



141706

14349

K. U. Z. C. E. - P. O. W.

38

DR ANTONI PLAMITZER
PROFESOR POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

AKSONOMETRJA PROSTOKĄTNA



K S I A Ź N I C A - A T L A S

ZJEDNOCZONE ZAKŁADY KARTOGRAFICZNE I WYDAWNICZE

TOW. NAUCZ. SZKÓŁ ŚREDN. I WYŻSZ. SP. AKC.

LWÓW — WARSZAWA

1925

KSIĄŻNICA-ATLAS

LWÓW, CZARNIECKIEGO 12
WARSZAWA, NOWY ŚWIAT 59

POLECA

WYDAWNICTWA POLITECHNICZNE:

	ZŁ
BARTEL K. — Geometria wykreslna	8.—
BORAWSKI WŁ. — Projektowanie budynków mieszkalnych	4.50
BRONIEWSKI W. — Metalografia	5.—
BROWIŃSKI J. — Ćwiczenia z chemii fizjologicznej	1.80
BROWIŃSKI J. i SUCHOWIAK L. — Przewodnik do ćwiczeń z analizy chemicznej	1.30
DUCHOWICZ B. — Jak urządzić pracownię chemiczną	1.—
— Jakościowa analiza chemiczna	1.40
EINSTEIN A. — O szczególnej i ogólnej teorii względności	1.65
GEISLER E. T. — Obrabiarki do metali. Cz. I.	7.20
KORCZYŃSKI A. — Preparatyka chemii organicznej i nieorga- nicznej	1.60
— Wskazówki do wykonywania analizy elementarnej	1.30
KOZIKOWSKI A. — Smoliki i korniki. (Dla leśników)	2.50
MICHAŁSKI W. — Przyroda martwa. Cz. I. dla nauczyciela	2.—
— Przyroda martwa. Cz. II. dla ucznia	3.75
— Pracownia fizyczna i chemiczna	—
MIERZEJEWSKI H. — Metrologia techniczna	9.—
MOZER W. — Budowa parowozów. Cz. I.	9.—
NIEDZIELSKI S. — Tablice współrzędnych geodezyjnych	6.—
PRZYRODA I TECHNIKA. Rocznik I—IV. Prenumerata	8.40
STADTMÜLLER K. — Słownik lotniczy niemiecko-polski	0.60
— Słownik okrętowy	1.10
TIMOSZENKO S. P. — Wytrzymałość materiałów	10.—
TEYSSIER G. — Francusko-polski i pol.-franc. słownik elektrotechniczny	—
WEIGEL K. — Rachunek wyrównawczy	9.—
WOLFKE M. — Zasady teorii ciepła	3.60
ŻERAŃSKI ST. — Słownik elektrotechniczny	1.50

[23]

(32)

11/10

BIBLIOTEKA
K. U. Z. S. P. przy A. G. H.
w Krakowie

AKSONOMETRJA PROSTOKĄTNA

Biblioteka N. K. G.
H. CZECZOTTA
w Krakowie

DAR
Książnicy-Atlasu

D^R ANTONI PLAMITZER
PROFESOR POLITECHNIKI LWOWSKIEJ



AKSONOMETRJA PROSTOKĄTNA

23



K S I A ̐ Ż N I C A - A T L A S

ZJEDNOCZONE ZAKŁADY KARTOGRAFICZNE I WYDAWNICZE

TOW. NAUCZ. SZKÓŁ ŚREDN. I WYŻSZ. SP. AKC.

LWÓW — WARSZAWA

1925

411

BIBLIOTEKA GŁÓWNA AGH



1000168554

WSZELKIE PRAWA ZASTRZEŻONE.

1678



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
w KRAKOWIE
BIBLIOTEKA

II 14349

N3B 4404

Klisze, skład i druk wykonano w zakładach graficznych „Książnica-Atlas” we Lwowie.

Akc. Nr 4972/53

DR. KAZIMIERZOWI BARTLOWI

PROFESOROWI POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

PRACĘ TĘ POŚWIĘCAM.

Przedmowa.

W podręczniku niniejszym, przeznaczonym dla studentów wyższych uczelni, omawiam w sposób wyczerpujący jedną z metod geometrii wykreślnej, t. zw. aksonometrię prostokątną. Do zrozumienia tego podręcznika wystarcza znajomość metody „rzutów prostokątnych“ na dwie, wzgl. trzy wzajemnie prostopadłe rzutnie.

Celem uzyskania przejrzystości układu, uważałem za wskazane przyjmując taki podział materiału, że w rozdziale pierwszym zestawilem wiadomości przygotowawcze, a w pięciu następnych rozdziałach wyłożyłem szczegółowo „metodę bezpośrednią“ aksonometrii prostokątnej. Następnie zająłem się zastosowaniami, a mianowicie w czterech ostatnich rozdziałach omówilem zadania miarowe, geometrię wykreślną wielokątów i wielościanów, związki miarowe w aksonometrii prostokątnej, oraz „metodę pośrednią“. Aby nie powiększać zbytnio rozmiarów tej książki, pominąłem zupełnie zastosowania, odnoszące się do teorii krzywych i powierzchni, tembardziej, że zmiana rzutni (ust. 53, str. 111) umożliwia właściwie rozwiązywanie wszelkich zagadnień geometrycznych w metodzie „rzutów prostokątnych“ na dwie wzajemnie prostopadłe rzutnie.

Przy opracowywaniu niniejszego podręcznika starałem się usilnie o to, aby Czytelnika wdrożyć do logicznego myślenia. Dlatego też w każdym omawianem zagadnieniu najpierw badałem i dokładnie ustalałem występujące zależności geometryczne, a następnie dopiero przechodziłem do strony konstrukcyjnej. Aby umożliwić Czytelnikowi należyte zrozumienie omawianych kwestyj, poprzedzałem każdy nowy problem odpowiednią definicją. Przy poszczególnych zadaniach geometrycznych nie zadawałem się podawaniem jedynie tylko sposobów rozwiązania, ale przeprowadzałem również dyskusję; po uzyskaniu rozwiązania konstrukcyjnego, zwracałem też uwagę na kontrolę rysunku pod względem dokładności przeprowadzonej konstrukcji.

Za techniczne wykonanie rysunków dziękuję bardzo uprzejmie pp. *Mieczysławowi Teliczkowi*, *Janowi Wokrojowi* i *Leonowi Czupielowi*, asystentom Politechniki Lwowskiej.

Panu Inż. *Janowi Kłosińskiemu*, adjunktowi Politechniki, oraz pp. asystentom *Janowi Wokrojowi* i *Józefowi Rogowskiemu* dziękuję serdecznie za pomoc w czytaniu żmudnej korekty.

Spełnię miły obowiązek, jeżeli Dyrekcji Spółki Akc. „*Książnica-Atlas*“ wyrażę na tem miejscu podziękowanie za należyte wyposażenie podręcznika, a w szczególności za pokonanie wszelkich trudności, spowodowanych specjalnym składem używanych przezemnie oznaczeń.

Lwów, w listopadzie 1924 r.

Autor.

Treść.

	Str.
Wstęp	1

Rozdział I.

Wiadomości przygotowawcze.

1. Metoda rzutów środkowych	3
2. Metody rzutów równoległych	4
3. Elementy zasadnicze. Oznaczenia	7
4. Problemy równoległości i prostopadłości	8
5. Elementy niewłaściwe	12
6. Rzuty środkowe punktów	15
7. Rzuty środkowe prostych	16
8. Ustalenie położenia punktu i prostej w metodzie rzutów środkowych	18
9. Rzuty ukośne punktów i prostych	19
10. Rzuty prostokątne punktów i prostych	22

Rozdział II.

Rzuty aksonometryczne punktu.

11. Wiadomości początkowe	24
12. Własności trójkąta śladów aksonometrycznych	26
13. Aksonometrie punktu właściwego	29
14. Zależności, zachodzące pomiędzy aksonometrijami punktu właściwego	30
15. Dalsze sposoby wyznaczenia punktu właściwego	32
16. Konstrukcje niezależne od trójkąta śladów aksonometrycznych	36
17. Szczególne położenia punktów właściwych	38

Rozdział III.

Prosta i płaszczyzna.

18. Aksonometrie prostej właściwej	39
19. Zależności, zachodzące pomiędzy aksonometrijami prostej właściwej	41
20. Szczególne położenia prostej właściwej	45
21. Zadania i ćwiczenia	49
22. Aksonometrie punktu niewłaściwego	51
23. Aksonometrie śladów prostej właściwej	51
24. Wzajemne położenia dwóch prostych	52
25. Wyznaczenie płaszczyzny. Aksonometrie śladów płaszczyzny	54
26. Szczególne położenia płaszczyzny	56

Rozdział IV.

O prostych i punktach, przynależnych do płaszczyzny.

	Str.
27. Proste, leżące na danej płaszczyźnie	59
28. Punkty, leżące na danej płaszczyźnie	62
29. Aksonometrię prostej niewłaściwej	64
30. Wyznaczenie aksonometrii śladów płaszczyzny, określonej prostymi i punktami	65
31. Krawędź przecięcia się dwóch płaszczyzn	67
32. Wyznaczenie punktu przebicia się prostej z płaszczyzną	70
33. Zadania i ćwiczenia	72
34. Ślady aksonometryczne płaszczyzn i prostych	76

Rozdział V.

Problemy równoległości i prostopadłości.

35. Proste równoległe	79
36. O równoległości prostej i płaszczyzny	80
37. Płaszczyzny równoległe	83
38. Proste prostopadłe	86
39. Prosta prostopadła do płaszczyzny	88
40. Płaszczyzna prostopadła do prostej	90
41. Płaszczyzny prostopadłe	92

Rozdział VI.

Obroty. Zmiana rzutni.

42. Ogólne uwagi o obrotach	93
43. Oś obrotu prostopadła do rzutni aksonometrycznej	95
44. Kład płaszczyzny aksonometrycznie- i poziomo-rzucającej	96
45. Odległość punktu od rzutni aksonometrycznej	98
46. Kład płaszczyzny aksonometrycznie-rzucającej	100
47. Oś obrotu leży na rzutni aksonometrycznej	102
48. Kład dowolnej płaszczyzny	104
49. Podnoszenie z kładu	105
50. Zadania i ćwiczenia	106
51. Obrót punktu około dowolnej osi	108
52. Kład na płaszczyznę, równoległą do rzutni aksonometrycznej	110
53. Wprowadzenie nowej rzutni, prostopadłej do rzutni aksonometrycznej	111

Rozdział VII.

Zadania miarowe.

54. Podział zadań geometrycznych	115
55. Wyznaczenie długości odcinka	115
56. Odległość punktu od płaszczyzny	118
57. Odległość punktu od prostej	119
58. Zadania i ćwiczenia	119
59. Kąt nachylenia dwóch prostych	122
60. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny	123
61. Kąt nachylenia dwóch płaszczyzn	124
62. Zadania i ćwiczenia	126

Rozdział VIII.

Wielokąty płaskie.

	Str.
63. Określenia i podział wielokątów	128
64. Aksonometrie wielokątów płaskich	128
65. Aksonometrie wielokątów, leżących na płaszczyznach rzucających	131
66. O powinowactwie układów płaskich	133
67. Powinowactwa, zachodzące pomiędzy rzutami aksonometrycznymi wielokątów płaskich	137
68. Kład i podnoszenie z kładu wielokąta płaskiego	138
69. Przenikanie się wielokątów płaskich	140
70. Cienie punktów i prostych, przy oświetleniu równoległym	142
71. Cienie wielokątów płaskich	145

Rozdział IX.

Wielościany.

72. Określenia i podział wielościanów	150
73. Aksonometrie wielościanów	152
74. Zadania i ćwiczenia	154
75. Powierzchnie ostrosłupowe i graniastosłupowe	157
76. Przekroje płaskie powierzchni graniastosłupowej	159
77. O kolineacji układów płaskich	162
78. Przekroje płaskie powierzchni ostrosłupowej	167
79. Punkty przebiecia się prostych z wielościanami	171
80. Uwagi ogólne o przenikaniu się wielościanów. Przenikanie się ostrosłupów	173
81. Przenikanie się ostrosłupa z graniastosłupem	177
82. Przenikanie się graniastosłupów	180
83. Cienie wielościanów	182
84. Cienie wzajemne wielokątów i wielościanów	185

Rozdział X.

**Związki miarowe i zależne od nich konstrukcje
w aksonometrii prostokątnej.**

85. Własności kątów nachylenia osi x , y i z do rzutni aksonometrycznej	188
86. Własności stosunków skróceń aksonometrycznych dla trzech osi x , y i z . Liczby stosunkowe	190
87. Trójkąt skróceń aksonometrycznych	193
88. Konstrukcje podstawowe	195
89. Aksonometria prostokątna jako metoda pośrednia	199
90. Rodzaje aksonometrii prostokątnej	205
Skorowidz alfabetyczny	207

Ważniejsze omyłki.

Str.	52	wiersz	14	od	góry	wydrukowano: K		powinno być: K_l
"	53	"	9	"	dołu	"	"	"
"	55	"	13	"	góry	"	$= X^n Y_a^n$	" $= X_a^n Y_a^n$
"	55	"	20	"	dołu	"	v^n	" v_a^n
"	67	"	18	"	góry	"	płaszczyzny	" śladów płaszczyzny
"	82	"	14	"	dołu	"	$(\alpha h_a^n, v_a^n)$	" $\alpha (h_a^n, v_a^n)$
"	97	"	8	"	góry	"	rzutni	" rzutnię

Wstęp.

W dziełach *G. Desargues'a* (1593—1662) i *J. H. Lambert'a* (1728—1777) doszukać się można pierwszych rozważań, odnoszących się do metody aksonometrii prostokątnej. Jakkolwiek z praktycznemi konstrukcjami z zakresu tej metody spotykamy się w pracach inż. *Farish'a*¹⁾, *H. W. Brandes'a*²⁾, *A. Sopwith'a*³⁾ i *O. Möllinger'a*⁴⁾, to przecież właściwymi twórcami aksonometrii prostokątnej są: *J. L. Weisbach*⁵⁾, *R. Skuhersky*⁶⁾, *C. Pelz*⁷⁾, *J. Tesař*⁸⁾, *D. Tessari*⁹⁾ i *L. Berzolari*¹⁰⁾. Bardziej szczegółowe uwagi o historycznym rozwoju aksonometrii prostokątnej podane są w dziełach następujących autorów: *M. H. Mayer* i *K. Th. Mayer*¹¹⁾, *Chr. Wiener*¹²⁾, *R. Schüssler*¹³⁾, *E. Müller*¹⁴⁾ i *G. Scheffers*¹⁵⁾. Trudno tu

¹⁾ Isometrical perspective. Cambridge Phil. Trans. 1820.

²⁾ Isometrische Perspective. Gehlers phys. Wörterbuch 1833.

³⁾ Treatise on isometrical drawing. London 1834.

⁴⁾ Isometrische Projektionslehre. Solothurn 1840.

⁵⁾ Über die monodimetrische u. anisometrische Projektionslehre. Polyt. Mitteil. 1. Tübingen 1884; Anleitung zum axonometr. Zeichnen. Freiberg 1857.

⁶⁾ Orthographische Parallelperspektive. Prag 1858; Die Methode d. orthogonalen Projektion auf zwei Ebenen, die keinen rechten Winkel miteinander einschliessen... Abh. Böhm. Ges. Prag (V. Folge. 10 Bd.) 1858.

⁷⁾ Zur wissenschaftlichen Behandlung d. orthogon. Axonometrie. Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. Wien Abt. II. Bd. 81 (1880), Bd. 83 (1881) u. Bd. 90 (1884); Beiträge zur wissenschaftl. Behandlung d. orthogon. Axonometrie. Sitzber. d. böhm. Ges. d. Wissensch. Prag 1885.

⁸⁾ Über den orthogonal-axonometrischen Verkürzungskreis. Wien. Sitzungsber. Bd. 81 (1880).

⁹⁾ Proiezioni assonometriche ortogonali ed oblique. Torino 1882.

¹⁰⁾ Sull' assonometria ortogonale considerata come metodo di rappresentazione. Pavia 1893.

¹¹⁾ Lehrbuch d. axonometrischen Projektionslehre. Leipzig 1855—1863.

¹²⁾ Lehrbuch d. darstellenden Geometrie. Bd. 1. Leipzig 1884.

¹³⁾ Orthogonale Axonometrie. Leipzig 1905.

¹⁴⁾ Lehrbuch d. darstell. Geometrie für technische Hochschulen. Bd. 2. Aufl. 3. Leipzig u. Berlin 1923.

¹⁵⁾ Lehrbuch d. darstell. Geometrie. Bd. 1. Berlin 1919.

wymienić wszystkie prace, traktujące o metodzie aksonometrii prostokątnej; zauważyć należy jednak, że w każdym obszerniejszym podręczniku geometrii wykreślnej znajdują się rozdziały, poświęcone omawianej metodzie.

Również i w naszej literaturze naukowej posiadamy kilka dzieł z zakresu geometrii wykreślnej, w których uwzględniona jest metoda aksonometrii prostokątnej. Należą tu prace: prof. *Karola Maszkowskiego*¹⁾, prof. Dr. *Mieczysława Łazarskiego*²⁾, Dr. *M. Feldbluma*³⁾, prof. Dr. *Kazimierza Bartla*⁴⁾, *Tadeusza J. Łazowskiego*⁵⁾ i prof. *Stanisława Garlickiego*⁶⁾.

¹⁾ Perspektywa rzutowa jako wynik rzutów prostokątnych na płaszczyznę ukośnie względem siebie położone. Pamiętnik T-wa Nauk Ścisłych w Paryżu. Tom V. 1873; Geometria wykreślna dla szkół średnich. Zeszyt 1 i 2. Lwów 1875—1882.

²⁾ Zasady geometrii wykreślnej dla użytku wyższych szkół realnych. Lwów 1889; Zasady geometrii wykreślnej. Tom I i II. Lwów 1903—1906.

³⁾ Geometria wykreślna. Warszawa 1902.

⁴⁾ Geometria wykreślna (kurs litografowany). Lwów 1913/14.

⁵⁾ Geometria wykreślna podręcznik dla klas wyższych szkół średnich. Warszawa 1917.

⁶⁾ Kurs geometrii wykreślnej (litografowany). Warszawa 1921.

Rozdział I.

Wiadomości przygotowawcze.

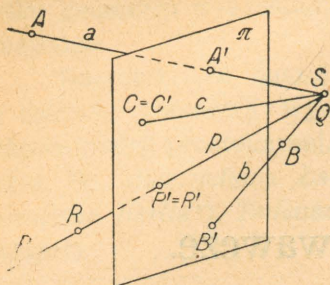
1. Metoda rzutów środkowych. Geometrię wykreślną uważać możemy za naukę, która pozwala utwory geometryczne (punkty, proste, płaszczyzny, wielościany, linie krzywe, powierzchnie,...) odwzorować na płaszczyźnie obrazu, oraz rozwiązać zadania, odnoszące się do tych utworów. Najogólniejsze sposoby takiego odwzorowania zawarte są w t. zw. metodzie rzutów środkowych czyli perspektywie. Z tej metody wyprowadzić się dadzą wszelkie inne metody geometryczne, któremi posługujemy się w geometrii wykreślnej.

Niechaj dany będzie dowolny stały punkt¹⁾ S , który (rys. 1) nazywamy środkiem rzutów (okiem), i stała płaszczyzna obrazu π , nie przechodząca przez punkt S . Płaszczyznę π nazywamy też tłem, płaszczyzną tłową, płaszczyzną rzutów lub krótko rzutnią. Wszystkie proste $a, b, \dots$ i płaszczyzny $\gamma, \dots$, które przechodzą przez środek rzutów S , nazywać będziemy prostymi rzucającymi (promieniami widzenia) i płaszczyznami rzucającymi (płaszczyznami widzenia). Promień rzucający p , łączący środek rzutów (oko) S z dowolnym danym punktem P , niechaj przebije płaszczyznę obrazu π w punkcie P' (czytaj: P z kreską). Otrzymany w ten sposób punkt P' jest rzutem środkowym, perspektywą lub obrazem punktu P .

Podobnie punkty $A', B', \dots$, przebicia się (rys. 1) promieni widzenia $a, b, \dots$ z rzutnią π , są obrazami punktów $A, B, \dots$. Dla punktu C , który leży na płaszczyźnie tłowej π , jego perspektywa C' nakrywa (schodzi) się z punktem C . Skoro na promieniu rzucającym (widzenia) p oberzemy dowolne punkty $P, R, \dots$, to z łatwością zauważymy, że ich rzuty środkowe $P', R', \dots$ nakrywają się w jednym punkcie $P' = R'$, a mianowicie w punkcie przebicia się promienia p z płaszczyzną obrazu π . Oberzmy teraz taki punkt Q , który nakrywa się ze środkiem rzutów S .

¹⁾ Umówmy się, że punkty i proste oznaczać będziemy dużemi, względnie małemi literami alfabetu łacińskiego, a płaszczyzny małemi literami alfabetu greckiego. Czasem jednak punkty oznaczać będziemy też cyframi arabskimi, a proste cyframi rzymskimi.

Ponieważ położenie promienia rzucającego, który przechodzi przez dwa nakrywające się punkty S i Q , nie jest ustalone, przeto dla punktu $Q=S$ nie możemy wyznaczyć wcale jego perspektywy Q' .

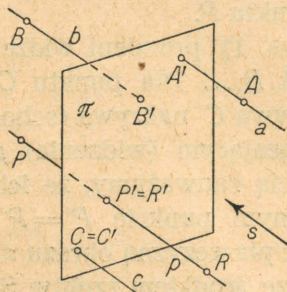


Rys. 1.

Skoro przyjmiemy płaszczyznę obrazu π i nie leżący na niej środek rzutów S , to poszczególne punkty $A, B, C, \dots P, R, \dots$ przestrzeni odwzorować możemy — z wyjątkiem środka S — na rzutni π jako punkty: $A', B', C', \dots P', R', \dots$ Każdemu punktowi P , który nie nakrywa się ze środkiem rzutów S , podporządkowany jest na rzutni π jeden ściśle oznaczony punkt P' , który jest rzutem (obrazem) punktu P . Natomiast ów punkt P' uważany być może za rzut środkowy każdego punktu $P, R, \dots$, dowolnie obranego na promieniu rzucającym p . Innymi słowy: jeżeli na rzutni π dany jest rzut P' pewnego punktu P , to położenie owego punktu P w przestrzeni nie jest dokładnie określone. Sposoby ustalenia dokładnego położenia punktu P w przestrzeni poznamy w ustępie 8.

Uważajmy teraz dowolny utwór geometryczny Γ , np. linię krzywą, powierzchnię lub wielościan. Celem odwzorowania owego utworu geometrycznego Γ na płaszczyźnie obrazu π , wyznaczmy dla poszczególnych punktów $A, B, \dots$ tego utworu ich perspektywy (rzuty środkowe) $A', B', \dots$. Na płaszczyźnie tłowej π otrzymamy wówczas nowy utwór geometryczny Φ , który nazywać będziemy: rzutem środkowym, perspektywą lub obrazem utworu geometrycznego Γ .

2. Metody rzutów równoległych. Obierzmy (rys. 2) płaszczyznę rzutów π i dowolnie nachyloną względem niej prostą s , którą uważać będziemy za kierunek rzutów. Proste $a, b, \dots$, równoległe do stałej prostej s , nazywamy „promieniami rzucającymi”. Skoro przez dane punkty $A, B, P, \dots$ poprowadzimy promienie rzucające $a, b, p, \dots$ i wyznaczmy punkty przebiecia się tych promieni z rzutnią π , to otrzymane w ten sposób punkty: $A', B', P', \dots$ są rzutami równoległymi (ukośnami) przyjętych poprzednio punktów.

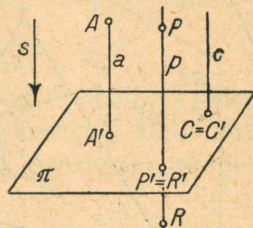


Rys. 2.

Z łatwością zauważymy, że: 1° każdemu punktowi A podporządkowany jest jeden ściśle określony obraz A' ; 2° punktom $P, R, \dots$, które leżą na promieniu rzucającym p , podporządkowane są rzuty zjednoczone (nakrywające się)

z punktem $P' = R'$; 3° punkt C , leżący na rzutni π nakrywa się ze swoim obrazem C' . Natomiast dowolny punkt P' płaszczyzny obrazu π uważany być może za rzut równoległy (ukośny) każdego punktu P , dowolnie przyjętego na prostej rzucającej p .

W metodzie rzutów prostokątnych, zamiast dowolnego „kierunku rzutów”, przyjmujemy (rys. 3) prostą rzucającą s prostopadłą do rzutni π . Przez dowolny punkt A poprowadzmy promień rzucający $a // s$ czyli $a \perp \pi$, to punkt A' przebiecia się prostej a z rzutnią π jest rzutem prostokątnym uważanego punktu A . Dla punktu C , leżącego na płaszczyźnie π , jego obraz C' zjednoczony jest z punktem C . Punktom $P, R, \dots$, które leżą na promieniu rzucającym $p \perp \pi$, podporządkowane są rzuty prostokątne, nakrywające się w jednym punkcie $P' = R'$.



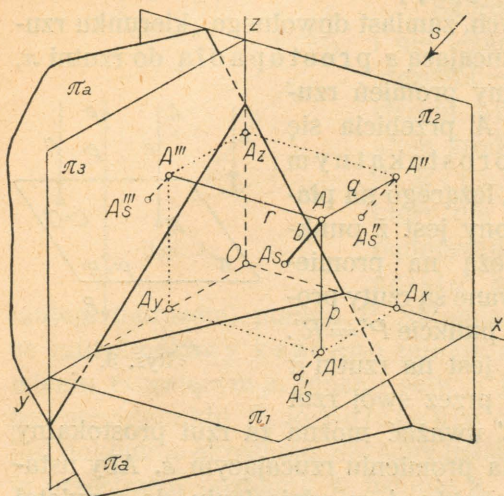
Rys. 3.

Każdy punkt A odwzorowany jest na rzutni π przez jeden punkt, a mianowicie przez swój rzut prostokątny A' . Natomiast punkt A' uważać można za rzut prostokątny dowolnego punktu A , leżącego na promieniu rzucającym a . Aby ustalić w dokładny sposób położenie punktu A w odniesieniu do przyjętej rzutni π , możemy obok rzutu prostokątnego A' podać jeszcze np. odległość punktu A od rzutni π , t. zn. długość odcinka AA' . Odległości punktów, leżących nad rzutnią π , uważamy np. za dodatnie (+), a odległości punktów, znajdujących się pod rzutnią π , uważamy za ujemne (—). Liczbę algebraiczną, która w przyjętych jednostkach długości wyraża odległość (z uwzględnieniem znaku + lub —) punktu A od rzutni π , nazywamy¹⁾ cechą lub znamieniem owego punktu. Położenie punktu A będzie dokładnie ustalone, jeżeli obok rzutu A' zanotujemy (wpiszemy) cechę tego punktu. Rzut prostokątny A' opatrzony cechą nazywamy rzutem cechowanym punktu A , a odnośną metodę odwzorowania geometrycznego nazywamy metodą rzutów cechowanych.

Aby ustalić położenie punktu A , użyć możemy też np. dwóch jego rzutów prostokątnych na dwie dowolne rzutnie. Najchętniej jednak — ze względów praktycznych — przyjmujemy (rys. 4) dwie wzajemnie prostopadłe płaszczyzny rzutów: rzutnię poziomą π_1 i rzutnię pionową π_2 , które przecinają się w osi x . Z punktu A poprowadzmy proste rzucające: $p \perp \pi_1$ i $q \perp \pi_2$ (prostopadłe odpowiednio do rzutni π_1 , wzgl. π_2), to wówczas rzut poziomy A' punktu A jest punktem przebiecia się promienia p z rzutnią poziomą π_1 , a rzut pionowy A'' (czytaj A z dwiema kreskami lub A z dwiema) jest punktem przebiecia się

¹⁾ Dr. Kazimierz Bartel: Geometria rzutów cechowanych i pewne jej zastosowania. Warszawa 1914. (E. Wende i Sp.).

prostej q z rzutnią pionową π_2 . Skoro dane są rzuty A' i A'' pewnego punktu A na dwie rzutnie π_1 i π_2 , to położenie tego punktu jest dokładnie ustalone w przestrzeni; w istocie bowiem skoro w punkcie A' wy-



Rys. 4.

kreślimy prostą $p \perp \pi_1$, a w punkcie A'' prostą $q \perp \pi_2$, to proste p i q przetną się w żądanym punkcie A .

