

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA

im. Stanisława Staszica
w Krakowie

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Systemów Energetycznych i Urządzeń Ochrony
Środowiska

mgr inż. Roman Filipek

ZASTOSOWANIE MES DO SYNTEZY WIBROAKUSTYCZNYCH PÓL SPRZEŻONYCH W UKŁADACH O WYMUSZENIU IMPULSOWYM

Praca doktorska

Promotor: prof. dr hab. inż. Andrzej Gołaś

KRAKÓW 2012

Spis treści

Wykaz ważniejszych oznaczeń	4
1. Wstęp	6
1.1. Wprowadzenie	6
1.2. Cel i zakres pracy	9
2. Modelowanie wibroakustycznych pól sprzężonych w układach o wymuszeniu impulsowym	11
2.1. Przegląd stosowanych dotychczas modeli	11
2.2. Modelowanie pól wibroakustycznych przy pomocy MES	14
2.2.1. Modelowanie pola mechanicznego	15
2.2.2. Modelowanie pola akustycznego	21
2.2.3. Modelowanie sprzężenia pomiędzy polem akustycznym i mechanicznym	28
3. Budowa synteзаторa numerycznego	32
3.1. Oczekiwane parametry pola akustycznego w przypadku instrumentów muzycznych	32
3.2. Zastosowanie metody planowania eksperymentu i powierzchni odpowiedzi do modyfikacji parametrów układu	39
3.3. Synteзатор numeryczny	46
4. Synteza pola wibroakustycznego dla wybranych układów o wymuszeniu impulsowym - mis tybetańskich	52
4.1. Model numeryczny obiektu badań	53
4.2. Weryfikacja modelu numerycznego	56
4.3. Dobór parametrów misy	59
4.4. Synteza pola akustycznego otaczającego misę	67
5. Synteza pola wibroakustycznego generowanego przez dzwon	70
5.1. Model numeryczny obiektu badań	72
5.2. Synteza pola akustycznego dla dzwonu kołysanego	83
5.2.1. Model opisujący dynamikę ruchu układu dzwonu i serca	83
5.2.2. Aproksymacja odpowiedzi układu poprzez zmianę położenia punktu odbioru	85
5.3. Synteza dźwięku dzwonu o zadanych parametrach	88

6. Synteza pola wibroakustycznego dla układu głośnika w obudowie	91
6.1. Obiekt badań	91
6.1.1. Głośnik otwarty	94
6.1.2. Obudowy głośników otwartych	98
6.2. Model numeryczny	101
6.3. Wpływ tłumienia w obudowie na charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe dla głośnika z membraną doskonale sztywną	107
6.4. Model uwzględniający sprzężenie pomiędzy podatną membraną oraz wnętrzem obudowy głośnika	112
6.5. Model uwzględniający wpływ kształtu obudowy	116
7. Podsumowanie	122
Bibliografia	125

Wykaz ważniejszych oznaczeń

λ - długość fali, $[m]$; parametr transformacji Box-Cox, Yeo-Johnson

ρ - gęstość ośrodka zmienna w czasie, $[kg \cdot m^{-3}]$

ρ_0 - gęstość początkowa ośrodka, $[kg \cdot m^{-3}]$

φ - kąt przesunięcia fazowego, $[rad]$

ω - częstość drgań, $[rad \cdot s^{-1}]$

σ - naprężenia normalne $[Pa]$

σ_{rad} - współczynnik efektywności promieniowania

τ - naprężenia styczne $[Pa]$

Θ - kąt, $[rad]$

a - promień źródła dźwięku, promień kuli $[m]$

a_c - przyspieszenie $[\frac{m}{s^2}]$

A - pole przekroju, $[m^2]$

c - prędkość dźwięku, $[\frac{m}{s}]$

dF - siła elementarna

dS - element powierzchniowy

E - moduł Younga, $[Pa]$

E_{ak} - wypromieniowana energia akustyczna, $[J]$

f - częstotliwość, $[Hz]$

F - siła; $[N]$

G - zysk kierunkowości źródła dźwięku

I - natężenie dźwięku, $[\frac{W}{m^2}]$

I_0 - natężenie odniesienia, $I_0 = 10^{-12} [\frac{W}{m^2}]$

k - liczba falowa $[m^{-1}]$

K - współczynnik kierunkowości źródła dźwięku

l - długość, $[m]$

L_I - poziom natężenia dźwięku, $[dB]$

L_{Na} - poziom mocy akustycznej, $[dB]$

L_p - poziom ciśnienia akustycznego, $[dB]$

m - masa, $[kg]$

N_a - moc akustyczna, $[W]$

N_{a0} - moc akustyczna odniesienia, $N_{a0} = 10^{-12} [W]$

p, P - ciśnienie akustyczne, $[Pa]$

p_0 - ciśnienie akustyczne odniesienia, $p_0 = 2 \cdot 10^{-5} [Pa]$

q - siły powierzchniowe $[N]$

Q - wskaźnik kierunkowości źródła dźwięku

r - odległość od źródła dźwięku, $[m]$

R - uniwersalna stała gazowa, $R = 8.31 \frac{J}{mol \cdot K}$

s - zagęszczenie ośrodka

S - pole powierzchni, $[m^2]$

t - czas, $[s]$

T - okres drgań, $[s]$;

u, v, w - przemieszczenia względem osi x, y, z , $[m]$

v - prędkość cząstek (zw. prędkością akustyczną), $\left[\frac{m}{s}\right]$

1. Wstęp

1.1. Wprowadzenie

Zagadnienie sprzężenia pola mechanicznego oraz pola akustycznego od wielu lat jest przedmiotem zainteresowania wibroakustyki [51, 13]. Jest to dziedzina naukowa łącząca w sobie podejście metodyczne i wyniki badań nauk podstawowych stosowanych (mechaniki i akustyki) z umiejętnościami inżynierskimi koniecznymi do projektowania i eksploatacji maszyn i procesów technologicznych. Wibroakustyka zajmuje się wszelkimi procesami drganiowymi i akustycznymi zachodzącymi w otaczającym człowieka środowisku [21]. Zdecydowanie nie ogranicza się ona do zwalczania niekorzystnych zjawisk związanych z drganiami i hałasem [20]. W przypadku wielu zagadnień istotne jest nie osłabienie lecz wzmocnienie drgań lub pola akustycznego, które znajdują swoje zastosowanie w procesach technologicznych, leczniczych lub do tworzenia muzyki. Aby w ośrodku akustycznym nastąpiła propagacja dźwięku oraz powstało pole akustyczne konieczne jest aby znalazło się w nim źródło zaburzenia. Źródła dźwięku ze względu na zjawisko fizyczne powodujące jego generowanie dzieli się na [13]: źródła przepływowe, gdy dźwięk jest wynikiem wtórnego efektu burzliwego ruchu ośrodka, źródła powierzchniowe – drgań powierzchni, źródła wybuchowe – gwałtownego powstania nowej substancji w ośrodku lub termiczne, gdy propagację dźwięku powodują szybkie zmiany temperatury w ośrodku. Jeżeli rozważane jest generowanie sygnału akustycznego związanego z muzyką pomimo, że występują wtedy w niektórych przypadkach źródła przepływowe, zdecydowanie największe znaczenie mają źródła powierzchniowe. Można zauważyć, że jeżeli występują drgania powierzchni konstrukcji to zawsze powodują one generowanie dźwięku w ośrodku akustycznym ją otaczającym [56, 5, 24], jednak wyznaczenie ilościowe parametrów uzyskiwanego pola akustycznego nie jest zadaniem prostym.

Modelowanie pola mechanicznego dla układów o prostej geometrii można przeprowadzić przy wykorzystaniu metod analitycznych [5, 56, 47]. W przypadku skomplikowanego obiektu badań o zróżnicowanej geometrii konieczne

jest zastosowania metod numerycznych takich jak metoda różnic skończonych (MRS) [32, 29] lub powszechnie wykorzystywana w praktyce inżynierskiej metoda elementów skończonych (MES) [4, 49, 73].

Budując model pola akustycznego, uwzględniający zachodzące w nim zjawiska falowe, bazuje się na opisie matematycznym procesu propagacji fali w ośrodku sprężystym – akustycznym równaniu falowym [56]. Rozwiązanie równania falowego polega na wyznaczeniu w dowolnym punkcie rozpatrywanego obszaru, przy znajomości warunków brzegowych znajdujących się na ograniczeniu tego obszaru, wielkości fizycznych takich jak ciśnienie akustyczne oraz prędkość drgań cząstki ośrodka. Wyznaczenie analitycznego rozwiązania dla tego równania jest możliwe dla wielu układów [51, 50], jednak wymaga stosowania uproszczeń dotyczących kształtu rozpatrywanego obszaru, a w szczególności fragmentu jego brzegu definiującego źródło dźwięku oraz występujących na nim warunków brzegowych. W celu modelowania pola akustycznego w układach o skomplikowanej geometrii wykorzystywane są takie metody numeryczne jak MRS, metoda elementów brzegowych (MEB) lub MES. MEB dzięki dyskretyzacji tylko brzegu obszaru, wymaga sformułowania zdecydowanie mniejszej liczby równań niż MES, jednak otrzymywane macierze pomimo, że są mniejsze to są znacznie bardziej wypełnione elementami oraz otrzymany problem numeryczny staje się często bardziej wymagający obliczeniowo. Przykładowo w pracy [6] dla przypadku dwu i trójwymiarowego problemu wewnętrznego wykazane zostało, że MES, pomimo większego zapotrzebowania na pamięć operacyjną, cechuje mniejszy koszt obliczeniowy niż MEB przy dobraniu liczby elementów tak aby zachować zbliżoną dokładność obliczeń.

Rozwiązanie równania falowego zdecydowanie upraszcza się przy założeniu wymuszenia i odpowiedzi o przebiegu harmonicznym oraz rozpatrywaniu stanu ustalonego w układzie. Wtedy równanie falowe ulega przekształceniu do równania Helmholtza, które po przeprowadzeniu procesu dyskretyzacji i zdefiniowaniu warunków brzegowych można rozwiązać w przybliżony sposób poprzez rozwiązanie układu liniowych równań algebraicznych. Ta metoda jest jednak niewystarczająca w przypadku gdy badana jest odpowiedź układu wibroakustycznego na wymuszenie o charakterze impulsowym. Poszukiwany jest wtedy przebieg zmian sygnału akustycznego rejestrowanego w czasie. Jednym ze sposobów jego wyznaczenia jest rozwiązanie równań różniczkowych opisujących układ poprzez ich bezpośrednie całkowanie, co jest przykładowo niezbędne dla układów nieliniowych.

Wpływ parametrów konstrukcyjnych układu wibroakustycznego na występujące w nim pole akustyczne był badany do tej pory najczęściej w celu modyfikacji konstrukcji tak aby zmniejszyć generowany przez nią poziom ciśnienia akustycznego. Było to uzyskiwane poprzez modyfikację istniejącej konstrukcji poprzez dobranie parametrów elementów usztywniających [36] lub tłumiących [69]. Innym sposobem modyfikacji pola akustycznego jest odpowiedni dobór parametrów układów aktywnych, na przykład konstrukcji inteligentnych na bazie elementów piezoelektrycznych [27, 26, 25]. Do wyznaczenia i modyfikacji parametrów modeli szeroko stosowane są metody planowania eksperymentu oraz powierzchni odpowiedzi [42, 8, 45]. Metodologia powierzchni odpowiedzi została przykładowo wykorzystana w [69] do analizy wpływu zmian konstrukcyjnych drgającej płyty z dodaną warstwą tłumiącą na wypromieniowany przez nią dźwięk.

Muzyka nie istniałaby bez instrumentów, z których niektóre, na przykład instrumenty ludowe lub symfoniczne są doskonalone od wielu wieków, a niektóre jak hang [57] zostały wynalezione w ostatnim dziesięcioleciu. Każdy dobry instrument cechuje niepowtarzalna barwa dźwięku, która zależy od jego konstrukcji oraz parametrów geometrycznych i materiałowych. Są one dobierane zarówno na podstawie doświadczenia konstruktora jak i badań numerycznych, których znakomitym przykładem jest analiza oraz modyfikacja kształtu dzwonów [43, 40].

Sprężenie pola mechanicznego i akustycznego było wykorzystywane do tworzenia muzyki przez ludzkość na długo przed tym, kiedy nastąpiły pierwsze próby opisu matematycznego dźwięku. Jako jeden z pierwszych instrumentów oraz równocześnie syntezator można wskazać ludzki aparat głosowy [58], który ulega ciągłej ewolucji i oprócz funkcji komunikacyjnych wykorzystywany jest także do śpiewu. Zależności matematyczne pomiędzy parametrami fizycznymi współbrzmiących źródeł dźwięku były badane po raz pierwszy w doświadczeniach przeprowadzonych przez filozofa greckiego Pitagorasa z Samos (572 p.n.e. - 497 p.n.e.) [2]. Wykazał on zależność, że przykładowo dla instrumentów strunowych, odpowiednie proporcje pomiędzy długościami strun powodują, że dźwięki przez nie wygenerowane stanowią przyjemne doznanie dla słuchacza. W instrumentach muzycznych strunowych na ich barwę silny wpływ ma sprężenie drgań poprzecznych i podłużnych struny. Efekt ten zaobserwowany został także oraz opisany matematycznie w przypadku drgań belek poddanych wymuszeniu impulsowemu [32]. Występujące w instrumentach muzycznych sprężenie pola mechanicznego i akustycznego [28] szczególnie istotny wpływ

ma na dźwięk generowany poprzez instrumenty perkusyjne z grupy membranofonów. Cechuje je zastosowanie objętości rezonansowych oraz stosunkowo niewielka sztywność i masy membrany. Powoduje to, że konieczne jest zarówno uwzględnienie oddziaływania membrany na ośrodek akustyczny, którym jest powietrze oraz powietrza na membranę [52, 56] ponieważ silnie wpływa ono na pojawiające się w układzie częstotliwości rezonansowe. W przypadku innej grupy instrumentów - idiofonów (z greckiego „idios” - własny, „fonos” - dźwięk), które zbudowane są najczęściej z jednolitego materiału oraz drgania ich całej bryły generują dźwięk, w związku z tym, że materiał z którego są zbudowane cechuje zdecydowanie większa sztywność i masa od powietrza, to zjawisko często jest pomijane.

Wraz z gwałtownym rozwojem elektroakustyki [18] tworzone jest coraz więcej instrumentów w których fizyczne sprzężenie pomiędzy drganiami konstrukcji oraz ośrodka akustycznego nie występuje. Sygnał generowany przez nie najczęściej jest sygnałem zmian napięcia i wymaga późniejszego odtworzenia poprzez systemy nagłaśniające. Dźwięk generowany w ten sposób jest przy pomocy syntezy analogowych lub cyfrowych [58]. Oprócz tworzenia dźwięków o zupełnie nowych barwach często starają się one naśladować instrumenty rzeczywiste. W ostatnich latach wraz z rozwojem mocy obliczeniowej komputerów zaobserwować można gwałtowny postęp w tej dziedzinie – budowane syntezy cechuje coraz lepsze odwzorowanie barwy instrumentów rzeczywistych. Jednak zwłaszcza w aspekcie uwzględnienia w ich algorytmie sprzężenia pola mechanicznego i akustycznego oraz jego wpływu na generowane pole akustyczne wciąż istnieje wiele możliwości ich udoskonalenia.

1.2. Cel i zakres pracy

Celem niniejszej pracy jest stworzenie numerycznego syntezy dźwięku, który pozwala na wygenerowanie sygnału akustycznego o zadanych parametrach w wybranych punktach pola w sytuacji gdy wymuszenie w układzie ma charakter impulsowy.

Synteza jest to łączenie wielu różnych elementów w jedną całość lub całościowe poznanie jakiegoś zjawiska oparte na poprzednim zbadaniu jego elementów. Synteza określane jest też odwrotne przekształcenie Fouriera [72] ponieważ w jego wyniku uzyskiwane jest złożenie poszczególnych składowych harmonicznych sygnału w przebieg czasowy sygnału. Synteza jest także definiowana jako jeden z celów wibroakustyki [21] zarówno w aspekcie syntezy mowy jak

i syntezy parametrów pola wibroakustycznego lub parametrów układu wibroakustycznego tak aby spełniał postawione wymagania. W niniejszej pracy określenie synteza odnosi się do wibroakustycznych pól sprzężonych i jest rozumiane jako proces, który pozwala na podstawie wyznaczonych parametrów układu w którym występują sprzężone pola mechaniczne i akustyczne, na wygenerowanie sygnału akustycznego w wybranych punktach pola. Syntezator numeryczny jest narzędziem, które dzięki zastosowaniu algorytmów numerycznych realizuje proces syntezy. Efektem działania syntezatora jest dźwięk, który może służyć do tworzenia muzyki na dwa sposoby: poprzez dodanie do utworu muzycznego pojedynczego dźwięku będącego efektem specjalnym lub poprzez wprowadzenie wielu dźwięków wzajemnie ze sobą powiązanych w dziedzinie częstotliwości oraz czasu.

Budowa syntezatora numerycznego wymaga rozwiązania szeregu problemów cząstkowych, które przedstawione zostaną w poszczególnych rozdziałach pracy.

W rozdziale 2 zawarty zostanie opis stosowanych dotychczas modeli pozwalających na przybliżone wyznaczenie parametrów układu wibroakustycznego uwzględniający sprzężenie pomiędzy polem mechanicznym i akustycznym oraz wymuszenie w układzie posiadające charakter impulsowy. Następnie opisane zostanie modelowanie sprzężonych pól wibroakustycznych przy pomocy Metody Elementów Skończonych.

W rozdziale 3 opisany zostanie zaproponowany algorytm syntezatora numerycznego. Zdefiniowane zostaną parametry oczekiwane pola akustycznego wytwarzanego przez układy wibroakustyczne generujące dźwięk związany z muzyką. Opisana zostanie zastosowana metoda planowania eksperymentów numerycznych pozwalających na budowę meta-modeli opisujących układy służące do generowania dźwięku oraz dobór ich parametrów na podstawie oczekiwanych parametrów pola akustycznego. Rozdział ten będzie także zawierał algorytm pozwalający na wyznaczenie na podstawie charakterystyk odpowiedzi układu w stanie ustalonym przebiegów czasowych generowanych sygnałów.

W rozdziałach 4 do 6 zaproponowany syntezator numeryczny zastosowany zostanie do trzech wybranych konstrukcji. Rozdział 7 zawierał będzie podsumowanie uzyskanych wyników oraz propozycje udoskonalenia otrzymanego algorytmu i dalszych kierunków badań.

2. Modelowanie wibroakustycznych pól sprzężonych w układach o wymuszeniu impulsowym

Kluczowym elementem zaproponowanego syntezyatora numerycznego jest algorytm syntezy dźwięku, w którym wyznaczane są na podstawie przebiegu sygnału impulsowego wymuszenia, drgania mechaniczne oraz drgania ośrodka akustycznego, czyli generowany dźwięk. Szczególnie istotnym jest w nim uwzględnienie modelu sprzężenia pomiędzy polem mechanicznym oraz polem akustycznym.

2.1. Przegląd stosowanych dotychczas modeli

Modele o parametrach skupionych oraz modele pół-empiryczne układów wibroakustycznych w przypadku gdy wymuszenie ma charakter uderzeniowy mają w tym momencie znaczenie przede wszystkim historyczne. ponieważ dotyczą prostych przypadków dla układów o nieskomplikowanych kształtach, natomiast interesujące jest w nich to, że starają się odpowiedzieć na pytanie która z wielkości fizycznych - drgania, prędkość czy przyspieszenie decyduje o sprzężeniu pomiędzy polami oraz co za tym idzie wygenerowanym ciśnieniu akustycznym. Podstawową trudność w określaniu poziomu dźwięku o charakterze impulsowym pojawiającym się podczas zderzenia dwu ciał stanowi problem sprzężenia między polem mechanicznym i akustycznym. Dźwięk powstający podczas zderzenia dwu ciał najczęściej był do tej pory rozpatrywany w układach wibroakustycznych w kontekście niepożądanym, szkodliwym, czyli jako hałas. Pod koniec lat siedemdziesiątych XIX wieku wprowadzono w wibroakustyce podział hałasu uderzeniowego na hałas przyspieszeniowy (ang. *acceleration noise*) i hałas po-uderzeniowy powodowany drganiami swobodnymi zderzających się ciał (ang. *ringing noise*). J.E Richards stworzył pół-empiryczną teorię hałasu uderzeniowego, która była zbliżona do teorii opracowanej przez Kirchhoffa, dotyczącej pola akustycznego generowanego poprzez jednostkowe

przyspieszenie sfery. Według niej ciśnienie akustyczne p_{im} generowane przez jednostkową skokową zmianę przyspieszenia sfery wyraża się zależnością [29]:

$$p_{im}(r_i, \Theta_i, t'_i) = \frac{\rho_0 a_i^3 \cos \Theta_i l_i}{2r_i^2} \cdot \left\{ e^{-l_i t'_i} \left[\left(\frac{2r_i}{a_i} - 1 \right) (\cos l_i t'_i - \sin l_i t'_i) + \sin l_i t'_i + \cos l_i t'_i \right] \right\} \text{ dla } t'_i > 0$$

$$p_{im}(r_i, \Theta_i, t'_i) = 0 \text{ dla } t'_i < 0 \quad (2.1)$$

gdzie $i = 1$ dla kuli uderzanej, $i = 2$ dla kuli uderzającej, ρ_0 jest gęstością powietrza, a_i promieniem i -tej kuli, r_i to odległość środka kuli od punktu pomiaru, c jest prędkością dźwięku w powietrzu, Θ_i kątem pomiędzy r_i i kierunkiem ruchu kuli i . Ciśnienie akustyczne p_{ia} emitowane przez jedną kulę posiadającą dowolne przyspieszenie $a_c(t)$ wyraża się splotem funkcji p_{im} i a_c

$$p_{ia}(r_i, \Theta_i, t'_i) = \int_0^{t'_i} p_{im}(r_i, \Theta_i, t'_i - \tau) a_c(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

Problem obliczenia ciśnienia akustycznego generowanego w czasie zderzenia dwu kul sprowadza się do wyznaczenia przyspieszenia kul. Stąd też nazwa – hałas przyspieszeniowy. W problemach technicznych spotyka się trzy główne podejścia przy opisie zjawiska uderzenia. Pierwsze dotyczy przypadku, gdy do układu (np. oscylatora harmonicznego) przykładana jest zdeterminowana, krótkotrwałą siłę. Podejście drugie, dokładniejsze polega na rozwiązaniu lokalnego problemu teorii uderzenia. W trzecim przypadku zderzenie jest traktowane jako proces chwilowy o charakterze plastycznym, a zagadnienie sprowadza się do teorii drgań swobodnych oscylatora (techniczna teoria uderzenia). Podejście to oparte jest na założeniu, że ciało uderzające pozostaje połączone z ciałem uderzanym co najmniej do chwili wystąpienia największego przemieszczenia układu złożonego z obu stykających się mas. Konieczność znajomości przyspieszenia zderzających się kul (2.1) do oceny emitowanego hałasu eliminuje przydatność pierwszego i trzeciego podejścia. Konieczna jest bowiem znajomość chwilowej siły zderzenia, co można osiągnąć traktując zderzenie jako proces lokalny. W ograniczonym zakresie dla określenia zależności pomiędzy siłą a odkształceniem lokalnym stosowane są teorie kontaktowe Sztajermana i Hertza. Na kształt impulsu, tzn. na czasowy przebieg siły (przyspieszenia) zderzenia, mają również wpływ takie czynniki, jak geometria powierzchni styku i właściwości sprężysto-plastyczne materiałów. Wszystkie wymienione

czynniki znajdują odzwierciedlenie we współczynniku restytucji, ale właśnie dlatego, że znajomość kształtu impulsu jest konieczna do wyznaczenia poziomu ciśnienia akustycznego emitowanej fali, stosowanie współczynnika restytucji w zagadnieniach akustycznych jest bezcelowe. Chcąc wyznaczyć teoretycznie przebieg czasowy siły uderzenia lub przynajmniej maksymalną jej wartość należy scałkować równanie ruchu ciał zderzających się. Przebieg siły działającej podczas zderzenia można odtworzyć całkując numeryczne równania ruchu, do ułożenia których potrzebne jest jednak przyjęcie właściwego modelu reologicznego zderzających się ciał, co właściwie sprowadza się do identyfikacji procesu. W związku z trudnościami w tym względzie powstało wiele hipotez, jedną z nich jest hipoteza, że o hałasie uderzeniowym decyduje pochodna przyspieszenia („jerk”, „ostrość wibracji”). W oparciu o taką hipotezę zbudował swoją teorię Richards. Od czasów Kirchhoffa wiadomo, że o hałasie decyduje przyspieszenie, tak też formalnie ten rodzaj hałasu nazwał Richards, lecz w obliczeniach prowadzonych przez niego parametrem, który umożliwia wyznaczenie wyniku jest prędkość początkowa zdarzenia. Niedokładności związane ze stosowaniem wzoru Hertza wiążącego prędkość początkową z maksymalną siłą zderzenia były prawdopodobnie inspiracją do tworzenia hipotez, że o poziomie dźwięku decydują pochodne przyspieszenia (pierwsza pochodna [53] lub druga pochodna [23]). Pół-empiryczna formuła wprowadzona przez Richardsa pozwala określić energię akustyczną emitowaną podczas uderzenia

$$E_{rad}(f_0, \Delta f, A) = \frac{A\sigma_{rad}}{f\eta_s} \left(\frac{\Delta f}{f_0} \cdot \frac{\rho_0 c}{\pi^2 \rho_m} \right) \left(\frac{1}{\alpha} \right) \left(\frac{F'_c(f_0)}{f_0} \right) \cdot \Re \left(\frac{H_c(f_0)}{j} \right) f \quad (2.3)$$

gdzie A – współczynnik wagi wprowadzającej filtr A o szerokości pasma Δf , σ_{rad} – współczynnik efektywności promieniowania, F'_c – transformata Fouriera siły wymuszającej, $H_c(f_0)$ – transformata Fouriera impedancji mechanicznej, η_s – współczynnik tłumienia drgającego ciała, ρ_m – gęstość drgającego ciała, ρ_0 – gęstość powietrza.

Oszacowanie ilościowe związku hałasu z prędkością początkową uderzenia na drodze teoretycznej jest możliwe w oparciu o równanie Kirchhoffa (2.1) i teorię uderzenia Hertza. Widać z tego, że największy wpływ na emitowaną energię ma czas zderzenia, o którym oprócz prędkości początkowej decydują właściwości sprężysto-plastyczne zderzających się ciał. Minimalizacja hałasu przyspieszeniowego związana jest z uplastycznieniem zderzenia oraz minimalizacją prędkości zderzenia. W wielu wypadkach tzw. energia ha-

łasu po-uderzeniowego jest większa od hałasu przyspieszeniowego. Oszacowanie energii akustycznej emitowanej po zakończeniu zderzenia E_{ak} związane jest z koniecznością określenia średniej prędkości drgającej powierzchni oraz współczynnika efektywności promieniowania. Jeżeli duża powierzchnia S drga ze średnią normalną prędkością $\langle \bar{v}^2 \rangle$, to wypromieniowana energia akustyczna wyraża się wzorem:

$$E_{ak} = \rho_0 c \langle \bar{v}^2 \rangle S \quad (2.4)$$

Dla drgającego ciała o dowolnym kształcie konieczne jest dodatkowe wprowadzenie współczynnika σ_{rad}

$$E_{ak} = \rho_0 c \langle \bar{v}^2 \rangle S \sigma_{rad} \quad (2.5)$$

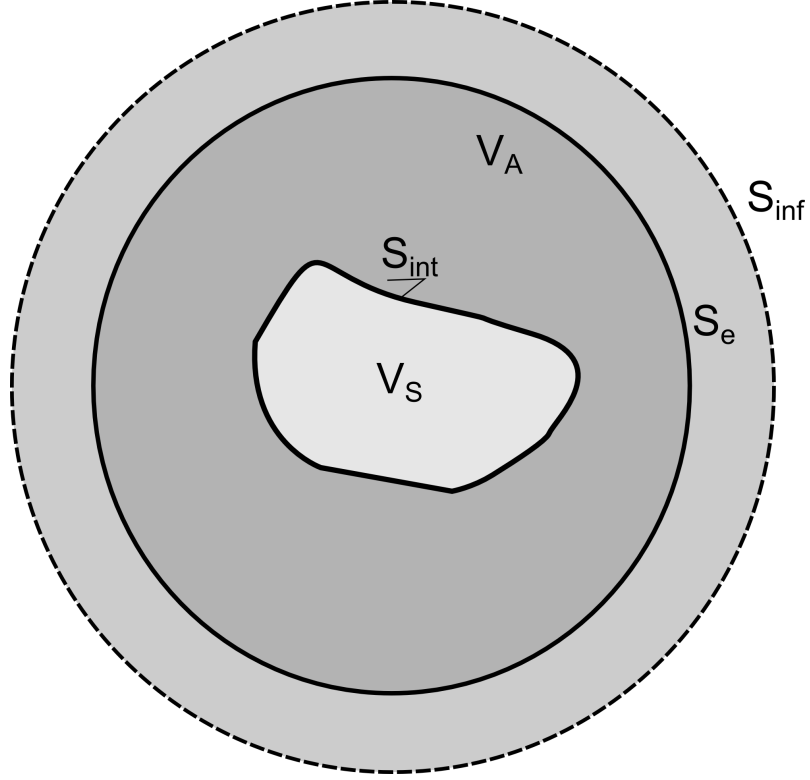
Podstawowy problem w oszacowaniu wypromieniowanej energii stanowi wartość σ_{rad} , która wyznaczana była eksperymentalnie. Richards podał charakterystyki σ_{rad} w funkcji częstotliwości dla szeregu ciał o typowych kształtach.

W przypadku przyjętego w dalszej części pracy modelu sprzężenie drgań konstrukcji i otaczającego ją ośrodka akustycznego uwzględnione jest poprzez zapisanie warunku równowagi ciśnienia występującego w ośrodku akustycznym oraz sił wewnętrznych działających na zdefiniowanej powierzchni styku pola mechanicznego i akustycznego. Tak zapisany warunek powoduje, że ciśnienie akustyczne jest proporcjonalne do przyspieszenia drgań powierzchni.

2.2. Modelowanie pól wibroakustycznych przy pomocy MES

W przypadku ciał o skończonej sztywności dla których bardzo często dominującym jest dźwięk emitowany po uderzeniu na skutek drgań ich powierzchni, modele o parametrach skupionych dają bardzo przybliżone wyniki. Dla układów ciągłych w sposób analityczny rozwiązanie można znaleźć tylko dla mało skomplikowanych, podstawowych kształtów ciał takich jak belki, płyty, itp. Dla ciał o bardziej skomplikowanej geometrii konieczne jest zastosowanie metod numerycznych, takich jak MES, pozwalających na dyskretyzację przestrzenną układu ciągłego i przeprowadzenie aproksymacji parametrów polowych, takich jak przemieszczenia w przypadku pola mechanicznego lub ciśnienie akustyczne w przypadku pola akustycznego. Definiuje się dwa podstawowe rodzaje zagadnień sprzężonych pól wibroakustycznych: problem wewnętrzny

oraz problem zewnętrzny. Problem wewnętrzny dotyczy pola akustycznego ograniczonego polem mechanicznym. W niniejszej pracy przede wszystkim położony jest nacisk na sprzężony problem zewnętrzny przedstawiony na rysunku 2.1.



Rysunek 2.1: Wibroakustyczny sprzężony problem zewnętrzny

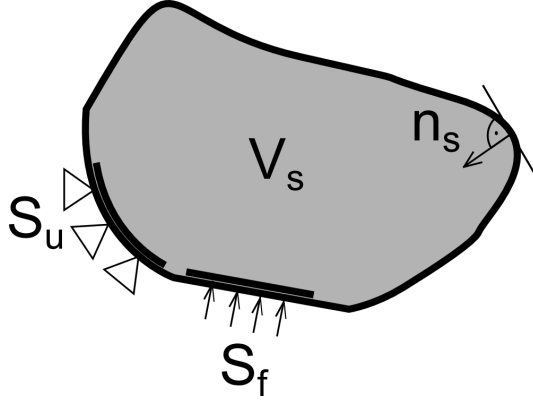
Dla tego zagadnienia obszar pola mechanicznego V_S znajduje się wewnątrz obszaru pola akustycznego V_A . Sprzężenie pól definiowane jest na brzegu S_{int} . Nieograniczona przestrzeń S_{inf} jest przycięta do obszaru znajdującego się w skończonej odległości od pola mechanicznego poprzez brzeg S_e .

2.2.1. Modelowanie pola mechanicznego

W celu wyprowadzenia zależności opisujących pole mechaniczne występujące w obszarze V_S (rysunek 2.2) definiowanym przez kształt konstrukcji konieczne jest zapisanie dla niej równań ruchu. Dla dowolnej bryły znajdującej się w ruchu, zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona, dla każdej chwili czasowej t suma wszystkich sił działających na tą bryłę musi być równa sile bezwładności. Równania ruchu dla tego przypadku zapisuje się jako

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.6)$$

gdzie σ oznacza tensor naprężeń, $\mathbf{b}$ – wektor sił objętościowych, $\mathbf{u}$ – wektor przemieszczeń.



Rysunek 2.2: Rozpatrywany obszar z zaznaczonymi warunkami brzegowymi

Warunki brzegowe dla obszaru V_s definiuje się na dwa sposoby poprzez wprowadzenie warunku Dirichleta – określenia wartości przemieszczeń u na brzegu S_u

$$u = u^{S_u} \quad (2.7)$$

lub zdefiniowanie na brzegu S_f warunku Neumanna, w którym określa się wartość sił powierzchniowych oddziałujących na bryłę

$$n_s \cdot \sigma = f^{S_f}. \quad (2.8)$$

Równanie (2.6) po rozpisaniu dywergencji $(\nabla \cdot)$ tensora naprężeń σ w układzie kartezjańskim x, y, z przyjmuje postać układu równań

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x &= \rho \ddot{u} \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y &= \rho \ddot{v} \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= \rho \ddot{w} \end{aligned} \quad (2.9)$$

gdzie $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – naprężenia normalne względem osi x, y, z ; $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ – naprężenia styczne; u, v, w – przemieszczenia względem osi x, y, z ; b_x, b_y, b_z – siły objętościowe względem osi x, y, z ; ρ – gęstość materiału; $\ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{w}$ – przyspieszenia względem osi x, y, z .

Aby możliwe było zastosowanie MES równania różniczkowe cząstkowe (2.9) zapisuje się w postaci odpowiadającej sformułowaniu słabemu zagadnienia.

Uzyskuje się to poprzez wprowadzenie funkcji wag oznaczonych jako $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$. Mnożąc każde równanie poprzez odpowiadającą mu funkcję wagi, całkując względem objętości oraz dodając do siebie poszczególne składniki otrzymuje się zależność

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x \right) \bar{u} + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y \right) \bar{v} + \\ & + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z \right) \bar{w} dV - \iiint_V (\rho \ddot{u} \bar{u} + \rho \ddot{v} \bar{v} + \rho \ddot{w} \bar{w}) dV = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Korzystając z twierdzenia Greena-Gaussa-Ostrogradskiego dla każdego składnika związanego z pochodną cząstkową naprężenia otrzymuje się

$$\begin{aligned} & \iint_S (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) \bar{u} + (\tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z) \bar{v} + \\ & + (\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z) \bar{w} dS - \iiint_V \left(\sigma_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) + \\ & + \left(\tau_{yx} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) + \left(\tau_{zx} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \bar{w} dV + \\ & + \iiint_V (b_x \bar{u} + b_y \bar{v} + b_z \bar{w}) dV + \iiint_V (\rho \ddot{u} \bar{u} + \rho \ddot{v} \bar{v} + \rho \ddot{w} \bar{w}) dV = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

gdzie n_x , n_y , n_z są jednostkowymi normalnymi względem osi x , y , z . Na powierzchni bryły przyłożone są siły $q_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z$ itd. Podstawiając je do równania (2.11) grupując oraz przenosząc odpowiednie składniki równania na lewą stronę otrzymuje się

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left(\sigma_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) + \tau_{yx} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) + \\ & + \tau_{zx} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) dV + \iiint_V (\rho \ddot{u} \bar{u} + \rho \ddot{v} \bar{v} + \rho \ddot{w} \bar{w}) dV = \\ & = \iint_S (q_x \bar{u} + q_y \bar{v} + q_z \bar{w}) dS + \iiint_V (b_x \bar{u} + b_y \bar{v} + b_z \bar{w}) dV \end{aligned} \quad (2.12)$$

Jeżeli interpretuje się funkcje wag jako wirtualne przemieszczenia to ich pochodne są wirtualnymi odkształceniami

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= \bar{\epsilon}_x & \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= \bar{\epsilon}_y & \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= \bar{\epsilon}_z \\ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) &= \bar{\gamma}_{xy} & \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) &= \bar{\gamma}_{yz} & \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) &= \bar{\gamma}_{zx} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Podstawiając (2.13) do (2.12) otrzymuje się zależność

$$\begin{aligned}
& \iiint_V (\sigma_x \bar{\epsilon}_x + \sigma_y \bar{\epsilon}_y + \sigma_z \bar{\epsilon}_z + \tau_{yx} \bar{\gamma}_{xy} + \tau_{yz} \bar{\gamma}_{yz} + \tau_{xz} \bar{\gamma}_{zx}) dV + \\
& \quad + \iiint_V (\rho \ddot{u} \bar{u} + \rho \ddot{v} \bar{v} + \rho \ddot{w} \bar{w}) dV = \\
& = \iint_S (q_x \bar{u} + q_y \bar{v} + q_z \bar{w}) dS + \iiint_V (b_x \bar{u} + b_y \bar{v} + b_z \bar{w}) dV
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Po zdefiniowaniu odpowiednich wektorów równanie (2.14) zapisuje się w postaci macierzowej

$$\begin{aligned}
& \iiint_V \bar{\epsilon}^T \sigma dV + \iiint_V \rho \bar{\mathbf{u}}^T \ddot{\mathbf{u}} dV = \iint_S \mathbf{q} \bar{\mathbf{u}}^T dS + \iiint_V \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} dV \\
& \text{gdzie} \\
& \bar{\epsilon} = [\bar{\epsilon}_x \ \bar{\epsilon}_y \ \bar{\epsilon}_z \ \bar{\gamma}_{xy} \ \bar{\gamma}_{yz} \ \bar{\gamma}_{zx}]^T \\
& \sigma = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{xz}]^T \\
& \bar{\mathbf{q}} = [q_x \ q_y \ q_z]^T; \quad \mathbf{b} = [b_x \ b_y \ b_z]^T \\
& \mathbf{u} = [u \ v \ w]^T; \quad \ddot{\mathbf{u}} = [\ddot{u} \ \ddot{v} \ \ddot{w}]^T; \quad \bar{\mathbf{u}} = [\bar{u} \ \bar{v} \ \bar{w}]^T
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Założone rozwiązanie dla przemieszczeń w postaci macierzowej wynosi

$$\mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \equiv \mathbf{N}^T \mathbf{u}_e \tag{2.16}$$

gdzie $u_1, v_1, w_1, u_2, \dots$ są węzłowymi stopniami swobody. Natomiast $N_i(x, y, z)$ są funkcjami interpolującymi nazywanymi funkcjami kształtu. Przyspieszenia wyznacza się poprzez dwukrotne różniczkowanie przemieszczeń względem czasu:

$$\ddot{\mathbf{u}} \equiv \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{w}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{w}_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \equiv \mathbf{N}^T \ddot{\mathbf{u}}_e \quad (2.17)$$

Przy tak przyjętym rozwiązaniu wektor odkształceń może zostać wyznaczony poprzez różniczkowanie wektora przemieszczeń $\mathbf{u}$ oraz przyjmuje on postać

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \equiv \mathbf{B}^T \mathbf{u}_e \quad (2.18)$$

Wektor naprężeń w elemencie, przy pominięciu naprężeń wstępnych, może zostać zdefiniowany jako

$$\sigma = \mathbf{C}\epsilon = \mathbf{C}\mathbf{B}^T \mathbf{u}_e \quad (2.19)$$

gdzie $\mathbf{C}$ oznacza macierz podatności materiału i przykładowo w przypadku materiału izotropowego może zostać zdefiniowana na podstawie stałych materiałowych takich jak E – moduł Younga oraz ν – współczynnik Poissona jako

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Funkcje wag są pochodnymi założonego rozwiązania względem węzłowych stopni swobody. Stąd

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{u}_e} \equiv \mathbf{N}^T \quad \text{oraz} \quad \bar{\epsilon} = \mathbf{B}^T \quad (2.21)$$

Podstawiając (6) i (7) do (5) otrzymujemy:

$$\iiint_V \rho \mathbf{N} \mathbf{N}^T \ddot{\mathbf{u}}_e dV + \iiint_V \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{B}^T \mathbf{u}_e dV = \iint_S \mathbf{N} \mathbf{q} dS + \iiint_V \mathbf{N} \mathbf{b} dV \quad (2.22)$$

Stąd dla elementu otrzymuje się równanie

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{k} \mathbf{u}_e = \mathbf{f}_q + \mathbf{f}_b \quad (2.23)$$

Gdzie $\mathbf{m}$ – macierz bezwładności elementu

$$\mathbf{m} = \iiint_V \rho \mathbf{N} \mathbf{N}^T dV \quad (2.24)$$

oraz $\mathbf{k}$ oznacza macierz sztywności, $\mathbf{f}_q$ – równoważny wektor obciążeń węzłowych związanych z siłami powierzchniowymi, $\mathbf{f}_b$ – równoważny wektor obciążeń związanych z siłami występującymi w bryle:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \iiint_V \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{B}^T dV \\ \mathbf{r}_q &= \iint_S \mathbf{N} \mathbf{q} dS \\ \mathbf{r}_b &= \iiint_V \mathbf{N} \mathbf{b} dV \end{aligned} \quad (2.25)$$

Po przeprowadzeniu agregacji macierze mas i sztywności elementów zostają złożone w globalne macierze mas i sztywności [49, 4].

Prowadzi to ostatecznie do równania:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{K} \mathbf{u}_e = \mathbf{F} \quad (2.26)$$

Aby wyznaczyć częstości drgań własnych zakłada się brak tłumienia w układzie oraz brak sił zewnętrznych działających na bryłę. Z (2.26) otrzymuje się

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{K} \mathbf{u}_e = 0 \quad (2.27)$$

Jest to układ równań różniczkowych drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Jego rozwiązanie przewidujemy w postaci

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_a \sin(\omega t) \quad (2.28)$$

Gdzie d_a – wektor amplitud zwany też wektorem postaci drgań, ω – częstość drgań [rad]

Dwukrotnie różniczkując (2.28) względem czasu otrzymuje się

$$\ddot{\mathbf{u}}_e = -\omega^2 \mathbf{u}_a \sin(\omega t) \quad (2.29)$$

Na podstawie (2.27-2.29), (14), (15) otrzymuje się

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{u}_a = 0 \quad (2.30)$$

gdzie $\lambda = \omega^2$.

Równanie (2.30) jest podstawowym równaniem nietłumionych drgań swobodnych. Ponieważ konstrukcja analizowana jest w zakresie liniowo-sprężystym macierze $\mathbf{K}$ i $\mathbf{M}$ są niezależne od ω . Równanie (2.30) nazywane jest liniowym problemem własnym i ma rozwiązanie trywialne $u_a = 0$. Nietrywialne rozwiązanie, które nas interesuje, otrzymywane jest dla $u_a \neq 0$ poszukując wartości własnych λ_i spełniających układ (2.30). Wyznacza się je rozwiązując równanie

$$\det|\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}| = 0 \quad (2.31)$$

Każda wartość własna spełniająca równanie (2.31) opisuje wektor własny $u_{a,i}$. Przedstawiony powyżej sposób rozwiązania zagadnienia własnego stosuje się do niewielkich układów równań. Algorytmy pozwalające na rozwiązanie zagadnienia własnego dla dużych układów równań przedstawione zostały przykładowo w [49, 4].

