n_{0cz}} \right)^2 + {R_0}^2} + \frac{\left(H_{0cz} - H_{1cz} \right)}{2\pi {R_0}^2 \cdot n_{0cz} \cdot (1+\nu)} \cdot \frac{H_{1cz}}{L} \right) \tag{2.44}$$

Zależność opisująca kąt skręcenia czół sprężyny obciążonej przyjmie ostatecznie postać

$$\vartheta = 2\pi \left(n_{0cz} - \frac{R_0}{\left(\frac{H_{0cz}}{2\pi \cdot n_{0cz}} \right)^2 + {R_0}^2} + \frac{\left(H_{0cz} - H_{1cz} \right)}{2\pi {R_0}^2 \cdot n_{0cz} \cdot (1+\nu)} \cdot \frac{H_{1cz}}{L} \right) \tag{2.45}$$

Zależność (2.45) została zweryfikowana doświadczeniem którego wyniki przedstawiono w tabeli 2.2. Porównanie wyników doświadczenia i wartości otrzymanych za pomocą zależności (2.45) przedstawiono w tabeli 2.3.

Jak widać wyniki są bardzo zbliżone. Zależność (2.45) jest znacznie dokładniejsza od zależności (2.9) i jest prosta w zastosowaniu gdyż nie wymaga ani znajomości siły obciążającej sprężynę ani początkowej wartości kąta wzniosu linii śrubowej. Jest słuszna dla dowolnych zmian kąta wzniosu linii śrubowej. W przypadku sprężyn o bardzo dużym kącie wzniosu linii śrubowej wynik może być ujemny. Dodatkowo można dzięki niej szybko obliczyć zmiany kąta skręcenia czół sprężyny wstępnie obciążonej.

Zaprezentowane wyniki wskazują że w przypadku uniemożliwienia końcom sprężyny swobodnego obrotu, naprężenia wynikające ze skręcania sprężyny jako wyrobu będą w ogólności pomijalnie małe. W szczególności jednak mogą mieć istotny wpływ na rozkład naprężeń w zwojach końcowych, zwłaszcza że podparcie sprężyny uniemożliwiające jej swobodny obrót wokół osi, odbiera jej również możliwość zmiany średnicy zwojów końcowych. Zjawisko to będzie szerzej analizowane przy użyciu Metody Elementów Skończonych.

Tabela.2.3

Nr sprężyny z Tab.2.2	Wartość kąta skręcenia czół z doświadczenia w [º]	Wartość kąta skręcenia czół wg zależności (2.45)	Stosunek wartości kąta z doświadczenia do kąta wg (2.45)
1	7,5	7,8	0,961
2	7,0	7,1	0,986
3	4,5	4,9	0,918
4	4,5	4,6	0,978
5	5,0	4,4	1,136
6	4,5	5,2	0,865
7	11,0	11,9	0,924
8	4,5	4,9	0,918
9	16,0	17,8	0,9
10	5,0	5,9	0,847
11	11,0	9,6	1,146
12	14,0	15,1	0,927
13	4,5	4,6	0,978
14	10,0	9,3	1,075
15	12,0	11,5	1,043
16	13,5	15,3	0,882
17	20,0	20,7	0,966
18	27,5	29,5	0,932
		Wartość średnia $\vartheta_d/\vartheta_{(2.45)}$	**0,965**

Szeroka analiza literaturowa wykazała że zależność pomiędzy promieniem sprężyny nieobciążonej a promieniem sprężyny obciążonej podał również bez wyprowadzenia J. Krużelecki w [28] w postaci:

$$\frac{R}{R_0} = \frac{(1+\nu)\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{(1+\nu)\cos^2\alpha_0 + \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 \operatorname{tg}\alpha} \tag{2.46}$$

W związku (2.46) parametry z indeksem „0” oznaczają stan sprężyny nieobciążonej, parametry bez indeksu oznaczają stan sprężyny pod obciążeniem a α oznacza kąt wzniosu linii śrubowej. Wyniki uzyskane wg (2.46) są bardzo zbliżone z wynikami uzyskanymi z (2.43).

Na podstawie zależności (2.45) można już obliczyć naprężenia wywołane odebraniem sprężynie możliwości swobodnego obrotu jej czół pod obciążeniem.
Sztywność skrętna walcowej sprężyny śrubowej wyraża się przybliżoną zależnością[76]:

$$c_s = \frac{Ed^4}{64 n_{0cz} D} \tag{2.47}$$

Moment skręcający sprężynę jako wyrób składa się z momentu skręcającego drut sprężyny M_{0s} oraz momentu gnącego drut sprężyny M_{0g} wg zależności:

$$M_{0s} = M_0 \sin\gamma \tag{2.48}$$

$$M_{0g} = M_0 \cos\gamma \tag{2.49}$$

Kąt wzniosu linii śrubowej spotykanych w praktyce sprężyn jest niewielki, można więc w przybliżeniu przyjąć że $M_{0g} = M_0$, zaniedbując przy tym wpływ M_{0s} .
Moment M_0 można z dostateczną dla praktyki inżynierskiej dokładnością obliczyć na podstawie zależności[80]:

$$M_0 = \vartheta \cdot c_s \tag{2.50}$$

Naprężenie pochodzące od działania momentu M_0 określa przybliżona zależność

$$\sigma_{Mo} = \frac{32 K_g \cdot M_0}{\pi d^3} \tag{2.51}$$

gdzie współczynnik K_g uwzględnia wpływ zakrzywienia drutu sprężyny na wartość maksymalnych naprężeń gnących w jego przekroju i dla sprężyn z drutu o przekroju kołowym wyraża się przybliżoną zależnością [80]:

$$K_g = \frac{4C-1}{4C-4} \tag{2.52}$$

gdzie $C = D / d$.
Podstawiając (2.45), (2.47) i (2.50) do (2.51) otrzymamy

$$\sigma_{M0} = \frac{4C-1}{4C-4}\left(n_{0cz} - \frac{R_0}{\left(\frac{H_{0cz}}{2\pi \cdot n_{0cz}}\right)^2 + {R_0}^2} + \frac{\left(H_{0cz} - H_{1cz}\right)}{2\pi {R_0}^2 \cdot n_{0cz} \cdot (1+\nu)} \cdot \frac{H_{1cz}}{L} \right) \frac{E}{n_{0cz} C} \tag{2.53}$$

Zależność (2.53) pozwala na znalezienie przybliżonej wartości naprężeń od zginania w drucie sprężyny śrubowej naciskowej, podpartej w sposób odbierający jej końcom swobodę obrotu wokół jej osi. Maksymalną wartość naprężeń stycznych w sprężynie ściskanej można obliczyć z zależności [80]:

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3}\left(\frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0{,}615}{C}\right) \tag{2.54}$$

Ponieważ zarówno naprężenia normalne od skręcania sprężyny jako wyrobu σ_{MO} jak i naprężenia styczne pochodzące od ściskania sprężyny jako wyrobu τ_{MAX} występują w tym samym miejscu tzn. po wewnętrznej stronie drutu sprężyny można zredukować je wg Hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego:

$$\sigma_{red\,\max} = \sqrt{\sigma_{M0}{}^2 + 3\tau_{\max}{}^2} \tag{2.55}$$

Podsumowanie

W rozdziale wykazano że zależność (2.9) nie może służyć do obliczania kąta skręcenia czół sprężyny swobodnie podpartej. Zależność ta została wyprowadzona przy założeniu że sprężyna jest układem *Clapeyrona*. Jednak założenie to w odniesieniu do analizowanego zjawiska jest nieprawdziwe, gdyż zależność pomiędzy kątem skręcenia sprężyny a zmianą jej wysokości nie jest liniowa a moment skręcający M_o sprężynę jako wyrób nie ma bezpośredniego wpływu na zmianę wysokości sprężyny. Próba zmniejszenia ilości założeń upraszczających w zależności (2.9) poprzez uzmiennienie kąta wzniosu linii śrubowej również nie przyniosła zadowalających rezultatów, wręcz przeciwnie wyniki były jeszcze dalsze od wyników doświadczeń (Tabela 2.1). Dopiero metoda oparta o równania geometrii analitycznej dała zależność (2.45) zbieżną z doświadczeniami (Tabela2.3). Zależność ta, po dokonaniu odpowiednich przekształceń związków (2.47), (2.50), (2.51) znanych z literatury, pozwoliła na określenie wzrostu wytężenia materiału sprężyny pod wpływem nieobrotowego podparcia jej końców.

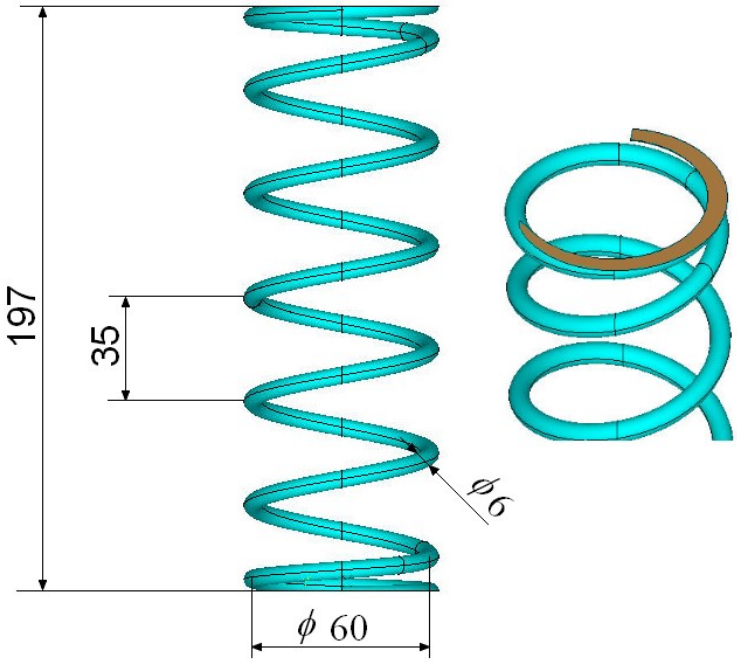
Spośród wszystkich stosowanych rozwiązań konstrukcyjnych sposobów podparcia sprężyn śrubowych, najczęściej spotykanym jest właśnie ten, który uniemożliwia swobodny wzajemny obrót czół sprężyn, dlatego też zależność (2.45) i jej zastosowanie do obliczania stanu wytężenia materiału sprężyny może mieć duże znaczenie praktyczne. Należy jednak zaznaczyć że w rzeczywistości takiemu sposobowi podparcia towarzyszy pewne skrępowanie zwojów końcowych utrudniające lub uniemożliwiające im lokalnie zmianę średnicy. Z tego względu dokładne określenie wartości naprężeń w okolicy końców sprężyny na drodze analitycznej jest bardzo utrudnione. Dlatego też w wielu przypadkach najlepsze rezultaty można uzyskać metodami numerycznymi.

3. Analiza naprężeń MES dla wybranych sposobów mocowania końców sprężyn śrubowych zwijanych z drutu

W rozdziale pierwszym przedstawiono różne sposoby podparcia zwojów końcowych sprężyn. Mnogość zaprezentowanych rozwiązań świadczy o ciągłych poszukiwaniach rozwiązań najkorzystniejszych dla danych warunków pracy sprężyny. Niektóre rozwiązania mają na celu zmniejszenie podatności sprężyn na utratę stateczności, inne mają za zadanie zwiększenie tłumienia drgań własnych sprężyn, jeszcze inne mają na celu zmianę charakterystyki sprężyn z liniowej na progresywną.

Jak wykazano w rozdziale dotyczącym analizy geometrii i odkształceń sprężyn ściskana sprężyna, jeżeli jest swobodnie umocowana doznaje zarówno wzrostu średnicy podziałowej jak i zmniejszenia całkowitej liczby zwojów. Efekt jest tym większy im większe są ugięcia sprężyn. W większości konstrukcji inżynierskich sprężyny są sadowione w sposób przedstawiony na Rys.1.1. Płaskie podpory na ogół nie są obrotowo podatne co uniemożliwia swobodne obroty czół sprężyny. Dodatkowo pomiędzy zeszlifowaną powierzchnią końcowych zwojów sprężyny a podporami występuje styk metaliczny w związku z czym średnica podziałowa zwojów końcowych sprężyny nie może się zwiększyć. Zjawiska te mogą mieć wpływ na wartość maksymalnych naprężeń zredukowanych w sprężynie czego nie uwzględnia się w obliczeniach. Dokładne określenie zależności pomiędzy poszczególnymi odkształceniami sprężyny jest na drodze analitycznej bardzo trudne lub wręcz niemożliwe. Wpływa na to szereg zjawisk w tym zmiana przekroju poprzecznego szlifowanego końca sprężyny, zmienność współczynnika tarcia, zmienny na długości sprężyny skok, będący wynikiem przyginania zwojów końcowych oraz zmiany liczby zwojów będące wynikiem ewentualnego osiadania na sobie zwojów końcowych. W takich przypadkach pomocna jest Metoda Elementów Skończonych, dzięki której można dla konkretnych danych przeanalizować odkształcenia i wytężenie materiału sprężyny i na tej podstawie sformułować ogólniejsze wnioski.

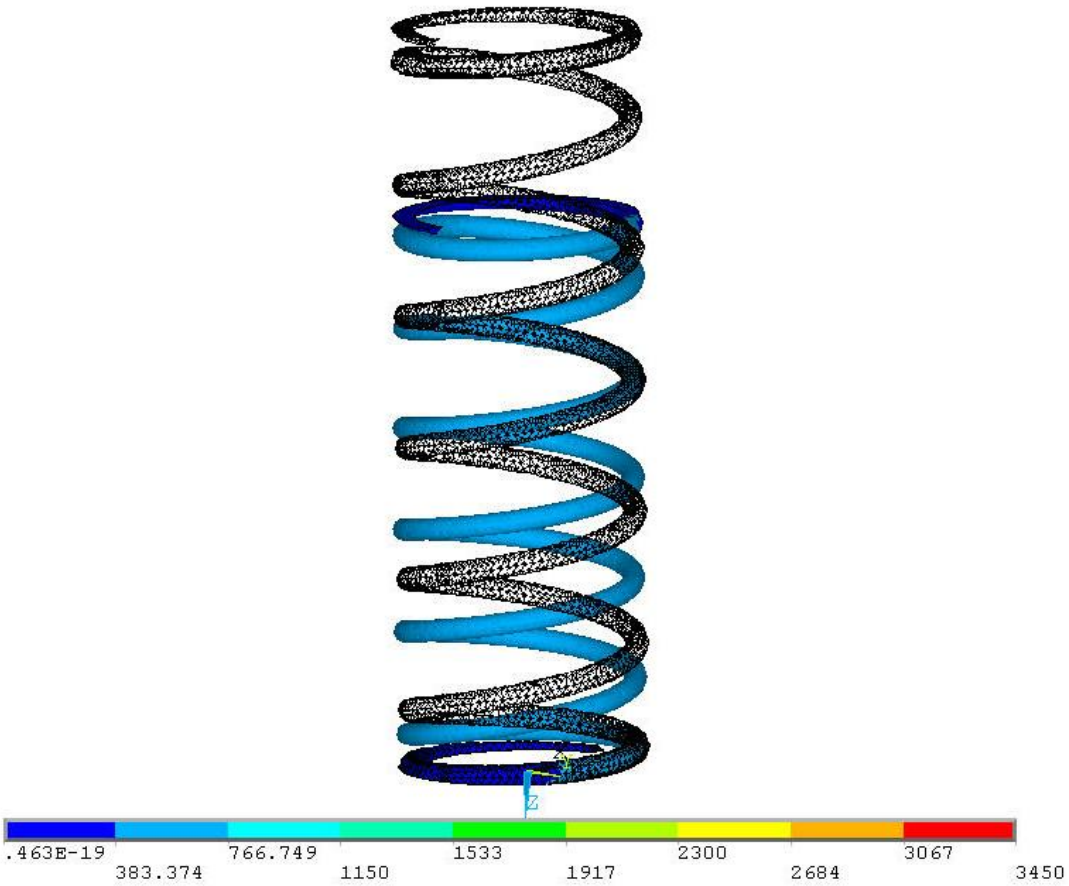
Na Rys.3.1. pokazano analizowaną sprężynę z zaznaczonymi wymiarami charakterystycznymi. Skok w zwojach końcowych zmienia się z 35*mm* na 5*mm* na końcach drutu. Zmiana zaczyna się w odległości 15*mm* od końców sprężyny. Na Rys.3.1. zaznaczono również kolorem brązowym powierzchnię zeszlifowaną, współpracującą z podporą.



Rys.3.1. Wymiary analizowanej sprężyny

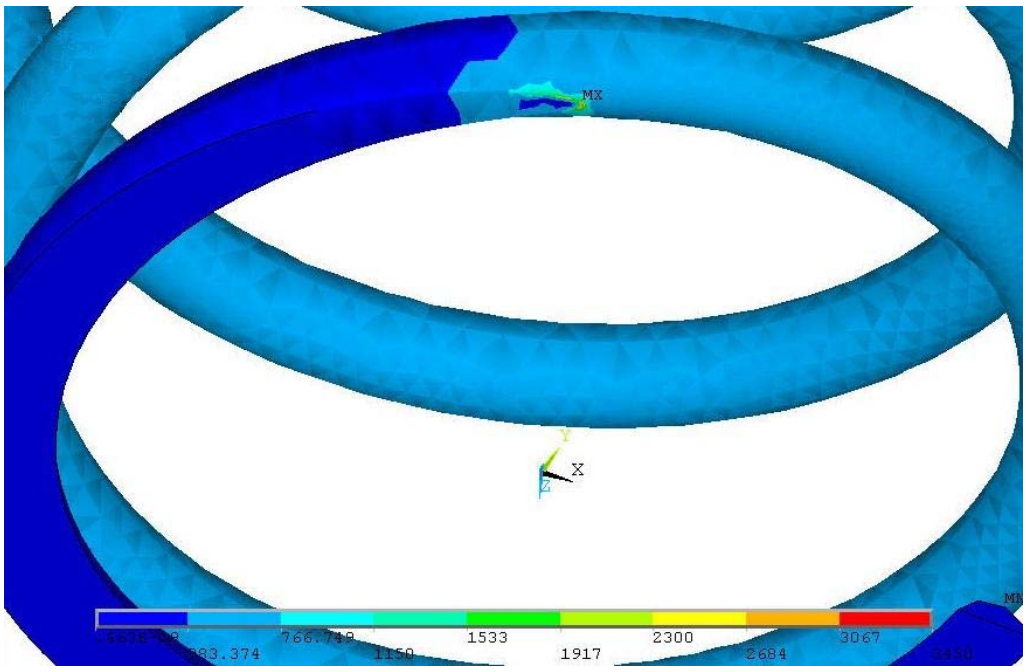
Przeprowadzone zostały trzy różne analizy dla trzech różnych sposobów podparcia końców sprężyny. Symulacje przeprowadzono w środowisku pakietu ANSYS. Właściwości materiałowe określono typowe dla stali: *Moduł Younga* 2,1x10^5 *MPa*, *Liczba Poissona* 0,3. Charakterystykę przyjęto liniową dla całego zakresu naprężeń. Sprężyna została podzielona na czworoboczne, 10-cio węzłowe elementy skończone SOLID92. W każdej z analiz obciążeniem było ugięcie sprężyny o 50*mm*, przy zachowaniu równoległości czół. Zdecydowano się na ten warunek gdyż sprężyny zazwyczaj pracują w układach składających się z kilku sprężyn co zapewnia równoległość ich czół. Przy takim ugięciu w przypadku tej sprężyny nie dochodzi jeszcze do zetknięcia zwojów końcowych z następnymi.

W pierwszej analizie założono że współczynnik tarcia na współpracujących powierzchniach jest równy nieskończoności, czyli nie występują poślizgi pomiędzy szlifowanymi powierzchniami a podporami. Założono również że podpory nie mają możliwości obrotów względem osi sprężyny i są nieskończenie sztywne. Taka sytuacja występuje powszechnie, np. w układach podparcia wagonów kolejowych na wózkach. Na Rys.3.2 przedstawiono rozkład naprężeń zredukowanych HMH wraz z zaznaczonym zarysem sprężyny nie odkształconej, podzielonej na elementy skończone. Na wszystkich wykresach konturowych naprężenia podawane są w *MPa*.



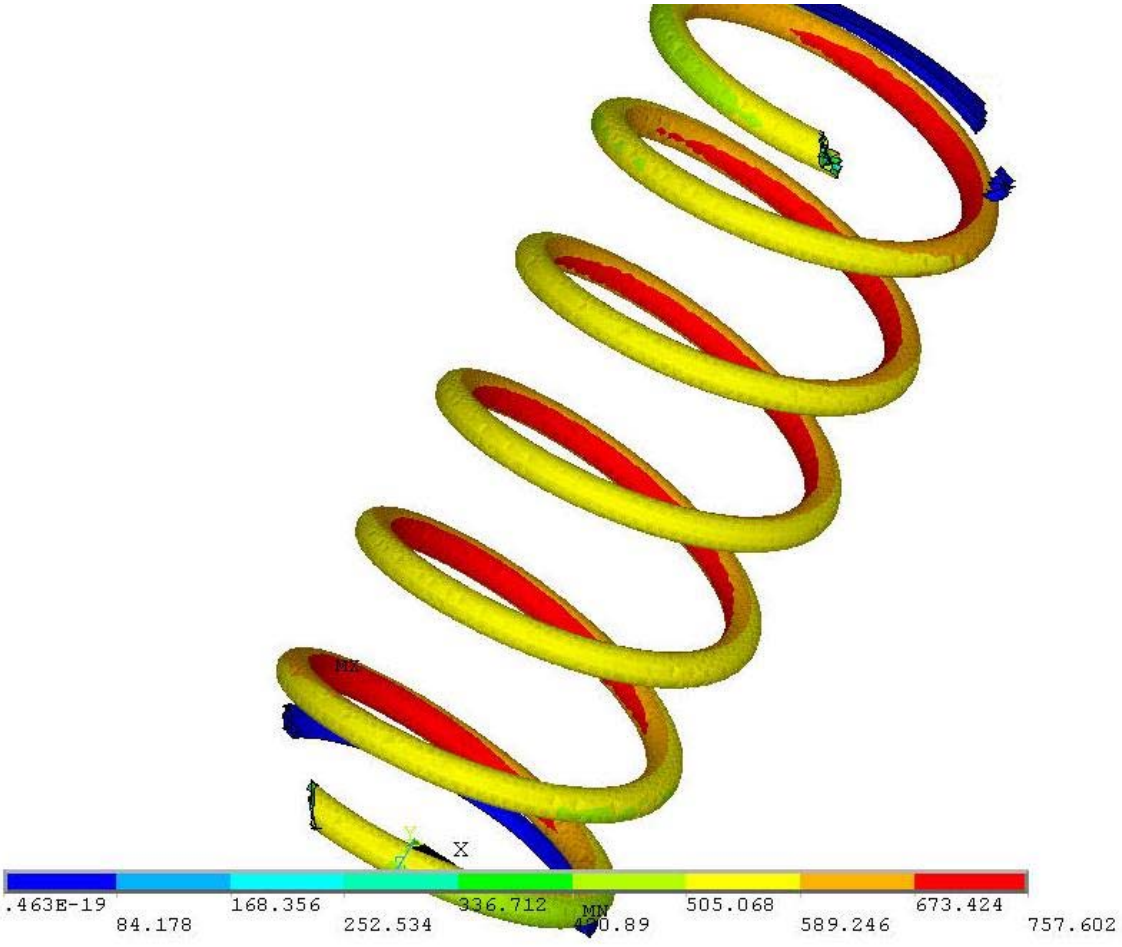
Rys.3.2. Rozkład naprężeń zredukowanych HMH w sprężynie podpartej nieprzesuwnie.