Często jednak, obok rzutni π_1 i π_2 , wprowadzamy jeszcze trzecią rzutnię π_3 prostopadłą do osi x , a tem samem prostopadłą równocześnie i do dwóch poprzednich płaszczyzn π_1 i π_2 . Rzutnia boczna π_3 przecina oś x w punkcie O , a płaszczyzny π_1 , π_2 w osiach y i z . Owe trzy wzajemnie prostopadłe rzutnie tworzą „układ odniesienia“, który oznaczać będziemy symbolem $O[x, y, z]$ lub $[O]$, przy-
czem O jest środkiem lub początkiem tego układu, a proste

x , y i z są jego osiami. Prowadząc z danego punktu A (rys. 4) prostą $r \perp \pi_3$, otrzymamy — w punkcie przebiecia się promienia rzucającego r z rzutnią boczną π_3 — rzut boczny A''' (czytaj: A z trzema kreskami lub A z trzema) punktu A . W metodzie rzutów prostokątnych na dwie, wzgl. na trzy wzajemnie prostopadłe rzutnie, zajmujemy się badaniem zależności, jakie zachodzą pomiędzy utworem geometrycznym Γ a jego trzema odwzorowaniami na rzutni poziomej π_1 , pionowej π_2 i bocznej π_3 .

Obok trzech wzajemnie prostopadłych rzutni układu $O[x, y, z]$ niechaj daną będzie (rys. 4) dowolna czwarta płaszczyzna rzutów π_a , która nie przechodzi przez początek O i nie jest prostopadłą do żadnej rzutni układu $[O]$. Przez punkt A poprowadźmy promień rzucający b , równoległy do przyjętego kierunku rzutów s , i skonstruujmy punkt A_s (czytaj: A ze znacznikiem s lub A s), przebiecia się prostej b z nową rzutnią π_a . Poprowadźmy następnie przez punkty A' , A'' i A''' trzy promienie rzucające (równoległe do kierunku s) i oznaczmy przez A'_s , A''_s , A'''_s (czytaj: A z trzema kreskami s lub A z trzema s) punkty przebiecia się tych promieni z rzutnią π_a . Płaszczyznę π_a nazywamy rzutnią aksonometryczną, punkty A_s , A'_s , A''_s i A'''_s rzutami aksonometrycznymi (obrazami aksonometrycznymi) lub wprost aksonometrijami punktów A , A' , A'' , wzgl. A''' . Metodę odwzorowania, w której badamy zależności geometryczne pomiędzy punktem A i jego obrazami A_s , A'_s , A''_s i A'''_s , nazywamy „metodą rzutów aksonometrycznych“ lub aksonomet-

metrją. Zależnie od tego, czy kierunek rzutów s jest dowolnie nachylony względem rzutni π_a , czy też s jest prostopadły do π_a , występuje aksonometria ukośna, wzgl. aksonometria prostokątna.

Zamiast kierunku rzutów s w odniesieniu do rzutni aksonometrycznej π_a , przyjąć możemy środek rzutów S i wyznaczyć perspektywę (rzuty środkowe) punktów A, A', A'' i A''' na rzutnię aksonometryczną π_a . Uzyskana w ten sposób metoda odwzorowania zwie się aksonometrią środkową lub perspektywiczną¹⁾.

3. Elementy zasadnicze. Oznaczenia. Zanim dokładniej omawiać zaczniemy poszczególne metody geometrii wykreślnej, zajmiemy się najpierw elementami zasadniczymi, t. j. punktami, prostymi (promieniami) i płaszczyznami.

Pomiędzy elementami zasadniczymi ustalić możemy następujące zależności:

Dwa punkty A i B określają (wyznaczają) jedną i tylko jedną prostą l .

Dwie płaszczyzny α i β określają (wyznaczają) jedną i tylko jedną prostą k .

Aby oznaczyć, że prosta l określona jest punktami A i B , posługiwać się będziemy symbolem: $l = AB$. Podobnie symbol: $k = \alpha\beta$ oznacza prostą k , określoną płaszczyznami α i β . O uważanej prostej $l = AB$ powiadamy też, że: prosta (promień) l należy do punktów A i B lub l przechodzi przez owe punkty. Punkty A i B „należą” (przynależą) do prostej l lub leżą na tej prostej. O prostej $k = \alpha\beta$ mówimy, że „należy do” płaszczyzn α i β , wzgl. „leży na” tych płaszczyznach lub jest „krawędzią przecięcia się” uważanych płaszczyzn α i β . Owe płaszczyzny α i β „należą do” prostej k , „przechodzą przez” promień k lub „przecinają się” w krawędzi k .

Niechaj daną będzie prosta $l = AB$, określona punktami A i B , oraz dowolny punkt C , nie leżący na l . Oznaczmy przez m prostą, która przechodzi przez punkty A i C . Punkt A należy do prostej $l = AB$ i do prostej $m = AC$, ów punkt A leży równocześnie na tych prostych, wzgl. A jest punktem wspólnym tych prostych. Takie proste l i m nazywamy prostymi przecinającymi się w punkcie A .

Trzy punkty A, B i C , które nie należą do (nie leżą na) jednej prostej, wyznaczają jedną i tylko jedną płaszczyznę.

Trzy płaszczyzny α, β i γ , które nie należą do (nie przechodzą przez) jednej prostej, wyznaczają jeden i tylko jeden punkt.

¹⁾ Dr. Kazimierz Bartel: O pewnem zastosowaniu metody aksonometrii do perspektywy środkowej. Czasop. techniczne. Lwów 1909.

Symbol $\varepsilon = ABC$ oznacza płaszczyznę ε , przechodzącą przez punkty A, B, C . Podobnie punkt E , wyznaczony płaszczyznami α, β i γ , określamy symbolem: $E = \alpha\beta\gamma$. O płaszczyźnie $\varepsilon = ABC$ powiadamy, że „należy” do punktów A, B, C lub przez nie „przechodzi”. Owe punkty „przynależą” do ε lub „leżą” na tej płaszczyźnie.

Dwa punkty A i B , należące do płaszczyzny ε , wyznaczają prostą l , która leży na owej płaszczyźnie.

Dwie płaszczyzny α i β , należące do punktu E , wyznaczają prostą k , która przechodzi przez ów punkt.

Możemy też powiedzieć, że: prosta leży na płaszczyźnie wówczas, jeżeli dwa dowolne punkty tej prostej leżą na owej płaszczyźnie.

Prosta l i punkt C , nie należące do siebie, wyznaczają jedną i tylko jedną płaszczyznę ε .

Prosta k i płaszczyzna γ , nie należące do siebie, wyznaczają jeden i tylko jeden punkt E .

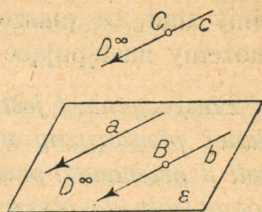
Symbol $\varepsilon = lC$ oznacza płaszczyznę ε , przechodzącą przez prostą l i punkt C . Symbol $E = k\gamma$ natomiast oznacza punkt E przebiecia się prostej k z płaszczyzną γ . Obok dotychczasowych symbolów, używać będziemy też i następujących:

AB	oznacza	prostą, przechodzącą przez punkty A i B .
$\overline{AB}$	„	odcinek (o długości skończonej), ograniczony punktami końcowymi A i B .
ABC	„	płaszczyznę, przechodzącą przez punkty A, B i C .
$AB.C$	„	płaszczyznę, która przechodzi przez prostą AB i przez punkt C .
$A.BC$	„	płaszczyznę, przechodzącą przez punkt A i przez prostą BC .
$AB.CD$	„	płaszczyznę, przechodzącą przez dwie proste AB i CD lub punkt przecięcia się prostych AB i CD .
ab	„	to samo, co symbol poprzedni.
Ab	„	płaszczyznę, określoną przez punkt A i prostą b .
$a\beta$	„	punkt przebiecia się prostej a z płaszczyzną β .
$\alpha\beta$	„	krawędź przecięcia się płaszczyzn α i β .
$\alpha\beta.\gamma$	„	punkt przebiecia się prostej (krawędzi) $\alpha\beta$ z płaszczyzną γ .
$\alpha\beta\gamma$	„	punkt przecięcia się trzech płaszczyzn α, β i γ .

Symbolami: $ab.\beta$; $ab.cd$; $ABC.\beta$; $ABC.DEF$; $Ab.\beta$; $Ab.DEF$; wzgl. $Ab.Dc$ oznaczyć możemy krawędź przecięcia się dwóch płaszczyzn, przyczem pierwsza z tych płaszczyzn oznaczona jest przez: ab ; ABC ; wzgl. Ab . Podobnie punkt przecięcia się trzech płaszczyzn α, ABC i bD oznaczymy symbolem: $\alpha.ABC.bD$.

4. Problemy równoległości i prostopadłości. Dwie proste, leżące na jednej płaszczyźnie i nie mające punktu wspólnego, nazywamy prostymi równoległymi. Skoro na dowolnej płaszczyźnie ε (rys. 5) obierzemy prostą a i punkt B , nie należący do prostej a , to wówczas: przez punkt B przechodzi jedna i tylko jedna prosta b , równoległa do prostej a (postulat *Euklidesa*). Symbolem $a // b$ oznaczać będziemy dwie proste równoległe a i b .

Powiadamy, że prosta i płaszczyzna są do siebie równoległe, jeżeli nie mają ani jednego punktu wspólnego. Niechaj dany będzie w przestrzeni dowolny punkt C , nie należący (rys. 5) do uważanej płaszczyzny ε , oraz dowolna prosta a , leżąca na owej płaszczyźnie ε . Skoro przez a oznaczmy płaszczyznę, określoną elementami C i a , to przez punkt C przechodzi jedna i tylko jedna prosta c , leżąca na płaszczyźnie α i równoległa do prostej a . Proste $a \parallel c$ nie posiadają punktu wspólnego, zatem płaszczyzna ε i prosta c nie mogą również mieć punktów wspólnych. Innymi słowy: płaszczyzna ε i prosta c są do siebie równoległe (co oznaczyć możemy symbolem $\varepsilon \parallel c$). Otrzymujemy zatem następujące twierdzenia:



Rys. 5.

Prosta c jest równoległą do danej płaszczyzny ε wówczas, jeżeli c jest równoległą do prostej a , leżącej na owej płaszczyźnie.

Płaszczyzna ε jest równoległą do danej prostej c wówczas, jeżeli ε przechodzi przez prostą a , równoległą do owej prostej c .

Przez prostą c , która jest równoległą do płaszczyzny ε , poprowadźmy dowolną płaszczyznę α . Z łatwością wykażemy, że krawędź $a = \varepsilon \alpha$, przecięcia się owych płaszczyzn ε i α , jest równoległą do danej prostej c . W istocie bowiem, gdyby proste c i a (leżące na płaszczyźnie α) posiadały punkt wspólny, to w owym punkcie musiałyby prosta c — wbrew założeniu — przecinać płaszczyznę ε . Wobec tego proste c i a nie posiadają punktu wspólnego, więc są prostami równoległymi. A zatem:

Jeżeli przez prostą c , równoległą do danej płaszczyzny ε , przeprowadzimy dowolną płaszczyznę α , to wówczas krawędź przecięcia się tych płaszczyzn jest równoległą do danej prostej c .

Dwie płaszczyzny, nie mające punktów wspólnych, nazywamy płaszczyznami równoległymi. Z tego określenia wynikają wnioski:

Skoro dane są dwie płaszczyzny równoległe, to każda prosta, leżąca na jednej z tych płaszczyzn, jest równoległą do płaszczyzny drugiej.

Skoro dane są dwie płaszczyzny równoległe, to każda płaszczyzna, która nie jest do nich równoległą, przecina się z owymi płaszczyznami w dwóch prostych równoległych.

Na płaszczyźnie α (rys. 6) obierzmy dwie dowolne proste l i n . Przez punkt A , który nie leży na płaszczyźnie α , poprowadźmy proste c i d równoległe odpowiednio do prostych l i n , a mianowicie: $c \parallel l$, $d \parallel n$. Płaszczyzna $\beta = cd$, określona (wyznaczona) dwiema prostymi c i d , nie może przecinać płaszczyzny α . Gdyby bowiem owe płaszczyzny β i α przecinały się w krawędzi k , to z warunków: $\beta = cd$, $c \parallel l$ i $d \parallel n$ wyini-

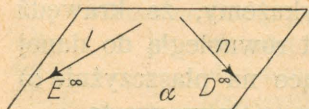
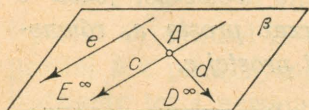
kałoby (porównaj poprzednie twierdzenie), że krawędź k byłaby równoległą do *dwóch* prostych c i d , przecinających się w punkcie A ! Wnosimy stąd, że płaszczyzny α i β są równoległe. A zatem wypowiedzieć możemy następujące twierdzenia:

Płaszczyzna β jest równoległą do danej płaszczyzny α wówczas, jeżeli β przechodzi przez dwie proste, równoległe do płaszczyzny α .

Płaszczyzna α jest równoległą do danej płaszczyzny β wówczas, jeżeli α jest równoległą do dwóch prostych, przecinających się i leżących na płaszczyźnie β .

Celem oznaczenia, że dwie płaszczyzny α i β są równoległe, używamy symbolu: $\alpha \parallel \beta$.

Na płaszczyźnie $\beta = cd$ obierzmy (rys. 6) prostą e równoległą do promienia c , a na płaszczyźnie $\alpha \parallel \beta$ obierzmy prostą n równoległą do prostej d . Takie dwie proste e i n , przez które nie można poprowadzić płaszczyzny, nazywamy prostymi skośnymi (wichrowatemi).



Rys. 6.

Definicja: Kąt nachylenia dwóch prostych skośnych równa się kątowi nachylenia dwóch prostych przecinających się w dowolnym punkcie w przestrzeni, a równoległych odpowiednio do danych prostych skośnych.

Uważane proste skośne e i n wyznaczają kąt nachylenia $\sphericalangle en$ równy kątowi $\sphericalangle cd$, jaki określają proste $c \parallel e$ i $d \parallel n$, a przecinające się w punkcie A . Gdyby proste c i d były do siebie prostopadłe: $c \perp d$, to $\sphericalangle cd = 90^\circ$, a tem samym kąt $\sphericalangle en = 90^\circ$, więc proste skośne e i n byłyby wówczas wzajemnie prostopadłe.

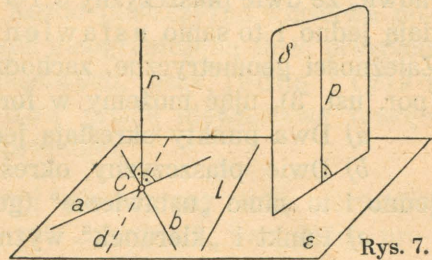
Korzystając z powyższej definicji, rozszerzyć i dokładniej omówić możemy problem prostopadłości prostej do płaszczyzny. Niechaj daną będzie płaszczyzna $\varepsilon = ab$, wyznaczona (rys. 7) prostymi a i b . Przez punkt C , przecięcia się uważanych prostych a i b , poprowadźmy prostą r prostopadłą do nich, a mianowicie: $r \perp a$, i $r \perp b$. Przyjmijmy następnie prostą $p \parallel r$, to w myśl poprzedniej definicji prosta p jest też prostopadłą do danych prostych: $p \perp a$, $p \perp b$. Chcąc zbadać, jak zachowuje się prosta p względem dowolnej prostej l , leżącej na płaszczyźnie ε — poprowadźmy przez punkt C prostą $d \parallel l$. Jeżeli prosta r spełnia warunki: $r \perp a$, $r \perp b$, to wówczas — jak wiadomo — prosta r jest prostopadłą do każdej prostej d , która leży na płaszczyźnie ε i przechodzi przez punkt C . Ponieważ $r \perp d$, $p \parallel r$ i $l \parallel d$, przeto: $p \perp l$ czyli: prosta p jest prostopadłą do dowolnej prostej l , leżącej na płaszczyźnie ε . Prosta p , która jest prostopadłą do każdej prostej l ,

leżącej na płaszczyźnie ε , nazywamy: *prostą prostopadłą do płaszczyzny ε* . I wzajemnie o płaszczyźnie ε mówimy wówczas, że ε jest prostopadłą do prostej p . Wynikiem rozważań naszych są następujące twierdzenia:

Prosta p jest prostopadłą do płaszczyzny ε wówczas, jeżeli p jest prostopadłą do dwóch przecinających się prostych i leżących na płaszc., ε .

Płaszczyzna ε jest prostopadłą do prostej p wówczas, jeżeli ε przechodzi przez dwie przecinające się proste i prostopadłe do prostej p .

Obierzmy (rys. 7) prostą p i płaszczyznę ε , które są elementami wzajemnie prostopadłymi $p \perp \varepsilon$, a następnie poprowadźmy przez prostą p dowolną płaszczyznę δ . Dwie takie płaszczyzny δ i ε nazywamy płaszczyznami prostopadłymi. Możemy tedy powiedzieć:

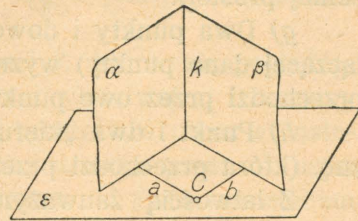


Rys. 7.

Płaszczyzna δ jest prostopadłą do danej płaszczyzny ε wówczas, jeżeli przechodzi przez prostą p prostopadłą do płaszczyzny ε .

Płaszczyzna ε jest prostopadłą do danej płaszczyzny δ wówczas, jeżeli jest prostopadłą do prostej p , leżącej na płaszczyźnie δ .

Dwie proste przecinające się a i b niechaj wyznaczają (rys. 8) płaszczyznę $\varepsilon = ab$. Poprowadźmy dwie płaszczyzny: $\alpha \perp a$ i $\beta \perp b$, to wówczas obie te płaszczyzny są prostopadłe do danej płaszczyzny ε , a mianowicie $\alpha \perp \varepsilon$ i $\beta \perp \varepsilon$. Oznaczmy przez k krawędź przecięcia się elementów α i β , to z warunku $a \perp \alpha$ wynika, że: $a \perp k$; podobnie jest prosta $b \perp k$, gdyż b jest prostopadłą do płaszczyzny β . Ponieważ krawędź k spełnia warunki: $k \perp a$, $k \perp b$, przeto k jest prostopadłą do płaszczyzny $\varepsilon = ab$.



Rys. 8.

Uważajmy teraz płaszczyzny α i β za dane elementy, przecinające się w prostej $k = \alpha\beta$. Przez dowolny punkt C poprowadźmy proste: $a \perp \alpha$ i $b \perp \beta$, to wówczas płaszczyzna $\varepsilon = ab$ jest prostopadłą do danych płaszczyzn: $\varepsilon \perp \alpha$, $\varepsilon \perp \beta$. Z warunków $a \perp \alpha$ i $b \perp \beta$ wynikają zależności: $a \perp k$, $b \perp k$, czyli płaszczyzna $\varepsilon = ab$ jest prostopadłą do krawędzi $k = \alpha\beta$.

Dla płaszczyzn α i β , które nie są do siebie równoległe, dowiedliśmy zatem prawdziwości dwóch twierdzeń następujących:

Dwie płaszczyzny α i β , prostopadłe do danej płaszczyzny ε , przecinają się w krawędzi, która jest prostopadłą do owej płaszczyzny ε .

Płaszczyzna ε , prostopadła do dwóch danych płaszczyzn α i β , jest prostopadłą do krawędzi przecięcia się tych płaszczyzn.

5. Elementy niewłaściwe¹⁾. Uważajmy dwie proste równoległe $a // b$ i dwie płaszczyzny równoległe $\alpha // \beta$. Zamiast mówić, że „proste a i b są równoległe“, powiemy, że owe proste „posiadają jeden i ten sam kierunek“, albo też, że one „posiadają wspólny kierunek“. Zamiast mówić, że dwie płaszczyzny α i β są równoległe, powiemy, że one „posiadają jedno i to samo ustawienie“ lub „posiadają wspólne ustawienie“. Zależności geometryczne, zachodzące pomiędzy elementami zasadniczymi (por. ust. 3), ująć możemy w formę następującą:

- a) Dwa punkty określają jedną i tylko jedną prostą.
- b) Dwie płaszczyzny określają jedną i tylko jedną „prostą“ lub jedno i to samo „ustawienie“ (gdy są równoległe).
- c) Punkt i „kierunek“ wyznaczają jedną i tylko jedną prostą (t. zn. prostą, przechodzącą przez dany punkt i równoległą do danej prostej).
- d) Dwa „kierunki“ określają jedno i tylko jedno „ustawienie“ (t. zn. istnieje nieograniczona ilość płaszczyzn, równoległych do dwóch danych prostych).
- e) Trzy punkty, nie leżące na jednej prostej, wyznaczają jedną i tylko jedną płaszczyznę.
- f) Trzy płaszczyzny, nie przechodzące przez jedną „prostą“ i nie posiadające wspólnego „ustawienia“, wyznaczają jeden i tylko jeden „punkt“ albo jeden i tylko jeden „kierunek“ (gdy są równoległe do tej samej prostej).

g) Dwa punkty i dowolny „kierunek“ (różny od kierunku prostej, łączącej dane punkty) wyznaczają jedną i tylko jedną płaszczyznę, (która przechodzi przez owe punkty i jest równoległą do danej prostej).

h) Punkt i dwa „kierunki“ określają jedną i tylko jedną płaszczyznę, (która przechodzi przez punkt i jest równoległą do danych prostych).

Z łatwością zauważymy, że w wymienionych powyżej związkach bardzo często wyraz „kierunek“ zastąpić możemy słowem „punkt“, a wyraz „ustawienie“ zastąpić możemy przez słowo „prosta“. Mimowoli nasuwa się myśl zdefiniowania kierunku prostej jako „punktu“, a ustawienia płaszczyzny jako „prostej“. Celem odróżnienia „punktu“ w znaczeniu dotychczasowym, od nowo wprowadzonego „punktu“ (zamiast

¹⁾ Porównaj *Federigo Enriques*: Wykłady geometrii rzutowej. Warszawa 1917 (przekład *Fr. Włodarskiego*) str. 8.

Dr. Emil Müller: Lehrbuch d. darstellenden Geometrie f. techn. Hochschulen. Leipzig u. Berlin 1908. Bd. I. S. 8.

„kierunku“) nazywać będziemy: pierwszy z tych elementów punktem właściwym, a drugi punktem niewłaściwym (punktem nieskończenie dalekim lub punktem w nieskończoności). Podobnie prostą w znaczeniu dotychczasowem nazwiemy prostą właściwą, a nowo wprowadzony element (t. j. prostą zamiast „ustawienia“) prostą niewłaściwą (prostą nieskończenie daleką albo prostą w nieskończoności). Elementy niewłaściwe oznaczать będziemy symbolem: ∞ , pisząc np. A^∞ (czytaj: punkt niewłaściwy A) i b^∞ (prosta niewłaściwa b). Stosując wprowadzone wyrażenia, powiemy:

Każda prosta właściwa posiada nieograniczoną ilość punktów właściwych, oraz jeden i tylko jeden punkt niewłaściwy (swój kierunek).

Każda płaszczyzna właściwa posiada nieograniczoną ilość prostych właściwych, oraz jedną i tylko jedną prostą niewłaściwą (swoje ustawienie).

Na „prostej niewłaściwej“ uważanej płaszczyzny leżą wszystkie punkty niewłaściwe tej płaszczyzny, t. zn. „kierunki“ wszystkich prostych właściwych, które leżą na tej płaszczyźnie.

O dwóch prostych równoległych (por. ust. 4) powiedzieć możemy: one „nie przecinają się w punkcie właściwym“ albo też: one „przecinają się w jednym i tylko jednym punkcie niewłaściwym“. Zamiast mówić, że: „dwie płaszczyzny równoległe nie przecinają się w prostej właściwej“ powiemy: „dwie płaszczyzny równoległe przecinają się w jednej i tylko jednej prostej niewłaściwej“. Jeżeli prosta c i płaszczyzna ε (por. ust. 4, rys. 6) są równoległe: $c \parallel \varepsilon$, to wówczas możemy powiedzieć: „elementy c i ε nie przecinają się w punkcie właściwym“ albo też „elementy c i ε przecinają się w jednym i tylko jednym punkcie niewłaściwym“.

Uważajmy dwie dowolne płaszczyzny α i β , które nie posiadają wspólnego ustawienia i przecinają się w prostej właściwej c . Oznaczmy przez C^∞ kierunek (t. zn. punkt niewłaściwy) prostej c , a przez a^∞ ustawienie (t. zn. prostą niewłaściwą) płaszczyzny α , oraz przez b^∞ ustawienie płaszczyzny β . Skoro dane są płaszczyzny α i β , to tem samem dane są w przestrzeni dwa różne od siebie ustawienia czyli: dwie różne od siebie proste niewłaściwe a^∞ i b^∞ . Aby zbadać, jak zachowują się te proste względem siebie, zauważmy, że każdy punkt — a zatem i punkt C^∞ — krawędzi $c = \alpha\beta$ przynależy równocześnie do płaszczyzny α i do płaszczyzny β . Punkt niewłaściwy C^∞ , jako punkt płaszczyzny α , leży na prostej niewłaściwej a^∞ ; punkt C^∞ leży równocześnie i na prostej niewłaściwej b^∞ , gdyż jest punktem płaszczyzny β . Wnosimy stąd, że:

Każde dwie (różne od siebie) proste niewłaściwe przecinają się w jednym i tylko jednym punkcie niewłaściwym.

Niechaj dane będą w przestrzeni takie proste: $a, b, c, \dots$, z których każde dwie przecinają się w jednym punkcie, ale wszystkie nie muszą koniecznie przechodzić przez jeden i ten sam punkt. Wykażemy, że wszystkie te proste muszą leżeć na jednej płaszczyźnie. Oznaczmy przez W punkt przecięcia się prostych a i b , to przynajmniej jedna z danych prostych, np. prosta c , nie przechodzi przez punkt $W = ab$. Ponieważ c przecina się — wedle założenia — z prostymi a i b w dwóch punktach różnych od W , przeto prosta c leży na płaszczyźnie $\varepsilon = ab$. Każda inna prosta np. d , przecinająca proste a, b i c , nie może przechodzić równocześnie przez punkty $W = ab, A = ca$ i $B = bc$. Jeżeli prosta d nie przechodzi np. przez $A = ca$, to musi leżeć na płaszczyźnie $\varepsilon = ac$. A zatem:

Jeżeli każde dwie z pośród prostych $a, b, c, \dots$ przecinają się, lecz nie wszystkie przechodzą przez jeden i ten sam punkt, to wówczas wszystkie uważane proste leżą na jednej i tej samej płaszczyźnie.

Weźmy teraz pod uwagę ogół prostych niewłaściwych: $a^\infty, b^\infty, c^\infty, \dots$, przyczem niechaj każda z nich przynależy odpowiednio do płaszczyzny: $\alpha, \beta, \gamma \dots$. Ponieważ każde dwie proste niewłaściwe przecinają się w jednym i tylko w jednym punkcie niewłaściwym, ale wszystkie proste $a^\infty, b^\infty, c^\infty, \dots$ nie muszą równocześnie przechodzić przez jeden i ten sam punkt niewłaściwy (bo wszystkie płaszczyzny $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ nie muszą być koniecznie równoległe do jednej i tej samej prostej!) — przeto: nasuwa się myśl *zdefiniowania ogółu prostych niewłaściwych* (a tem samem i punktów niewłaściwych) *w przestrzeni jako „płaszczyzny“*.

Celem odróżnienia „płaszczyzny“ w znaczeniu zwykłym (dotychczasowem), od nowowprowadzonej „płaszczyzny“, która zawiera wszystkie punkty niewłaściwe i wszystkie proste niewłaściwe — nazywać będziemy pierwszą z nich płaszczyzną właściwą, a drugą płaszczyzną niewłaściwą (pł. nieskończenie daleką, pł. w nieskończoności).

Korzystając z dotychczasowych rozważań, ująć możemy zależności $a) \dots h)$, podane na początku tego ustępu, w następującą formę:

Dwa punkty określają jedną i tylko jedną prostą.

Trzy punkty, nie należące do jednej prostej, określają jedną i tylko jedną płaszczyznę.