2.2.2. Modelowanie pola akustycznego

Zjawisko propagacji fali w ośrodku akustycznym opisuje akustyczne równanie falowe. Jest ono hiperbolicznym równaniem różniczkowym cząstkowym, w którym pochodne zmiennej zależnej u są wyznaczone względem czterech zmiennych niezależnych: współrzędnych przestrzennych x, y, z oraz czasu t . Pochodna zmiennej niezależnej u względem współrzędnych przestrzennych jest zdefiniowana przy pomocy Laplasjanu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.32)$$

który stosując notację Gibbsa [63] zapisuje się jako $\nabla^2 u$. Równanie falowe zapisuje się w postaci jednorodnej jako

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = 0 \quad (2.33)$$

gdzie c oznacza stałą nazywaną prędkością propagacji fali w ośrodku.

Rozwiązanie równania falowego zostało uzyskane po raz pierwszy przez Jeana le Rond d’Alamberta w 1747 roku [41] dla struny utwierdzonej na obu końcach. Przy założeniu, że długość struny wynosi l stała c jest równa 1 poszukiwał on wartości przemieszczeń poprzecznych struny $u(t, x)$ dla $t \geq 0$ oraz $0 \leq x \leq l$ spełniających równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.34)$$

w przedziale $(0, l) \in \mathbb{R}^1$ przy warunkach brzegowych $u(t, 0) = u(t, l) = 0$. Rozwiązanie $u(t)$ podane przez d’Alamberta ma postać złożoną z dowolnej funkcji $f(t, x)$

$$u(t) = f(x + t) + f(x - t) \quad (2.35)$$

Nieco później, w 1748 roku, Leonard Euler (1707-1783) jako pierwszy zauważył, że natura fizycznego problemu związanego z u jest zdeterminowana poprzez warunki początkowe

$$u(0, x) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = h(x) \quad (2.36)$$

co prowadzi do uzyskania rozwiązania nazywanego imieniem d’Alamberta

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left[g(x + t) + g(x - t) + \int_{x-t}^{x+t} h(s) ds \right] \quad (2.37)$$

Jeszcze przed d’Alambertem wiadano, że dla drgającej struny utwierdzonej na obu końcach rozwiązaniem problemu brzegowego jest

$$u_n = \cos \frac{n\pi t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.38)$$

To rozwiązanie, określane jako „przydźwięki Taylora”, otrzymane zostało przez Brooka Taylora (1685-1731). Leonard Euler uzyskał dodatkowe rozwiązanie poprzez superpozycję, co pozwoliło Danielowi Bernoullemu (1701-1783) w 1753 roku na wyznaczenie rozwiązania o postaci nieskończonej kombinacji u_n

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos \frac{n\pi t}{l} + \beta_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (2.39)$$

Konieczne było udowodnienie matematyczne, że funkcje g , h mogą być wyrażone poprzez szeregi trygonometryczne, na przykład jako

$$g(x) = u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (2.40)$$

oraz na wykazanie jak nieskończona liczba parametrów α_n, β_n może zostać uzyskana z g i h . Potrzebna do tego teoria została stworzona i udowodniona matematycznie dopiero przez Jeana Baptiste Josepha Fouriera (1766-1830), który w 1807 roku rozpoczął rozwijanie teorii funkcji tworzących szeregi nazwane jego imieniem [72].

Równanie falowe dotyczące ośrodka akustycznego można otrzymać z bardziej ogólnych zależności opisujących dynamikę ośrodków jakimi są płyny – równań Naviera-Stokesa. Można je zredukować do równania falowego po przyjęciu następujących założeń:

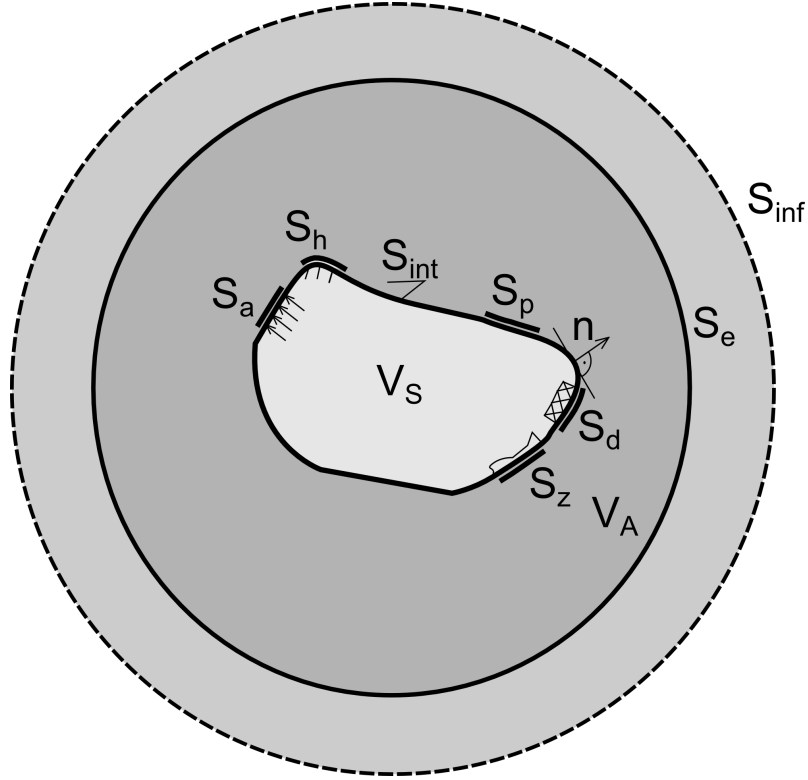
- ośrodek akustyczny jest ściśliwy (zmiany ciśnienia powodują zmiany gęstości),
- nie występuje tłumienie wiskotyczne w ośrodku,
- średnia prędkość płynu jest równa zero,
- średnia gęstość i ciśnienie są jednakowe w całym ośrodku.

Akustyczne równanie falowe może zostać zapisane wtedy analogicznie do (2.33) jako

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \nabla^2 P = 0 \quad (2.41)$$

gdzie: c – prędkość dźwięku, P – ciśnienie akustyczne ($P(x, y, z, t)$), t – czas.

W przypadku zagadnienia rozwiązywania problemu zewnętrznego warunki brzegowe dla pola akustycznego V_A (rysunek 2.3) definiuje się zarówno dla jego brzegu S_{int} , który jest na granicy pola mechanicznego V_S , jak i dla brzegu zewnętrznego S_e , który wprowadzony jest w celu ograniczenia przestrzeni nieskończonej S_{inf} .



Rysunek 2.3: Obszar ośrodka akustycznego oraz definiowane warunki brzegowe

Warunki brzegowe można zdefiniować poprzez określenie dla brzegu:

- S_p – ciśnienia akustycznego $p = p^{S_p}$, co stanowi warunek Dirichleta;
- S_a – przyspieszenia normalnego do brzegu $\mathbf{n} \nabla p = -\rho_0 a^{S_a}$ co jest warunkiem Neumanna;
- S_h – doskonale sztywnego i odbijającego brzegu $\mathbf{n} \nabla p = 0$, co stanowi szczególny przypadek definicji dla brzegu S_a oraz dla metody elementów skończonych jest naturalnym warunkiem brzegowym;
- S_d – pochłaniania energii poprzez doskonale sztywny brzeg, do czego konieczne jest dodanie do równania falowego członu rozpraszającego energię;
- S_e – warunku całkowitego wypromieniowania dźwięku z obszaru akustycznego.

W przypadku gdy ciśnienie zmienia się harmonicznie

$$P = \bar{P} e^{j\omega t} \quad (2.42)$$

gdzie: $\bar{P}$ – amplituda ciśnienia akustycznego, $j = \sqrt{-1}$, $\omega = 2\pi f$, f – częstotliwość oscylacji ciśnienia

Równanie (2.41) redukuje się do równania Helmholtza

$$\frac{\omega^2}{c^2} \bar{P} + \nabla^2 \bar{P} = 0 \quad (2.43)$$

Upraszczając notację poprzez wprowadzenie operatorów macierzowych dywergencji

$$\nabla \cdot () = \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right] \quad (2.44)$$

oraz gradientu, definiowanego w kartezjańskim układzie współrzędnych, w którym $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ są jednostkowymi wektorami dla współrzędnych x , y , z , jako

$$\nabla() = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.45)$$

równanie (2.43) zapisuje się jako

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \nabla \cdot (\nabla P) = 0 \quad (2.46)$$

Macierze elementów otrzymuje się poprzez dyskretyzację równania (2.46) stosując procedurę Galerkina. Mnożąc równanie (2.46) poprzez wirtualną zmianę ciśnienia oraz całkując po całej objętości ośrodka otrzymuje się zależność

$$\int_V \frac{1}{c^2} \delta P \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} dV + \int_V (\nabla \cdot \delta P)(\nabla P) dV = \int_S \mathbf{n}^T \delta P (\nabla P) dS \quad (2.47)$$

gdzie: V – objętość, δP – wirtualna zmiana ciśnienia, S – powierzchnia brzegu, $\mathbf{n}$ – wektor jednostkowy normalny do powierzchni S .

W przypadku zagadnienia sprzężenia ośrodka akustycznego i konstrukcji (ang. *fluid-structure interaction problem*) przyjęte uproszczenia powodują, że równania zachowania pędu dla płynu prowadzą do zależności pomiędzy normalnym gradientem ciśnienia w płynie oraz normalnym przyspieszeniem konstrukcji [22, 73] na powierzchni styku pomiędzy nimi

$$\mathbf{n}^T \cdot (\nabla P) = -\rho_0 \mathbf{n}^T \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} \right) \quad (2.48)$$

gdzie $\mathbf{u}$ – wektor przemieszczeń konstrukcji na styku ośrodków.

Po podstawieniu (2.48) do ((2.47)) otrzymuje się

$$\int_V \frac{1}{c^2} \delta P \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} dV + \int_V (\nabla \cdot \delta P)(\nabla P) dV = - \int_S \rho_0 \mathbf{n}^T \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} \right) dS \quad (2.49)$$

Równanie (2.49) zawiera ciśnienie akustyczne P oraz składowe przemieszczeń u_x, u_y, u_z , które są wyznaczanymi zmiennymi. Opis zmiennych przy pomocy funkcji kształtu prowadzi do zależności

$$P = \mathbf{N}^T \mathbf{P}_e \quad (2.50)$$

$$u = \mathbf{N}'^T \mathbf{u}_e \quad (2.51)$$

gdzie $\mathbf{N}$ – funkcja kształtu elementu dla ciśnienia, $\mathbf{N}'$ – funkcja kształtu elementu dla przemieszczeń, $\mathbf{P}_e$ – wektor ciśnienia w węzłach, $\mathbf{u}_e = \{u_{xe}, u_{ye}, u_{ze}\}$ – wektor poszczególnych składowych przemieszczeń.

Występujące w równaniu (2.48) drugie pochodne zmiennych P, u oraz wirtualna zmiana ciśnienia δP mogą zostać zapisane jako

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \mathbf{N}^T \ddot{\mathbf{P}}_e \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}_e = \mathbf{N}'^T \ddot{\mathbf{u}}_e \quad (2.53)$$

$$\delta P = \mathbf{N}^T \delta \mathbf{P}_e \quad (2.54)$$

Niech operator ∇ zastosowany do funkcji kształtu $\mathbf{N}$ zostanie oznaczony jako

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{N}^T \quad (2.55)$$

Po podstawieniu (2.50-2.55) do (2.41) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \int_V \frac{1}{c^2} \delta \mathbf{P}_e \mathbf{N} \mathbf{N}^T dV \ddot{\mathbf{P}}_e + \int_V \delta \mathbf{P}_e^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} dV \mathbf{P}_e \\ + \int_S \rho_0 \delta \mathbf{P}_e^T \mathbf{N} \mathbf{n}^T \delta \mathbf{P} \mathbf{N}'^T dS \ddot{\mathbf{u}}_e = 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ponieważ $\{\delta P_e\}$ jest różne od zera może zostać wyrugowane z równania (2.56) co prowadzi do postaci

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \int_V \mathbf{N} \mathbf{N}^T dV \ddot{\mathbf{P}}_e + \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{B} dV \mathbf{P}_e \\ + \rho_0 \int_S \mathbf{N} \mathbf{n}^T \delta P \mathbf{N}'^T dS \ddot{\mathbf{u}}_e = 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

Po zapisaniu (2.57) w postaci macierzowej otrzymuje się zależność

$$\mathbf{M}_e^P \ddot{\mathbf{P}}_e + \mathbf{K}_e^P \mathbf{P}_e + \rho_0 \mathbf{R}_e^T \ddot{\mathbf{u}}_e = 0 \quad (2.58)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e^P &= \frac{1}{c^2} \int_V \mathbf{N} \mathbf{N}^T dV - \text{macierz masy (dla ośrodka akustycznego),} \\ \mathbf{K}_e^P &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{B} dV - \text{macierz sztywności (dla ośrodka akustycznego),} \\ \rho_0 \mathbf{R}_e^T &= \rho_0 \int_S \mathbf{N} \mathbf{n}^T \mathbf{N}'^T dS - \text{macierz sprzężenia mas.} \end{aligned}$$

Aby wprowadzić tłumienie na brzegu ośrodka S_d do bezstratnego równania falowego zostaje dodany człon rozpraszający energię

$$\int_V \frac{1}{c^2} \delta P \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} dV + \int_V (\nabla \cdot \delta P)(\nabla P) dV + \int_S \delta P \rho_0 Y \frac{\partial P}{\partial t} dS = 0 \quad (2.59)$$

gdzie Y oznacza zdefiniowaną na brzegu admitancję.

Człon rozpraszający energię D jest całkowany na powierzchni S

$$D = \int_S \delta P \rho_0 Y \frac{\partial P}{\partial t} dS \quad (2.60)$$

Po przeprowadzeniu aproksymacji ciśnienia P przy pomocy elementów skończonych

$$D = \int_S \delta \mathbf{P}_e^T \mathbf{N} \mathbf{N}^T dS \frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t} \quad (2.61)$$

Wprowadzając notację $\dot{\mathbf{P}}_e = \frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t}$ i po wyciągnięciu stałych $\delta \mathbf{P}_e$, ρ_0 , Y przed całkę otrzymuje się

$$D = \delta \mathbf{P}_e^T \rho_0 Y \int_S \mathbf{N} \mathbf{N}^T dS \dot{\mathbf{P}}_e \quad (2.62)$$

Po podstawieniu (2.62) do (2.56), wyrugowaniu $\{\delta P e\}$ macierz tłumienia wynosi

$$\mathbf{C}_e^P = \rho_0 Y \int_S \mathbf{N} \mathbf{N}^T dS \quad (2.63)$$

co prowadzi do zapisania członu tłumiącego jako

$$D = \mathbf{C}_e^P \dot{\mathbf{P}}_e \quad (2.64)$$

Admitancja brzegu Y definiowana jest do wersji 12.0 ANSYS w sposób odpowiadający modelowi pochłaniania na brzegu wprowadzonemu przez Craggsa [15], w którym definiowany współczynnik pochłaniania brzegu β uwzględnia

tylko część rzeczywistą admitancji $\Re(Y) = \frac{\beta}{\rho_0 c}$.

Natomiast od wersji 13.0 ANSYS można zdefiniować zespoloną admitancję na powierzchni poprzez wprowadzenie zespolonej wartości impedancji $Z = \frac{1}{Y}$.

Ostatecznie poprzez wprowadzenie otrzymanej macierzy tłumienia (2.64) do równana (2.58) otrzymuje się zdyskretyzowane równanie falowe uwzględniające straty energii na brzegu ośrodka

$$\mathbf{M}_e^P \ddot{\mathbf{P}}_e + \mathbf{C}_e^P \dot{\mathbf{P}}_e + \mathbf{K}_e^P \mathbf{P}_e + \rho_0 \mathbf{R}_e^T \ddot{\mathbf{u}}_e = 0 \quad (2.65)$$

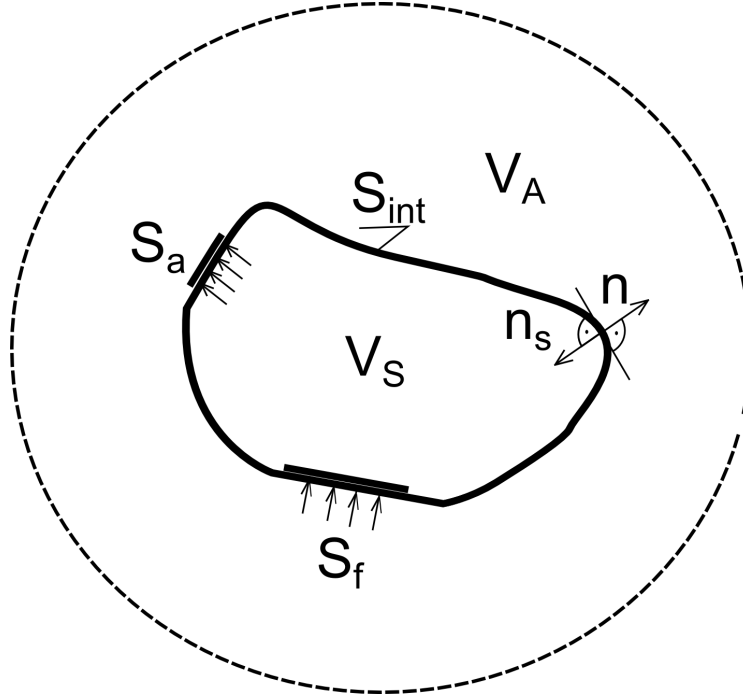
Istotnym jest też zagadnienie wypromieniowania dźwięku z układu – rozpraszania dźwięku w nieograniczonej przestrzeni [65]. Realizowane jest ono najczęściej poprzez wydzielenie w przestrzeni ograniczonej skończonej objętości akustycznej oraz przyjęcie na jej brzegu jednej z trzech strategii numerycznych: dopasowanie warunku impedancji brzegu, wprowadzenie elementów nieskończonych uwzględniających warunek Sommerfelda oraz zastosowanie elementów zawierających warstwy pochłaniające (PML). Dopasowanie impedancji jest możliwe tylko w przypadku gdy znana jest impedancja jaką powinna napotkać fala propagująca się w ośrodku i stąd nie jest często wykorzystywane. Warunek Sommerfelda, przy przyjęciu sferycznego układu współrzędnych w którym odległość od środka układu do rozpatrywanego punktu wynosi r , przybiera postać

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.66)$$

gdzie d określa wymiarowość obszaru, tak że $d = 3$ dla obszaru trójwymiarowego oraz $d = 2$ dla obszaru dwuwymiarowego.

2.2.3. Modelowanie sprzężenia pomiędzy polem akustycznym i mechanicznym

W tym podrozdziale zostanie rozpatrzone zagadnienie sprzężenia pomiędzy polem akustycznym i mechanicznym (rysunek 2.4) na powierzchni S_{int} .



Rysunek 2.4: Obszar pola akustycznego V_A oraz mechanicznego V_S oraz warunki brzegowe na styku pola mechanicznego i akustycznego

Oddziaływanie pola mechanicznego na pole akustyczne, przedstawione na rysunku 2.4 jako powierzchnia S_a uwzględnione zostało w równaniu (2.65) poprzez wprowadzenie warunku

$$\mathbf{n} \nabla p = -\rho_0 \mathbf{n}^T \ddot{u}^{S_a} \quad (2.67)$$

Podczas rozwiązywania wielu zagadnień fizycznych równie istotne jest uwzględnienie oddziaływania pola akustycznego na pole mechaniczne na powierzchni oznaczonej jako S_f poprzez wstawienie warunku brzegowego dla powierzchni konstrukcji – siły powierzchniowej związanej z ciśnieniem akustycznym

$$f^{S_f} = \mathbf{n} p \quad (2.68)$$

Równania ruchu (2.26) wyprowadzone w rozdziale 2.2.1 po dodaniu składnika odpowiedzialnego za tłumienie w układzie przybierają postać

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_e^{pr} \quad (2.69)$$

gdzie $\mathbf{M}_e$, $\mathbf{C}_e$, $\mathbf{K}_e$ to odpowiednio macierze mas, tłumienia oraz sztywności, $\mathbf{u}_e$ – wektor przemieszczeń węzłowych, $\mathbf{F}_e$ – wektor sił uogólnionych. Wektor

wymuszenia $\mathbf{F}_e^{pr}$ opisujący ciśnienie działające na powierzchni S_{int} wyznacza się poprzez całkowanie ciśnienia na tej powierzchni

$$\mathbf{F}_e^{pr} = \int_S \mathbf{N}' \mathbf{N}^T \mathbf{n} dS \mathbf{P}_e \quad (2.70)$$

Po porównaniu całki w równaniu (2.70) z definicją macierzy $\rho_o[Re]^T$ w (2.58) zapisuje się, że

$$\mathbf{F}_e^{pr} = \mathbf{R}_e \mathbf{P}_e \quad (2.71)$$

gdzie

$$\mathbf{R}_e = \int_S \mathbf{N}' \mathbf{N}^T \mathbf{n} dS \quad (2.72)$$

Podstawienie (2.50) do (2.48) prowadzi do otrzymania równania

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e - \mathbf{R}_e \mathbf{P}_e = \mathbf{F}_e \quad (2.73)$$

Równania (2.65) i (2.73) całkowicie opisują zagadnienie sprzężenia konstrukcyjno-akustycznego i tworzą pojedyncze równanie macierzowe:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_e & 0 \\ \mathbf{M}_e^{fs} & \mathbf{M}_e^P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_e \\ \ddot{\mathbf{P}}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_e & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_e^P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_e \\ \dot{\mathbf{P}}_e \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & \mathbf{K}_e^{fs} \\ 0 & \mathbf{K}_e^P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{P}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_e \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.74)$$

gdzie $\mathbf{M}_e^{fs} = \rho_0 \mathbf{R}_e^T$ oraz $\mathbf{K}_e^{fs} = -\mathbf{R}_e$.

Wprowadzony model sprzężenia, bazujący na równaniu (2.48), pozwala w pojedynczym kroku obliczeniowym na uwzględnienie oddziaływania konstrukcji na ośrodek akustyczny oraz ośrodka akustycznego na konstrukcję. Otrzymany układ równań jest niesymetryczny. Siła z jaką oddziałuje ośrodek akustyczny na konstrukcję jest proporcjonalna do ciśnienia akustycznego oraz została uwzględniona w równaniu (2.74) poprzez składnik $\mathbf{K}_e^{fs}$ znajdujący się w globalnej sprzężonej macierzy sztywności. Siła z jaką oddziałuje konstrukcja na ośrodek akustyczny jest proporcjonalna do przyspieszenia drgań powierzchni oraz uwzględniona jest w równaniu (2.74) poprzez składnik $\mathbf{M}_e^{fs}$ znajdujący się w globalnej sprzężonej macierzy mas. Uwzględniając, że wymuszenie w układzie ma charakter harmoniczny otrzymywane jest równanie opisujące odpowiedź układu w stanie ustalonym

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_e & 0 \\ \mathbf{M}^{fs} & \mathbf{M}_e^P \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{C}_e & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_e^P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & \mathbf{K}^{fs} \\ 0 & \mathbf{K}_e^P \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{P}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.75)$$

Po pominięciu tłumienia w układzie, rozpraszania energii na brzegu ośrodka akustycznego oraz sił wymuszających drgania otrzymywane jest równanie opisujące niesymetryczny problem drgań własnych

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_e & 0 \\ \mathbf{M}^{fs} & \mathbf{M}_e^P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & \mathbf{K}^{fs} \\ 0 & \mathbf{K}_e^P \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{P}_e \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.76)$$

Niesymetryczność otrzymanego układu równań powoduje, że podczas jego rozwiązywania, czyli wyznaczania jego wartości i wektorów własnych konieczne jest zastosowanie innej od najczęściej wykorzystywanej metody numerycznej Lanczosa, co wiąże się ze zwiększeniem koniecznych do poniesienia nakładów obliczeniowych. Sposobem na poprawienie wydajności algorytmów numerycznych jest dodatkowe przekształcenie macierzy występujących w równaniu (2.76), prowadzące do ich symetryzacji poprzez wprowadzenie trzeciego wiersza [73]. Innym ze sposobów uzyskania układu równań w którym macierze są symetryczne jest zapisanie równania Helholmtza przy wprowadzeniu nowej zmiennej, którą jest potencjał prędkości akustycznej [73].

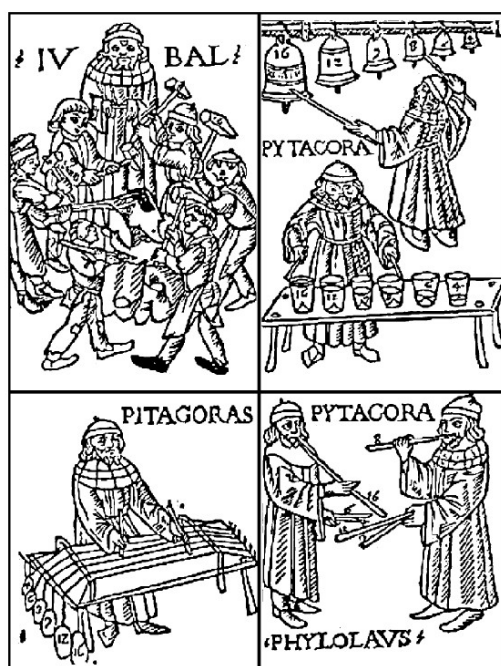
Zależności przedstawione w tym rozdziale pozwolą na budowę modelu układu wibroakustycznych pól sprzężonych, który przy założeniu wymuszenia zmiennego harmonicznego pozwoli na wyznaczenie rozkładów pól dla rozpatrywanych częstotliwości. Do tego celu zostanie zastosowane równanie (2.75) uwzględniające sprzężenie na granicy ośrodka mechanicznego i akustycznego. Warunki brzegowe dla konstrukcji mechanicznej zostaną zdefiniowane jako wartość przemieszczeń u na wybranej powierzchni oraz przyłożenie siły F w wybranym węźle. Dla zewnętrznej powierzchni obszaru akustycznego zostanie przyjęty warunek całkowitego wypromieniowania dźwięku 2.66.

3. Budowa syntezy numerycznego

3.1. Oczekiwane parametry pola akustycznego w przypadku instrumentów muzycznych

Pole akustyczne oraz dźwięki zszyntetyzowane w celu wykorzystania ich w muzyce cechują określone oczekiwania odnośnie parametrów. Przede wszystkim częstotliwości składowe występujące w widmie dźwięku generowanego przez instrument muzyczny powinny cechować odpowiednie proporcje. Pierwsze doświadczenia mające na celu opis matematyczny muzyki przeprowadzone zostały przez filozofa greckiego Pitagorasa żyjącego ok. 572 - 497 p.n.e. Pochodził on z wyspy Samos. Mając lat 40 opuścił Jonię, która walczyła z Persami i odbył liczne podróże: do Indii, gdzie zetknął się z tamtejszymi systemami filozoficzno-religijnymi; do Egiptu, gdzie przebywał wśród egipskich kapłanów ponad 20 lat. Ostatecznie osiedlił się w Wielkiej Grecji, gdzie w Krotonie założył szkołę filozoficzno-religijną i związek pitagorejski. Nie pozostawił po sobie żadnych dzieł. Pitagoras stworzył system poglądów naukowych, nazwanych jego imieniem. Pitagoras jako pierwszy zdefiniował kosmos i użył określenia „filozofia” w rozumieniu „miłość mądrości”, dla zaznaczenia, że mądrość jest rzeczą boską, a jedynie umiłowanie jej dostępne jest dla ludzi. Starał się on wyjaśnić harmonię muzyczną - jak to się dzieje, że pewne współbrzmiące dźwięki, pewne połączenia dźwięków są odbierane jako piękniejsze od innych. Badał on (patrz rysunek 3.1) między innymi dźwięki generowane poprzez: uderzenia młotów w kuźni przy różnych parametrach ruchu młota, uderzenia w naczynia w różnym stopniu wypełnione wodą, szarpanie strun przy odpowiednim skracaniu ich długości lub zmianie siły naciągu, dmuchanie w fujary o różnej długości. Dźwięk interesował go od strony fizycznej ponieważ wiązał on wysokość dźwięku z właściwościami fizycznymi przedmiotu, przez który był generowany (przykładowo długością, grubością struny). Pitagoras uzasadniał harmonijne współbrzmienie dźwięków, korzystając ze swojej koncepcji liczb i harmonii, poprzez matematyczne proporcje. Uważał on, że najlepsze

współbrzmienia tworzą dźwięki, dla których interwały wyrażane są przez ilorazy jak najmniejszych liczb.



Rysunek 3.1: Doświadczenia Pitagorasa powtórzone przez Vincenzo Galilei

U podstaw systemu dźwiękowego zaproponowanego przez Pitagorasa (skali pitagorejskiej) znalazło się spostrzeżenie, że proporcje pomiędzy wysokością dźwięków 2:1 określające oktavę oraz proporcje 3:2 określające kwintę są najbardziej przyjemne dla słuchacza (konsonansowe). Ideą skali Pitagorejskiej jest aby rozpocząć od określenia częstotliwości podstawowej f , która jest mnożona przez współczynnik $\frac{3}{2}$ aby otrzymać kolejne częstotliwości dźwięków znajdujących się na skali. Jeżeli mnożymy częstotliwość f przez $\frac{3}{2}$ wynikiem jest częstotliwość nie znajdująca się w oktawie w której znajduje się częstotliwość f , jednak skoro $\frac{3}{2}f > 2$, można podzielić otrzymany wynik przez 2 aby powrócić do początkowej oktawy.

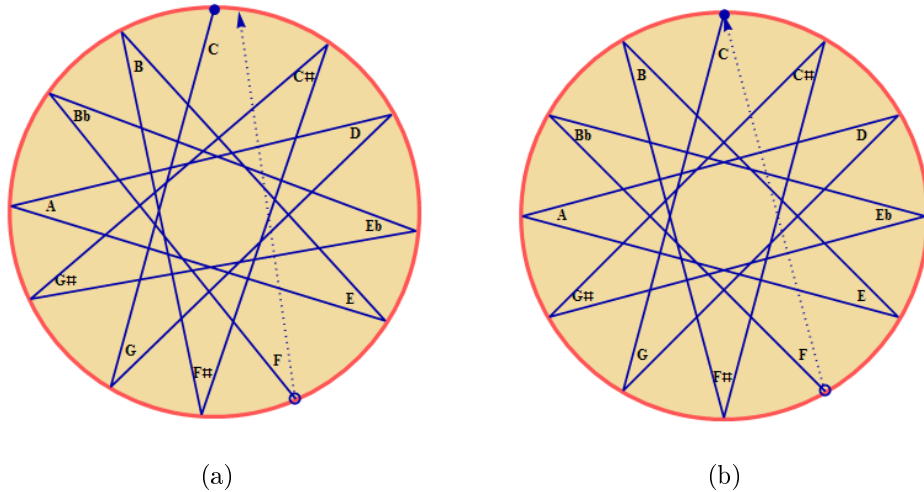
Zazwyczaj zapisuje się to korzystając z logarytmu o podstawie 2 z zadanej częstotliwości. Jeżeli wybierze się jako punkt odniesienia środkowe C posiadające częstotliwość 1 Hz, to w jednostkach skali logarytmicznej środkowe C posiada logarytmiczną częstotliwość $\log_2 1 = 0$ (zgodnie z definicją logarytmu $2^0 = 1$), w momencie gdy C', znajdujące się oktavę wyżej niż środkowe C, posiada logarytmiczną częstotliwość 1 ponieważ $2^1 = 2$. Bardziej ogólnie, poprzez przyjęcie przekształcenia $x = \log_2 f$ powyższe rozważania przyjmują postać

$$x \rightarrow x + \log_2 \frac{3}{2} \quad (3.1)$$

Zależność (3.1) opisuje przekształcenie tonu w kwintę w skali logarytmicznej. Ponieważ dzielenie przez 2 odpowiada odjęciu 1 w skali logarytmicznej, oraz ponieważ odejmujemy 1 tylko jeżeli $x + \log_2 \frac{3}{2} > 1$, otrzymujemy następujące przekształcenie w przedziale $[0, 1]$

$$x \rightarrow x + \log_2 \frac{3}{2} \pmod{1} \quad (3.2)$$

Poprzez określenie punktów końcowych interwału $[0, 1]$, to przekształcenie może być zinterpretowane jako niewymierny obrót na okręgu. Konstrukcję skali pitagorejskiej w przejrzysty sposób można przedstawić na wykresie kołowym (3.2a) w którym na obwodzie okręgu znajduje się skala logarytmiczna o podstawie 2 oraz wartość 1 oznacza pełny obrót. Rozpoczynając przykładowo od środkowego C i częstotliwości 261,6 Hz linią ciągłą zaznaczone jest przejście do kolejnej częstotliwości 392,4 Hz (G). Ta konstrukcja powtórzona jest analogicznie dla kolejnych częstotliwości D, A, E, B, F#, C#, G#, Eb, Bb, F co prowadzi do tego, że w dwunastym kroku otrzymany punkt na okręgu nie pokrywa się z punktem startowym.



Rysunek 3.2: Wykres kołowy na którym przedstawiona jest konstrukcja skali: a) pitagorejskiej, b) równomiernie temperowanej

Eksperymenty Pitagorasa powtórzone zostały przez Vincenzo Galilei, który był zarówno muzykiem jak i matematykiem. Vincenzo Galilei odkrył, że proporcje otrzymane przez Pitagorasa słuszne są jedynie dla długości strun i fu-

jar, przy pozostałych ich parametrach fizycznych niezmiennych. Przykładowo określił on dla przypadku naczyń wypełnionych wodą i interwału oktawy, że proporcja pomiędzy objętościami wody wynosi 8:1 a nie 2:1. Podważyło to twierdzenie, że proporcje proponowane przez Pitagorasa są absolutne i ukazało, że zależą one także od właściwości fizycznych źródła dźwięku. Bazując na wnioskach ojca, Galileo Galilei (1564–1642) przeprowadził kolejne doświadczenia. Poprzez doświadczenie polegające na skrawaniu mosiężnej płyty dłutem określił on bezpośrednią zależność pomiędzy wysokością dźwięku rejestrowaną przez słuchacza oraz częstotliwością dźwięku, którą zdefiniował jako “ilość pulsacji fal powietrza” generowaną poprzez źródło. W opisie swojego doświadczenia zanotował, że podczas skrawania płyta emituje dość silny i czysty gwizdzący dźwięk. Zaobserwował na powierzchni płyty długie rzędy smug równoległych i jednakowo oddalonych względem siebie. Powtarzając doświadczenie kilka razy poprzez tworzenie kolejnych smug z większą lub mniejszą prędkością, gwizd wciąż się wydobywał i wysokość odpowiadającego mu dźwięku była odpowiednio wyższa lub niższa. Zauważył także, że ślady pozostawione na powierzchni w przypadku gdy ton był wyższy znajdowały się bliżej siebie, a gdy ton był niższy były od siebie bardziej oddalone.

Niezależnie od Galileusza dźwięk generowany przez naciągnięte struny badał także Mersenne (1588-1648). Określił on, że częstotliwość dźwięku generowanego przez strunę jest odwrotnie proporcjonalna do jej długości. Podobnie jak Galileusz stwierdził, że częstotliwość drgań struny jest taka sama jak częstotliwość rejestrowana przez słuchacza jako wysokość dźwięku. Określił on częstotliwość drgań długiego, ciężkiego przewodu i powiązał ją z wysokością określonej nuty. Później francuski fizyk Joseph Sauveur (1653–1716), przeprowadził szerokie badania pomiędzy częstotliwością a wysokością dźwięku dla fal dźwiękowych. W swojej książce *Collected Writings on Musical Acoustics* zawarł on pierwszą tabelę zawierającą częstotliwości poszczególnych wysokości dźwięku (nut). Podał on także, że częstotliwość dźwięku generowanego przez piszczałkę organów o długości około 1,624 m wynosi 100 okresów na sekundę (Hz). Te dane zostały później wykorzystane przez Newtona (1687) do określenia długości fali impulsu dźwiękowego generowanego przez otwartą rurkę na podstawie długości rurki podzielonej przez częstotliwość dźwięku (*Book 2, Scholium in Proposition L, Principia*).

Pitagoras w swoich doświadczeniach dotyczących struny poprzestał na skracaniu jej o $1/2$, $1/3$, $1/4$ długości. Pozwoliło to na określenie interwałów

zawartych w tablicy 3.1. Stosunki częstotliwości odpowiednich dźwięków są odwróceniem stosunków długości części struny.

Tablica 3.1: Podstawowe interwały wyznaczone przez Pitagorasa

stosunek długości części struny	interwał	stosunek częstotliwości
1:2	oktawa	2:1
2:3	kwinta	3:2
3:4	kwarta	4:3

Pitagoras uważał, że nie ma potrzeby dalej dzielić struny, ponieważ przez dodawanie i odejmowanie już otrzymanych interwałów można otrzymać wszystkie inne. Przykładowo dla tercji wielkiej (odległej od tonu podstawowego o 4 półtony) stosując konstrukcję (3.2) wyznaczony współczynnik wynosi $81/64$. W średniowieczu, gdy powstała muzyka wielogłosowa, zauważono, że teoria Pitagorasa jest niezgodna z praktyką, ponieważ o wiele lepiej brzmiały dwa głosy prowadzone w odległości tercji (wielkiej lub małej), niż np. sekundy, podczas gdy, zgodnie z systemem Pitagorasa, sekunda była bardziej konsonansowa od tercji (tercja wielka - współczynnik $81/64$, sekunda wielka - współczynnik $9/8$). Konieczne było stworzenie systemu usuwającego tę niedogodność. Angielski teoretyk, Walter Odington, na podstawie prac filozofa greckiego Didymosa (I w. p.n.e.), który kontynuował badania Pitagorasa, zastosował podział struny w $1/5$ jej długości. W ten sposób otrzymał tercję wielką, określoną stosunkiem $5/4$, a więc nieco mniejszą od pitagorejskiej. Dla przykładu, współczynniki dźwięków gamy C dur w systemie nazwanym „naturalnym” były następujące

Tablica 3.2: Proporcje pomiędzy dźwiękami dla gamy C-dur

C	D	E	F	G	A	H	C'
1	$9/8$	$5/4$	$4/3$	$3/2$	$5/3$	$15/8$	2

W baroku, gdy zaczęto komponować utwory, wykorzystujące przejścia od jednej tonacji do drugiej okazało się, że nie wszystkie akordy brzmiały czysto. Stworzono wiele systemów poprawiających tę niedogodność, a najważniejszy z nich, nazywany „systemem równomiernie temperowanym”, który jest wykorzystywany do czasów obecnych pochodzi z roku 1706 i jest dziełem J. G. Neidhardta. Punktem wyjścia dla budowy tego systemu było to, że odległość dwunastu kwint różniła się od odległości siedmiu oktaw o komat pitagorejski:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12}/2^7 \approx 129,746/128 \approx 1,014 \quad (3.3)$$

Neidhardt odległość tę podzielił przez 12 i interwał kwinty zmniejszył o otrzymany wynik. Dzięki temu zabiegowi dwanaście kwint stało się równe siedmiu oktawom, dwa półtony odpowiadały całemu tonowi i system, zbudowany od dowolnego innego dźwięku, niż C, dawał dokładnie system wyjściowy. Wadą otrzymanego systemu oraz powodem niechętnego jego stosowania przez muzyków jest to, że interwały inne niż oktawa zostały „rozstrojone” ponieważ przestały je cechować proporcje będące ilorazami jak najmniejszych liczb.

W celu dokładniejszego pomiaru interwałów pomiędzy dwoma dźwiękami półton został podzielony na 100 części i wprowadzona została jednostka cent. Oktawa jest równoważna 1200 centom a dokładny interwał pomiędzy dwoma częstotliwościami f_2 i f_1 wyznacza się z zależności

$$\text{interwał} = \frac{1200}{\ln 2} \ln(f_2/f_1) \text{ centów} \quad (3.4)$$

W tablicy 3.3 zebrane zostały podstawowe interwały w skali naturalnej oraz równomiernie temperowanej oraz różnice pomiędzy nimi wyrażone w centach.

Tablica 3.3: Podstawowe interwały oraz różnice pomiędzy skalą naturalną i równomiernie temperowaną

Interwał	skala naturalna	skala równ. temp.	różnica w centach
oktawa	2	$2^{(12/12)} = 2$	0
kwinta	$3/2$	$2^{(7/12)} \approx 1,498$	+2
kwarta	$4/3$	$2^{(5/12)} \approx 1,335$	-2
tercja duża	$5/4$	$2^{(4/12)} \approx 1,260$	-13
tercja mała	$6/5$	$2^{(3/12)} \approx 1,189$	+15
ton	$9/8$	$2^{(2/12)} \approx 1,122$	-4
półton	$16/15$	$2^{(1/12)} \approx 1,059$	+1

Według klasyfikacji instrumentów muzycznych zaproponowanej przez E. Hornbostela i C. Sachsa w roku 1914 [1, 19, 59] idiofony (instrumenty perkusyjne samobrzmiące) to grupa instrumentów muzycznych, w których źródłem dźwięku jest ciało stałe mające niezmienną, naturalną sprężystość. Wysockość dźwięku w idiofonach uzależniona jest od właściwości fizycznych elementu drgającego. W orkiestrze symfonicznej idiofony najczęściej należą do perkusji. Wystąpić mogą też w dużej orkiestrze symfonicznej organy języczkowe. Podział idiofonów można przeprowadzić ze względu na sposób wywołania ich drgań na:

- uderzane pałeczką, prętem, dłonią (np. gongi);
- zderzane o siebie (np. talerze);
- pocierane smyczkiem, szczotką lub dłonią (np. harfa szklana);
- dęte (języczkowe) w których drgania wibratora wywołane są przepływem powietrza wytwarzanego ustami (np. harmonijka ustna) bądź miechem (np. organy) ;
- szarpane wypustkami mechanizmu lub dłonią (np. pozytywka).

Innego podziału idiofonów można dokonać ze względu na kształt elementu drgającego:

- płytowe - talerze perkusyjne, gong;
- sztabkowe - czelesta;
- rurowe - dzwony rurowe;
- prętowe - trójkąt.