Z Rys.3.2. widać że naprężenia zredukowane w sprężynie generalnie nie przekraczają 770 *MPa*.



Rys.3.3 Maksymalne naprężenia zredukowane w miejscu gdzie drut został zeszlifowany

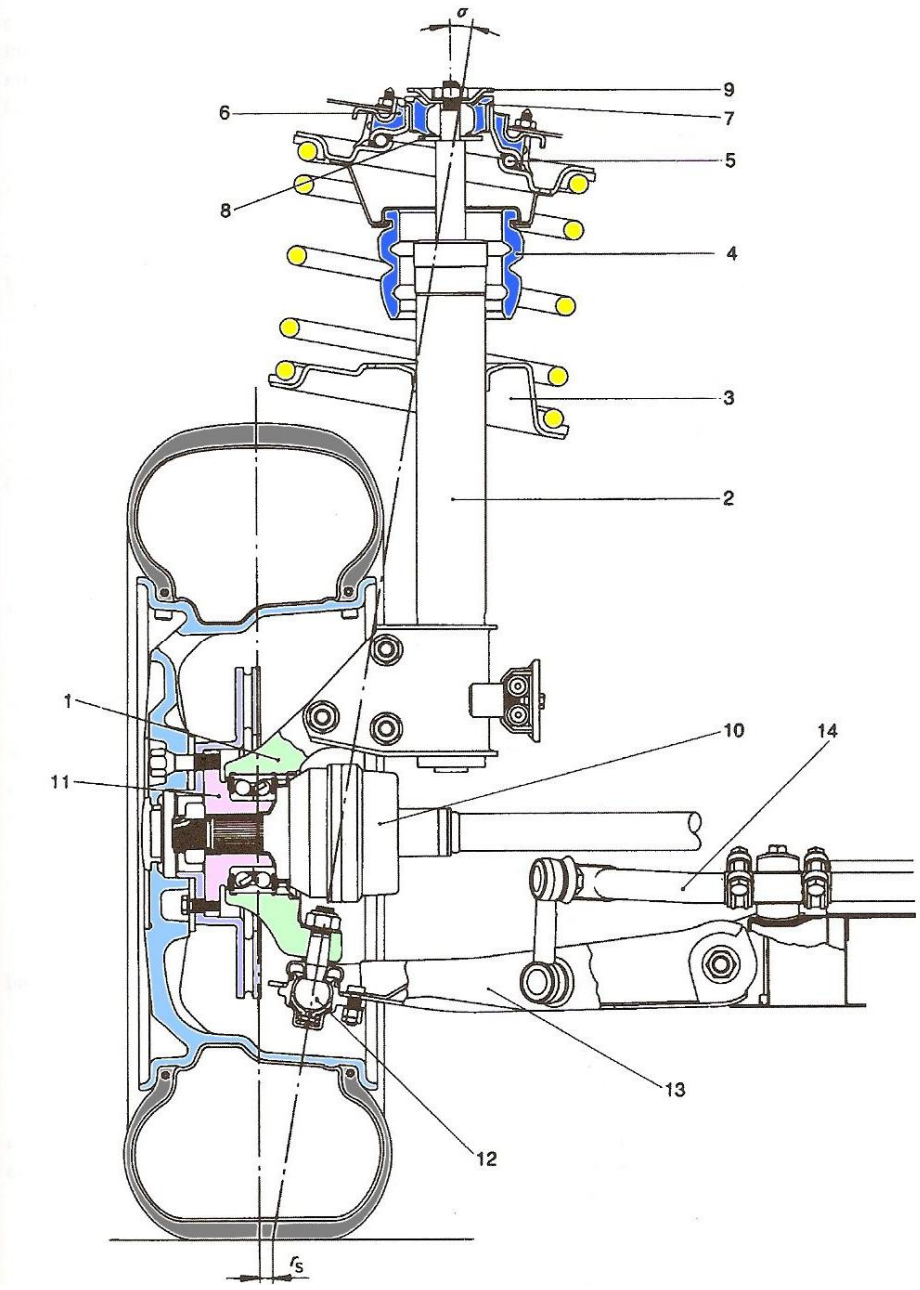
Rys.3.3. przedstawia fragment sprężyny, gdzie występują największe naprężenia. Miejsce wystąpienia największych naprężeń oznaczono literami MX. Uzyskane bardzo wysokie naprężenia w rzeczywistości nie wystąpią. Model nie uwzględnia możliwości przesunięć powierzchni współpracujących i przyjęto liniowe właściwości materiału dla całego zakresu naprężeń. Poza tym w przypadku nagłych zmian geometrii i towarzyszących im obciążeniach zmieniających się skokowo od zera do danej wartości wyniki zależą w dużym stopniu od wielkości elementów. Jednak otrzymane wyniki pozwalają na określenie miejsc najbardziej wytężonych i niebezpiecznych. W rzeczywistej sprężynie w miejscach tych niewątpliwie dojdzie do odkształceń plastycznych na bardzo małych obszarach Po odseparowaniu okolicy zwojów końcowych okazało się że maksymalne naprężenia w środkowej części sprężyny uzyskały wartość około 758 *MPa* co widać na Rys.3.4.



Rys.3.4. Rozkład naprężeń zredukowanych w środkowej części sprężyny podpartej nieprzesuwnie

W drugiej analizie również założono że współczynnik tarcia pomiędzy współpracującymi powierzchniami wynosi nieskończoność. Jedną podporę utwierdzono ale

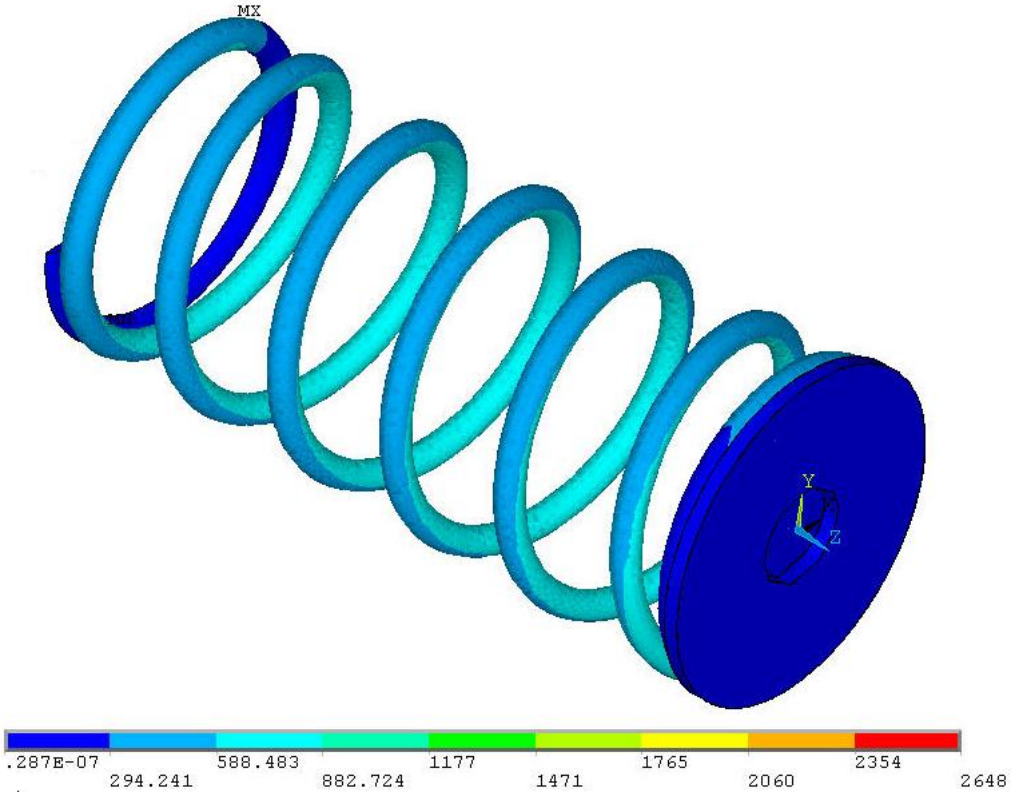
drugiej pozostawiono możliwość obrotu wokół osi sprężyny co w rzeczywistości może mieć miejsce w przypadku gdy jedno z czół sprężyny zostanie posadowione na łożysku oporowym. Przykład takiego podparcia przedstawiono na Rys.3.5. Jest to fragment zawieszenia samochodu marki Lancia [13]. Pozycja nr 5 na rysunku to oporowe łożysko toczne, pozwalające na swobodny obrót czół sprężyny.



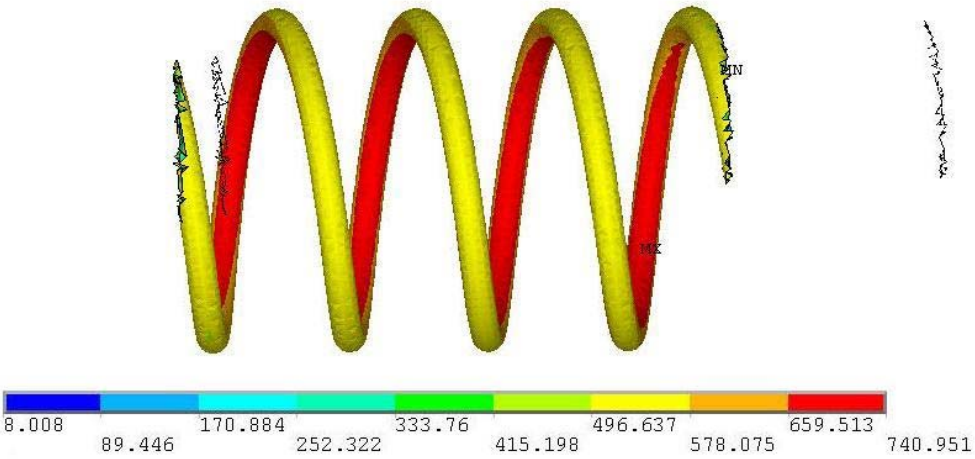
Rys.3.5. Fragment przedniego zawieszenia samochodu osobowego *Lancia*

Widoczne na rysunku niewspółosiowe umieszczenie sprężyny względem osi kolumny ma na celu ograniczenie wielkości giętnej deformacji sprężyny w zakresie najczęściej występujących ugięć zawieszenia [18].

Rozkład naprężeń zredukowanych w sprężynie z tej analizy przedstawia Rys.3.6.



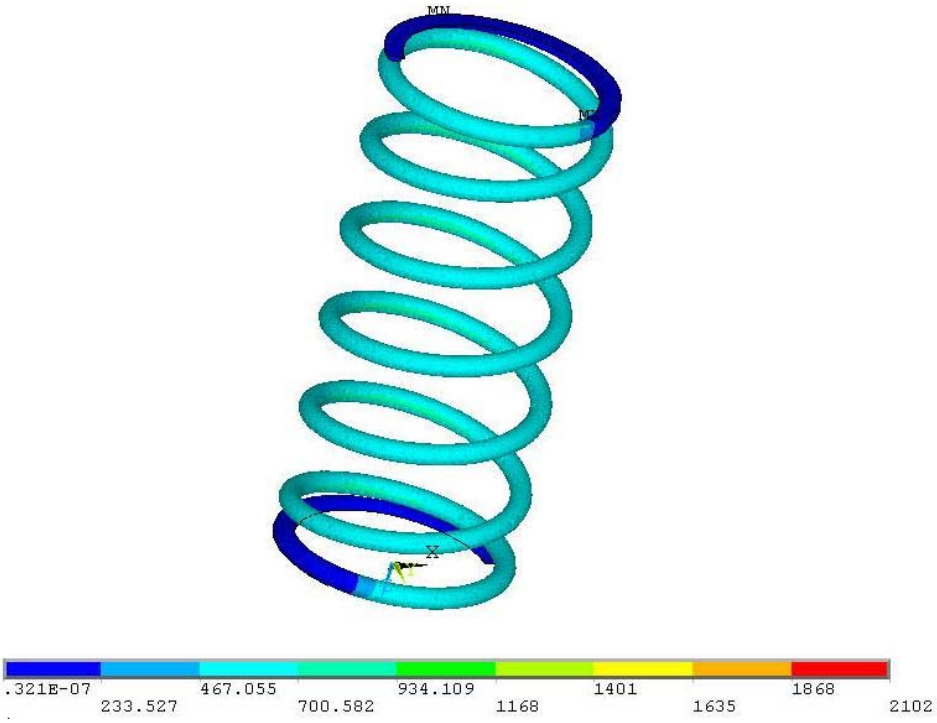
Rys.3.6. Rozkład naprężeń zredukowanych w sprężynie o skrępowanych końcach, z pozostawioną możliwością wzajemnego obrotu czół



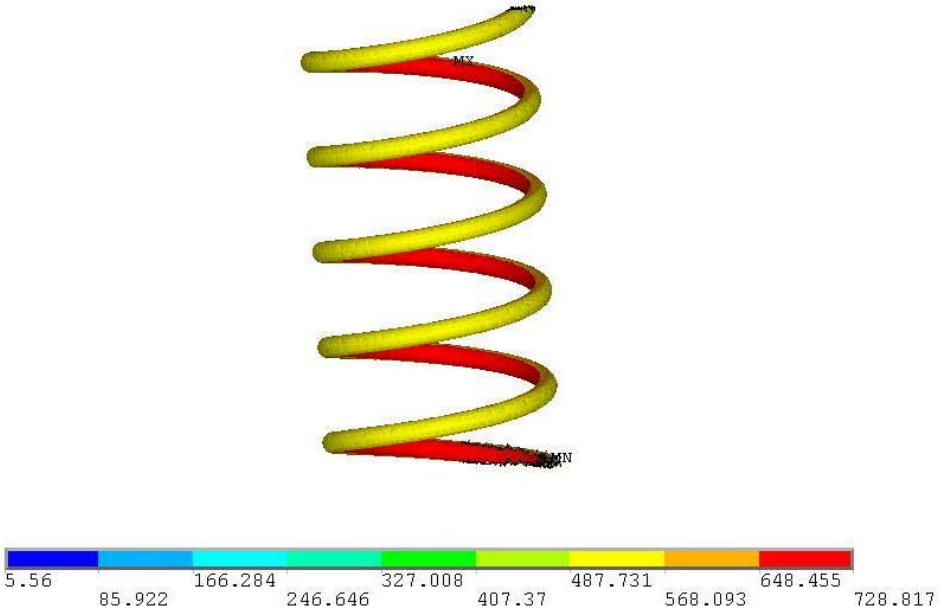
Rys.3.7. Rozkład naprężeń zredukowanych w środkowej części sprężyny o skrępowanych końcach, z pozostawioną możliwością wzajemnego obrotu czół

Porównując Rys.3.6 z Rys.3.2 widać że naprężenia maksymalne w pierwszym przypadku są o około ¼ niższe niż dla sprężyny o unieruchomionych zwojach końcowych.

Naprężenia w środkowej części sprężyny uległy niewielkiemu zmniejszeniu co widać na Rys.3.7.



Rys.3.8. Rozkład naprężeń zredukowanych w sprężynie o końcach podpartych w sposób umożliwiający ich swobodny przesuw w kierunkach normalnych do osi sprężyny



Rys.3.9. Rozkład naprężeń zredukowanych w środkowej części sprężyny o końcach podpartych w sposób umożliwiający ich swobodny przesuw w kierunkach normalnych do osi sprężyny

W trzeciej analizie założono że współczynnik tarcia pomiędzy współpracującymi powierzchniami jest znikomo mały. Sytuacja taka jest w praktyce bardzo trudna do osiągnięcia, jednak to ona stanowi model do obliczania naprężeń w sprężynach.

Porównanie otrzymanych wyników przedstawiono w Tabeli 3.1.

Tabela 3.1

Sprężyna o długości swobodnej 197*mm* i ugięciu 50*mm*	Sprężyna o końcach utwierdzonych	Sprężyna o zwojach końcowych umocowanych nieprzesuwnie do podpory mogącej obracać się swobodnie wokół osi sprężyny	Sprężyna o końcach slizgających się bez tarcia po powierzchniach podporowych
Maksymalne naprężenia zredukowane	3450	2648	2102
Maksymalne naprężenia zredukowane w zwojach środkowych	758	741	729

Aby sprawdzić wpływ sposobu mocowania w zależności od liczby zwojów sprężyny przeprowadzono analogiczne analizy dla sprężyny krótszej od poprzedniej o trzy zwoje. Jej długość swobodna wynosi 92*mm*. Obciążeniem w tych analizach było również równoległe przesunięcie górnej podstawy sprężyny o proporcjonalną wartość 26*mm*. Porównanie otrzymanych wyników podano w Tabeli 3.2.

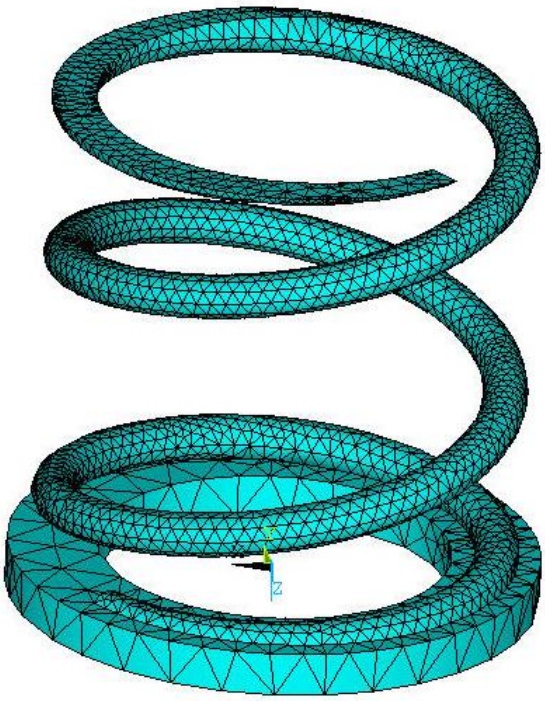
Tabela 3.2

Sprężyna o długości swobodnej 92*mm* i ugięciu 26*mm*	Sprężyna o końcach utwierdzonych	Sprężyna o zwojach końcowych umocowanych nieprzesuwnie do podpory mogącej obracać się swobodnie wokół osi sprężyny	Sprężyna o końcach ślizgających się bez tarcia po powierzchniach podporowych
Maksymalne naprężenia zredukowane	3808	3864	2534
Maksymalne naprężenia zredukowane w zwojach środkowych	758	747	730

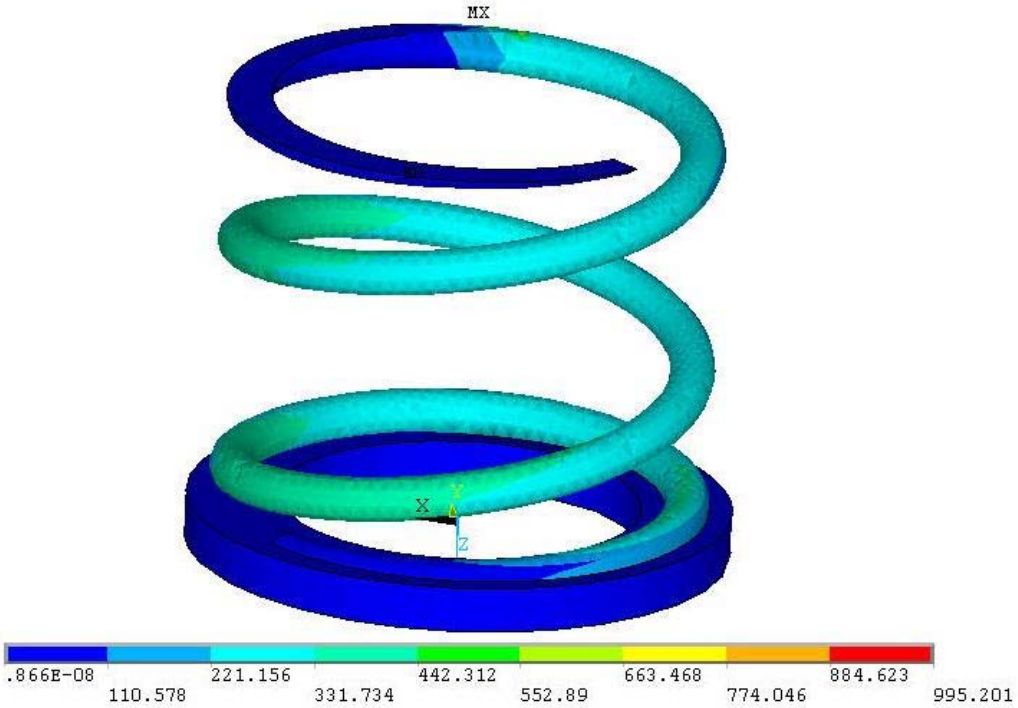
Należy zaznaczyć że celowo pozostawiono cząstkową liczbę zwojów taką samą jak poprzednio aby wyniki z obu serii analiz były porównywalne. Jak wykazały późniejsze analizy cząstkowa liczba zwojów ma istotny wpływ na rozkład naprężeń w całej sprężynie na długości drutu. Wpływ ten jest tym większy im mniej zwojów posiada sprężyna a wynika on z faktu że końcowe, zeszlifowane części zwojów nie mogą zmienić swojego kąta wzniosu gdyż są dociskane do płaskiej powierzchni. Powoduje to powstanie momentu gnącego drut sprężyny i w konsekwencji wzrost naprężeń.