Dwie płaszczyzny określają jedną i tylko jedną prostą.

Trzy płaszczyzny, nie należące do jednej prostej, określają jeden i tylko jeden punkt.

W powyższych twierdzeniach nie czynimy już żadnej różnicy pomiędzy „elementami właściwymi“ a „elementami niewłaściwymi“. Z łańcuchem stwierdzimy też prawdziwość następujących twierdzeń:

Prosta i punkt, nie należące do siebie, określają jedną i tylko jedną płaszczyznę.

Dwie proste, przecinające się w punkcie, określają jedną i tylko jedną płaszczyznę.

Płaszczyzna i prosta, nie należące do siebie, określają jeden i tylko jeden punkt.

Dwie proste, leżące na płaszczyźnie, określają jeden i tylko jeden punkt.

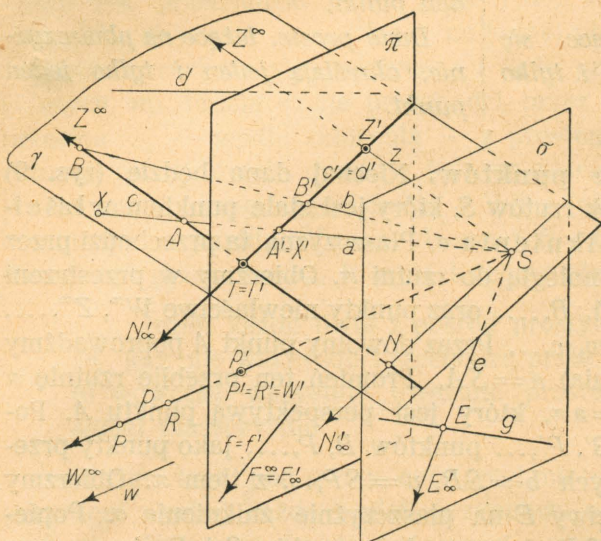
6. Rzuty środkowe punktów. Niechaj dana będzie (rys. 9) płaszczyzna obrazu π , środek rzutów S , który jest stale punktem właściwym, oraz płaszczyzna zniknięcia σ . Płaszczyzna ta przechodzi przez środek rzutów S i jest równoległą do rzutni π . Obierzmy w przestrzeni dowolne punkty właściwe $A, B, \dots$, oraz punkty niewłaściwe $W^\infty, Z^\infty, \dots$, t. zn. „kierunki” prostych $w, c, \dots$. Przez dowolny punkt A poprowadźmy promień rzucający (widzenia) $a = SA$. Promień ten przebije rzutnię π w punkcie właściwym $A' = a\pi$, który jest perspektywą punktu A . Podobnie otrzymamy obrazy $B', P', \dots$ punktów $B, P, \dots$, jako punkty przebiecia się promieni rzucających $b = SB, p = SP, \dots$ z tłem π . Obierzmy teraz dowolny punkt właściwy E na płaszczyźnie zniknięcia σ . Ponieważ $\sigma // \pi$, a promień $e = SE$, łączący dwa punkty S i E płaszczyzny zniknięcia σ , leży na tej płaszczyźnie, przeto ów promień rzucający $e = SE$ jest równoległy do tła π i przebija się z nim w punkcie niewłaściwym $E'_\infty = e\pi$. Dla dowolnego punktu T , który leży na tle π , jego perspektywa T' nakrywa się z elementem T . To samo oczywiście odnosi się również i do punktu niewłaściwego F^∞ , który leży na tle π i równocześnie na płaszczyźnie zniknięcia σ ; jego perspektywa F'_∞ nakrywa się z punktem F^∞ . Weźmy wreszcie pod uwagę punkty niewłaściwe $W^\infty, Z^\infty, \dots$, przynależne do prostych $w, c, \dots$, które wcale nie są równoległe do rzutni π . Celem skonstruowania rzutów środkowych punktów $W^\infty, Z^\infty, \dots$, poprowadźmy promienie rzucające: $p = SW^\infty, z = SZ^\infty, \dots$, t. zn. proste $p // w, z // c, \dots$ i przechodzące przez środek rzutów S . Punkty właściwe $W' = p\pi, Z' = z\pi, \dots$, przebiecia się promieni widzenia $p, z, \dots$ z tłem π , są perspektywami punktów niewłaściwych $W^\infty, Z^\infty, \dots$.

Ponieważ środek rzutów S i dowolny (ale różny od S) punkt P wyznaczają jeden i tylko jeden promień widzenia $p = SP$, przeto ustalić możemy następujące zależności:

Każdemu punktowi P — różnemu od środka rzutów S — podporządkowany jest na płaszczyźnie obrazu π jeden i tylko jeden rzut środkowy P' owego punktu, t. j. punkt P' przebiecia się promienia rzucającego $p = SP$ z rzutnią π .

Perspektywa P' punktu właściwego lub niewłaściwego jest punktem niewłaściwym wówczas, jeżeli ów punkt P leży na płaszczyźnie zniknie-

nia. Natomiast dla punktu właściwego lub niewłaściwego, który nie leży wcale na płaszczyźnie zniknięcia, jego perspektywa jest punktem właściwym.



Rys. 9.

Na promieniu rzucającym p obierzmy (rys. 9) dowolne punkty $P, R, \dots W^\infty, \dots$, to ich perspektywy $P', R', \dots W' \dots$ zjednoczyły się (nakryły się) z punktem $P' = p\pi$. Skoro dany jest rzut P' , to położenie elementu P nie jest ustalone, gdyż:

Dowolny punkt P' płaszczyzny obrazu uważany być może za rzut środkowy każdego punktu P , który leży na promieniu rzucającym $p = SP'$.

7. Rzuty środkowe prostych. W poprzednim ustępie omówiliśmy sprawę odwzorowania na płaszczyźnie tłowej punktu, dowolnie leżącego w przestrzeni. Zanim przejdziemy do kwestji odwzorowania dowolnej prostej, wprowadzimy następującą

Definicję: Rzutem środkowym (perspektywą) linii prostej nazywamy miejsce geometryczne rzutów środkowych (perspektyw) poszczególnych punktów tej prostej.

Przez środek rzutów S poprowadźmy (rys. 9) dowolny promień rzucający p i obierzmy na nim punkty $P, R, W^\infty, \dots$. Ponieważ perspektywy $P', R', W', \dots$ tych punktów są zjednoczone w punkcie $p\pi$ przebiecia się promienia p z tłem π , przeto: rzut środkowy prostej p jest punktem. Dla promienia rzucającego e , który leży na płaszczyźnie zniknięcia σ i jest tem samem równoległy do tła π , jego perspektywa jest punktem niewłaściwym $e\pi = E'_\infty$.

Niechaj daną będzie (rys. 9) dowolna prosta c , która nie jest promieniem rzucającym, t. zn. nie przechodzi przez środek rzutów S . W tym wypadku przez S i prostą c przechodzi jedna ściśle określona płaszczyzna rzucająca $\gamma = Sc$. Na prostej c obierzmy punkty: $A, B, Z^\infty, \dots$ i przy pomocy promieni rzucających $a = SA, b = SB, z = SZ^\infty, \dots$ wyznaczmy perspektywy $A' = a\pi, B' = b\pi, Z' = z\pi, \dots$ owych punktów. W myśl naszej definicji, miejsce geometryczne punktów: $A', B', Z', \dots$ jest rzutem środkowym prostej c . Z łatwością jednak zauważymy, że promień

rzucający $a = SA$ leży na płaszczyźnie rzucającej $\gamma = Sc$, gdyż posiada z nią dwa wspólne punkty S i A . Każdy punkt promienia $a = SA$, a więc i punkt $A' = a\pi$, leży zatem na płaszczyźnie γ . Ponieważ jednak punkt $A' = a\pi$ jest przynależny i do rzutni tłowej π , przeto ów punkt A' leży na krawędzi $c' = \gamma\pi$ przecięcia się płaszczyzn γ i π . Zupełnie analogicznie wykazać możemy, że również i dalsze punkty $B', Z', \dots$ leżą na krawędzi c' czyli innymi słowy: perspektywa prostej c jest linią prostą c' .

Na płaszczyźnie rzucającej $\gamma = Sc$ obierzmy dowolną prostą d , która nie przechodzi przez środek rzutów S . Z łatwością zauważymy, że dla prostej d jej perspektywa d' nakryje się z krawędzią $c' = \gamma\pi$. Wnosimy stąd, że prostą c' uważać możemy za rzut środkowy każdej prostej, która leży na płaszczyźnie rzucającej $\gamma = Sc$. Prostą właściwą c' możemy tedy uważać również i za perspektywę prostej niewłaściwej l^∞ , która leży na płaszczyźnie γ .

Dla prostej (właściwej lub niewłaściwej) f , która leży (rys. 9) na płaszczyźnie obrazu π , jej perspektywa f' schodzi się z tą prostą, gdyż płaszczyzna rzucająca $\varphi = Sf$ przecina się z tłem w krawędzi $f = f' = \varphi\pi$. Uważajmy wreszcie dowolną prostą g , leżącą na płaszczyźnie zniknięcia σ . Rzuty środkowe poszczególnych punktów $E, \dots$ prostej g są punktami niewłaściwymi $E_\infty, \dots$; podobnie płaszczyzna rzucająca $\sigma = Sg$ przecina tło π w prostej niewłaściwej $g^\infty = \pi\sigma$. Rzut środkowy prostej właściwej g jest zatem prostą niewłaściwą g^∞ . Z rozważań tych wynika następujące twierdzenie:

Perspektywa (rzut środkowy) linii prostej jest punktem lub prostą zależnie od tego, czy uważana prosta przechodzi, czy też wcale nie przechodzi przez środek rzutów.

Jeżeli prosta właściwa leży na płaszczyźnie zniknięcia i nie przechodzi przez środek rzutów S , to jej perspektywa jest prostą niewłaściwą. Każda prosta właściwa lub niewłaściwa płaszczyzny tłowej, (a zatem i prosta niewłaściwa płaszczyzny zniknięcia) posiada tę własność, że jej perspektywa nakrywa się z ową prostą. Dla każdej innej prostej właściwej lub niewłaściwej, która nie przechodzi przez środek rzutów S , jej perspektywa jest zawsze prostą właściwą.

Z rozważań naszych wynikają również następujące zależności:

Dowolny punkt A' płaszczyzny tłowej π uważać możemy za perspektywę jednego i tylko jednego promienia rzucającego $a = SA'$, który łączy środek rzutów S z danym punktem A' .

Dowolną prostą c' płaszczyzny tłowej uważać możemy za perspektywę każdej prostej c , która leży na płaszczyźnie rzucającej $\gamma = Sc'$, wyznaczonej środkiem rzutów S i daną prostą c' .

Bez względu na to, czy punkt A i prosta c są elementami „wła-

ściwemi“, czy też „niewłaściwemi“, to zawsze występują związki: Jeżeli punkt A leży na prostej c , to rzut A' tego punktu (definicja str. 16) leży na rzucie c' owej prostej. Jeżeli prosta c przechodzi przez punkt A , to rzut c' tej prostej przechodzi przez rzut A' uważanego punktu. A zatem:

Jeżeli punkt A i prosta c przynależą do siebie, to wówczas ich perspektywy A' i c' są również elementami przynależnymi do siebie.

Uwaga: Nie należy bynajmniej sądzić, że odwrotne zależności muszą być zawsze prawdziwe! Niechaj punkt X' (por. rys. 9) leży na rzucie środkowym c' dowolnej prostej c i schodzi się z punktem A' , to wówczas: element X' uważać możemy za perspektywę każdego punktu X , leżącego na promieniu rzucającym $a = SX'$.

8. Ustalenie położenia prostej i punktu w metodzie rzutów środkowych. Celem skonstruowania perspektywy c' dowolnej prostej c , postąpić możemy (rys. 9) w sposób następujący:

Konstrukcja 1: Na danej prostej c obrać należy dwa dowolne punkty A i B , wyznaczyć ich rzuty środkowe A' i B' , to prosta $c' = A'B'$ jest wówczas żadaną perspektywą prostej c .

Konstrukcja 2: Przez daną prostą c i przez środek rzutów S poprowadzić należy płaszczyznę rzucającą $\gamma = Sc$, to krawędź przecięcia się tej płaszczyzny z rzutnią π jest rzutem środkowym $c' = \gamma\pi$ prostej c .

Skoro elementy c' , A' i B' uważać będziemy za dane, to — jak nam wiadomo — położenie prostej c , oraz punktów A i B nie jest ustalone w przestrzeni. Ponieważ proste c i c' leżą na płaszczyźnie rzucającej γ , przeto przecinają się w punkcie (właściwym lub niewłaściwym) $T = cc'$, który jest zarazem punktem $T = c\pi$ przebicia się prostej c z płaszczyzną tłową π . Ów punkt T nazywamy śladem tłowym prostej c . Przez środek rzutów S poprowadźmy następnie promień rzucający $z \parallel c$, t. zn. prostą $z = SZ^\infty$, łączącą S z punktem niewłaściwym Z^∞ prostej c . Punkt $Z' = z\pi$, który jest perspektywą punktu Z^∞ , nazywamy śladem zbiegu prostej c .

Zakładamy teraz, że ślad tłowy T i ślad zbiegu Z' dowolnej prostej c (rys. 9) są elementami danymi. Uważając prostą $c' = TZ'$ za perspektywę prostej c , możemy odbudować (odtworzyć, przeprowadzić rekonstrukcję) położenie owej prostej c w przestrzeni. W tym celu połączmy dany środek rzutów S ze śladem zbiegu Z' , to prosta $z = SZ'$ wyznacza „kierunek“ prostej c czyli punkt niewłaściwy Z^∞ tej prostej. Przez ślad tłowy T poprowadźmy następnie prostą $c \parallel z$, to prosta $c = TZ^\infty$ jest właśnie szukaną prostą. A zatem:

W metodzie rzutów środkowych położenie prostej w przestrzeni jest wówczas wyznaczone, skoro dane są: ślad tłowy i ślad zbiegu tej prostej.

Z łatwością stwierdzimy, że:

Położenie punktu w przestrzeni jest wyznaczone wówczas, jeżeli dana jest jego perspektywa, oraz ślad tłowy i ślad zbiegu pomocniczej prostej, która przechodzi przez ów punkt.

W istocie bowiem oznaczmy przez $c' = TZ'$ perspektywę prostej c , której położenie w przestrzeni ustalone jest przez ślad tłowy T i ślad zbiegu Z' . Jeżeli na c' obierzemy dowolny punkt A' i uważać go będziemy za rzut środkowy punktu A , leżącego na prostej c — to z łatwością przeprowadzimy rekonstrukcję położenia owego punktu A . W sposób poprzednio podany odtworzymy położenie prostej c w przestrzeni, a następnie poprowadzimy przez punkt A' promień rzucający $a = SA'$. Punkt przecięcia się promienia a z prostą c jest szukanym punktem $A = ac$.

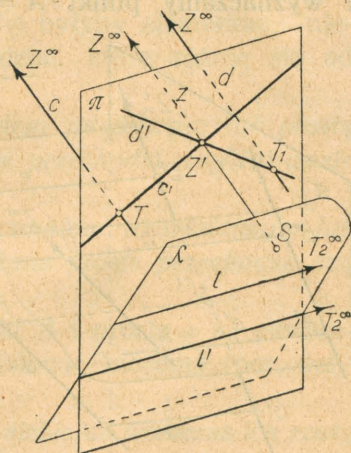
Niechaj dane będą dwie proste równoległe $c \parallel d$, przecinające się w punkcie niewłaściwym Z^∞ . Promień rzucający $z = SZ^\infty$ przebiega (rys. 10) płaszczyznę tłową π w punkcie Z' . Ponieważ proste c i d przechodzą przez Z^∞ , przeto ich perspektywy c' i d' przejść muszą przez punkt Z' . A zatem:

Perspektywy prostych równoległych przecinają się w jednym punkcie, a mianowicie w ich wspólnym śladzie zbiegu.

Gdyby proste $c \parallel d$ były równoległe do tła π , to wówczas i promień rzucający $z = SZ^\infty$ będzie prostą równoległą do tła. Przez ślad zbiegu $Z'_\infty = \pi z$ przejdą perspektywy c' i d' , więc $c' \parallel d'$. Perspektywy prostych, równoległych do siebie i równoległych do tła, są prostami równoległymi.

Niechaj daną będzie prosta l równoległa do płaszczyzny obrazu π (rys. 10), to ślad tłowy tej prostej jest punktem niewłaściwym $T_2^\infty = l\pi$. Przez T_2^∞ przejść musi rzut środkowy l' prostej l czyli: punkt T_2^∞ leży równocześnie na prostych l i l' . A zatem wypowiedzieć możemy następujące twierdzenie:

Jeżeli prosta jest równoległa do tła, ale nie przechodzi ani przez środek rzutów, ani nie leży na płaszczyźnie zniknięcia, to owa prosta jest wówczas równoległa do swej perspektywy.



Rys. 10.

9. Rzuty ukośne punktów i prostych. W metodzie rzutów środkowych przyjmowaliśmy, obok tła π , charakterystyczny punkt: środek rzutów S , który stale był punktem właściwym. Załóżmy teraz,

że środek rzutów jest punktem niewłaściwym S^∞ , to wówczas (rys. 11) wszystkie promienie rzucające (widzenia) są prostymi równoległymi, gdyż przecinają się w punkcie S^∞ . Metoda rzutów ukośnych (równoległych) jest zatem tylko szczególnym przypadkiem metody rzutów środkowych.

Z rozważań ust. 6 i 7 wnosimy bezpośrednio, że: Rzut ukośny punktu jest zawsze punktem. Rzut ukośny prostej p , która jest równoległą do kierunku rzutów s , t. zn. przechodzi przez środek rzutów S^∞ (rys. 11), jest zawsze punktem. Natomiast rzut ukośny dowolnej prostej c , która nie przechodzi przez środek rzutów S^∞ , jest linią prostą c' . Te własności były wspólne dla obydwu metod: perspektywy i rzutów ukośnych. Teraz zwróćmy uwagę na zasadnicze różnice, jakie występują pomiędzy rzutami punktów i prostych w owych dwóch metodach.

Niechaj dany będzie (rys. 11) dowolny punkt właściwy A . Aby wyznaczyć rzut ukośny (równoległy) punktu A , prowadzimy promień rzucający $a = AS^\infty$ równoległy do przyjętego „kierunku” rzutów s i wyznaczamy punkt $A' = a\pi$ przecięcia się promienia a z rzutnią π .

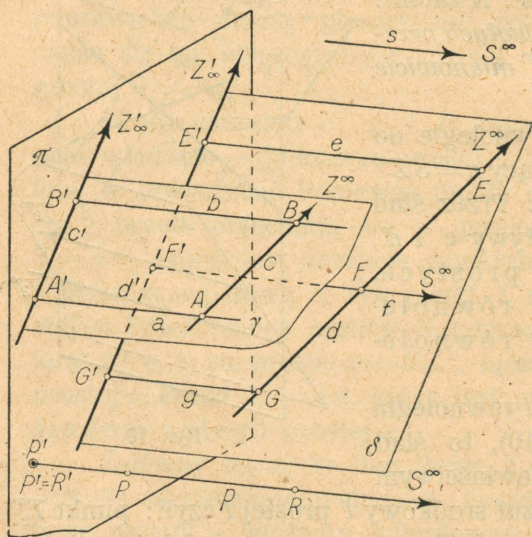
Ponieważ promień rzucający a , na którym leżą punkty S^∞ , A i A' , posiada jeden i tylko jeden punkt niewłaściwy S^∞ , przeto: rzut ukośny A' punktu właściwego A jest punktem właściwym.

Na dowolnej prostej c , która nie przechodzi przez środek rzutów S^∞ , obierzmy punkt niewłaściwy Z^∞ . Aby wyznaczyć rzut ukośny tego punktu, poprowadźmy przez punkt Z^∞ i przez środek rzutów S^∞ promień rzucający $z^\infty = Z^\infty S^\infty$, który jest oczywiście prostą niewłaściwą. Promień z^∞ przebija się z rzutnią π w punkcie niewłaściwym $Z'_\infty = \pi z^\infty$, który jest rzutem ukośnym (równoległym) punktu Z^∞ .

A zatem wypowiedzieć możemy twierdzenia, które zasadniczo różnią się od twierdzeń ustępu 6, a mianowicie:

Rzut ukośny punktu właściwego jest zawsze punktem właściwym. Rzut ukośny punktu niewłaściwego, który nie zjednoczył się ze środkiem rzutów S^∞ , jest punktem niewłaściwym.

Na promieniu rzucającym p obierzmy (rys. 11) punkty $P, R, \dots$.



Rys. 11.

to ich rzuty ukośne $P', R', \dots$ zjednoczone są w punkcie $p\pi$. Na mocy definicji, podanej w ust. 7, rzut ukośny promienia rzucającego p jest punktem. Uważajmy teraz dowolną prostą c , która nie jest równoległą do kierunku rzutów s . Celem wyznaczenia rzutu ukośnego (równoległego) tej prostej, zastosować możemy (por. ust. 8) dwie konstrukcje następujące:

Konstrukcja 1: Na prostej c obierzmy dwa dowolne punkty A, B i wyznaczmy, przy pomocy promieni rzucających $a = AS^\infty$ i $b = BS^\infty$, rzuty ukośne $A' = a\pi$, $B' = b\pi$ owych punktów. Prosta $c' = A'B'$, łącząca punkty A' i B' , jest rzutem ukośnym danej prostej c .

Konstrukcja 2: Przez daną prostą c i środek rzutów S^∞ poprowadźmy płaszczyznę rzucającą $\gamma = cS^\infty$, t. zn. płaszczyznę równoległą do kierunku rzutów s . Krawędź $c' = \gamma\pi$, przecięcia się płaszczyzny γ z rzutnią π , jest rzutem ukośnym prostej c .

Jeden z pomocniczych punktów A i B , użytych w konstrukcji 1-ej, może być elementem niewłaściwym. Gdyby obydwa punkty pomocnicze były elementami niewłaściwymi A^∞ i B^∞ , to wówczas: prosta $c^\infty = A^\infty B^\infty$, promienie rzucające $a^\infty = A^\infty S^\infty$, $b^\infty = B^\infty S^\infty$, oraz płaszczyzna rzucająca $\gamma^\infty = c^\infty S^\infty$, a tem samem i rzut $c'_\infty = \gamma^\infty\pi$ byłyby elementami niewłaściwymi. A zatem dochodzimy do twierdzeń, które różnią się od twierdzeń ust. 7, a mianowicie:

Rzut ukośny prostej właściwej jest punktem właściwym lub prostą właściwą zależnie od tego, czy uważana prosta przechodzi, czy też wcale nie przechodzi przez środek rzutów.

Rzut ukośny prostej niewłaściwej jest punktem niewłaściwym lub prostą niewłaściwą zależnie od tego, czy uważana prosta przechodzi, czy też wcale nie przechodzi przez środek rzutów.

Natomiast, bez względu na to, czy punkt A i prosta c są elementami właściwymi, czy też niewłaściwymi, wysłowić możemy (por. definicję ust. 7) następującą zależność:

Jeżeli punkt A i prosta c przynależą do siebie, to wówczas ich rzuty ukośne A' i c' są również elementami, które przynależą do siebie.

Uwaga: Odwrotne twierdzenie byłoby zupełnie fałszywe. Niechaj rzut ukośny A' pewnego punktu A leży na rzucie ukośnym c' dowolnej prostej c . Punkt A nie musi wcale leżeć na prostej c , gdyż A może być dowolnym punktem promienia rzucającego $a = A'S^\infty$. Podobnie prosta c nie musi wcale przechodzić przez punkt A , ale może być zupełnie dowolną prostą płaszczyzny rzucającej $\gamma = c'S^\infty$.

Uważajmy dwie proste równoległe $c \parallel d$, które przecinają się w punkcie niewłaściwym Z^∞ . Rzuty ukośne c' i d' danych prostych przejść muszą przez rzut punktu Z^∞ , t. zn. przez punkt niewłaściwy Z'_∞ . Wnosimy stąd, że elementy c' i d' są prostami równoległymi. Zależność tę uzasadnić też możemy w inny sposób: Przez punkt A prostej c i przez punkt G prostej d poprowadźmy promienie rzucające $a = AS^\infty$, $g = GS^\infty$.

Ponieważ $c \parallel d$, $a \parallel g$, przeto płaszczyzny $\gamma = ca$ i $\delta = gd$ są do siebie równoległe i przecinają się w prostej niewłaściwej $k^\infty = \gamma\delta$. Rzutnia π wyznacza z płaszczyznami γ i δ jeden i tylko jeden punkt, przez który przejść muszą krawędzie $k^\infty = \gamma\delta$, $c' = \gamma\pi$ i $d' = \delta\pi$. Ponieważ ów punkt przynależy do prostej k^∞ , przeto musi być punktem niewłaściwym $Z_\infty = \pi\gamma\delta$. Przez punkt Z_∞ przechodzą proste c' i d' , więc one są prostami równoległymi. A zatem:

Rzuty ukośne prostych równoległych, które nie przechodzą przez środek rzutów, są prostami równoległymi.

Z rozważań ust. 8 wynika bezpośrednio następująca zależność:

Jeżeli prosta właściwa jest równoległą do rzutni, to owa prosta jest równoległą też i do swego rzutu ukośnego.

Na dowolnej prostej d obierzmy (rys. 11) punkty E, F, G i wyznaczmy ich rzuty ukośne E', F', G' . Ponieważ promienie rzucające $e = EE'$, $f = FF'$ i $g = GG'$ są równoległe do kierunku rzutów s , przeto pomiędzy odcinkami $\overline{EF}, \dots$ zachodzi relacja:

$$\overline{EF} : \overline{FG} = \overline{E'F'} : \overline{F'G'}$$

Możemy tedy wypowiedzieć bardzo ważne twierdzenie w formie następującej:

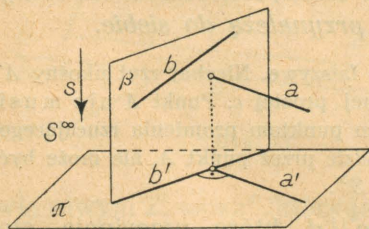
Jeżeli punkt F dzieli odcinek $\overline{EG}$ w pewnym stosunku, to również i rzut ukośny F' owego punktu dzieli w tym samym stosunku rzut ukośny $E'G'$ uważanego odcinka.

10. Rzuty prostokątne punktów i prostych. Załóżmy teraz, że kierunek rzutów s jest prostopadły do płaszczyzny obrazu π ; otrzymana metoda rzutów prostokątnych jest tylko szczególnym przypadkiem metody rzutów ukośnych (równoległych). W metodzie rzutów prostokątnych ważne są wszystkie twierdzenia, omówione w ust. 9.

Obok nich ogromnie wybitną rolę odgrywa twierdzenie o rzucie kąta prostego.

Niechaj daną będzie prosta a równoległa do rzutni π (rys. 12), to wówczas owa prosta jest (ust. 9) równoległą do swego rzutu prostokątnego a' (na rzutnię π). Oznaczmy przez β płaszczyznę prostopadłą do promienia a , to dowolna prosta b tej płaszczyzny jest prostopadłą do promienia a . Z warunków $a \parallel a'$ i $\beta \perp a$ wynika:

$\beta \perp a'$ czyli $\beta \perp \pi$. Płaszczyzna β jest zatem płaszczyzną rzucającą (przechodzi przez środek rzutów S^∞) i przecina rzutnię π w prostej b' , która jest rzutem prostokątnym uważanej prostej b . Ponieważ $a \perp \beta$,



Rys. 12.

przeto prosta a jest prostopadłą do elementu b' , a że $a' \parallel a$, więc proste a' i b' tworzą kąt prosty: $a' \perp b'$. Wykazaliśmy tedy, że rzut prostokątny kąta prostego $\sphericalangle ab = 90^\circ$ jest kątem prostym $\sphericalangle a'b' = 90^\circ$.