W przypadku mis tybetańskich proporcje pomiędzy częstotliwościami składowymi widma dźwięku, w związku z dużą różnorodnością kształtów, nie są zazwyczaj precyzyjnie dostrojone. Dzwony stanowią jeden z najdoskonalszych przykładów idiofonów, choć za instrumenty muzyczne uznaje się je głównie gdy występują w zespołach tworzących karyliony lub jako dzwonki ręczne. Proporcje pierwszych częstotliwości składowych w widmie ich dźwięku najczęściej są bliskie 1:2:2.4:3:4 czyli zawierają odpowiednio interwał oktawy, tercji małej i kwinty. Takie proporcje powodują, że ich dźwięk jest niepowtarzalny oraz interwał tercji małej wpływa na powstawanie dysonansów gdy współbrzmi wiele dzwonów równocześnie. Stąd też poświęcono wiele badań nad modyfikacją i odpowiednim doбором kształtu profilu dzwonu, tak aby zamienić występujący w jego widmie interwał tercji małej na tercję wielką [39] lub wręcz pozostawić w widmie dźwięku tylko kolejne składowe harmoniczne (tak aby odpowiednie proporcje wynosiły 1:2:3:4)[43]. Tworzony algorytm syntezy numerycznego pozwala na dobranie parametrów konstrukcyjnych modeli mis i dzwonów tak aby proporcje pomiędzy poszczególnymi częstotliwościami rezonansowymi, były zbliżone do odpowiedzi obiektów rzeczywistych oraz na późniejszą ich modyfikację, tak aby ich dźwięk cechowało bardziej przyjemne dla słuchacza brzmienie. Dźwięk generowany przez trzecią z rozpatrywanych konstrukcji – głośnik w obudowie cechują zazwyczaj odmienne pożądane parametry. Powinien on jak najwierniej przetworzyć sygnał elektryczny na sygnał akustyczny w miejscu odbioru. Stąd w dźwięku generowanym przez doskonałą konstrukcję głośnika nie powinny występować dodatkowe rezonanse oraz powinien on posiadać równomierną charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową. Głośniki

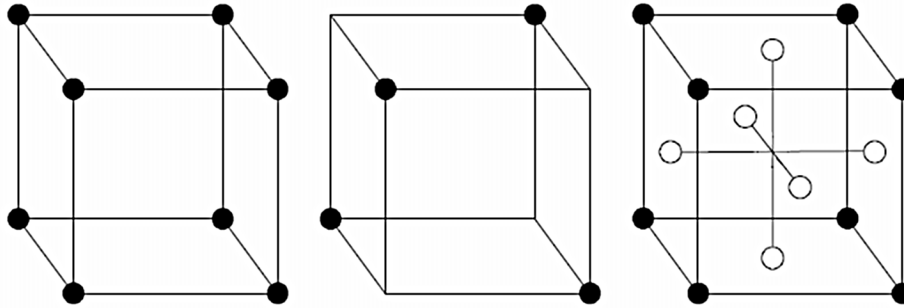
pełnią także funkcję źródła dźwięku w przypadku instrumentów muzycznych nazywanych elektrofonami, w których dźwięk wytwarzany jest za pośrednictwem drgań elektrycznych. Przykładowo może to być gitara elektryczna lub organy Hammonda [7]. Podobnie ostatnim ogniwem służącym do generowania sygnału akustycznego jest indywidualny dla każdego instrumentu układ głośników zastosowany w Princetown Laptop Orchestra [67] lub Salford Laptop Orchestra [68]. Jeżeli głośnik generuje dźwięk tylko dla pojedynczego instrumentu to przesunięcie rezonansów tak aby były zgodne z rezonansami występującymi w odtwarzanym sygnale oraz nie wprowadzały w widmie dźwięku dodatkowych niepożądanych składowych może okazać się korzystne.

3.2. Zastosowanie metody planowania eksperymentu i powierzchni odpowiedzi do modyfikacji parametrów układu

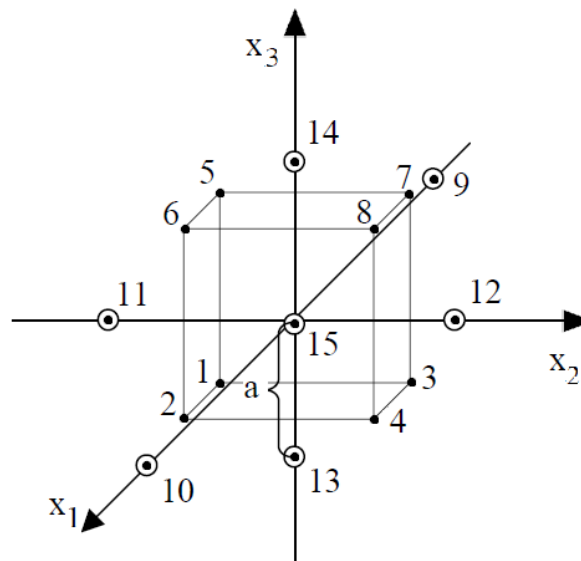
Przed zastosowaniem MES do budowy modelu matematycznego rozpatrywanego układu wibroakustycznego konieczne jest założenie zestawu parametrów, które go opisują. Stanowią je w tym przypadku parametry konstrukcyjne – parametry geometryczne oraz materiałowe. Następnie wynikiem przeprowadzonej symulacji numerycznej jest uzyskanie pola wibroakustycznego o parametrach, którymi są przykładowo uzyskane częstotliwości składowych harmonicznych dominujących w widmie dźwięku lub proporcje pomiędzy nimi. Otrzymane w doświadczeniu numerycznym parametry pola mogą okazać się niezadowalające. Aby je zmienić konieczne jest założenie nowego zestawu parametrów decyzyjnych i ponowne przeprowadzenie symulacji numerycznej. Kolejne zestawy parametrów można dobierać na podstawie własnej intuicji lub losowo. Można ten proces przeprowadzić także w sposób systematyczny, zaplanowany, pozwalający przy dużej efektywności prowadzonego doświadczenia na dokładne wyznaczenie parametrów uzyskiwanych. W tym celu wykorzystana została w niniejszej pracy metoda planowania eksperymentu .

Celem planowania doświadczenia jest wyznaczenie opisu matematycznego (tzw. meta-modelu) rozważanego obiektu, który uzyskuje się poprzez zmiany parametrów wejściowych (decyzyjnych) oraz aproksymację parametrów obserwowanych na jego wyjściu [42]. Metoda ta, której podstawy stworzone zostały w latach 50. ubiegłego wieku [8], podlega ciągłemu rozwojowi. Do tej pory powstało wiele planów doświadczeń, z których do podstawowych planów należą:

- planowanie dwupoziomowe (całkowite i ułamkowe),
- planowanie trójpoziomowe (całkowite),
- planowanie wielopoziomowe (kompozycyjne - ortogonalne, rotalne).



Rysunek 3.3: Przykładowe plany doświadczenia: dwupoziomowy, dwupoziomowy ułamkowy, kompozycyjny dwupoziomowy z dodatkowymi doświadczeniami gwiazdnymi



Rysunek 3.4: Zastosowany plan centralny - kompozycyjny dla trzech parametrów

W niniejszej pracy wybrano plan centralny kompozycyjny, który jest oparty na planie dwupoziomowym całkowitym uzupełnionym doświadczeniami gwiazdnymi a (dla każdego wymiaru, gdzie a to ramię gwiazdne) oraz doświadczeniami centralnymi, realizowanymi w środku planu. Łączna liczba układów planu eksperymentu w planie kompozycyjnym wynosi $n = 2^s + 2s + 1$, gdzie s jest liczbą zmiennych wejściowych. Poszczególne

składowe n oznaczają: 2^s układów planu dwupoziomowego, $2s$ układów gwiazdnych i jeden układ centralny. Rysunek 3.4 przedstawia przykładowy plan centralny kompozycyjny dla 3 zmiennych wejściowych x_1 , x_2 i x_3 . Dla tak przyjętego planu eksperymentu oraz tej ilości zmiennych konieczne jest przeprowadzenie 15 doświadczeń. Jest to zdecydowanie mniejsza liczba niż w przypadku planu całkowitego trójpoziomowego dla którego konieczne byłoby przeprowadzenie 3^s liczby doświadczeń, czyli w tym przypadku 27.

Odpowiedź układu opisana przy pomocy hiperpowierzchni odpowiedzi aproksymowana jest wielomianami drugiego rzędu. Dopasowanie funkcji aproksymującej realizowane jest zgodnie z metodą najmniejszych kwadratów [42]. Sumę kwadratów błędów SS_E , część zmienności wyjaśnioną modelem regresji, zapisuje się jako:

$$SS_E = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \quad (3.5)$$

gdzie y_i – wartość parametru wyjściowego w i -tym punkcie, $\hat{y}_i$ – wartość modelu regresji w i -tym punkcie.

Suma regresji kwadratów SS_R , określająca zmienność losową, wynosi

$$SS_R = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (3.6)$$

gdzie

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (3.7)$$

Całkowita suma kwadratów SS_T , czyli zmienność całkowita zmiennej zależnej, wynosi

$$SS_T = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (3.8)$$

Dla analizy regresji zapisuje się zależność

$$SS_T = SS_R + SS_E \quad (3.9)$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (3.10)$$

W prowadzonej analizie przyjęty został liniowy model regresji. Model regresji w dowolnym punkcie $\{x\}_i$ dla $i = 1, \dots, n$ w m -wymiarowej przestrzeni zmiennych wejściowych ma postać

$$y_i = \mathbf{t}_i \mathbf{c} + \epsilon \quad (3.11)$$

gdzie $\mathbf{t}_i$ – wierszowy wektor funkcji bazowych dla modelu hiperpowierzchni odpowiedzi w i -tej próbkowanej lokalizacji, $\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_k]^T$ – wektor parametrów regresji, k – całkowita liczba parametrów regresji.

Dla pełnego, kwadratowego modelu regresji wektor funkcji bazowych dla i -tego punktu ma postać

$$\mathbf{t}_i = [1 \ x_{1,i} \ x_{2,i} \ \dots \ x_{m,i} \ x_{1,i}^2 \ x_{1,i}x_{2,i} \ \dots \ x_{1,i}x_{m,i} \ x_{2,i}^2 \ \dots \ x_{2,i}x_{m,i} \ \dots \ x_{m,i}^2] \quad (3.12)$$

Dla tak przyjętego modelu całkowita liczba parametrów regresji wynosi

$$k = 1 + m + \frac{1}{2}(m+1)m \quad (3.13)$$

Dla wszystkich rozpatrywanych punktów równanie (3.11) może zostać zapisane w postaci macierzowej jako

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d} \mathbf{c} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.14)$$

gdzie $\hat{\mathbf{y}}$ – wektor wartości aproksymowanych, $\mathbf{d} = [\mathbf{t}_1 \ \mathbf{t}_2 \ \dots \ \mathbf{t}_n]^T$ – macierz eksperymentu, $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ – wektor błędów.

Współczynniki regresji wyznacza się stosując metodę najmniejszych kwadratów

$$SS_E = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{d} \mathbf{c})^T (\mathbf{y} - \mathbf{d} \mathbf{c}) \rightarrow \min \quad (3.15)$$

Współczynniki regresji są wyznaczane jako

$$\mathbf{c} = (\mathbf{d}^T \mathbf{d})^{-1} \mathbf{d}^T \mathbf{y} \quad (3.16)$$

Następnie wyznaczona powierzchnia odpowiedzi przyjmuje postać

$$\hat{y} = \mathbf{t}(x) \mathbf{c} \quad (3.17)$$

Jednym z najczęściej stosowanych parametrów określający dobroć dopasowania modelu regresji jest współczynnik determinacji R^2

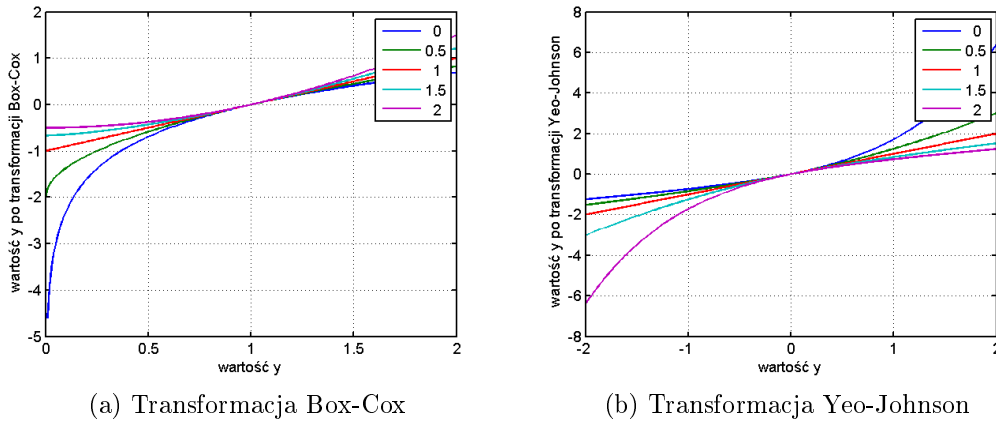
$$R^2 = \frac{SS_R}{SS_T} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (3.18)$$

który jeżeli przyjmuje wartość bliską 1 oznacza dobrą aproksymację punktów uzyskanych w doświadczeniu poprzez powierzchnię odpowiedzi.

Poprawienie modelu regresji uzyskane zostało poprzez dodatkową transformację parametrów wejściowych i wyjściowych modelu – transformację Yeo-Johnsona, która stanowi rozwinięcie transformacji Boxa-Coxa. Przekształcenie Boxa-Coxa to narzędzie matematyczne używane między innymi w statystyce do przekształcenia zmiennej objaśnianej y podczas konstruowania modeli regresyjnych lub do analizy szeregów czasowych. Jego oryginalną postać zapisuje się jako

$$y^{(\lambda)} = \begin{cases} (y^\lambda - 1)/\lambda & \text{jeżeli } \lambda \neq 0, y \geq 0 \\ \log(y) & \text{jeżeli } \lambda = 0, y \geq 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Podstawowym założeniem w równaniu (3.19) jest, że y jest dodatnie. Parametr λ określa przypadek transformacji. Przykładową transformację Boxa-Coxa zmiennej y przedstawia rysunek 3.5a.



Rysunek 3.5: Wartości y po przeprowadzeniu transformacji w zależności od wartości początkowych y dla wybranych wartości λ

Yeo i Johnson [70] zaproponowali rodzinę transformacji (rysunek 3.5b) dla których nie występują ograniczenia względem y i są one definiowane jako

$$\psi(\lambda, y) = \begin{cases} ((y+1)^\lambda - 1)/\lambda & \text{jeżeli } \lambda \neq 0, y \geq 0 \\ \log(y+1) & \text{jeżeli } \lambda = 0, y \geq 0 \\ -[(-y+1)^{2-\lambda} - 1]/(2-\lambda) & \text{jeżeli } \lambda \neq 2, y < 0 \\ -\log(-y+1) & \text{jeżeli } \lambda = 2, y < 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

W celu znalezienia parametrów modelu wykorzystana została metoda pseudo-optimalizacji – metoda przesiewania wyników. Metoda przesiewania wyników działa na zasadzie wspomagania procesu decyzji. Zdefiniowane n parametrów decyzyjnych, m parametrów wyjściowych oraz ich indywidualne cele zostały połączone w pojedynczą ważoną funkcję celu Φ . Funkcja celu Φ była próbkowana metodą Monte Carlo z wykorzystaniem jednorodnego rozkładu prawdopodobieństwa. Następnie otrzymane wyniki były kolejno przesiewane, czyli sprawdzane na ile spełniają przyjętą funkcję celu oraz zdefiniowane ograniczenia i następnie pozostawiane te które spełniają je w największym stopniu.

Funkcja celu Φ została przyjęta w postaci

$$\Phi = \sum_{j=1}^m w_j M_j \quad (3.21)$$

Poszczególne wagi w_j zostały przyjęte jako

$$w_j = 1 \quad (3.22)$$

Znormalizowane cząstkowe cele zostały zdefiniowane jako

$$M_j = \left(\frac{|y_t^* - y|}{y_{max} - y_{min}} \right)_j \quad (3.23)$$

gdzie y_t^* to j -te zamierzone wartości parametrów wyjściowych w układzie, y to j -te wyznaczone w doświadczeniu numerycznym wartości parametrów wyjściowych, y_{max} , y_{min} – odpowiednio maksymalna i minimalna wartość jaką przyjmuje y . Zamierzonymi parametrami wyjściowymi mogą być zarówno częstotliwości drgań własnych jak i proporcje pomiędzy poszczególnymi parami częstotliwości.

W przypadku poszukiwania minimum funkcji celu zdefiniowanej w przestrzeni wielowymiarowej zazwyczaj nie istnieje pojedynczy punkt (rozwiązanie idealne najlepiej spełniające wszystkie cele). Zamiast pojedynczego, najlep-

szego rozwiązania otrzymywany jest zbiór rozwiązań niezdominowanych nazywany zbiorem rozwiązań Pareto-optimalnych lub rozwiązań optymalnych w sensie Pareto. Został on zdefiniowany przez Vilfredo Pareto w 1896 roku. Poszukiwane jest minimum składowych funkcji celu $\Phi_i(x)$

$$\min_{x \in X} \Phi_i(x) = \Phi_i^* \quad (3.24)$$

gdzie Φ_i^* jest minimum i -tej składowej funkcji celu, x - zmienna decyzyjna, X - zbiór wartości możliwych do przyjęcia przez x . Funkcja Φ^* ma postać

$$\Phi^* = (\Phi_1^*, \dots, \Phi_k^*) \quad (3.25)$$

Wektor $x^* \in X$ jest rozwiązaniem optymalnym w sensie Pareto jeżeli nie istnieje inny wektor $x \in X$ taki, że dla wszystkich $i = 1, \dots, k$ spełniona jest zależność

$$\Phi_i(x) \leq \Phi_i(x^*) \quad (3.26)$$

oraz przynajmniej dla jednego $i \in \{1, \dots, k\}$

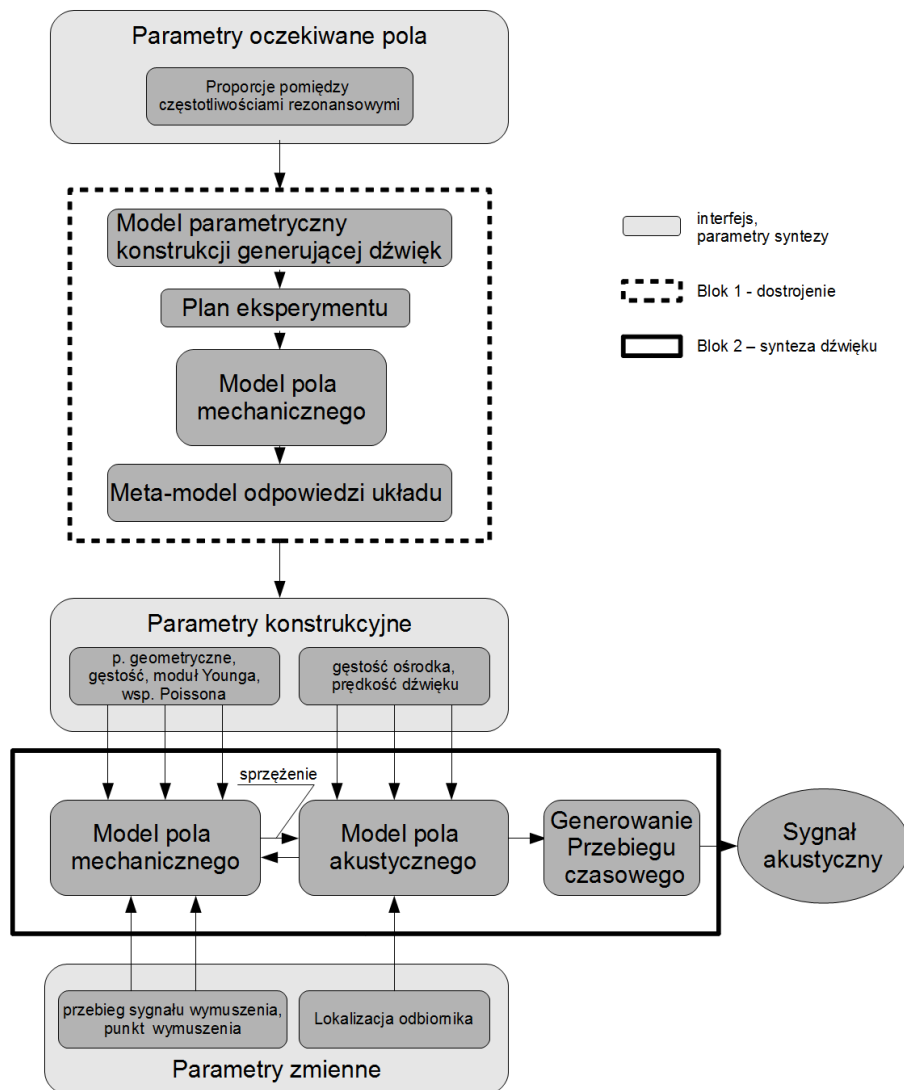
$$\Phi_i(x) < \Phi_i(x^*) \quad (3.27)$$

Definicja ta bazuje na intuicyjnym stwierdzeniu, że punkt x^* jest uznany jako optymalny pod warunkiem, że żadne z kryteriów nie może zostać poprawione bez pogorszenia przynajmniej jednego z pozostałych kryteriów. Stąd też nie jest otrzymywane jedno optymalne rozwiązanie natomiast jest tworzony zbiór rozwiązań zawierający parametry konstrukcyjne, które muszą zostać przyjęte aby otrzymać zamierzone proporcje pomiędzy częstotliwościami składowymi widma generowanego dźwięku.

Otrzymany w ten sposób model zawęża przedział parametrów wpływających na brzmienie instrumentu i umożliwia przeprowadzenie mniejszej ilości próbnych odsłuchów tak aby uzyskać brzmienie zamierzone podczas etapu komponowania utworu muzycznego. Co więcej przedziały jakie przyjmują parametry pozwalają na rozpoznanie instrumentu przez słuchacza i nie jest możliwe aby przykładowo misa tybetańska zabrzmiała jak dzwon.

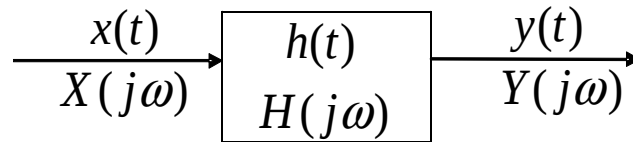
3.3. Syntezator numeryczny

Narzędzie przy pomocy którego przeprowadzona zostanie synteza pola akustycznego zostało nazwane syntezatorem numerycznym. Algorytm opisujący zastosowany w nim proces syntezy dźwięku stanowi oryginalne osiągnięcie autora pracy. Jako parametry decyzyjne definiowane na wejściu syntezatora są są oczekiwane parametry pola akustycznego. Na jego wyjściu otrzymywany jest dźwięk wygenerowany w określonym punkcie pola akustycznego. Schemat blokowy projektowanego syntezatora przedstawia rysunek 3.6.



Rysunek 3.6: Schemat blokowy syntezatora

Otrzymany syntezaator numeryczny składa się z dwu głównych bloków. Zadaniem pierwszego bloku jest wyznaczenie parametrów konstrukcji generującej dźwięk, które pozwalają uzyskać jego oczekiwane parametry akustyczne. Zgodnie z rozdziałem 3.1, są nimi częstotliwości składowe widma generowanego dźwięku oraz odpowiednie proporcje pomiędzy nimi. Na podstawie metody planowania eksperymentu przeprowadzany jest eksperyment numeryczny pozwalający na wyznaczenie meta-modelu układu zawierającego wpływ parametrów konstrukcyjnych na częstotliwości składowe sygnału akustycznego. Umożliwia on wprowadzenie ograniczeń związanych z oczekiwanymi proporcjami pomiędzy częstotliwościami oraz wybór parametrów decyzyjnych pozwalających na ich spełnienie. Drugi blok ma na celu syntezę dźwięku w wybranych punktach pola. Budowany jest w tym celu, przy pomocy MES (rozdział 2.2), model opisujący pole mechaniczne, pole akustyczne oraz uwzględniający sprzężenie pomiędzy nimi. Po wprowadzeniu warunków brzegowych wyznaczana jest odpowiedź układu w stanie ustalonym na wymuszenie harmoniczne. Następnie na podstawie wyznaczonych charakterystyk układu generowany jest sygnał akustyczny w punkcie odbioru. Generowanie sygnału przebiega przy założeniu, że badany układ (rysunek 3.7) jest liniowy o parametrach niezmiennych w czasie. Stąd też można posługiwać się przy jego opisie pojęciem odpowiedzi impulsowej. Uznaje się, że odpowiedź impulsowa takiego układu jednoznacznie go opisuje.

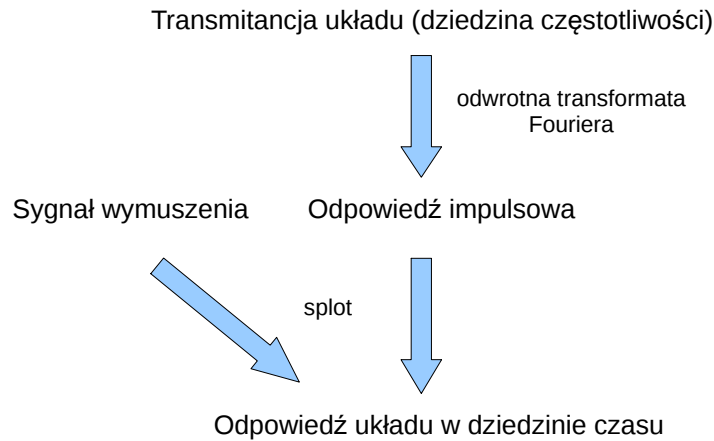


Rysunek 3.7: Rozpatrywany układ liniowy o parametrach niezmiennych w czasie, gdzie: $x(t)$ – sygnał wejściowy, $y(t)$ – sygnał na wyjściu układu, $h(t)$ – odpowiedź impulsowa układu, $X(j\omega)$, $Y(j\omega)$ – transformaty Fouriera, odpowiednio sygnału wejściowego i wyjściowego, $H(j\omega)$ – transmitancja widmowa układu

Odwrotna transformata Fouriera transmitancji układu, którą przybliża charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa oraz fazowo-częstotliwościowa, pozwala na wyznaczenie odpowiedzi impulsowej układu.

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.28)$$

Odpowiedź impulsową układu zdefiniowana jest jako sygnał pojawiający się na wyjściu układu jeżeli na jego wejście podana zostaje delta Diraca.



Rysunek 3.8: Schemat wyznaczenia odpowiedzi układu w dziedzinie czasu

Znając odpowiedź impulsową wyznacza się odpowiedź układu na dowolne wymuszenie poprzez splot

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (3.29)$$

gdzie: $y(t)$ – sygnał na wyjściu układu, $x(t)$ – sygnał wejściowy, $h(t)$ – odpowiedź impulsowa układu. Dla nieskończonego przedziału czasu zależność (3.29) zapisuje się jako

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (3.30)$$

Zgodnie z własnościami splotu dwu funkcji oraz ponieważ przekształcenie Fouriera jest szczególnym przypadkiem przekształcenia Laplace’a zachodzi także zależność

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) \quad (3.31)$$

gdzie: $Y(j\omega)$, $X(j\omega)$ to transformaty Fouriera, odpowiednio sygnału wyjściowego i wejściowego, $H(j\omega)$ – transmitancja widmowa układu. Wyznaczenie odpowiedzi układu na dowolny sygnał poprzez splot sygnału z odpowiedzią impulsową (3.29) można przeprowadzić w sposób bardziej wydajny obliczeniowo poprzez mnożenie tych dwu sygnałów w dziedzinie częstotliwości (3.31).

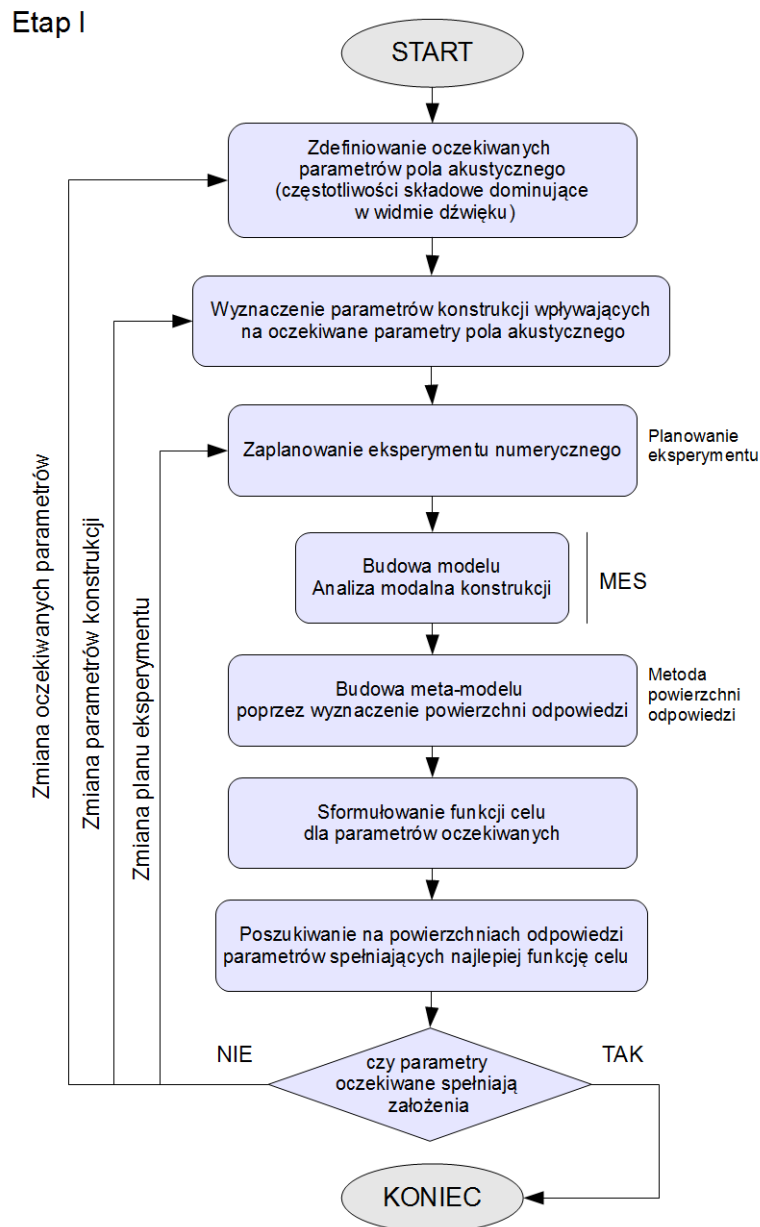
Otrzymana odpowiedź układu jest wyznaczana w punktach znajdujących się na sferze otaczającej źródło dźwięku, którego drgania wymuszone są siłą o charakterze impulsowym. Stąd zmienna wejściowa w układzie jest jedna oraz stanowi ją sygnał zawierający wartość siły wymuszającej drgania $x(t) = F(t)[N]$. Liczba zmiennych wejściowych jest równa liczbie k punktów w których ma zostać wygenerowany dźwięk oraz opisują one ciśnienie akustyczne $y(t) = p(t)[Pa]$. Stąd ostatecznie tworzony jest wektor $P(t) = [p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t)]$ w którym poszczególne elementy wyznaczone są z zależności

$$p_i(t) = F(t) * h_i(t) \quad (3.32)$$

gdzie h_i to odpowiedź impulsowa dla i -tego punktu odbioru.

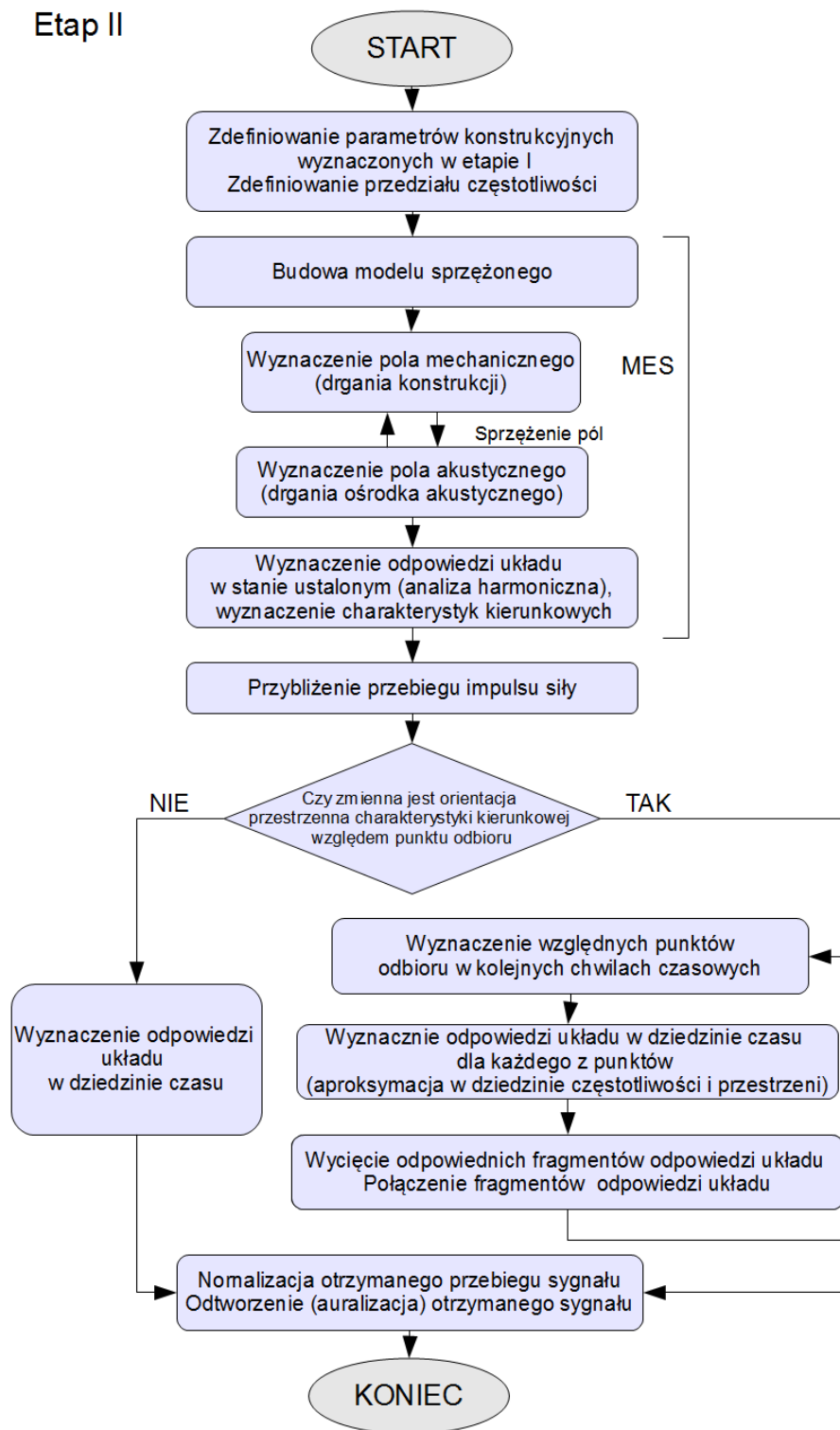
W stworzonym algorytmie procedura postępowania podzielona została na dwa etapy. Etap pierwszy, przedstawiony na rysunku 3.9, ma na celu wyznaczenie parametrów konstrukcji generującej dźwięk, które pozwalają uzyskać oczekiwane jego parametry akustyczne. Najpierw należy w nim założyć wartości oczekiwanych częstotliwości drgań własnych badanej konstrukcji lub oczekiwane proporcje pomiędzy nimi. Następnie należy określić przedziały w jakich mogą znajdować się wartości parametrów geometrycznych lub materiałowych na nie wpływających. Przy pomocy metody planowania eksperymentu należy stworzyć plan doświadczenia cyfrowego. Dla parametrów konstrukcyjnych zawartych w planie należy zbudować model (przy pomocy MES) opisujący pole mechaniczne rozpatrywanego układu wibroakustycznego oraz zdefiniować jego warunki brzegowe. Dla każdego z zaplanowanych doświadczeń należy wyznaczyć wartości parametrów wyjściowych modelu poprzez rozwiązanie zagadnienia drgań własnych konstrukcji. Parametry wyjściowe układu należy aproksymować przy pomocy wybranych powierzchni odpowiedzi co pozwala na otrzymanie meta-modelu układu. Następnie na powierzchniach odpowiedzi należy odnaleźć punkt dla którego spełnione są oczekiwane parametry odpowiedzi układu i odczytać wartości jakie przyjmują parametry konstrukcyjne. Stanowią one dane wejściowe do etapu drugiego procedury. W etapie drugim (3.10) mającym na celu syntezę sygnału akustycznego w wybranych punktach pola akustycznego, należy zbudować pełny model (także przy pomocy MES), który opisuje pole mechaniczne, pole akustyczne oraz uwzględnia sprzężenie pomiędzy nimi. Następnie należy wyznaczyć współrzędne punktów w których wygenerowana ma zostać odpowiedź akustyczna. Następnie należy założyć w układzie wymuszenie będące siłą której jednostkowa wartość przyjmuje prze-

bieg harmoniczny o częstotliwości zmieniającej się w rozpatrywanym przedziale oraz wyznaczyć odpowiedź układu w stanie ustalonym. Na jej podstawie należy wyznaczyć odpowiedź impulsową układu poprzez odwrotną transformatę Fouriera oraz wyznaczyć sygnał wyjściowy układu poprzez jej splot z sygnałem impulsowym wymuszenia. W przypadku uwzględnienia zmian orientacji przestrzennej źródła dźwięku konieczna jest także aproksymacja odpowiedzi układu w przestrzeni.



Rysunek 3.9: Algorytm syntezy numerycznego - etap I procedury

Etap II



Rysunek 3.10: Algorytm syntezy numerycznej - etap II procedury

4. Synteza pola wibroakustycznego dla wybranych układów o wymuszeniu impulsowym - mis tybetańskich

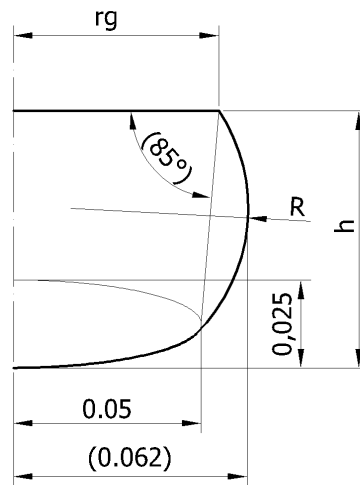
Misy tybetańskie nazywane także „śpiewającymi misami” (ang. *singing bowls*) są w sposób tradycyjny wytwarzane w Tybecie oraz wielu innych krajach azjatyckich takich jak Nepal, Mongolia, Indie, Chinach lub Japonia. Pochodzenie historyczne mis nie jest dokładnie poznane, natomiast służyły one oraz służą po dzień dzisiejszy do celów medytacji, leczniczych, religijnych rytuałów konfucjańskich lub buddyjskich oraz do tworzenia muzyki. W zachodniej kulturze misy tybetańskie znajdują zastosowanie coraz częściej w muzyce współczesnej. Można je zaklasyfikować do grupy instrumentów muzycznych nazywanej idiofonami [28]. Misy tybetańskie są wytwarzane ręcznie ze stopu metali, który zawiera przede wszystkim miedź oraz cynę oraz dodatki takie jak złoto, srebro, żelazo, ołów i inne. Misy produkowane są w różnorodnych kształtach i rozmiarach oraz co z tym się wiąże w ich dźwięku występują różnorodne częstotliwości składowe. Łączy je wspólna cecha jaką są dwa sposoby wymuszenia ich drgań. Do tego celu wykorzystuje się trzymany w ręce drewniany walec nazywany „puja”, który czasem dodatkowo obity jest miękką skórą. Pierwszy ze sposobów wydobywania dźwięku z misy polega na uderzeniu walcem w krawędź lub powierzchnię boczną misy, a uzyskany w ten sposób dźwięk ma charakter impulsowy. Natomiast drugi – na przesuwaniu walca po obwodzie misy, co w związku z tarciem skutkuje powstaniem siły obwodowej wymuszającej drgania oraz ciągły, „śpiewający” dźwięk. Badania dynamiczne wybranych mis przy obydwu sposobach wymuszenia zostały przeprowadzone w [35]. Do tego celu została wykorzystana metoda superpozycji modalnej. Wymuszenie o charakterze impulsowym w układzie zależało od prędkości początkowej zderzenia na kierunku promieniowym, natomiast wymuszenie ciągłe od prędkości obwodowej przesuwanego walca oraz siły nacisku. Równania ruchu zostały rozwiązane przy pomocy metody jawnej Velocity-Verleta. Sygnał wygenerowany na wyjściu modelu stanowiły przemieszczenia osiowe oraz promieniowe. Sygnał ten został następnie zapisany i odtworzony jako próbki

„dźwięku” misy przy różnych parametrach wymuszenia. Brakuje w przyjętym przez autorów modelu uwzględnienia sprzężenia drgań konstrukcji z polem akustycznym. Warto zauważyć, że dostrojenie parametrów modelu modalnego zostało przeprowadzone na podstawie pomiarów akustycznych. Kolejne proporcje pomiędzy początkowymi pięcioma częstotliwościami składowymi widma dźwięku a pierwszą częstotliwością zawierały się w przedziałach 2,7 - 2,9, 4,8 - 5,7, 7,5 - 9,1, 10,6-13,1.

4.1. Model numeryczny obiektu badań

Zbadane zostały dwa odmienne kształty mis tybetańskich, które posiadały zbliżoną średnicę na wysokości 0,012 [m]. Pierwszym obiektem badań była misa o szeroko rozpowszechnionym kształcie (rysunek 4.1) oraz o wysokości 0,07 [m], średnicy otworu 0,11 [m], maksymalna średnicy około 0,13 [m] oraz grubość ścianki około 0,002 [m]. Masa badanej misy wynosiła 0,53 [kg].

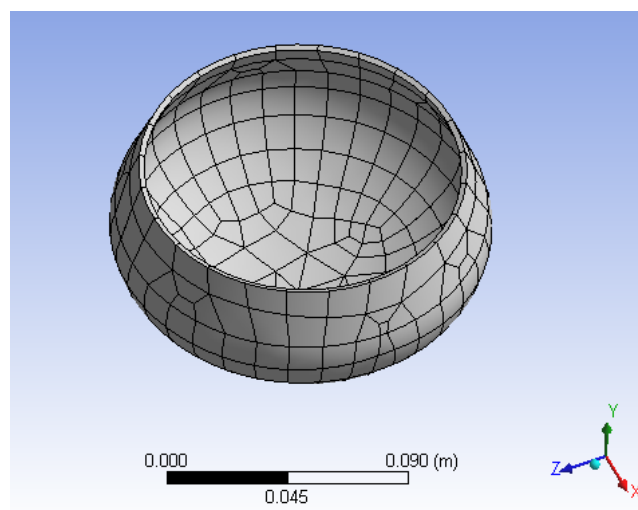
Model cyfrowy został zbudowany przy zastosowaniu MES w pakiecie obliczeniowym ANSYS. Kształt misy został zdefiniowany przy pomocy modułu pozwalającego na modelowanie bryłowe lub powierzchniowe interfejsu ANSYS Workbench. Założony został materiał o parametrach brązy cynowego: gęstości – $8600 [kg \cdot m^{-3}]$, module Younga – $10,5 \cdot 10^{11} [Pa]$, współczynnika Poissona – 0,34. Kształt powierzchni misy (4.1) został zdefiniowany poprzez obrót względem osi profilu liniowego. Profil ten składa się z dwu krzywych połączonych ze sobą warunkiem styczności. Pierwsza z krzywych definiuje podstawę misy oraz jest wycinkiem elipsy o poziomej wielkiej osi o długości 0,1 [m] oraz małej osi 0,025 [m]. Druga krzywa definiuje ściankę boczną misy oraz została przyjęta jako wycinek okręgu o promieniu $R [m]$. Przy pomocy kolejnych parametrów została zdefiniowana krawędź misy i były to $rg [m]$ – promień krawędzi, $h [m]$ – wysokość misy. Następnie przeprowadzona została dyskretyzacja otrzymanej powierzchni przy pomocy elementów powłokowych Shell281 o stałej grubości $g [m]$. Wielkość elementów została dobrana w procesie iteracyjnym polegającym na określeniu zmian częstotliwości drgań własnych wraz ze zmniejszaniem wielkości elementu. Po zaobserwowaniu zależności, że kolejny wynik różni się od poprzedniego o mniej niż 1% dalsza zbieżność rozwiązania nie była już sprawdzana. Przyjęta ilość elementów została uznana jako wystarczająca. Stanowi ona dobry kompromis pomiędzy uzyskaną dokładnością oraz koniecznymi do poniesienia nakładami obliczeniowymi.