Jak wskazują powyższe wyniki nawet podparcie pozwalające na ślizganie się zeszlifowanej powierzchni sprężyny powoduje znaczący wzrost naprężeń w miejscu gdzie zeszlifowany zwój przechodzi w zwój czynny. Aby zminimalizować to zjawisko stosuje się podkładkę z wysokoelastycznego materiału takiego jak neopren czy guma. Przykład takiego rozwiązania pokazuje Rys.1.21.

W celu sprawdzenia skuteczności tego rozwiązania przeprowadzono analizę numeryczną sprężyny, której dolny koniec podparto na gumowej podkładce o średnicy wewnętrznej równej 48*mm*, średnicy zewnętrznej 72*mm* i grubości 6*mm*. Ponieważ dla małych odkształceń guma ma w przybliżeniu charakterystykę liniową, więc przyjęto liniowy model materiału. Właściwości materiałowe przyjęto typowe dla gumy stosowanej w tego typu przypadkach [59]: *Moduł Younga* E = 7*MPa*, liczba *Poissona* $\nu = 0{,}495$. Ze względu na duży stosunek powierzchni swobodnej podkładki do jej powierzchni obciążonych pominięto wpływ współczynnika kształtu na wzrost *Modułu Younga*. Całkowita wysokość sprężyny wynosiła w tej analizie 55,4*mm*. Pozostałe parametry geometryczne przyjęto takie jak w poprzednich analizach. Górnemu końcowi sprężyny odebrano wszystkie stopnie swobody i zadano przesunięcie wzdłuż osi sprężyny o 10*mm* w dół. Dolna powierzchnia podkładki gumowej została utwierdzona. Model sprężyny na gumowej podkładce pierścieniowej przedstawia Rys.3.9. Dwa różne sposoby podparcia tej samej sprężyny umożliwiają analizę porównawczą ich wpływu na lokalną koncentrację naprężeń.

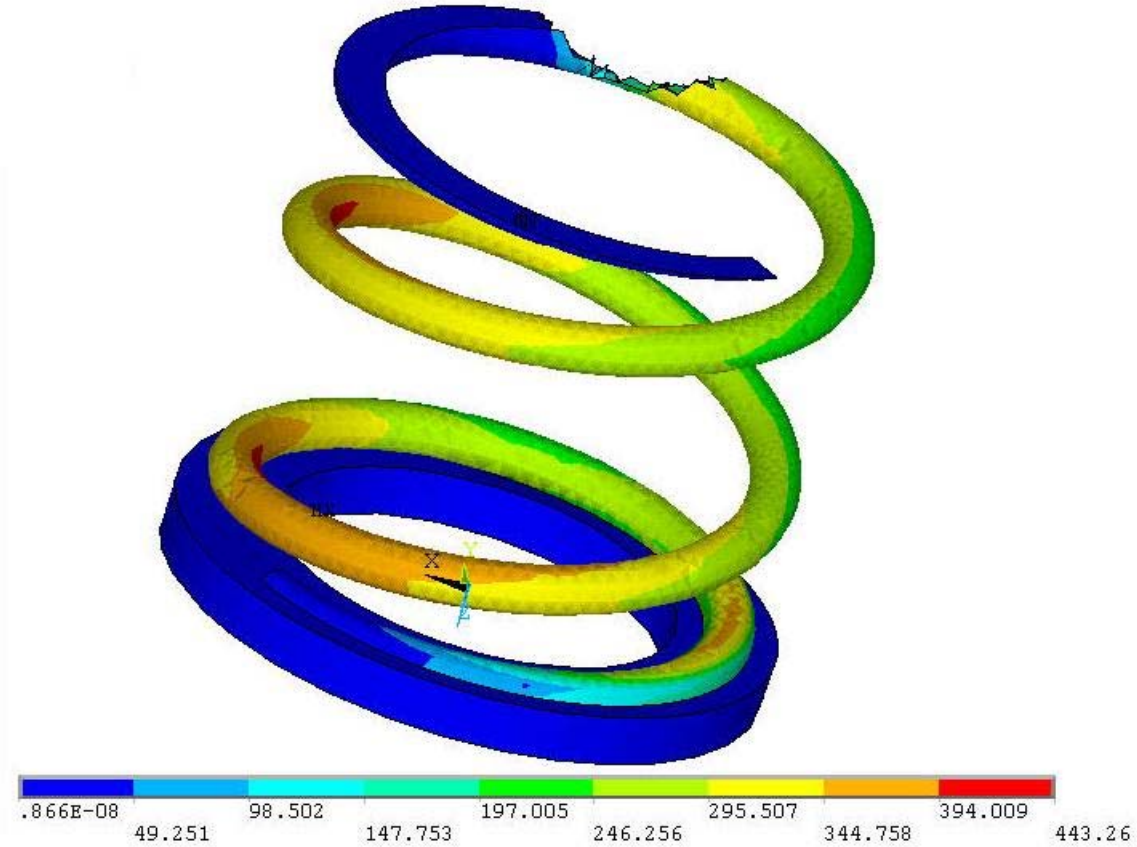


Rys.3.10. Model sprężyny podpartej jednostronnie na gumowej podkładce



Rys 3.11. Rozkład naprężeń zredukowanych w układzie sprężyna – podkładka gumowa

Na Rys3.11. przedstawiony został rozkład naprężeń w badanym modelu. Jak można się było spodziewać maksymalne naprężenia występują w okolicy górnego zeszlifowanego końca. Aby stwierdzić jaki jest rozkład naprężeń w środkowej i dolnej części sprężyny elementy w okolicy górnego końca zostały ukryte, jak to przedstawiono na Rys.3.12.

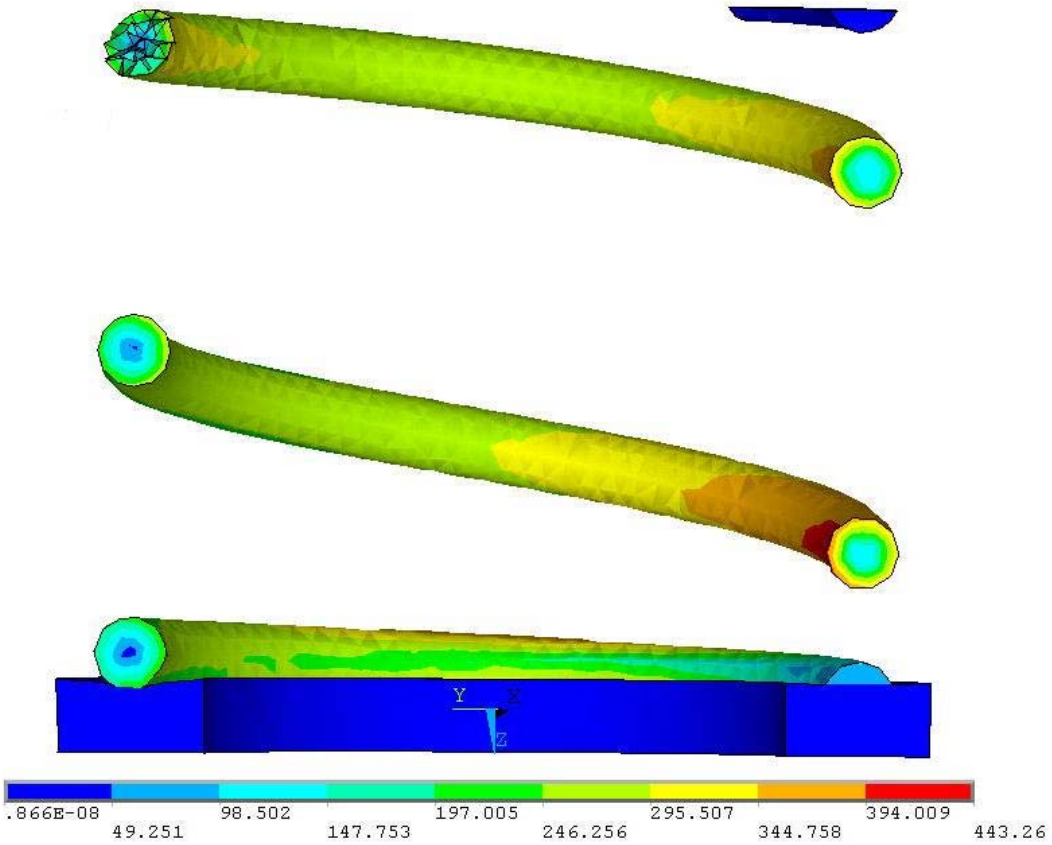


Rys.3.12. Rozkład naprężeń zredukowanych w układzie z pominięciem górnego końca sprężyny

Z Rys.3.12. widać że naprężenia w środkowej i dolnej części sprężyny są ponad dwa razy niższe niż w części górnej. Dodatkowo można również zauważyć dużą nierównomierność naprężeń na długości drutu – naprężenia w lewej części sprężyny są znacznie wyższe od naprężeń w prawej jej części. Ta nierównomierność nie zaznaczała się tak silnie w przypadku sprężyn o dużej liczbie zwojów. Jednak jej główną przyczyną jest fakt że w tym przypadku liczba zwojów czynnych jest liczbą całkowitą.

Rys.3.13 przedstawia przekrój poprzeczny przez sprężynę i podkładkę gumową. Jak widać naprężenia zredukowane w okolicy podkładki są mniejsze niż w zwojach środkowych. Dzięki dużej odkształcalności gumy nacisk pomiędzy podkładką a sprężyną rozkłada się na

dużej powierzchni. Zastosowanie gumowej podkładki wpływa zatem bardzo korzystnie na redukcję naprężeń w zwojach końcowych.



Rys.3.13.Rozkład naprężeń zredukowanych na przekroju modelu sprężyny podpartej na podkładce gumowej

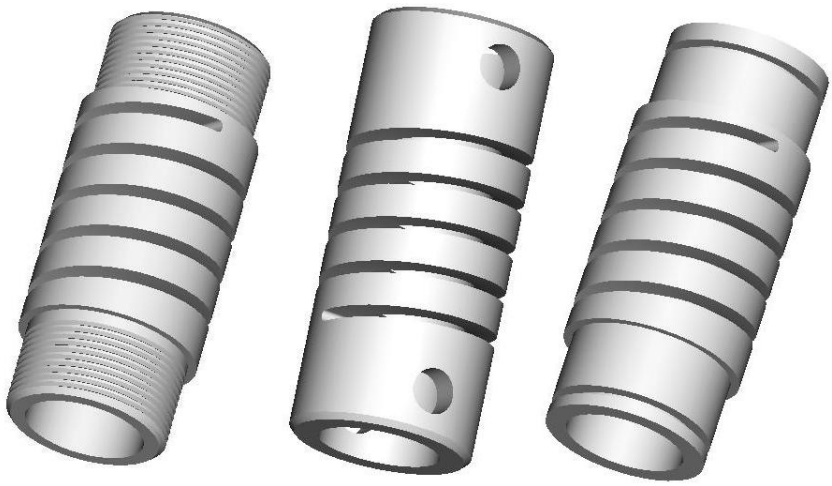
Podsumowanie

Przedstawione wyniki pozwalają na wysunięcie wniosku że sposób podparcia istotnie wpływa na wielkość wytężenia materiału sprężyny. O ile nie ma on istotnego wpływu na naprężenia w środkowych zwojach sprężyny (w przeprowadzonych analizach różnica naprężeń maksymalnych w zwojach środkowych pomiędzy najkorzystniejszym a najbardziej niekorzystnym przypadkiem nie przekroczyła 4%) o tyle zwoje końcowe poddane są dużo wyższym naprężeniom w przypadku ich utwierdzenia niż w przypadku obrotowego podparcia. Ponieważ ten ostatni sposób podparcia jest stosunkowo łatwy do wykonania – poprzez zastosowanie łożyska oporowego należy z niego korzystać w przypadku odpowiedzialnych sprężyn. Dodatkowo zastosowanie podkładki z materiału wysokoelastycznego powoduje dalszą redukcję naprężeń w pobliżu zwojów końcowych. Przy

projektowaniu tego typu układu ważną rolę odgrywa wytrzymałość elastomeru i stabilność jego właściwości mechanicznych z upływem czasu. Należy jednak pamiętać że podkładki tego typu powodują że podparcie sprężyny jest mniej stabilne a tym samym podatniejsze na zjawisko utraty stateczności. Wpływ sposobu podparcia sprężyn śrubowych naciskowych na ich podatność na utratę stateczności będzie omówione w rozdziale siódmym.

4. Analiza naprężeń dla wybranych sposobów mocowania końców sprężyn śrubowych, wykonywanych technologią ubytkową

Spośród sprężyn śrubowych stosunkowo nową konstrukcją są sprężyny wykonywane za pomocą technologii ubytkowej. Sprężyny te są badane i udoskonalane w Katedrze Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn na Wydziale Inżynierii Mech. i Robotyki AGH. Sprężyny te charakteryzują się możliwością uzyskania wyjątkowo dużej sztywności oraz wysokiej dokładności wymiarowej i co za tym idzie powtarzalnej sztywności. Możliwe są różnorodne sposoby ich montażu niedostępne dla sprężyn zwijanych. Część mocująca jest integralną częścią sprężyny i dzięki temu możliwe jest zastosowanie tego typu sprężyn w układach o różnokierunkowym obciążeniu. Mogą one zatem pracować zarówno na ściskanie jak i na rozciąganie.



Rys.4.1. Różne postacie sprężyn śrubowych wykonanych obróbką ubytkową

Ponieważ rowki w tego typu sprężynach mogą być wycinane laserem, wodą, piłą lub frezowane, zwoje mają przekrój prostokątny lub zbliżony do prostokątnego. Dzięki wspomnianej wysokiej dokładności wymiarowej zespoły takich sprężyn można stosować w układach elastycznego podparcia w których wymagana jest bardzo mała tolerancja położenia jak np. przy posadowieniu segmentów wzdłużnych łożysk hydrodynamicznych płynnego tarcia. Można je zastosować gdy

poza odpowiednią tolerancją wysokości jest równocześnie wymagana wysoka i dokładna sztywność niemożliwa do uzyskania dla sprężyn śrubowych wykonanych innymi sposobami [63].

Niestety poza zaletami, zwłaszcza sprężyny z zamkniętymi końcami - Rys.4.1 mogą posiadać też pewne wady. Można spodziewać się nieco wyższych naprężeń w zwojach w stosunku do sprężyn śrubowych zwijanych z drutu okrągłego. Naprężenia te są wyższe niż w sprężynach o drucie o przekroju okrągłym, o tej samej sztywności i poddanych takim samym obciążeniom. Szczególnie w miejscach zakończeń zwojów, ze względu na zmianę geometrii występuje koncentracja naprężeń.

W literaturze przedmiotowej można znaleźć kilka mniej lub bardziej dokładnych metod obliczania naprężeń w sprężynach śrubowych o prostokątnym przekroju poprzecznym zwoju. W najnowszych publikacjach [10, 14, 22, 71] rozważania dotyczące stanu naprężeń w zwojach sprężyn autorzy opierają jedynie na Metodzie Elementów Skończonych. Zależności dotyczące maksymalnych naprężeń w sprężynach śrubowych są podawane przy milczącym założeniu idealnie osiowego podparcia sprężyny i niewystępowania miejsc o szczególnej koncentracji naprężeń. W klasycznej literaturze [26] autorzy podają następujące zależności na naprężenia w sprężynie śrubowej z drutu o przekroju prostokątnym:

$$\tau_S = \frac{PD}{2W_0 \cdot g_k} \le g_w \cdot k \qquad (4.1)$$

gdzie: g_k- współczynnik kształtu przekroju, zależny od stosunku b/a oraz D/b odczytywany z wykresu, gdzie: b – krótszy bok przekroju pręta, a – dłuższy bok przekroju pręta, D – średnica nominalna sprężyny,

g_w - współczynnik wymiaru przekroju, uwzględniający różnicę grubości próbki poddanej badaniom wytrzymałościowym i grubości pręta analizowanej sprężyny, odczytywany z wykresu

S. Żukowski w [80] podaje wzór (4.2), oparty o teorię de Saint – Venanta uzupełniony o współczynnik poprawkowy Wahla K:

$$\tau = \frac{PD}{2\mu ab^2} \cdot W \qquad (4.2)$$

gdzie: K –współczynnik poprawkowy Wahla, wyrażony zależnością

$$K = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0{,}615}{C}$$

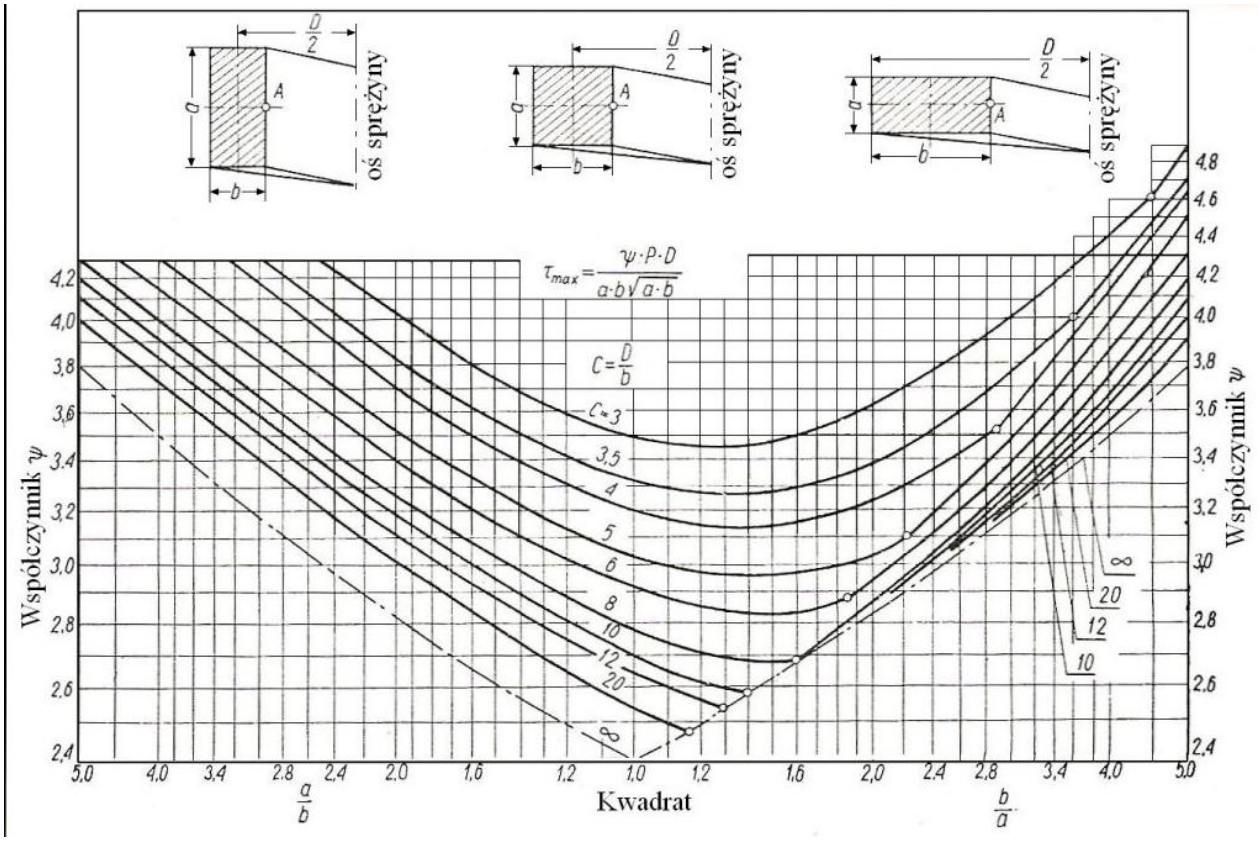
μ - współczynnik zależny od stosunku b/a

współczynnik $C = D/b$

Oprócz zależności (4.2) Żukowski podaje wzór przybliżony na naprężenia maksymalne w sprężynie śrubowej o drucie prostokątnym:

$$\tau_{MAX} = \psi \frac{PD}{ab\sqrt{ab}} \qquad (4.3)$$

gdzie: współczynnik ψ odczytuje się z wykresu w zależności od stosunku D/b i a/b;



Rys.4.2. Zależność współczynnika ψ od stosunku długości boków przekroju drutu i od wskaźnika sprężyny

Inną zależność na naprężenia w omawianym przypadku podaje E. I. Rivin w [61]:

$$\tau_o = \frac{PD}{2\chi a^2 b} \qquad (4.4)$$

Wartości współczynnika χ odczytuje się z tablicy na podstawie stosunku b/a.

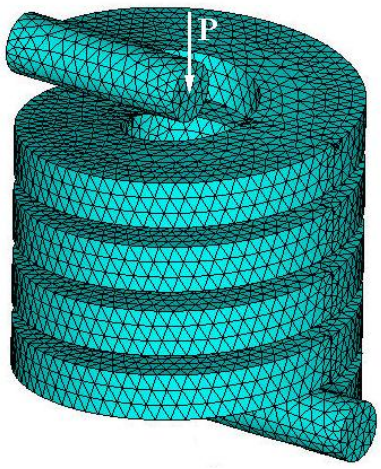
Należy zaznaczyć że o ile wzory (4.1, 4.2, 4.3) odnoszą się do sprężyn śrubowych, naciskowych, zwijanych z drutu prostokątnego, swobodnie podpartych o tyle wzór (4.4) został podany przez Rivina [61] w sposób wyraźnie sugerujący możliwości jego zastosowania do obliczania sprężyn o zamkniętych końcach, wykonanych poprzez wycinanie z tulei cylindrycznych.

W Tablicy 4.1 zamieszczono wartości naprężeń stycznych uzyskane z zastosowania wyżej wymienionych wzorów (4.1, 4.2, 4.3, 4.4) dla sprężyny o następujących danych: średnica nominalna sprężyny D = 35 mm, przekrój zwoju a x b = 15 *mm* x7 *mm*, skok p = 10 mm po przyjęciu następujących właściwości materiału: stal 60S2, k_s = 400 *MPa*, *moduł Younga* E = 206000MP*a*, *liczba Poissona* ν = 0,3. Wartość siły obciążającej P = 3074*N* została wyliczona na podstawie wzoru (4.3) przy podstawieniu za τ_{MAX} wartości naprężeń dopuszczalnych na skręcanie.