Założmy teraz, że na płaszczyźnie π dane są dwie proste prostopadłe $a' \perp b'$, które są rzutami prostokątnymi takich dwóch prostych a i b , z których pierwsza a jest równoległą do rzutni π . Zbadajmy, jak się zachowuje prosta b względem prostej a . Przez promień b' poprowadźmy w tym celu płaszczyznę $\beta \perp a'$ czyli $\beta \perp \pi$. Płaszczyzna β jest zatem płaszczyzną rzucającą, a promień $b' = \beta\pi$ uważany być może za rzut każdej prostej b , leżącej na płaszczyźnie β . Ponieważ: $\beta \perp a'$, $a \parallel \pi$, $a \parallel a'$, przeto: $\beta \perp a$, więc dowolna prosta b , leżąca na płaszczyźnie β , jest prostopadłą do prostej a . — Powyższe zależności zachodzą również i w tym przypadku, gdy prosta a leży na rzutni π , t. zn. gdy $a = a'$. Wykazaliśmy tedy prawdziwość dwóch następujących twierdzeń:

Rzut prostokątny kąta prostego, którego jedno ramię jest równoległe do (wzgl. leży na) rzutni, jest kątem prostym.

Dwie proste, z których jedna jest równoległą do (wzgl. leży na) rzutni, tworzą kąt prosty wówczas, jeżeli rzuty prostokątne tych prostych są wzajemnie prostopadłe.

Zauważyć musimy, że pierwsze twierdzenie (z lewej strony) jest prawdziwe wówczas, jeśli drugie ramię omawianego kąta nie jest prostopadłe do rzutni.

Rozdział II.

Rzuty aksonometryczne punktu.

11. Wiadomości początkowe. Niechaj dany będzie układ $O[x, y, z]$ trzech rzutni wzajemnie prostopadłych π_1, π_2 i π_3 (rys. 13), oraz dowolna płaszczyzna obrazu π_a . Osie $x = \pi_1 \pi_2$, $y = \pi_1 \pi_3$ i $z = \pi_2 \pi_3$ układu $[O]$ są wzajemnie prostopadłe i przecinają się w środku (początku) O tego układu. Płaszczyzna obrazu π_a , którą uważać będziemy za rzutnię aksonometryczną, jest dowolnie nachyloną¹⁾ do rzutni poziomej π_1 , pionowej π_2 i bocznej π_3 , i przecina się z nimi w trzech prostych: $s_1 = \pi_a \pi_1$, $s_2 = \pi_a \pi_2$, $s_3 = \pi_a \pi_3$. Skoro założymy, że kierunek rzutów n jest prostopadły (normalny) do rzutni aksonometrycznej π_a , to rzuty prostokątne A^n (czytaj „ A ze znaczkiem n “ lub „ $A n$ “), $B^n, \dots, c^n, d^n, \dots$ punktów $A, B, \dots$ i prostych $c, d, \dots$ na płaszczyznę obrazu π_a nazywać będziemy „rzutami (obrazami) aksonometrycznymi prostokątnymi“ lub aksonometrijami prostokątnymi uważanych elementów.

Z rozważań ustępów 9 i 10 wynika bezpośrednio, że:

1. *Aksonometria prostokątna punktu właściwego jest punktem właściwym. Aksonometria punktu niewłaściwego (ale różnego od środka rzutów N^∞ , leżącego na promieniu n) jest punktem niewłaściwym.*

2. *Aksonometria prostokątna prostej właściwej jest punktem właściwym lub prostą właściwą zależnie od tego, czy uważana prosta przechodzi, czy też wcale nie przechodzi przez środek rzutów N^∞ .*

3. *Aksonometria prostokątna prostej niewłaściwej jest punktem niewłaściwym lub prostą niewłaściwą zależnie od tego, czy uważana prosta przechodzi, czy też wcale nie przechodzi przez środek rzutów N^∞ .*

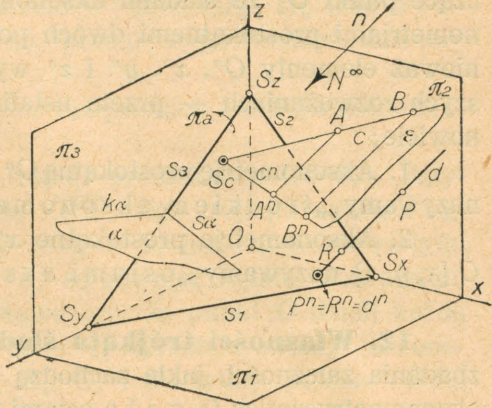
4. *Jeżeli punkt A i prosta c przynależą do siebie, to wówczas ich aksonometrie prostokątne A^n i c^n są również elementami przynależnymi do siebie.*

5. *Aksonometrie prostokątne prostych równoległych, a nie przechodzących przez środek rzutów N^∞ , są prostymi równoległymi.*

¹⁾ Rzutnia π_a nie może być prostopadłą ani do żadnej rzutni, ani też do żadnej osi układu $[O]$.

6. Rzut aksonometryczny prostokątny kąta prostego, którego jedno ramię jest równoległe do (wzgl. leży na) rzutni aksonometrycznej, jest kątem prostym.

Płaszczyznę prostopadłą do rzutni aksonometrycznej π_a , t. zn. płaszczyznę przechodzącą przez środek rzutów N^∞ , stałe nazywać będziemy płaszczyzną aksonometrycznie-rzucającą. Podobnie płaszczyznę prostopadłą do rzutni poziomej π_1 , (pionowej π_2 , względnie bocznej π_3) nazywać będziemy płaszczyzną poziomo-rzucającą (pionowo- wzgl. boczno-rzucającą). Punkt przecięcia się prostej c z rzutnią π nazywać będziemy śladem tej prostej. Punkt $H_c = c\pi_1$ jest śladem poziomym, punkty $V_c = c\pi_2$ i $K_c = c\pi_3$ są śladami pionowym i bocznym, a punkt $S_c = c\pi_a$ jest śladem aksonometrycznym prostej c .



Rys. 13.

Krawędź przecięcia się dowolnej płaszczyzny α z rzutnią π nazywać będziemy śladem tej płaszczyzny. Krawędzie: $h_\alpha = \alpha\pi_1$, $v_\alpha = \alpha\pi_2$, $k_\alpha = \alpha\pi_3$ i $s_\alpha = \alpha\pi_a$ są odpowiednio śladami: poziomym, pionowym, bocznym, wzgl. aksonometrycznym uważanej płaszczyzny α . Na rys. 13 zaznaczono ślad boczny k_α i ślad aksonometryczny s_α dowolnie przyjętej płaszczyzny α , oraz ślad aksonometryczny $S_c = c\pi_a$ prostej c .

Krawędzie $s_1 = \pi_a\pi_1$, $s_2 = \pi_a\pi_2$ i $s_3 = \pi_a\pi_3$, przecięcia się rzutni aksonometrycznej π_a z poszczególnymi rzutniami π_1 , π_2 i π_3 układu $O[x, y, z]$, są odpowiednio śladami aksonometrycznymi rzutni: poziomej π_1 , pionowej π_2 , wzgl. bocznej π_3 . Ślady s_1 i s_2 leżą na rzutni aksonometrycznej π_a i przecinają się w punkcie $S_x = s_1s_2$ (rys. 13). Przez punkt S_x , który przynależy równocześnie do płaszczyzn π_a , π_1 i π_2 , przechodzi też krawędź $x = \pi_1\pi_2$. Wnosimy stąd, że punkt S_x jest śladem aksonometrycznym osi x , gdyż jest on punktem $S_x = x\pi_a$ przecięcia osi x z rzutnią π_a . Podobnie punkt $S_y = s_1s_3 = y\pi_a$ jest „śladem aksonometrycznym osi y “, a wreszcie punkt $S_z = s_2s_3 = z\pi_a$ jest „śladem aksonometrycznym osi z “ układu $[O]$. Trójkąt $(S_xS_yS_z)$ o wierzchołkach S_x , S_y i S_z , albo też trójkąt $(s_1s_2s_3)$ o bokach s_1 , s_2 , s_3 nazywamy trójkątem śladów aksonometrycznych trzech osi x , y , z lub trzech rzutni π_1 , π_2 , π_3 układu odniesienia $O[x, y, z]$.

Przez środek (początek) układu $O[x, y, z]$ poprowadźmy (rys. 14) prostą w prostopadłą do rzutni π_a , to punkt $O^n = w\pi_a$, przecięcia się

promienia rzucającego w z rzutnią π_a , jest rzutem aksonometrycznym prostokątnym lub „aksonometrią prostokątną“ początku O układu $O[x, y, z]$. Oś $z = OS_z$ łączy punkty O i S_z ; jej rzut aksonometryczny z'' przejdzie zatem przez aksonometrię O'' i $S_z'' = S_z$ owych punktów, czyli będzie prostą $z'' = O''S_z$. Podobnie proste $x'' = O''S_x$ i $y'' = O''S_y$, łączące punkt O'' ze śladami aksonometrycznymi S_x , wzgl. S_y , są aksonometriami prostokątnymi dwóch pozostałych osi x i y układu $[O]$. Ponieważ elementy O'' , x'' , y'' i z'' występować będą bardzo często w naszych rozważaniach — przeto ustalimy dla nich osobne nazwy, a mianowicie:

1. Aksonometrię prostokątną O'' początku (środka) O układu $O[x, y, z]$ nazywamy „środkiem aksonometrycznym“.

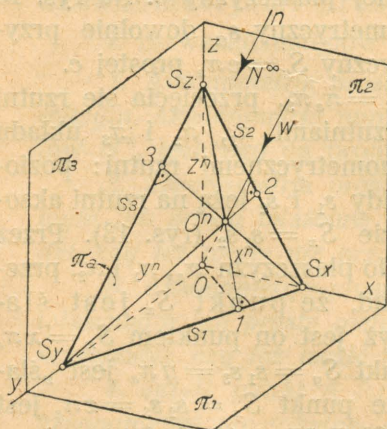
2. Aksonetrie prostokątne x'' , y'' i z'' trzech osi x, y i z układu $O[x, y, z]$ nazywamy „osiami aksonometrycznymi“.

12. Własności trójkąta śladów aksonometrycznych. Celem zbadania zależności, jakie zachodzą pomiędzy bokami trójkąta śladów aksonometrycznych ($s_1 s_2 s_3$) a osiami aksonometrycznymi x'' , y'' i z'' , zauważmy, że oś $z = \pi_2 \pi_3$ jest prostopadłą do rzutni π_1 , a tem samem (ust. 4) oś z jest prostopadłą i do prostej $s_1 = \pi_1 \pi_a$. Dla kąta prostego $\angle z s_1 = 90^\circ$, którego jedno ramię s_1 leży na rzutni π_a , rzut prostokątny na płaszczyznę π_a jest (ust. 10) oczywiście kątem prostym $\angle z'' s_1 = 90^\circ$, czyli innemi słowy: oś aksonometryczna z'' jest prostopadłą do śladu s_1 .

W analogiczny sposób wykazać możemy, że osie aksonometryczne x'' i y'' są również prostopadłe do śladów s_3 , wzgl. s_2 , a mianowicie: $x'' \perp s_3$, $y'' \perp s_2$. Wypowiemy tedy

Twierdzenie: Osie aksonometryczne x'' , y'' i z'' są wysokościami trójkąta śladów aksonometrycznych.

Punkt $1 = z'' s_1$, przecięcia się (rys. 14) osi z'' ze śladem aksonometrycznym s_1 rzutni poziomej, połączmy ze środkiem O układu $O[x, y, z]$. Otrzymana prosta $O1$ leży na rzutni poziomej π_1 i jest prostopadłą do osi $z = OS_z$. Zauważymy z łatwością, że prosta $w = OO''$ jest prostopadłą do przeciwprostokątnej $1S_z$ trójkąta prostokątnego ($O1S_z$), gdyż element $w = OO''$ jest promieniem rzucającym $w \perp \pi_a$. Wnosimy stąd, że punkt $O'' = w \pi_a$ leży „wewnątrz“ odcinka (o długości skończonej) $1S_z$.



Rys. 14.

Oznaczmy przez 2 i 3 punkty przecięcia się osi aksonometrycznych y'' i x'' z przeciwległymi bokami trójkąta śladów aksonometrycznych ($s_1 s_2 s_3$), a mianowicie: $2 = y'' s_2$ i $3 = x'' s_3$. Wykazać możemy — podobnie jak poprzednio — że środek aksonometryczny $O'' = w \pi_a$ leży „wewnątrz“ odcinków $2S_y$ i $3S_x$, a tem samem O'' leży „wewnątrz“ trójkąta ($s_1 s_2 s_3$). Ponieważ jednak w punkcie O'' przecinają się trzy wysokości x'' , y'' i z'' tego trójkąta ($s_1 s_2 s_3$), przeto wypowiedzieć możemy następujące

Twierdzenie: *Trójkąt śladów aksonometrycznych jest trójkątem ostrokątnym.*

Na rys. 14 weźmy pod uwagę trójkąt prostokątny ($10'' S_x$). Przyprostokątnia $10''$ z przeciwprostokątnią $O'' S_x$ tego trójkąta zawiera kąt ostry $\sphericalangle 10'' S_x$, a zatem kąt przyległy $\sphericalangle S_x O'' S_z$ jest kątem rozwartym. Podobnie kąty: $\sphericalangle S_z O'' S_y$ i $\sphericalangle S_y O'' S_x$ są również kątami rozwartymi. Aby dokładniej określić owe kąty, zauważmy, że punkt O dzieli każdą z osi x , y i z układu $O[x, y, z]$ na dwie „półproste“; rzutnia aksonometryczna π_a przebija w punktach S_x , S_y i S_z tylko „półosie“ OS_x , OS_y i OS_z . Możemy tedy wypowiedzieć następujące

Twierdzenie: *Aksonometrie prostokątne tych „półosi“ układu $O[x, y, z]$, które przebijają rzutnię aksonometryczną, przechodzą przez środek aksonometryczny O'' i tworzą trzy kąty rozwarte.*

Na płaszczyźnie rysunkowej — którą uważać będziemy odtąd stale za rzutnię aksonometryczną π_a — niechaj dany będzie (rys. 15) trójkąt śladów aksonometrycznych ($s_1 s_2 s_3$) o trzech kątach ostrych. Z wierzchołków S_x , S_y i S_z tego trójkąta poprowadźmy proste: $z'' \perp s_1$, $y'' \perp s_2$ i $x'' \perp s_3$, to otrzymamy osie aksonometryczne, które przecinają się w środku aksonometrycznym O'' . Na prostej w , przechodzącej przez punkt O'' i prostopadłej do płaszczyzny rysunku (t. zn. do rzutni aksonometrycznej π_a), leży środek O układu $O[x, y, z]$.

Chcąc wyznaczyć położenie punktu O , weźmy pod uwagę (por. rys. 14) trójkąt prostokątny ($O1S_z$), którego przeciwprostokątnia jest bokiem $1S_z$. Płaszczyzna ζ tego trójkąta jest prostopadłą do rzutni π_a (t. zn. jest płaszczyzną aksonometrycznie rzucającą) i przecina się z nią w śladzie aksonometrycznym $s_\zeta = z'' = 1S_z$. Uważajmy bok $1S_z$ (por. rys. 14 i 15) za oś obrotu i około niego obróćmy trójkąt ($O1S_z$) wraz z prostą $w = OO''$ tak, aby po dokonany obrotie ten trójkąt padł na płaszczyznę rysunku π_a . Ponieważ prosta $w = OO''$ jest prostopadłą do π_a , a temsamem i do przeciwprostokątnej $1S_z$, przeto kład w^* tej prostej spełnia warunek: $w^* \perp 1S_z$. Na przeciwprostokątnej $1S_z$ — jako na średnicy — zakresłmy koło k i wyznaczmy punkty O^* i O_1 przecięcia się owego pomocniczego koła z prostą w^* . Punkt O^* (względnie O_1) jest kładem początku O układu odniesienia $O[x, y, z]$, a odci-

nek $\overline{O^n O^x}$ (wzgl. $\overline{O^n O^y}$) wyraża odległość punktu O od płaszczyzny rysunku (rzutni aksonometrycznej) π_a .

Na prostej $w \perp \pi_a$, poprowadzonej w punkcie O^n prostopadłe do płaszczyzny rysunku π_a , odmierzymy (rys. 15) odcinek $\overline{O^n O} = \overline{O^n O^x}$ tak, aby punkt O leżał poniżej (pod) płaszczyzny rysunkowej π_a . Przez otrzymany w ten sposób początek O i przez ślad $s_1 = S_x S_y$ przechodzi rzutnia pozioma $\pi_1 = Os_1$ układu $O[x, y, z]$. Podobnie elementy O i s_2 , wzgl. O i s_3 wyznaczają rzutnię pionową $\pi_2 = Os_2$ i rzutnię boczną $\pi_3 = Os_3$ naszego układu $[O]$. Proste $OS_x = x$, $OS_y = y$ i $OS_z = z$, łączące otrzymany poprzednio punkt O z wierzchołkami trójkąta ($s_1 s_2 s_3$), są osiami układu $[O]$.

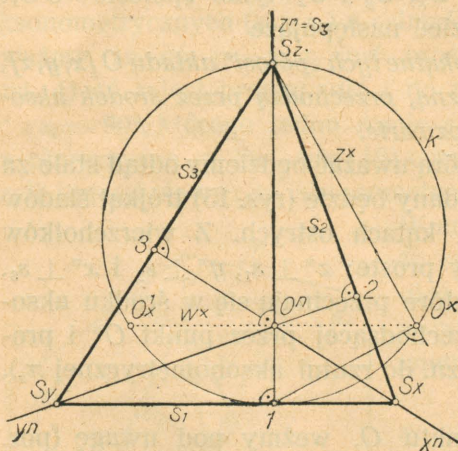
Uwaga: Czytelnik koniecznie musi odbudować (odtworzyć) w przestrzeni położenie owych trzech rzutni π_1, π_2, π_3 i trzech osi x, y, z , aby dokładnie zdać sobie sprawę na rys. 15 z ułożenia układu $[O]$ względem płaszczyzny rysunkowej π_a .

Na prostej $w \perp \pi_a$ odmierzymy teraz (rys. 15) odcinek $\overline{O^n O^1} = \overline{O^n O^x}$ tak, aby punkt końcowy O^1 tego odcinka znajdował się nad (przed) płaszczyzną rysunku π_a , to otrzymany punkt O^1 będzie środkiem nowego układu odniesienia $[O^1]$. Dla tego układu płaszczyzny: $O^1 s_1 = \pi_1^1$, $O^1 s_2 = \pi_2^1$, $O^1 s_3 = \pi_3^1$ są trzema rzutniami, a proste: $O^1 S_x = x^1$, $O^1 S_y = y^1$, $O^1 S_z = z^1$ są jego osiami. Ponieważ dla odcinków $\overline{O^n O} = \overline{O^n O^1}$ prostopadłych do π_a punkty końcowe O i O^1 są symetrycznie ułożone względem płaszczyzny rysunku π_a , przeto płaszczyzny: π_1 i π_1^1 , π_2 i π_2^1 , π_3 i π_3^1 , oraz osie: x i x^1 , y i y^1 , z i z^1 są parami również symetrycznie ułożone względem rzutni aksonometrycznej π_a . Wnosimy stąd, że do

dwóch układów odniesienia $[O] = O[x, y, z]$ i $[O^1] = O^1[x^1, y^1, z^1]$, oraz do uważanego trójkąta śladów aksonometrycznych ($s_1 s_2 s_3$) stosuje się

Twierdzenie: Każdemu ostrokątnemu trójkątowi śladów aksonometrycznych podporządkowane są dwa układy odniesienia $[O]$ i $[O^1]$, które są symetrycznie ułożone względem płaszczyzny owego trójkąta.

Na rys. 16 i 17 obierzmy trójkąt śladów aksonometrycznych ($s_1 s_2 s_3$) i wyznaczmy osie x^n, y^n, z^n , oraz środek O^n . Wyobraźmy sobie, że na prostej w — poprowadzonej w punkcie O^n prostopadłe do płaszczyzny rysunku π_a — umieściliśmy nasze oko w bardzo wielkiej odległości od rzutni aksonometrycznej π_a i nad (przed) tą rzutnią. Skoro założymy,



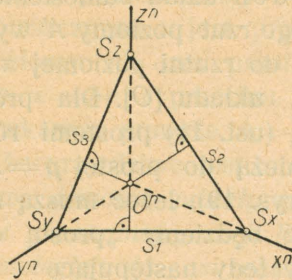
Rys. 15.

że płaszczyzna rysunku π_a jest „nieprzeźroczystą“ a początek O układu $O[x, y, z]$ leży pod (za) rzutnią π_a , to wówczas (rys. 16) dla przyjętego stanowiska odcinki $\overline{OS_x}$,

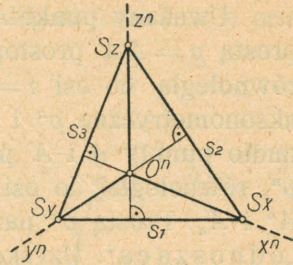
$\overline{OS_y}$ i $\overline{OS_z}$ są niewidoczne. Natomiast wymienione odcinki (rys. 17) są widoczne, jeżeli środek O układu $O[x, y, z]$ leży przed (nad) płaszczyzną rysunkową π_a .

Aksonometrie $\overline{O^n S_x}$, $\overline{O^n S_y}$ i $\overline{O^n S_z}$ wymie-

nionych odcinków zaznaczono na rys. 16 i 17 odcinkami „kreskowanymi“, wzgl. „pełnymi“ zależnie od tego, czy odcinki $\overline{OS_x}$, $\overline{OS_y}$ i $\overline{OS_z}$ są niewidoczne, czy też widoczne.



Rys. 16.

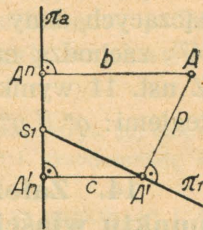


Rys. 17.

13. Aksonometrie punktu właściwego. Niechaj dane będą na rys. 18 rzutnia aksonometryczna π_a i rzutnia pozioma π_1 , obie prostopadłe do płaszczyzny rysunkowej. Przez dowolnie obrany punkt właściwy A poprowadźmy proste: $b \perp \pi_a$ i $p \perp \pi_1$, to punkty $A^n = b \pi_a$ i $A' = p \pi_1$ są rzutami prostokątnymi elementu A na przyjęte rzutnie π_a i π_1 . Punkt A^n jest mianowicie aksonometrią prostokątną punktu A , a element A' jest rzutem poziomym owego punktu. Prosta c , wykreślona z punktu A' prostopadłe do płaszczyzny π_a , przebiega przez rzutnię π_a w punkcie A'_n (czytaj: A z kreską n). Punkt $A'_n = c \pi_a$ jest rzutem prostokątnym punktu A' na rzutnię π_a czyli aksonometrią (prostokątną) rzutu poziomego A' punktu A .

Obok rzutni poziomej π_1 , uwzględnąć możemy jeszcze rzutnię pionową π_2 i boczną π_3 , oraz rzuty prostokątne punktu A na te rzutnie, t. zn. rzut pionowy A'' i rzut boczny A''' . Przez punkty A'' i A''' poprowadźmy proste $d \perp \pi_a$ i $e \perp \pi_a$, a następnie wyznaczmy punkty $A''_n = d \pi_a$ i $A'''_n = e \pi_a$, przebiecia się promieni rzucających d, e z rzutnią π_a . Punkt A''_n jest „aksonometrią (prostokątną) rzutu pionowego A'' punktu A “, a element A'''_n jest „aksonometrią rzutu bocznego A''' punktu A “.

Zajmiemy się teraz zbadaniem zależności, jakie zachodzą pomiędzy rzutami prostokątnymi A^n , A'_n , A''_n i A'''_n dowolnego punktu właściwego A na rzutnię aksonometryczną π_a . W tym celu na płaszczyźnie rysunkowej π_a obierzmy (rys. 19) dowolny trójkąt śladów aksonometrycznych ($s_1 s_2 s_3$), wyznaczmy osie x^n, y^n, z^n i środek O^n , oraz odległość $\overline{O^n O^*}$



Rys. 18.

środku O układu $[O]$ od rzutni π_a . Skoro założymy, że punkt O leży np. za płaszczyzną π_a , to trójkątowi śladów aksonometrycznych ($s_1 s_2 s_3$) podporządkujemy tylko jeden układ odniesienia $O[x, y, z]$.

Uważany punkt A i jego rzut poziomy A' wyznaczają w przestrzeni prostą $p = AA'$ prostopadłą do rzutni poziomej $\pi_1 = Os_1$, a tem samem równoległą do osi $z = OS_z$ układu $[O]$. Dla prostych $p \parallel z$ ich rzuty aksonometryczne p^n i z^n są (ust. 11) prostymi równoległymi. Ponieważ nadto punkty A i A' przynależą do prostej $p = AA'$, przeto na prostej p^n , równoległej do osi z^n (rys. 19), leżeć muszą rzuty aksonometryczne A^n i A'_n . Prostą p^n nazywać będziemy „prostą odnoszącą“ lub wprost „odnoszącą“. Uzyskaliliśmy tedy następujące

Twierdzenie: *Aksonometria A^n dowolnego punktu właściwego A i aksonometria A'_n rzutu poziomego A' tego punktu A leżą na prostej odnoszącej, która jest równoległą do osi aksonometrycznej z^n .*

W zupełnie analogiczny sposób (por. rys. 20) wykazać możemy, że:

Prosta odnosząca $A^n A''_n$, która łączy aksonometrię A^n punktu A z aksonometrią A''_n rzutu pionowego A'' owego punktu, jest równoległą do osi aksonometrycznej y^n .

Prosta odnosząca $A^n A'''_n$, która łączy aksonometrię A^n punktu A z aksonometrią A'''_n rzutu bocznego A''' owego punktu, jest równoległą do osi aksonometrycznej x^n .

Z łatwością bowiem zauważymy, że dla prostych: $q = AA''$ i $r = AA'''$, łączących dany punkt właściwy A z rzutami pionowym A'' i bocznym A''' , zachodzą następujące zależności: $q \perp \pi_2$, $r \perp \pi_3$ czyli: $q \parallel y$, $r \parallel x$. Z ust. 11 wynika, że aksonometrie tych prostych są elementami równoległymi: $q^n \parallel y^n$ i $r^n \parallel x^n$.

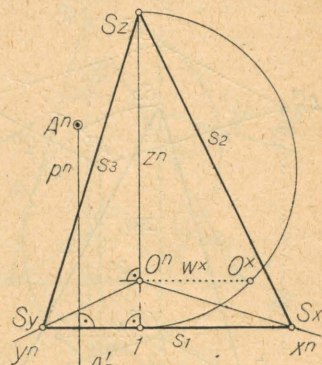
14. Zależności, zachodzące pomiędzy aksonometrijami punktu właściwego. Zastanówmy się teraz nad tem, czy każde dwa dowolne punkty A^n i A'_n , leżące na prostej $p^n \parallel z^n$, uważać można za rzuty aksonometryczne punktu właściwego A i jego rzutu poziomego A' . W tym celu poprowadźmy (rys. 19, por. też rys. 18) w punktach A^n i A'_n proste b i c prostopadłe do rzutni aksonometrycznej π_a , (t. zn. do płaszczyzny rysunkowej dla rys. 19), i oznaczmy przez $\varepsilon = bc$ płaszczyznę określoną temi prostymi. Z relacji $b \perp \pi_a$, $p^n \parallel z^n$, $z^n \perp s_1$ wynika (por. ust. 4) zależność: $b \perp s_1$, $p^n \perp s_1$ czyli innemi słowy: płaszczyzna $\varepsilon = bc = bp^n$ jest prostopadłą do prostej $s_1 = \pi_a \pi_1$, a tem samem płaszczyzna ε jest prostopadłą do rzutni aksonometrycznej π_a i do rzutni poziomej π_1 .

Jeżeli punkt A^n uważać będziemy za aksonometrię prostokątną pewnego punktu właściwego A , to ów punkt leżeć musi na prostej $b \perp \pi_a$. Jeżeli element A'_n uważać będziemy za aksonometrię rzutu poziomego A'

owego punktu A , to punkt, w którym prosta $c \perp \pi_a$ przebieje rzutnię poziomą $\pi_1 = Os_1$, będzie rzutem poziomym $A' = c\pi_1$. Aby otrzymać wreszcie żądany punkt A , poprowadźmy w punkcie A' prostą $p \perp \pi_1$, to (z uwagi na to, że płaszczyzna ε jest prostopadłą do rzutni π_1 i przechodzi przez rzut poziomy A') owa prosta p leży na płaszczyźnie $\varepsilon = bc$ i przecina się z promieniem b w szukanim punkcie $A = pb$. Wykazaliśmy zatem, że prawdziwe jest

Twierdzenie: Dwa dowolne punkty właściwe A^n i A'_n rzutni aksonometrycznej, które leżą na prostej równoległej do osi aksonometrycznej z^n , uważać można zawsze za aksonometrię A^n i aksonometrię A'_n rzutu poziomego A' jednego i tylko jednego punktu właściwego A .