Rysunek 4.1: Profil definiujący kształt misy opisany przy pomocy parametrów: R – promień ścianki bocznej, rg – promień krawędzi misy, h – wysokość misy

Tablica 4.1: Parametry geometryczne

Parametr	h [m]	R [m]	rg [m]	g [m]
Misa 1	0.070	0.045	0.055	0.0011
Misa 2	0.075	0.300	0.067	0.0023

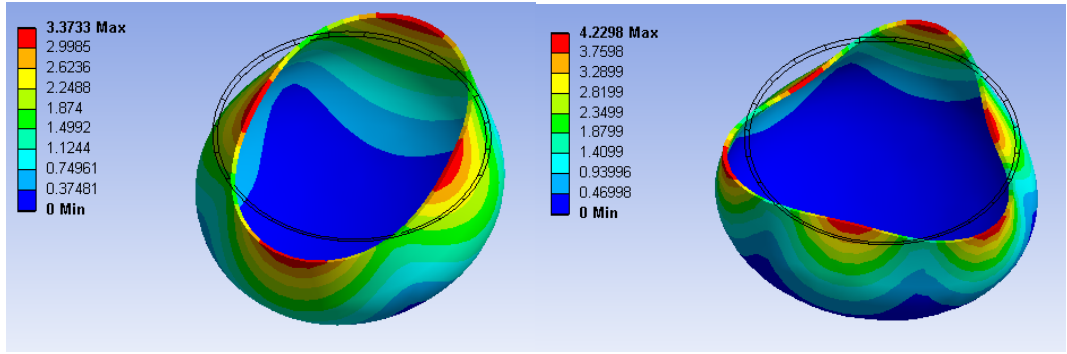


Rysunek 4.2: Kształt misy tybetańskiej zdyskretyzowany poprzez nałożenie siatki elementów skończonych

W celu wyznaczenia częstotliwości oraz postaci drgań własnych misy zostało rozwiązane zagadnienie własne układu równań (2.27) wyznaczonego przy zastosowaniu MES zawierającego globalne macierze bezwładności $\mathbf{M}$, sprężystości $\mathbf{K}$ oraz wektor przemieszczeń $\mathbf{u}$

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{u} = 0 \quad (4.1)$$

Wyznaczone zostało pierwsze pięć postaci drgań własnych. Podczas analizy modalnej pominięte zostały warunki brzegowe utwierdzenia - bryła została uznana jako swobodna oraz odrzucone pierwsze sześć postaci drgań własnych bliskich zeru. Pominięte zostało także tłumienie występujące w układzie. Warto zauważyć, że przyjęte uproszczenia nie wpływają w istotny sposób na wynik, ponieważ na powierzchni kontaktu misy z podłożem amplituda drgań jest pomijalnie mała oraz niewielkie tłumienie występujące w układzie powoduje pomijalnie małe przesunięcie częstotliwości rezonansowych względem częstotliwości drgań własnych nie uwzględniających tłumienia.



Rysunek 4.3: Pierwsza (2,0) i druga (3,0) postać drgań własnych misy

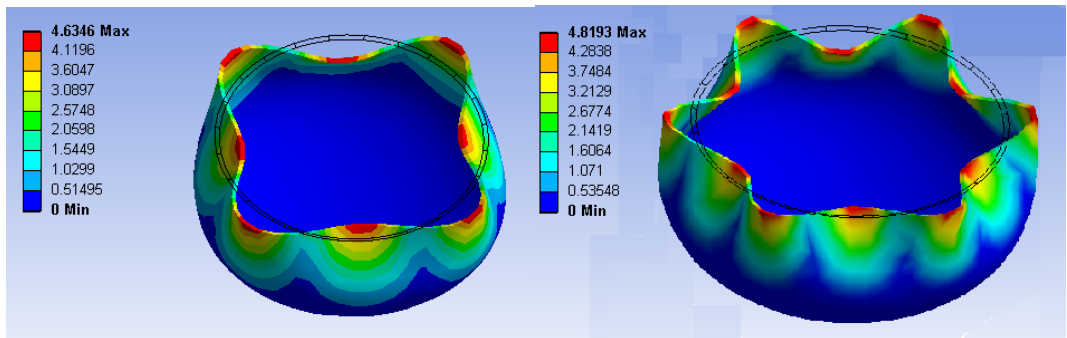


Figure 4.4: Trzecia (4,0) i czwarta (5,0) postać drgań własnych misy

Pierwsze cztery postacie drgań własnych misy (rysunek 4.3 - 4.4) przypominają postacie drgań własnych dla konstrukcji powierzchniowych o pierście-

niowym kształcie. W rozpatrywanym przedziale częstotliwości nie występują postaci drgań z obwodowymi liniami węzłowymi. Częstotliwości drgań własnych zebrane zostały w tablicy 4.2 oraz posłużyły do doświadczalnej weryfikacji modelu numerycznego.

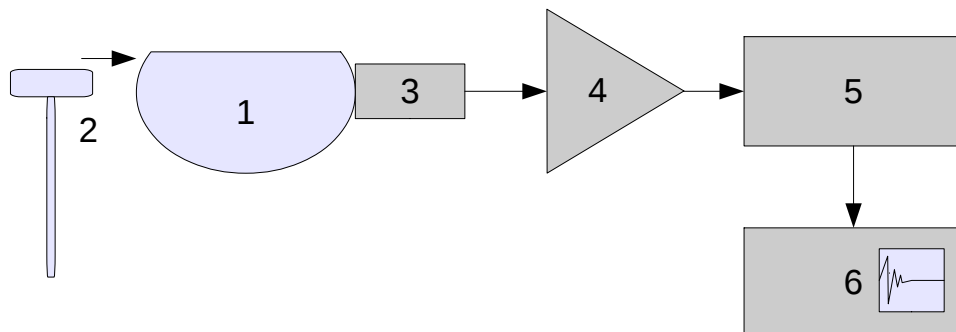
4.2. Weryfikacja modelu numerycznego

Przeprowadzone zostało doświadczalne wyznaczenie częstotliwości rezonansowych. Zbudowane zostało w tym celu stanowisko badawcze (rysunek 4.5). Obiektem badań była misa (1) na której powierzchni został zamocowany akcelerometr (3) PCB Piezotronics 352B10 połączonego poprzez kondycjoner sygnału (4) PA-3000 do wejścia karty pomiarowej (5) National Instruments NI USB-6351. Sterowanie akwizycją sygnału oraz późniejsza analiza sygnału przeprowadzona została na komputerze (6) w środowisku MATLAB. Układ wprowadzony został w drgania poprzez wymuszenie (2) o charakterze impulsowym - uderzenie puja. Następnie zarejestrowany sygnał poddany został analizie poprzez zastosowanie krótko-czasowej transformaty Fouriera. Rysunek 4.7 przedstawia zarejestrowany sygnał oraz jego krótko-czasową transformatę Fouriera dla obu badanych mis.

$$STFT\{x(t)\} \equiv X(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-j\omega t}dt \quad (4.2)$$

gdzie w oznacza funkcję zastosowanego okna czasowego.

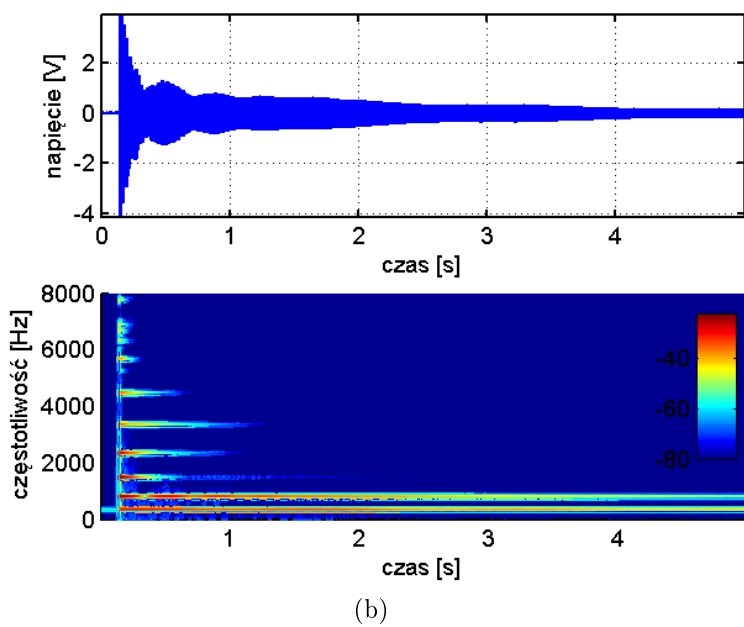
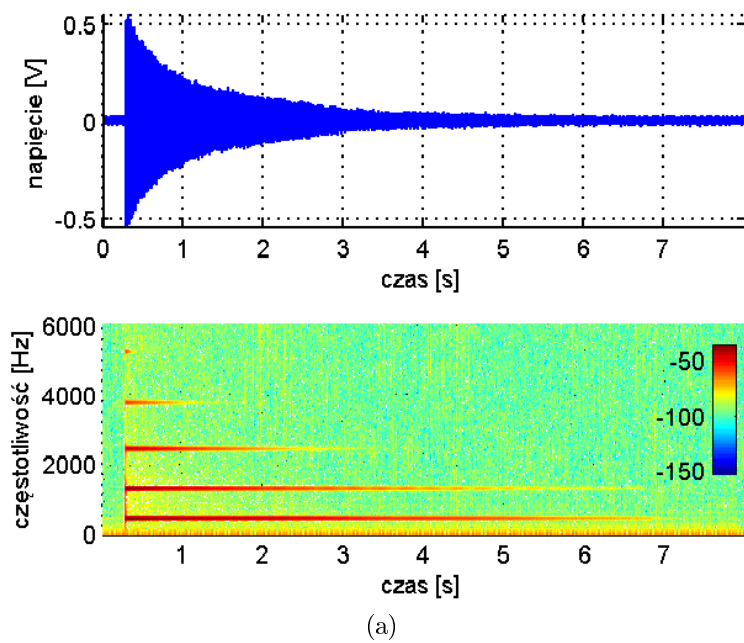
Wyraźnie widoczne są występujące w odpowiedzi układu częstotliwości rezonansowe, z których pierwsze pięć zebrane zostało w tablicy 4.2.



Rysunek 4.5: Schemat stanowiska badawczego: 1 – badana misa, 2 - wymuszenie, 3 - akcelerometr, 4 - kondycjoner sygnału, 5 - karta pomiarowa, 6 - komputer



Rysunek 4.6: Stanowisko badawcze



Rysunek 4.7: Zarejestrowany sygnał napięciowy oraz jego krótko-czasowa transformata Fouriera dla misy 1 (a), dla misy 2 (b)

Tablica 4.2: Porównanie częstotliwości rezonansowych wyznaczonych doświadczalnie oraz wyznaczonych w przyjętym modelu numerycznym

	Misa 1 – częstotliwość [Hz]				
pomiar	472,00	1329,00	2448,00	3738,00	5165,00
model	480,43	1330,20	2416,81	3678,61	5094,32
różnica [%]	-1,79	-0,09	1,27	1,59	1,37
	Misa 2 – częstotliwość [Hz]				
pomiar	334,00	806,00	1488,00	2352,00	3356,00
model	321,10	811,04	1480,68	2328,89	3351,12
różnica [%]	-3,86	0,63	-0,49	-0,98	-0,15

Porównanie wyników otrzymanych w doświadczeniu z wynikami modelu numerycznego znajduje się w tablicy 4.2. Różnice względne pomiędzy poszczególnymi częstotliwościami największe są dla pierwszej częstotliwości drgań własnych i nie przekraczają 4%. Stąd można wyciągnąć wniosek, że model numeryczny został zbudowany poprawnie.

4.3. Dobór parametrów misy

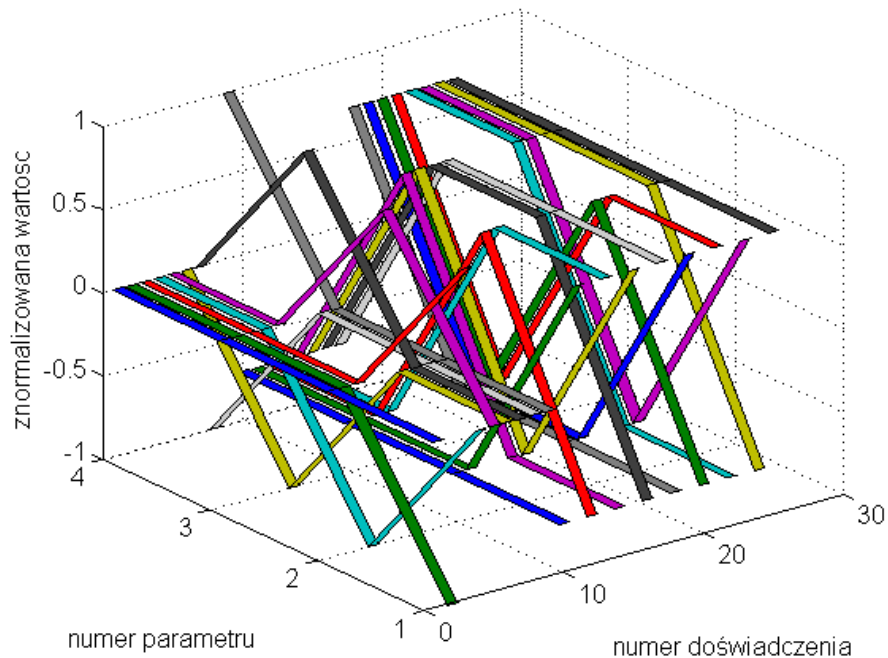
W celu dobrania parametrów konstrukcyjnych misy tak aby generowany przez nią dźwięk cechowały lepsze parametry niż dźwięk otrzymany z dotychczasowej konstrukcji zastosowana została procedura opisana w rozdziale 3.3. Zaplanowany został eksperyment numeryczny zgodnie z metodą opisaną w rozdziale 3.2. Zastosowany został plan centralny kompozycyjny, który jest oparty na planie dwupoziomowym całkowitym uzupełnionym doświadczeniami gwiazdnymi a oraz doświadczeniami centralnymi, realizowanymi w środku planu. Wielkość a została dobrana tak by spełnić warunek rotalności dla $k=4$ czynników

$$a = (2^k)^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2 \quad (4.3)$$

oraz następnie cały plan został przeskalowany tak aby wszystkie czynniki mieściły się w przedziale $[-1, 1]$.

Łączna liczba układów planu eksperymentu w zastosowanym planie doświadczenia wynosiła 27. Rysunek 4.9 przedstawia zastosowany plan centralny kompozycyjny dla czterech zmiennych decyzyjnych: 1 - wysokości h , 2 - promienia R , 3 - promienia rg , 4 - grubości g . Widoczne na nim jest przykładowo, że dla pierwszego planu doświadczenia wyznaczony jest punkt centralny, dla parametrów przyjmujących wartości średnie ze zdefiniowanych przedziałów. Następnie w planie drugim parametr h przyjmuje wartość dolnej granicy prze-

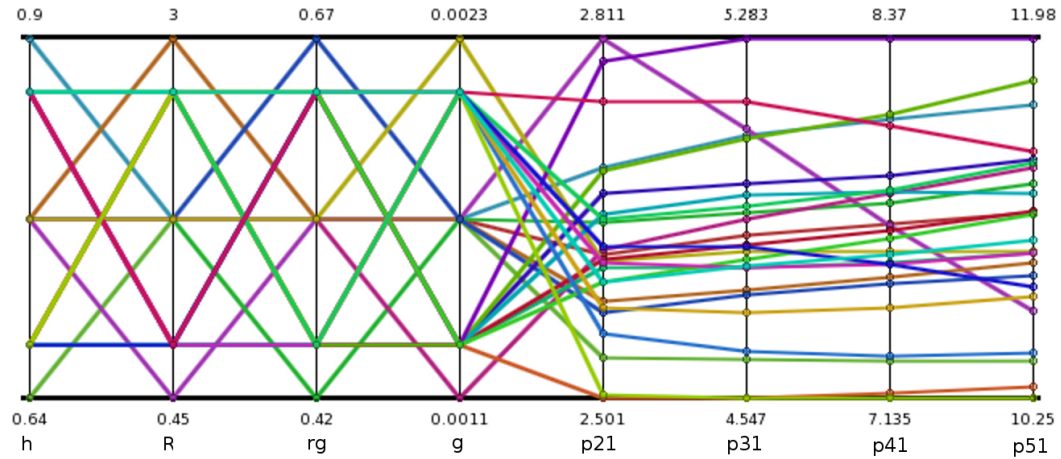
działu oraz analogicznie w planie 3, 4, 5 – parametry R , rg , i g . Na rysunku 4.8 umieszczone zostały także wartości graniczne jakie zostały założone dla poszczególnych parametrów. Wartości parametrów przyjmowane do przeprowadzenia kolejnych doświadczeń numerycznych zebrane zostały w tablicy 4.3. Jako parametry wyjściowe w modelu zostały przyjęte proporcje pomiędzy drugą, trzecią, czwartą i piątą częstotliwością drgań własnych i pierwszą częstotliwością nazwane odpowiednio $p21$, $p31$, $p41$, $p51$.



Rysunek 4.8: Plan doświadczenia - znormalizowane wartości parametrów decyzyjnych

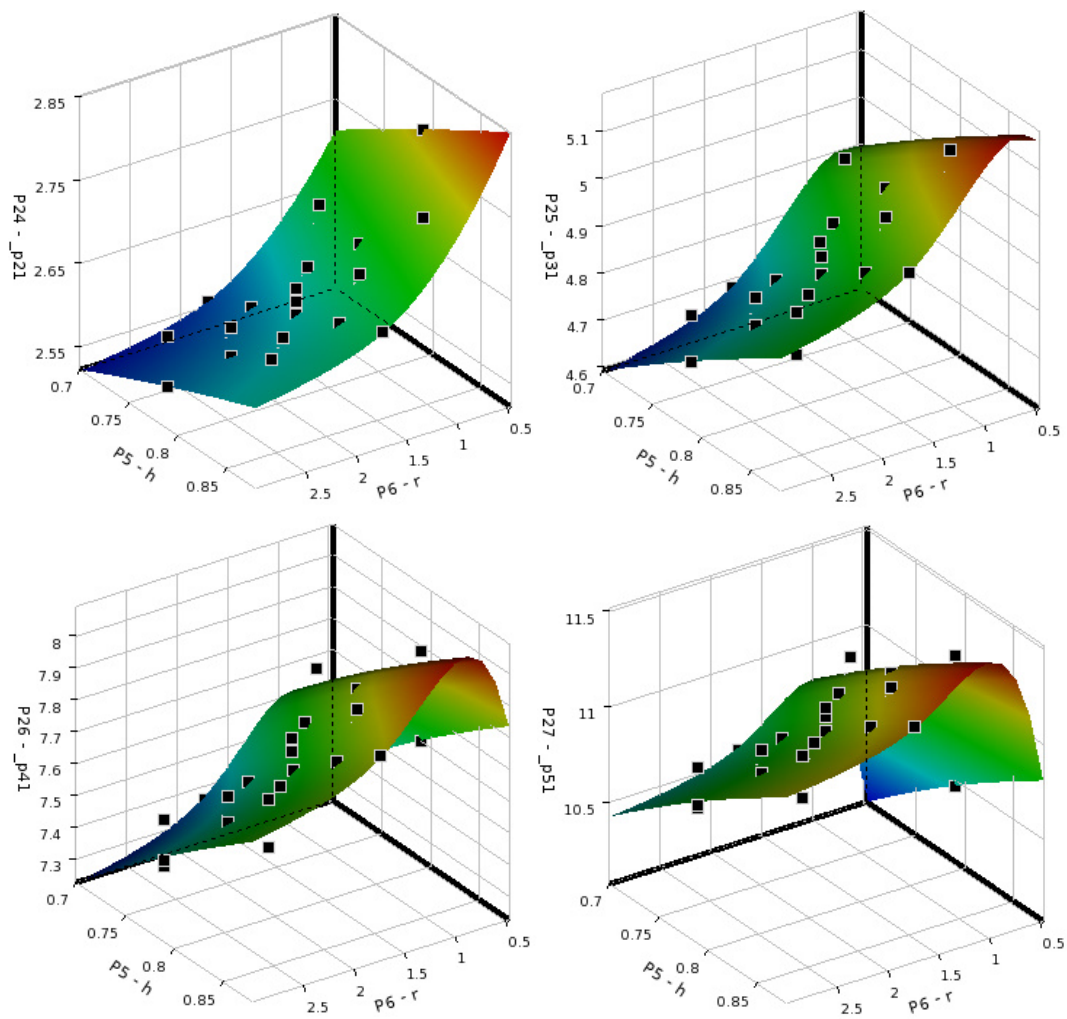
Tablica 4.3: Zastosowany plan eksperymentu oraz wyniki obliczeń

	założone parametry decyzyjne				częstotliwości					otrzymane proporcje			
	h [m]	r [m]	rg [m]	g [mm]	f1 [Hz]	f2 [Hz]	f3 [Hz]	f4 [Hz]	f5 [Hz]	p21	p31	p41	p51
1	0,77	1,73	0,55	1,70	319,14	837,72	1557,97	2468,85	3555,32	2,62	4,88	7,74	11,14
2	0,64	1,73	0,55	1,70	347,50	881,10	1607,63	2525,26	3624,85	2,54	4,63	7,27	10,43
3	0,90	1,73	0,55	1,70	300,38	810,84	1527,08	2430,80	3502,81	2,70	5,08	8,09	11,66
4	0,77	0,45	0,55	1,70	412,41	1159,17	2101,86	3187,90	4401,87	2,81	5,10	7,73	10,67
5	0,77	3	0,55	1,70	321,15	829,85	1531,33	2424,19	3502,91	2,58	4,77	7,55	10,91
6	0,77	1,73	0,42	1,70	423,02	1122,17	2083,70	3302,16	4771,55	2,65	4,93	7,81	11,28
7	0,77	1,73	0,67	1,70	232,65	599,13	1107,30	1751,36	2522,23	2,58	4,76	7,53	10,84
8	0,77	1,73	0,55	1,10	207,75	546,11	1020,56	1628,03	2360,12	2,63	4,91	7,84	11,36
9	0,77	1,73	0,55	2,30	429,43	1124,70	2081,56	3280,61	4704,54	2,62	4,85	7,64	10,96
10	0,68	0,83	0,46	1,28	306,73	801,57	1476,78	2330,82	3358,52	2,61	4,81	7,60	10,95
11	0,86	0,83	0,46	1,28	265,88	711,93	1325,24	2100,30	3031,15	2,68	4,98	7,90	11,40
12	0,68	2,62	0,46	1,28	313,73	821,92	1524,64	2418,89	3499,12	2,62	4,86	7,71	11,15
13	0,86	2,62	0,46	1,28	282,28	761,25	1432,82	2289,29	3323,24	2,70	5,08	8,11	11,77
14	0,68	0,83	0,63	1,28	207,98	552,94	1032,28	1631,32	2336,46	2,66	4,96	7,84	11,23
15	0,86	0,83	0,63	1,28	193,93	541,11	1024,47	1623,28	2323,25	2,79	5,28	8,37	11,98
16	0,68	2,62	0,63	1,28	204,24	510,76	928,75	1460,99	2106,04	2,50	4,55	7,15	10,31
17	0,86	2,62	0,63	1,28	184,07	478,76	889,29	1414,48	2050,22	2,60	4,83	7,68	11,14
18	0,68	0,83	0,46	2,12	484,70	1238,93	2250,35	3529,65	5077,57	2,56	4,64	7,28	10,48
19	0,86	0,83	0,46	2,12	419,16	1097,37	2017,58	3182,80	4591,70	2,62	4,81	7,59	10,95
20	0,68	2,62	0,46	2,12	502,82	1296,87	2374,60	3743,02	5402,37	2,58	4,72	7,44	10,74
21	0,86	2,62	0,46	2,12	454,90	1207,88	2246,65	3570,42	5176,79	2,66	4,94	7,85	11,38
22	0,68	0,83	0,63	2,12	340,25	895,54	1653,07	2584,97	3670,27	2,63	4,86	7,60	10,79
23	0,86	0,83	0,63	2,12	316,56	872,48	1630,97	2554,50	3620,44	2,76	5,15	8,07	11,44
24	0,68	2,62	0,63	2,12	336,79	843,36	1531,76	2402,99	3453,40	2,50	4,55	7,13	10,25
25	0,86	2,62	0,63	2,12	304,21	791,21	1465,64	2321,48	3351,27	2,60	4,82	7,63	11,02

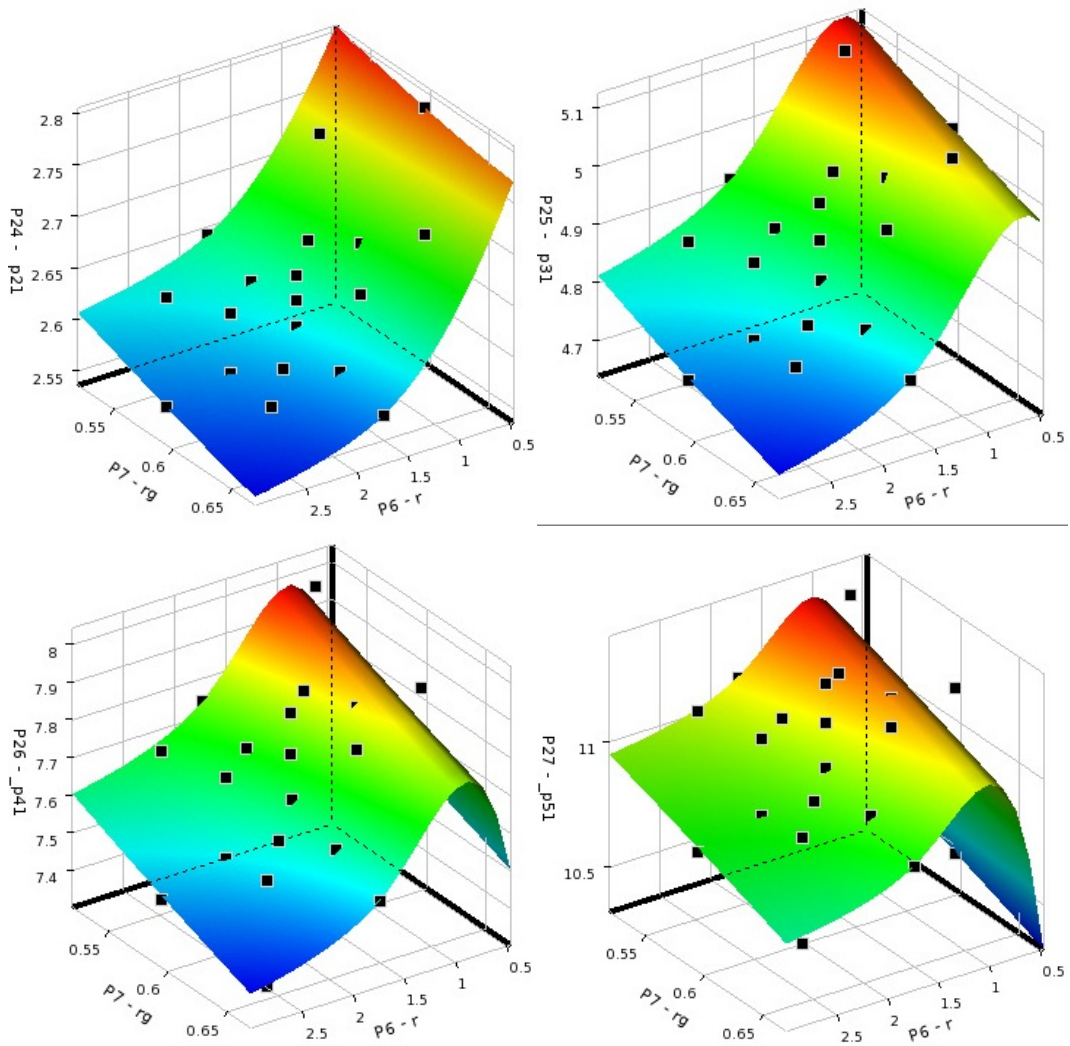


Rysunek 4.9: Plan doświadczenia (z lewej) dla parametrów decyzyjnych ułożonych równolegle, wyniki doświadczenia (z prawej)

Odpowiedzi układu zostały transformowane przy pomocy transformaty Yeo-Johnsona oraz aproksymowane przy pomocy hiperpowierzchni odpowiedzi opisanej równaniem (3.12). Dopasowanie funkcji aproksymującej zrealizowane zostało przy pomocy metody najmniejszych kwadratów [42].



Rysunek 4.10: Powierzchnie odpowiedzi dla parametrów p_{21} , p_{31} , p_{41} , p_{51} w zależności od h i r

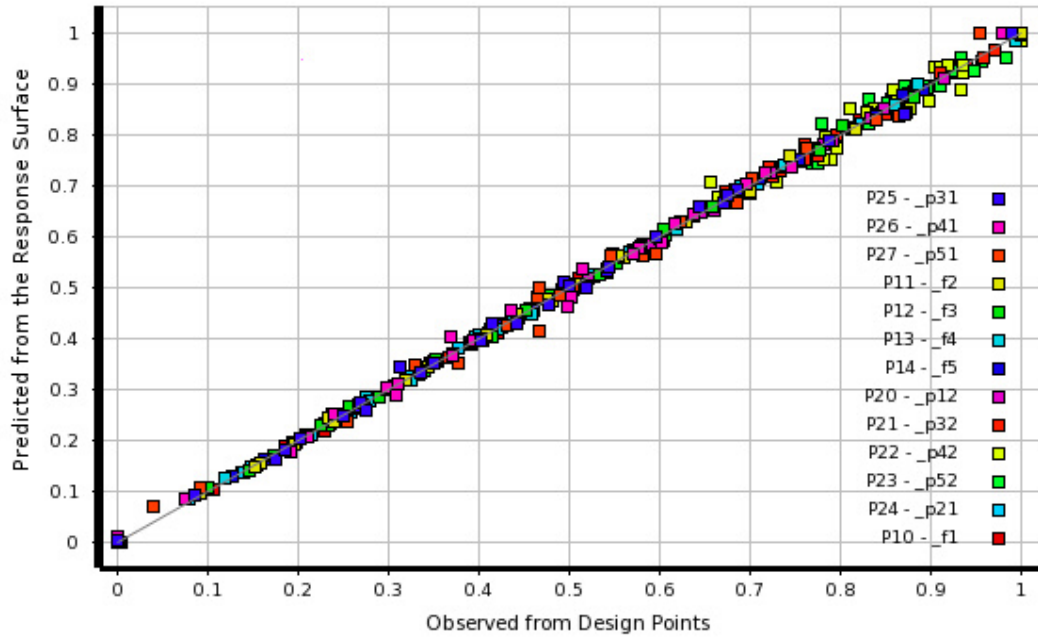


Rysunek 4.11: Powierzchnie odpowiedzi dla parametrów p21, p31, p41, p51 w zależności od rg i r

Kryterium dopasowania powierzchni R^2 wyznaczone zostało na podstawie zależności

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (4.4)$$

w której $n = 25$ to liczba doświadczeń, y – wartość uzyskana w doświadczeniu, $\hat{y}$ – wartość aproksymowana, $\bar{y}$ – wartość średnia parametru p21, p31, p41, p51. Dla każdego z tych parametrów R^2 wynosiło powyżej 0,98 co oznacza, że poprawnie został przyjęty meta-model matematyczny wykorzystany do opisu obiektu badań. Rysunek 4.12 przedstawia znormalizowane wartości wyznaczone na powierzchniach odpowiedzi względem wartości wyznaczonych w doświadczeniu numerycznym.

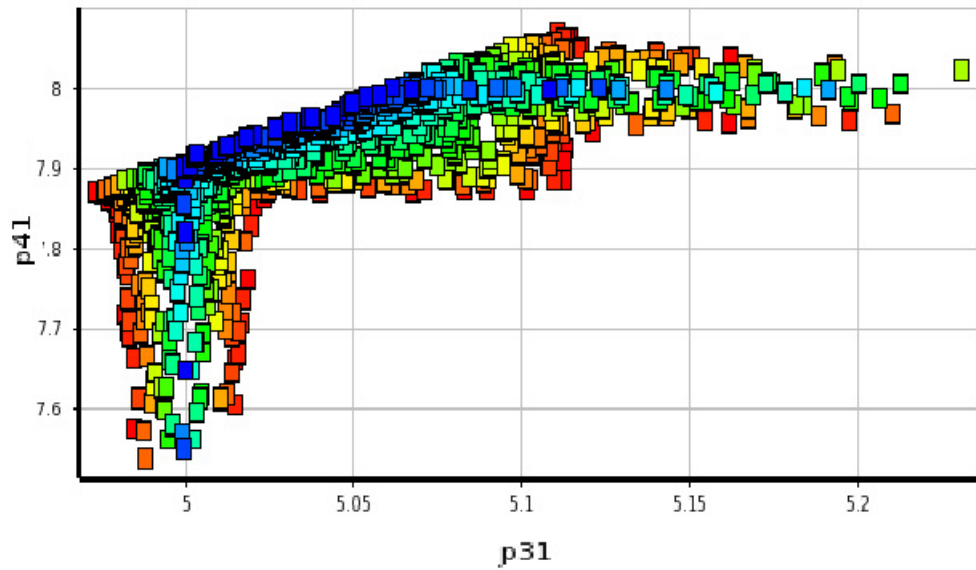


Rysunek 4.12: Znormalizowane wartości parametrów wyznaczone na powierzchniach odpowiedzi w zależności od wartości wyznaczonych w doświadczeniu numerycznym

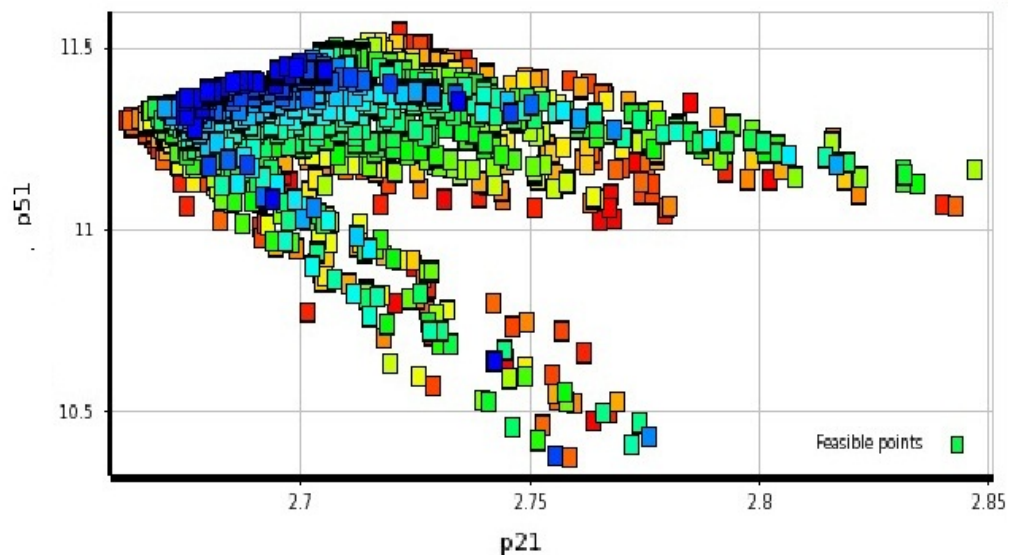
Zdefiniowana została funkcja celu posiadająca dwa wyrazy składowe

$$\Phi_m = \left(\frac{|3 - p_{31}|}{p_{31_{max}} - p_{31_{min}}} \right) + \left(\frac{|5 - p_{41}|}{p_{41_{max}} - p_{41_{min}}} \right) \quad (4.5)$$

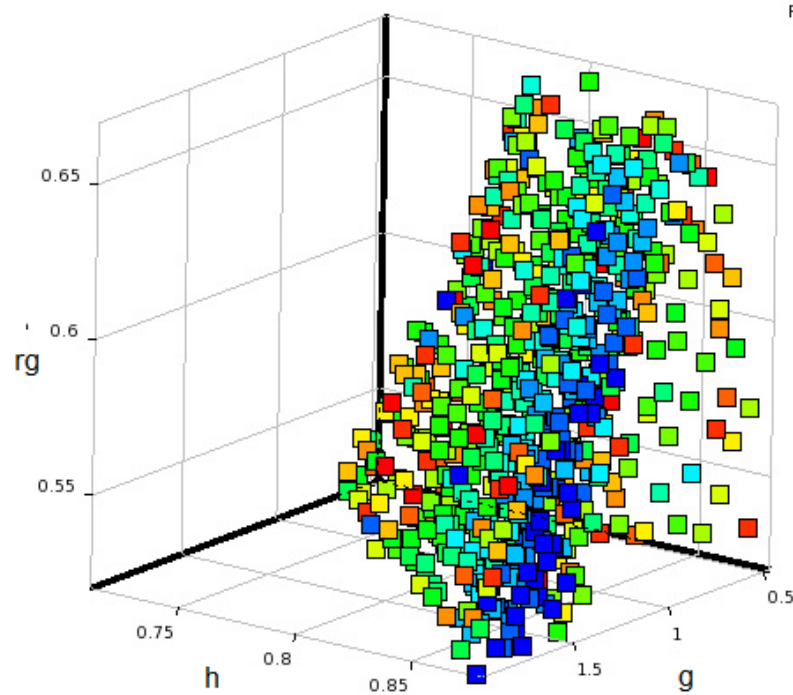
Na podstawie powierzchni odpowiedzi stosując procedurę przesiewania wyników opisaną w rozdziale 3 zostały wyznaczone zbiory punktów dla których proporcja p_{31} ma wartość bliską 3 oraz p_{41} ma wartość bliską 5. Zostały znalezione zbiory rozwiązań Pareto-optimalnych, czyli takie dla których przy wybraniu nowego zestawu parametrów konstrukcyjnych nie uda się poprawić jednej z proporcji bez pogorszenia drugiej.



Rysunek 4.13: Wykres zależności proporcji pomiędzy częstotliwością 4 i 1 (p_{41}) od proporcji pomiędzy częstotliwości 3 i 1 (p_{31}). Punkty oznaczają zbiory rozwiązań w sensie Pareto - kolor niebieski oznacza punkty dla których proporcje pomiędzy częstotliwościami są najbliższe założonych



Rysunek 4.14: Wykres zależności proporcji pomiędzy częstotliwością 5 i 1 (p_{51}) od proporcji pomiędzy częstotliwości 2 i 1 (p_{21}). Punkty oznaczają zbiory rozwiązań w sensie Pareto - kolor niebieski oznacza punkty dla których proporcje pomiędzy częstotliwościami są najbliższe założonych



Rysunek 4.15: Zbiór rozwiązań w sensie Pareto w układzie współrzędnych parametrów decyzyjnych g , h , rg . Kolor niebieski oznacza punkty dla których proporcje pomiędzy częstotliwościami są najbliższe założonych

W przyjętym modelu w związku z przyjętymi więzami geometrycznymi, przedziałami w jakich mogą zostać zmienione parametry decyzyjne oraz założeniem, że grubości ścianki jest jednakowa na całej jej powierzchni, bardzo dokładne dostrojenie jednej częstotliwości niesie za sobą niewielkie odstąpienie drugiej (4.13). Możliwe jest znalezienie punktów wyznaczających zestawy parametrów decyzyjnych dla których oczekiwana proporcja p_{31} pomiędzy częstotliwościami trzecią i pierwszą przyjmuje wartości bliskie 5 oraz pomiędzy czwartą i pierwszą p_{41} przyjmuje wartości bliskie 8. Kolejnym interesującym wynikiem jest wiedza w jakich przedziałach mogą zmieniać się pozostałe dwie proporcje pomiędzy częstotliwościami, dla których co prawda nie jest możliwe dokładne ich dostrojenie poprzez interwał oktawy lub kwinty, natomiast stosując celowo inne interwały można także modyfikować uzyskiwane brzmienie. Z rysunku 4.14 można odczytać, że p_{21} może przyjmować wartości od 2,67 do 2,83, natomiast p_{51} od 10,4 do 11,5. Na rysunku 4.14 widoczny jest zbiór parametrów dla których trzecia oraz czwarta częstotliwość jest niemal dokładnie dostrojona względem pierwszej.

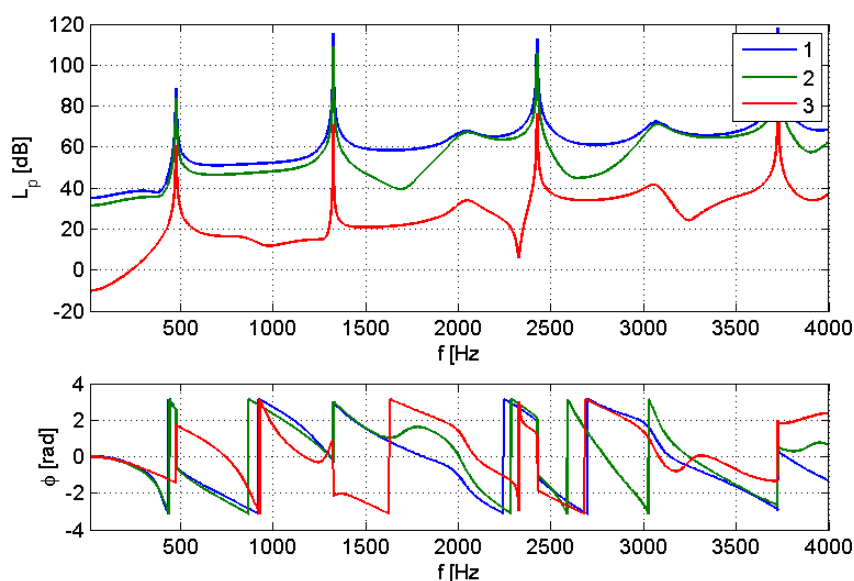
4.4. Synteza pola akustycznego otaczającego misę

W celu wyznaczenia odpowiedzi akustycznej układu konieczne jest dodanie do modelu pola mechanicznego modelu pola akustycznego oraz uwzględnienie sprzężenia pomiędzy tymi polami. Zależności fizyczne oraz matematyczne, które posłużyły do budowy modelu sprzężonego MES zostały przedstawione w rozdziale 2.2.

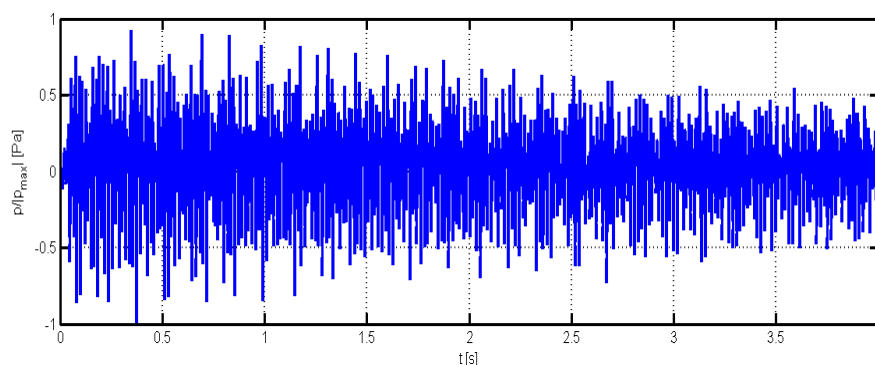
Budowa modelu została przeprowadzona w pakiecie obliczeniowym ANSYS. Model pola mechanicznego został zbudowany przy pomocy elementów powierzchniowych Shell281. Objętość akustyczna, którą stanowiła kula o promieniu 0.5m została zdyskretyzowana przy pomocy elementów akustycznych Fluid30 i Fluid130. Warunki brzegowe zostały zadane tak aby zostały odebrane wszystkie stopnie swobody (przemieszczenia i obroty) w węźle znajdującym się na osi symetrii na podstawie misy. Na powierzchni misy zostało uwzględnione sprzężenie pomiędzy drganiami jej powierzchni a ciśnieniem akustycznym w ośrodku ją otaczającym. Na zewnętrznej powierzchni kuli został uwzględniony warunek Sommerfelda – całkowitego wypromieniowania dźwięku z objętości akustycznej. Siła wymuszająca drgania misy została założona jako siła o przebiegu harmonicznym i stałej amplitudzie. Rozkłady pola mechanicznego oraz akustycznego wyznaczone były dla stanu ustalonego poprzez rozwiązanie sprzężonego układu równań (2.62). Wektor siły przyłożony został w węźle znajdującym się na krawędzi misy. Częstotliwość siły zmieniana była od 2 do 4000 Hz, amplituda siły została założona jako 1 [N]. Wprowadzone zostało w układzie tłumienie stałe w całym przedziale częstotliwości zdefiniowane przy pomocy współczynnika tłumienia o wartości $2 \cdot 10^{-5}$.