Tabela 4.1

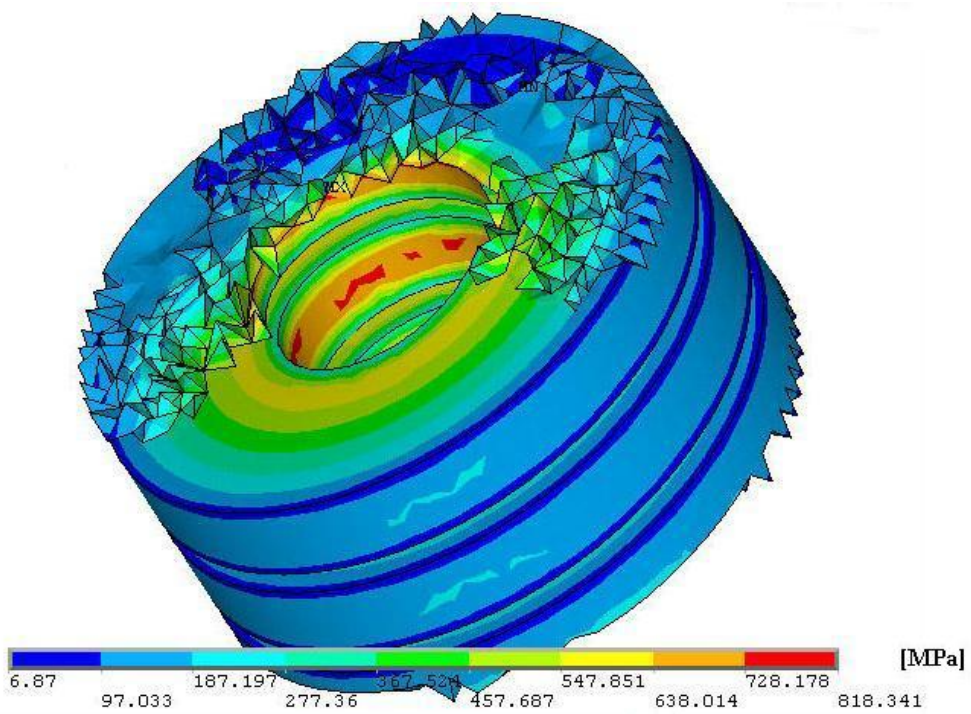
P [*N*]	τ (1) [*MPa*]	τ (2) [*MPa*]	τ (3) [*MPa*]	τ (4) [*MPa*]
3074	457	458	400	72

Ponieważ wartości naprężeń ze wzorów (4.1, 4.2, 4.3, 4.4) istotnie się różnią, przeprowadzono ich weryfikację analizą MES z użyciem pakietu ANSYS.



Rys.4.3. Model analizowanej sprężyny śrubowej o końcach otwartych podpartych przegubowo

Poniżej, na Rys.4.4 przedstawiono rozkład naprężeń zastępczych HMH na wycinku modelu.



Rys.4.4. Rozkład naprężeń zastępczych HMH przy teoretycznym sposobie obciążenia sprężyny siłą osiową *P*

ANSYS pozwala bezpośrednio wyznaczyć wartość naprężeń zastępczych .Uwzględniając wpływ zginania, ściskania i ścinania na rozkład naprężeń w sprężynie oraz przekształcając wzór (4.5) na maksymalne naprężenia zastępcze według hipotezy

Hubera – Misesa – Hencky'ego obliczono maksymalną wartość naprężeń stycznych w analizowanym modelu sprężyny w miejscu przekroju najbardziej wytężonym [69]:

$$\sigma_{HMH} = \sqrt{\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 + \sigma_z{}^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + 3(\tau_{xy}{}^2 + \tau_{yz}{}^2 + \tau_{zx}{}^2)} \qquad (4.5)$$

– naprężenia gnące według teorii prętów silnie zakrzywionych w odniesieniu do prętów o przekroju prostokątnym:

$$\sigma_g = \frac{0{,}5PD\sin\gamma}{F\left(R - \dfrac{b}{\ln\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)}\right)}\left(\frac{r-\rho_1}{\rho_1}\right), \qquad \gamma = atan\frac{p}{\pi D};$$

F = a x b – przekrój drutu; R – środek ciężkości przekroju drutu; ρ_1 i ρ_2 – kolejno wewnętrzny i zewnętrzny promień sprężyny; r – promień wodzący warstwy obojętnej drutu

– naprężenia ściskające (mające ten sam kierunek co naprężenia gnące):

$$\sigma_c = \frac{P \sin \gamma}{ab};$$

– naprężenia tnące:

$$\tau_{SH} = \frac{P \cos \gamma}{ab};$$

– wartość naprężeń skręcających τ_{FEM} jest niewiadomą

Wzór (4.5) w rozpatrywanym przypadku, po podstawieniu powyższych oznaczeń za poszczególne składowe naprężeń przyjmie postać

$$\sigma_{HMH} = \sqrt{(\sigma_g - \sigma_c)^2 + 3(\tau_{SH} + \tau_{FEM})^2} \qquad (4.6)$$

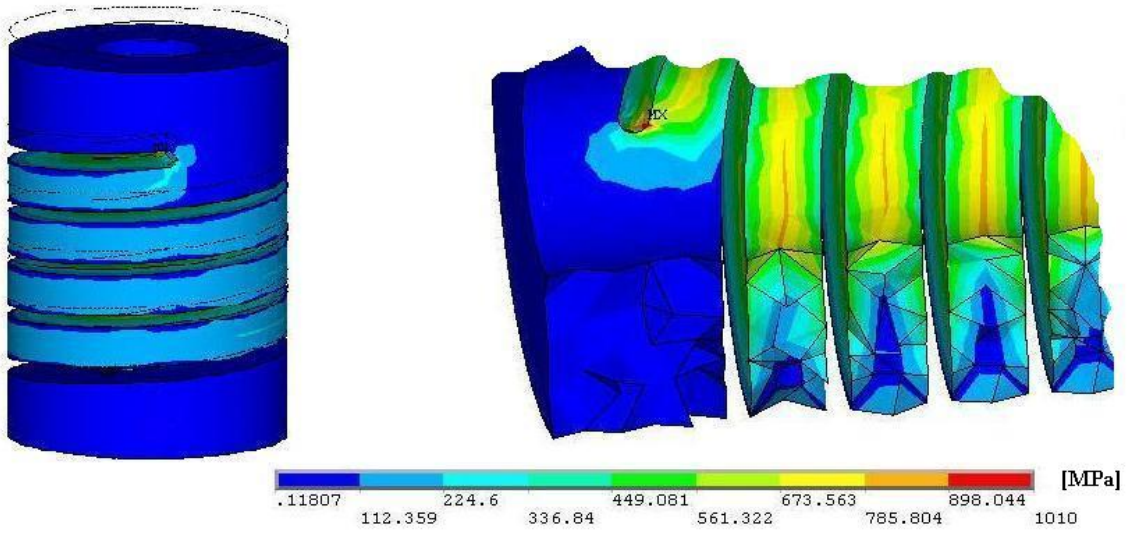
Podstawiając wartości naprężeń wyliczone według powyższych wzorów do wzoru (4.6) oraz wiedząc że σ_{HMH} wynosi 818 MPa znajdujemy wartość naprężeń skręcających w miejscu najbardziej wytężonym:

$$\tau_{FEM} = 471 \text{ MPa}$$

Z powyższych wyliczeń wynika że wzór (4.1) podany w [26] i wzór (4.2) podany przez S. Żukowskiego dają wartości porównywalne z wynikami analizy MES, wzór (4.3) nieco zaniżone wartości naprężeń, natomiast wzór (4.4) podany przez Rivina daje wartości naprężeń zaniżone kilkakrotnie.

Na Rys.4.4 przedstawiono rozkład naprężeń zastępczych w sprężynie o parametrach jak wyżej, poddanej działaniu takiej samej siły ściskającej, lecz o końcach zamkniętych w sposób pokazany na Rys.4.1. Dodatkowo zostały zasymulowane rzeczywiste warunki mocowania takiej sprężyny które, uniemożliwiają wzajemne zmiany położeń kątowych jej czół.

Porównując Rys.4.4 z Rys.4.5 stwierdzić można że wpływ wykonania i zamocowania końców sprężyn na rozkład naprężeń jest znaczący i w analizowanym przypadku naprężenia maksymalne w sprężynie wycinanej z tulei, o końcach zamkniętych są o około 20% wyższe niż w sprężynie o swobodnym podparciu. Najwyższa koncentracja naprężeń występuje w okolicy powierzchni zaokrąglenia rowka będącego początkiem zwoju sprężyny.



Rys.4.5**.** Rozkład naprężeń HMH w analizowanej sprężynie o końcach zamkniętych

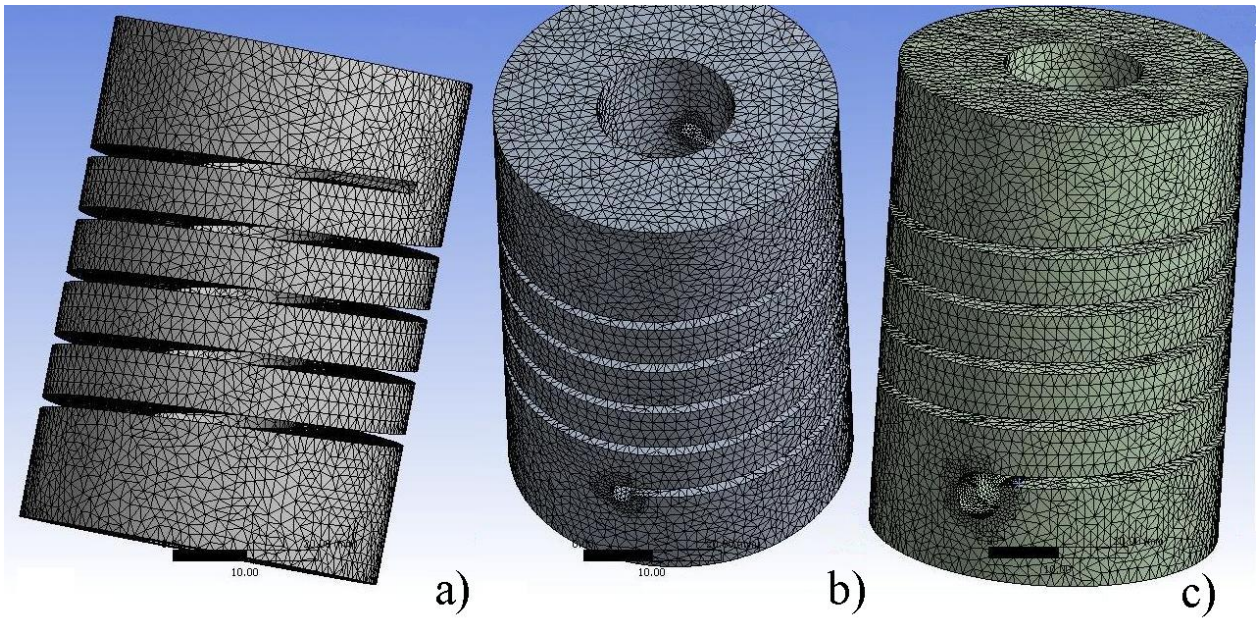
Porównując naprężenia obliczone według danych literaturowych z naprężeniami uzyskanymi w analizach MES można stwierdzić że istniejące w literaturze metody obliczania sprężyn śrubowych z drutu o przekroju prostokątnym mają zróżnicowaną dokładność. W szczególności wzór (4.4) podany w [61] daje wyniki niezgodne zarówno z teorią jak i z analizą MES. Natomiast wzór (4.2) podany przez Żukowskiego daje wyniki zgodne z doświadczeniem w odniesieniu do sprężyn o końcach otwartych podpartych przegubowo, jednakże zastosowanie tej zależności do obliczania sprężyn o końcach zamkniętych, wycinanych z tulei prowadzi do mało dokładnych rezultatów.

W zależności od technologii możliwe jest jednak takie ukształtowanie mocowania sprężyny przedstawionej na Rys.4.1, które zapewnia minimalizację naprężeń w strefie ich koncentracji. Należy dążyć do takiego ukształtowania przejścia ze zwoju do elementu mocującego aby najwyższe naprężenia zredukowane w tej strefie nie odbiegały od naprężeń w zwojach środkowych czyli tam gdzie rozkład naprężeń na długości drutu jest równomierny. Na Rys.4.6. pokazano trzy z wielu możliwych zakończeń sprężyn wycinanych z tulei cylindrycznych. Promień zaokrąglenia rowka na Rys.4.6.a) wynosi ¼ wysokości przekroju zwoju, na Rys.4.6.b) promień zaokrąglenia wynosi ½ wysokości przekroju zwoju a na Rys 4.6.c) promień zaokrąglenia rowka jest równy wysokości przekroju zwoju. Zakończenia takie możliwe są do

wykonania poprzez wycinanie laserem, lub też cięcie z późniejszym wierceniem lub frezowaniem.

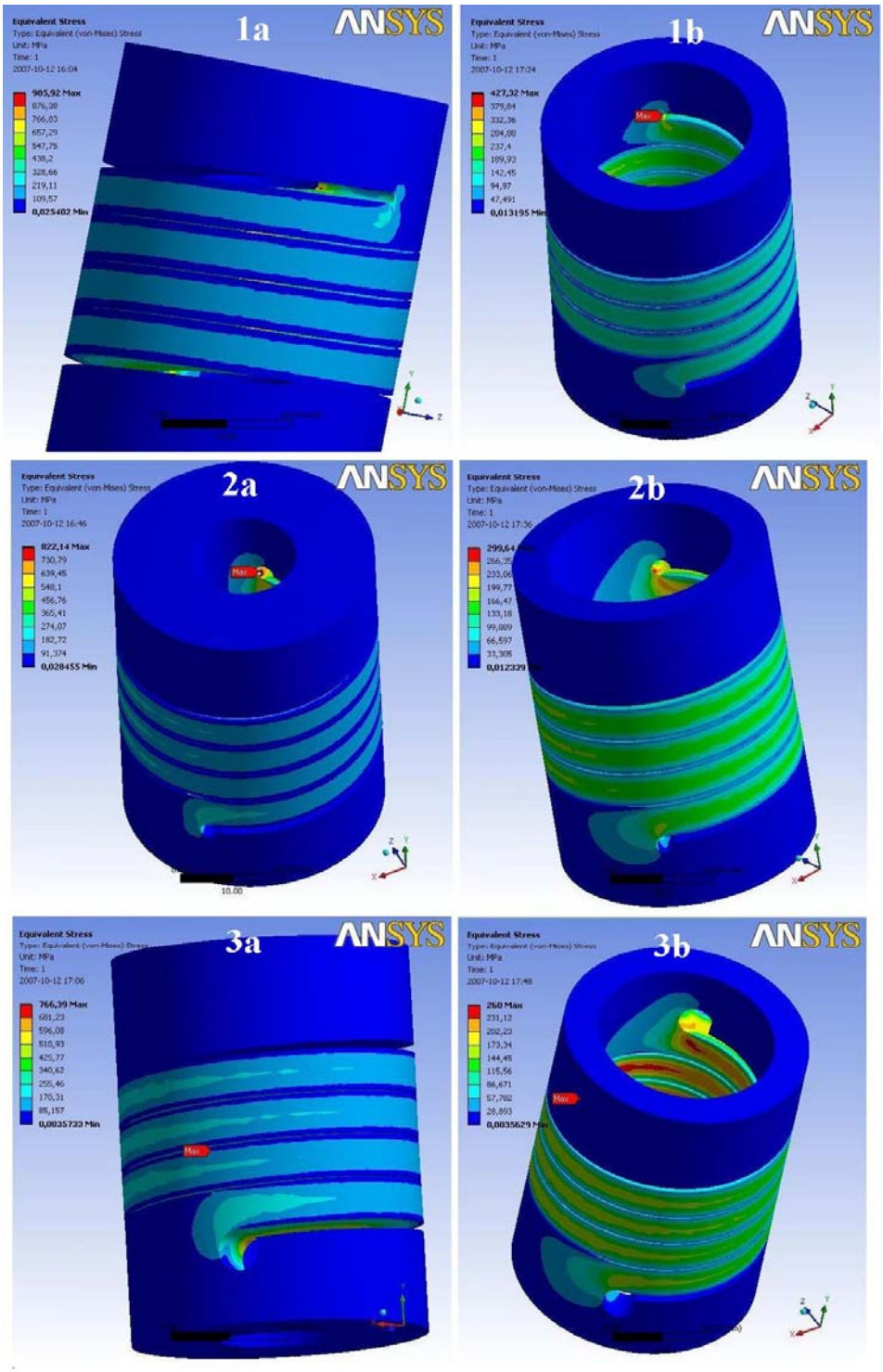
Aby zbadać wpływ sposobu zakończenia rowka na wartość maksymalnych naprężeń oraz dokonać oceny przy jakich parametrach geometrycznych naprężenia w zwojach końcowych osiągną wartości nie odbiegające od wartości naprężeń nominalnych przy osiowym podparciu, przeprowadzono szereg analiz numerycznych. Zbadano w jaki sposób promień zaokrąglenia rowka wpływa na naprężenia w jego okolicy z uwzględnieniem dwóch różnych proporcji wymiarowych sprężyny. Badaniom zostały poddane sprężyny o przekroju drutu (wysokość x grubość): 7 x 15 mm^2 (seria **a** na Rys.4.7) oraz 7 x 7 mm^2 (seria **b** na Rys.4.7). Skok sprężyn wynosił 8,75*mm*, średnica zewnętrzna 50*mm*. Liczba zwojów – 3,5.

Badane sprężyny miały również różne proporcje pomiędzy średnicą nominalną sprężyny a szerokością drutu.



Rys.4.6. Trzy sposoby zakończenia rowków sprężyn wycinanych z tulei cylindrycznych: promień zaokrąglenia $r = {}^1/_8\, b$ a), $r = ¼\, b$ b), $r = ½\, b$ c)

Dla zakończeń zwojów jak na Rys.4.6 wykonano szereg analiz naprężeń i porównano wyniki.



Rys.4.7. rozkład naprężeń zredukowanych HMH dla różnych sposobów mocowania zwojów końcowych

Ponieważ wszystkie analizowane sprężyny miały tę samą wysokość zwoju oraz średnicę zewnętrzną, obciążenie zostało zadane w postaci przesunięcia końca sprężyny o 3,2 *mm* wzdłuż osi sprężyny. Zdecydowano się na zadanie obciążenia w postaci przesunięcia jednego końca sprężyny o pewną wartość, ponieważ obciążenie takie dobrze symuluje rzeczywiste, typowe warunki podparcia sprężyn śrubowych. Wyniki w postaci wykresów konturowych naprężeń zredukowanych HMH przedstawiono na Rys.4.7.

Porównanie wartości maksymalnych naprężeń dla poszczególnych przypadków zaprezentowano w Tabeli 4.2.

Tablica 4.2

Nr	**1a**	**2a**	**3a**
$\sigma_{HMH\ max}$	986	822	766
Nr	**1b**	**2b**	**3b**
$\sigma_{HMH\ max}$	427	300	260

Jak widać z Rys.4.7 maksymalne naprężenia zredukowane w przypadku 1a i 2a występują w miejscu zaokrąglenia rowka. Podobnie jest w przypadku 2a i 2b chociaż ich wartości (Tablica 4.2) są dużo niższe. Widać że gdy promień zaokrąglenia rowka jest równy ½ wysokości zwoju wówczas rozkład naprężeń jest wyrównany i ich wartości w miejscu zaokrąglenia rowka nie są wyższe niż w środkowych zwojach.

Podsumowanie

Powyższe analizy pozwalają stwierdzić że klasyczne wzory służące do obliczania maksymalnych wartości naprężeń w sprężynach śrubowych zwijanych z drutu mogą być stosowane dla sprężyn wycinanych o zamkniętych końcach, pod warunkiem że promień zaokrąglenia końców rowków śrubowych jest równy połowie wysokości przekroju zwoju (Rys.4.6.c).

5. Porównanie charakterystyk sprężyn o otwartych i zamkniętych zwojach końcowych

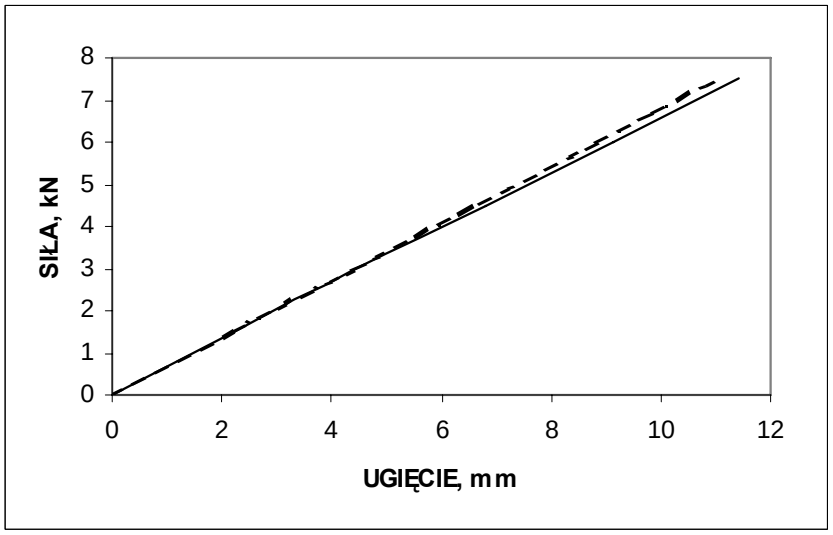
Ze względu na odmienne warunki brzegowe dla sprężyn zwijanych z drutu i dla sprężyn o zwojach zamkniętych, wycinanych z tulei cylindrycznych, istnieje podejrzenie że ta właśnie różnica, która w sposób istotny wpływa na maksymalne naprężenia w sprężynie będzie również miała wpływ na sztywność sprężyn. Wydaje się że sprężyny o zwojach końcowych zamkniętych będą miały nieco wyższą sztywność od analogicznych sprężyn o zwojach końcowych otwartych. Aby zweryfikować powyższą tezę przeprowadzono szereg analiz MES.