Na prostej $p^n \parallel z^n$ niechaj dane będą (rys. 19) rzuty A^n i A'_n , które wyznaczają jeden ściśle określony punkt właściwy A w przestrzeni. Aby odbudować (zrekonstruować, odtworzyć) położenie tego punktu A w przestrzeni, postępujemy — jak to wynika z dotychczasowych rozważań — w sposób następujący: W punktach A^n i A'_n poprowadzimy proste $b \perp \pi_a$ i $c \perp \pi_a$ (prostopadłe do płaszczyzny rysunku), a następnie przez punkt $A' = c\pi_1$, przebiecia się prostej c z rzutnią poziomą $\pi_1 = Os_1$, prostą $p \perp \pi_1$, to wówczas element $A = bp$ jest szukanim punktem.



Rys. 19.

Ćwiczenie 1: Wykazać, że dwa punkty właściwe A^n i A''_n , leżące (rys. 20) na prostej odnoszącej $q^n \parallel y^n$, uważać można zawsze za aksonometrię A^n i aksonometrię A''_n rzutu pionowego A'' jednego i tylko jednego punktu właściwego A .

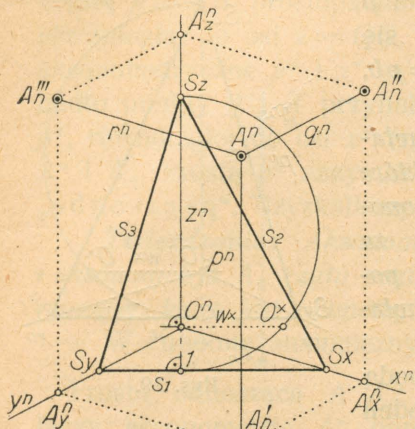
Ćwiczenie 2: Rozwiązać poprzednie ćwiczenie, skoro dane są punkty A^n i A''_n (t. zn. aksonometria rzutu bocznego A''), leżące na prostej odnoszącej $r^n \parallel x^n$.

Zadanie: Dany jest trójkąt śladów aksonometrycznych i dowolny punkt właściwy A , którego położenie określone jest rzutami A^n i A'_n . Należy skonstruować aksonometrię A''_n i A'''_n rzutu pionowego A'' i rzutu bocznego A''' owego punktu A .

Rozwiązanie: Umówmy się, że symbol A (A^n , A'_n) oznaczać będzie stale: punkt A , którego położenie ustalone jest zapomocą dwóch rzutów aksonometrycznych A^n i A'_n . Owe punkty A^n i A'_n leżeć muszą oczywiście (rys. 20) na prostej odnoszącej $p^n \parallel z^n$, która jest rzutem prostokątnym prostej $p = AA'$ na rzutnię (pł. rysunku) π_a . Z rozważań ust. 13 wiadomo nam, że dla prostych: $q = AA'$ i $r = AA''$ ich aksonometrie q^n i r^n spełniają warunki: $q^n \parallel y^n$, $r^n \parallel x^n$ i $q^n r^n = A^n$.

Niechaj płaszczyzna $pq = AA'A''$ — która przechodzi przez proste

$p \perp \pi_1$ i $q \perp \pi_2$, a zatem jest prostopadłą do osi $x = \pi_1 \pi_2 = OS_x$ — przecnie oś x w punkcie A_x . Z łatwością zauważymy, że proste $A'A_x$ i $A''A_x$, leżące na płaszczyźnie pq , są prostopadłe do osi x , a zatem $A'A_x \parallel y$ i $A''A_x \parallel z$. Wnosimy stąd, że (por. ust. 11) rzuty aksonometryczne $A'_n A_x^n$ i $A''_n A_x^n$ tych prostych są odpowiednio równoległe do osi aksonometrycznej y^n , wzgl. z^n . Celem wykreślenia tych prostych na rys. 20, należy przez punkt A'_n poprowadzić prostą równoległą do osi y^n , a przez otrzymany punkt A''_n na osi x^n wykreślić następnie drugą prostą $A''_n A'_n \parallel z^n$. Ta ostatnia prosta przecnie się z odnoszącą q^n w punkcie A''_n , który jest aksonometrią prostokątną rzutu pionowego A'' danego punktu $A(A', A'')$.



Rys. 20.

Podobnie wyznaczyć możemy aksonometrię A''_n rzutu bocznego A'' . Płaszczyzna $pr = A'A''$ prostopadła do osi $y = OS_y$ przecina się z tą osią w punkcie A_y . Dla prostych $A'A_y \parallel x$ i $A_y A'' \parallel z$ otrzymamy ich aksonometrię, kreśląc przez punkt A'_n prostą $A'_n A''_n \parallel x^n$, a następnie z punktu A''_n osi aksonometrycznej y^n prostą $A''_n A'_n \parallel z^n$. — Aksonometrię A''_n wyznaczyć też możemy w inny sposób, korzystając z płaszczyzny $qr = A'A''$ prostopadłej do osi $z = OS_z$. Płaszczyzna ta przecina oś z w takim punkcie A_z , że proste $A'A_z$ i $A_z A''$ są odpowiednio równoległe do osi $x = OS_x$, wzgl. $y = OS_y$. Aksonometrię owych prostych są elementami: $A'_n A_z^n \parallel x^n$ i $A''_n A_z^n \parallel y^n$.

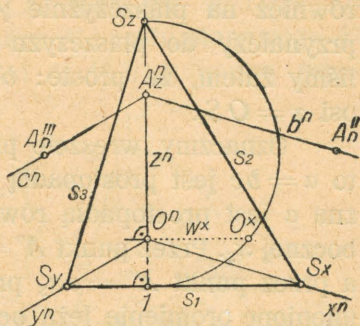
Ćwiczenie 3: Dla danego punktu $A(A', A'')$, którego aksonometrią A' i aksonometrią A''_n rzutu pionowego A'' owego punktu A (rys. 20) leżą na odnoszącej $q^n \parallel y^n$, należy wyznaczyć rzuty A'_n i A''_n .

Ćwiczenie 4: Dla danego punktu $A(A', A'')$ skonstruować aksonometrię A'_n i A''_n jego rzutu poziomego A' i rzutu pionowego A'' .

15. Dalsze sposoby wyznaczenia punktu właściwego. Z rozważań poprzedniego ustępu wynika, że aksonometrię A'_n i A''_n rzutu pionowego A'' , wzgl. rzutu bocznego A'' dowolnego punktu właściwego A — leżą na prostych: $A'_n A_z^n \parallel x^n$ i $A''_n A_z^n \parallel y^n$, które przecinają się na osi aksonometrycznej z^n . Przez dowolny punkt A'_n osi aksonometrycznej z^n poprowadźmy (rys. 21) dwie proste $b^n \parallel x^n$, $c^n \parallel y^n$ i obierzmy na pierwszej z nich dowolny punkt właściwy A''_n , a na drugiej punkt A''_n . Zbadajmy teraz, czy punkt A''_n uważać można za aksonometrię prostokątną rzutu

pionowego A'' , a element A''' za aksonometrię rzutu boczego A''' pewnego punktu właściwego A .

Jeżeli punkt A''_n jest rzeczywiście aksonometrią rzutu pionowego A'' pewnego punktu A , to rzut pionowy A'' leżeć musi koniecznie na promieniu d , wykreślonym z punktu A''_n prostopadłe do rzutni (pł. rysunku) π_a . Promień rzucający $d \perp \pi_a$ przebiega się wówczas z rzutnią pionową $\pi_2 = Os_2$ w szukanim punkcie $A'' = d\pi_2$. Skoro drugi (dowolnie na prostej c'' przyjęty) punkt właściwy A''' uważać będziemy za aksonometrię prostokątną rzutu boczego A''' pewnego punktu A , to rzut A''' leżeć musi na promieniu rzucającym e , który przechodzi przez element A'''_n i jest prostopadły do rzutni π_a , oraz na rzutni bocznej $\pi_3 = Os_3$. Musimy teraz wykazać, że skonstruowane w powyższy sposób punkty $A'' = d\pi_2$ i $A''' = e\pi_3$ są faktycznie rzutami pionowym i bocznym jednego i tego samego punktu A .



Rys. 21.

W tym celu weźmy pod uwagę dwie proste $b'' \parallel x''$ i $d \perp \pi_a$, które przechodzą przez punkt A''_n i wyznaczają płaszczyznę $\beta = b''d$. Płaszczyzna β jest (ust. 4) równoległą do osi x'' , prostopadłą do rzutni π_a i przecina się z rzutnią pionową $\pi_2 = Os_2$ w takiej prostej $b = \beta\pi_2$, która przechodzi oczywiście przez punkt $A'' = d\pi_2$. Jeżeli w środku aksonometrycznym O'' (rys. 21) wykreślimy prostą $w = O''O$ prostopadłą do płaszczyzny rysunku π_a , to płaszczyzna $\xi = wx''$ jest aksonometrycznie rzucającą i przecina się z rzutnią pionową $\pi_2 = Os_2$ w osi $x = \xi\pi_2 = Os_x$. Promienie $d \perp \pi_a$ i $w \perp \pi_a$ są prostami równoległymi: $d \parallel w$, jak również i proste $b'' \parallel x''$, przeto płaszczyzny $\beta = b''d$ i $\xi = wx''$ posiadają to samo „ustawienie“. Skoro płaszczyzny równoległe: $\beta \parallel \xi$ przecniemy rzutnią pionową π_2 , to (ust. 5) uzyskamy krawędzie do siebie równoległe $b = \beta\pi_2$ i $x = \xi\pi_2$. Z zależności $b \parallel x$ i $x \perp z$ wynika: prosta b jest prostopadłą do osi $z = Os_z$.

Przez punkt A'''_n (rys. 21) przechodzą dwie proste $c'' \parallel y''$ i $e \perp \pi_a$, które wyznaczają płaszczyznę $\gamma = c''e$. Płaszczyzna ta przecina się z rzutnią boczną $\pi_3 = Os_3$ w krawędzi $c = \gamma\pi_3$, na której leży poprzednio wyznaczony punkt $A''' = e\pi_3$. Zupełnie analogicznie — jak dla prostej $b = \beta\pi_2$ — udowodnić możemy, że prosta $c = \gamma\pi_3$ jest prostopadłą do osi $z = Os_z$. Ponieważ jednak pomocnicze płaszczyzny $\beta = b''d$ i $\gamma = c''e$ są prostopadłe do płaszczyzny rysunku π_a , więc (ust. 4) krawędź $f = \beta\gamma$ jest prostopadłą do rzutni aksonometrycznej π_a i przechodzi przez punkt $A''_n = b''c''$. Prosta f leży zatem na płaszczyźnie

aksonometrycznie rzucającej $\xi = z^n z$ i przecina się z osią $z = OS_z$ w punkcie A_z . Prosta f leży na płaszczyźnie β , oś z na rzutni π_2 , więc punkt $A_z = fz$ przynależy do płaszczyzn β i π_2 , a tem samem i do krawędzi $b = \beta\pi_2$ przecięcia się tych płaszczyzn. Prosta $f = \beta\gamma$ leży również na płaszczyźnie γ , a oś z na rzutni π_3 , przeto punkt $A_z = fz$ przynależy do płaszczyzn γ i π_3 , oraz do krawędzi $c = \gamma\pi_3$. Wykazaliśmy zatem, że proste: $b \perp z$ i $c \perp z$ przecinają się w punkcie A_z na osi $z = OS_z$.

Oznaczmy wreszcie przez a płaszczyznę, określoną prostymi b i c , to $a = bc$ jest prostopadłą do osi z czyli innemi słowy: owa płaszczyzna a jest prostopadłą równocześnie do rzutni pionowej π_2 i do rzutni bocznej π_3 . Przez punkt $A'' = d\pi_2$ prostej b wykreślimy promień $A''A \perp \pi_2$, a przez punkt $A''' = e\pi_3$ prostej c narysujmy promień $A'''A \perp \pi_3$. Wymienione promienie leżą oczywiście na płaszczyźnie $a = bc$ i przecinają się w punkcie właściwym A . Skonstruowaliśmy taki punkt A , którego rzut pionowy jest punktem $A'' = d\pi_2$, a rzut boczny jest punktem $A''' = e\pi_3$. Z rozważań naszych wynika

Twierdzenie: Dwa dowolne punkty właściwe A'' i A''' rzutni aksonometrycznej — które leżą odpowiednio na prostych równoległych do osi aksonometrycznych x^n i y^n , a przecinających się na osi aksonometrycznej z^n — uważać można zawsze za aksonometrię A'' rzutu pionowego A'' i za aksonometrię A''' rzutu bocznego A''' jednego i tylko jednego punktu właściwego A .

Ćwiczenie 1: Dane są (por. rys. 20) odcinki $\overline{A''A''_x} // z^n$ i $\overline{A'''A'''_y} // y^n$. Wykazać, że punkt A'' uważać możemy za aksonometrię rzutu pionowego A'' , a element A'_n za aksonometrię rzutu poziomego A' jednego ściśle określonego punktu właściwego A .

Ćwiczenie 2: Punkty końcowe A'_n i A'''_n (rysunek 20) odcinków $\overline{A'_nA''_y} // x^n$ i $\overline{A'''_nA'''_y} // z^n$ niechaj będą aksonometrijami rzutu poziomego A' i rzutu bocznego A''' pewnego punktu właściwego A . Wyznaczyć (odbudować) w przestrzeni położenie tego punktu A (A'_n, A'''_n).

Z dotychczasowych rozważań naszych (por. ust. 14 i 15) wynika, że położenie punktu właściwego A w przestrzeni jest ustalone dokładnie wówczas, skoro dane są dwa rzuty aksonometryczne tego punktu, a mianowicie: a) A'' i A'_n , b) A'' i A'''_n , c) A'' i A'''_n , d) A'_n i A'''_n , e) A'' i A'''_n lub f) A'_n i A'_n . Możemy tedy wypowiedzieć

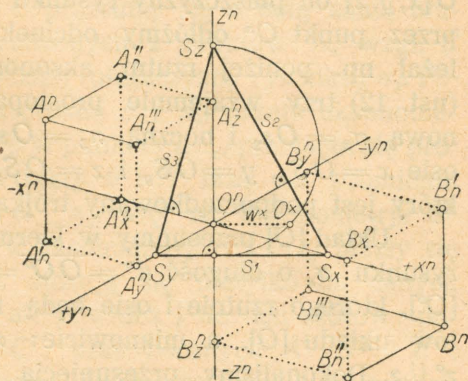
Twierdzenie: Położenie punktu właściwego wyznaczone jest w przestrzeni wówczas, skoro dane są jakiegokolwiek dwa rzuty aksonometryczne tego punktu.

Pozналиśmy dotychczas sposoby wyznaczenia położenia punktu właściwego. W ust. 22 omówimy sposób ustalenia w przestrzeni położenia punktu niewłaściwego A^∞ .

Zadanie: Dany jest dowolny ostrokątny trójkąt śladów aksonometrycznych ($s_1 s_2 s_3$), oraz punkt właściwy $A (A'_n, A''_n)$, którego położenie w przestrzeni określone jest rzutami aksonometrycznymi A'_n i A''_n . Skonstruować należy aksonometrię A^n i rzut A'''_n owego punktu.

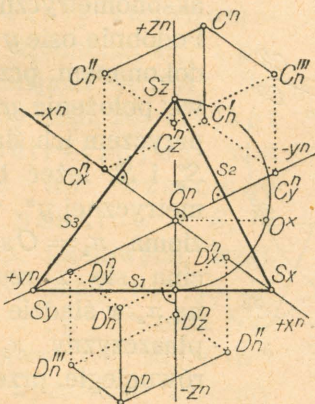
Rozwiązanie: Aby dane elementy A'_n i A''_n (por. rys. 20 i rys. 22) uważać można za aksonometrię rzutu poziomego A' i rzutu pionowego A'' pewnego punktu A , to odcinki $A'_n A''_n \parallel y^n$ i $A''_n A'_n \parallel z^n$ muszą przeciąć się w punkcie A''_x , leżącym na osi aksonometrycznej x^n . Na rys. 22 punkt A''_x leży na ujemnej części osi x^n , opatrzonej znakiem $-$. Skoro z punktu A'_n wykreślimy odnoszącą $p^n \parallel z^n$, a z punktu A''_n odnoszącą $q^n \parallel y^n$, to — jak wynika z rozważań ustępu 14 — punkt $A^n = p^n q^n$, przecięcia się promieni p^n i q^n , jest aksonometrią prostokątną punktu A . Przez punkt A'_n poprowadźmy odnoszącą $A'_n A''_n \parallel x^n$, a następnie przez otrzymany w ten sposób punkt A''_y osi y^n wykreślimy prostą $A''_y A'''_n \parallel z^n$.

Prosta ta przetnie się z odnoszącą r^n , która przechodzi przez element A''_n i jest równoległą do osi aksonometrycznej x^n , w punkcie A'''_n . Wyznaczone w ten sposób punkty A^n i A'''_n rozwiązują zadanie. Kontrolą dokładności przeprowadzonej konstrukcji jest to, że punkt A'''_n , przecięcia się promieni $A''_n A'''_n \parallel x^n$ i $A'''_n A''_n \parallel y^n$, leżeć musi na osi aksonometrycznej z^n .

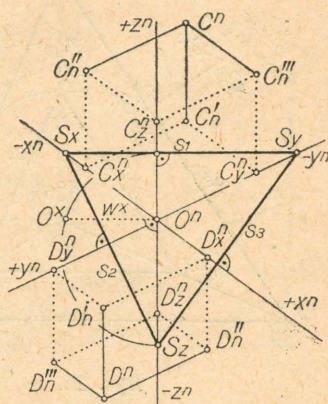


Rys. 22.

Ćwiczenie 3: Na rys. 22—24 dane są rzuty aksonometryczne punktów właściwych $A (A'_n, A''_n, A'''_n)$, $B (B'_n, B''_n, B'''_n)$, $C (C'_n, C''_n, C'''_n)$ i $D (D'_n, D''_n, D'''_n)$. Należy skonstruować aksonometrię A^n, B^n, C^n i D^n , oraz aksonometrię A''_n, B''_n, C''_n i D''_n rzutów pionowych punktów właściwych.



Rys. 23.

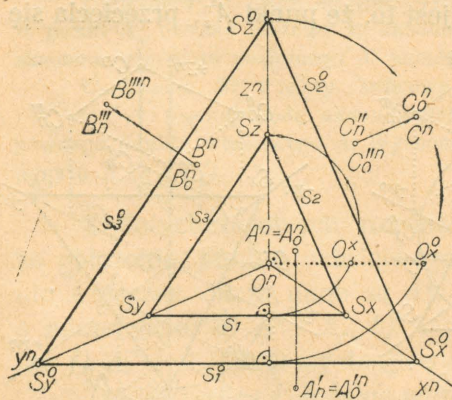


Rys. 24.

Ćwiczenie 4: Niechaj dane będą aksonometrię rzutów pionowych i rzutów bocznych czterech punktów właściwych $A (A'_n, A''_n, A'''_n)$, $B (B'_n, B''_n, B'''_n)$, $C (C'_n, C''_n, C'''_n)$ i $D (D'_n, D''_n, D'''_n)$. Wyznaczyć rzuty aksonometryczne: A^n i $A'_n, \dots, D^n$ i D'_n owych punktów.

16. Konstrukcje niezależne od trójkąta śladów aksonometrycznych. Z łatwością zauważymy, że konstrukcje, jakimi posługiwaliśmy się na rys. 22, 23 i 24, nie są wcale zależne od położenia i wielkości trójkąta śladów aksonometrycznych. Chcąc dokładniej zbadać tę kwestję, obierzmy trójkąt śladów aksonometrycznych ($s_1 s_2 s_3$) na rys. 25, a następnie wyznaczmy osie aksonometryczne x^n, y^n, z^n , środek aksonometryczny O^n , oraz odległość $\overline{OO^n} = \overline{O^x O^n}$ początku O układu $O[x, y, z]$ od płaszczyzny rysunku π_a . Na prostej $w \perp \pi_a$ i przechodzącej przez punkt O^n odłóżmy odcinek $\overline{O^n O} = \overline{O^n O^x}$ tak, aby początek O leżał np. poniżej rzutni aksonometrycznej π_a . Otrzymamy wówczas (ust. 12) trzy wzajemnie prostopadłe rzutnie: poziomą $\pi_1 = Os_1$, pionową $\pi_2 = Os_2$ i boczną $\pi_3 = Os_3$, oraz trzy wzajemnie prostopadłe osie $x = OS_x, y = OS_y$ i $z = OS_z$ układu odniesienia $O[x, y, z]$ lub $[O]$, który jest podporządkowany trójkątowi ($s_1 s_2 s_3$).

Układ $[O]$ przesuniemy w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku π_a o długość $d^o = \overline{OO^o} = \overline{O^x O^o}$, to otrzymamy nowy układ $[O^o]$, którego rzutnie i osie będą równoległe do odpowiednich elementów układu $[O]$, a mianowicie: $\pi_1^o \parallel \pi_1, \pi_2^o \parallel \pi_2, \pi_3^o \parallel \pi_3, x^o \parallel x, y^o \parallel y, z^o \parallel z$. Dokonaliśmy przesunięcia układu $[O]$ w kierunku prostopadłym do rzutni aksonometrycznej π_a , przeto punkt O przesunie się o odcinek d^o po prostej $w \perp \pi_a$ i zajmie nowe położenie O^o . Podobnie oś $x = OS_x$ przesunie się w płaszczyźnie $\xi = wx^n$ prostopadłej do rzutni π_a i zajmie nowe położenie $x^o \parallel x$. Na płaszczyźnie ξ leżą proste x^n i x^o przecinające się w pewnym punkcie S_x^o . Ponieważ jednak oś $x^n = \xi \pi_a$ leży na rzutni π_a ,



Rys. 25.

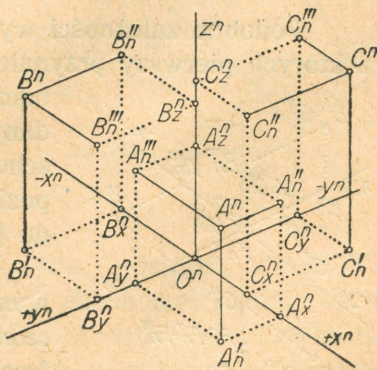
przeto punkt $S_x^o = x^n x^o$ jest śladem aksonometrycznym osi $x^o = O^o S_x^o$. Podobnie osie $y = OS_y$ i $z = OS_z$ po dokonaniu przesunięcia zajmą nowe położenia $y^o = O^o S_y^o$ i $z^o = O^o S_z^o$, przyczem ich ślady aksonometryczne S_y^o i S_z^o leżąc będą na osi aksonometrycznej y^n , wzgl. z^n . Rzutnia pozioma $\pi_1 = Os_1$ układu $[O]$ przecina się z rzutnią aksonometryczną π_a w śladzie $s_1 = S_x S_y$. Ponieważ płaszczyzny π_1 i π_1^o są do siebie równoległe, przeto (ust. 5) rzutnia π_a przetnie owe płaszczyzny w dwóch

prostych równoległych: $s_1 = S_x S_y$ i $s_1^o = S_x^o S_y^o$. Z tych samych powodów rzutnie: pionowa π_2^o i boczna π_3^o nowego układu $[O^o]$ wyznaczą na rzutni π_a krawędzie $s_2^o = \pi_2^o \pi_a$ i $s_3^o = \pi_3^o \pi_a$, które są odpowiednio równoległe do śladów $s_2 = S_x S_z$, wzgl. $s_3 = S_y S_z$. Dla układu $O^o [x^o, y^o, z^o]$

otrzymaliśmy nowy trójkąt śladów aksonometrycznych ($s_1^o s_2^o s_3^o$), przy-
czem wierzchołki tego trójkąta leżą na osiach x^n, y^n , wzgl. z^n .

Niechaj dane będą (rys. 25) trzy dowolne punkty właściwe $A(A'', A'_n)$, $B(B'', B'_n)$ i $C(C'', C'_n)$, które są „sztywnie” związane z układem odniesienia $[O]$. Jeżeli układ $[O]$ przesuniemy w nowe położenie $[O^o]$, to punkt O przesunie się o odcinek $\overline{OO^o} = \overline{O^o O_x^o} = d^o$ po prostej $w \perp \pi_a$, a równocześnie punkt A przesunie się o odcinek $\overline{AA^o} = d^o = \overline{O^o O_x^o}$ po prostej $a \perp \pi_a$. Podobnie i punkty B, C przesuną się o taką samą długość po prostych b , wzgl. c , poprowadzonych z punktów B , wzgl. C prostopadłe do rzutni aksonometrycznej (płaszczyzny rysunku) π_a . Ponieważ jednak punkty A i A^o leżą na prostej $a \perp \pi_a$, przeto aksonometrie A'' i A_o'' tych punktów nakryją się w punkcie $a \pi_a$, przebicia się promienia rzucającego a z rzutnią π_a . Punkty B i B^o leżą na promieniu $b \perp \pi_a$, a punkty C i C^o na promieniu $c \perp \pi_a$, więc ich aksonometrie B'' i B_o'' zjednoczyły się z punktem $b \pi_a$, a aksonometrie C'' i C_o'' zeszyły się z punktem $c \pi_a$. Powyższe zależności stosują się nie tylko do danych trzech punktów właściwych A, B, C , ale również i do ich rzutów: poziomych A', B', C' , pionowych A'', B'', C'' , oraz bocznych A''', B''' i C''' . Rzut np. poziomy A' punktu A przesunie się po prostej $e \perp \pi_a$ o odcinek $\overline{A'A_o'} = d^o$, — ale aksonometrie A_n'' i A_o_n'' punktów A i A_o zjednoczą się z punktem $e \pi_a$.

Na rys. 25 podane są rzuty aksonometryczne punktów: A, A', B, B''', C i C'' , które są „sztywnie” związane z układem odniesienia $[O]$. Po dokonaniem przesunięcia układu $[O]$ w nowe położenie $[O^o]$, powyżej wymienione punkty przejdą wprawdzie w nowe położenie: $A^o, A_o', B^o, B_o', C^o$ i C_o' , ale ich rzuty aksonometryczne nakryją się (zjednoczą się) z poprzednimi aksonometriami $A'', A_n'', B'', B_n'', C''$ i C_n'' . Wnosimy stąd, że: trójkąt śladów aksonometrycznych nie wpływa zupełnie na wzajemne ugrupowanie się punktów A, B, C , ich rzutów poziomych, pionowych, wzgl. bocznych. Skoro przyjmiemy na rys. 26 osie aksonometryczne x^n, y^n, z^n , oraz trzy dowolne punkty właściwe $A(A'', A'_n), B(B'', B'_n)$ i $C(C'', C'_n)$, to wyznaczyć możemy w sposób poprzednio poznany aksonometrie: $A_n'', A_n''', B_n'', B_n''', C_n''$ i C_n''' owych punktów, nie używając wcale żadnego trójkąta śladów aksonometrycznych. Możemy tedy powiedzieć, że:



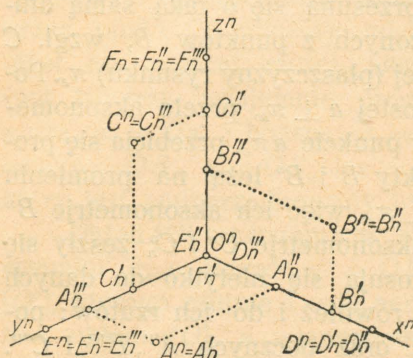
Rys. 26.

Wzajemne ugrupowanie punktów właściwych w przestrzeni jest wyznaczone wówczas, skoro na płaszczyźnie rysunkowej dane są osie aksonometryczne x^n, y^n, z^n i dla każdego z owych punktów dane są dwa dowolne jego rzuty aksonometryczne.

17. Szczególne położenia punktów właściwych. Na rzutni poziomej π_1 obierzmy dowolny punkt właściwy A . Wiadomo nam, że

rzut poziomy A' punktu A nakryje (zjednoczy) się z elementem A , rzut pionowy A'' leżeć musi na osi x , a rzut boczny A''' na osi y . Z rozważań ustępu 11 wynika (por. rys. 27 i 28) bezpośrednio zależności następujące:

Jeżeli punkt A leży na rzutni poziomej, to jego aksonometria A^n zjednoczona jest z aksonometrią A'_n rzutu poziomego punktu A , a dwa dalsze rzuty aksonometryczne A''_n i A'''_n leżą odpowiednio na osi aksonometrycznej x^n , względnie y^n .