Zostały przyjęte trzy charakterystyczne punkty w odległości 0.5 [m], w których wygenerowane zostały charakterystyki w dziedzinie częstotliwości: punkt 1 leżący na przecięciu płaszczyzny przechodzącej przez czaszę misy oraz kierunku przyłożenia siły wymuszającej, punkt 2 leżący na płaszczyźnie pionowej pod kątem 45 stopni oraz punkt 3 pod kątem 90 stopni znajdujący się na osi misy. Poziom ciśnienia akustycznego oraz kąt przesunięcia fazowego ciśnienia akustycznego względem wymuszenia dla wybranych trzech punktów otaczających misę przedstawiony został na rysunku 4.16.

Zsyntetyzowany przebieg czasowy sygnału uzyskany poprzez zastosowanie odwrotnej transformaty Fouriera sygnału w punkcie 1 przedstawia rysunek 4.17.



Rysunek 4.16: Poziom ciśnienia akustycznego i kąt przesunięcia fazowego dla ciśnienia odczytanego w przykładowych punktach pomiarowych



Rysunek 4.17: Ciśnienie akustyczne zarejestrowane w punkcie 1 w zależności od czasu.

Zastosowana procedura pozwoliła na wygenerowanie dźwięku mis zarówno w przypadku modeli odwzorowujących konstrukcje rzeczywiste jak i modelu nie mającego odpowiednika w rzeczywistości, którego geometria została dobrana na podstawie dwu poprzednich konstrukcji poprzez założenie zamierzonych proporcji pomiędzy częstotliwościami składowymi widma dźwięku. Dźwięk wygenerowany poprzez trzeci model cechują lepsze proporcje pomiędzy drugą i pierwszą oraz trzecią i pierwszą częstotliwością. Otrzymany dźwięk można wykorzystać w kompozycji muzycznej. Zaprojektowany syntezytor numeryczny pozwala na zmianę współrzędnych punktu w którym odbierany jest

dźwięk misy. Konieczne jest wtedy aby znajdował się on wewnątrz lub na brzegu obszaru akustycznego oraz powinien zostać dla niego zapisany wynik obliczeń. Możliwe jest także dowolne kształtowanie przebiegu sygnału wymuszającego drgania. Powoduje to zmiany w uzyskiwanych amplitudach wierzchołków rezonansowych widma dźwięku. Zaletą zastosowanej metody syntezy dźwięku jest to, że wprowadzane modyfikacje pozwalają na generowanie dźwięku, który jest zmodyfikowany w sposób intuicyjny oraz uzasadniony fizycznie.

5. Synteza pola wibroakustycznego generowanego przez dzwon

W niniejszym rozdziale do zastosowania zaproponowanego algorytmu syntezy numerycznego zostały wybrane konstrukcje osiowo-symetryczne, które w przeciwieństwie do mis tybetańskich cechuje zmienna grubość ścianki oraz bardzo charakterystyczny, głęboko zakorzeniony w kulturze europejskiej dźwięk - dzwony. Dzwony należą do grupy instrumentów muzycznych określanej jako idiofony (instrumenty perkusyjne samobrzmiące) [28]. Jednymi z najstarszych znanych dzwonów są dzwony chińskie[38], które poprzez owalny kształt, wybrzmiewając generują dźwięk o dwu podstawowych tonach składowych. W kulturze zachodniej dzwony, które rozpowszechniły się już w średniowieczu, mają kształt tulipana. Ich zewnętrzną powierzchnię przy założeniu cienkich ścianek można przybliżyć przy pomocy hiperboli [48, 55]. Częstotliwości własne dzwonu uzyskanego w procesie odlewania często są dodatkowo dostrajane poprzez odpowiednie wybieranie materiału z wewnętrznej powierzchni dzwonu. Dla tradycyjnego kształtu dzwonów ich kolejne częstotliwości drgań własnych cechują proporcje $1:2:2.4:3:4\dots$, które w procesie dostrajania zostają dość dobrze osiągnięte. Szczególnie istotne jest to w przypadku dzwonów współbrzmiących w karylionach [62, 61, 10, 11]. Składowa częstotliwość związana z pierwszą częstotliwością drgań własnych nazywana jest oktawą podstawową (ang. *hum*). Jeżeli pojawia się w rejestrowanym widmie dźwięku to najczęściej nie jest wyróżniająca się i na odbieraną przez słuchacza wysokość dźwięku wpływ mają dalsze składowe. Druga częstotliwość pojawiająca się w widmie dźwięku nazywana jest prymą (ang. *prime*). Brzmienie dzwonu jest złożone oraz jego dźwięk jest odbierany przez słuchacza bardziej jako akord niż pojedynczy dźwięk o bogatej barwie. Jego wyjątkowość powoduje przede wszystkim występująca w widmie dźwięku składowa, dla której występuje interwał tercji małej (ang. *minor third*). Nie jest ona pożądana w przypadku współbrzmiących wielu dzwonów. Dlatego Lehr [39] zaprojektował i stworzył zestaw dzwonów, dla których interwał tercji małej zastąpiony został tercją wielką (ang. *major third*) – została

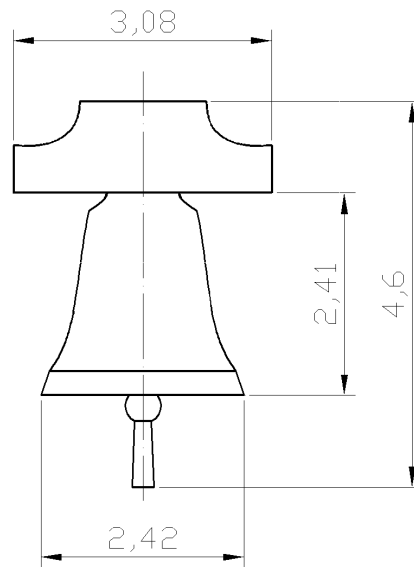
uzyskana pomiędzy częstotliwościami rezonansowymi proporcja 2.5 zamiast 2.4. Nowy kształt profilu uzyskany został poprzez wyznaczenie kilkunastu punktów, znajdujących się na określonych wysokościach względem podstawy, oraz zdefiniowanie dla każdego z nich osobno promienia oraz grubości profilu dzwonu. W ten sposób otrzymany został parametryczny model konstrukcji, dla którego przy pomocy MES oraz narzędzi optymalizacyjnych przeprowadzone zostały obliczenia. W dalszych pracach badane były także graniczne parametry geometryczne dla dzwonów cechujących się różnymi kształtami oraz tą samą częstotliwością podstawową [40]. Pierwsze prawdziwie harmoniczne dzwony, dla których siedem pierwszych składowych znajduje się w szeregu harmonicznym, zostały stworzone w 1999 roku przez stowarzyszenie Australian Bell [43]. Wykorzystana została w tym celu optymalizacja kształtu przekroju poprzez analizę modalną przy pomocy MES tak aby wzbudzane zostały tylko obwodowe postacie drgań własnych oraz następnie zostały one odpowiednio dostrojone. W literaturze dotyczącej dzwonów znaleziono jedynie jedną pracę [38] dotyczącą wyznaczenia charakterystyk kierunkowości dzwonów o europejskim kształcie. Wyznaczone zostały w niej doświadczalnie charakterystyki kierunkowe dla trzech częstotliwości rezonansowych dzwonu. Brakuje także, co było wyraźnie podkreślone w [54], kompleksowej analizy wibroakustycznej wyjątkowego dzwonu Katedry Wawelskiej jakim jest Zygmunt. Dotychczasowe jego badania koncentrowały się tylko na pojedynczych zagadnieniach takich jak wyznaczenie masy, określenie rzędu modelu modalnego, wyznaczenie częstotliwości rezonansowych [60]. Istotnym zagadnieniem związanym z dzwonami wieżowymi są różnice w dźwięku związane z ich kołysaniem podczas wzbudzania do drgań, w porównaniu do nieruchomo zawieszonych dzwonów występujących w karylionach. Subiektywnie, dźwięk dzwonu kołysanego jest oceniany jako żywszy, ciekawszy i estetycznie bardziej wartościowy [9, 12]. W pracy [9] zaobserwowane zostały zmiany dźwięku czwartego co do wielkości dzwonu z karylionu św. Katarzyny w Gdańsku, dla którego częstotliwość podstawowa wynosi około 155,8 Hz. Analiza danych prowadzona była poprzez zastosowanie do nagranego sygnału krótko-czasowej transformaty Fouriera. Zaobserwowano wraz z upływem czasu niewielkie zmiany częstotliwości związane z ruchem dzwonu względem odbiornika, które wyjaśnia efekt Dopplera, oraz bardzo silne zmiany amplitud poszczególnych częstotliwości rezonansowych, które zostały wyjaśnione poprzez zróżnicowanie postaci drgań własnych powierzchni dzwonu.

Dzwony wykonuje się najczęściej z brązu cynowego – stopu miedzi z cyną, zawierającego od 16 do 22% cyny. Im więcej cyny tym mniejsze jest tłumienie wewnętrzne w konstrukcji, natomiast zwiększa się wtedy jej kruchość. Na przestrzeni wieków, także w ostatnich latach [64] podejmowane były próby zastąpienia brązu cynowego innym materiałem, najczęściej stopami na bazie żelaza i węgla, choć także i stopami metali nieżelaznych. Doświadczenie ukazało, że generalnie stale nie są odpowiednim materiałem na dzwony ze względu na niską jakość wydobywanego z nich dźwięku jak i krótki czas eksploatacji wykonanych z nich dzwonów. W brązach cynowych z których odlewane były dzwony gotyckie występowało około 10-12% cyny, 2-3% ołowiu, 4-6% innych metali w czym 0,2-0,4% srebra. Badania metalograficzne potwierdzają hipotezę, że średniowieczni ludwisarze wierzyli w magiczne własności metali ziem rzadkich, oraz że ich dodanie poprawia walory akustyczne dzwonu. Ta hipoteza została przebadana i odrzucona dopiero w XIX wieku. W kolejnych epokach wzrastała zawartość cyny w brązach oraz zmniejszała się ilość innych metali. Zgodnie z niemiecką normą materiał na dzwon powinien zawierać 74-78% Cu, 22-26% Sn, około 1% Pb, 0,2% Sb, 0,3% Fe oraz 0,5% Ni. O ile badania metalograficzne zostały szeroko przeprowadzone to dość trudno jest znaleźć parametry mechaniczne wspomnianych stopów. W literaturze podawane są dość szerokie przedziały wartości przyjmowanych przez parametry materiałowe brązów. Występuje także zależność, że im więcej miedzi zawiera stop, tym mniejsze tłumienie wewnętrzne w materiale, co powoduje, że dzwon wybrzmiewa dłużej. Wiąże się to jednak także ze zwiększeniem twardości materiału oraz podatności na pękanie.

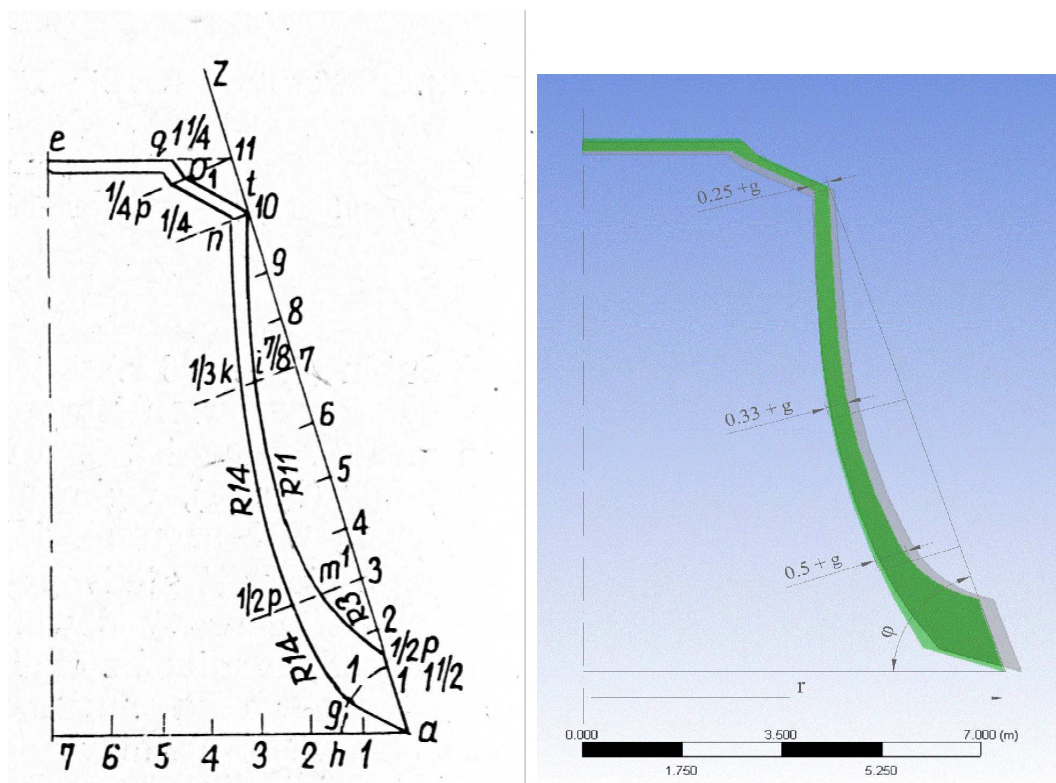
5.1. Model numeryczny obiektu badań

Algorytm syntezy numerycznego został zastosowany do obiektu badań, którym jest dzwon Zygmunt znajdujący się w Katedrze Wawelskiej, który jest jednym z największych dzwonów w Europie oraz ma bardzo duże znaczenie historyczne. Podstawowe jego parametry geometryczne dzwonu przedstawione zostały na rysunku 5.1.

Masa kielicha dzwonu wynosi 9 650 kg, jarzma – 2 160 kg, serca – 365 kg. Pozostałe elementy mają masę 425kg. Stąd całkowita masa dzwonu wynosi 12 600 kg.



Rysunek 5.1: Parametry geometryczne dzwonu Zygmunta



Rysunek 5.2: Profil dzwonu: a) wyjściowy, b) po zmniejszeniu liczby parametrów

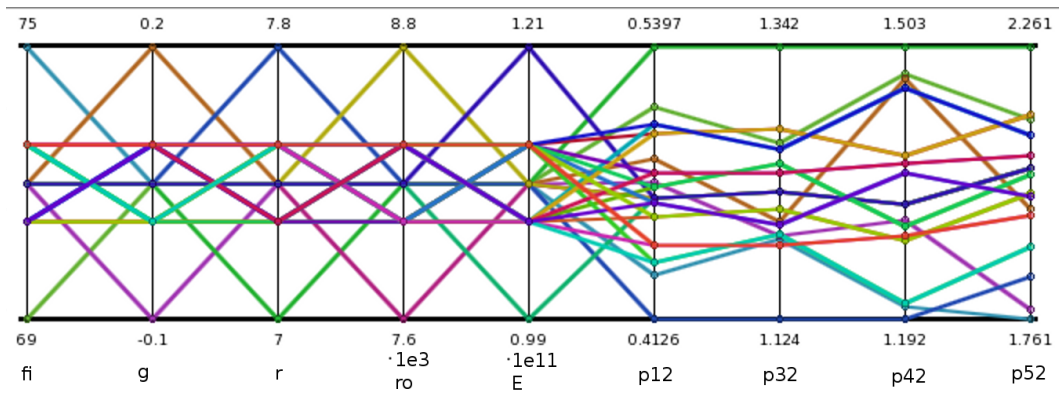
Model geometryczny dzwonu zbudowany został na podstawie kształtu zaczerpniętego z niemieckiej tradycji ludwisarskiej, który został przedstawiony na rysunku 5.2a. Wszystkie parametry definiujące kształt przekroju zostały uza-

leżnione od średnicy podstawy dzwonu. Ilość parametrów definiujących kształt została zmniejszona poprzez pozostawienie możliwości zmian tylko dla tych, które zostały uznane za najistotniejsze: kąta pochylenia profilu φ , względnej zmiany grubości ścianki g oraz względnego promienia r (rysunek 5.2b). Jako materiał przyjęty został brąz cynowy. Wartości parametrów konstrukcyjnych przyjęte w pierwszych obliczeniach zostały zebrane w tablicy 5.1.

Tablica 5.1: Parametry dzwonu

parametr	wartość początkowa	wartość wyznaczona
kąt pochylenia profilu $\varphi[deg]$	72,0	70,8
względna grubość g	0,0	0,15
względny promień r	7,0	7,7
gęstość $[kg \cdot m^{-3}]$	8600	8410
moduł Younga $[Pa]$	$1,05 \cdot 10^{11}$	$1,04 \cdot 10^{11}$
wsp. Poissona	0,32	0.32

Zaplanowany został eksperyment numeryczny pozwalający na wyznaczenie powierzchni odpowiedzi układu. Wartości przyjmowane przez poszczególne pięć φ , g , r , ρ , E parametrów zostały przedstawione w sposób równoległy na rysunku 5.3 z lewej. Z prawej strony rysunku 5.3 zebrane zostały wyniki obliczeń proporcje odpowiednich częstotliwości względem drugiej – p12, p32, p42, p52. Wartości parametrów przyjmowane w kolejnych doświadczeniach numerycznych zebrane zostały w tablicy 5.2. Przeprowadzone zostało 27 doświadczeń oraz na ich podstawie wyznaczone zostały powierzchnie odpowiedzi opisujące zmiany częstotliwości rezonansowych dzwonu przy zmianach jego parametrów konstrukcyjnych.



Rysunek 5.3: Wartości przyjmowane przez zmienne decyzyjne w planie centralnym kompozycyjnym rotacyjnym

Tablica 5.2: Zastosowany plan eksperymentu oraz wyniki obliczeń

	założone parametry konstrukcyjne					otrzymane częstotliwości f [Hz]				
	fi [deg]	gc [m]	d [m]	ro [kg/m ³]	E [G Pa]	1	2	3	4	5
1	72,00	0,0500	7,40	8200,00	110,0000	88,99	189,62	232,55	250,76	386,22
2	69,00	0,0500	7,40	8200,00	110,0000	94,55	184,85	233,89	272,13	393,40
3	75,00	0,0500	7,40	8200,00	110,0000	83,68	193,00	229,40	233,00	339,78
4	72,00	-0,1000	7,40	8200,00	110,0000	77,19	162,06	193,05	211,61	288,42
5	72,00	0,2000	7,40	8200,00	110,0000	104,37	214,24	257,54	314,27	420,52
6	72,00	0,0500	7,00	8200,00	110,0000	97,07	179,86	241,44	270,25	406,59
7	72,00	0,0500	7,80	8200,00	110,0000	82,15	199,07	223,78	237,27	366,12
8	72,00	0,0500	7,40	7600,00	110,0000	92,43	196,96	241,56	260,47	401,18
9	72,00	0,0500	7,40	8800,00	110,0000	85,90	183,04	224,49	242,06	372,82
10	72,00	0,0500	7,40	8200,00	99,0000	84,42	179,89	220,62	237,90	366,40
11	72,00	0,0500	7,40	8200,00	121,0000	93,33	198,88	243,91	263,00	405,07
12	71,15	0,0075	7,29	8030,00	113,1167	90,92	182,08	232,39	250,93	388,75
13	72,85	0,0075	7,29	8030,00	106,8833	85,40	179,96	224,82	233,50	364,89
14	71,15	0,0925	7,29	8030,00	106,8833	96,73	191,98	241,86	279,29	403,03
15	72,85	0,0925	7,29	8030,00	113,1167	96,05	199,58	247,79	273,50	411,06
16	71,15	0,0075	7,51	8030,00	106,8833	84,28	183,04	221,94	234,56	364,75
17	72,85	0,0075	7,51	8030,00	113,1167	83,87	190,98	227,77	231,27	361,78
18	71,15	0,0925	7,51	8030,00	113,1167	94,81	203,07	243,65	275,79	403,27
19	72,85	0,0925	7,51	8030,00	106,8833	89,06	199,01	235,63	256,17	388,36
20	71,15	0,0075	7,29	8370,00	106,8833	86,56	173,36	221,26	238,92	370,13
21	72,85	0,0075	7,29	8370,00	113,1167	86,05	181,34	226,53	235,28	367,68
22	71,15	0,0925	7,29	8370,00	113,1167	97,47	193,45	243,70	281,43	406,11
23	72,85	0,0925	7,29	8370,00	106,8833	91,45	190,02	235,93	260,40	391,38
24	71,15	0,0075	7,51	8370,00	113,1167	84,93	184,44	223,63	236,35	367,54
25	72,85	0,0075	7,51	8370,00	106,8833	79,85	181,83	216,86	220,19	344,45
26	71,15	0,0925	7,51	8370,00	106,8833	90,27	193,34	231,98	262,59	383,96
27	72,85	0,0925	7,51	8370,00	113,1167	89,74	200,53	237,43	258,13	391,32

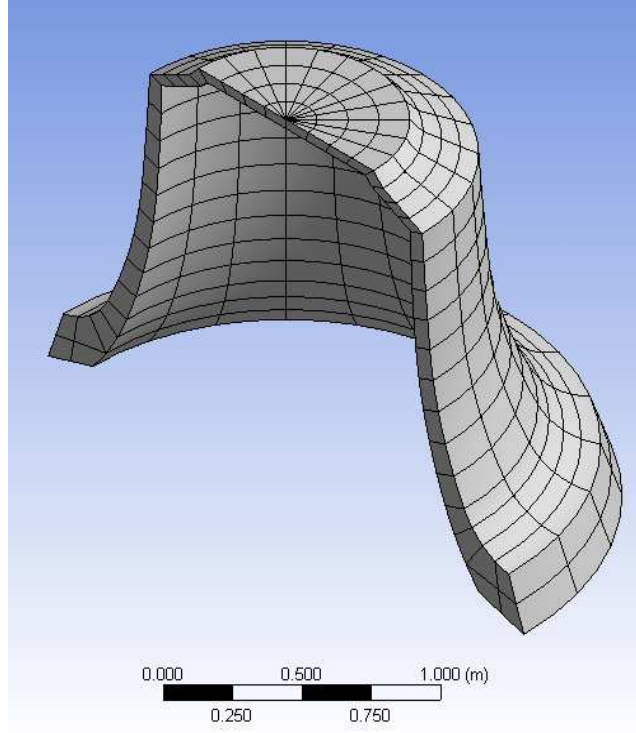
Stworzona została funkcja celu zgodnie z równaniem 3.23.

$$\Phi = \sum_{j=1}^5 M_j = \sum_{j=1}^5 \frac{|f_j^* - f_j|}{f_{max} - f_{min}} \quad (5.1)$$

gdzie f^* oznacza wartość częstotliwości drgań własnych rzeczywistego dzwonu wyznaczone doświadczalnie, f oznacza częstotliwość drgań własnych modelu numerycznego oraz f_{max} , f_{min} oznaczają odpowiednio maksymalną i minimalną częstotliwość uzyskaną w doświadczeniu numerycznym.

Następnie dokładne parametry modelu numerycznego zostały wyznaczone poprzez przeprowadzenie pseudo- optymalizacji metodą przesiewania punktów wygenerowanych na powierzchni odpowiedzi i znalezieniu wśród nich takiego zbioru punktów, dla którego funkcja celu Φ przyjmuje najmniejszą wartość. Parametry wyznaczone na podstawie zaplanowanego eksperymentu numerycznego zebrane zostały w tablicy 5.1.

Numeryczny model dzwonu zbudowany został przy pomocy MES w pakiecie obliczeniowym ANSYS. Wykorzystane zostały dwudziestowęzłowe elementy bryłowe Solid186. Przekrój otrzymanego modelu geometrycznego wraz z nałożoną siatką elementów skończonych umieszczony został na rysunku 5.4.



Rysunek 5.4: Przekrój modelu geometrycznego dzwonu z nałożoną siatką elementów skończonych

Bryła dzwonu została zdyskretyzowana poprzez nałożenie siatki elementów skończonych tak, aby oprócz bliskiej odległości podstawy, występował w niej jeden element na grubości ścianki dzwonu. W przypadku konstrukcji o tak dużej sztywności okazało się to wystarczające. Wstępne obliczenia miały na celu oszacowanie poprawności modelu oraz polegały na wyznaczeniu częstotliwości drgań własnych dzwonu poprzez rozwiązanie zagadnienia własnego równania

$$\mathbf{M}_b \ddot{\mathbf{u}}_b + \mathbf{K}_b \mathbf{u}_b = 0 \quad (5.2)$$

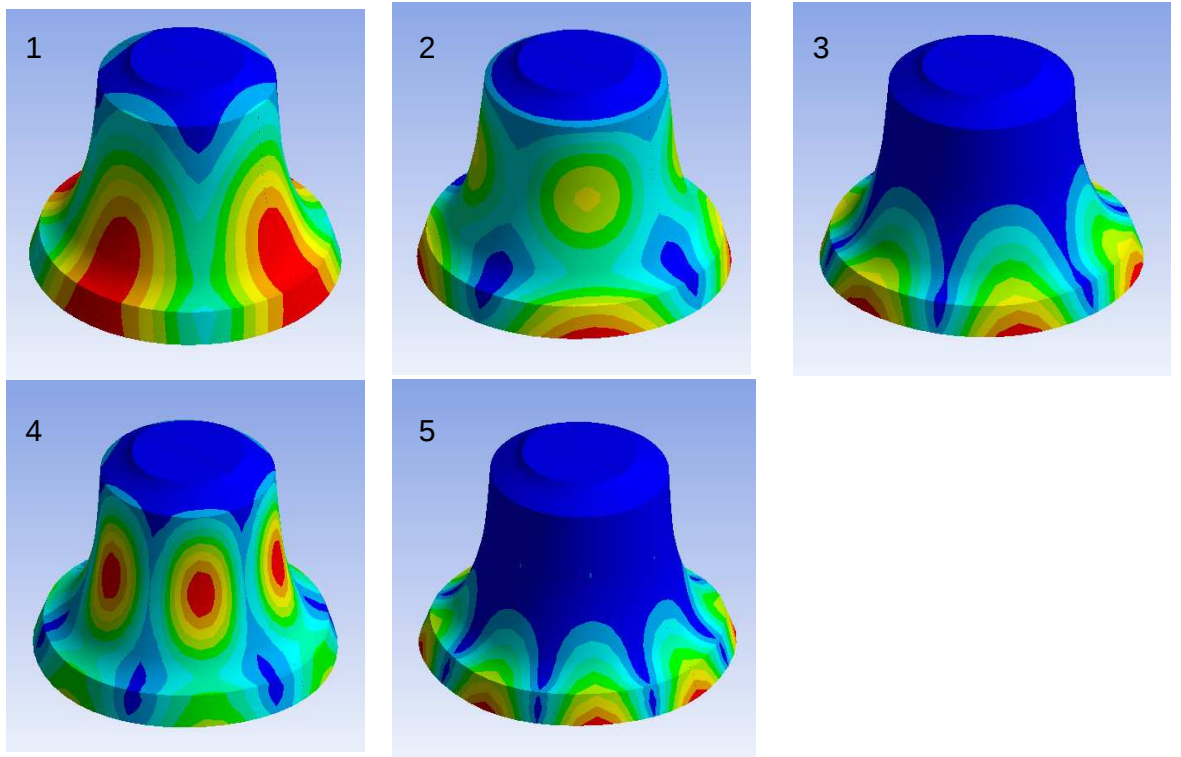
gdzie $\mathbf{M}_b$, $\mathbf{K}_b$ to odpowiednio globalna macierz masy i sztywności dzwonu, $\mathbf{u}_b$ – wektor przemieszczeń węzłowych. Równanie (5.2) zostało przekształcone do postaci

$$(\mathbf{K}_b - \lambda \mathbf{M}_b) \mathbf{u}_b = 0 \quad (5.3)$$

oraz poprzez zastosowanie metody Lanczosa został wyznaczony wektor wartości własnych równania $\lambda_b = \text{diag}(\lambda)$ oraz odpowiadająca mu macierz zawierająca wektory własne równania $\mathbf{u}_b$. Kolejne częstotliwości drgań własnych f_i zostały wyznaczone na podstawie elementów λ_i wektora λ_b z zależności

$$f_i = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{2\pi}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

Wyznaczonych zostało pierwsze pięć częstotliwości drgań własnych oraz obliczone zostały występujące pomiędzy nimi proporcje. Dodatkowo w celu sprawdzenia wpływu warunków brzegowych związanych z utwierdzeniem dzwonu na częstotliwości drgań własnych zostały przyjęte dwa przypadki obliczeniowe. W pierwszym z nich dzwon potraktowany został jako bryła swobodna, dla której przemieszczenia węzłowe pozostają nieodebrane, oraz zostało odrzuconych sześć pierwszych częstotliwości drgań własnych, które odpowiadają przemieszczeniom i obrotom bryły sztywnej. W drugim przypadku warunki brzegowe zostały wprowadzone poprzez odebranie przemieszczeń węzłowych względem wszystkich kierunków na całej górnej powierzchni dzwonu (w miejscu korony, która jest połączona z jarzmem). Wyznaczone postacie drgań własnych dla przypadku dzwonu swobodnego zostały zebrane na rysunku 5.5.



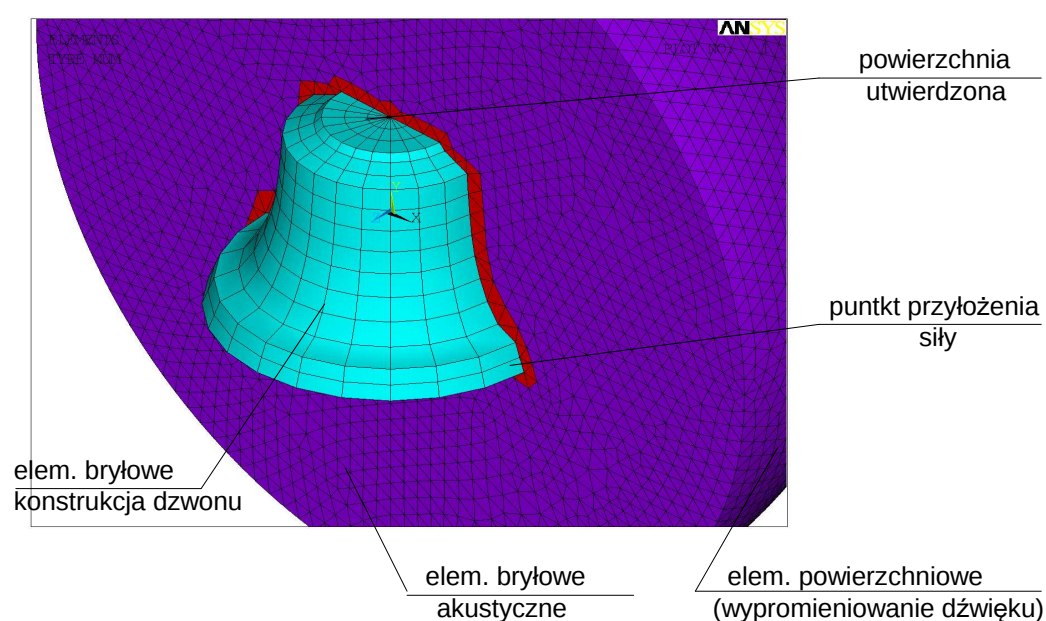
Rysunek 5.5: Pierwsze pięć postaci drgań własnych

Tablica 5.3: Porównanie doświadczenia z wynikami analizy modalnej dla dzwonu swobodnego oraz dzwonu utwardzonego

częstotliwość drgań własnych	1	2	3	4	5
zmierzona [Hz]	91,0	203,0	230,0	277,0	382,0
wyznaczona numerycznie bez utw. [Hz]	91,2	202,1	232,7	275,0	381,1
różnica [%]	0,21	-0,44	1,15	-0,72	-0,23
wyznaczona numerycznie z utw. [Hz]	92,3	205,7	232,8	275,2	381,2
różnica [%]	1,41	1,33	1,19	-0,64	-0,22

Wyniki zebrane zostały w tablicy 5.3. Rozbieżności pomiędzy otrzymanymi częstotliwościami nie przekraczają 2%. W odczuciu autora tak niewielki wpływ warunków brzegowych powodowany jest faktem, że w miejscu utwardzenia nie występują strzałki drgań dla rozpatrywanych postaci drgań własnych dzwonu. Powoduje to, że warunki brzegowe przyjęte nawet w postaci granicznych przypadków nie powodują istotnych zmian wartości częstotliwości drgań własnych całej konstrukcji.

Następnie dołączona została objętość akustyczna przy wykorzystaniu elementów Fluid30. Na zewnętrznej powierzchni objętości akustycznej umieszczone zostały elementy Fluid130 uwzględniające warunek całkowitego wypromieniowania dźwięku z układu - warunek Sommerfelda [32, 27].



Rysunek 5.6: Model dzwonu i ośrodka akustycznego, zbudowany przy pomocy MES, uwzględniający sprzężenie mechaniczno-akustyczne

Układ równań otrzymany poprzez zastosowanie MES zgodnie z rozdziałem 2.2 został zapisany oraz rozwiązany przy założeniu w układzie stanu ustalonego, wymuszenia harmonicznego i odpowiedzi harmonicznego o częstotliwości $\omega = 2\pi f$, gdzie f oznacza częstotliwość. Układ równań (2.75) został zapisany przy zastosowaniu analogicznych oznaczeń jak w rozdziale 2.2 jako

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_b & 0 \\ \mathbf{M}_b^{fs} & \mathbf{M}_b^P \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{C}_b & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_b^P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_b & \mathbf{K}_b^{fs} \\ 0 & \mathbf{K}_b^P \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{P}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_b \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

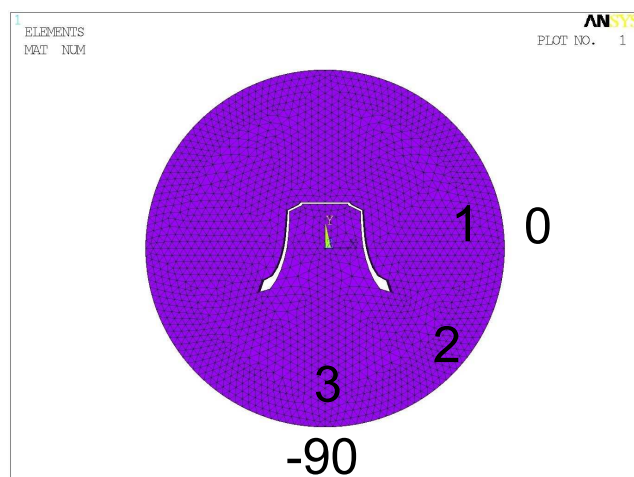
gdzie $\mathbf{M}_b$, $\mathbf{C}_b$, $\mathbf{K}_b$, $\mathbf{M}_b^P$, $\mathbf{C}_b^P$, $\mathbf{K}_b^P$ to odpowiednio macierze bezwładności, tłumienia oraz sztywności dla dzwonu oraz ośrodka akustycznego go otaczającego, $\mathbf{u}_b$ – wektor przemieszczeń węzłowych, $\mathbf{P}_b$ – wektor ciśnienia akustycznego, $\mathbf{F}_b$ – wektor sił uogólnionych, $\mathbf{M}_b^{fs}$, $\mathbf{K}_b^{fs}$ – macierze sprzężenia konstrukcji z ośrodkiem akustycznym.

W układzie równań (5.5) uwzględnione zostały warunki brzegowe odpowiadające odebrany przemieszczeniom poprzez usunięcie odpowiednich wierszy oraz kolumn globalnych macierzy bezwładności, tłumienia oraz sztywności. Wektor wymuszenia $\mathbf{F}_b$ zawierający jeden niezerowy element w wierszu odpowiadającym horyzontalnym przemieszczeniom w węźle, w którym następuje uderzenie serca w kielich dzwonu, został zdefiniowany jako

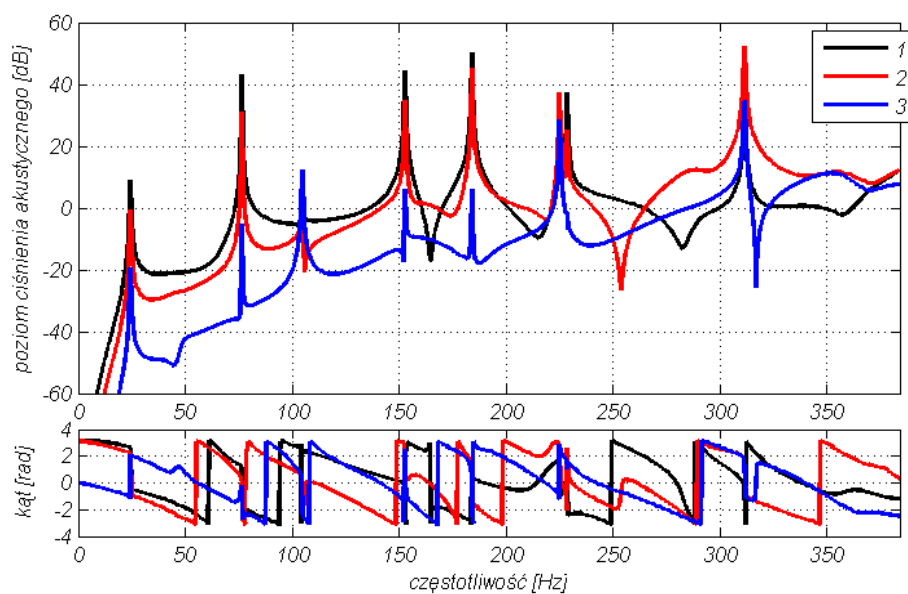
$$\mathbf{F}_b = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0]^T \quad (5.6)$$

Następnie układ (5.5) został rozwiązany dla kolejnych wartości częstotliwości f z rozpatrywanego przedziału od 1 do 400 Hz z krokiem co 1 Hz. Otrzymana została charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa oraz fazowo-częstotliwościowa, która jest równoważna transmitancji widmowej układu. Wynik analizy, ciśnienie akustyczne w wybranym punkcie obserwacji, został przeniesiony do pakietu MATLAB, gdzie zostały przeprowadzone dalsze obliczenia zgodnie z algorytmem opisanym w rozdziale 3.3. Przykładowe wyniki – przebieg czasowy sygnału, dla punktu znajdującego się na przecięciu osi x układu współrzędnych i sfery ograniczającej objętość akustyczną, przedstawione zostały na rysunku 5.9b.

Wyniki w trzech punktach pomiarowych przedstawione zostały na rysunku 5.8. Widoczna jest na nim dla poszczególnych częstotliwości rezonansowych zdecydowana różnica pomiędzy poziomem ciśnienia akustycznego odnotowanym w punkcie pomiarowym znajdującym się pod kątem 0, -45, -90 stopni (rysunek 5.7).



Rysunek 5.7: Przekrój objętości akustycznej z zaznaczonym kątem 0 oraz -90 stopni



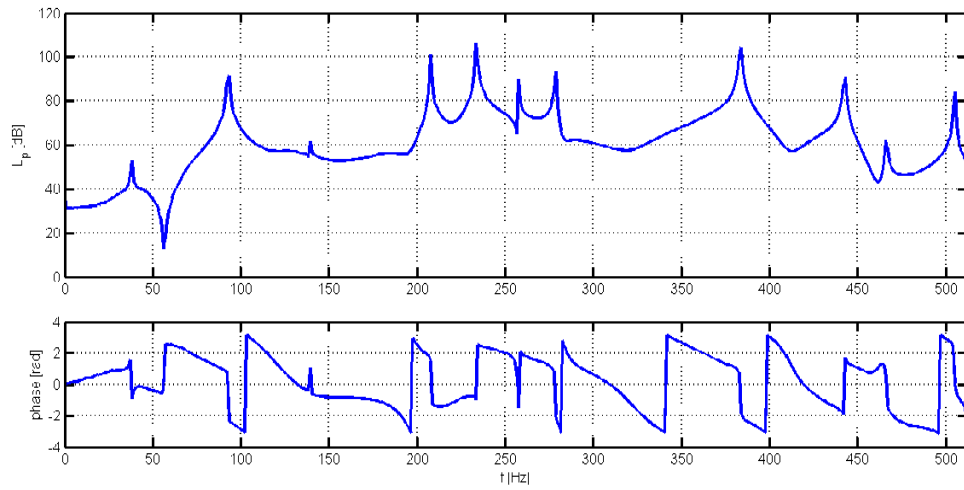
Rysunek 5.8: Poziom ciśnienia akustycznego i kąt przesunięcia fazowego pomiędzy odpowiedzią a wymuszeniem układu dla ciśnienia odczytanego w wybranych punktach pomiarowych

Pomiędzy punktami 0 i 45 różnice zawierają się w przedziale 6-15 dB, natomiast pomiędzy 0 i 90 od 6 do 40 dB. Co jest szczególnie warte odnotowania, występująca obok siebie podwójna częstotliwość rezonansowa w okolicy 230 Hz nie pojawia się na charakterystyce amplitudowo-częstotliwościowej dla trzeciego punktu.

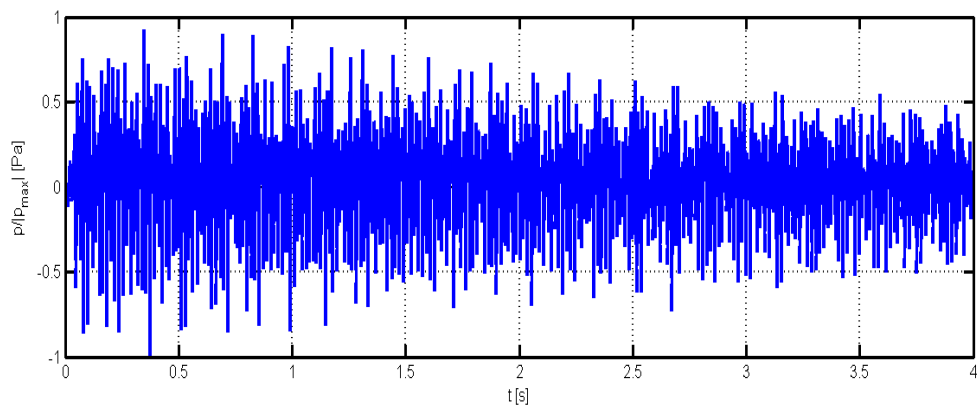
Dla wybranego i -tego punktu pola akustycznego znajdującego się na promieniu sfery otaczającej źródło dźwięku najpierw została wyznaczona odpowiedź impulsowa układu $h_i(t)$ oraz następnie wykonany jej splot z założonym przebiegiem sygnału siły wymuszającej $f(t)$

$$p_i(t) = f(t) * h_i(t) \quad (5.7)$$

W przypadku zamieszczonym na rysunku 5.9b sygnał wymuszenia został założony jako połówka sinusoidy o czasie trwania 20 [ms].



(a)



(b)

Rysunek 5.9: Dane wejściowe oraz wyniki syntezy odpowiedzi układu: a) transmitancja widmowa układu - poziom ciśnienia akustycznego oraz kąt przesunięcia fazowego w zależności od częstotliwości, c) odpowiedź układu w dziedzinie czasu

Otrzymana odpowiedź czasowa układu została wyznaczona we wszystkich węzłach znajdujących się na linii stanowiącej część wspólną zewnętrznej powierzchni ośrodka akustycznego oraz płaszczyzny kołysania dzwonu.