W dostępnej literaturze [8, 26, 80] można znaleźć kilka wzorów na sztywność o mniejszym lub większym stopniu złożoności i dokładności. Wszystkie te jednak wzory odnoszą się do sprężyn o zwojach otwartych. Wyjątek stanowi wzór

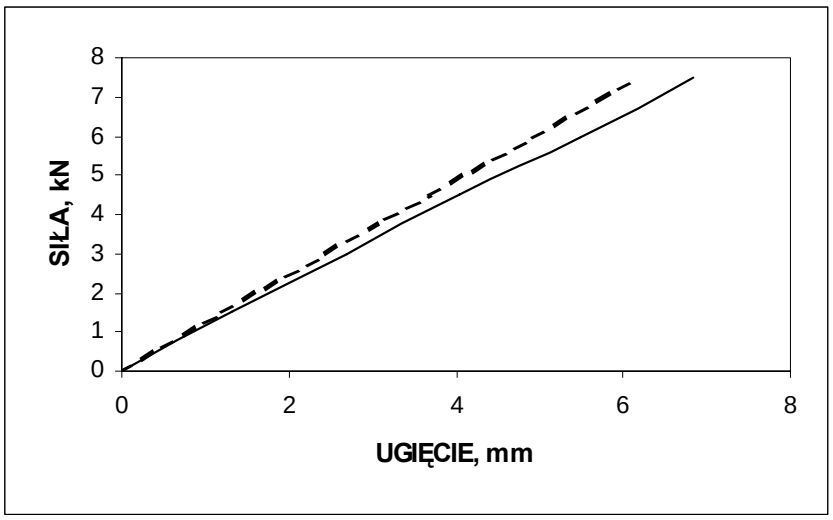
$$k = \frac{Gb^4}{\nu D^3 n} \qquad (5.1)$$

podany w [61], gdzie autor nie precyzuje dla jakiego rodzaju sprężyn ma on zastosowanie. We wzorze (5.1) ν to współczynnik zależny od stosunku b/a i można go odczytać z tablicy a n to liczba zwojów czynnych sprężyny. Do analizy porównawczej charakterystyk sprężyn o zwojach otwartych i zwojach zamkniętych przyjęto następujące dane: D = 32,5 *mm*,
b x a = 7 *mm* x 12,5 *mm*, skok sprężyny h = 10 *mm*, E = 206000 *MPa*, ν = 0,3.
Analizy MES przeprowadzono dla dwóch długości sprężyn: dla sprężyn o 4,5 zwojów czynnych i dla sprężyn o 2,5 zwojów czynnych.

Porównując charakterystyki sprężyn o zwojach otwartych i sprężyn o zwojach zamkniętych można zauważyć że sprężyny o zwojach zamkniętych (linie przerywane na Rys.5.1 i Rys.5.2) są generalnie sztywniejsze od sprężyn o zwojach otwartych (linie ciągłe na rys.5.1 i rys.5.2). Tendencja ta jest tym silniejsza im mniej zwojów posiada sprężyna, jednak nawet dla analizowanej sprężyny o dwóch i pół zwojach różnica w sztywnościach nie przekroczyła 10%. Istotnym czynnikiem wpływającym na te różnice był też sposób mocowania końców obydwu sprężyn.



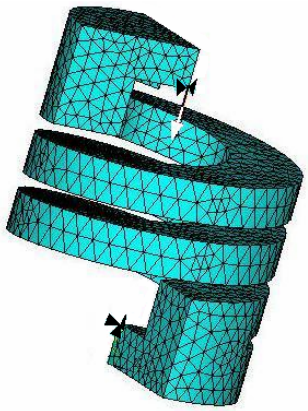
Rys.5.1. Porównanie charakterystyk sprężyn o 4,5 zwojach czynnych:
linia przerywana – sprężyna o zwojach zamkniętych, linia ciągła – sprężyna o zwojach otwartych o końcach podpartych osiowo



Rys.5.2. Porównanie charakterystyk sprężyn o 2,5 zwojach czynnych:
linia przerywana – sprężyna o zwojach zamkniętych, linia ciągła – sprężyna o zwojach otwartych o końcach podpartych osiowo

W analizie sprężyny o zwojach zamkniętych jedno z czół sprężyny zostało utwierdzone a drugiemu zostawiono tylko jeden stopień swobody – przesuw poosiowy. W analizie sprężyn o zwojach otwartych zastosowano model idealnego osiowego podparcia – dolny punkt podparcia leżał na osi sprężyny i stanowił przegub, górny natomiast miał odebrane jedynie 2 stopnie

swobody – przesuwy w kierunkach prostopadłych do osi sprężyny - rys.5.3. Zrezygnowano z analizy sztywności sprężyny wycinanej o zwojach końcowych zamkniętych podpartej na łożysku oporowym, gdyż jak można się spodziewać dałaby ona wyniki pośrednie w stosunku do przedstawionych powyżej.



Rys.5.3. Sposób nadania więzów i obciążeń na modelu sprężyny o zwojach otwartych

Czarne trójkąty na rys.5.3. oznaczają odebrane stopnie swobody, strzałka – zwrot i miejsce przyłożenia obciążenia.

Wzór (5.1) daje wyniki pośrednie pomiędzy wynikiem z analiz MES dla sprężyn o zwojach otwartych i sprężyn o zwojach zamkniętych.

Podsumowanie

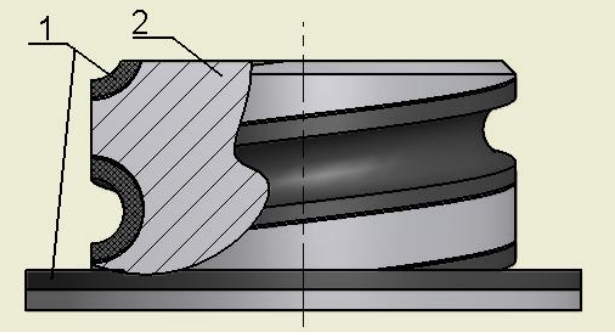
Na podstawie przeprowadzonych analiz mes można stwierdzić że sposób wykonania końców sprężyn ma pewien wpływ na ich sztywność. Sprężyny o zwojach końcowych zamkniętych, wycinane z tulei cylindrycznych są generalnie nieco sztywniejsze niż odpowiadające im sprężyny o zwojach końcowych otwartych. Im mniejsza liczba zwojów sprężyny tym bardziej znacząca jest różnica. Jednak różnice te są niewielkie – w przeprowadzonych badaniach różnica w najgorszym wypadku nie przekroczyła 10%. Dwie sprężyny o identycznych średnicach podziałowych, liczbie zwojów i tym samym skoku uzyskają różnicę sztywności równą 10% jeżeli stosunek grubości drutu z którego są wykonane wyniesie 1,025. Zatem różnica grubości drutu wyniesie 0,025. Taką tolerancję grubości drutu uzyskuje się dla 13 klasy dokładności wykonania. Polska norma dopuszcza wykonanie drutu sprężynowego w 13 it. W przypadku sprężyn od których wymaga się wysokiej dokładności charakterystyki np. Sprężyn do sprzęgieł bezpieczeństwa, należy przeprowadzić doświadczalne badania umożliwiające odpowiedni ich dobór i montaż.

6. Analiza nowej konstrukcji wkrętki ustalającej.

Jak wykazała analiza literaturowa i przegląd opisów patentowych, poszukiwane są takie sposoby podparcia sprężyn, które posiadałyby szereg korzystnych cech, często trudnych do osiągnięcia jednocześnie. Przykładem może być wymaganie co do wysokiej odporności na utratę stateczności i równocześnie dobre tłumienie drgań. Każde rozwiązanie stanowi pewien kompromis pomiędzy różnymi właściwościami z naciskiem na tę cechę, która w danym zastosowaniu jest najistotniejsza. W przeglądzie sposobów podparcia sprężyn, przedstawionym w rozdziale pierwszym można zauważyć że istnieje kilka cech mocowań sprężyn, w których występowaniu, autorzy wynalazków upatrują najważniejszych zalet swoich rozwiązań. Do najbardziej uniwersalnych należy zaliczyć:

- brak koncentracji naprężeń w pobliżu zwojów końcowych;
- niska podatność na utratę stateczności;
- dobre właściwości tłumiące drgania;
- możliwość przeniesienia zarówno siły ściskającej jak i momentów gnących i sił poprzecznych a w pewnych przypadkach również sił rozciągających;
- wysoka wytrzymałość zmęczeniowa, wynikająca z braku styku metalicznego a co za tym idzie wycierania powierzchni drutu sprężyny w miejscu podparcia;

Poszukiwania dotyczące rozwiązania posiadającego możliwie najwięcej tych korzystnych cech doprowadziły do znalezienia rozwiązania, które stało się przedmiotem wniosku patentowego. Rozwiązanie to przedstawiono na Rys.6.1.



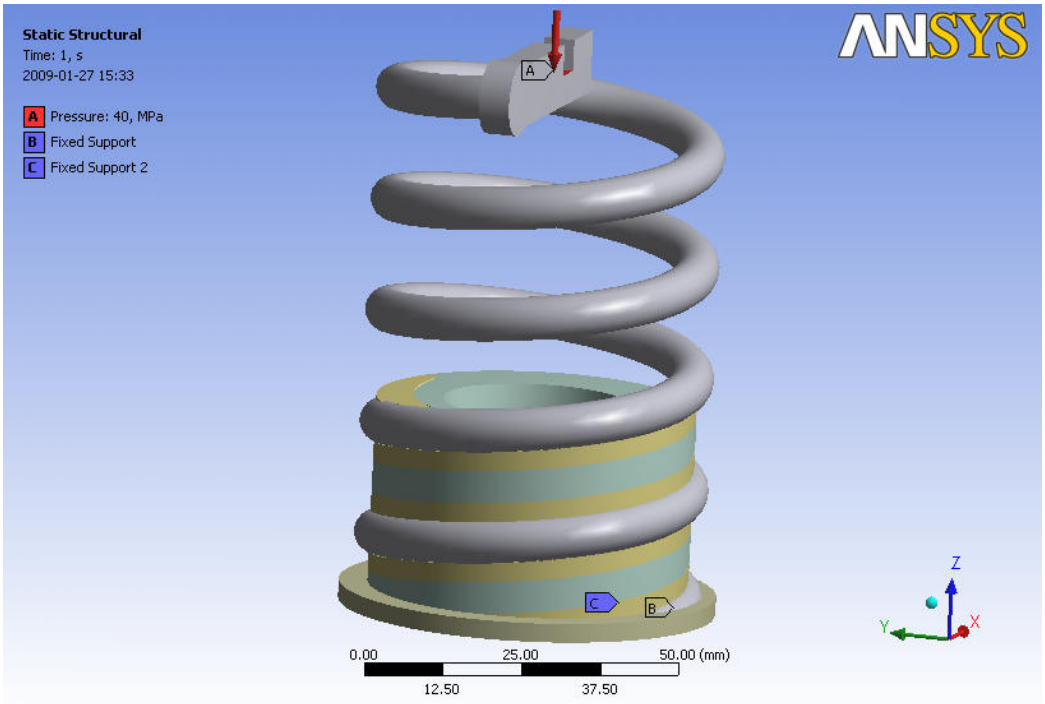
Rys.6.1. Nowa konstrukcja wkrętki mocującej

Wkrętka ta składa się z metalowego elementu **2** mocowanego sztywno do korpusu maszyny bądź fundamentu oraz z wkładki elastomerowej **1** dającej elastyczne oparcie osadzanej na niej sprężynie. Elastomerowy kanał we wkrętce ma długość około 1,5 zwoju sprężyny.

Analizy naprężeń wykonano przy użyciu pakietu ANSYS. Przedmiotem analizy był model sprężyny z tylnego amortyzatora motocyklowego o następujących parametrach geometrycznych: grubość drutu ϕd = 7*mm*, średnica podziałowa sprężyny ϕD = 49*mm*, skok h =18*mm*. Wysokość wkrętki (bez podkładki gumowej) wynosiła 30*mm*. Właściwości materiałowe dla sprężyny i metalowej części wkrętki przyjęto typowe dla stali: *Moduł Younga* $2{,}06\text{x}10^5$ *MPa*, *Liczba Poissona* 0,3. Dla gumy w zależności od stopnia napełnienia *Liczba Poissona* waha się w granicach od około 0,48 do 0,4997[16]. W rozważanym przypadku przyjęto $\nu = 0{,}49$ natomiast twardość gumy przyjęto typową dla tego typu zastosowań przemysłowych $H_{Sh} = 75$ °*Sh*. Empiryczna zależność pomiędzy modułem sprężystości poprzecznej gumy a twardością w stopiach Shore`a wyraża się wzorem [59]

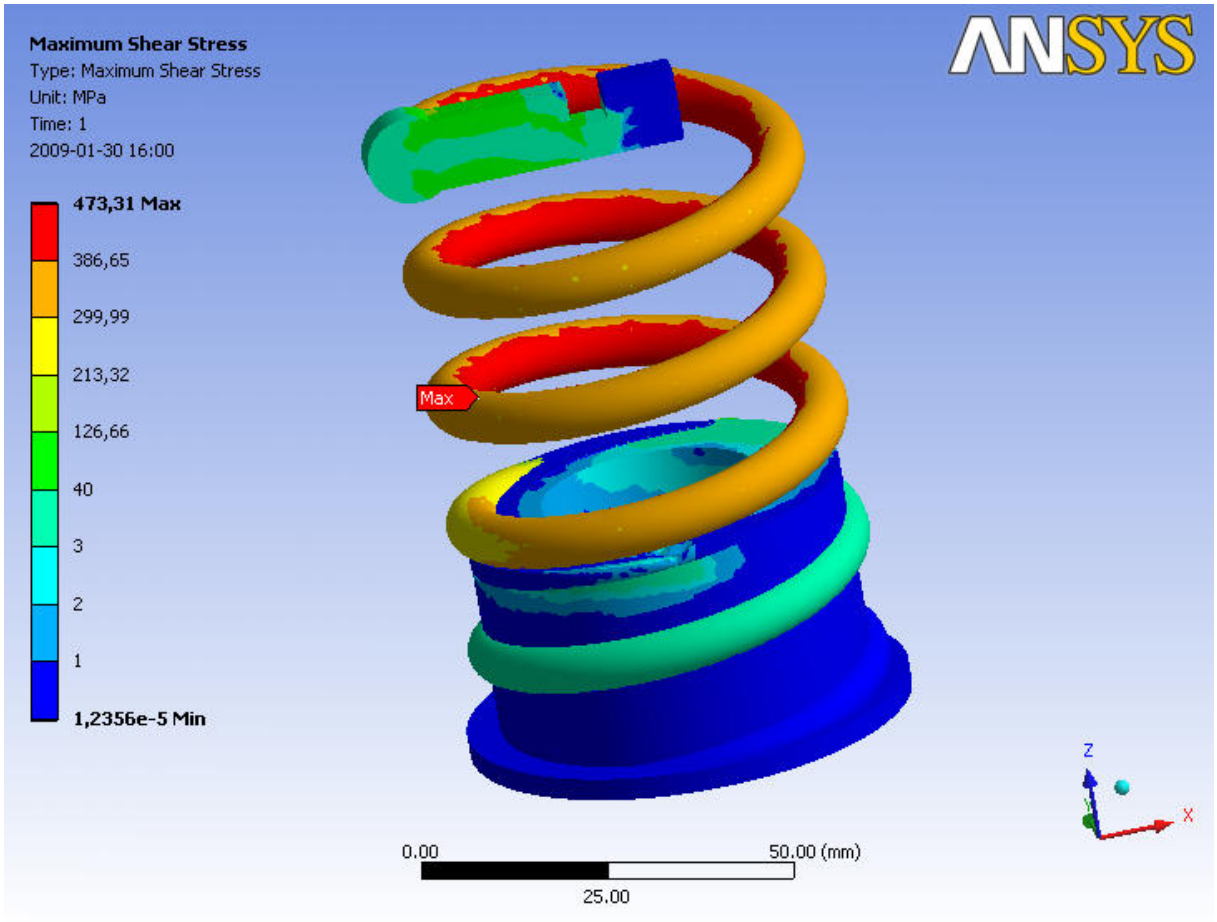
$$G = 0{,}086 \cdot 1{,}045^{H_{Sh}} \ [MPa] \qquad (6.1)$$

Zatem $G = 2{,}335$ *MPa* skąd podstawiając ν do znanego związku $E = 2G(1+\nu)$ otrzymamy $E = 7$ *MPa*. Przyjęte modele materiałów stali i gumy posiadały właściwości liniowe w całym zakresie naprężeń. W przypadku stali jest to założenie słuszne pod warunkiem że maksymalne naprężenia zredukowane nie przekroczą granicy plastyczności, co w analizowany przypadku było w pełni spełnione. Właściwości gumy można jednak uznać za liniowe dla stosunkowo niewielkich odkształceń: przy ściskaniu odkształcenie nie może przekroczyć 10% a przy ścinaniu 25%.



Rys.6.2. Model połączenia wkrętka – sprężyna z zaznaczonymi obciążeniami

Sprężyna została obciążona osiową siłą ściskającą, równą 1000*N,* zadaną w postaci ciśnienia 40*MPa* na powierzchni 25mm^2. Dopuszczalne obciążenie dla sprężyny o takich wymiarach i naprężeniach dopuszczalnych na skręcanie równym 800*MPa* jest około dwukrotnie wyższe[80]. Dolna powierzchnia pierścieniowej podkładki gumowej oraz metalowej części wkrętki zostały utwierdzone. Program ANSYS w wersji DesignSpace sam dostosowuje rodzaj elementu do zadanych warunków. Przeprowadzono analizy na modelu o 60300 elementów (rys.6.4a) oraz na modelu o 86721 elementów (rys.6.4b). Wartości naprężeń zredukowanych w obu przypadkach różniły się jedynie o 0,85%. Zasymulowano warunki w których gumowy kanał prowadzący sprężynę został przyklejony zarówno do powierzchni kanału wkrętki jak i do powierzchni drutu sprężyny. Na Rys.6.3 przedstawiono rozkład naprężeń stycznych w układzie sprężyna – wkrętka ustalająca.



Rys.6.3. Rozkład naprężeń stycznych w układzie sprężyna – wkrętka ustalająca

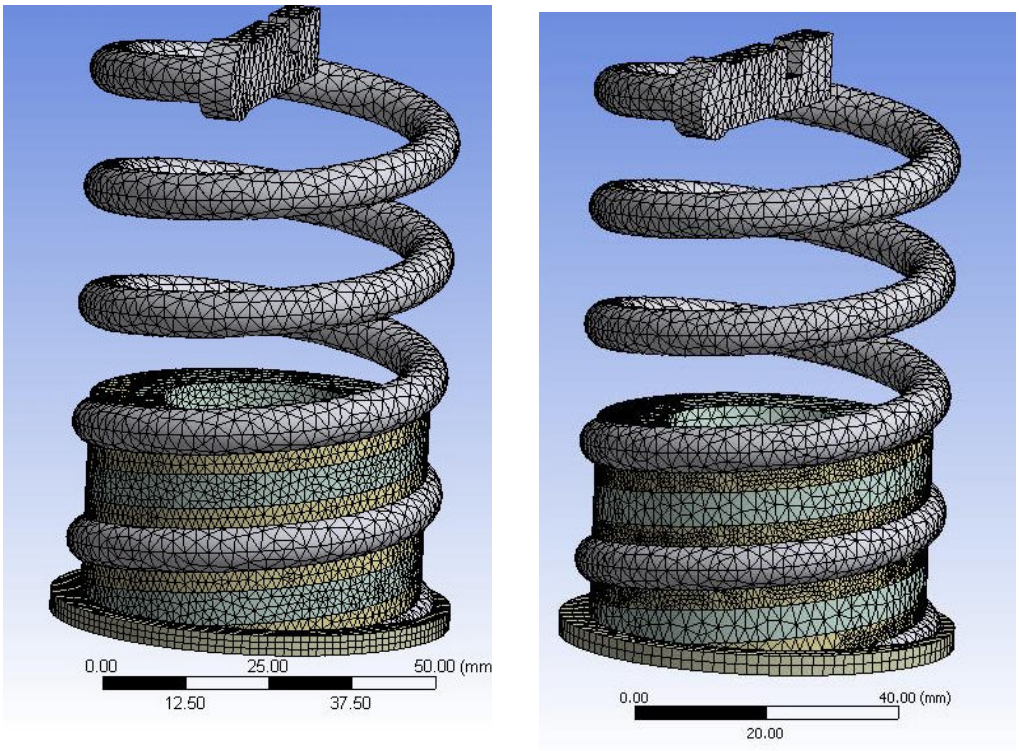
Maksymalne naprężenia styczne obliczone według zależności [80]

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3}\left(\frac{4C-1}{4C-4}+\frac{0{,}615}{C}\right) \qquad (6.2)$$

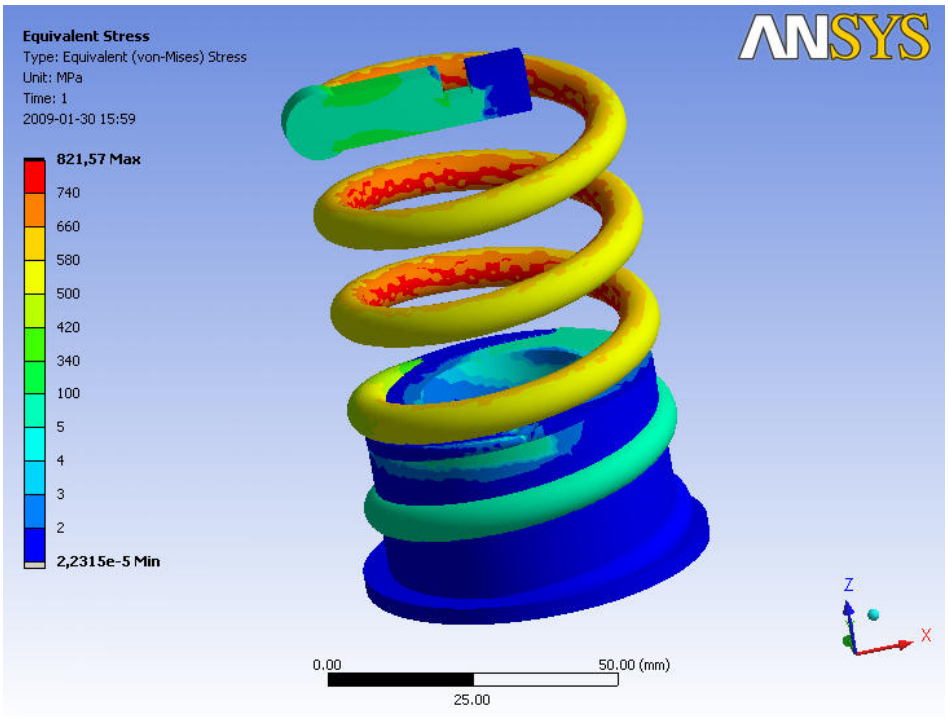
mają wartość o około 7% niższą od wartości naprężeń przedstawionych na Rys.6.3, ponieważ ze względu na niewielką liczbę zwojów czynnych (około trzech) i sposób podparcia,

obciążenie rozłożone jest niesymetrycznie. Sytuacja taka może często występować w praktyce i teoretyczne zależności jej nie uwzględniają.