Rys. 27.

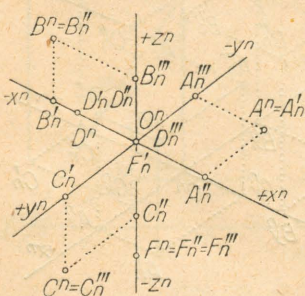
Jeżeli aksonometria A^n pewnego punktu A zjednoczy się z aksonometrią A'_n jego rzutu poziomego, to punkt A leży wówczas na rzutni poziomej.

Jeżeli aksonometria A''_n rzutu pionowego A'' (wzgl. A'''_n rzutu bocznego A''') pewnego punktu leży na osi x^n (wzgl. y^n), to punkt A leży wówczas na rzutni poziomej.

Podobne zależności wystąpią (por. rys. 27 i 28) dla punktów B i C , z których pierwszy przynależy do rzutni pionowej π_2 , a drugi do rzutni bocznej π_3 . Na osi z układu $O[x, y, z]$ niechaj dany będzie dowolny punkt F . Z owym punktem schodzą się rzuty pionowy F'' i boczny F''' , a rzut poziomy F' zjednoczy się ze środkiem O układu $[O]$. Z ust. 11 wynika bezpośrednio:

Jeżeli punkt F leży na osi z , to rzuty aksonometryczne F^n, F'_n i F'''_n owego punktu zjednoczone są z dowolnym punktem osi aksonometrycznej z^n , a aksonometria F'_n rzutu poziomego F' nakrywa się ze środkiem aksonometrycznym O^n .

Na dwóch ostatnich rysunkach skonstruowano rzuty aksonometryczne punktu D , leżącego na osi x , oraz punktu E , który przynależy do osi y .



Rys. 28.

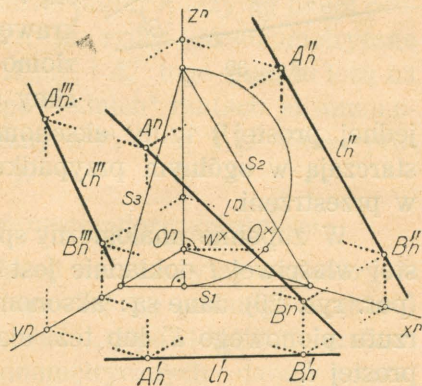
Rozdział III.

Prosta i płaszczyzna.

18. Aksonometrie prostej właściwej. Niechaj dane będą na rys. 29 rzuty aksonometryczne A^n, A'_n i B^n, B'_n dwóch dowolnych punktów właściwych A i B . Dla tych punktów wyznaczmy następnie aksonometrie A''_n, B''_n ich rzutów pionowych A'' i B'' , oraz aksonometrie A'''_n, B'''_n ich rzutów bocznych A''' i B''' . Z rozważań ust. 9 i 10 wiadomo nam, że dla prostej $l = AB$, określonej punktami A i B , jej rzut prostokątny l' na rzutnię poziomą $\pi_1 = O_s1$ otrzymamy, skoro połączymy prostą l' rzuty poziome A' i B' owych punktów. Prosta $l' = A'B'$ jest rzutem poziomym prostej $l = AB$. Podobnie punkty A'' i B'' , leżące na rzutni pionowej $\pi_2 = O_s2$, wyznaczają rzut pionowy $l'' = A''B''$ prostej l , a punkty A''' i B''' rzutni bocznej $\pi_3 = O_s3$ określają rzut boczny $l''' = A'''B'''$ uważanej prostej.

Dla prostej właściwej $l = AB$ skonstruować możemy jej „aksonometrię prostokątną“, t. zn. rzut prostokątny prostej l na rzutnię aksonometryczną (płaszczyznę rysunku) π_n . Z rozważań ust. 11 wiadomo nam, że prosta $l'' = A''B''$, łącząca aksonometrie A'' i B'' danych punktów A i B , jest aksonometrią prostokątną uważanej prostej $l = AB$. Dla prostych: $l' = A'B'$, $l'' = A''B''$ i $l''' = A'''B'''$ otrzymamy ich rzuty aksonometryczne, skoro wykreślimy proste: $l'_n = A'_nB'_n$, $l''_n = A''_nB''_n$ i $l'''_n = A'''_nB'''_n$. Prosta l'_n nazywamy aksonometrią prostokątną rzutu poziomego l' prostej l . Prosta l''_n (wzgl. l'''_n) jest „aksonometrią rzutu pionowego l'' (wzgl. rzutu bocznego l''') prostej l “.

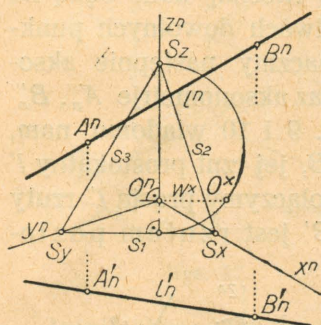
Na rys. 30 obierzmy rzuty aksonometryczne A^n i A'_n , oraz B^n i B'_n dwóch dowolnych punktów właściwych A i B . Owe punkty wyznaczają jedną ściśle określoną prostą właściwą $l = AB$, dla której prosta $l'' = A''B''$



Rys. 29.

jest jej aksonometrią prostokątną, a prosta $l'_n = A'_n B'_n$ jest aksonometrią jej rzutu poziomego l' . Celem odtworzenia (zrekonstruowania, odbudowania) położenia prostej $l = AB$ w przestrzeni, wystarczy — w sposób omówiony w ust. 14 — odbudować położenie punktów A (A^n, A'_n) i B (B^n, B'_n) w odniesieniu do rzutni aksonometrycznej π_a . Prosta l , łącząca otrzymane punkty A i B w przestrzeni, rozwiązuje zadanie.

Położenie prostej l (l^n, l'_n), dla której podane są aksonometria l^n i aksonometria l'_n rzutu poziomego l' prostej l , odbudować możemy w przestrzeni w inny sposób. Jeżeli prostą l^n (rys. 30) uważać będziemy za aksonometrię prostokątną pewnej prostej właściwej l , to owa prosta



Rys. 30.

leżeć musi na płaszczyźnie α , przechodzącej przez element l^n i prostopadłej do płaszczyzny rysunkowej π_a . Jeżeli prostą l'_n uważać będziemy za aksonometrię rzutu poziomego l' owej prostej l , to rzut poziomy l' leżeć musi na rzutni poziomej $\pi_1 = O s_1$ i na płaszczyźnie β , która przechodzi przez dany element l'_n i jest prostopadłą do rzutni aksonometrycznej π_a . Aby otrzymać wreszcie prostą l w przestrzeni, poprowadźmy przez prostą $l' = \beta \pi_1$ płaszczyznę $\varepsilon \perp \pi_1$ i wyznaczmy krawędź $l = \varepsilon \alpha$, przecięcia się płaszczyzny poziomo rzucającej ε z płaszczyzną $\alpha \perp \pi_a$. Wnosimy stąd, że: dwa (nie nakrywające się na

jednej prostej!) rzuty aksonometryczne l^n i l'_n prostej właściwej l wystarczają w ogólnym przypadku do ustalenia położenia owej prostej l w przestrzeni.

W zupełnie analogiczny sposób wykazać możemy, że położenie prostej właściwej l dokładnie jest określone w przestrzeni wówczas, skoro (por. rys. 29) dane są: aksonometria l^n tej prostej, oraz aksonometria l''_n rzutu pionowego l'' lub też aksonometria l'''_n rzutu bocznego l''' owej prostej l .

Wiadomo nam jednak (ust. 15), że położenie punktów A i B w przestrzeni ustalić możemy zapomocą rzutów aksonometrycznych: a) A'_n, A''_n, B'_n , i B''_n ; b) A'_n, A''_n, B'_n i B'''_n ; c) A'_n, A''_n, B'_n i B'''_n . Położenie prostej $l = AB$ wyznaczone zatem będzie wówczas, skoro dane będą rzuty aksonometryczne: a) $l'_n = A'_n B'_n$ i $l''_n = A''_n B''_n$; b) l'_n i l''_n lub c) l'_n i l'''_n . Aby odbudować położenie prostej $l = AB$ w przestrzeni, wystarczy odtworzyć położenie pomocniczych punktów właściwych A i B .

Położenie prostej l (l'_n, l''_n) wyznaczyć możemy też w inny sposób, nie używając do pomocy punktów A i B . W tym celu przez dany element l'_n poprowadźmy (rys. 29) płaszczyznę $\beta \perp \pi_a$, a przez prostą l''_n płaszczyznę $\gamma \perp \pi_a$. Jeżeli prostą l'_n uważać będziemy za aksonometrię

prostokątną rzutu poziomego l' prostej l , to wówczas płaszczyzna β przetnie się z rzutnią poziomą $\pi_1 = Os_1$ w rzucie poziomym $l' = \beta \pi_1$. Jeżeli prostą l'' uważać będziemy za aksonometrię rzutu pionowego l'' pewnej prostej l , to krawędź $l'' = \gamma \pi_2$, płaszczyzny γ rzutnią pionową $\pi_2 = Os_2$, jest rzutem pionowym owej prostej. Poprowadźmy następnie przez rzut poziomy $l' = \beta \pi_1$ płaszczyznę $\varepsilon \perp \pi_1$, a przez rzut pionowy $l'' = \gamma \pi_2$ płaszczyznę $\delta \perp \pi_2$, to krawędź $l = \varepsilon \delta$ rozwiązuje zadanie, gdyż jest szukaną prostą l .

W podobny sposób odbudować możemy prostą l w przestrzeni, skoro dane są rzuty aksonometryczne l'' i l''' lub l'_n i l''_n tej prostej. Z rozważań naszych wynika następujące

Twierdzenie: Położenie prostej właściwej wyznaczone jest w ogólności wówczas, skoro dane są dowolne dwa prostokątne rzuty aksonometryczne tej prostej.

Uwaga: W ust. 20 omówimy te szczególne przypadki, w których położenie prostej nie jest ustalone zapomocą dwóch jej rzutów aksonometrycznych.

Pomiędzy aksonometrijami punktu A i prostej l ustalić możemy (por. ust. 11) następujące związki:

Jeżeli prosta l przechodzi przez dany punkt A , to rzuty aksonometryczne l^n , l'_n , l''_n i l'''_n tej prostej przechodzą przez „odpowiednie“ rzuty aksonometryczne A^n , A'_n , A''_n i A'''_n danego punktu A .

Jeżeli punkt A leży na danej prostej l , to rzuty aksonometryczne A^n , A'_n , A''_n i A'''_n tego punktu leżą na „odpowiednich“ rzutach aksonometrycznych l^n , l'_n , l''_n i l'''_n danej prostej l .

Z łatwością dadzą się też stwierdzić następujące zależności:

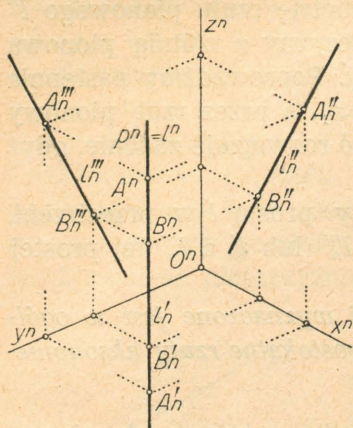
Jeżeli dwa rzuty aksonometryczne (np. l^n i l'_n) pewnej prostej l przechodzą przez „odpowiednie“ rzuty aksonometryczne danego punktu A (l^n przez A^n , l'_n przez A'_n), to wówczas prosta l przechodzi przez ów punkt A .

Jeżeli dwa rzuty aksonometryczne (np. A^n i A'_n) pewnego punktu A leżą na „odpowiednich“ rzutach aksonometrycznych danej prostej l (A^n na l^n , A'_n na l'_n), to wówczas punkt A leży na owej prostej l .

19. Zależności, zachodzące pomiędzy aksonometrijami prostej właściwej. Zastanówmy się teraz, czy każde dwie dowolne proste płaszczyzny rysunkowej π_a uważać można za rzuty aksonometryczne np. l^n i l'_n pewnej prostej l .

Na rys. 30 przyjęliśmy prostą $l = AB$, przechodzącą przez dwa dowolne punkty właściwe $A(A^n, A'_n)$ i $B(B^n, B'_n)$. Również i teraz obierzemy taką prostą $l = AB$, ale poczynimy pewne zastrzeżenia co do

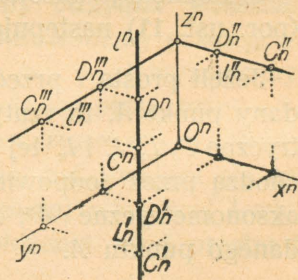
punktów A i B . Na prostej odnoszącej $p'' \parallel z''$ niechaj dane będą dwa dowolne punkty właściwe A'' i A'_n , które (rys. 31) uważać będziemy za



Rys. 31.

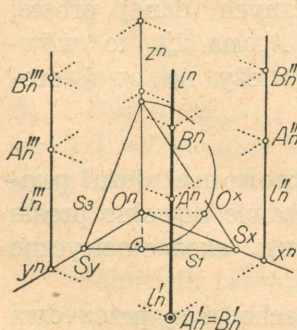
rzuty aksonometryczne punktu A (A'' , A'_n). Skoro na prostej $p'' = A'' A'_n$ obierzemy dowolny punkt B'' i uważać go będziemy za aksonometrię pewnego punktu B , to aksonometria B'_n rzutu poziomego B' owego punktu leżeć musi (ust. 13) na odnoszącej p'' . Wyznamy następnie dalsze rzuty aksonometryczne punktów A (A'' , A'_n) i B (B'' , B'_n). Z przeprowadzonej konstrukcji wynika, że dla prostej $l = AB$ jej aksonometria $l'' = A'' B''$ zjednoczyła się z rzutem $l'_n = A'_n B'_n$ na tej samej odnoszącej p'' ; natomiast rzut $l''_n = A'' B''$ nie może być równoległy do osi y'' , ani do z'' , a rzut aksonometryczny $l'_n = A'_n B'_n$ nie może być równoległy o osi x'' względnie z'' .

Na rys. 32 przyjęto prostą l (l'' , l'_n), której rzutami aksonometrycznymi są proste $l'' \parallel z''$ i $l'_n \parallel x''$. Przy pomocy punktów C (C'' , C'_n) i D (D'' , D'_n), które leżą na prostej l , skonstruowano aksonometrię C'' i D'' , a następnie C'_n i D'_n . Z konstrukcji tej wynika, że rzut $l'_n = C'_n D'_n$ prostej l zjednoczył się z aksonometrią l'' , a rzut $l''_n = C'' D''$ jest równoległy do osi y'' i przechodzi przez punkt $z'' l''$.

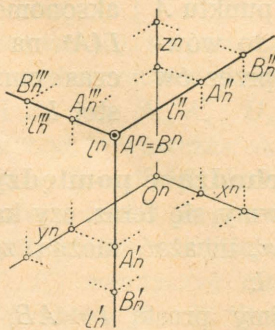


Rys. 32.

Co do położenia punktów A (A'' , A'_n) i B (B'' , B'_n), przyjętych na rys. 31, zajść mogą jeszcze dwa ważne dla nas przypadki: a) rzuty A'' i B'' zjednoczyły się (rys. 33) w dowolnym punkcie prostej $l'' \parallel z''$; b) aksonometrię A'_n i B'_n zjed-



Rys. 33.



Rys. 34.

noczyły się (rys. 34) w jednym punkcie, który leży na prostej $l'_n \parallel x''$. Po wyznaczeniu rzutów A'' , A'_n , B'' i B'_n owych punktów A i B , zauważymy następujące zależności:

- a) $l'' \parallel l'_n \parallel l'' \parallel z''$;
- b) $l'_n \parallel y''$, $l'' \parallel x''$.

A zatem:

Jeżeli aksonometria l^n pewnej prostej l jest równoległą do osi aksonometrycznej z^n , to wówczas wystąpić mogą trzy następujące przypadki:

1. Aksonometria l'_n rzutu poziomego tej prostej nakrywa się z prostą l^n , a dwa pozostałe rzuty aksonometryczne l''_n i l'''_n nie mogą być równoległe do osi aksonometrycznej z^n .

2. Aksonometria l'_n nakrywa się z prostą l^n , a dwa dalsze rzuty aksonometryczne prostej l przecinają się na osi z^n i są promieniami $l''_n \parallel x^n$, $l'''_n \parallel y^n$.

3. Aksonometria l'_n jest punktem, który leży na prostej l^n , a rzuty aksonometryczne l''_n i l'''_n są równoległe do osi aksonometrycznej z^n .

Jeżeli aksonometria l'_n rzutu poziomego l' pewnej prostej l , jest równoległą do osi aksonometrycznej z^n , to wówczas wystąpić mogą trzy następujące przypadki:

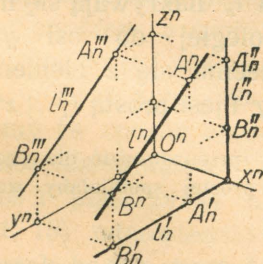
1. Aksonometria l^n tej prostej nakrywa się z prostą l'_n , a dwa pozostałe rzuty aksonometryczne l''_n i l'''_n nie mogą być równoległe do osi aksonometrycznej z^n .

2. Aksonometria l^n nakrywa się z prostą l'_n , a dwa dalsze rzuty aksonometryczne prostej l przecinają się na osi z^n i są promieniami $l''_n \parallel x^n$, $l'''_n \parallel y^n$.

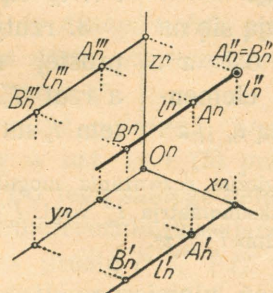
3. Aksonometria l^n tej prostej jest punktem, który leży na prostej l'_n , a dwa pozostałe rzuty aksonometryczne są prostymi $l''_n \parallel y^n$, $l'''_n \parallel x^n$.

Uwaga: Podobne rozważania moglibyśmy przeprowadzić, gdyby spełnione były warunki: $l^n \parallel x^n$; $l^n \parallel y^n$; $l'_n \parallel y^n$, $l''_n \parallel x^n$ (por. rys. 34, 36, 37, 39 i 40).

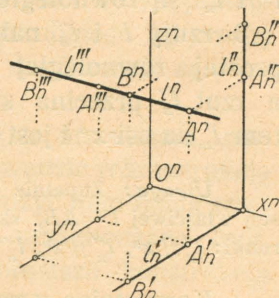
Obierzmy w przestrzeni takie dwa punkty $A(A^n, A'_n)$ i $B(B^n, B'_n)$, aby dla prostej $l = AB$ jej rzut aksonometryczny $l'_n = A'_n B'_n$ był (rys. 35—37) równoległy do osi y^n . Aksonometria $l^n = A^n B^n$ tej prostej l nie może być



Rys. 35.



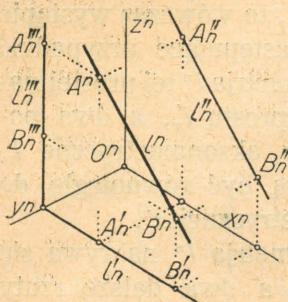
Rys. 36.



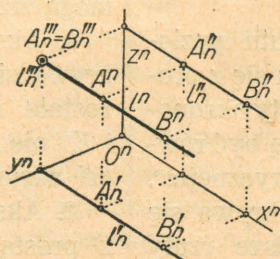
Rys. 37.

wówczas równoległą do osi z^n . Natomiast zachodzą relacje: $l^n \parallel l'_n$ i $l''_n \parallel z^n$; $l^n \parallel l'_n \parallel l'''_n \parallel y^n$, a rzut l''_n jest punktem; l^n i l'''_n nakryły się na prostej równoległej do osi x^n , a rzut $l''_n \parallel z^n$. Na rys. 38—40 po-

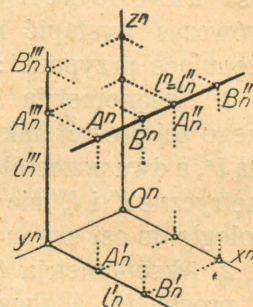
dane są obrazy aksonometryczne takich trzech prostych $l = AB$, dla których rzuty aksonometryczne $l'_n = A'_n B'_n$ są równoległe do osi x^n .



Rys. 38.



Rys. 39.



Rys. 40.

Z przeprowadzonych konstrukcji wynikają następujące zależności:

Jeżeli aksonometria l'_n rzutu poziomego l' pewnej prostej l jest równoległą do osi aksonometrycznej y^n , to wówczas wystąpić mogą trzy przypadki:

1. rzuty $l''_n \parallel l'''_n$ są prostymi, które nie mogą być równoległe do osi z^n , a rzut l'''_n przecina się z elementem l'_n na osi x^n i jest prostą $l'''_n \parallel z^n$.
2. rzut l''_n jest punktem, a rzuty l''_n i l'''_n są równoległe do l'_n .
3. rzuty l''_n i l'''_n nakrywają się na prostej równoległej do osi x^n , a rzut l'''_n przecina się z elementem l'_n na osi x^n i jest prostą $l'''_n \parallel z^n$.

Jeżeli aksonometria l'_n rzutu poziomego l' pewnej prostej l jest równoległą do osi aksonometrycznej x^n , to wówczas wystąpić mogą trzy przypadki:

1. rzuty $l''_n \parallel l'''_n$ są prostymi, które nie mogą być równoległe do osi z^n , a rzut l'''_n przecina się z elementem l'_n na osi y^n i jest prostą $l'''_n \parallel z^n$.
2. rzut l''_n jest punktem, a rzuty l''_n i l'''_n są równoległe do l'_n .
3. rzuty l''_n i l'''_n nakrywają się na prostej równoległej do osi y^n , a rzut l'''_n przecina się z elementem l'_n na osi y^n i jest prostą $l'''_n \parallel z^n$.

Uwaga: Zupełnie analogiczne rozważania moglibyśmy przeprowadzić dla prostej właściwej $l = AB$, skoro aksonometria l''_n wzgl. l'''_n tej prostej spełniałaby warunki: $l''_n \parallel x^n$, $l''_n \parallel z^n$, $l'''_n \parallel y^n$ lub $l'''_n \parallel z^n$.

Korzystając z rozważań niniejszego ustępu, sformułować możemy następujące

Twierdzenie: Skoro na rzutni aksonometrycznej dane są dwie proste, z których jedna jest równoległą do osi aksonometrycznej x^n , y^n lub z^n , to owe proste nie zawsze mogą być uważane za dwa prostokątne rzuty aksonometryczne jednej i tej samej prostej właściwej.

20. Szczególne położenia prostej właściwej. Niechaj daną będzie prosta l ($l^n = l'_n$), której rzuty aksonometryczne l^n i l'_n zjednoczyły się (rys. 31) z prostą odnoszącą $p^n \parallel z^n$. Celem odbudowania położenia tej prostej l w przestrzeni, poprowadźmy przez promień $l^n = l'_n$ płaszczyznę ε prostopadłą do płaszczyzny rysunku π_a . Na płaszczyźnie ε leżeć muszą oczywiście prosta l i jej rzut poziomy $l' = \varepsilon \pi_1$, więc element $\varepsilon \perp \pi_a$ jest również prostopadły i do rzutni poziomej π_1 . Uważana prosta l ($l^n = l'_n$) leży zatem na płaszczyźnie aksonometrycznie- i poziomo-rzucającej.

Z łatwością zauważymy, że: dwa rzuty l^n i l'_n , nakrywające się (rys. 31) na prostej odnoszącej $p^n \parallel z^n$, nie wyznaczają wcale położenia prostej l w przestrzeni; każda bowiem prosta l , leżąca na owej płaszczyźnie ε (prostopadłej do rzutni π_a i do rzutni π_1) posiada tę własność, że jej aksonometria l^n zjednoczy się z rzutem l'_n na odnoszącej $p^n \parallel z^n$. Chcąc ustalić położenie tej prostej l ($l^n = l'_n$) w przestrzeni, należy: 1) przyjąć dwa jej punkty A (A^n, A'_n) i B (B^n, B'_n), albo też 2) przyjmując jeszcze jeden rzut aksonometryczny (np. l''_n , wzgl. l'''_n) owej prostej. Dopiero przy pomocy tych elementów da się uskuteczyć (por. ust. 14, 15 i 18) odtworzenie prostej l w przestrzeni.

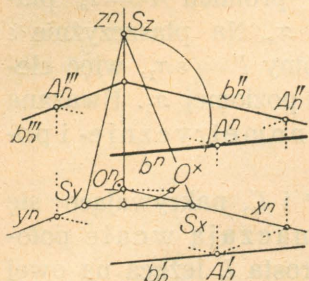
Niechaj daną będzie w przestrzeni prosta właściwa l , która (rys. 33) przechodzi przez dany punkt A (A^n, A'_n) i jest równoległą do osi z układu $O[x, y, z]$. Dla owej prostej $l \parallel z$, jej rzuty pionowy l'' i boczny l''' są (ust. 10) prostami równoległymi do osi z , a rzut poziomy l' jest punktem, gdyż prosta $l \parallel z$ jest prostopadłą do rzutni poziomej π_1 . Ponieważ rzuty aksonometryczne prostych równoległych są (ust. 11) prostami równoległymi, przeto zachodzą relacje: $l^n \parallel l''_n \parallel l'''_n \parallel z^n$, a rzut l'_n jest punktem.

Twierdzenie: *Jeżeli prosta jest równoległą do osi z (czyli prostopadłą do rzutni poziomej), to aksonometria rzutu poziomego tej prostej jest punktem, a trzy dalsze rzuty aksonometryczne owej prostej są równoległe do osi aksonometrycznej z^n .*

Chcąc z rys. 33 odtworzyć położenie prostej l w przestrzeni, możemy (w sposób omówiony w ust. 14 i 15) przeprowadzić rekonstrukcję położenia punktów A i B . Do tego samego celu posłużyć nam mogą również i płaszczyzny aksonometrycznie-rzucające, a przechodzące (por. ust. 18) odpowiednio przez proste l^n, l''_n i l'''_n . Najprostsza konstrukcja jednak będzie następująca: Przez punkt l'_n poprowadźmy prostą c prostopadłą do płaszczyzny rysunku π_a i wyznaczmy punkt przecięcia się prostej c z rzutnią poziomą $\pi_1 = Os_1$. Przez otrzymany w ten sposób rzut poziomy $l' = c \pi_1$ przechodzi prosta $l \perp \pi_1$ czyli prosta $l \parallel z$.

Na rys. 36 wyznaczono obrazy aksonometryczne prostej l równoległej do osi y czyli prostopadłej do rzutni pionowej π_2 . Rys. 39 podaje obrazy prostej l równoległej do osi x czyli prostopadłej do rzutni bocznej π_3 .

Niechaj daną będzie w przestrzeni płaszczyzna ε prostopadła do osi z , t. zn. płaszczyzna pionowo- i boczno-rzucająca. Jeżeli na tej płaszczyźnie ε obierzemy dowolną prostą właściwą b , to krawędzie $b'' = \varepsilon \pi_2$



Rys. 41.

i $b''' = \varepsilon \pi_3$ są rzutami pionowym i bocznym tej prostej. Ponieważ jednak ε jest prostopadłą do osi z , więc płaszczyzna ε jest równoległą do rzutni poziomej π_1 i przecina się (ust. 5) z rzutniami π_2, π_3 w prostych $b'' \parallel x$ i $b''' \parallel y$. Na płaszczyźnie $\varepsilon \parallel \pi_1$ leży prosta b , więc owa prosta jest równoległą do rzutni poziomej, a zarazem (ust. 10) jest równoległą też i do swego rzutu poziomego l' . Z warunków: $b \parallel b', b'' \parallel x$ i $b''' \parallel y$ wynika bezpośrednio, że rzuty aksonometryczne prostej $b \parallel \pi_1$ są prostymi: $b'' \parallel b'_n, b'_n \parallel x^n, b''' \parallel y^n$. Na rys. 41 przyjęto dowolny punkt $A (A'', A'_n)$, wyznaczono jego rzuty A'' i A''' , a następnie wykreślono rzuty aksonometryczne prostej b .