Wygenerowany został dźwięk posiadający te same pierwsze pięć częstotliwości składowych widma co rzeczywisty dzwon Zygmunt. Dźwięk otrzymany numerycznie cechuje duże podobieństwo do rzeczywistego dźwięku dzwonu, jednak odpowiada on przypadkowi gdy dzwon jest nieruchomy, a wymuszenie uderzeniowe następuje pod wpływem ruchu serca dzwonu. Jest to przypadek często spotykany dla dzwonów rosyjskich, dzwonów z których składają się karylliony lub dla dzwonów częściowo uszkodzonych ale wciąż pozostających w użyciu jak Big Ben w Londynie. W przypadku dzwonu Zygmunt występuje wyraźny efekt akustyczny związany z kołysaniem dzwonu. W kolejnym podrozdziale zostanie przedstawiony algorytm pozwalający na uwzględnienie zmian sygnału ciśnienia akustycznego w przypadku zmiennej w czasie orientacji przestrzennej charakterystyki kierunkowej źródła dźwięku, co występuje w przypadku kołysania dzwonu.

5.2. Synteza pola akustycznego dla dzwonu kołysanego

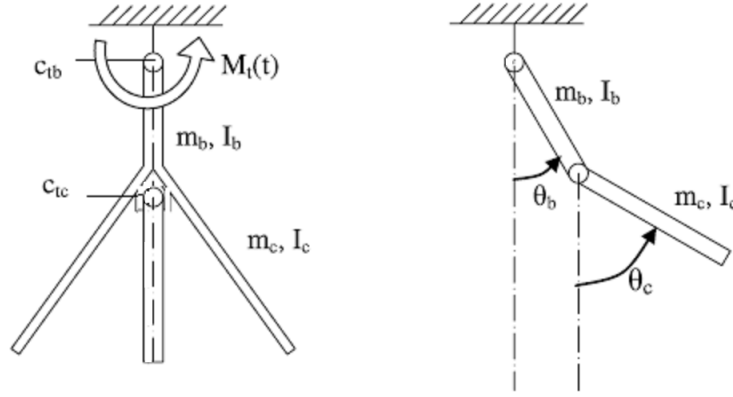
Dźwięk generowany przez dzwon, który jest kołysany, cechują zmiany amplitudy sygnału akustycznego w czasie związane ze zmianami orientacji przestrzennej charakterystyk kierunkowych odpowiadających poszczególnym częstotliwościom rezonansowym. Aby wygenerować dźwięk odpowiadający dzwonowi kołysanemu należy najpierw ułożyć i rozwiązać równania ruchu dzwonu. Wprowadzenie ruchu dzwonu względem punktu odbioru jest zadaniem numerycznym wykonalnym, jednak kosztownym obliczeniowo, ponieważ wymagającym niemal w każdym kroku obliczeniowym ponownego nakładania siatki w rozpatrywanej objętości akustycznej. W niniejszej pracy zastosowano nie spotykane wcześniej podejście polegające na założeniu, że dzwon pozostaje w modelu nieruchomy natomiast zmieniana jest lokalizacja punktu odbioru. Dzięki temu podejściu wynik otrzymywany jest bez konieczności dopasowywania siatki elementów akustycznych do zmian orientacji przestrzennej dzwonu, co pozwala na skrócenie procesu obliczeniowego. Wprowadza to jednak konieczność aproksymacji wyników, która została w niniejszej pracy przeprowadzona równocześnie w dziedzinie częstotliwości oraz przestrzeni.

5.2.1. Model opisujący dynamikę ruchu układu dzwonu i serca

Badania ruchu dzwonu przeprowadzone zostały w oparciu o model o parametrach skupionych, analogicznie do badań [44] w których otrzymany model o parametrach skupionych został porównany z wynikami zebranymi podczas badań rzeczywistych dzwonów oraz po przeprowadzonej kalibracji parametrów dobrze opisuje rzeczywiste konstrukcje. Różnica w przyjętym w dalszej części pracy modelu polega na pominięciu sztywności zawieszenia dzwonu. W celu zbudowania modelu opisującego dynamikę układu dzwonu i serca zostały zapisane równania Lagrange’a II rodzaju o postaci

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i(t) \quad (5.8)$$

gdzie q_i – i -ta współrzędna uogólniona Lagrange’a, T – całkowita energia kinetyczna, U – energia potencjalna, D – energia dyssypacji, Q_i – siła uogólniona działająca na i -tą współrzędną uogólnioną. $Q_i(t)$ zawiera moment wprawiający dzwon w ruch oraz siłę powstałą podczas zderzenia serca i kielicha dzwonu. Zgodnie z rysunkiem 5.10, współrzędne Lagrange’a wybrane są jako $q_1 = \Theta_b$, $q_1 = \Theta_c$.



Rysunek 5.10: Model o parametrach skupionych: a) schemat, b) współrzędne Lagrange'a

Energię kinetyczną w układzie zapisać można jako

$$T = \frac{1}{2}I_{CGb}\dot{\Theta}_b^2(t) + \frac{1}{2}I_{CGc}\dot{\Theta}_c^2(t) + \frac{1}{2}m_c[L_b^2\dot{\Theta}_b^2(t) + L_{CGc}^2\dot{\Theta}_c^2(t) + 2L_bL_{CGc}\dot{\Theta}_b(t)\dot{\Theta}_c(t)\cos(\Theta_c(t) - \Theta_b(t)) - \Theta_b(t)] \quad (5.9)$$

Po zastosowaniu twierdzenia Steinera i przegrupowaniu wyrazów otrzymuje się

$$T = \frac{1}{2}I_b\dot{\Theta}_b^2(t) + \frac{1}{2}I_c\dot{\Theta}_c^2(t) + \frac{1}{2}m_c[L_b^2\dot{\Theta}_b^2(t) + L_{CGc}^2\dot{\Theta}_c^2(t) + 2L_bL_{CGc}\dot{\Theta}_b(t)\dot{\Theta}_c(t)\cos(\Theta_c(t) - \Theta_b(t)) - \Theta_b(t)] \quad (5.10)$$

Energia potencjalna występująca w równaniu (5.8) została wyznaczona jako

$$U = -m_bgL_{CGb}\cos\Theta_b(t) - m_cg[L_b\cos\Theta_b(t) + L_{CGc}\cos\Theta_c(t)]. \quad (5.11)$$

gdzie m_b , I_{CGb} , I_b , L_{CGb} oznaczają własności fizyczne dzwonu i jarzma, odpowiednio masę, moment bezwładności względem środka ciężkości (CGb), moment bezwładności względem punktu obrotu, odległość pomiędzy środkiem ciężkości i punktem obrotu. Oraz odpowiednio m_c , I_{CGc} , I_c , L_{CGc} oznaczają analogiczne parametry dla serca dzwonu.

Energia strat przyjmuje postać

$$D = \frac{1}{2}c_{tb}\dot{\Theta}_b^2 + \frac{1}{2}c_{tb}(\dot{\Theta}_b - \dot{\Theta}_c)^2 \quad (5.12)$$

Na układ dzwonu i serca działa wymuszenie w postaci momentu $M_t(t)$ przyłożonego do dzwonu. Stąd siły uogólnione zapisuje się jako

$$Q_b = M_t(t) \quad (5.13)$$

$$Q_c = 0 \quad (5.14)$$

Przyjęto uproszczony model zderzenia w którym założono, że dzwon i serce są bryłami sztywnymi oraz podczas zderzenia energia jest rozproszona w ten sposób, że względna energia kinetyczna serca po zderzeniu powinna się zmniejszyć w porównaniu do energii przed zderzeniem o znany procent, czyli

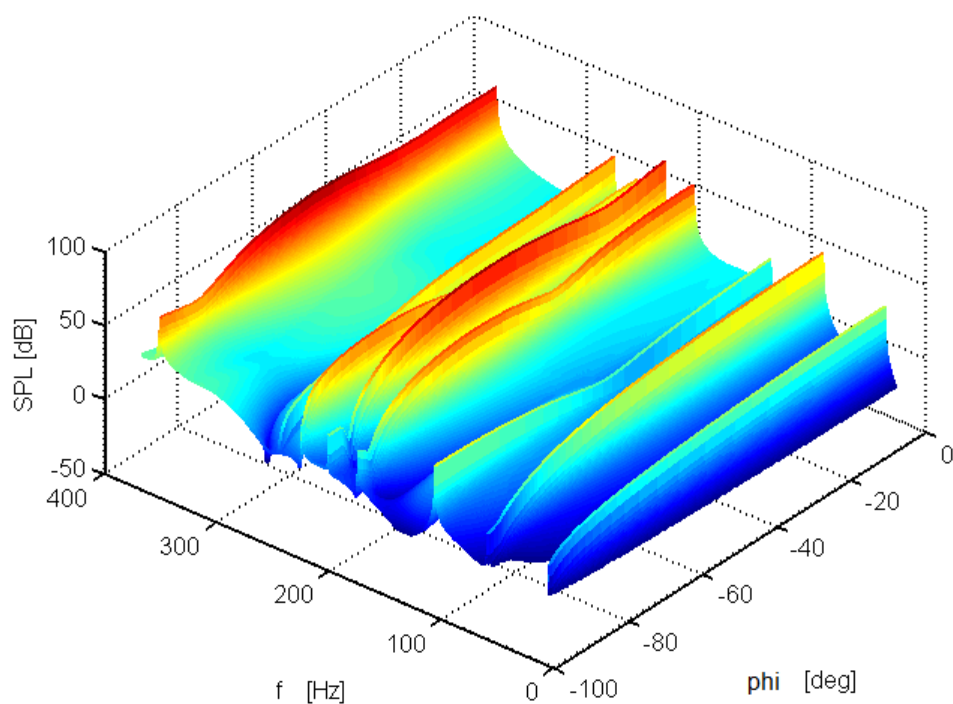
$$\frac{1}{2}I_c \left(\dot{\Theta}_{c,AI} - \dot{\Theta}_{b,AI} \right)^2 = \alpha \cdot \frac{1}{2}I_c \left(\dot{\Theta}_{c,BI} - \dot{\Theta}_{b,BI} \right)^2 \quad (5.15)$$

gdzie $\dot{\Theta}_{c,AI}$, $\dot{\Theta}_{b,AI}$ są prędkościami kątowymi serca i dzwonu po zderzeniu, a $\dot{\Theta}_{c,BI}$, $\dot{\Theta}_{b,BI}$ są prędkościami kątowymi serca i dzwonu przed zderzeniem, natomiast α jest współczynnikiem restytucji zależnym od strat energii kinetycznej.

Po przyjęciu parametrów układu oraz wymuszenia przy pomocy momentu przykładanego w sposób skokowy zostało wyznaczone rozwiązanie równania przy pomocy metody Rungego-Kutty 4 i 5 rzędu z krokiem dobieranym adaptacyjnie w pakiecie obliczeniowym MATLAB.

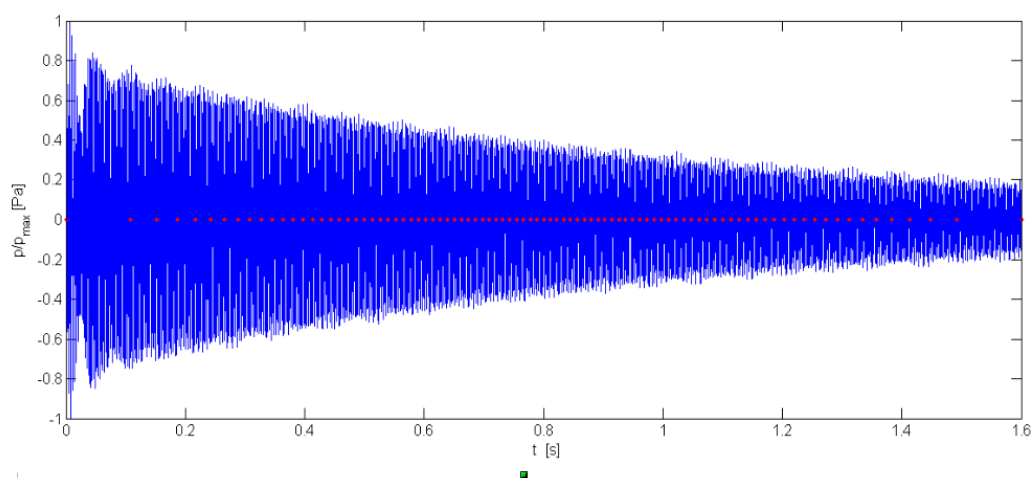
5.2.2. Aproksymacja odpowiedzi układu poprzez zmianę położenia punktu odbioru

W celu wygenerowania sygnału akustycznego w układzie wibroakustycznym, w którym dzwon jest kołysany, w niniejszej pracy ruch dzwonu względem punktu odbioru został przybliżony poprzez równoważny ruch punktu odbioru względem nieruchomego dzwonu. Odpowiedź układu, którą stanowi sygnał ciśnienia akustycznego, została wyznaczona w każdym węźle znajdującym się w płaszczyźnie ruchu dzwonu dla kąta mieszczącego się w przedziale od 0 do 90 stopni. Następnie w dziedzinie częstotliwości i przestrzeni przeprowadzona została aproksymacja ciśnienia oraz kąta przesunięcia fazowego. Wynik aproksymacji przedstawiony został na rysunku 5.8.



Rysunek 5.11: Poziom ciśnienia akustycznego w zależności od częstotliwości oraz kąta odchylenia dzwonu od pionu

Następnie na podstawie wyznaczonych odpowiedzi oraz wyników uzyskanych poprzez rozwiązanie równań ruchu dla układu dzwon-serce wyznaczone zostały przedziały czasowe oraz odpowiadające im punkty w przestrzeni.



Rysunek 5.12: Ciśnienie akustyczne w zależności od czasu z zaznaczonymi przedziałami czasowymi

W otrzymanych przedziałach czasowych umieszczone zostały odpowiednie fragmenty odpowiedzi wygenerowane w wyznaczonych punktach przestrzeni.

Wynik obliczeń – sygnał akustyczny wyznaczony dla kołyszącego się dzwonu, przedstawiony został na rysunku 5.12. Widoczne są także na nim przyjęte przedziały czasowe. Występują w tym sygnale zakłócenia związane z nieciągłościami w sygnale na granicy przedziałów. Można je jednak zdecydowanie zmniejszyć poprzez gęstsza dyskretyzację przedziałów czasowych. Dźwięk wygenerowany przy uwzględnieniu kołysania dzwonu cechują zmiany przebiegu sygnału szczególnie widoczne przy zmianach amplitud wierzchołków rezonansowych występujących w widmie. Są one nie tylko związane z tłumieniem drgań powodującym ich zanik logarytmiczny wraz z czasem, ale także ma na nie wpływ zmienna orientacja przestrzenna charakterystyki kierunkowej źródła. Uzyskany dźwięk subiektywnie można ocenić jako bliższy nagraniem rzeczywistego dzwonu.

5.3. Synteza dźwięku dzwonu o zadanych parametrach

W poprzednim rozdziale stworzony syntezytor numeryczny został zastosowany do wygenerowania dźwięku zbliżonego do dźwięku rzeczywistego dzwonu – Zygmunta znajdującego się w Katedrze Wawelskiej. Stworzony algorytm cechuje duża uniwersalność. Aby tego dowieść został on zastosowany do wygenerowania dźwięku dwu kolejnych dzwonów wśród których znalazł się zarówno dzwon zdecydowanie mniejszy, w skali laboratoryjnej oraz dzwon zdecydowanie większy. Do wyznaczenia parametrów konstrukcyjnych wyrażonych względem średnicy dzwonu został zastosowany ten sam meta-model, który sprawdził się w przypadku dzwonu Zygmunt. Pierwszy dzwon o skali laboratoryjnej posiadał średnicę 0,152 m oraz drugi średnicę dzwonu Car Kołokoł - 6,6 m. Dzwon Car Kołokoł (ros. Царь-колокол) wybrany został przez to, że jest dzwonem wyjątkowym, uznawanym za największy na świecie, który jednak nigdy nie zadzwonił. Ten ważący około 160 ton dzwon został odlany z brązu w 1735 roku. Gdy był już ukończony, ale jeszcze nie wydobyty z dołu odlewniczego, uległ pęknięciu podczas pożaru w 1737 roku na skutek gwałtownego schłodzenia wodą poprzez gaszących pożar. Uszkodzony dzwon wraz z odłamanym kawałkiem ważącym 11,5 tony w 1836 roku umieszczony został na kamiennym postumencie w moskiewskim Kremlu.



(a) dzwon w skali laboratoryjnej

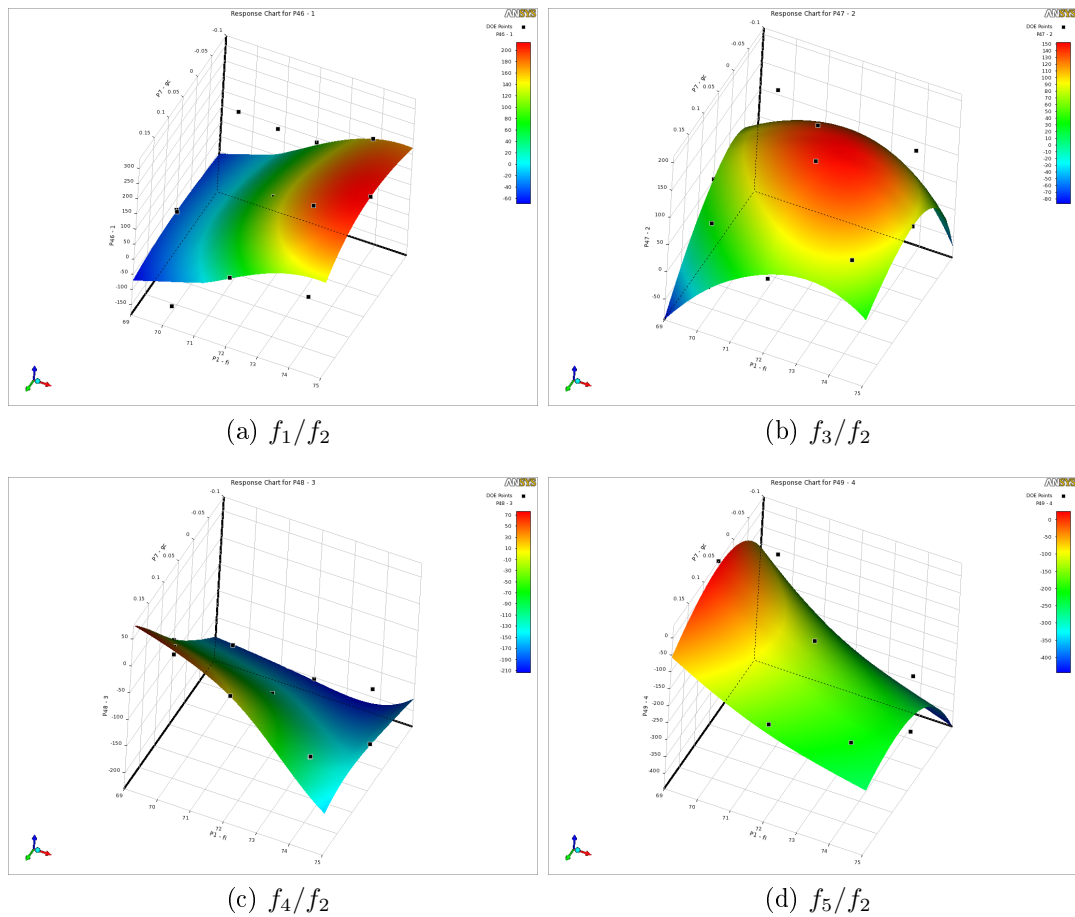


(b) Car Kołokoł

Rysunek 5.13: Dzwony, których parametry zostały wykorzystane do syntezy dźwięku

Powierzchnie odpowiedzi wyznaczone zostały także dla parametrów określających odchylenie w centach od oczekiwanych proporcji pomiędzy częstotliwościami (rozdział 3.1) składowymi występującymi w widmie dzwonów.

Wyznaczone dla meta-modelu powierzchnie odpowiedzi zostały przedstawione przykładowo dla dwu parametrów - kąta pochylenia profilu φ oraz grubości całkowitej g_c na rysunku 5.14. Widoczne jest na wykresach, że nie są one płaskie - parametry jakimi są odchylenia od oczekiwanych proporcji nie zmieniają się w sposób liniowy. Dodatkowo na wykresach zaznaczone zostały punkty, w których zostało przeprowadzone doświadczenie. Widoczne jest dobre dopasowanie powierzchni odpowiedzi opisanych wielomianami drugiego stopnia.



Rysunek 5.14: Powierzchnie odpowiedzi zawierające odchylenia w centach od oczekiwanych proporcji pomiędzy częstotliwością: a) 1 i 2, b) 3 i 2, c) 4 i 2, d) 5 i 2

Na wyznaczonych powierzchniach odpowiedzi poprzez przesiewanie wyników oraz zdefiniowanie funkcji celu zawierającej sumę odchyleń od oczeki-

wanych proporcji wyrażone w centach zostały wyznaczone punkty dla których funkcja celu przyjmuje najmniejsze wartości. Te punkty definiują wartości parametrów konstrukcyjnych dla których poszczególne składowe częstotliwości są najlepiej dostrojone oraz dźwięk dzwonu jest najbardziej harmonijny. Numeryczny syntezytor zbudowany w sposób parametryczny na podstawie meta-modelu pozwala na generowanie dźwięku który odpowiada zarówno konstrukcjom rzeczywistym, dla których poszczególne składowe częstotliwości dźwięku bywają silnie odstrojone, jak i na generowanie dźwięku nowych dzwonów precyzyjnie dostrojonych.

6. Synteza pola wibroakustycznego dla układu głośnika w obudowie

Głośnik to przetwornik elektro-mechaniczno-akustyczny, urządzenie umożliwiające otrzymywanie sygnałów akustycznych z sygnałów elektrycznych. Ze względu na element promieniujący energię akustyczną można wyróżnić dwa typy głośników: otwarty i tubowy. Głośnik otwarty to głośnik o promieniowaniu bezpośrednim, w którym elementem promieniującym jest membrana o odpowiednim kształcie i rozmiarach. Głośnik tubowy jest to głośnik o promieniowaniu pośrednim, w którym elementem promieniującym jest wylot tuby. Ze względu na pasmo przenoszenia głośniki można podzielić na: niskotonowe, średniotonowe, wysokotonowe [16, 66]. W niniejszej pracy rozpatrywany jest głośnik otwarty nisko-średnio tonowy pracujący przy wymuszeniu sygnałem o charakterze impulsowym.

6.1. Obiekt badań

Sprzężenie pól wibroakustycznych w układach takich jak głośniki, zazwyczaj uwzględniane było jedynie dla podstawowej częstotliwości drgań, gdy do membrany dołączona była dodatkowa objętość stanowiąca rezonator Helmholtza, a sama membrana modelowana była w postaci skupionej lub doskonale sztywnego tłoka [18, 16, 66, 71]. Dla wyższych częstotliwości konieczne jest zbudowanie ciągłego lub dyskretnego modelu całego układu. Ponieważ z powodu braku rozwiązania analitycznego problemu lub dużej złożoności obliczeniowej problemu jest to często zadaniem trudnym lub wręcz niemożliwym do wykonania, stosowane są modele hybrydowe, których część jest modelowana przy pomocy układów skupionych, a część przy pomocy układów ciągłych lub dyskretnych [18, 37].

Przetwornik elektro-mechaniczno-akustyczny, jakim jest głośnik otwarty w obudowie powinna cechować możliwie jak największa równomierność charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych oraz charakterystyk kierunkowości. Nawet gdy nieuniknione jest zmniejszanie współczynnika kierunkowości wraz

ze wzrostem częstotliwości nie powinny to być zmiany gwałtowane. W układzie jakim jest głośnik elektromagnetyczny występuje szereg sprzężeń pomiędzy polami fizycznymi. Jest on najczęściej modelowany w sposób uproszczony poprzez zastąpienie układu o parametrach rozłożonych układem o parametrach skupionych. Ponieważ układy elektryczne, mechaniczne i akustyczne opisywane są równaniami różniczkowymi o tej samej postaci, poprzez zastosowanie analogii elektryczno-mechaniczno-akustycznych zastępuje się złożony układ sprzężony obwodem elektrycznym zawierającym elementy takie jak oporność, pojemność i indukcyjność. Standardowe pomiary parametrów fizycznych głośnika pozwalające odpowiednio dobrać objętość jego obudowy przeprowadzane są w oparciu o model o parametrach skupionych. Niniejsza praca koncentruje się na sprzężeniu mechaniczno-akustycznym pomiędzy membraną oraz ośrodkiem akustycznym zarówno wewnątrz jak i na zewnątrz obudowy. Modelowane jest ono oraz jego efekt w przestrzeni otaczającej głośnik jako układ o parametrach rozłożonych. Dlatego też zastosowano nieczęsto spotykane podejście zamiany uproszczonego obwodu elektrycznego na analogiczny układ mechaniczny, w którym jako elementy skupione pozostawiono elementy odpowiedzialne za napęd głośnika, sztywność oraz tłumienie zawiesznień głośnika, natomiast membrana głośnika oraz przestrzeń ją otaczająca jest modelowana jako układ o parametrach rozłożonych.

Zaproponowany w niniejszej pracy algorytm syntezy numerycznego został zastosowany do badania wpływu kształtu oraz tłumienia wnętrza obudowy głośnika na jego charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową oraz fazowo-częstotliwościową. Konstruktorzy głośników niemal jednomyślnie stwierdzają, że w przypadku obudowy zamkniętej należy umieścić w jej wnętrzu jak największą ilość materiału pochłaniającego dźwięk [16, 66] oraz projektując zestawy złożone z wielu głośników starają się tak dobrać przedziały częstotliwości w jakim pracują poszczególne przetworniki tak, aby po umieszczeniu ich w obudowie, nie nakładały się one na przedziały w jakich występują rezonanse obudowy. W przypadku obudowy bass-reflex przyjmowane są odmienne założenia. W celu zwiększenia efektywności generowania niskich częstotliwości w zakresie poniżej podstawowej częstotliwości rezonansowej głośnika celowo projektuje się obudowę jako słabo tłumiony rezonator Helmholtza. Odpowiednio dostrojony rezonator powoduje, że przy dostarczeniu tej samej ilości energii co w przypadku obudowy zamkniętej, membrana głośnika drga z większą amplitudą przemieszczeń oraz przyspieszeń z powodu wpływu rezonansu występującego w obudowie, co przekłada się na

wyższy poziom wytworzonego ciśnienia akustycznego. Dodatkowo energia akustyczna emitowana jest przez otwór bass-reflex. Ten typ konstrukcji obudowy wprowadza jednak dodatkowe opóźnienia w odpowiedzi układu w dziedzinie czasu oraz zakłócenia fazowe [66] i dlatego jest ona często zastępowana poprzez konstrukcje wykorzystujące membrany bierne.

W niniejszej pracy badany jest układ głośnika szerokopasmowego w obudowie zamkniętej. Jako przetwornik elektroakustyczny został wybrany głośnik Visaton B-17 [14] dla którego zostały dobrane trzy kształty obudowy w ten sposób aby zachować tą samą jej objętość. Obudowa miała kształty sześcianu, prostopadłościanu oraz kształt o bocznych ściankach prostopadłych względem siebie oraz pochyłą ścianką tylną nazywaną dalej klinem. Ostatnia z konstrukcji uznana za najciekawszą została zrealizowana jako obiekt rzeczywisty oraz przeprowadzono jej kompleksowe pomiary jej parametrów akustycznych, których wyniki zostały zamieszczone w [14]. Analizując wyniki pomiarów trudno jest jednoznacznie określić który z parametrów układu wpływa na dany fragment charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej lub charakterystyki kierunkowości. Do tego celu w niniejszej pracy została wykorzystana MES pozwalająca na zbudowanie modeli układów o różnych parametrach dla których przeprowadzono symulacje numeryczne, w których modyfikowany był kształt obudowy oraz w wybranych przypadkach definiowane graniczne przypadki parametrów układu takich jak sztywność membrany przyjęta jako nieskończona.

Wprowadzenie całkowitego pochłaniania na ściankach wewnętrznych obudowy nie jest możliwe do fizycznej realizacji. Stąd istotne staje się pytanie, czy przy pozostawieniu właściwości pochłaniających ścianek obudowy oraz zmianie jej kształtu wewnętrznego przy zachowaniu tej samej objętości można zmodyfikować charakterystyki głośnika. Kształt zewnętrzny obudowy głośnika ma także istotny wpływ na jego charakterystyki z powodu zjawiska ugięcia fal akustycznych oraz ich interferencji podczas obiegu głośnika [46]. W ostatnich latach nastąpił silny rozwój metod aktywnych korekcji charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych głośników [14, 34]. Wadą tych metod jest to, że w przypadku głośników o nierównomiernych charakterystykach kierunkowych, poprawienie charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej w założonym punkcie pola często powoduje pogorszenie ich w punktach położonych w jego pobliżu. Stąd też szczególnie przy nagłaśnianiu dużych obszarów zamiast stosowania późniejszej korekcji należy nie dopuścić do wprowadzenia nierównomierności charakterystyk już na etapie projektowania zestawu głośnikowego.

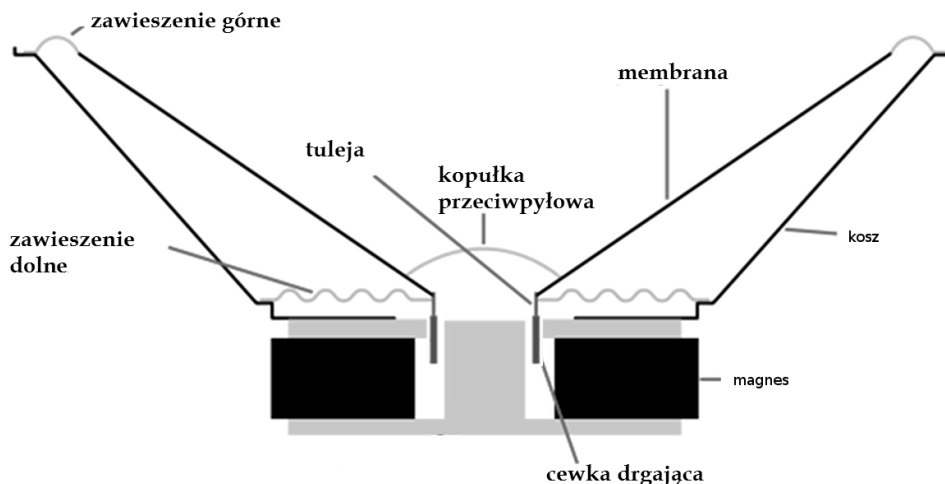
6.1.1. Głośnik otwarty

Istotnymi parametrami głośników otwartych są charakterystyki sprawności oraz skuteczność. Dokładne ich wyznaczenie jest skomplikowane pod względem matematycznym, wynikające z niemożności ujęcia w dokładne zależności częstotliwości i postaci drgań własnych membrany oraz jej impedancji promieniowania. Przybliżony sposób ich wyznaczania opiera się na następujących założeniach:

- wszystkie punkty membrany drgają z taką samą fazą w całym zakresie przetwarzania;
- obciążenie akustyczne membrany jest takie samo jak tłoka płaskiego o takiej samej średnicy, drgającego w nieskończenie wielkiej odgradzie.

Parametry charakteryzujące głośnik można podzielić na trzy grupy. Do pierwszej z nich należą parametry elektryczne takie jak rezystancja cewki drgającej R_e – dla prądu stałego, indukcyjność własna cewki drgającej L_e , indukcja magnetyczna w szczelinie B , długość przewodu w szczelinie l . Do drugiej należą parametry mechaniczne: masa membrany M – efektywna masa części drgającej membrany, powierzchnia membrany S – efektywna powierzchnia drgająca, sztywność zawieszenia K – zależna od właściwości resorów, mechaniczna rezystancja zawieszenia R_m . Do trzeciej – parametry akustyczne, czyli rezystancja promieniowania R_r , która zależy od powierzchni membrany S i parametrów ośrodka otaczającego głośnik oraz jest niewielka dla niskich częstotliwości.

Na rysunku 6.1 przedstawiony został schemat przykładowego elektrodynamicznego głośnika otwartego stożkowego.



Rysunek 6.1: Schemat budowy głośnika stożkowego

Impedancja promieniowania ma postać zespoloną i wyznacza się z zależności:

$$Z_r = R_r + jX_r = \rho_0 c S [R(2ka) + jX(2ka)] \quad (6.1)$$

gdzie:

ρ_0 - gęstość powietrza;

c - prędkość dźwięku;

S - efektywna powierzchnia tłoka;

$R(2ka)$ - część rzeczywista impedancji tłoka, gdzie J_1 funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu 1

$$R(2ka) = 1 - \frac{2J_1(2ka)}{2ka} \quad (6.2)$$

$X(2ka)$ - część urojona impedancji tłoka, gdzie H_1 funkcja Struwa pierwszego rodzaju

$$X(2ka) = \frac{2H_1(2ka)}{2ka} \quad (6.3)$$

Ponieważ:

$$R(2ka) \approx \frac{1}{2}(ka)^2 \quad (6.4)$$

$$X(2ka) \approx \frac{8ka}{3\pi} \quad (6.5)$$

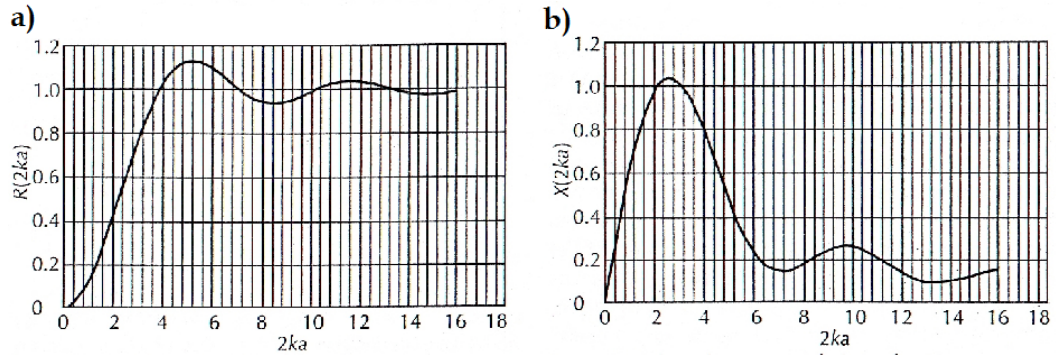
to zależność (6.1) przyjmie postać:

$$Z_r \approx \frac{\rho_0 S^2 \omega^2}{2\pi c} + j \frac{\rho_0 8 S a \omega}{3\pi} \quad (6.6)$$

Dla wysokich częstotliwości:

$$Z_r \approx \rho_0 c S \quad (6.7)$$

Natomiast dla średnich do wyznaczenia impedancji promieniowania można korzystać z wykresów zamieszczonych poniżej



Rysunek 6.2: a) część rzeczywista impedancji tłoka, b) część urojona impedancji tłoka

Sztywność wnętrza obudowy głośnika

$$K_b = \frac{\kappa P_0 S^2}{V_0} \quad (6.8)$$

gdzie: κ – wykładnik adiabaty dla powietrza, P_0 – statyczne ciśnienie powietrza, S – efektywna powierzchnia promieniowania, V_0 – objętość powietrza w obudowie.

Natomiast całkowita sztywność głośnika w obudowie wynosi

$$K' = K + K_b \quad (6.9)$$

Całkowita masa wynosi

$$M' = M + \frac{\rho_0 8 S a}{3\pi} \quad (6.10)$$

Częstość rezonansowa wynosi

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K'}{M'}} \quad (6.11)$$

Częstotliwość rezonansowa wynosi

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K'}{M'}} \quad (6.12)$$

Impedancja mechaniczna przybiera postać

$$Z_m = R_m + R_r(2ka) + j \left[\omega M + X_r(2ka) - \frac{K'}{\omega} \right] \quad (6.13)$$

Dla niskich częstotliwości prawdziwa jest zależność

$$Z_m = R_m + \frac{\rho_0 S^2 \omega^2}{2\pi c} + j \left(\omega M' - \frac{K'}{\omega} \right) \quad (6.14)$$

Moc promieniowania głośnika wyznacza się z zależności

$$P_r = u_{RMS}^2 R_r = \frac{1}{2} u_m^2 R_r \quad (6.15)$$

gdzie: R_r – rezystancja promieniowania, u_{RMS} – wartość skuteczna prędkości promieniowania, u_m – amplituda prędkości promieniowania.

Skuteczność głośnika definiowana jest jako stosunek średniej mocy akustycznej promieniowanej przez głośnik $\langle P_r \rangle$ do średniej mocy elektrycznej dostarczonej do głośnika $\langle P_e \rangle$:

$$\eta = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_e \rangle} = \frac{R_r}{\frac{|Z_m|^2}{(Bl)^2} R_e + R_m + R_r} \quad (6.16)$$

Skuteczność głośnika jest silnie zależna od częstotliwości i osiąga najwyższą wartość w obszarze mechanicznego rezonansu tłoka. Skuteczność głośników otwartych wynosi kilka procent.

Impedancja elektryczna głośnika zależy od typu zamocowania membrany:

— jeżeli stożek membrany jest zamocowany, tak by ograniczyć ruch:

$$Z_e = R_e + j\omega L_e \quad (6.17)$$

— jeżeli jeżeli stożek membrany ma możliwość ruchu:

$$Z_e = R_e + j\omega L_e + \frac{B^2 l^2}{Z_m} \quad (6.18)$$

Natężenie fali akustycznej jest wielkością wektorową opisującą wielkość i kierunek chwilowego strumienia energii akustycznej na jednostkę powierzchni w jednostce czasu. Średnia wartość natężenia jest proporcjonalna do ciśnienia akustycznego. Dla wymuszenia sinusoidalnego, przy założeniu, że czoło fali jest kuliste lub płaskie

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{\rho_0 c} \quad (6.19)$$

gdzie: p_m – amplituda ciśnienia akustycznego przy wymuszeniu sinusoidalnym.

Współczynnik kierunkowości Q jest definiowany jako stosunek średniego natężenia dźwięku w wybranym punkcie w polu dalekim dla analizowanego źródła dźwięku, do średniego natężenia w tym samym punkcie, jakie osiągnęłyby przez źródło punktowe promieniujące z taką samą mocą, jak źródło

analizowane. Wartość współczynnika kierunkowości Q można wyznaczać się z następującej zależności

$$Q(\theta, \phi) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{p_m^2(r, \theta, \phi)}{\rho_0 c}}{\frac{\langle P \rangle}{4\pi r^2}} \quad (6.20)$$

gdzie: $\langle P \rangle$ - średnia moc promieniowania.

Należy pamiętać, że ponieważ zarówno moc akustyczna jak i ciśnienie akustyczne zależą od częstotliwości, to także współczynnik kierunkowości jest funkcją częstotliwości.

Współczynnik kierunkowości wyznaczony w osiach głównych źródła dźwięku zwany jest indeksem kierunkowości i definiowany jest jako

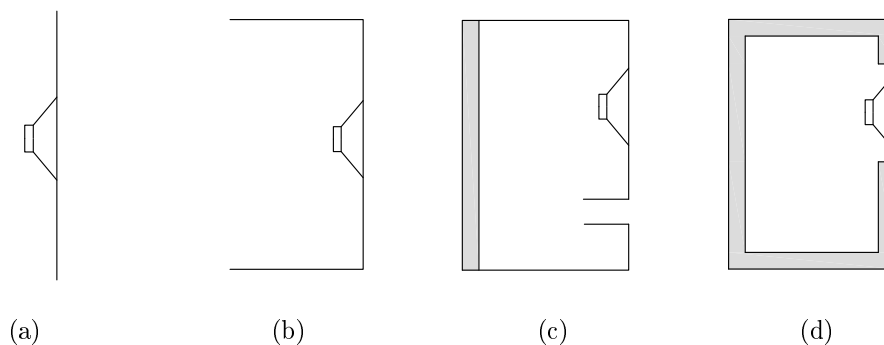
$$DI = 10 \log_{10} Q \quad (6.21)$$

Skuteczność głośnika informuje o tym, jaki poziom ciśnienia akustycznego na osi głównej głośnika w pewnej odległości będzie uzyskiwany przy doprowadzeniu pewnej określonej mocy elektrycznej. Najczęściej skuteczność głośnika wyznaczana jest na osi głównej głośnika w odległości 1 [m] przy dostarczeniu mocy akustycznej 1 [W]. Ta definicja jest jednak trudna w praktycznej realizacji ponieważ moc dostarczona do głośnika zależy od jego impedancji elektrycznej, która jest zmienna w dziedzinie częstotliwości. Stąd często stosuje się wymuszenie poprzez przyłożenie sygnału napięcia w postaci szumu szerokopasmowego, lub przebiegu sinusoidalnego o płynnie zmienianej częstotliwości, oraz stałej wartości skutecznej w dziedzinie częstotliwości wynoszącej 2,83 [V].

6.1.2. Obudowy głośników otwartych

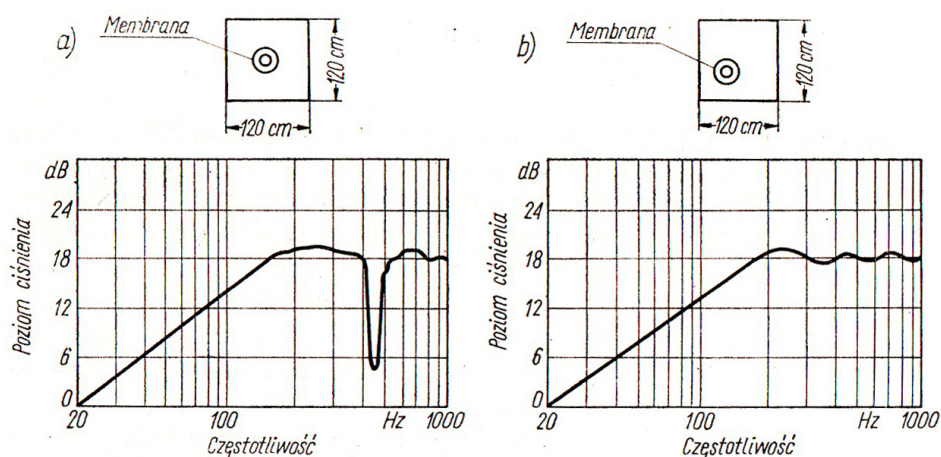
Zadania stawiane przed obudowami głośnikowymi to przede wszystkim oddzielenie akustyczne obu stron membrany od siebie mające na celu eliminację wzajemnego znoszenia się ciśnienia akustycznego o fazach przeciwnych wytwarzanego po obu stronach membrany głośnika (fale znoszą się tym skuteczniej, im większa jest długość fali w porównaniu z rozmiarami membrany) oraz skierowanie energii akustycznej, wytwarzanej przez jedną stronę membrany na drugą stronę, po odpowiednim skorygowaniu faz.

Podstawowe rodzaje obudów głośnikowych otwartych i zamkniętych przedstawia rysunek 6.3.