Jak widać naprężenia w sprężynie w pobliżu wkrętki maleją, co ma pozytywny wpływ na wytrzymałość zmęczeniową sprężyny.



Rys.6.4. Model podzielony na: 60300 elementów a), 86721 elementów b)



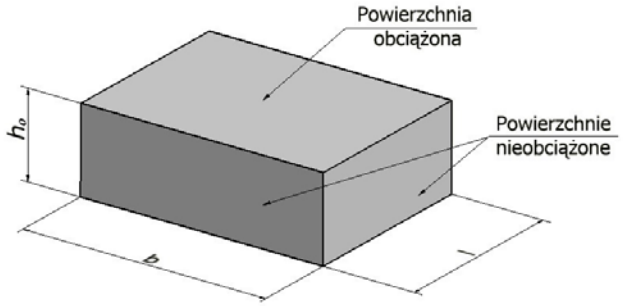
Rys.6.5. Rozkład naprężeń zredukowanych HMH dla modelu o 86721 elementach

Rozkład naprężeń zredukowanych HMH przedstawiono na Rys.6.5.
W układzie wkrętka – sprężyna najbardziej narażonym na zniszczenie elementem jest elastomerowy kanał prowadzący drut sprężyny ze względu na bardzo niskie – w porównaniu do stali – naprężenia dopuszczalne.

Określenie naprężeń dopuszczalnych dla gumy jest zadaniem prostym jedynie w przypadku prostych geometrycznie łączników gumowych takich jak sześciany lub walce, natomiast w wypadku elementów o złożonej geometrii zadanie to jest trudniejsze. Dzieje się tak dlatego że oprócz właściwości samej gumy, na wartość naprężeń dopuszczalnych ma w istotnym stopniu wpływ współczynnik kształtu. Współczynnik kształtu jest definiowany jako stosunek jednej powierzchni obciążonej do sumy powierzchni swobodnych:

$$q = \frac{bl}{2h_0(b+l)} \tag{6.3}$$

Oznaczenia użyte w (6.3) podano na Rys.6.6.
Jak widać na Rys.6.7 w analizowanym przypadku współczynnik kształtu jest trudny do precyzyjnego oszacowania, zwłaszcza że element elastomerowy jest nierównomiernie obciążony a jego kształt w pobliżu czoła wkrętki zmienia się w sposób ciągły.



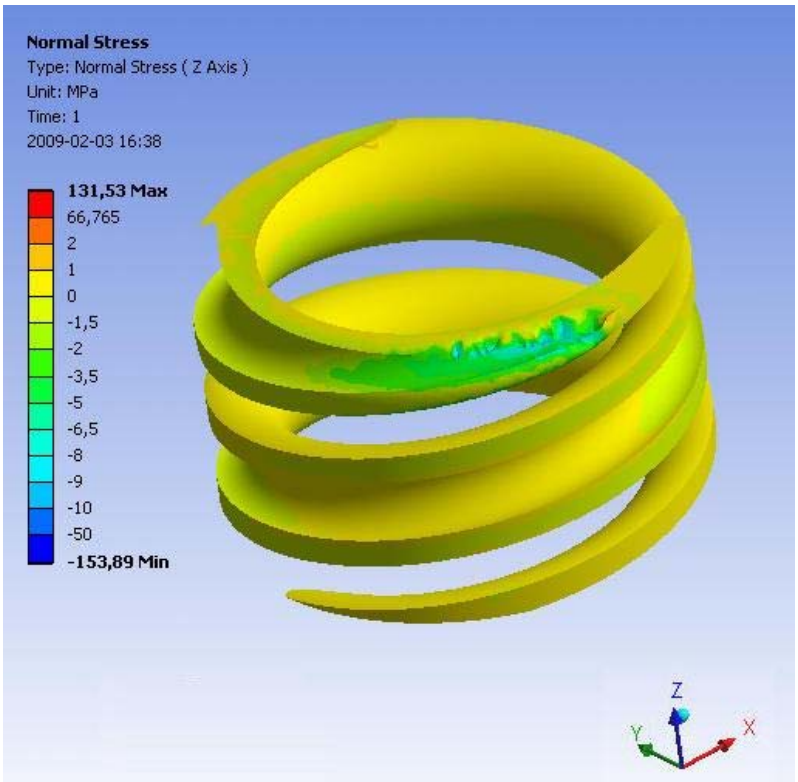
Rys.6.6. Parametry elementu gumowego do obliczania współczynnika kształtu

Empiryczny wzór określający średnie naprężenia dopuszczalne na ściskanie zaproponowano w [5]:

$$\sigma_{śr} = \alpha_1 qG + \alpha_2 \tag{6.4}$$

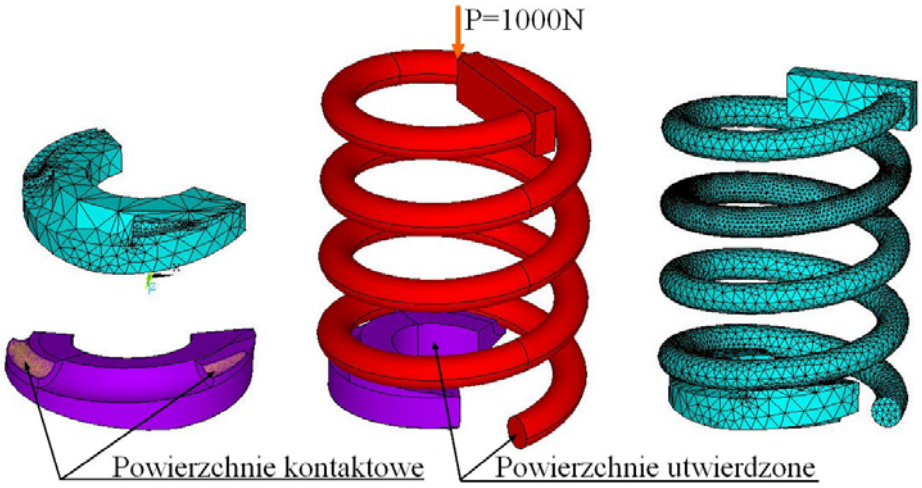
Współczynniki α_1 i α_2 są stabelaryzowane dla danej klasy gumy. Przykładowo dla gumy klasy I współczynniki te wynoszą: $\alpha_1 = 1{,}2$ a $\alpha_2 = 0{,}84MPa$ [59]. W analizowanym przypadku oprócz naprężeń normalnych występują również naprężenia ścinające. Nie jest to zjawisko niekorzystne – wręcz przeciwnie – prowadzi to do lepszego wykorzystania materiału gumy, pod warunkiem że odkształcenie pochodzące od ścinania jest nie większe od połowy wysokości ścinanego elementu [59]. W przeciwieństwie do stali guma bardzo dobrze znosi

złożony stan naprężeń. W optymalizacji konstrukcji gumowych elementów sprężystych często dąży się do jednakowego obciążenia na ściskanie i ścinanie [59].
Dodatkowe komplikacje w obliczeniach elementów gumowych wynikają z faktu że moduł sprężystości podłużnej nie jest stały lecz również jest funkcją współczynnika kształtu i istnieje wiele prac, których przedmiotem były próby empirycznego określenie tego związku, m. in. [1], [5], [16], [65]. Można zatem próbować zgrubnie oszacować wartość naprężeń dopuszczalnych na ściskanie i odkształceń pochodzących od ścinania, jednak w wielu przypadkach stan wytężenia materiału można najdokładniej wyznaczyć na drodze eksperymentu. W handlu dostępnych jest wiele różnych rodzajów elastomerów co może ułatwić dobór właściwego materiału dla określonego zastosowania. Na Rys.6.7 przedstawiono rozkład naprężeń normalnych na kierunku pionowym, zgodnym z osią sprężyny. Jak widać naprężenia ściskające nie przekraczają wartości 9 *MPa*.

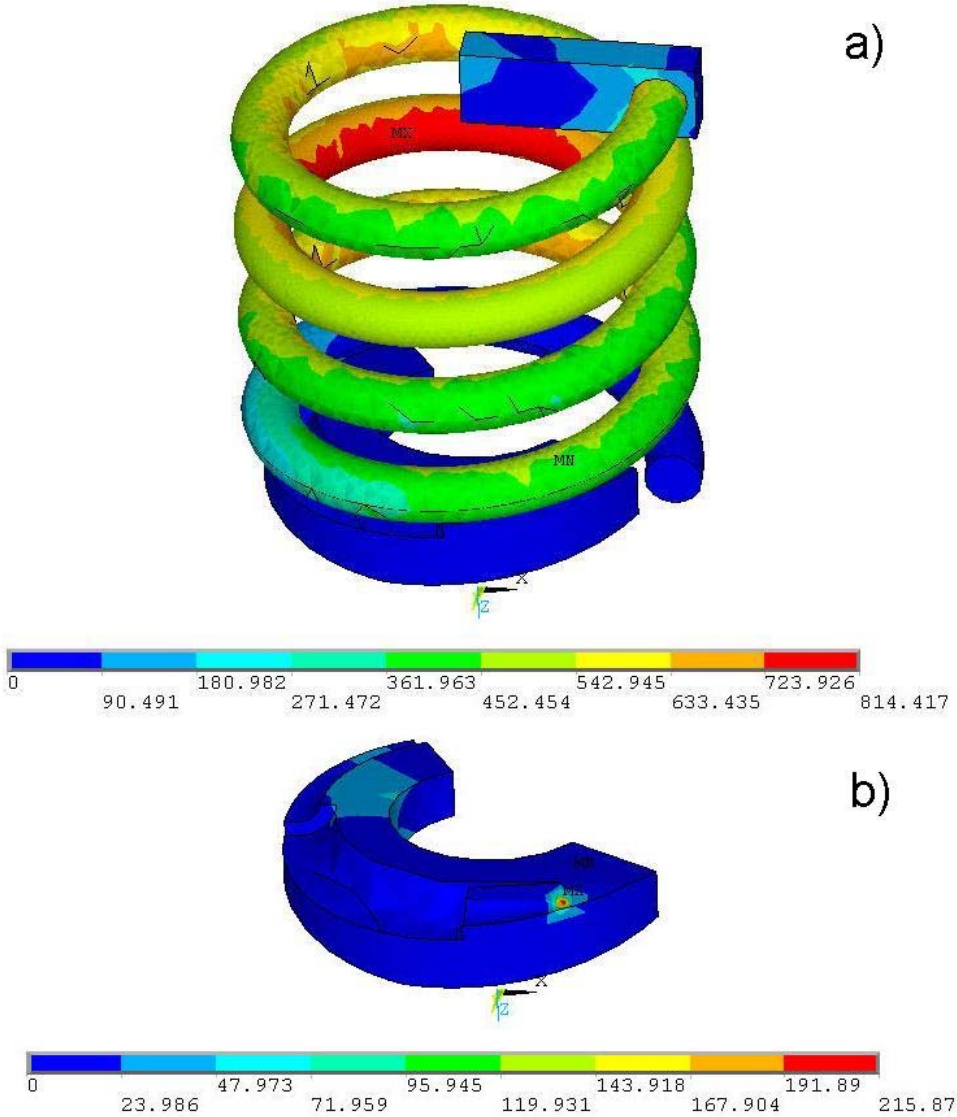


Rys.6.7. Rozkład naprężeń normalnych na kierunku osi Z

W celu porównania właściwości wkrętki konwencjonalnej z wkrętką z wkładką elastyczną przeprowadzono dalsze analizy. Ponieważ moduł Workbench nie umożliwia analizy zagadnień nieliniowego kontaktu, dalsze analizy przeprowadzono w programie ANSYS w wersji uniwersyteckiej.



Rys.6.8. Uproszczony model konwencjonalnej wkrętki wraz z modelem sprężyny



Rys.6.9. Rozkład naprężeń zredukowanych w układzie stalowa wkrętka – sprężyna a), we wkrętce b)

Analizy kontaktowe wymagają dużych mocy obliczniowych, dlatego zdecydowano się na pewne uproszczenia skracające czas obliczeń. Na Rys.6.8 przedstawiono model konwencjonalnej wkrętki, w którym część powierzchni rowka prowadzącego wycięto. Dolny koniec sprężyny posadowionej na wkrętce został utwierdzony. Tak zasymulowane warunki podparcia sprężyny na konwencjonalnej wkrętce nie różnią się znacząco od rzeczywistych warunków a istotnie wpływają na skrócenie czasu obliczeń.
Model został wykonany przy użyciu elementów SOLID185, para kontaktowa – powierzchnia sprężyny i powierzchnie rowka prowadzącego we wkrętce przy użyciu elementów TARGET170 i CONTACT174. Współczynnik tarcia między sprężyną a wkrętką przyjęto równy 0,1. Sprężyna została obciążona osiowo siłą skupioną 1000*N*. Rozkład naprężeń zredukowanych HMH przedstawiono na Rys.6.9.

Podsumowanie

Porównując naprężenia zredukowane w sprężynie na Rys.6.5 i Rys.6.9 widać że są bardzo podobne - różnica wartości maksymalnych nie przekracza 0,9%. Naprężenia te występują na wewnętrznej powierzchni swobodnych zwojów sprężyny. Zastosowanie wkrętki z metalowym rowkiem prowadzącym nie powoduje zatem wzrostu naprężeń zredukowanych w sprężynie. Jednak naprężenia zredukowane we wkrętce na Rys.6.5 nie przekraczyły 60*MPa,* podczas gdy na Rys.6.9b) widać że w wypadku wkrętki w całości wykonanej ze stali naprężenia zredukowane przekroczyły wartość 215*MPa*.

Przeprowadzone analizy pozwalają na stwierdzenie że konwencjonalna wkrętka nie powoduje znaczącego wzrostu naprężeń w sprężynie, jednak należy pamiętać że w wyniku wzajemnego kontaktu, następuje wycieranie powierzchni styku a w rezultacie powstanie karbu zmęczeniowego. Dla typowej stali konstrukcyjnej granica plastyczności wynosi około 230 *MPa*. Wartość ta nie została przekroczona w analizowanym przypadku wkrętki stalowej (Rys.6.9.b) jednak jak wspomniano wyżej ze względu na wytrzymałość sprężyny, obciążenie mogło być dwukrotnie wyższe i wówczas naprężenia zredukowane we wkrętce z pewnością przekroczyłyby lokalnie wartość 230 *MPa*.

7. Analiza wpływu podparcia sprężyny na jej podatność na utratę stateczności.

Zagadnienie wyboczenia sprężyn śrubowych jest szeroko opisane w literaturze. Najczęściej sprowadza się model sprężyny do prostego pręta ściskanego o określonej sztywności na zginanie i ściskanie. Dostępne wzory pozwalają na obliczenie siły krytycznej [80] lub krytycznego ugięcia względnego [9] jedynie dla kilku podstawowych sposobów mocowania sprężyny. Timoshenko w [68] podaje następujący wzór służący do obliczania siły krytycznej dla sprężyn śrubowych podpartych przegubowo z uwzględnieniem wpływu siły tnącej na krzywiznę sprężyny

$$\frac{P_{kr}}{\gamma_0} = \frac{1-\sqrt{1-\frac{4\pi^2\alpha_0}{l_0{}^2\gamma_0}\left(1-\frac{\gamma_0}{\beta_0}\right)}}{2\left(1-\frac{\gamma_0}{\beta_0}\right)} \qquad (7.1)$$

Wielkości użyte we wzorze (7.1) – α_0, β_0, γ_0, zostały opisane poniżej.
Dla najczęściej stosowanego na sprężyny materiału jakim jest stal, stosunek E / G wynosi 2,6. Dla takiego stosunku E / G zależność (7.1) przyjmuje prostszą postać

$$\frac{P_{kr}}{\gamma_0} = 0{,}8125\left(1-\sqrt{1-27{,}46\left(\frac{R}{l_0}\right)^2}\right) \qquad (7.2)$$

Z równania tego również można znaleźć graniczną smukłość sprężyny śrubowej l_0 /D równą 2,62 przy której nigdy nie wystąpi utrata stateczności.

Inną formę zależności (7.2) podaje B. Branowski w [8]

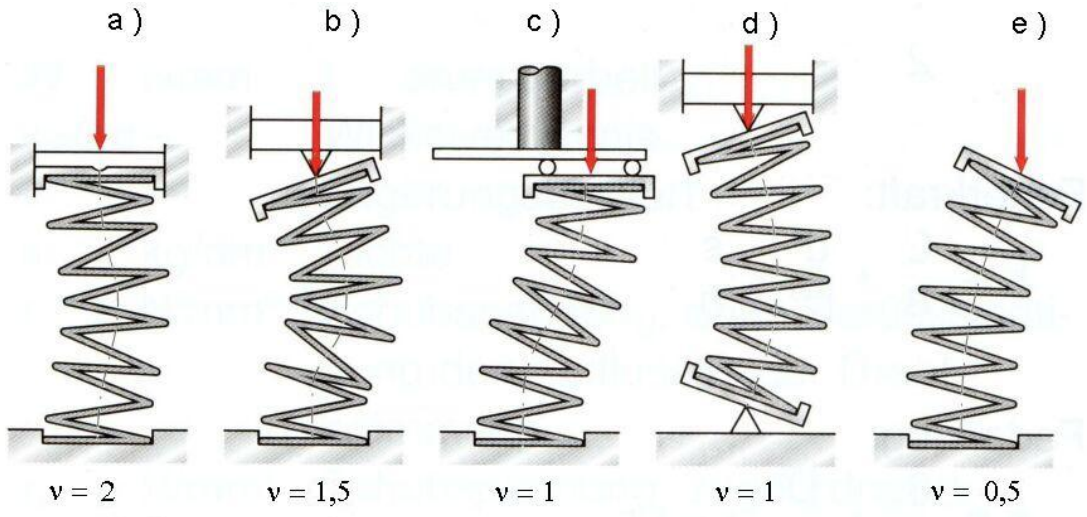
$$\left(\frac{f}{l_0}\right)_{kr} = A\left(1-\sqrt{1-B\left(\frac{\nu}{l_0/D}\right)^2}\right) \qquad (7.3)$$

gdzie współczynniki obliczeniowe przy przekroju kołowym zwoju są jedynie funkcją stosunku G / E i wynoszą:

$$A = \frac{1}{2\left(1-\frac{G}{E}\right)}$$

$$B = \frac{2\pi^2\left(1-\frac{G}{E}\right)}{1+\frac{2G}{E}}$$

Wartości stałej zamocowania ν dla typowych sposobów podparcia sprężyn podano na Rys.7.1

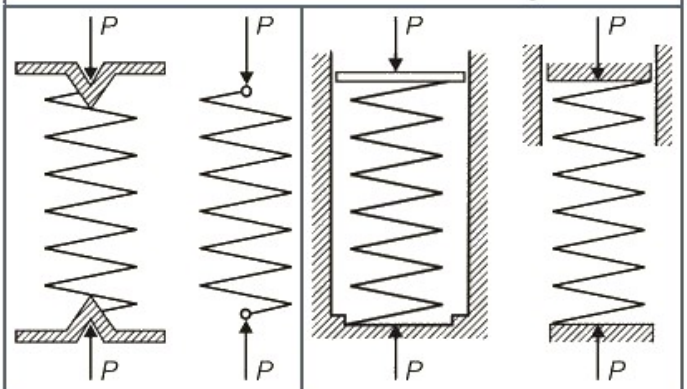
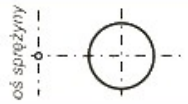
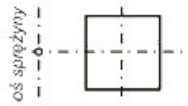
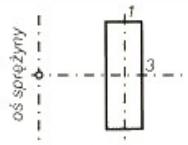
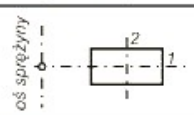
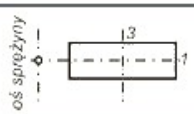
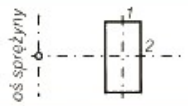


Rys.7.1**.** Podstawowe sposoby mocowań czół sprężyn śrubowych naciskowych wraz z odpowiednimi wartościami stałej ν używanej do obliczania krytycznego ugięcia w metodzie Haringxa [8, 24]

Należy podkreślić że wszystkie powyższe wzory (7.1), (7.2), (7.3) opierają się na pracy *J. A. Haringxa* [20] ujętej później w normie [9]. Podobne wyniki uzyskał *S. D. Ponomariew* [62].Oprócz *Haringxa* i *Ponomariewa* zagadnieniem podatności sprężyn na utratę stateczności z wykorzystaniem koncepcji pręta zastępczego zajmowało się wielu autorów, m. in. *C. B. Biezeno* i *J. J. Koch* [7]. Nie uzyskali oni jednak dokładnych wyników ze względu na przeszacowanie wpływu ścinania sprężyny jako całości na jej podatność na wyboczenie, co udowodnił *H. Ziegler* [79]. Podejście do sprężyny jako pręta przestrzennie zakrzywionego przedstawiono w wielu publikacjach m.in. w [19] ale ze względu na złożoność jest ono trudne w zastosowaniach inżynierskich. Zjawisko utraty stateczności sprężyn śrubowych szeroko omówił J. Krużelecki w [31] i [32] oraz rozwiązał zagadnienie optymalnego kształtowania sprężyn śrubowych ze względu na ich podatność na utratę stateczności przy swobodnym zamocowaniu końców. Wykorzystał w tych badaniach zaproponowaną przez siebie w [29] nową koncepcję pręta zastępczego. Koncepcja ta w odróżnieniu od stosowanej przez m. in. Haringxa uwzględnia zmianę kąta wzniosu linii śrubowej (a nie zakłada że jest on stały i

wynosi zero) na jej długości oraz pozwala na analizę stateczności sprężyn o dowolnym kształcie. Doświadczalną weryfikację otrzymanych wyników można znaleźć w [30].