Twierdzenie: Jeżeli prosta b jest równoległą do rzutni poziomej, to jej aksonometria b'' jest równoległą do aksonometrii b'_n rzutu poziomego tej prostej, a dwa dalsze rzuty aksonometryczne b''_n i b'''_n przecinają się na osi aksonometrycznej z^n i są prostymi odpowiednio równoległymi do osi aksonometrycznej x^n , wzgl. y^n .

W sposób omówiony w ust. 18, możemy przeprowadzić rekonstrukcję położenia prostej b w przestrzeni, skoro dane są jej rzuty: b'' i b'_n ; b'' i b''_n ; b'' i b'''_n ; b'_n i b''_n ; b'_n i b'''_n . Natomiast położenie prostej b nie jest wcale wyznaczone, skoro dane są rzuty aksonometryczne b''_n i b'''_n . W tym bowiem wypadku otrzymamy wprawdzie rzut pionowy b'' i rzut boczny b''' , ale ponieważ owe elementy leżą na płaszczyźnie $\varepsilon \perp z$, przeto każda prosta płaszczyzny ε może być uważana za prostą b .

Na rys. 38 i 35 podane są obrazy aksonometryczne prostych, z których pierwsza jest równoległą do rzutni pionowej π_2 , a druga do rzutni bocznej π_3 . Rys. 32 przedstawia prostą $l \parallel \pi_1$ i leżącą równocześnie na płaszczyźnie aksonometrycznie- i poziomo-rzucającej. Prosta $l \parallel \pi_3$ na rys. 37 spełnia ten warunek, że leży na płaszczyźnie aksonometrycznie- i boczno-rzucającej, natomiast prosta $l \parallel \pi_2$ (rys. 40) leży równocześnie na płaszczyźnie aksonometrycznie- i pionowo-rzucającej.

Przez dowolny punkt $A (A'', A'_n)$ poprowadźmy (rys. 42) prostą c prostopadłą do rzutni aksonometrycznej π_a ; aksonometria c'' tej prostej jest punktem, który zjednoczył się z elementem A'' . Ponieważ prosta $c \perp \pi_a$ jest zarazem prostopadłą do śladu aksonometrycznego $s_2 = \pi_a \pi_2$ rzutni pionowej, przeto rzut pionowy kąta prostego: $\sphericalangle cs_2 = 90^\circ$ jest kątem prostym (ust. 10), t. zn. rzut pionowy c'' tej prostej jest prostopadły do śladu s_2 . Skoro dla prostych $c'' \perp s_2$ wyznaczmy rzut prosto-

kątny na rzutnię π_a , to otrzymamy dwie proste prostopadłe: $c'' \perp s_2$, gdyż ślad s_2 leży na rzutni π_a . Wedle założenia jednak prosta c przechodzi przez dany punkt A , więc jej rzut aksonometryczny $c'' \perp s_2$ przejść musi przez punkt A'' . Wnosimy stąd, że prosta c'' łączy punkty A'' i A''_n , a temsamem $c'' = A'' A''_n$ jest równoległą do osi aksonometrycznej y'' . W podobny sposób wykazać możemy, że rzuty aksonometryczne c'_n i c'''_n prostej $c \perp \pi_a$ spełniają warunki: $c'_n \perp s_1$, $c'''_n \perp s_3$ czyli $c'_n \parallel z''$, $c'''_n \parallel x''$. A zatem mamy

Twierdzenie: Jeżeli prosta c jest prostopadłą do rzutni aksonometrycznej, to aksonometria c'' tej prostej jest punktem, a rzuty aksonometryczne c'_n , c'_n i c'''_n są prostymi, poprowadzonymi z punktu c'' prostopadłe odpowiednio do boków s_1 , s_2 , wzgl. s_3 trójkąta śladów aksonometrycznych (lub równoległe do odpow. osi aksonometrycznych z'' , y'' , względnie x'').

Na rys. 34 wykreślono rzuty aksonometryczne prostej $l = AB$, prostopadłej do rzutni π_a i przechodzącej przez dwa dane punkty A (A'' , A'_n) i B (B'' , B'_n). Dla prostej $l \perp \pi_a$ przyjęto oczywiście takie punkty A i B , których aksonometrie A'' i B'' zjednoczyły się w jednym punkcie. Po wyznaczeniu rzutów A'_n , B'_n i A'''_n , B'''_n owych punktów, otrzymaliśmy bezpośrednią zależność, jakie występują pomiędzy rzutami l'_n , l''_n , l'''_n uważanej prostej l , a osiami x'' , y'' i z'' .

Pozostają nam jeszcze do omówienia pewne szczególne położenia prostych, a mianowicie prostych, które leżą na jednej z rzutni układu $O[x, y, z]$ lub na rzutni aksonometrycznej π_a .

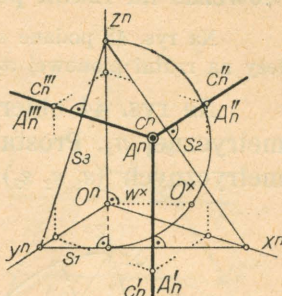
W przypadku, gdy prosta a leży na rzutni poziomej π_1 , to jak wiadomo — jej rzut poziomy a' nakrywa się z elementem a , rzut pionowy a'' schodzi się z osią x , a rzut boczny a''' z osią z układu $[O]$. Z zależności: $a' = a$, $a'' = x$ i $a''' = y$, wynikają bezpośrednio relacje następujące: $a'' = a'_n$, $a'''_n = x''$, $a'''_n = y''$. A zatem otrzymujemy

Twierdzenie: Jeżeli prosta a leży na rzutni poziomej, to jej aksonometria a'' nakrywa się z aksonometrią a'_n rzutu poziomego owej prostej, a dwa dalsze rzuty a'''_n i a'''_n schodzą się odpowiednio z osiami aksonometrycznymi x'' i y'' .

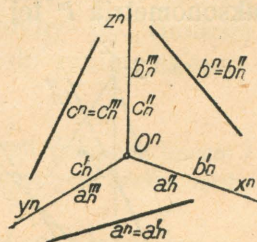
Z łatwością wykazać możemy prawdziwość (por. rys. 43 i rys. 31) następujących twierdzeń:

Jeżeli aksonometria a'' pewnej prostej a nie jest równoległą do osi

Jeżeli aksonometria a''_n (wzgl. a'''_n) pewnej prostej a zjednoczy się z osią



Rys. 42.



Rys. 43.

aksonometrycznej z^n i zjednoczyła się z rzutem a'_n , to owa prosta leży wówczas na rzutni poziomej.

aksonometryczną x^n (wzgl. y^n), to owa prosta leży wówczas na rzutni poziomej.

Na rys. 43 podane są obrazy aksonometryczne prostych b i c , z których pierwsza leży na rzutni pionowej π_2 , a druga na rzutni bocznej π_3 .

Na rys. 44 obierzmy taką prostą l , która leży na rzutni aksonometrycznej π_a . Prosta l przecina się z bokami trójkąta śladów aksonometrycznych ($s_1 s_2 s_3$) w trzech punktach $H_l = l s_1$, $V_l = l s_2$ i $K_l = l s_3$.

Ponieważ punkt H_l leży na śladzie aksonometrycznym $s_1 = \pi_a \pi_1$ rzutni poziomej π_1 , przeto jest punktem przecięcia się prostej l z rzutnią π_1 , czyli innymi słowy: punkt $H_l = l \pi_1$ jest śladem poziomym prostej l . Podobnie element $V_l = l s_2 = l \pi_2$ jest śladem pionowym prostej l , a punkt $K_l = l s_3 = l \pi_3$ jest śladem bocznym tej prostej. Aby silnie podkreślić tę tak ważną dla nas zależność, wypowiemy ją w formie następującego

Twierdzenia: Jeżeli prosta l leży na rzutni aksonometrycznej, to punkty $H_l = l s_1$, $V_l = l s_2$ i $K_l = l s_3$, w których

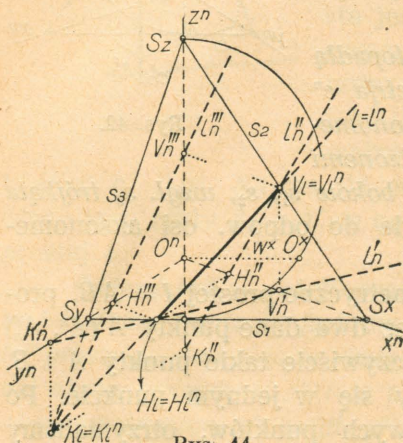
owa prosta przecina się z bokami s_1 , s_2 i s_3 trójkąta śladów aksonometrycznych, są odpowiednio śladami: poziomym, pionowym i bocznym owej prostej.

Wedle założenia prosta l leży na płaszczyźnie rysunku π_a , przeto aksonometria l^n tej prostej nakrywa się z tą prostą l . Celem skonstruowania dalszych rzutów aksonometrycznych

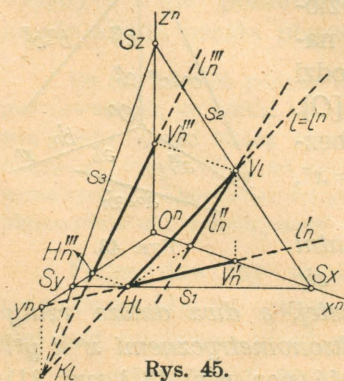
l'_n , l''_n i l'''_n uważanej prostej $l = l^n$, należy wyznaczyć (por. ust. 15) dla punktów np. H_l i V_l ich rzuty: H''_n , H'''_n i V''_n , V'''_n . Proste $l'_n = H_l V'_n$, $l''_n = V_l H''_n$ i $l'''_n = H'''_n V'''_n$ rozwiązują zadanie.

Uwaga: O ile konstrukcja jest dokładnie przeprowadzoną, to przez ślad boczny K_l prostej l przejść musi koniecznie aksonometria l'''_n rzutu bocznego l''' owej prostej. Z tych samych powodów punkt K'_n , t. zn. aksonometria rzutu poziomego punktu K_l , leżeć musi na elemencie $l'_n = H_l V'_n$, a punkt K''_n na prostej $l''_n = V_l H''_n$.

Na rys. 44 uwzględniliśmy części „widoczne” i „niewidoczne” prostej l i jej obrazów aksonometrycznych przy założeniu, że: rzutnie π_1 , π_2 , π_3 i π_a są nieprzeźroczyste, a początek O układu $O[x, y, z]$ znajduje się poniżej (pod) płaszczyzną rysunku π_a . Skoro



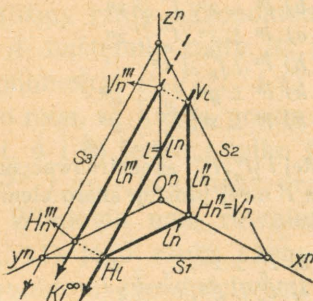
Rys. 44.



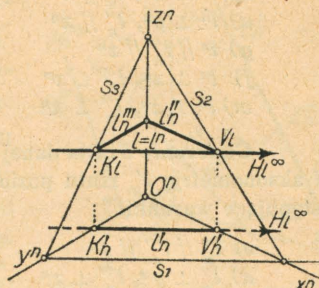
Rys. 45.

założymy, że rzutnia aksonometryczna π_a jest „przezroczystą“, a rzutnie π_1 , π_2 i π_3 są nieprzezroczyste i przechodzą przez początek O , który leży również poniżej płaszczyzny π_a , to wówczas części widoczne i niewidoczne prostej l , oraz jej rzutów aksonometrycznych, podane są na r. s. 45.

Na rys. 46 przyjęto prostą l równoległą do śladu s_3 i leżącą na rzutni aksonometrycznej π_a . Owa prosta jest równoległa również i do rzutni bocznej π_3 . Na rys. 47 prosta l leży na rzutni π_a i jest równoległa do śladu s_1 , a temsamem i do rzutni poziomej π_1 .



Rys. 46.



Rys. 47.

21. Zadania i ćwiczenia. Korzystając z dotychczasowych rozważań, rozwiązać możemy następujące

Zadanie 1: Dana jest (rys. 29) dowolna prosta $l(l'', l'_n)$, której położenie w przestrzeni ustalone jest rzutami aksonometrycznymi l'' i l'_n . Wyznaczyć należy aksonometrię l'' i l'_n rzutu pionowego l'' i rzutu bocznego l''' tej prostej.

Rozwiązanie: Na danej prostej $l(l'', l'_n)$ obierzmy (ust. 11) dwa dowolne punkty $A(A'', A'_n)$, $B(B'', B'_n)$ i skonstruujmy aksonometrię A'' , A''' , B'' i B''' owych punktów. Proste $l'' = A''B''$ i $l''' = A'''B'''$ rozwiązuja zadanie.

Zauważyć należy (por. ust. 16), że na przeprowadzenie powyższej konstrukcji nie wpływa wcale trójkąt śladów aksonometrycznych ($s_1 s_2 s_3$). Ów trójkąt potrzebny byłby wówczas, gdyby np. chodziło o ustalenie położenia prostej $l = AB$ w odniesieniu do rzutni aksonometrycznej (pł. rysunku) π_a .

Ćwiczenie 1: Rozwiązać poprzednie zadanie wówczas, jeżeli położenie prostej l ustalone jest przez dwa jej rzuty aksonometryczne w następujących przypadkach: $l(l'', l'_n)$; $l(l'', l''')$; $l(l'', l'_n)$; $l(l'_n, l''')$; $l(l'_n, l''')$.

Ćwiczenie 2: Dane są dwa dowolne punkty właściwe $A(A'', A'_n)$ i $B(B'', B'_n)$. Dla prostej $l = AB$ wyznaczyć rzuty l'' i l'_n , a następnie odbudować (ust. 18) położenie tej prostej w przestrzeni.

Ćwiczenie 3: Skonstruować obrazy aksonometryczne prostej $l = AB$, przechodzącej przez dwa dane punkty właściwe A i B , skoro położenie tych punktów określone jest następującymi warunkami: a) punkt $A(A'' = A'_n)$ leży na rzutni poziomej π_1 , a punkt $B(B'' = B'_n)$ na rzutni pionowej π_2 ; b) $A(A'' = A'_n)$ leży na rzutni bocznej π_3 , $B(B'' = B'_n)$; c) $A(A'' = A'_n)$, $B(B'' = B'_n)$; d) $A(A'' = A'_n = A''')$ leży na osi x , $B(B'' = B''')$; e) $A(A'' = A'_n = A''')$, $B(B'' = B'_n)$; f) $A(A'' = A'_n = A''')$, $B(B'' = B'_n)$; g) $A(A'' = A'_n)$, $B(B'' = B'_n)$.

Ćwiczenie 4: Dane są rzuty aksonometryczne l^n i l''_n pewnej prostej l . Odtworzyć położenie tej prostej w przestrzeni, a następnie skonstruować aksonometrię l'_n i l'''_n owej prostej w następujących przypadkach:

- | | | |
|---|---|---|
| a) $l^n \perp z^n, l''_n \parallel z^n$ | b) $l^n \perp z^n, l''_n \parallel x^n$ | c) $l^n \perp y^n, l''_n \parallel z^n$ |
| d) $l^n \perp y^n, l''_n \parallel x^n$ | e) $l^n \perp x^n, l''_n \parallel z^n$ | f) $l^n \perp x^n, l''_n \parallel x^n$ |
| g) $l^n \parallel l''_n \parallel z^n$ | h) $l^n \parallel l''_n \parallel x^n$ | i) $l^n \perp z^n, l''_n \perp z^n$ |
| j) $l^n \perp x^n, l''_n \perp x^n$ | k) $l^n \perp y^n, l''_n \perp y^n$ | l) $l^n \perp y^n, l''_n \perp x^n$ |
| m) $l^n \perp z^n, l''_n \perp x^n$ | n) $l^n \perp x^n, l''_n \perp y^n$ | |

Ćwiczenie 5: Dla danej prostej l (l''_n, l'''_n) skonstruować należy jej aksonometrię l^n i aksonometrię l'_n rzutu poziomego l' owej prostej, skoro elementy l''_n i l'''_n spełniają następujące warunki:

- | | | |
|--|--|--|
| a) $l''_n \parallel l'''_n \parallel z^n$ | b) $l''_n \perp z^n, l'''_n \perp z^n$ | c) $l''_n \parallel z^n, l'''_n \parallel x^n$ |
| d) $l''_n \perp y^n, l'''_n \perp z^n$ | e) $l''_n \parallel y^n, l'''_n \parallel z^n$ | f) $l''_n \perp x^n, l'''_n \perp z^n$ |
| g) $l''_n \parallel y^n, l'''_n \parallel x^n$ | h) $l''_n \perp x^n, l'''_n \perp y^n$ | i) $l''_n \parallel y^n, l'''_n \perp x^n$ |
| j) $l''_n \perp y^n, l'''_n \perp y^n$ | k) $l''_n \perp y^n, l'''_n \parallel x^n$ | l) $l''_n \perp y^n, l'''_n \parallel z^n$ |
| m) $l''_n \parallel z^n, l'''_n \perp x^n$ | n) $l''_n \perp z^n, l'''_n \parallel z^n$ | |

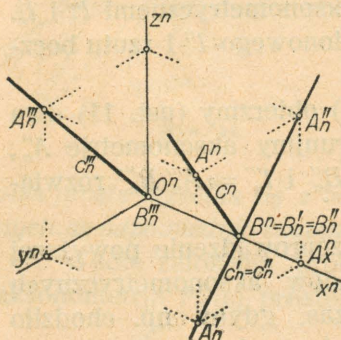
Zadanie 2: Dane są (rys. 48) aksonometrię A'_n i A''_n rzutów poziomego A' i pionowego A'' dowolnego punktu A . Skonstruować należy rzuty aksonometryczne takiej prostej c , która przechodzi przez punkt A i przecina oś x , a nadto zajmuje w przestrzeni takie położenie, że jej aksonometrię c'_n i c''_n nakrywają się na promieniu $A'_n A''_n$.

Rozwiązanie: Prosta $c'_n = c''_n = A'_n A''_n$ przecina oś aksonometryczną x^n w punkcie $B^n = B'_n = B''_n$, który jest oczywiście aksonometrią punktu B , leżącego na osi x . Dla tego punktu rzut B''_n zjednoczył się ze środkiem aksonometrycznym O^n . Skoro wyznaczymy rzuty A^n i A''_n punktu A (A'_n, A''_n), to prosta $c = AB$, przechodząca przez punkty A i B , rozwiązuje zadanie.

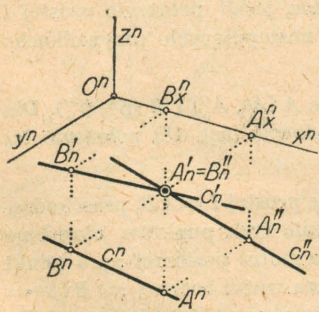
Ćwiczenie 6: Rozwiązać poprzednie zadanie, jeżeli prosta pomocnicza $p = A'_n A''_n$ spełnia warunki następujące: a) $p \perp z^n$, b) $p \perp y^n$, c) $p \perp x^n$, d) $p \parallel x^n$, e) $p \parallel z^n$.

Ćwiczenie 7: Dla danej prostej l (l'_n, l''_n), której rzuty l'_n i l''_n posiadają wspólny kierunek, wyznaczyć aksonometrię l^n i l'''_n .

Ćwiczenie 8: Na danej prostej c (c'_n, c''_n) wyznaczyć (por. rys. 49) takie punkty A i B , dla których rzuty aksonometryczne A'_n i B''_n zjednoczyły się z punktem $c'_n c''_n$ przecięcia się elementów c'_n i c''_n .

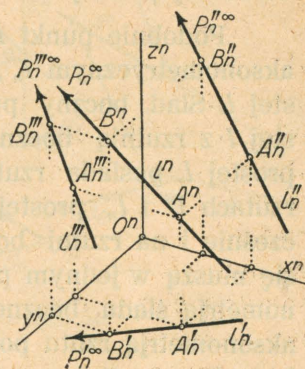


Rys. 48.



Rys. 49.

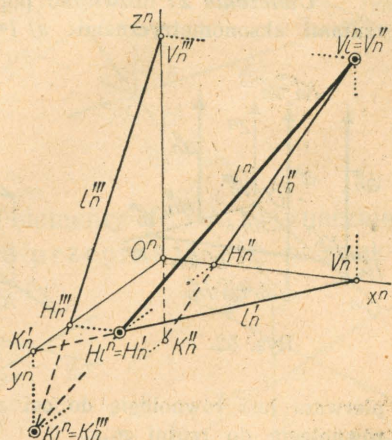
22. Aksonometrie punktu niewłaściwego. Niechaj dane będą dwa dowolne punkty właściwe $A (A^n, A'_n)$ i $B (B^n, B'_n)$, które określają jedną i tylko jedną prostą właściwą $l = AB$. Na rys. 50. skonstruowaliśmy rzuty aksonometryczne A''_n i A'''_n punktu A , następnie rzuty B''_n i B'''_n punktu B , oraz aksonometrie l''_n , l'_n , l''_n i l'''_n prostej $l = AB$. Wiadomo nam, że każda prosta właściwa l posiada (ust. 4 i 5) jeden i tylko jeden punkt niewłaściwy P^∞ t. zn. „kierunek” przynależny do prostej l . Wiadomo nam również, że dla punktu P^∞ (ust. 11) jego rzuty aksonometryczne muszą być punktami niewłaściwymi: P^∞_n , P'^∞_n , P''^∞_n , P'''^∞_n . Ponieważ jednak punkt P^∞ przynależy do prostej właściwej l , przeto (ust. 18) aksonometrie tego punktu leżeć muszą na „odpowiednich” rzutach aksonometrycznych prostej l .



Rys. 50.

Chcąc zatem w metodzie rzutów aksonometrycznych prostokątnych — (jak wogóle w każdej metodzie rzutów równoległych) — wyznaczyć obrazy punktu niewłaściwego P^∞ , należy podać aksonometrie prostej właściwej l , przechodzącej przez ów punkt P^∞ .

23. Aksonometrie śladów prostej właściwej. Obierzmy na rzutni poziomej π_1 (rys. 51) dowolny punkt H_l ($H_l^n = H'_l$), a na rzutni pionowej π_2 punkt V_l ($V_l^n = V'_l$). Dla tych punktów wyznaczmy następnie dalsze rzuty aksonometryczne: H''_n , H'''_n i V''_n , V'''_n . Przyjęte punkty określają jedną i tylko jedną prostą $l = H_l V_l$, której aksonometrijami są proste: $l''_n = H''_n V''_n$, l'_n , l''_n i $l'''_n = H'''_n V'''_n$. Z łatwością zauważymy, że punkt $H_l = l \pi_1$, leżący na prostej l i na rzutni π_1 , jest „śladem poziomym” prostej l , a punkt $V_l = l \pi_2$ jest śladem pionowym tej prostej. Element H_l^n jest aksonometrią śladu poziomego H_l prostej l , podobnie punkt V_l^n jest aksonometrią śladu pionowego V_l prostej l .



Rys. 51.

Z rysunku 51 czytamy, że: dla dowolnej prostej l , o rzutach aksonometrycznych l''_n , l'_n , l''_n i l'''_n , punkt $H_l^n = l''_n l'_n$, przecięcia się aksonometrii l''_n z aksonometrią l'_n rzutu | punkt $V_l^n = l''_n l'''_n$, przecięcia się aksonometrii l''_n z aksonometrią l'''_n rzutu

poziomego l' tej prostej, jest aksonometrią śladu poziomego H_l uważanej prostej l .

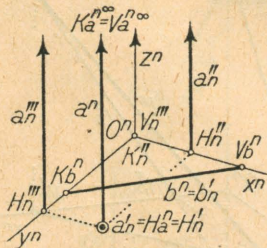
pionowego l'' tej prostej, jest aksonometrią śladu pionowego V_l uważanej prostej l .

Podobnie punkt $K_l^n = l^n l_n'''$, przecięcia się aksonometrii l^n z rzutem aksonometrycznym l_n''' , jest aksonometrią śladu bocznego K_l prostej l . Ślad boczny prostej l jest punktem $K_l = l\pi_3$, przebiecia się prostej l z rzutnią boczną π_3 . Punkt ten, jako element przynależny do prostej l , posiada rzuty K_l^n i K_l''' , które leżeć muszą na odpowiednich rzutach l^n i l_n''' prostej l . Ponieważ jednak ślad K_l leżeć musi równocześnie i na rzutni bocznej π_3 , przeto jego rzuty K_l^n i K_l''' zjednoczyć się muszą w jednym punkcie. Element $K_l^n = K_l''' = l^n l_n'''$ jest zatem aksonometrią śladu bocznego K_l prostej l . Natomiast punkt $K_n' = l_n' y''$ jest aksonometrią rzutu poziomego K' śladu bocznego K_b , a punkt $K_n'' = l_n'' z''$ jest aksonometrią rzutu pionowego K'' uważanego śladu bocznego K prostej l .

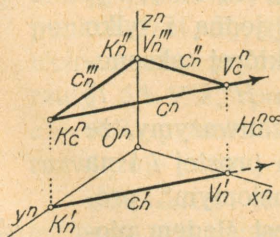
Dla obrazów aksonometrycznych dwóch śladów poziomego H_l i pionowego V_l prostej l zachodzą następujące relacje: $H_n'' = l_n' x''$, $H_n''' = l_n'' y''$, $V_n' = l_n' x''$ i $V_n''' = l_n'' z''$. Na rys. 51 uwzględniono części widoczne i niewidoczne rzutów prostej l przy założeniu, że punkt O leży poza płaszczyzną rysunku π_a , a rzutnie π_1 , π_2 i π_3 są nieprzeźroczyste.

Ćwiczenie 1: Dla danej prostej $l (l^n, l_n''')$ wyznaczyć aksonometrię trzech śladów: poziomego, pionowego i bocznego, a następnie skonstruować dopiero rzuty aksonometryczne l_n' i l_n''' owej prostej l .

Ćwiczenie 2: Rozwiązać poprzednie ćwiczenie, skoro prosta l wyznaczona jest rzutami aksonometrycznymi: a) l^n i l_n''' , b) l^n i l_n' , c) l_n' i l_n''' , d) l_n'' i l_n''' , e) l_n' i l_n''' .



Rys. 52.



Rys. 53.

Ćwiczenie 3: Skonstruować aksonometrię trzech śladów: poziomego, pionowego i bocznego dla prostych, których położenie ustalone jest warunkami, podanymi w ćwiczeniach 4–8 ustępu 21.

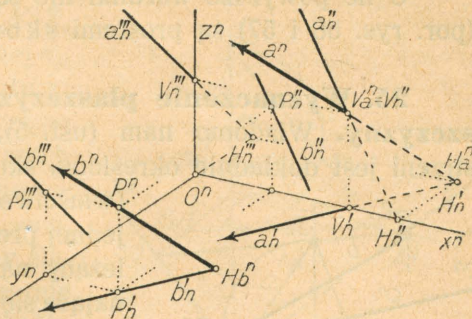
Ćwiczenie 4: Wyznaczyć aksonometrię trzech śladów: poziomego, pionowego i bocznego dla prostych (por. rys. 52 i 53) a , b i c , z których

pierwsza jest równoległą do osi z , druga leży na rzutni poziomej π_1 , a trzecia jest równoległą do rzutni π_1 .

Ćwiczenie 5: Wyznaczyć aksonometrię trzech śladów dla prostych, których położenie ustalone jest na rysunkach 31–40.