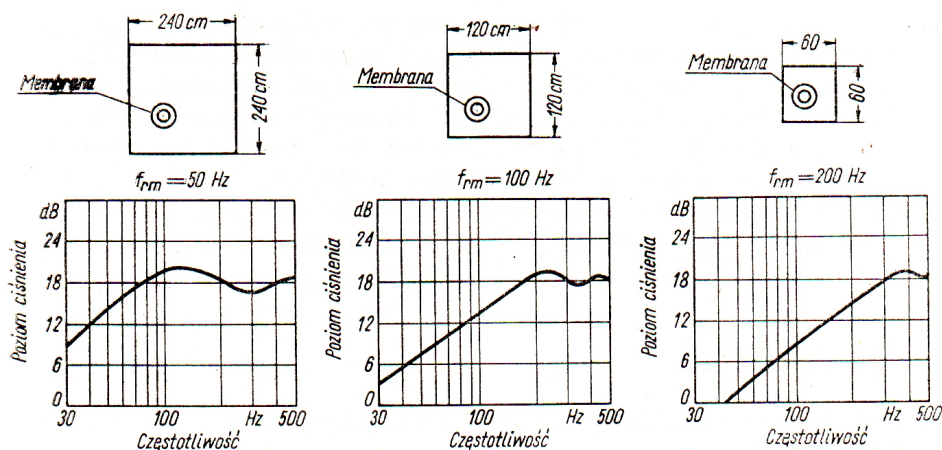


Rysunek 6.3: Typowe obudowy głośnikowe: a) odgroda, b) obudowa otwarta, c) obudowa bas-reflex, d) obudowa zamknięta

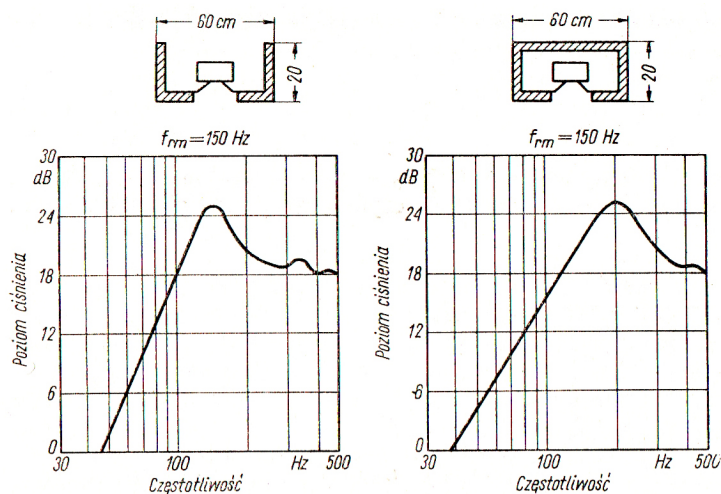
W niniejszej pracy rozpatrywany jest głośnik w obudowie otwartej. Przykładem obudowy otwartej jest odgroda. Celem stosowania odgrody jest zapobieganie uginaniu fal wytwarzanych przez jedną stronę membrany na jej krawędziach i interferencji tych fal z falami wytworzonymi po stronie przeciwnej. Na rysunku 6.4 przedstawione zostały charakterystyki poziomu ciśnienia akustycznego wytworzonego przez głośniki stożkowe z membraną o średnicy 25 cm, umieszczone w odgradach: środkowo i nieśrodkowo. Wpływ rozmiaru obudowy przedstawia rysunek 6.5.



Rysunek 6.4: Charakterystyki poziomu ciśnienia akustycznego wytworzonego przez głośniki stożkowe z membraną o średnicy 25 cm, umieszczone w odgradach: środkowo i nieśrodkowo [71]



Rysunek 6.5: Charakterystyki poziomu ciśnienia akustycznego wytworzonego przez głośniki stożkowe z membraną o średnicy 25 cm, umieszczone w odgrodach o różnych rozmiarach [71]

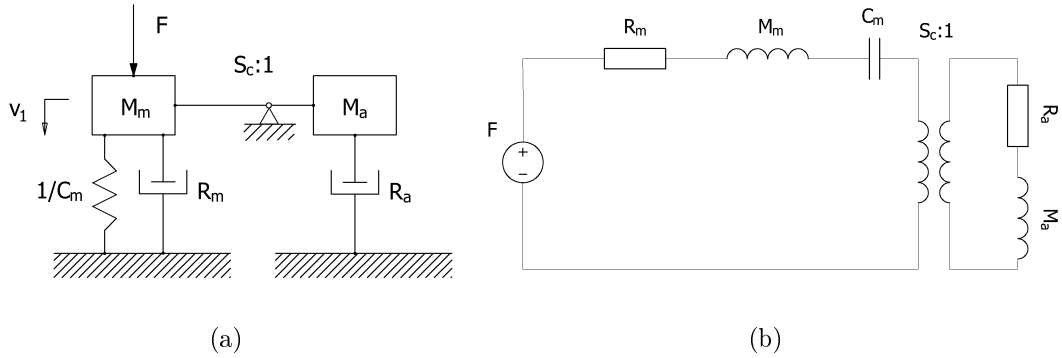


Rysunek 6.6: Charakterystyki poziomu ciśnienia akustycznego wytworzonego przez głośniki stożkowe umieszczone w obudowie otwartej i zamkniętej [71]

W przypadku obudowy zamkniętej, podobnie jak w przypadku nieskończonej odgrody, przestrzeń otaczająca membranę jest podzielona na dwie części. Nie występuje wzajemne oddziaływanie pól akustycznych wytworzonych po obu stronach membrany. Membrana jest natomiast obciążona z każdej strony inną impedancją. Parametry obudowy zamkniętej wpływają na pracę głośnika zwłaszcza w okolicach częstotliwości rezonansowych sprzężonego układu objętości akustycznej wewnątrz obudowy oraz membrany. Na rysunku 6.6 widoczne jest, że pierwsza częstotliwość rezonansowa układu głośnika w obudowie otwartej jest niższa od częstotliwości identycznego głośnika znajdującego się w układzie sprzężonym głośnika i obudowy zamkniętej.

6.2. Model numeryczny

Drgania membrany były sprzężone z ośrodkiem akustycznym wewnątrz oraz na zewnątrz obudowy. Obudowa została przyjęta jako doskonale sztywna konstrukcja na której wewnętrznych ściankach występują straty energii. Na zewnętrznej powierzchni objętości akustycznej znajdującej się na zewnątrz głośnika założone zostało całkowite wypromieniowanie dźwięku z układu.



Rysunek 6.7: Schemat zastępczy modelu fenomenologicznego głośnika oraz otaczającego go ośrodka akustycznego: a) zastosowany w pracy układ mechaniczny, b) odpowiadający mu analogiczny obwód elektryczny

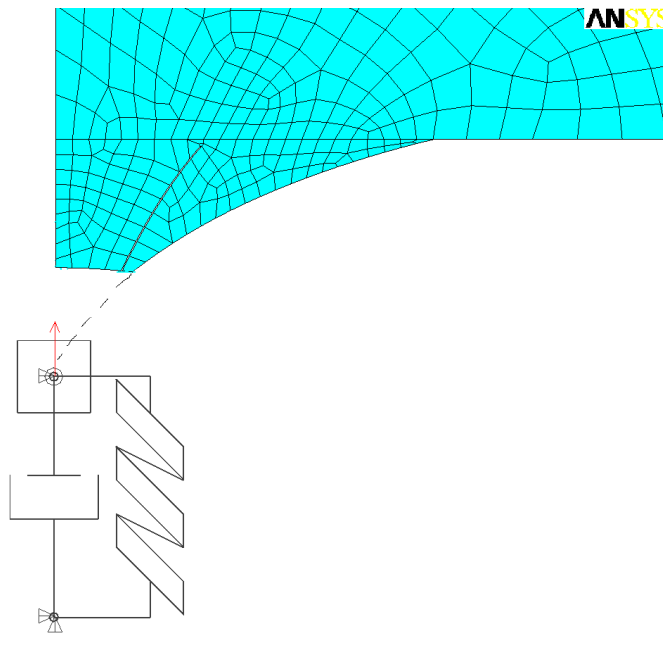
Badania przeprowadzone zostały dla głośnika Visaton BG-17. Do wyznaczenia wartości parametrów mechanicznych w zastępczym układzie skupionym wykorzystane zostały standardowe parametry Thiele'a-Smalla podane przez producenta (tabela 6.1).

Tablica 6.1: Parametry katalogowe głośnika przyjęte do obliczeń

Q_{ts}	0.64
M_{ms}	$6.5 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$
f_s	110 Hz
Bl	5,7 Tm
R_{dc}	6,3 Ω
V_{as}	8,2 dm ³
S_d	143 cm ²

Budowa modelu głośnika rozpoczęta została od stworzenia modelu fenomenologicznego – układu mechanicznego (rysunek 6.7a) opisującego sprzężony układ elektryczno-mechaniczno-akustyczny. Uzyskany on został na podstawie stosowanego do wyznaczenia parametrów (tabela 6.1) zastępczego układu elektrycznego, w którym poprzez zastosowanie analogii elektryczno-mechanicznych

I rodzaju, elementy części elektrycznej układu głośnika zostały zamienione na elementy mechaniczne oraz utworzyły układ mechaniczny o parametrach skupionych złożony z mas, sprężystości, tłumienia oraz dźwigni dwustronnej. Następnie na tej podstawie zbudowano układ dyskretno-ciągły w którym zastąpiono odpowiednie elementy skupione modelujące membranę oraz objętości akustyczne układami o parametrach rozłożonych, które zostały zdyskretyzowane przy pomocy MES. Węzłom znajdującym się na krawędzi wewnętrznej membrany odebrano możliwość przemieszczeń promieniowych i pozostawiono możliwość przemieszczeń na kierunku osi głośnika. Węzły te zostały następnie w doskonale sztywny sposób połączone z węzłem mechanicznego układu skupionego w którym znajduje się masa. Wymuszenie drgań przyjęte zostało w postaci siły zmieniającej się harmonicznym w czasie, będącej analogiem napięcia w zastępczym obwodzie elektrycznym. W obecnym modelu pominięty został wpływ indukcyjności cewki, który szczególnie nabiera znaczenia w zakresie średnich i wysokich częstotliwości. Wprowadzone uproszczenie nie rzutuje w znaczny sposób na uzyskiwane wyniki ponieważ górna częstotliwość rozpatrywana w obliczeniach numerycznych wynosi 4000 Hz.



Rysunek 6.8: Przekrój modelu dyskretno-ciągłego głośnika zbudowanego z elementów skupionych odpowiadających fragmentowi części mechanicznej schematu 6.7 oraz elementów skończonych – membrana i ośrodek akustyczny

Parametry analogicznego układu mechanicznego – sztywność K i tłumienie C wyznaczone zostały z zależności

$$C_{mt} = 1/((2\pi f_s)^2 \cdot M_{ms}) \quad (6.22)$$

$$K = 1/C_m \quad (6.23)$$

$$R_{mt} = 1/((2\pi f_s) \cdot C_m \cdot Q_{ts}) \quad (6.24)$$

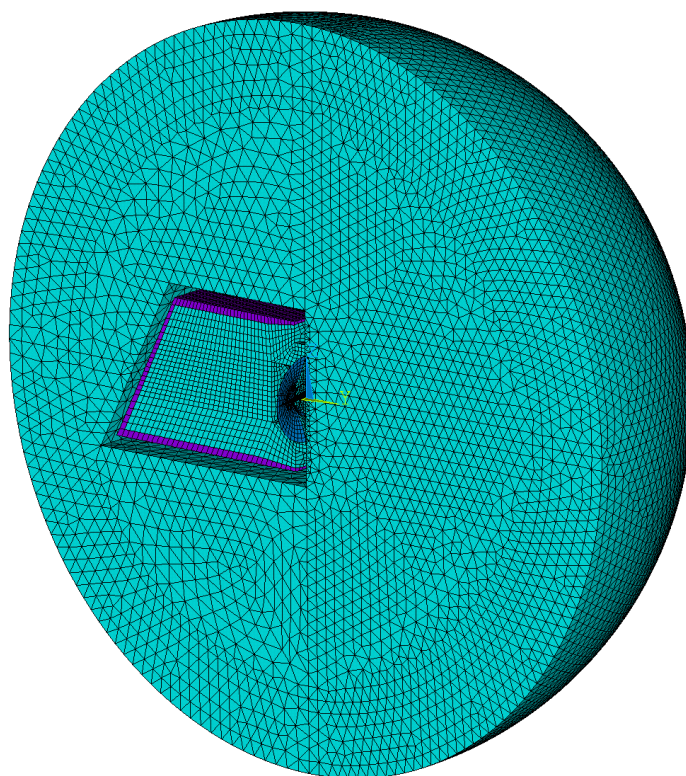
$$C = R_m \quad (6.25)$$

W przypadku modelowania układu bez uwzględnienia rezonansów obudowy do układu skupionego dołączona została dodatkowa sprężystość k_b związana ze sztywnością powietrza w obudowie, wyznaczona z zależności:

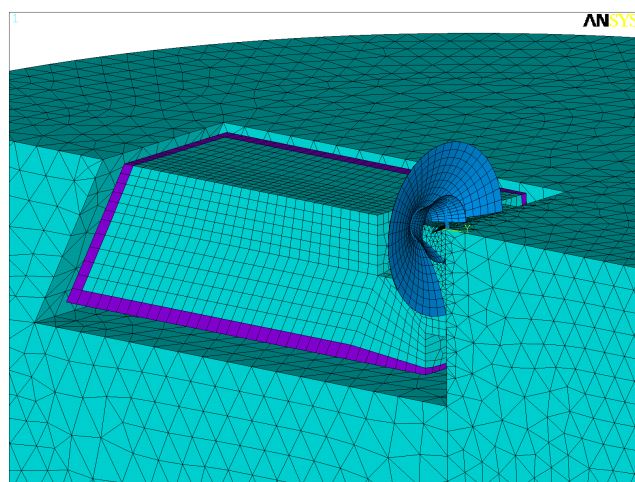
$$K_b = \frac{(\pi a^2)^2 \rho_0 c^2}{V_b} \quad (6.26)$$

w której a to promień membrany, ρ_0 – gęstość powietrza, c – prędkość dźwięku, V_b – objętość obudowy. Objętość obudowy wyznaczona została przy uwzględnieniu umieszczonego w niej głośnika i wynosiła 0.1 m^3 .

Model całego układu mechaniczno-akustycznego został przedstawiony na rysunku 6.9. Geometria modelu pochodzi z pomiarów rzeczywistej konstrukcji. Do stworzenia modelu membrany zastosowane zostały elementy SolSh190, które pomimo, że są elementami powłokowymi, pod względem geometrycznym oraz relacji konstytutywnych są kompatybilne z elementami trójwymiarowymi. Ten rodzaj elementów skończonych sformułowany zostały poprzez Bathe'a i Dvorkina [3] w 1986 roku. Wnętrze obudowy zdyskretyzowane zostało przy pomocy elementów trójwymiarowych Fluid30. Ośrodek akustyczny otaczający głośnik zamodelowany został poprzez dołączenie objętości akustycznej ograniczonej przy pomocy kuli o promieniu 0.5 m wypełnionej elementami akustycznymi Fluid30. Na zewnętrznej powierzchni przestrzeni akustycznej zadany został warunek Sommerfelda oznaczający całkowite wypromieniowanie dźwięku z układu uwzględniany poprzez elementy Fluid130.



(a)

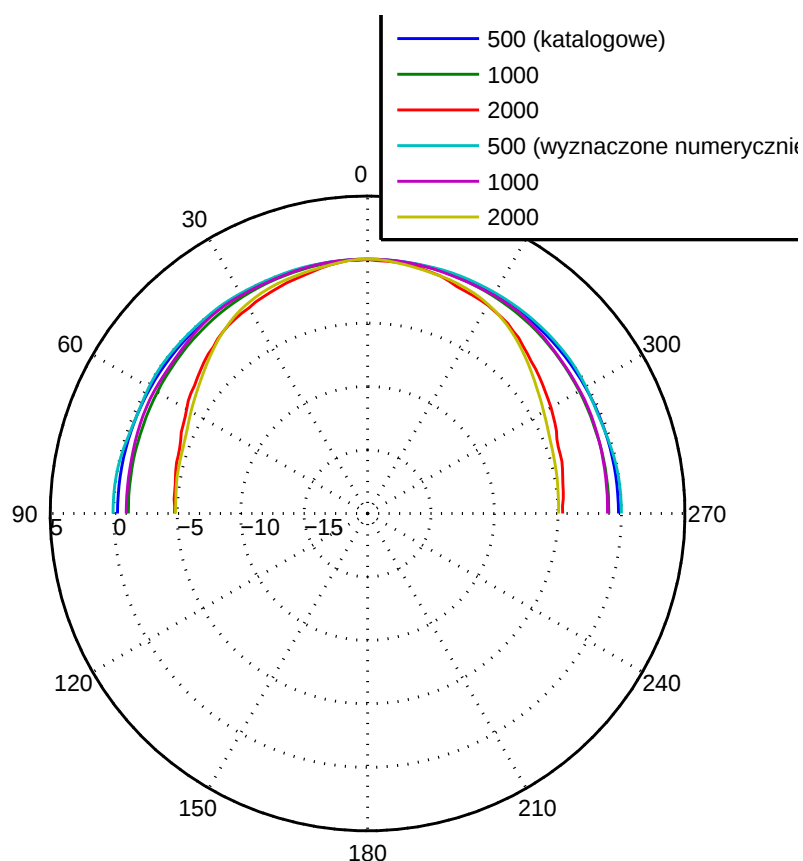


(b)

Rysunek 6.9: Model układu sprzężonego: a) przekrój modelu, b) ćwiartka objętości akustycznej oraz pełna membrana

Wymuszenie w układzie pochodziło od siły harmonicznej o amplitudzie 1 [N] i częstotliwości od 1 do 4200 [Hz] przyłożonej do węzła masy skupionej. Siła ta jest proporcjonalna do napięcia podanego na zaciski rzeczywistego głośnika.

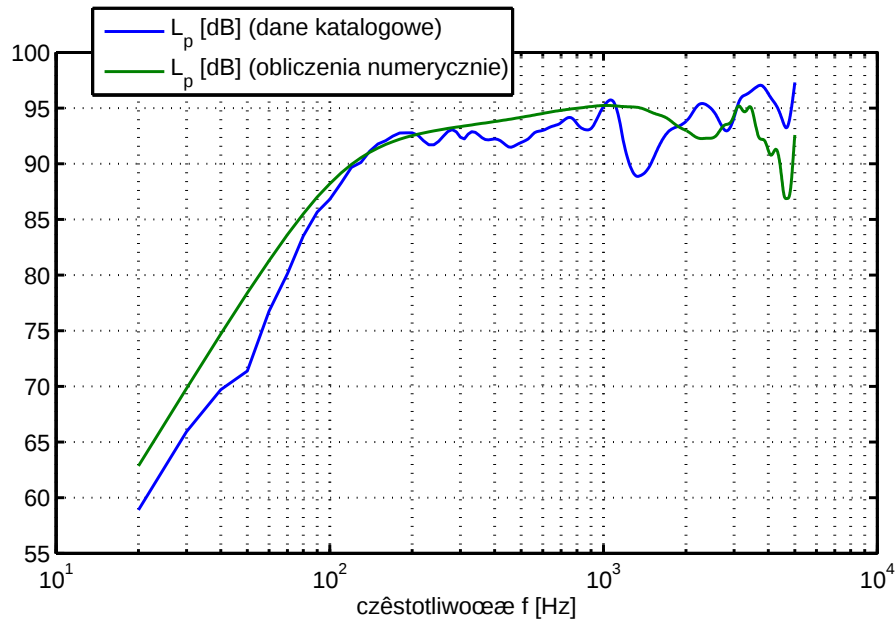
W celu określenia rozbieżności pomiędzy charakterystykami otrzymywanymi w modelu numerycznym oraz danymi katalogowymi głośnika przeprowadzony został eksperyment numeryczny. Polegał on na przyjęciu na płaszczyźnie ścianki przedniej głośnika doskonale sztywnej, nieskończonej odgrody. Wyniki analizy numerycznej otrzymane dla częstotliwości od 10 do 4000 Hz zostały uśrednione w oktawach o częstotliwościach środkowych 500, 1000 i 2000 Hz. Charakterystyki kierunkowości wyznaczone zostały dla płaszczyzny poziomej dla kątów mieszczących się od -90 do 90 stopni. Dla kierunku odpowiadającemu kątowi określona została różnica pomiędzy wyznaczonym dla niego poziomem ciśnienia akustycznego oraz poziomem na osi głównej głośnika. Porównanie charakterystyk kierunkowości wyznaczonych numerycznie z katalogowymi zamieszczone zostało na rysunku 6.10.



Rysunek 6.10: Porównanie charakterystyk kierunkowości udostępnionych przez producenta z charakterystykami wyznaczonymi numerycznie

Charakterystyki kierunkowości uzyskane w doświadczeniu numerycznym (rysunek 6.10) odbiegają od charakterystyk katalogowych maksymalnie o 1.5 dB. Największe rozbieżności pojawiają się po przekroczeniu kąta 60 stopni od osi głośnika, co jest związane z przyjętymi podczas modelo-

wania uproszczeniami oraz z tym, że odgroda pomiarowa ma skończone wymiary wpływające na uzyskiwane wyniki. Porównanie charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych wyznaczonych na osi głównej głośnika zostało ukazane na rysunku 6.11.

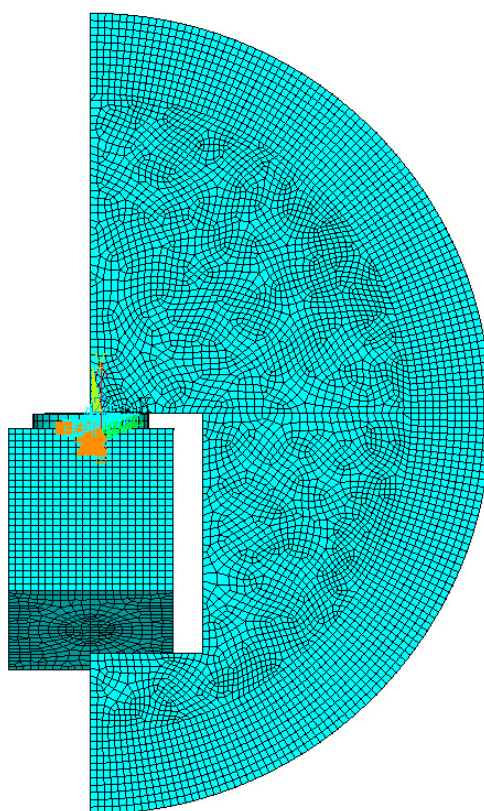


Rysunek 6.11: Porównanie charakterystyki amplitudowo -częstotliwościowej udostępnionej przez producenta z charakterystyką wyznaczoną numerycznie

Synteza odpowiedzi układu została przeprowadzona w sposób analogiczny jak w przypadku misy oraz dzwonu i polegała na wygenerowaniu przebiegu czasowego ciśnienia akustycznego w punktach położonych w odległości 0.5 m od środka układu. Jako pierwszy wybrany został punkt znajdujący się na osi głównej głośnika, a następnie wybierane były kolejne aż do uzyskanie 180 stopni z rozdzielczością 15 stopni. Punkt, którego lokalizacja znajduje się na prostej określającej kierunek o kącie 180 stopni znajduje się za obudową głośnika.

6.3. Wpływ tłumienia w obudowie na charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe dla głośnika z membraną doskonale sztywną

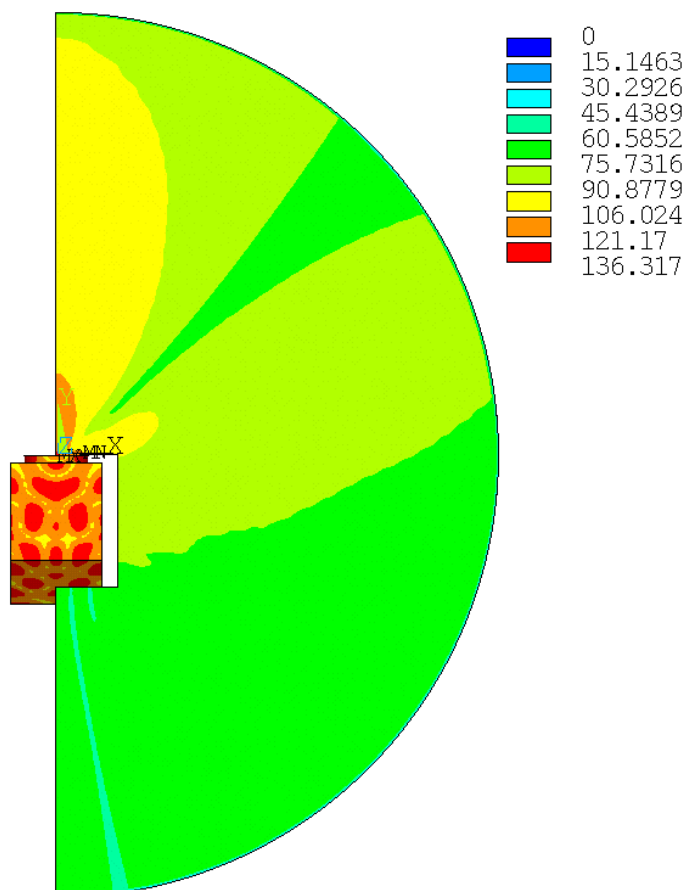
Założenie doskonale sztywnej membrany zostało przyjęte aby pozostawić w układzie tylko te rezonanse, które związane są z ośrodkiem akustycznym we wnętrzu obudowy. Jest to wyidealizowany przypadek trendu w konstrukcji membran głośników polegający na budowie membran o coraz większej sztywności związanej zarówno z zastosowanym materiałem (np. aluminium lub tytan) jak i kształtem.



Rysunek 6.12: Uproszczony model - objętość akustyczna osiowo-symetryczna

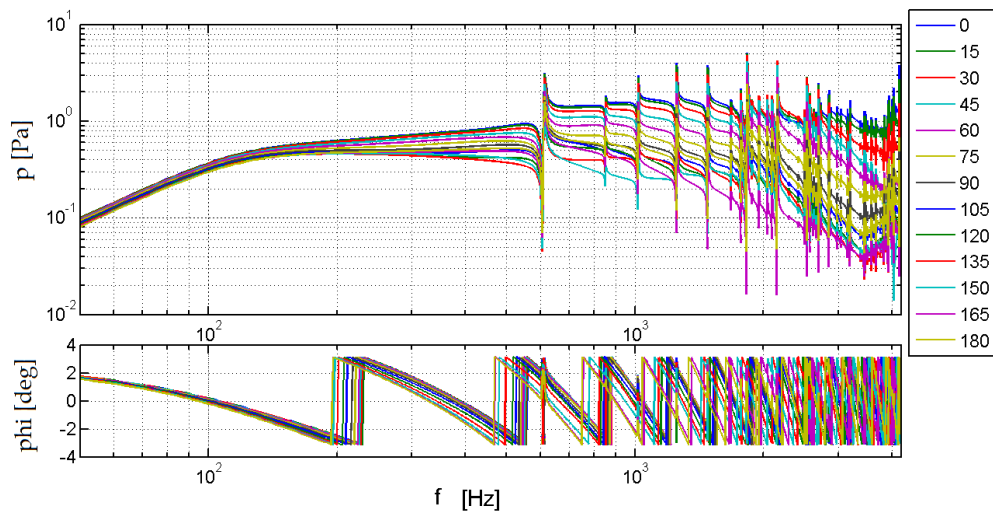
W związku z dużym stopniem złożoności obliczeniowej modelu przeprowadzone zostały dodatkowo obliczenia przy przyjęciu dwu dodatkowych uproszczeń: osiowo-symetrycznej przestrzeni akustycznej oraz doskonale sztywnej membrany. Aby pozostawić obciążenie membrany powietrzem znajdującym się w obudowie pozostawiony został model trójwymiarowy wnętrza obudowy jednak zewnętrzny kształt obudowy został zastąpiony kształtem walcowym. Zastosowane zostały dwuwymiarowe elementy skończone Fluid29 oraz Fluid129.

W rozpatrywanym przypadku membrany papierowej, przybliżenie to sprawdza się jedynie dla niskich częstotliwości, natomiast interesujące jest czy ewentualne zwiększenie sztywności membrany wpływa w sposób istotny na pole otaczające głośnik w obudowie.

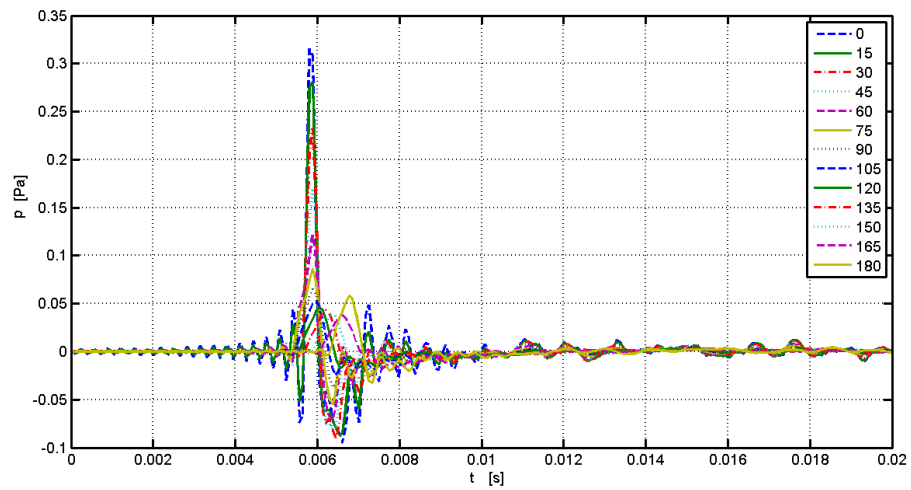


Rysunek 6.13: Poziom ciśnienia akustycznego dla częstotliwości 4000Hz w stanie ustalonym przy wymuszeniu harmonicznym

Na rysunku 6.15-6.15 widoczne są wykresy na których znajduje się zsyntetyzowana odpowiedź głośnika w dziedzinie czasu na wymuszenie o charakterze bardzo krótkiego impulsu. Współczynnik pochłaniania określający rzeczywistą część admitancji na powierzchni wewnętrznej obudowy został przyjęty w kolejnych obliczeniach jako 0.001, 0.01, 0.1.

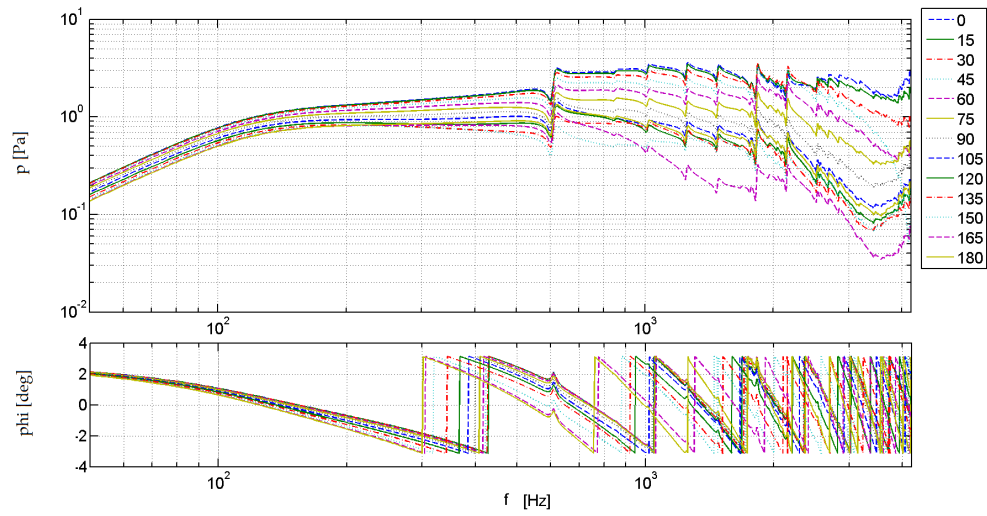


(a)

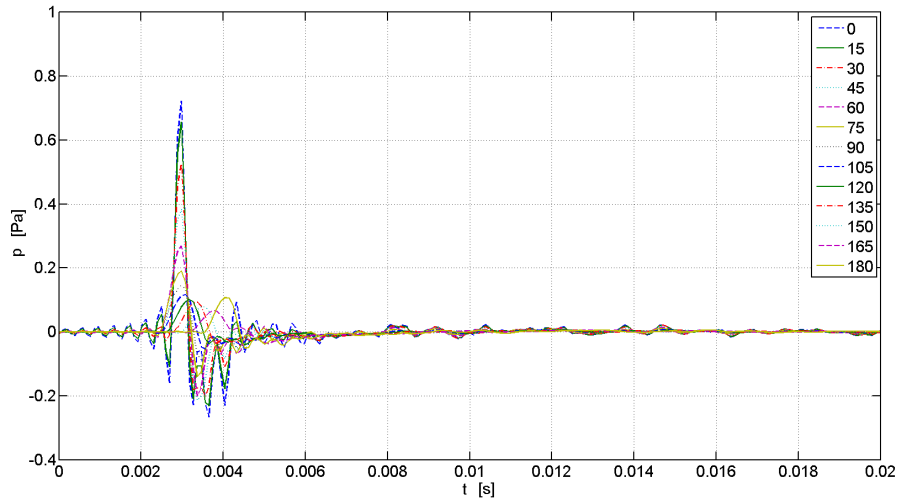


(b)

Rysunek 6.14: Dla współczynnika pochłaniania 0.001 wyznaczone a) ciśnienie akustyczne oraz kąt przesunięcia fazowego w punktach położonych na okręgu o promieniu 0.5 m, b) przebieg czasowy ciśnienia akustycznego w punktach położonych na okręgu o promieniu 1 m

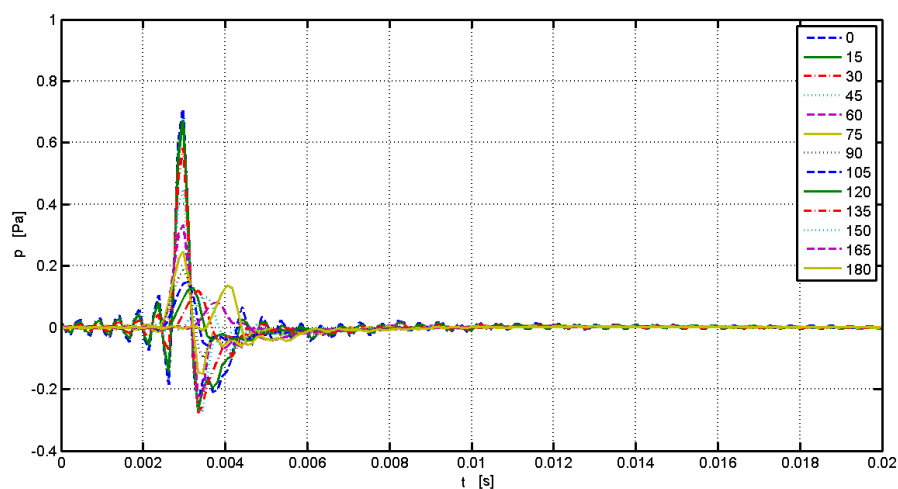
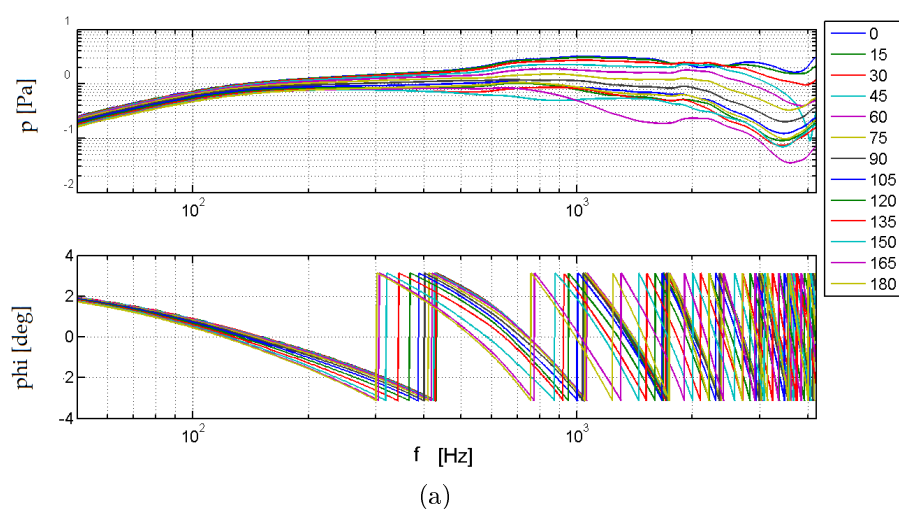


(a)



(b)

Rysunek 6.15: Dla współczynnika pochłaniania 0.01 a) ciśnienie akustyczne oraz kąt przesunięcia fazowego w punktach położonych na okręgu o promieniu 0.5 m, b) przebieg czasowy ciśnienia akustycznego w punktach położonych na okręgu o promieniu 0.5 m



Rysunek 6.16: Dla współczynnika pochłaniania 0.1 a) ciśnienie akustyczne oraz kąt przesunięcia fazowego w punktach położonych na okręgu o promieniu 0.5 m, b) przebieg czasowy ciśnienia akustycznego w punktach położonych na okręgu o promieniu 0.5 m

Wpływ tłumienia wewnątrz obudowy widoczny jest zarówno na charakterystykach amplitudowo-częstotliwościowych jak i na odpowiedziach układu w dziedzinie czasu. Najlepsze charakterystyki z punktu widzenia pracy głośnika są jak najbardziej wyrównane. Stąd na podstawie wyników można wyciągnąć wniosek, że w przypadku głośnika o membranie cechującej się dużą sztywnością im wyższy jest współczynnik tłumienia w obudowie tym lepiej głośnik wygeneruje dźwięk przy wymuszeniu sygnałem o charakterze impulsowym.

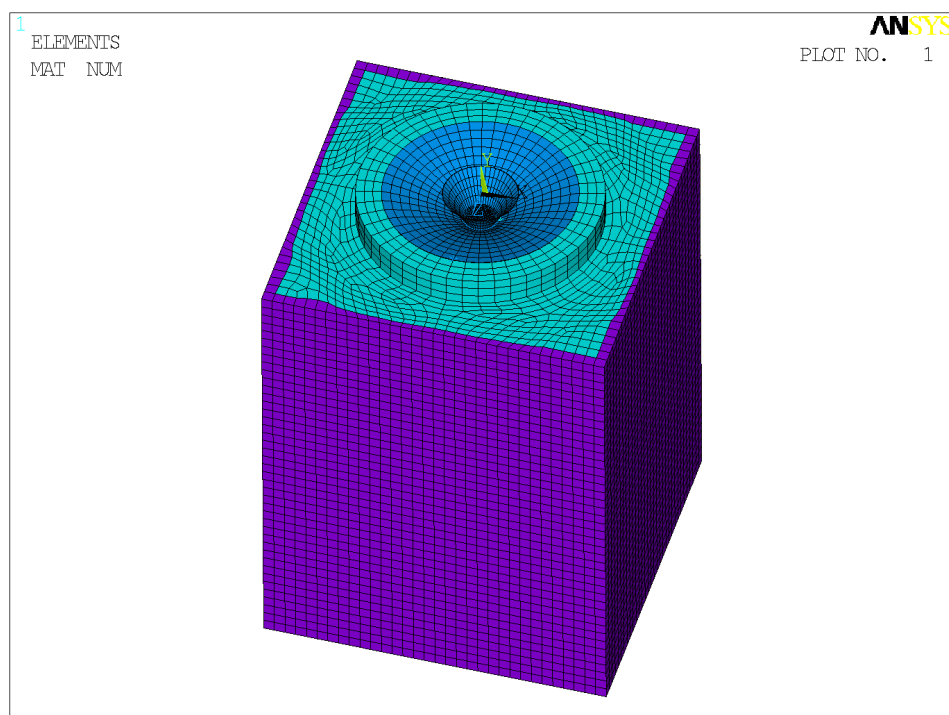
6.4. Model uwzględniający sprzężenie pomiędzy podatną membraną oraz wnętrzem obudowy głośnika

Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa głośnika zamkniętego w słabo tłumionej obudowie zawiera zdecydowanie więcej wierzchołków rezonansowych niż charakterystyka głośnika znajdującego się w odgradzie pomiarowej. Poprzedni model w którym zastosowano membranę doskonale sztywną pozwala na uwzględnienie wpływu rezonansów obudowy na charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową, natomiast wciąż nie wyjaśnia wszystkich rezonansów. Charakterystyka głośnika znajdującego się w odgradzie pomiarowej zawiera przede wszystkim częstotliwości rezonansowe związane z postaciami osiowo-symetrycznymi drgań własnych membrany ponieważ wymuszenie jest osiowo-symetryczne i pozostałe postacie drgań membrany jeśli są wzbudzane to w niewielkim stopniu. Wpływ na powstawanie nieosiowo-symetrycznych postaci drgań mogą mieć na przykład niejednorodności materiałowe.

Po zamknięciu głośnika w obudowie słabo tłumionej następuje sprzężenie drgań powietrza w obudowie oraz drgań membrany. Powstające wewnątrz obudowy postacie drgań własnych powodują, że na membranę działa nierównomierny rozkład ciśnienia. To z kolei powoduje, że oprócz przesuniętych z powodu sprzężenia częstotliwości rezonansowych związanych z osiowo-symetrycznymi postaciami drgań własnych membrany, wzbudzane jest także wiele postaci niesymetrycznych.

Model membrany stworzony został przy pomocy elementów powłokowych Solsh190 posiadających topologię elementów bryłowych. Przyjęte zostały parametry materiałowe takie jak moduł Younga, gęstość, współczynnik Poissona. Tłumienie wewnętrzne zostało przyjęte jako tłumienie wiskotyczne zdefiniowane przy pomocy współczynnika o wartości $1 \cdot 10^{-5}$. Wewnątrz obudowy pozostawiono założenie doskonale sztywnej ścianki oraz wprowadzono współczynnik strat 0.01. Model przedstawiony został na rysunku 6.17.

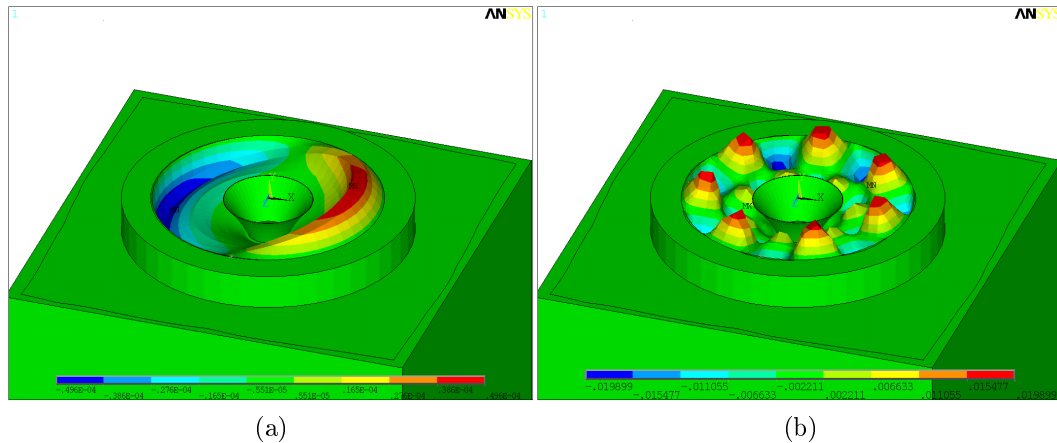
Całkowita sztywność zawiesznień membrany wyznaczona na podstawie parametrów Thiela-Smalla została podzielona równomiernie na zawieszenie górne i zawieszenie dolne. Analogicznie postąpiono z całkowitym tłumieniem. Sztywność oraz tłumienie wprowadzone zostało do modelu na brzegu membrany w postaci mechanicznych elementów skupionych. Na kierunku zgodnym z osią głośnika zostały założone jednakowe przemieszczenia wszystkich węzłów. Pozostałe stopnie swobody na brzegach membrany zostały odebrane całkowicie oprócz możliwości obrotu na krawędzi zewnętrznej membrany.