Na Rys.7.2. pokazano za [80] i [81] wartości smukłości granicznych l_0 / D dla których zapewniona jest stateczność sprężyn o małym kącie wzniosu linii śrubowej. Smukłość ta zależy od sposobu podparcia oraz przekroju drutu sprężyny.

PRZEKRÓJ DRUTU ZWOJU ORAZ JEGO POŁOŻENIE WZGLĘDEM OSI SPRĘŻYNY	WARUNKI ZAMOCOWANIA SPRĘŻYNY 	
	2,55	5,1
	2,8	5,6
	2,85	5,7
	2,85	5,7
	2,65	5,3
	2,5	5,0

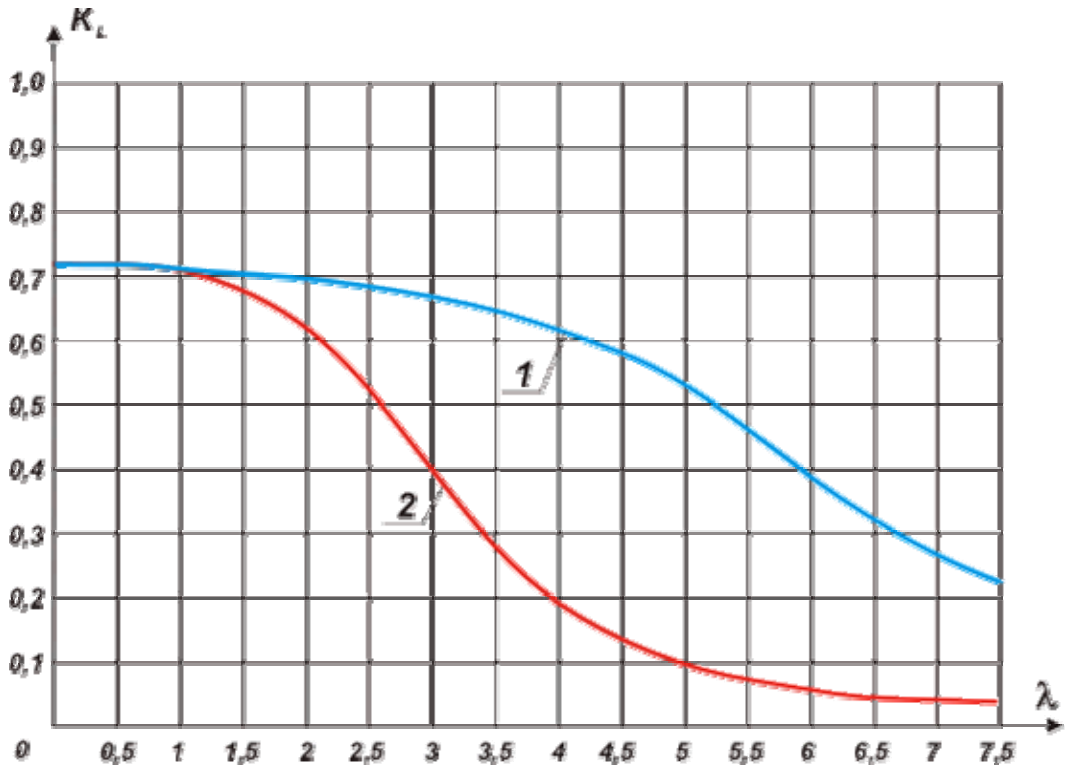
Rys.7.2. Wartości graniczne smukłości dla których zapewniona jest stateczność sprężyn śrubowych.

Różnica pomiędzy wartością smukłości granicznej wynikającej ze wzoru (7.2) a tej z Rys.7.2. jest zapewne spowodowana przyjęciem przez Żukowskiego nieco innej wartości *liczby Poissona*.

Żukowski podaje inną, łatwiejszą do zastosowania niż (7.2) zależność na wyboczeniową siłę krytyczną dla dwóch sposobów podparcia

$$P_{kr} = c \cdot l_0 \cdot K_L \qquad (7.4)$$

Gdzie c to sztywność sprężyny a wartości współczynnika K_L odczytuje się z wykresu na podstawie smukłości $\lambda = l_0 / D$.

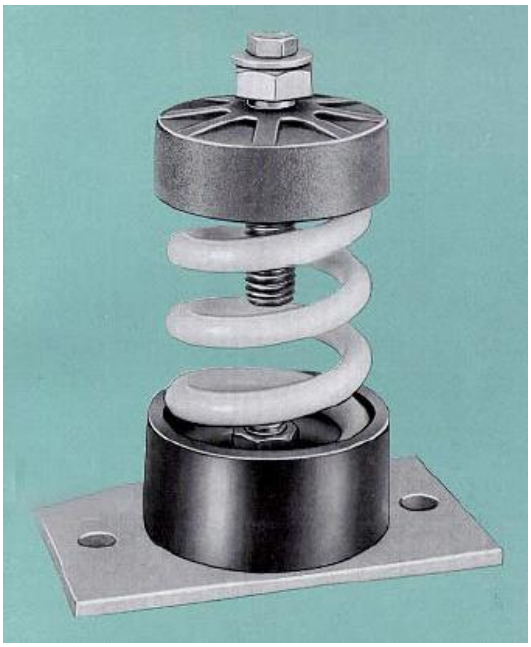


Rys.7.3. Wykres wartości współczynnika K_L. Krzywa 1 odpowiada sprężynie o końcach utwierdzonych, krzywa 2 odpowiada sprężynie zamocowanej przegubowo

Brak natomiast w literaturze przydatnych do zastosowań inżynierskich wzorów określających siłę krytyczną dla rodzajów zamocowań innych niż przedstawione na Rys.7.1

Na Rys.7.4. przedstawiono często stosowane rozwiązanie mocowania maszyn o dużych oddziaływaniach dynamicznych na podłoże. Izolowanie drgań tego typu maszyn od otoczenia jest realizowane za pomocą sprężyn naciskowych. Aby zwiększyć tłumienie drgań, pomiędzy sprężynami a podłożem stawia się podkładki gumowe najczęściej zawulkanizowane pomiędzy metalowymi płytkami. Pokazany na Rys.7.4 a) izolator składa się z górnej podpory wraz ze śrubą mocującą do maszyny, sprężyny oraz dolnego mocowania sprężyny wykonanego z neoprenu osadzonego na metalowej płytce, przykręcanej do podłoża. Rys.7.4 b) przedstawia podobny izolator, przy czym podkładka z materiału wysokoelastycznego ma kształt sześcianu. Tego typu układy mają za zadanie tłumienie drgań własnych sprężyn, mogących być przyczyną ich zmęczeniowego pękania.

a)

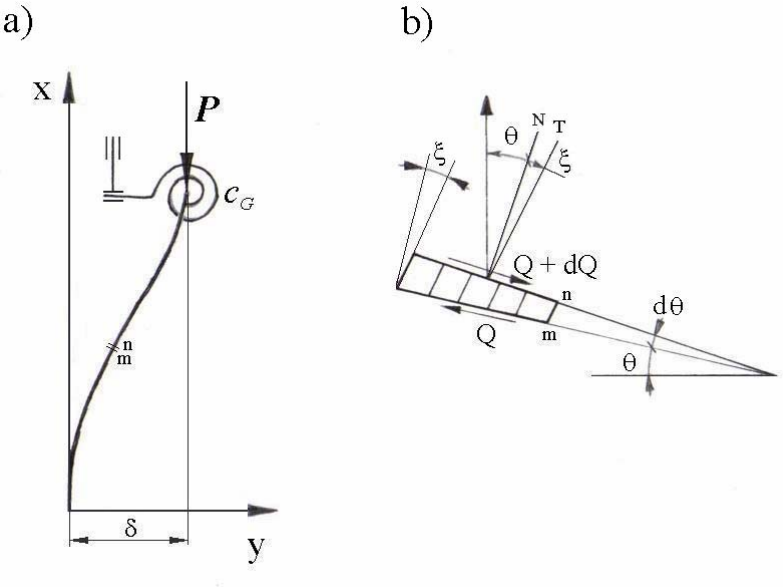


b)

Rys.7.4. Przykłady elastycznego podparcia sprężyn w izolatorach sprężynowych firmy *Vibration Mountings & Controls Inc.*

Obliczanie takich sprężyn ze względu na siłę krytyczną według któregoś ze schematów przedstawionych na Rys.7.1. będzie obarczone znaczącym błędem. Jeżeli zastosujemy schemat z Rys.7.1 a) lub b) (utwierdzenie-utwierdzenie lub utwierdzenie-utwierdzenie przesuwne) popełnimy błąd na niekorzyść bezpieczeństwa obliczeń, jeżeli natomiast zastosujemy schemat z Rys.7.1.e) (utwierdzenie-koniec swobodny) wówczas popełnimy błąd zwiększający bezpieczeństwo lecz niekorzystny ze względu na zmniejszenie maksymalnej smukłości obliczanej sprężyny a co za tym idzie przy zachowaniu odpowiedniej charakterystyki zwiększenie jej gabarytów. Określenie siły krytycznej w przypadku sprężyn śrubowych może być dokonane tymi samymi metodami co w przypadku prętów prostych, jednak w przypadku sprężyn należy uwzględnić efekt skrócenia pod obciążeniem. Dodatkowo z uwagi na dużo większą podatność na ścinanie w stosunku do podatności na zginanie dla sprężyn śrubowych niż dla prętów prostych, , należy uwzględnić wpływ sił tnących na odkształcenia.

Na Rys.7.5.a) przedstawiono model obliczeniowy mocowania pokazanego na Rys.7.4.



Rys.7.5 a)Model opisywanego mocowania pręta zastępczego; b) analizowany wycinek z zastępczego pręta [68]

Sprężyny śrubowe są narażone na wyboczenie już przy bardzo niewielkich smukłościach. Smukłością w przypadku sprężyn nazywamy stosunek L_0 / D długości pierwotnej sprężyny do jej nominalnej średnicy. Przykładowo przy nieprzesuwnym utwierdzeniu obu czół sprężyny (Rys.7.1.a) smukłość maksymalna przy której nigdy nie nastąpi wyboczenie około 5,1 a przy zamocowaniu na przegubach (Rys.7.1.d) 2,55 [80]. Przy takich proporcjach długości do średnicy wpływ ścinania na odkształcenia nie może być pominięty jak czyni się to w przypadku prętów prostych. Dodatkowo ścinanie sprężyny jako wyrobu nie jest związane ze ścinaniem drutu z którego sprężyna została nawinięta ale w głównej mierze z jego zginaniem. Natomiast zginanie sprężyny jako wyrobu powoduje skręcanie i zginanie drutu. Z kolei ściskanie sprężyny wywołuje przede wszystkim skręcanie jej drutu. Stąd też wyrażenia na odpowiednie sztywności dla sprężyn śrubowych mają zupełnie inną postać od analogicznych wyrażeń dla prętów prostych. Dla sprężyny nieobciążonej odpowiednie sztywności wyrażają się wzorami [68]:

- sztywność zginania (odpowiednik *EJ* dla prętów prostych)

$$\alpha_0 = \frac{EJl_0}{\pi R n_o} \frac{1}{1+\frac{E}{2G}} \tag{7.5}$$

- sztywność ścinania (odpowiednik AG/χ dla prętów prostych)

$$\beta_0 = \frac{EJl_0}{\pi R^3 n_o} \tag{7.6}$$

- sztywność ściskania (odpowiednik EA dla prętów prostych)

$$\gamma_0 = \frac{GJl_0}{\pi R^3 n_o} \tag{7.7}$$

J stanowi moment bezwładności drutu sprężyny względem jego średnicy, R to promień linii śrubowej a l_0 i n_o to odpowiednio długość sprężyny nieobciążonej i liczba zwojów czynnych. Trzeba zaznaczyć że przy analizie problemu przyjmuje się że sztywność poprzeczna sprężyny jest jednakowa we wszystkich kierunkach co jest pewnym uproszczeniem. Zagadnienie to było przedmiotem pracy [41], analizowane przy użyciu MES przez W. Ambroszko w [18] i szeroko opisane w odniesieniu do problemu stateczności w [32]. Należy zwrócić uwagę na to że w trakcie ściskania sprężyny liczba jej zwojów na jednostkę długości rośnie w stosunku l_0/l w związku z czym odpowiednie sztywności sprężyny maleją w stosunku l/l_0 :
$\alpha = \alpha_0 l / l_0$, $\beta = \beta_0 l / l_0$, $\gamma = \gamma_0 l / l_0$.

Analizując wycinek z pręta zastępczego pokazany na Rys.7.5.b zauważamy że kąt nachylenia stycznej do linii ugięcia jest sumą kąta pochodzącego jedynie od zginania i kąta będącego wynikiem ścinania. Ścinanie to wywołane jest składową siły P styczną do powierzchni przekroju rozpatrywanego elementu. Zatem

$$Q = P \sin \vartheta$$

Ponieważ rozpatrujemy niewielkie wychylenia więc $\sin \vartheta \approx \vartheta$, skąd

$$Q = P \vartheta$$

Wartość kąta nachylenia stycznej do linii ugięcia wyniesie

$$\frac{dy}{dx} = \vartheta + \xi = \vartheta + \frac{Q}{\beta} = \vartheta + \vartheta \frac{P}{\beta} = \vartheta \left(1 + \frac{P}{\beta} \right)$$

Krzywizna ugięcia pręta wyrazi się zatem wzorem

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\vartheta \left(1 + \frac{P}{\beta} \right) \right) = \left(1 + \frac{P}{\beta} \right) \frac{d\vartheta}{dx} \tag{7.8}$$

Ponieważ $d\vartheta / dx$ wyraża krzywiznę linii ugięcia pręta zastępczego wywołaną jedynie zginaniem zatem

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{M}{\alpha} \tag{7.9}$$

W rozpatrywanym przypadku moment gnący wyraża się wzorem

$$M = P(\delta - y) - M_G \tag{7.10}$$

gdzie

$$M_G = c_G \vartheta(x = l)$$

to moment wywołany przez sprężyste umocowanie jednego z czół sprężyny na podkładce gumowej. Podstawiając (7.9) i (7.10) do (7.8) otrzymamy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(\delta - y) - M_G}{\alpha}\left(1 + \frac{P}{\beta}\right) \tag{7.11}$$

Po uporządkowaniu i wprowadzeniu oznaczenia $k^2 = P/\alpha$ wzór (7.11) przyjmie następującą postać

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2\left(1 + \frac{P}{\beta}\right)y = k^2\left(1 + \frac{P}{\beta}\right)\delta - \left(1 + \frac{P}{\beta}\right)\frac{M_G}{\alpha}$$

Wprowadzając oznaczenie $u^2 = k^2(1+P/\beta)$ dostajemy ostatecznie

$$\frac{d^2y}{dx^2} + u^2 y = u^2\delta - u^2\frac{M_G}{P} \tag{7.12}$$

Rozwiązaniem równania (7.12) jest suma całki ogólnej równania jednorodnego i całki szczególnej równania niejednorodnego. Całka ogólna równania jednorodnego dla tego typu równań ma postać:

$$y_o = A\cos ux + B\sin ux \tag{7.13}$$

Całkę szczególną znajdziemy metodą przewidywań

$$y_s = C \tag{7.14}$$

Skąd

$$\frac{d^2y_s}{dx^2} = 0 \tag{7.15}$$

Podstawiając (7.14) i (7.15) do (7.12) dostajemy

$$u^2C = u^2\delta - u^2\frac{M_G}{P}$$

stąd

$$C = \delta - \frac{M_G}{P}$$

Całka ogólna równania (7.12) wyniesie zatem

$$y = A\cos ux + B\sin ux + \delta - \frac{M_G}{P} \tag{7.16}$$

Po podstawieniu warunków brzegowych: $y(x = 0) = 0$ i $dy/dx(x=0) = 0$, równanie (7.16) przyjmie postać

$$y = \left(1 - \cos ux\right)\left(\delta - \frac{M_G}{P}\right) \tag{7.17}$$

Ponieważ moment sprężystego utwierdzenia na podkładce gumowej jest funkcją kąta $\vartheta(x = l)$ należy zatem znaleźć wartość tego kąta w funkcji znanych wielkości. Przez y_g oznaczymy wychylenie spowodowane jedynie zginaniem. Na podstawie (7.9) i (7.10) można napisać:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{d^2 y_g}{dx^2} \tag{7.18}$$

czyli

$$\frac{d^2 y_g}{dx^2} = \frac{P}{\alpha}\left(\delta - y\right) - \frac{M_G}{\alpha} \tag{7.19}$$

Równanie (7.19) rozwiązujemy podobnie jak równanie (7.11). Rozwiązaniem jego jest równość

$$y_g = \left(1 - \cos kx\right)\left(\delta - \frac{M_G}{P}\right) \tag{7.20}$$

Skąd

$$\vartheta(x) = \frac{dy_g}{dx} = \left(\delta - \frac{M_G}{P}\right)k\sin kx$$

$$\vartheta(x = l) = \left(\delta - \frac{M_G}{P}\right)k\sin kl \tag{7.21}$$

Podstawiając do (7.21) wzór na moment sprężystego utwierdzenia na gumowej podkładce otrzymamy

$$\vartheta(x = l) = \left(\delta - \frac{\vartheta(x = l)c_G}{P}\right)k\sin kl$$

Stąd, upraszczając otrzymamy

$$\vartheta(x = l) = \frac{\delta}{\dfrac{1}{k\sin kl} + \dfrac{c_G}{P}} \tag{7.22}$$

Wstawiając (7.22) do (7.17) dostaniemy

$$y = \left(1 - \cos ux\right)\left(\delta - \frac{c_G}{P} \cdot \frac{\delta}{\frac{P + c_G k \sin kl}{Pk \sin kl}}\right) \tag{7.23}$$

Ponieważ pod obciążeniem krytycznym każde wychylenie pręta jest położeniem równowagi, można zatem zapisać że $y(x = l) = \delta$.

Skąd

$$\delta = \left(1 - \cos ul\right)\left(\delta - \frac{c_G}{P} \cdot \frac{\delta}{\frac{P + c_G k \sin kl}{Pk \sin kl}}\right)$$

Upraszczając

$$P\cos(ul) + c_G k \sin(kl) = 0 \tag{7.24}$$

Analizując ściskanie sprężyny można stwierdzić że przebieg jej charakterystyki ma charakter bardzo nieznacznie odbiegający od liniowego. Można zatem zapisać że

$$\frac{l_0 - l}{l_0} = \frac{P_{kr}}{\gamma_0}$$

skąd otrzymujemy zależność na długość sprężyny pod działaniem siły krytycznej:

$$l = l_0\left(1 - \frac{P_{kr}}{\gamma_0}\right) \tag{7.25}$$

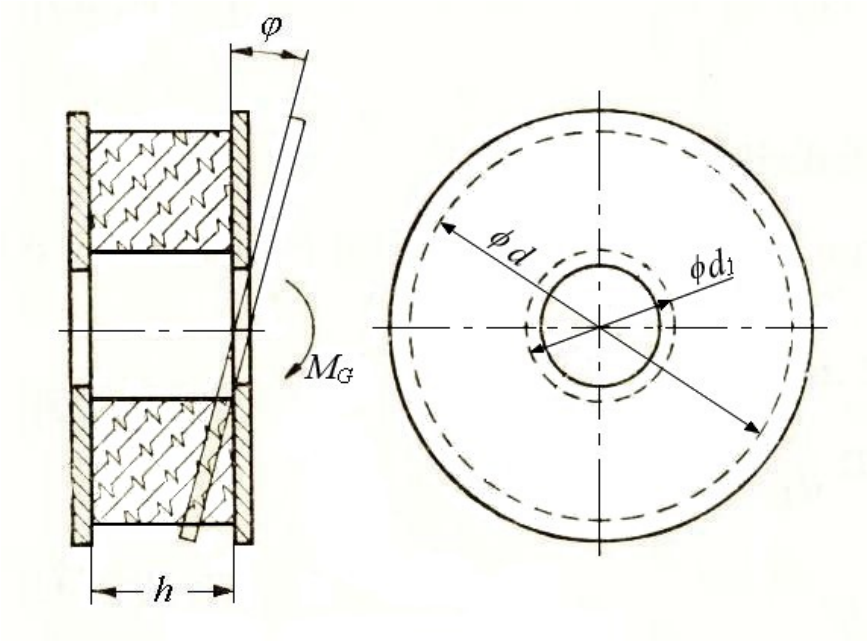
Po podstawieniu (7.25) do (7.24) i powróceniu do pierwotnych oznaczeń równanie (7.24) przyjmie ostatecznie postać

$$\begin{aligned} &P_{kr} \cos\left(\sqrt{\frac{\pi P_{kr} R n_o (2+\nu)}{EJ}\left(l_0 - \frac{\pi P_{kr} R^3 n_o}{EJ}(1+2\nu)\right)}\right) + \\ &c_G \sqrt{\frac{\pi P_{kr} R n_o (2+\nu)}{l_0 EJ - 2\pi P_{kr} R^3 n_o (1+\nu)}} \sin\left(\sqrt{\frac{\pi P_{kr} R n_o (2+\nu)}{l_0 E - 2\pi P_{kr} R^3 n_o (1+\nu)}} \cdot \left(l_0 - \frac{2\pi P_{kr} R^3 n_o (1+\nu)}{EJ}\right)\right) = 0 \end{aligned} \tag{7.26}$$

Znając właściwości materiałowe sprężyny – E, ν oraz moduł sztywności podłużnej gumy –E_G a także wszystkie wymiary geometryczne sprężyny i podkładki gumowej jedynym parametrem nieznanym pozostaje sztywność podkładki na zginanie c_G.

Na Rys.7.6 przedstawiono typowy gumowy element sprężysty pośredniczący pomiędzy sprężyną a fundamentem lub korpusem maszyny. Element ten składa się z dwóch metalowych

płyt pomiędzy którymi umieszczono gumowy pierścień. Wymiary charakterystyczne takiego elementu pokazuje Rys.7.6.a).