Rysunek 6.17: Model z podatną membraną

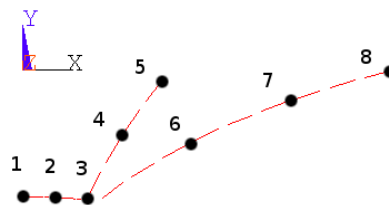
Przeprowadzona została wstępnie analiza modalna konstrukcji. Pierwsza częstotliwość osiowo-symetryczna membrany występuje w okolicy 1900 [Hz], kolejna 2600 [Hz]. Zarówno poniżej, pomiędzy oraz powyżej tych częstotliwości występują postacie w których węzły układają się na promieniach membrany (np. (0,2) – rysunek 6.18) oraz postacie kombinowane stanowiące złożenie postaci drgań promieniowych i osiowych (np. (1,2) – rysunek 6.18). Ten typ nieosiowo-symetrycznych postaci drgań własnych membrany, gdy występuje niewielka promieniowa i osiowa sztywność zawieszenia górnego nazywany jest „postaciami dzwonowymi”. Już w okolicy częstotliwości 1 [kHz] następuje wyraźne zagęszczenie położonych blisko siebie częstotliwości drgań własnych. Poprzez analizę modalną uzyskiwane są częstotliwości drgań własnych układu oraz proporcje przemieszczeń. Aby poznać dokładniej odpowiedź układu na wymuszenie została przeprowadzona analiza harmoniczna. Warto zaznaczyć, że dana postać drgań niekoniecznie pojawi się w odpowiedzi układu na szerokopasmowe wymuszenie. Zależy to od dwu czynników, z których pierwszym jest miejsce w którym przyłożone jest wymuszenie i jeżeli siła wymuszająca drgania przyłożona jest w węźle drgań danej postaci, to nie pojawi się zjawisko rezonansu. Podobnie jeżeli układ i wymuszenie jest doskonale osiowo-symetryczne to wystąpią tylko postacie drgań osiowo-symetryczne. Drugim czynnikiem jest tłumienie w układzie i jeżeli jest ono duże, to wierzchołek rezonansu nie bę-

dzie obserwowalny, wystąpią jednak przesunięcia fazowe w przestrzeni oraz w otoczeniu częstotliwości rezonansowej zgodne z daną postacią drgań. Obecnie stosowane membrany podzielić można na dwa rodzaje: posiadające stosunkowo niewielką sztywność i duże tłumienie (np. papierowe lub tworzywa sztucznych) oraz posiadające stosunkowo dużą sztywność i niewielkie tłumienie (np. aluminiowe, magnezowe).

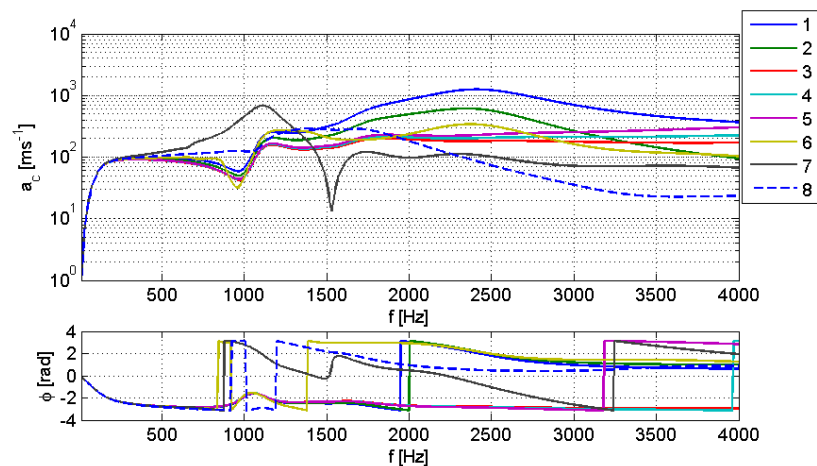


Rysunek 6.18: Przykładowe wyniki analizy modalnej układu sprzężonego membrany z obudową a) częstotliwość 823 Hz, b) częstotliwość 1190 Hz

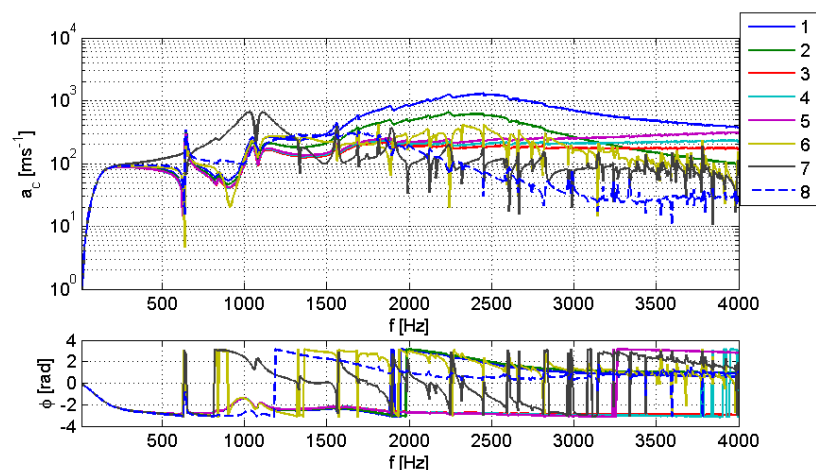
Eksperyment numeryczny przeprowadzony został przy wymuszeniu osiowo-symetrycznym dla dwu przypadków - dla drgań samej membrany oraz dla membrany sprzężonej z obudową głośnika. Odczytane zostały przyspieszenia drgań na powierzchni membrany w ośmiu wybranych punktach na jej przekroju rysunku 6.19. Wyniki przedstawione są na rysunkach 6.20 -6.21.



Rysunek 6.19: Linie definiujące przekrój geometrii membrany wraz z naniesionymi punktami pomiaru przyspieszeń



Rysunek 6.20: Przyspieszenia oraz kąt przesunięcia fazowego w punktach pomiarowych bez uwzględnienia sprzężenia



Rysunek 6.21: Przyspieszenia oraz kąt przesunięcia fazowego w punktach pomiarowych przy uwzględnieniu sprzężenia głośnika i obudowy

Wyniki wskazują, że na podstawie pomiaru przyspieszeń można określić częstotliwość graniczną dla której badany głośnik przestaje drgać jako doskonale sztywny tłok. Dla tego modelu częstotliwość ta wynosi około 500-800 Hz oraz jest niższa od częstotliwości dla pierwszej osiowo-symetrycznej postaci drgań własnych membrany. Na rysunku 6.21 w porównaniu do rysunku 6.20 widoczne jest zdecydowanie więcej wierzchołków rezonansowych. Są to rezonanse układu sprzężonego membrany oraz objętości akustycznej wewnątrz obudowy. Nierównomierny rozkład ciśnienia akustycznego oddziałującego na membranę powoduje także wzbudzenie rezonansów membrany, dla których postaci drgań nie są osiowo-symetryczne.

6.5. Model uwzględniający wpływ kształtu obudowy

W celu przybliżenia dźwięku generowanego przez rzeczywisty głośnik w obudowie synteza dźwięku została przeprowadzona przy wykorzystaniu modelu, w którym uwzględnione zostały zmiany odpowiedzi układu związane z wpływem różnych kształtów obudowy na charakterystyki kierunkowości. Wyznaczone zostały charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe oraz fazowo-częstotliwościowe głośnika w odgradzie otwartej oraz następnie w obudowie zamkniętej o kształcie sześciangu oraz obudowie o pięciu ścianach prostopadłych i skośnej ścianie tylnej (obudowie nazywanej później klinem). Obliczenia przeprowadzone zostały dla trzech modeli membrany, która została przybliżona poprzez model tłoka, model doskonale sztywnej membrany o geometrii zaczerpniętej z rzeczywistego głośnika oraz model membrany podatnej.

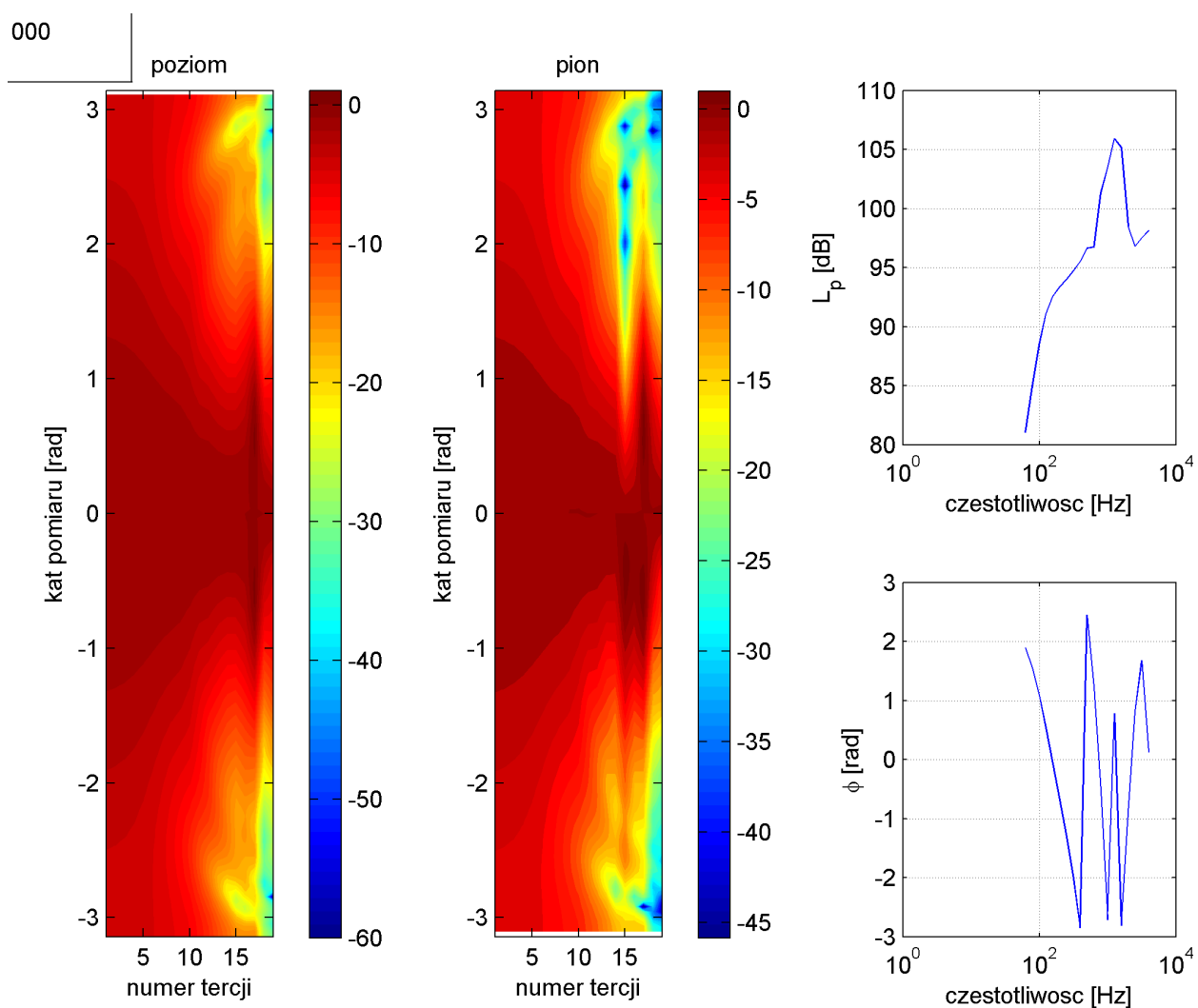
Z powodów obliczeniowych wielkość elementów została tak dobrana aby siatka znajdująca się wewnątrz głośnika posiadała 6 elementów na najkrótszą rozpatrywaną długość fali. Rozpatrywane były dwa przypadki - bez oraz z uwzględnieniem wpływu wnętrza obudowy na rozkład pola akustycznego otaczającego głośnik. Przy prezentacji wyników zastosowany został kod opisany w tablicy 6.2.

Obliczenia przeprowadzone zostały najpierw w środkowych częstotliwościach pasm oktaowych. Charakterystyki kierunkowości w pionie i poziomie w zależności od częstotliwości dla przypadku obudowy w kształcie klina, uwzględnienia wnętrza obudowy oraz membrany podatnej znajdują się na rysunku 6.22.

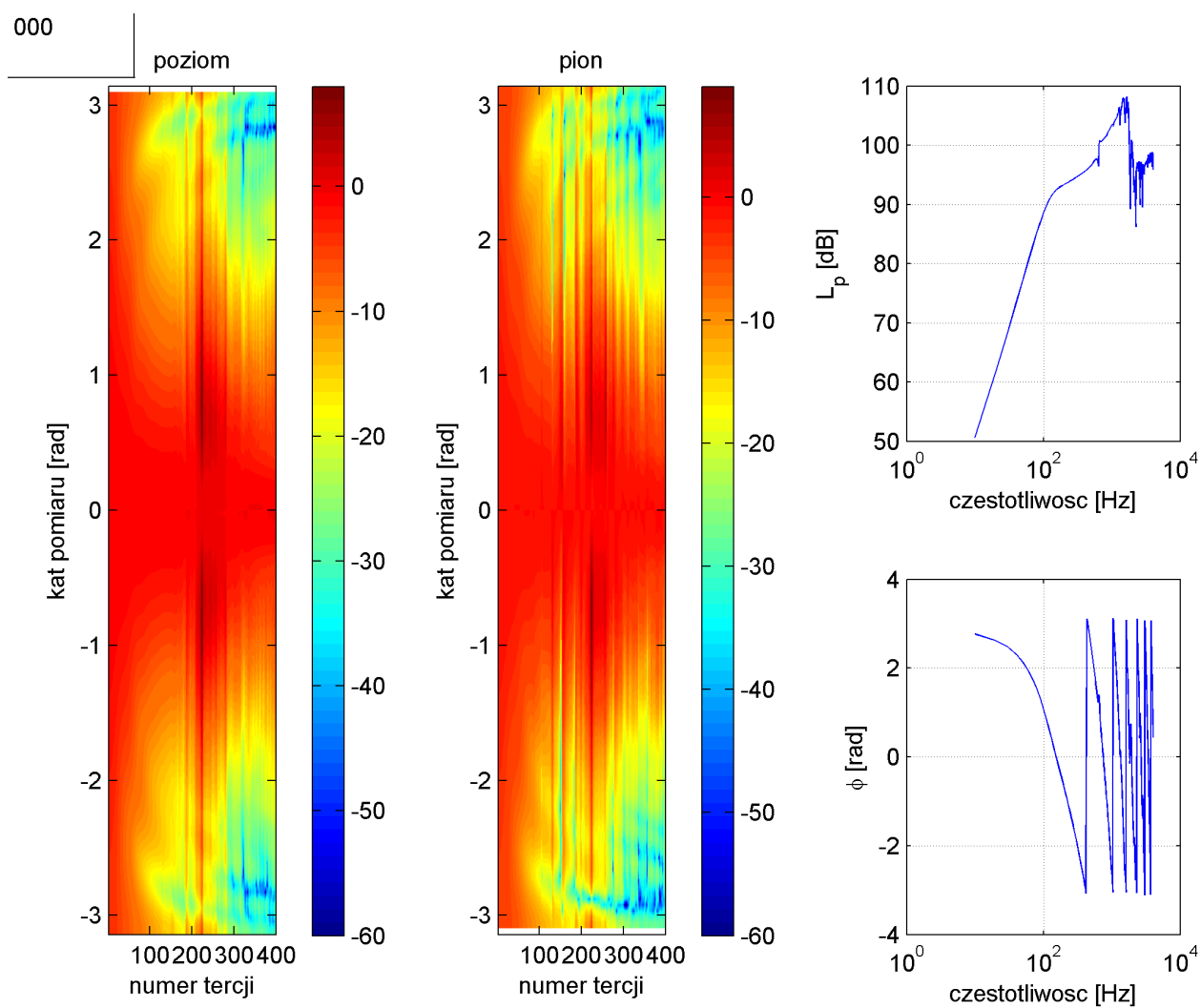
W dalszej części doświadczeń wyznaczona została odpowiedź układu w stanie ustalonym na wymuszenie harmoniczne o częstotliwości zmieniającej się od 10 do 4300 [Hz] z krokiem co 10 [Hz]. Wyniki dla obudowy klinowej z uwzględnieniem wpływu wnętrza obudowy przedstawione zostały na rysunku 6.25.

Tablica 6.2: Zastosowane oznaczenia przy prezentowaniu wyników

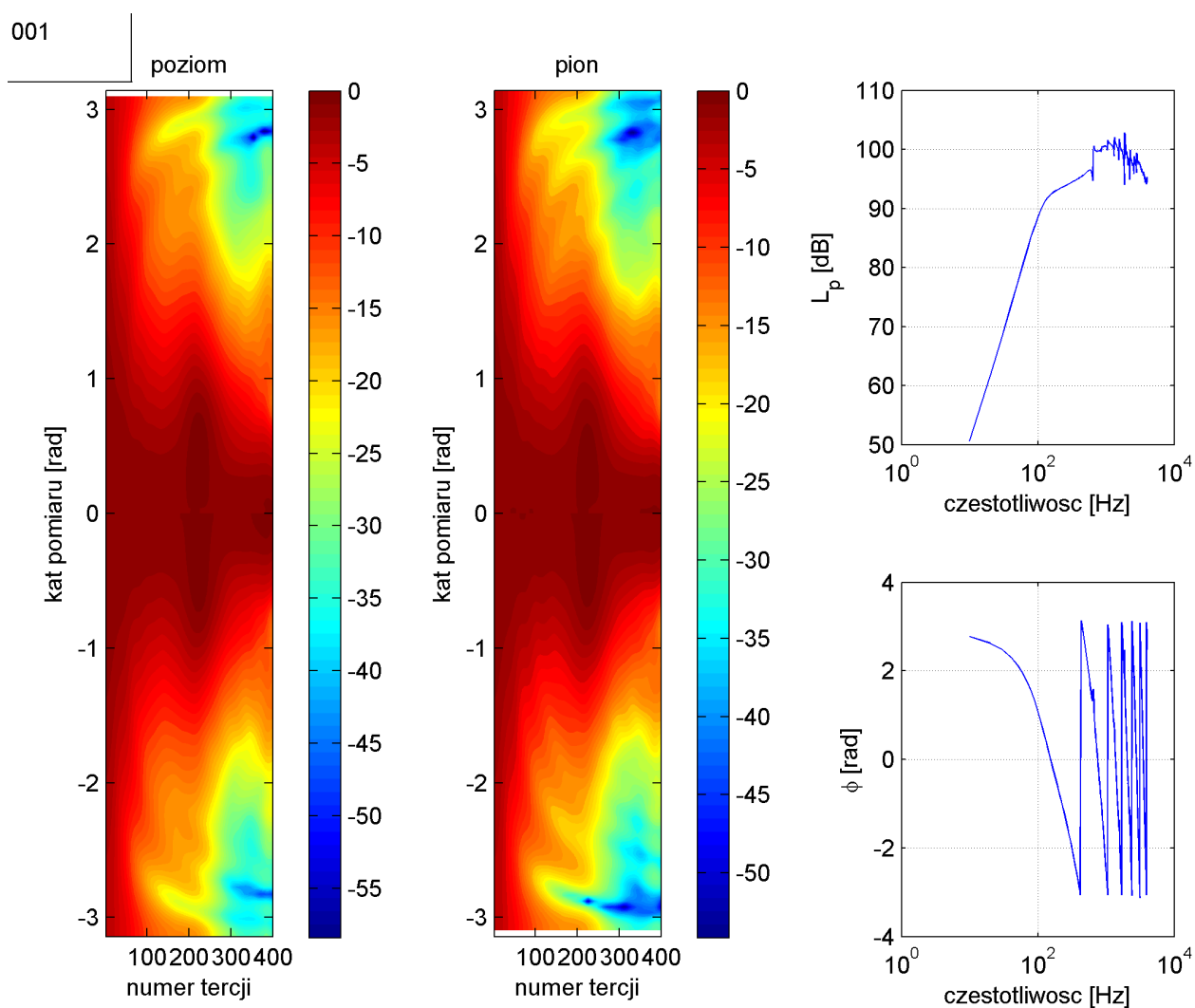
kod	0	1	2	3
rodzaj obudowy	klin	prostopadłościan	sześciang	odgródka
uwzględnienie wnętrza	tak	nie		
model membrany	podatna	dosk. sztywna stożkowa	dosk. sztywna tłokowa	



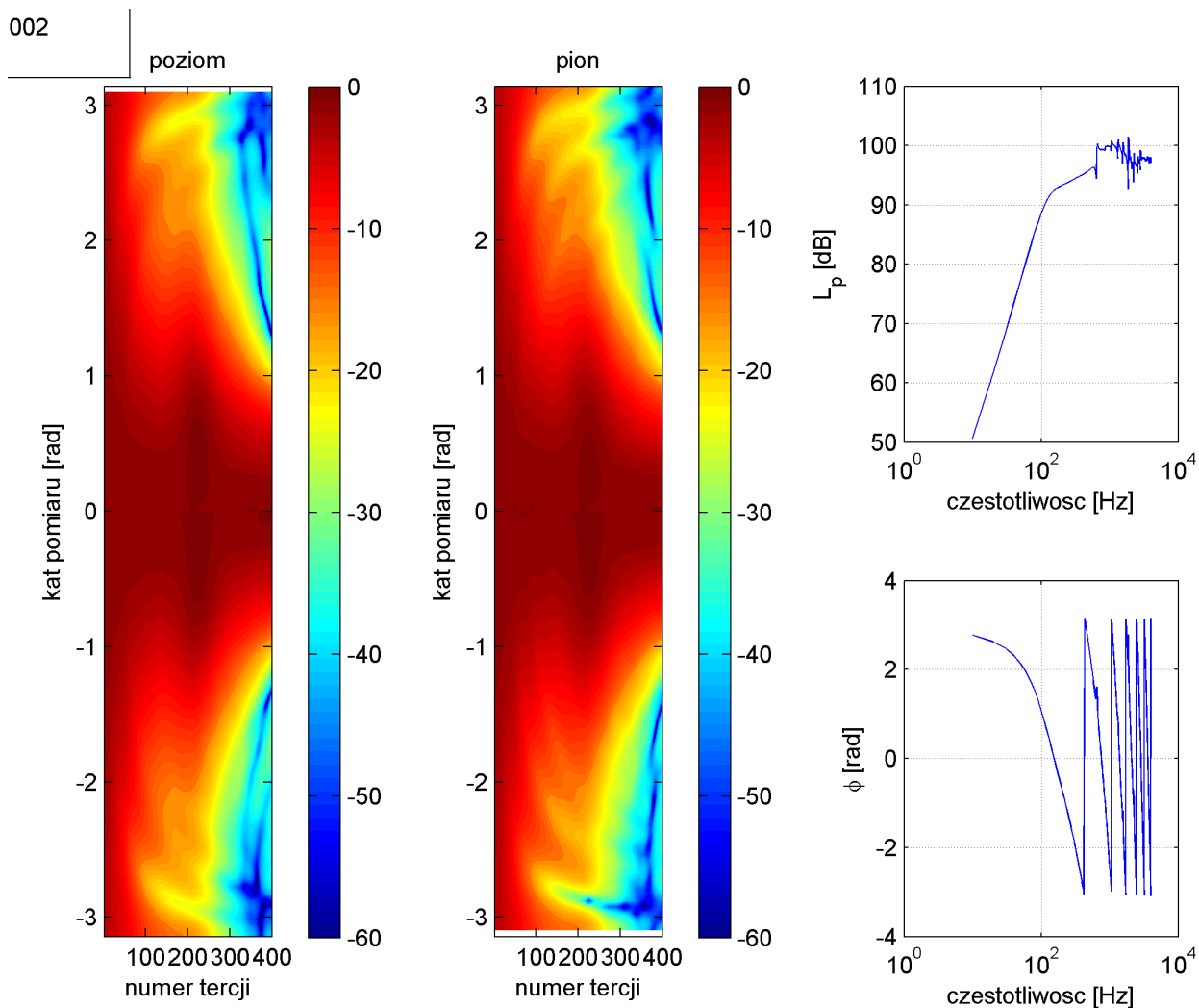
Rysunek 6.22: Wyniki dla przypadku 000 - Charakterystyki kierunkowości w poziomie oraz pionie dla częstotliwości środkowych tercji od 0.063-4 kHz



Rysunek 6.23: Wyniki dla przypadku 000 (membrana podatna) - Charakterystyki kierunkowości w poziomie oraz pionie dla częstotliwości 0.063-4 kHz co 10 Hz



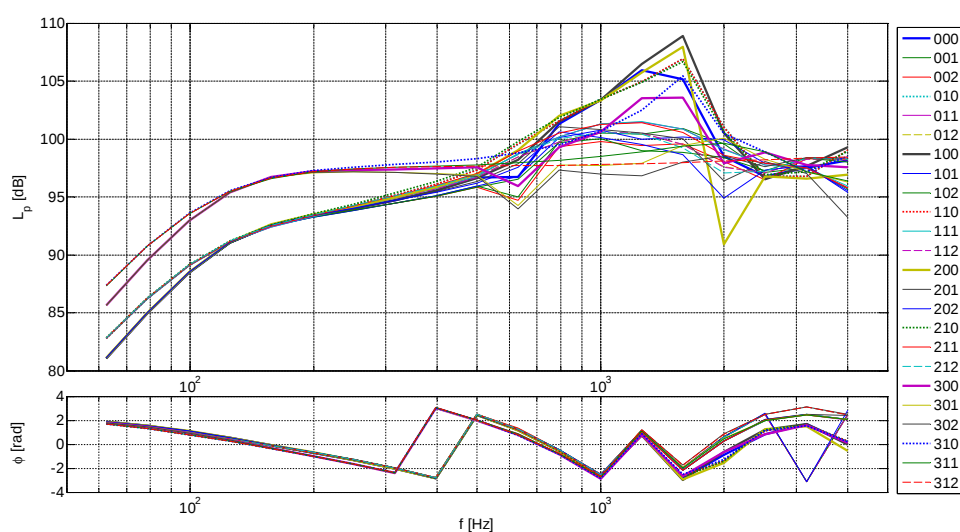
Rysunek 6.24: Wyniki dla przypadku 001 (membrana doskonale sztywna)
 - Charakterystyki kierunkowości w poziomie oraz pionie dla częstotliwości
 0.063-4 kHz co 10 Hz



Rysunek 6.25: Wyniki dla przypadku 002 (model membrany w postaci tła) - Charakterystyki kierunkowości w poziomie oraz pionie dla częstotliwości 0.063-4 kHz co 10 Hz

Dla częstotliwości około 2200 Hz występuje wyraźne zwiększenie poziomu ciśnienia akustycznego oraz zmiana charakterystyki kierunkowości dla której najwyższe poziomy obserwowane są już nie na osi głośnika lecz poza osią. Na charakterystykach kierunkowości pionowych widoczne jest, że dla wielu częstotliwości rezonansowych lub antyrezonansowych charakterystyki nie są symetryczne.

Charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową dla każdego z rozpatrywanych przypadków przedstawia rysunek 6.26.



Rysunek 6.26: Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa dla poszczególnych modeli

Dla modelu z membraną doskonale sztywną i niewielkim tłumieniem na ściankach wewnętrznych obudowy w odpowiedzi układu wyraźnie widoczne są wierzchołki rezonansowe związane z częstotliwościami drgań własnych obudowy. Są one przesunięte z powodu sprzężenia z membraną która posiada masę, sztywność i tłumienie zawieszenia. Charakterystyki kierunkowości w przypadku doskonale sztywnej membrany i obudowy głośnika nie zmieniają się.

W przypadku membrany podatnej przy wymuszeniu osiowo-symetrycznym występują bardzo silne wierzchołki rezonansowe w okolicy częstotliwości osiowych drgań własnych. Po sprzężeniu membrany z objętością akustyczną obudowy wzbudzają się także pozostałe postacie drgań własnych. Powodują one nierównomierności charakterystyk kierunkowości w okolicy rezonansów. W przypadku umieszczenia głośnika w nieskończonej odgradzie widoczne jest, że odgroda w zakresie niskich częstotliwości powoduje zwiększenie poziomu ciśnienia akustycznego o około 6 dB, które ma miejsce do okolicy 600 Hz. Jest to zgodne z wynikami prowadzonych dotychczas obliczeń i doświadczeń [17, 18]. Wpływ kształtu obudowy zamkniętej na rejestrowany poziom ciśnienia akustycznego ujawnia się przede wszystkim pomiędzy częstotliwościami 600 Hz i 2000 Hz. Powoduje ona zwiększenie poziomu ciśnienia akustycznego związane przede wszystkim z interferencją fal uginających się na obudowie. Kształt przyjętej obudowy zmieniający się w założonym zakresie nie wpływa znacząco na zmiany charakterystyk.

7. Podsumowanie

Cel niniejszej pracy, którym było stworzenie numerycznego syntezyatora dźwięku pozwalającego na generowanie sygnału akustycznego o zadanych parametrach w wybranych punktach pola w sytuacji, gdy wymuszenie w układzie ma charakter impulsowy – został osiągnięty.

Otrzymany syntezyator numeryczny składa się z dwu głównych bloków. Zadaniem pierwszego bloku jest wyznaczenie parametrów konstrukcji generującej dźwięk, które pozwalają uzyskać jego oczekiwane parametry akustyczne. Były nimi częstotliwości składowe widma generowanego dźwięku oraz odpowiednie proporcje pomiędzy nimi. Na podstawie metody planowania eksperymentu przeprowadzony został eksperyment numeryczny pozwalający na wyznaczenie meta-modelu zawierającego parametry konstrukcyjne oraz ich wpływ na widmo sygnału akustycznego. Umożliwiał on wprowadzenie ograniczeń związanych z oczekiwanymi proporcjami pomiędzy częstotliwościami składowymi widma oraz wybór parametrów decyzyjnych pozwalających na ich spełnienie. Drugi blok ma na celu syntezę dźwięku w wybranych punktach pola. Zbudowany w tym celu został rozbudowany model numeryczny, który opisuje pole mechaniczne, pole akustyczne oraz uwzględnia sprzężenie pomiędzy nimi. Następnie na podstawie wyznaczonych charakterystyk układu wibroakustycznego wygenerowany został sygnał akustyczny w punkcie odbioru.

Budowa syntezyatora wymagała rozwiązania szeregu problemów częściowych. Opracowano:

- wyznaczenie parametrów oczekiwanych pola akustycznego generowanego przez układy wibroakustyczne generujące dźwięk związany z muzyką
- model układu wibroakustycznego uwzględniający sprzężenie pomiędzy polem mechanicznym i akustycznym stworzony przy pomocy MES
- plany eksperymentów numerycznych pozwalających na budowę meta-modeli opisujących układy służące do generowania dźwięku oraz następnie dobór ich parametrów na podstawie oczekiwanych parametrów pola akustycznego
- algorytm pozwalający na wyznaczenie na podstawie charakterystyk odpowiedzi układu w stanie ustalonym przebiegów czasowych generowanych

sygnałów, co zostało osiągnięte poprzez twórczą implementację odwrotnego przekształcenia Fouriera

- algorytm syntezy dźwięku uwzględniający zmiany w sygnale związane z kierunkowością źródła oraz zmianami jego orientacji przestrzennej w czasie, który został stworzony na podstawie nowatorskiej metody aproksymacji fragmentów odpowiedzi impulsowych dla punktów otaczających źródło dźwięku.

Stworzony algorytm został zaaplikowany do trzech wybranych konstrukcji: misa tybetańska, dzwon oraz głośnik otwarty w obudowie. Syntezator okazał się przydatnym narzędziem do rozwiązania zadania prostego - analizy pola wibroakustycznego dla istniejących konstrukcji. Uzyskana została na jego podstawie wiedza jakościowa i ilościowa dotycząca zagadnienia, w jaki sposób kształt konstrukcji wpływa na jej częstotliwości rezonansowe. Na podstawie otrzymanych wyników możliwe było późniejsze rozwiązanie zadania odwrotnego polegającego na zdefiniowaniu oczekiwanych parametrów pola akustycznego i na tej podstawie wyznaczeniu parametrów konstrukcji pozwalających na ich spełnienie.

Opracowany algorytm syntezy numerycznego wykorzystuje nowoczesne narzędzia informatyczne takie jak MES oraz metody planowania eksperymentu. Stanowi on użyteczne narzędzie pomagające nie tylko lepiej poznać wpływ kształtu istniejących konstrukcji na generowane przez nie pole akustyczne, ale przede wszystkim wspomagające projektowanie zupełnie nowych konstrukcji oraz równoczesną auralizację dźwięku przez nie generowanego. Została potwierdzona skuteczność przyjętych rozwiązań zarówno w przypadku instrumentów muzycznych, jak i konstrukcji elektro-mechaniczno-akustycznej.

W dalszych pracach badawczych nad stworzonym i zastosowanym algorytmem syntezy sprawdzone zostanie, na ile uwzględnienie dróg propagacji dźwięku pomiędzy źródłem i odbiornikiem ma wpływ na otrzymywane wyniki. Sama MES do tego celu jest już niewystarczająca, ponieważ dla dużych przestrzeni lub wysokich częstotliwości konieczna do zastosowania liczba elementów skończonych powoduje, że rozwiązanie problemu wymaga bardzo dużej mocy obliczeniowej i przestaje być realizowalne w rozsądnym przedziale czasu. Istnieją dwie drogi rozwiązania tego problemu – przeprowadzenie redukcji rzędu modelu lub wprowadzenie dodatkowo innych metod symulacji pola akustycznego. Wstępne wyniki badań wskazują, że dobre wyniki uzyskuje się poprzez uwzględnienie charakterystyk kierunkowych źródeł wyznaczonych poprzez MES do algorytmów wykorzystujących metody geometryczne [33, 31, 30].

Opracowany syntezytor numeryczny można zastosować także do badań i modyfikacji konstrukcji służących do generowania sygnału akustycznego nie związanego z muzyką. Istnieje szeroka gama zagadnień technicznych w których konieczne jest efektywne wytworzenie w ośrodku akustycznym sygnału o charakterze impulsowym, zawierającym odpowiednie częstotliwości składowe i pochodzącego ze źródła o zdefiniowanej charakterystyce kierunkowości. Przykładowo szczególnie istotne jest to przy projektowaniu sond ultradźwiękowych lub sonarów. Otrzymany algorytm może posłużyć do optymalizacji istniejących konstrukcji lub do budowy zupełnie nowych, dla których rozkład pola wibroakustycznego oraz uzyskany przebieg sygnału akustycznego będzie lepszy od uzyskiwanego przy zastosowaniu dotychczasowych rozwiązań.

Bibliografia

- [1] K. Baculewski. *Encyklopedia Muzyki*. Wydawnictwo Naukowe PWN SA, 2006.
- [2] A. Barker. *Greek Musical Writings: Harmonic and acoustic theory*. Cambridge University Press, 2004.
- [3] K. J. Bathe, E. N. Dvorkin. A Formulation of General Shell Elements - The Use of Mixed Interpolation of Tensorial Components". *International Journal for Nummerical Methods in Engineering*, 22:697–722, 1986.
- [4] M. Bhatti. *Fundamental Finite Element Analysis and Applications: with Mathematica and Matlab Computations*. Willey, 2005.
- [5] J. Blauert, N. Xiang. *Acoustics for Engineers*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [6] R. Bolejko, A. Dobrucki. FEM and BEM computing costs for acoustical problems. *Archives of Acoustics*, 31(2):193–212, 2006.
- [7] J. Borwick. *Loudspeaker and headphone handbook*. Oxford : Focal, 2001.
- [8] G. Box, K. Willson. On the Experimental Attainment of Optimum Conditions. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 1:1–45, 1951.
- [9] G. Budzyński, A. Kaczmarek, M. Sankiewicz. Modulacje dźwięku dzwonu kołysanego. *Prace Specjalne*, 52:202–209, 1994.
- [10] G. Budzyński, M. Sankiewicz. Disonances in Carillon Chords. *Archives of Acoustics*, 22(3):245–266, 1997.
- [11] G. Budzyński, M. Sankiewicz. New Timbre of St. Catherine's Carillon. *Archives of Acoustics*, 25(2):147–155, 2000.
- [12] G. Budzyński, M. Sankiewicz, M. Szczerba. Dzwon kołysany o zewnętrznym sercu. 1997. Reżyseria i Inżynieria Dźwięku.
- [13] C. Cempel. *Wibroakustyka stosowana*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 1989.
- [14] W. Ciesielka. A Multi-Channel System for Sound Control in the Open Space. *Archives of Acoustics*, 34(4):559–577, 2009.
- [15] A. Craggs. A Finite Element Model for Acoustically Lined Small Rooms. *Journal of Sound and Vibration*, 108:327–337.
- [16] V. Dickason. *Loudspeaker Design Cookbook*. Audio Amateur Press, 2006.
- [17] A. Dobrucki. Diffraction correction of frequency response for loudspeaker in rectangular baffle. *Archives of Acoustics*, 31(4):537–542, 2006.
- [18] A. Dobrucki. *Przetworniki elektroakustyczne*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne WNT, 2007.

- [19] M. Drobner. *Instrumentoznawstwo i akustyka*. Polskie Wydawnictwo Muzyczne. Kraków, 1997.
- [20] Z. Engel. *Ochrona środowiska przed drganiami i hałasem*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2001.
- [21] Z. Engel. *Wibroakustyka - polska specjalność naukowa*. Wydawnictwo AGH, 2001.
- [22] Z. Engel, A. Gołaś, H. Łopacz. Identification of Coupling Transfer Function Between Impact Vibraton Parameters and Generated Noise. *InterNoise 88*, 1988.
- [23] H. Evensen. A fundamental relationship between force waveform and the sound radiated from a power press during blanking or piercing. *Journal of Sound and Vibration*, 68:451–463, 1980.
- [24] F. Fahy, P. Gardonio. *Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response*. Academic Press, 2007.
- [25] R. Filipek, J. Wiciak. Sound radiation of beam with shunted piezoceramics. *Archives of Acoustics*, 30(4):39–43, 2005.
- [26] R. Filipek, J. Wiciak. *Comparison of active and passive methods of beam vibrations damping with the piezoceramic elements*, rozdział/1 Procesy wibroakustyczne w technice i środowisku, strony 239–248. Kraków, 2007.
- [27] R. Filipek, J. Wiciak. Active and passive structural acoustic control of the smart beam. *The European Physical Journal - Special Topics*, 154 (1):57–63, 2008.
- [28] N. H. Fletcher, T. D. Rossing. *The Physics of Musical Instruments*. Springer, 1998.
- [29] A. Gołaś. *Wpływ parametrów dynamicznych na procesy wibroakustyczne w walcowniach*. Zeszyty naukowe AGH, 1984.
- [30] A. Gołaś. *Metody komputerowe w akustyce wnetrz i środowiska*. Wydawnictwa AGH, 1995.
- [31] A. Gołaś. *Podstawy sterowania dźwiękiem w pomieszczeniach*. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne, Kraków, 2000.
- [32] A. Gołaś, R. Filipek. Coupling of longitudinal and transverse beam vibrations. *International Congress on Sound and Vibration, Cairo 2010*, 2010.
- [33] A. Gołaś, K. Suder, R. Filipek. The influence of sound source directivity on acoustics parameters distribution in Kraków Opera House. *Acta Physica Polonica A*, 2010.
- [34] D. Havelock, S. Kuwano, M. Vorländer. *Handbook of signal processing in acoustics*. Springer, 2009.
- [35] O. Inácio, L. L. Henrique. The Dynamics of Tibetan Singing Bowls. *Acta Acoustica United with Acoustica*, 92:637 – 653, 2006.

- [36] M. Iwaniec. The Influence of Constructional Parameters on Stiffened Plates Sound Radiation. *Archives of Acoustics*, 30(4):483–494, 2005.
- [37] M. Iwaniec, J. Iwaniec. Concept of continuous-discrete middle ear model. *Archives of Acoustics*, 35(3):462, 2010.
- [38] H. L. Kuntz. Acoustic radiation characteristics of two buoy bells. *J. Acoust. Soc. Am.*, 79(6):2021–2027, 1986.
- [39] A. Lehr. A Carillon of Major-Third Bells, III. From Theory to Practice. *Music Perception*, 4(3):67–280, 1987.
- [40] A. Lehr. The Geometrical Limits of the Carillon Bell. *ACUSTICA ? acta acustica*, 86:543 – 549, 2000.
- [41] R. Leis. Variations on the wave equations. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 24:339–367, 2001.
- [42] K. Mańczak. *Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1979.
- [43] N. McLachlan, B. K. Nigjeh. The design of bells with harmonic overtones. *J. Acoust. Soc. Am.*, 114:505–511, 2003.
- [44] G. Meneghetti, B. Rossi. An analytical model based on lumped parameters for the dynamic analysis of church bells. *Engineering Structures*, 32:3363–3376, 2010.
- [45] R. Myers, D. Montgomery. Response surface methodology: A retrospective and literature survey. 1995.
- [46] H. F. Olson. Direct Radiator Loudspeaker Enclosures. *Audio Engineering*, 35:34, 36, 38, 59–64, 1951.
- [47] D. R. Raichel. *The Science and Applications of Acoustics*. Springer Science+Business Media, 2006.
- [48] Raileigh Lord. On Bells. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, 5, 1890.
- [49] G. Rakowski, Z. Kacprzyk. *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*. Politechnika Warszawska, 2005.
- [50] W. Rdzanek. *Analiza akustyczna płaskich źródeł dźwięku*. Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, 2004.
- [51] W. P. Rdzanek. *Wibroakustyka strukturalna elementów powierzchniowych*. Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, 2011.
- [52] L. Rhaouti, C. A., J. P. Time-domain modeling and numerical simulation of a kettledrum. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105(6):3545–3562, 1999.
- [53] E. Richards, J. R. Westcott M. On the prediction of impact noise, I: Acceleration noise. *Journal of Sound and Vibration*, 62(4):547–575, 1979.
- [54] M. Rokosz. *Dzwony i wieże Wawelu*. Societas Vistulanas, 2006.
- [55] T. D. Rossing. Wine glasses, bell modes, and Lord Rayleigh. *The Physics Teacher*, 28(9):582–585, 1990.

- [56] T. D. Rossing. *Springer Handbook of Acoustics*. Springer Science+Business Media, 2007.
- [57] T. D. Rossing, J. Yoo, A. Morrison. Acoustics of percussion instruments: An update. *Acoustical Science and Technology*, 25(6):406–412, 2004.
- [58] M. Russ. *Sound Synthesis and Sampling*. Focal Press, 2009.
- [59] K. Sachs. *Historia instrumentów muzycznych*. Warszawa: Oficyna Wydawnicza Volumen, 2005.
- [60] M. Sankiewicz, G. Budzyński. Analizy dźwięku największych dzwonów w Polsce. *Otwart Seminarium z Akustyki OSA'96, Ustroń*, 1996.
- [61] M. Sankiewicz, G. Budzyński. Analysis of Dissonances in Carillon Chords. 1997.
- [62] M. Sankiewicz, A. Kaczmarek, G. Budzyński. Acoustic Investigation of the Carillons in Poland. *Archives of Acoustics*, 19(3):333–353, 1994.
- [63] J. C. Slater. Physics and the wave equation. *Mathematic*, 1945.
- [64] K. N. Strafford. Analysis of bell material from the Middle Ages to the recent time. *Endeavour*, 20(1):22–27, 1996.
- [65] L. L. Thompson. A review of finite-element methods for time-harmonic acoustics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 119(3):1315–1330, 2006.
- [66] F. E. Toole. *Sound Reproduction: Loudspeakers and Rooms*. Focal Press, 2008.
- [67] D. Trueman, P. R. Cook, S. Smallwood, G. Wang. PLOrk: Princeton Laptop Orchestra, Year 1. *Proceedings of the International Computer Music Conference. New Orleans*, 2006.
- [68] G. N. B. Wang, J. Oh, R. Hamilton. Stanford Laptop Orchestra (SLOrk). *Proceedings of the International Computer Music Conference. Montreal*, 2009.
- [69] Z. L. Xinhua Liang, P. Zhu. Acoustic analysis of damping structure with response surface method. *Applied Acoustics*, strony 1036–1053, 2007.
- [70] I.-K. Yeo, R. Johnson. A new family of power transformations to improve normality or symmetry. *Biometrika*, 87:954–959, 2000.
- [71] Z. Żyszkowski. *Podstawy Elektroakustyki*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1984.
- [72] T. P. Zieliński. *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2005.
- [73] O. Zienkiewicz, R. Taylor. *The Finite Element Method, Fifth edition, Volume 1: The Basis*. Butterworth-Heinemann, 2000.