Rys.7.6. Szkic łącznika gumowego o kształcie cylindra

W. Surowiak w [67] podaje następującą zależność na moment zginania dla takiego elementu:

$$M_G = k_o' \frac{\pi\left(d^4 - d_1^{\,4}\right)\varphi}{64h} E_G \qquad (7.27)$$

gdzie współczynnik kształtu k_o' wyraża się wzorem

$$k_o' = 1 + \frac{1}{6}\lambda\frac{d + d_1}{h} \qquad (7.28)$$

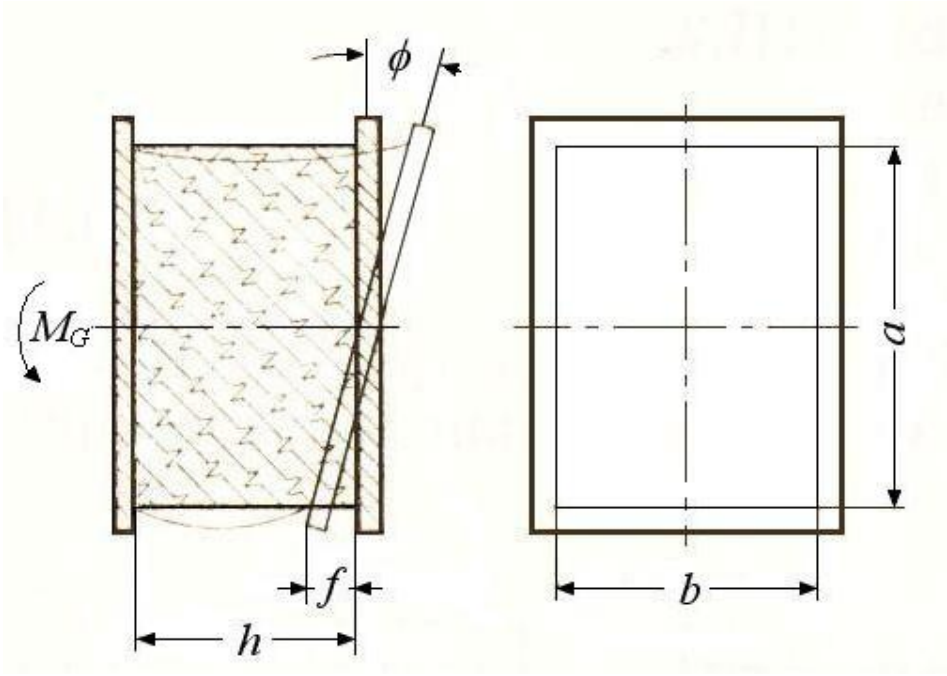
λ – współczynnik zależny od rodzaju gumy odczytujemy z Tablicy 7.1.

Tablica 7.1

Rodzaj gumy	Guma bez napełniacza	Guma zawierająca % sadzy				Guma połączona z elementem metalowym
		25	40	55	70	
λ	1,05	1,01	0,84	0,67	0,49	4,67

Ponieważ $M_G = c_G \cdot \varphi$ zatem poszukiwana sztywność podkładki na zginanie wynosi

$$c_G = \left(1 + \frac{1}{6}\lambda \frac{d + d_1}{h}\right) \cdot \frac{\pi\left(d^4 - {d_1}^4\right)}{64h} E \tag{7.29}$$



Rys.7.7. Szkic łącznika gumowego o kształcie sześcianu

W przypadku gumowego łącznika sprężystego o kształcie sześcianu (Rys.7.7), sztywność na zginanie wyraża się wzorem

$$c_G = k_k' \frac{a^3 b}{8h} E\left(\frac{16}{3\left(2+\varepsilon^2\right)^3} + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2+\varepsilon^2} + \frac{64}{5\left(2+\varepsilon^2\right)^5}\right)\right) \tag{7.30}$$

gdzie współczynnik kształtu k_k' wyraża się wzorem

$$k_k' = 1 + \frac{2}{3}\lambda \frac{ab}{2(a+b)h} \tag{7.31}$$

$$\varepsilon = \frac{a \cdot \varphi}{2h} \tag{7.32}$$

Zatem w tym przypadku sztywność zależy od kąta ugięcia co bardzo utrudnia obliczenia. Ponieważ jednak analizujemy zjawisko wyboczenia interesują nas bardzo niewielkie kąty wychylenia φ dla których można przyjąć że $\varepsilon = 0$. Przy takim założeniu równanie (7.30) przyjmie postać

$$c_G = k_k' \frac{a^3 b}{12h} E \tag{7.33}$$

Korzystając z wyprowadzonej zależności (7.26) i znając właściwości podkładki elastomerowej można obliczyć wartość siły krytycznej ze względu na utratę stateczności dla układów podobnych do przedstawionego na Rys.7.4.b.

Podsumowanie

W praktyce inżynierskiej często spotyka się układy podparcia składające się z szeregowego połączenia podkładki elastomerowej i sprężyny śrubowej. W dostępnej literaturze co prawda rozróżnia się wpływ sposobu podparcia na podatność na utratę stateczności przez sprężynę, jednak zaprezentowane tam związki uwzględniają tylko pięć podstawowych przypadków podparcia (Rys.7.1). Wyprowadzona powyżej zależność (7.26) wraz z odpowiednimi zależnościami znanymi z literatury (7.29), (7.30) i (7.33) pozwala na obliczenie wartości siły krytycznej przy elastycznym podparciu sprężyny.

Podsumowanie

Naprężeniami dominującymi w drucie sprężyny śrubowej ściskanej są naprężenia pochodzące od skręcania. Znane z literatury zależności uwzględniają zarówno wpływ ścinania jak i wpływ zakrzywienia drutu sprężyn śrubowych na wartość maksymalną naprężeń stycznych. W dostępnej literaturze nie uwzględnia się jednak wpływu sposobu podparcia końców sprężyn na ich stan wytężenia. Przeprowadzone w pracy badania pozwoliły na zbadanie wpływu sposobu podparcia na stan naprężeń w sprężynie, cel główny pracy postawiony we wstępie został zatem osiągnięty.

Do najważniejszych wyników pracy można zaliczyć:

1. Wykazanie że znana z literatury [8, 27] zależność

$$\vartheta(M_o = 0) = \frac{L}{EJ}\nu M \sin\gamma\cos\gamma$$

(gdzie: L – długość drutu sprężyny, M – moment siły poosiowej P na ramieniu równym promieniowi nominalnemu sprężyny, γ - kąt wzniosu linii śrubowej), opisująca zmiany kąta skręcenia czół sprężyn śrubowych swobodnie podpartych i obciążonych siłą poosiową, jest obarczona znaczącym błędem. Wyprowadzona została zależność (2.45)

$$\vartheta = 2\pi\left(n_{0cz} - \frac{R_0}{\left(\frac{H_{0cz}}{2\pi\cdot n_{0cz}}\right)^2 + {R_0}^2} + \frac{\left(H_{0cz} - H_{1cz}\right)}{2\pi {R_0}^2 \cdot n_{0cz}\cdot(1+\nu)}\cdot\frac{H_{1cz}}{L}\right)$$

(gdzie: n_{0cz} – początkowa liczba zwojów czynnych, R_0 – początkowy promień podziałowy sprężyny, H_{0cz}, H_{1cz} – kolejno początkowa i końcowa wysokość sprężyny) dająca wyniki dużo bliższe wynikom eksperymentu. Porównanie wyników zawierają tabele 2.2 i 2.3.

2. Znalezienie zależności określających maksymalne wytężenie materiału sprężyny śrubowej podpartej w sposób uniemożliwiający wzajemny obrót jej czół, w oparciu o zależność (2.45). Przebieg badań zawarto w rozdziale drugim.
3. Określenie przy użyciu metod numerycznych, wpływu sposobu podparcia sprężyn śrubowych naciskowych na ich stan wytężenia, z uwzględnieniem lokalnych stref koncentracji naprężeń. Wykazano że sposób podparcia sprężyn o końcach zeszlifowanych i przygiętych nie ma znaczącego wpływu na stan wytężenia ich środkowych zwojów (w przeprowadzonych analizach różnica wartości maksymalnych

dla różnych sposobów podparcia nie przekroczyła 4%), jednak istotnie wpływa on na wartości naprężeń w zwojach końcowych a tym samym na zdolność sprężyny do przenoszenia wysokocyklowych obciążeń. Szczegółowe wyniki zawarto w rozdziale trzecim.

4. Wykazanie że w sprężynach śrubowych o zwojach końcowych zamkniętych, wykonanych metodą obróbki ubytkowej, występują naprężenia, mogące osiągać wartości znacznie wyższe od spodziewanych na podstawie zależności podawanych w literaturze. Przy użyciu Metody Elementów Skończonych ustalono że wzory te można stosować bez obawy niedoszacowania naprężeń pod warunkiem odpowiedniego ukształtowania zwojów końcowych. Na podstawie przeprowadzonych analiz można stwierdzić że aby uniknąć znaczącego wzrostu naprężeń w zwojach końcowych, promień zaokrąglenia przejścia zwoju w część mocują powinien być co najmniej równy połowie wysokości przekroju zwoju.
5. Ustalenie iż charakterystyka sprężyn z drutu o przekroju prostokątnym zwijanych i tych wykonywanych metodami obróbki ubytkowej, o zwojach końcowych zamkniętych jest prawie jednakowa. W wykonywanych analizach w najbardziej niekorzystnym przypadku różnica sztywności nie przekroczyła 10%.
6. Znalezienie na drodze analitycznej zależności (7.26) opisującej siłę krytyczną ze względu na utratę stateczności, w przypadku posadowienia sprężyny na podporze elastycznej.
7. W wyniku poszukiwań mocowań sprężyn, ograniczających lokalny wzrost naprężeń w zwojach końcowych oraz umożliwiających wzrost właściwości tłumiących układu sprężyna – elementy mocujące, powstały dwa wnioski patentowe:
   Wkrętka o zwiększonym tłumieniu, do mocowania sprężyn śrubowych (nr CTT 1/312/08, 17.12.2008. nr zgłoszenia 111);
   Sprężyna o prostokątnym przekroju zwoju i zwiększonym tłumieniu (nr CTT 1/318/08, 2008)

Zaprezentowane powyżej wnioski i wyniki mają charakter ogólny. Wnioski uszczegółowione, przedstawiono w odpowiednich rozdziałach.

Przedstawione w pracy badania zostały ograniczone jedynie do analizy zjawisk związanych ze statyczną pracą sprężyn. Świadomie pominięto analizę takich zjawisk jak drgania własne sprężyn i wpływ sposobu mocowania na ich tłumienie czy wpływ sposobu mocowania na charakter drgań. W pracy nie uwzględniono również zjawisk cieplnych,

zachodzących w elastomerowych elementach mocujących oraz zmianą ich właściwości, związaną długotrwałą pracą pod obciążeniem o wysokich częstotliwościach wymuszenia. Problemy te wymagają przeprowadzenia odrębnych, szerokich badań i planowane są do rozwijania w przyszłości.

Literatura:

1. Allen P. W., Lindley P. B., Payne A. R.: Use of rubber in engineering. London, Maclaren and Sons Ltd, 1966.
2. Ayadi S., Hadj-Taïeb E.: Influence des caractéristiques mécaniques sur la propagation des ondes de déformations linéaires dans les ressorts, Mécanique Industrie, Vol. 7, No. 5-6, 551-563. (2006)
3. Ayadi S., Hadj-Taïeb E., Pluvinage G.: *The numerical solution of strain waves in elastic helical spring,* Materiali in Technologijie, Vol. 41, No.1, 47-52. (2007)
4. Ayadi S., Hadj-Taïeb E.: Simulation numérique du comportement dynamique linéaire des ressorts hélicoïdaux, Transactions the Canadian Society of Mechanical Engineering, Vol. 30, No.2, 191-208. (2006)
5. Battermann W., Kohler R.: Elastomere Federung-Elastische Lagerungen. Berlin, Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, 1982.
6. Berger C., Kaiser B.: Results of very high cycle fatigue tests on helical compression springs. International Journal of Fatigue 28 (2006) 1658-1663.
7. Biezeno C. B., Koch J. J.: Knickung von Schraubenfedern. Z. Angew. Math. Mech. (1925), 5, 279-280.
8. Branowski B.: Sprężyny metalowe. PWN, Warszawa, 1997.
9. BS 1726 Guide to the Design and Specificationof Coil Springs, Part 1: Helical Compression Springs, 1964.
10. Cook R. D.: *Finite element anlysis of closely-coiled helical springs,* Comput. Struct., 34 (1), 179-180. (1990)
11. Costello G. A.:Radial expansion of impacted helical springs. Journal of Applied Mechanics. Transaction. ASME, Vol.42, 789-792.(1975).
12. Damak F., Taktak M.,Abid S., Dhieb A., Haddar M.: Finite element method for the stress analysis of isotropic cylindrical helical spring, European Journal of Mechanics A/Solids 24, Vol. 12, 1068-1078. (2005).
13. Dixon J. C.: The Shock Absorber Handbook. Professional Engineering Publishing Ltd and John Wiley & Sons, Ltd, ISBN 978-0-470-51020-9 (HB).
14. Fakhreddine F., Taktak M., Abid S., Dhieb A., Haddar M., Finite element method for stress analysis of isotropic cylindrical helical spring, European Journal of Mechanics A/Solids 24, (2005) s. 1068 – 1078.
15. Flenker Ch., Uphoff U.: Efficient Valve-Spring Modelling with MBS Valve-Train Design. MTZ 12/2005 Vol.66.
16. Freakley P. K., Payne A. R.:Theory and practice of engineering with rubber. London, Applied Science Publishers Ltd, 1978.
17. Gardulski J.: Bezstanowiskowa metoda oceny stanu technicznego zawieszeń samochodów osobowych, Katowice-Radom 2003, seria:Biblioteka Problemów Eksploatacji, ISBN 83-7204-386-8.
18. Grajnert J.(red.): Izolacja drgań w maszynach i pojazdach, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1997, ISSN 1425-0993.
19. Haringx J. A.: On highly compressible springs and rubber rods, and their application for vibration-free mountings I, R94, Philips Res. Rep.Eindhoven (1948), 3, 401-449.
20. Haringx J. A.: On the buckling and the lateral rigidity of helical springs. Proc. Ned Akad. Wet. (1942), 45, 533-539 i 650-654.
21. Hora P.,Leidenroth V.: Qualitat von Schraubenfedern (Quality of helical springs). Stuttgart: Dr. Riederer Verlag GmbH;1987.
22. Jiang W., Henshall J. L.: *A novel finite element model for helical springs*, Finite Elements in Analysis and Design, No.35, 363-377. (2000)

23. Jiang W., Jones W. K., Wang T. L., Wu K. H.: Free Vibration of Helical Springs, Journal of Applied Mechanics. Transaction. ASME,Vol. 58, 222-227. (1991).
24. Katalog sprężyn 2006, Federntechnik Knorzer GmbH.
25. Kocańda S.: Zmęczeniowe pękanie metali WNT, 1987.
26. Korewa W., Zygmunt K., Podstawy Konstrukcji Maszyn, tom II, WNT, Warszawa, 1967.
27. Kożeśnik J.: Dynamika Maszyn, WNT, Warszawa 1963.
28. Krużelecki J.: Problematyka optymalnego kształtowania ściskanych sprężyn śrubowych przy warunkach stateczności, Wydawnictwa Politechniki Krakowskiej, Monografia 143, Kraków 1992.
29. Krużelecki J., M. Życzkowski: On the concept of an equivalent column in the problem of stability of compressed helical springs. Ing.-Arch. 60 (1990), 367-377.
30. Krużelecki J.: Experimental Verification of Stability of Optimal Compression Helical Springs, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 3, 35, 1997.
31. Krużelecki J.: Optimal design of helical springs, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 28, 1-2, 109-114, 1990.
32. Krużelecki J.: Problematyka optymalnego kształtowania ściskanych sprężyn śrubowych przy warunkach stateczności, Wydawnictwa Politechniki Krakowskiej, Monografia 143, Kraków 1992.
33. Kurowski R., Niezgodziński M. E.: Wytrzymałość Materiałów, PWN, Warszawa 1966.
34. Leja F.: Geometria analityczna, PWN, Warszawa 1965.
35. Lin Y., Pisano A. P.: The differential Geometry of the General Helix as Applied to Mechanical Springs, Journal of Applied Mechanics, Vol 55/831, 1988.
36. Love E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th Editions Dover, New York, 415. (1927).
37. Michalczyk J., Cieplok G.: Wysokoefektywne układy wibroizolacji i redukcji drgań. Collegium Columbinum, Kraków, 1999.
38. Michalczyk J., Majkut L.: Analysis of wave effects in complex vibration isolation systems. Archiwum Budowy Maszyn, L:363-385, 2003.
39. Mottershead J. E.: The large displacements and dynamic stability of spring using helical finite elements, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 24, 547-558. (1982).
40. Muhr T. H.: New technologies for engine valve springs. SAE Paper 930912, New Engine Design and Engine Component Technology, SAE SP-972 (1993) 199-208.
41. Ofierzyński M., Sobczak M.: Poprzeczna praca sprężyn śrubowych w ujęciu charakterystyk mechanicznych, Pojazdy Szynowe, numer specjalny 1975.
42. Opis patentowy DE 10104936A1. Schubfeder. 2001.
43. Opis patentowy DE 3529477A1. Zwischen dem Wagenkasten eines Eisenbahnwagens und einem Drehgestell Angeordnete Mechanische Schraubenfeder. 1985.
44. Opis patentowy DE 3641549. Kraftübertragende Halterung Einer Schraubendruckfeder an Einem Schwenkbaren Bauteil. 1986.
45. Opis patentowy GB 1042117. Improvements in or relating to Adjustable Connection Devices Between the Coiled end of a Helical Spring and a Body. 1965
46. Opis patentowy GB 1044113. Helical spring. 1965.
47. Opis patentowy GB 2056616A. Support plate for helical compression spring.1980.
48. Opis patentowy SU 1089322A. Устроиство для крепления цилиндрическои винтовой пружины. 1982.
49. Opis patentowy SU 12640539A1. Устроиство для крепления цилиндрическои винтовой пружины. 1985.
50. Opis patentowy SU 1640539A1. Устроиство для крепления цилиндрическои пружины. 1989.
51. Opis patentowy SU 844850. Цилиндрическая пружина сжатия. 1981.

52. Opis patentowy US 3051469A1. Antivibration washer for helical spring suspensions.1961.
53. Opis patentowy US 3649000. Helical coil spring arrangement. 1972.
54. Opis patentowy US 4538563A1. Helical coil damper assemblies. 1985.
55. Opis patentowy US 4712778. Helical spring holder assembly.1987.
56. Opis patentowy US 4778162A1. Device for Connecting a Helical Compression Spring to the Trailing Arm in the Wheel Suspension of a Motor Vehicle. 1988.
57. Opis patentowy US 6199843B1. Anti-friction helical spring assembly to prevent one end of a spring from rotating during expansion or compression of the spring. 2001.
58. Pearson D.: *The transfer matrix method for the vibration of compressed helical springs*, Journal of Mechanical Engineering Science, 24, 163-171. (1982)
59. Pękalak M., Radkowski S.: Gumowe elementy sprężyste, PWN, Warszawa, 1989.
60. Philips J. W., Costello G. A.: Large deflections of impacted helical springs. The Journal of Acoustical Society of America, Vol. 51, 967-972. (1972)
61. Rivin E. I., Passive vibration isolation, ASME PRESS, New York 2003.
62. S. D. Ponomariew: Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn. Cz.2 58-79 oraz 83-201, PWN, Warszawa 1958.
63. Salwiński J.: Specjalne sprężyny śrubowe o dużej sztywności oraz przykład ich zastosowania. Przegląd Mechaniczny 3/2007, s. 26.
64. Sinha S. K., Costello G. A.: The numerical solution of the dynamic response of helical springs, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.12, 949-961. (1978)
65. Snowdon J. C.: Vibration and shock in dumped mechanical systems. New York, John Wiley and Sons, 1968.
66. Stokes V. K.: Onthe dynamic radial expansion of helical springs due to longitudinal impact, Journal of Sound and Vibration, Vol. 35, 77-99. (1974).
67. Surowiak W.: Nowe konstrukcje i metody obliczeń elementów maszyn, WNT Warszawa, 1963.
68. Timoshenko S. P., Gere J. M.: Teoria Stateczności Sprężystej. Arkady, Warszawa, 1963.
69. Walczak J.: Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności, Tom 1,2 i 3, PWN, Warszawa, 1971.
70. Walz K.: Stahl federn und werkstoffprobleme, Draht, 1976, 3.
71. Watanabe K., Tamura M., Yamaya K., Kunoh T., Development of new-type suspension spring for rally cars, Journal of Materials Processing Technology,111 (2001) s.132-134.
72. Wittrick W. H.: On Elastic Wave propagation in Helical Springs, International Journal of Mechanical Science, Vol.8, 25-47. (1966).
73. Wolny S. (red.): Wytrzymałość materiałów. Cz.IV. Eksperyment w wytrzymałości materiałów. Monografie Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki, Kraków 2002.
74. Wolny S., Siemieniec A.: Wytrzymałość materiałów. Cz.I. Teoria. Zastosowanie. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne, Kraków 2008.
75. Wójcik A.: Zagadnienia materiałowe, technologiczne i konstrukcyjne w produkcji stalowych sprężyn śrubowych, BOINTE, IMP, Warszawa, 1979.
76. Wrotny T. L.: Dynamika układów mechanicznych – repetytorium teoretyczne i zadania, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1995.
77. Yildrim V.: An efficient numerical method for predicting the natural frequencies of cylindrical helical springs, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 41, 919-939. (1998)
78. Yutaka T., Jong-Bin L., Minoru T.: Finite element analysis of superelastic, large deformation behavior of shape memory alloy helical springs, Computers and Structures, Vol. 82, 1685-1693. (2004).

79. Ziegler H.: Arguments for and against Engesser's formulas. Ing. –Arch. 52 (1982), 105-113.
80. Żukowski S., Sprężyny, PWT, Warszawa 1955.
81. Влиник С. И., Малинин Н. Н., С. Д. Пономарев, Феодосьев В. И., Чернышев Н. А.: Новые Методы Расчета Пружин. Государственное Научно-Техническое Издателство Машиностроительной Литературы, Москва 1946.