24. Wzajemne położenia dwóch prostych. Niechaj dane będą (rys. 54) dowolny punkt właściwy $P (P^n, P_n)$ i prosta $a = H_a V_a$, wyznaczona śladami poziomym $H_a (H_a^n = H_a')$ i pionowym $V_a (V_a^n = V_a')$. Dla

owych elementów P i a wykreślmy dalsze rzuty aksonometryczne, a następnie przez punkt P poprowadźmy prostą b , równoległą do prostej a . Prosta b^n , przechodząca przez punkt P^n i równoległa do elementu a^n , jest aksonometrią prostej b ; dla prostych $a \parallel b$ ich aksonometrie są bowiem (ust. 11) prostymi równoległymi. Z ust. 10 wiadomo nam jednak, że dla prostych równoległych a i b ich jednoimienne rzuty są elementami równoległymi, a mianowicie: $a' \parallel b'$, $a'' \parallel b''$, $a''' \parallel b'''$. Skoro dla rzutów poziomych $a' \parallel b'$ skonstruujemy ich aksonetrie,

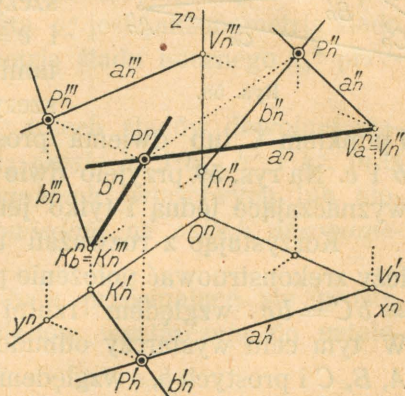


Rys. 54.

to otrzymamy również dwie proste równoległe: $a'_n \parallel b'_n$. Z tych samych powodów aksonetrie a'_n i b'_n rzutów pionowych $a'' \parallel b''$, oraz aksonometrie a''_n i b''_n rzutów bocznych $a''' \parallel b'''$ uważanych elementów $a \parallel b$, są prostymi równoległymi: $a'_n \parallel b'_n$, $a''_n \parallel b''_n$. Jeżeli dane są dwie proste równoległe $a \parallel b$, to ich „jednoimienne” rzuty np. a'_n i b'_n są prostymi równoległymi. Możemy tedy wypowiedzieć następujące

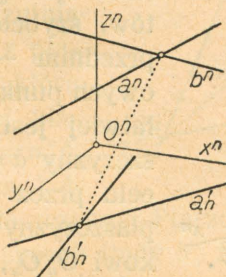
Twierdzenie: Dla prostych równoległych ich jednoimienne rzuty aksonometryczne są prostymi równoległymi.

Obierzmy teraz trzy dowolne punkty P (P^n, P'_n), V_a ($V_a^n = V_n''$), K_b ($K_b^n = K_n''$) i wyznaczmy dla nich na rys. 55 rzuty aksonometryczne: $P''_n, P'''_n, V_n', V_n'', K'_n, K'_n$.

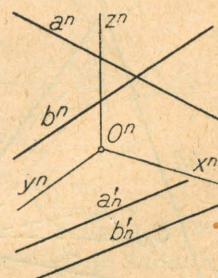


Rys. 55.

Punkty P i V_a określają prostą $a = PV_a$, a elementy P i K_b wyznaczają prostą $b = PK_b$. Dla tych prostych, które przecinają się w punkcie P , z łatwością wykreślić możemy rzuty aksonometryczne. $a^n = P^n V_a^n$, $a'_n = P'_n V_n'$, ..., $b^n = P^n K_b^n$, ..., $b'_n = P'_n K'_n$. Z rys. 55 czytamy: Jeżeli dwie proste a, b przecinają się w punkcie P , to wówczas punkty: $P^n = a^n b^n$, $P'_n = a'_n b'_n$, $P''_n = a''_n b''_n$ i $P'''_n = a'''_n b'''_n$, przecięcia się jednoimiennych rzutów aksonome-



Rys. 56.



Rys. 57.

trycznych owych prostych, leżą na prostych odnoszących: $P^n P'_n \parallel z^n$, $P^n P''_n \parallel y^n$, $P^n P'''_n \parallel x^n$.

O ile powyższe warunki nie są spełnione, to uważane proste a i b (por. rys. 56 i 57) są prostemi skośnymi.

25. Wyznaczenie płaszczyzny. Aksonometrije śladów płaszczyzny. Wiadomo nam (ust. 5), że położenie płaszczyzny w przestrzeni jest dokładnie określone, skoro dane są: 1) trzy dowolne punkty

(właściwe lub niewłaściwe), nie leżące na jednej prostej; 2) dowolna prosta i punkt, nie leżący na owej prostej; 3) dwie proste przecinające się w punkcie właściwym, wzgl. w punkcie niewłaściwym (t. zn. proste równoległe).

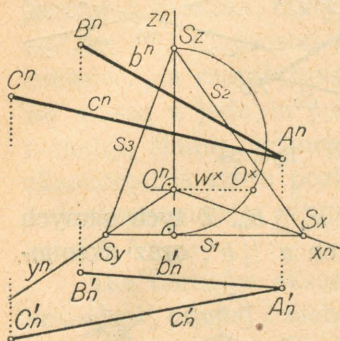
Niechaj dane będą (rys. 58) trzy dowolne punkty A (A^n, A'_n), B (B^n, B'_n) i C (C^n, C'_n), które wyznaczają jedną ściśle określoną płaszczyznę $a = ABC$. Oznaczmy przez $b = AB$ i $c = AC$ proste, łączące punkt A z elementami b , wzgl. c , to wówczas uważana płaszczyzna $a = bC = bc$ określona jest prostą b

i punktem C lub dwiema prostymi przecinającymi się b i c . Na rys. 59 przyjęto dwie proste równoległe $b \parallel c$, wyznaczające jedną i tylko jedną płaszczyznę $a = bc$.

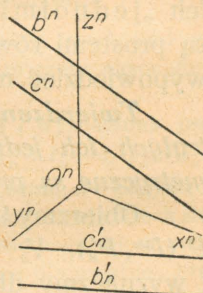
Korzystając z rozważań ustępów 14, 15 i 18, należy zrekonstruować położenie płaszczyzny $a = ABC = bC = bc$ względem rzutni aksonometrycznej π_a . W tym celu wystarczy odbudować położenie punktów A, B, C i prostych b, c względem płaszczyzny rysunku π_a .

Zamiast trzech dowolnych punktów A, B i C , możemy przyjąć (rys. 60 i 61) punkty X_a, Y_a i Z_a , leżące odpowiednio na osiach x, y i z układu $[O]$, celem wy-

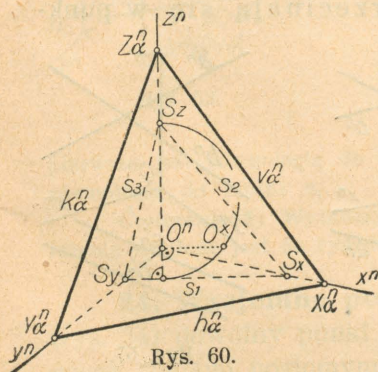
znaczenia płaszczyzny a . Mając dane aksonometrije X_a^n, Y_a^n i Z_a^n owych trzech punktów, szybciej — aniżeli w przypadku poprzednim — odtworzyć możemy położenie owych punktów w przestrzeni, a tem samem łatwiej jest uskutecznić rekonstrukcję płaszczyzny $a = X_a Y_a Z_a$ w przestrzeni. W tym celu przez punkt O , którego odległość od płaszczyzny rysunku π_a równa się odcinkowi $O_n O_x$, poprowadzimy osie $x = OS_x$, $y = OS_y$ i $z = OS_z$ układu $[O]$. Z punktów



Rys. 58.



Rys. 59.



Rys. 60.

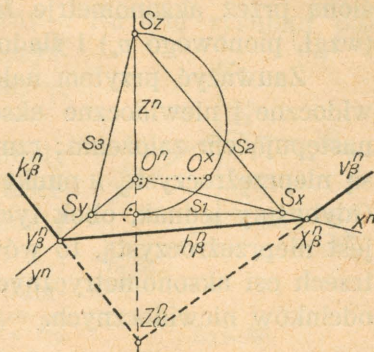
X_a^n , Y_a^n i Z_a^n wykreślone proste prostopadłe do płaszczyzny rysunkowej π_a — przetną się odpowiednio z osiami x , y i z w szukanych punktach: X_a , Y_a , Z_a . Otrzymane w ten sposób punkty ustalają dokładnie położenie uważanej płaszczyzny $\alpha = X_a Y_a Z_a$ w odniesieniu do rzutni aksonometrycznej π_a .

Płaszczyzna α przecina trzy rzutnie: poziomą $\pi_1 = Os_1 = xy$, pionową $\pi_2 = Os_2 = xz$ i boczną $\pi_3 = Os_3 = yz$ w trzech prostych, a mianowicie w śladach: poziomym $X_a Y_a = h_a$, pionowym $X_a Z_a = v_a$ i bocznym $Y_a Z_a = k_a$. Rzut prostokątny śladu poziomego h_a płaszczyzny α na rzutnię aksonometryczną π_a jest prostą $h_a^n = X^n Y_a^n$. Podobnie (rys. 60 i 61) proste $v_a^n = X_a^n Z_a^n$ i $k_a^n = Y_a^n Z_a^n$ są rzutami aksonometrycznymi śladów pionowego v_a i bocznego k_a omawianej płaszczyzny α . Prostą h_a^n nazywamy aksonometrią śladu poziomego h_a uważanej płaszczyzny α . Prosta v_a^n jest „aksonometrią śladu pionowego v_a “, a prosta k_a^n jest „aksonometrią śladu bocznego k_a “ przyjątej płaszczyzny.

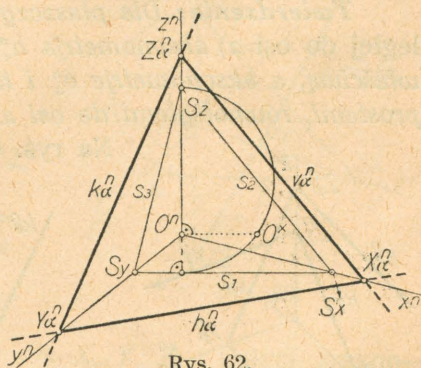
Pomiędzy aksonometriami h_a^n , v_a^n i k_a^n trzech śladów dowolnej płaszczyzny α zachodzi następująca zależność: proste h_a^n i v_a^n , h_a^n i k_a^n , oraz v_a^n i k_a^n przecinają się parami w trzech punktach (właściwych lub niewłaściwych) X_a^n , Y_a^n i Z_a^n , które leżą odpowiednio na osiach aksonometrycznych x^n , y^n , wzgl. z^n .

Ponieważ płaszczyznę wyznaczają dwie przecinające się proste, przeto aksonetrie np. h_a^n i v_a^n dwóch śladów wystarczają do ustalenia w sposób jednoznaczny położenia płaszczyzny α w przestrzeni. Aby odtworzyć położenie tej płaszczyzny, poprowadźmy (rys. 60 — 62) przez prostą h_a^n płaszczyznę $\gamma \perp \pi_a$, a przez element v_a^n płaszczyznę $\delta \perp \pi_a$, gdzie π_a oznacza płaszczyznę rysunku. Rzutnia pozioma $\pi_1 = Os_1$ przetnie się z płaszczyzną γ w krawędzi $h_a = \pi_1 \gamma$, która jest śladem poziomym uważanej płaszczyzny α . Podobnie krawędź $v_a = \pi_2 \delta$, przecięcia się płaszczyzn $\pi_2 = Os_2$ i δ , jest śladem pionowym naszej płaszczyzny. Płaszczyzna $\alpha = h_a v_a$, przechodząca przez otrzymane w ten sposób ślady h_a i v_a , rozwiązuje zadanie.

Umówmy się, że symbolem α (h_a^n , v_a^n) oznaczać będziemy płaszczy-



Rys. 61.

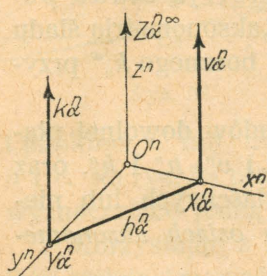


Rys. 62.

znę α , której położenie w przestrzeni wyznaczone jest zapomocą dwóch aksonometrii h_a^n i v_a^n śladów poziomego h_a i pionowego v_a . Podobnie symbole: α (h_a^n , k_a^n), α (v_a^n , k_a^n) niechaj oznaczają płaszczyznę α , określoną przez aksonometrije h_a^n i k_a^n , wzgl. v_a^n i k_a^n śladów poziomego h_a (wzgl. pionowego v_a) i śladu bocznego k_a .

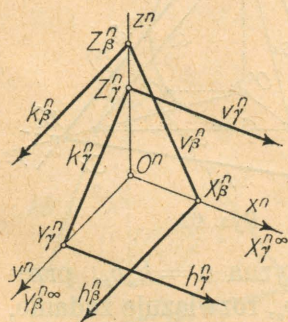
Zauważyć przytem należy, że na rys. 60 i 61 uwzględniono części widoczne i niewidoczne aksonometrii trzech śladów płaszczyzny α przy następującem założeniu: rzutnia π_α jest przeźroczysta, rzutnie π_1 , π_2 i π_3 są nieprzeźroczyste, a punkt O znajduje się pod płaszczyzną rysunku π_α . Gdybyśmy jednak, obok tych założeń, przyjęli nadto, że płaszczyzna α jest nieprzeźroczystą, to wówczas (rys. 62) odcinki $O^n X_a^n$, $O^n Y_a^n$ i $O^n Z_a^n$ trzech osi aksonometrycznych będą kreskowane, gdyż są one rzutami odcinków niewidocznych.

26. Szczególne położenia płaszczyzny. Na osiach aksonometrycznych x^n i y^n obierzmy (rys. 63) dwa dowolne punkty właściwe $X_a^n Y_a^n$, a na osi z^n punkt niewłaściwy Z_a^∞ . Te elementy uważamy za aksonometrije trzech punktów X_a , Y_a i Z_a^∞ , które przynależą odpow. do osi x , y , wzgl. z układu $[O]$ i wyznaczają jedną ściśle określoną płaszczyznę $\alpha = X_a Y_a Z_a^\infty$. Płaszczyzna α jest oczywiście równoległą do osi z , a tem samem prostopadłą do rzutni poziomej π_1 . Aksonometria $h_a^n = X_a^n Y_a^n$ śladu poziomego h_a tej płaszczyzny ma dowolne położenie, natomiast aksonometrije $v_a^n = X_a^n Z_a^\infty$ i $k_a^n = Y_a^n Z_a^\infty$ dwóch dalszych śladów są prostymi równoległymi do osi z^n .



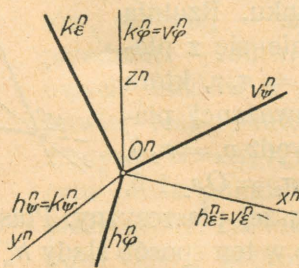
Rys. 63.

Twierdzenie: Dla płaszczyzny poziomo-rzucającej α (wzgl. równoległej do osi z) aksonometria h_a^n jej śladu poziomego jest dowolną prostą właściwą, a aksonometrije v_a^n i k_a^n śladów pionowego v_a i bocznego k_a są prostymi, równoległymi do osi aksonometrycznej z^n .



Rys. 64.

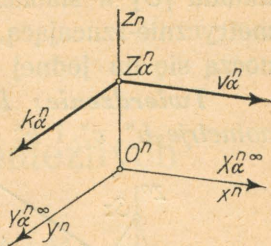
Na rys. 64 podane są aksonometrije trzech śladów płaszczyzny pionowo-rzucającej β i płaszczyzny boczno-rzucającej γ . Pierwsza z nich jest równoległą do osi y , a druga do osi x . Z płaszczyzn boczno-rzucających na szczególniejszą uwagę zasługuje płaszczyzna ϵ (rys. 65), prze-



Rys. 65.

Widoczne i niewidoczne części aksonometrii trzech śladów płaszczyzny ϵ przy następującem założeniu: rzutnia π_ϵ jest przeźroczysta, rzutnie π_1 , π_2 i π_3 są nieprzeźroczyste, a punkt O znajduje się pod płaszczyzną rysunku π_ϵ . Gdybyśmy jednak, obok tych założeń, przyjęli nadto, że płaszczyzna ϵ jest nieprzeźroczystą, to wówczas (rys. 62) odcinki $O^n X_\epsilon^n$, $O^n Y_\epsilon^n$ i $O^n Z_\epsilon^n$ trzech osi aksonometrycznych będą kreskowane, gdyż są one rzutami odcinków niewidocznych.

chodząca przez oś x . Ślady: poziomy h_ε i pionowy v_ε tej płaszczyzny zjednoczone są z osią x , a ślad boczny k_ε jest dowolną prostą, przechodzącą przez początek O układu $O[x, y, z]$. Na rys. 65 wkreślono aksonometrię $h_\varepsilon^n = v_\varepsilon^n = x^n$ i k_ε^n owej płaszczyzny ε . Na tym rysunku podane są również aksonometrije śladów płaszczyzny φ , przechodzącej przez oś z , oraz płaszczyzny ψ , która przechodzi przez oś y .

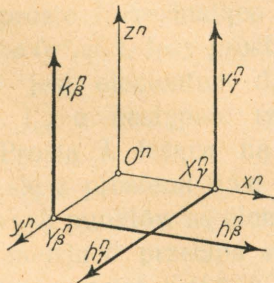


Rys. 66.

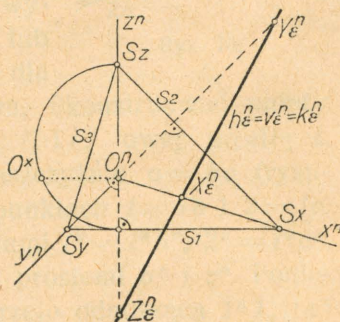
Na osiach x^n i y^n obierzmy (rys. 66) punkty niewłaściwe X_a^n, Y_a^n , a na osi z^n punkt właściwy Z_a^n . Skoro uważać będziemy owe elementy za aksonometrije trzech punktów X_a^∞, Y_a^∞ i Z_a , które leżą odpow. na osiach x, y , wzgl. z układu $[O]$, to wówczas płaszczyzna $\alpha = X_a^\infty Y_a^\infty Z_a$ jest równoległą do rzutni poziomej π_1 , gdyż jest równoległą do osi x i y . Uważana płaszczyzna $\alpha \parallel \pi_1$ jest zarazem prostopadłą do osi z , a więc (ust. 4) prostopadłą też do rzutni pionowej π_2 i bocznej π_3 czyli jest płaszczyzną pionowo- i boczno-rzucającą.

Twierdzenie: Jeżeli płaszczyzna α jest równoległą do rzutni poziomej (wzgl. prostopadłą do osi z), to aksonometria jej śladu poziomego jest prostą niewłaściwą h_α^n , a aksonometrije v_α^n, k_α^n śladów pionowego i bocznoego są odpowiednio równoległe do osi aksonometrycznej x^n , wzgl. y^n .

Na rys. 67 podane są aksonometrije śladów płaszczyzny β , równoległej do rzutni pionowej π_2 , oraz płaszczyzny γ , równoległej do rzutni bocznej π_3 . Element $\beta \parallel \pi_2$ jest płaszczyzną prostopadłą do osi y czyli płaszczyzną poziomo- i boczno-rzucającą, a element $\gamma \parallel \pi_3$ jest płaszczyzną poziomo- i pionowo-rzucającą czyli prostopadłą do osi x .



Rys. 67.



Rys. 68.

Na osiach układu $O[x, y, z]$ obierzmy takie trzy punkty właściwe $X_\varepsilon, Y_\varepsilon$ i Z_ε , aby ich aksonometrije $X_\varepsilon^n, Y_\varepsilon^n$ i Z_ε^n leżały (rys. 68) na jednej prostej. Z ową prostą zjednoczone są oczywiście aksonometrije

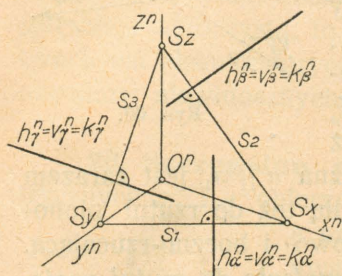
$h_\varepsilon^n = v_\varepsilon^n = k_\varepsilon^n$ trzech śladów płaszczyzny $\varepsilon = X_\varepsilon Y_\varepsilon Z_\varepsilon$. Celem zrekonstruowania położenia tej płaszczyzny w przestrzeni, poprowadźmy przez punkty $X_\varepsilon^n, Y_\varepsilon^n$ i Z_ε^n proste $a \perp \pi_a, b \perp \pi_a$ i $c \perp \pi_a$, gdzie π_a oznacza płaszczyznę rysunku, to na osiach $x = OS_x, y = OS_y, z = OS_z$ otrzymamy żądane punkty $X_\varepsilon, Y_\varepsilon$ i Z_ε . Z łatwością zauważymy, że

płaszczyzna $\varepsilon = X_\varepsilon Y_\varepsilon Z_\varepsilon$ przechodzi przez pomocnicze proste a, b, c i jest prostopadłą do rzutni aksonometrycznej π_ε .

Przez dowolną prostą h_ε^n płaszczyzny rysunkowej π_a poprowadźmy (rys. 68) płaszczyznę $\varepsilon \perp \pi_a$, która przetnie się z rzutniami π_1, π_2 i π_3 układu $[O]$ w śladach $h_\varepsilon, v_\varepsilon$ i k_ε . Ponieważ ε jest płaszczyzną aksonometrycznie-rzucającą, przeto rzuty $h_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n$ i k_ε^n owych trzech śladów zjednoczą się na jednej prostej. Możemy tedy wypowiedzieć następujące

Twierdzenie: Dla płaszczyzny aksonometrycznie-rzucającej ε aksonometrze $h_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n$ i k_ε^n trzech jej śladów nakrywają się na jednej prostej.

Jeżeli w szczególnym przypadku (rys. 69), aksonometrze śladów płaszczyzny α schodzą się z prostą równoległą do osi z^n , czyli prostopadłą do śladu s_1 , to uważana płaszczyzna α spełnia warunki: $\alpha \perp \pi_a$ i $\alpha \perp s_1$, a zatem jest płaszczyzną aksonometrycznie- i poziomo-rzucającą. Płaszczyzna β jest aksonometrycznie- i pionowo-rzucającą, bo $\beta \perp s_2$, a wreszcie płaszczyzna $\gamma \perp s_3$ jest płaszczyzną aksonometrycznie- i boczno-rzucającą.



Rys. 69.

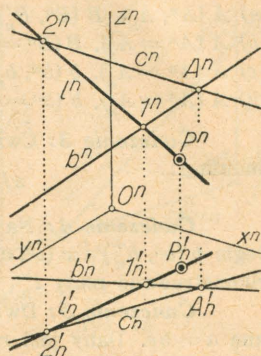
Rozdział IV.

O prostych i punktach, przynależnych do płaszczyzny.

27. Proste, leżące na danej płaszczyźnie. Uważajmy płaszczyznę $a = bc$, wyznaczoną (rys. 70 i 71) przez dwie proste przecinające się lub równoległe b i c . Na owej płaszczyźnie chcielibyśmy przyjąć dowolną prostą l i wyznaczyć rzuty aksonometryczne tej prostej. Wiadomo nam (ust. 3), że prosta l leży na płaszczyźnie a wówczas, skoro dwa dowolne punkty tej prostej leżą na owej płaszczyźnie. Celem wyznaczenia takiej prostej, należy przyjąć pewien punkt 1 ($1^n, 1'_n$) na danej prostej b (b^n, b'_n), oraz dowolny punkt 2 ($2^n, 2'_n$) na prostej c (c^n, c'_n). Prosta $l = 12$, łącząca owe punkty 1 i 2 , leży oczywiście na uważanej płaszczyźnie $a = bc$.

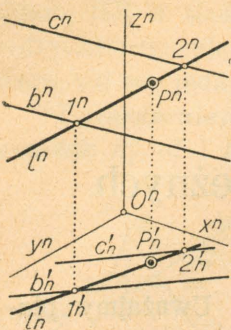
Zadanie 1: Na danej płaszczyźnie $a = bc$, wyznaczonej przez dwie proste (przecinające się lub równoległe) b (b^n, b'_n) i c (c^n, c'_n), leży prosta l , dla której aksonometria l^n jest elementem danym. Skonstruować należy rzut aksonometryczny l'_n , a następnie rzuty l''_n i l'''_n owej prostej l .

Rozwiązanie: Prosta l , leżąca na płaszczyźnie $a = bc$ (rysunek 70 i 71), przecina się z prostymi b i c w punktach $1 = lb$ i $2 = lc$. Aksonometrie $1^n, 2^n$ owych punktów są elementami $1^n = l^n b^n$, $2^n = l^n c^n$, w których dana aksonometria l^n przecina się z prostymi b^n i c^n . Ponieważ punkt 1 leży na danej prostej b (b^n, b'_n), przeto odnosząc $1^n 1'_n \parallel z^n$ przelnie się z prostą b'_n w punkcie $1'_n$. Podobnie odnosząc $2^n 2'_n \parallel z^n$ wyznaczy na danej prostej c'_n punkt $2'_n$. Otrzymane w ten sposób elementy $1'_n$ i $2'_n$ są aksonometriami rzutów poziomych $1', 2'$ pomocniczych punktów 1 i 2 . Prosta $l'_n = 1'_n 2'_n$ rozwiązuje zadanie, gdyż jest aksonometrią rzutu poziomego l' prostej l . Konstrukcyjne wyznaczenie dwóch dalszych rzutów $l''_n = 1''_n 2''_n$ i $l'''_n = 1'''_n 2'''_n$ prostej $l = 12$ nie następuje (ust. 14) żadnych trudności.



Rys. 70.

Z przeprowadzonej konstrukcji wynika bezpośrednio, że zadanie nasze posiada tylko jedno rozwiązanie. O tem przekonać się możemy również w inny sposób. Jeżeli dana prosta l^n jest aksonometrią pewnej prostej l , to owa prosta leżeć musi na płaszczyźnie ε , przechodzącej przez element l^n i prostopadłej do rzutni aksonometrycznej π_a . Wedle założenia jednak, prosta l przynależy do danej płaszczyzny $\alpha = bc$, przeto jest krawędzią $l = \varepsilon \alpha$, przecięcia się płaszczyzn ε i α . Wnosimy stąd, że zadanie powyższe posiada jedno i tylko jedno rozwiązanie.



Rys. 71.

Ćwiczenie 1: Na płaszczyźnie $\alpha = bc$, określonej dwiema danymi prostymi przecinającymi się (rys. 70) lub równoległymi (rys. 71) b (b^n, b_n') i c (c^n, c_n'), leży prosta l , dla której rzut aksonometryczny l_n' jest dany. Wyznaczyć aksonometrię l^n owej prostej l .

Ćwiczenie 2: Rozwiązać poprzednie ćwiczenie, jeżeli dana płaszczyzna α określona jest elementami (punktami i prostymi):

- | | |
|---|---|
| a) A (A^n, A_n'), B (B^n, B_n'), C (C^n, C_n'); | e) A (A^n, A_n'), b ($b^n, b_n' // x^n$); |
| b) A ($A^n = A_n'$), B ($B^n = B_n'$), C ($C^n = C_n''$); | f) A (A^n, A_n'), $b = x$ (oś x); |
| c) A ($A^n = A_n'$), b (b^n, b_n'); | g) A (A^n, A_n'), $b = y$; |
| d) A ($A^n = A_n'$), b ($b^n = b_n'$); | h) A ($A^n = A_n'$), b ($b^n = b_n''$). |

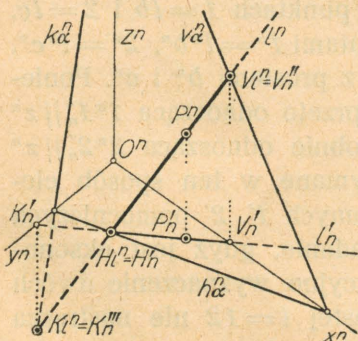
Ćwiczenie 3: Ćwiczenie 1 rozwiązać wówczas, jeżeli aksonometrią l_n' jest elementem:

- a) $l_n' // x^n$, b) $l_n' // y^n$, c) $l_n' \perp z^n$, d) $l_n' \perp y^n$.

Ćwiczenie 4: Na płaszczyźnie $\alpha = bc$, przechodzącej przez dwie proste równoległe b (b^n, b_n'') i c (c^n, c_n''), leży prosta l , której aksonometrią l_n' jest elementem danym. Skonstruować rzuty l_n'' , l_n' i l_n''' owej prostej l .

Ćwiczenie 5: Dwie proste równoległe b (b_n', b_n'') i c (c_n', c_n'') wyznaczają płaszczyznę $\alpha = bc$. Dany jest rzut aksonometryczny l_n' prostej l , która leży na płaszczyźnie α ; wykresić rzuty l_n'' , a następnie l^n i l_n''' owej prostej.

Niechaj dane będą aksonetrie h_a^n , v_a^n i k_a^n trzech śladów (rys. 72) dowolnej płaszczyzny α , oraz rzut l_n' prostej l , która leży na tej płaszczyźnie. Punkty $H_l = l h_a$, $V_l = l v_a$ i $K_l = l k_a$, przecięcia się owej prostej l ze śladami uważanej płaszczyzny α , są oczywiście śladami prostej l , gdyż leżą na l i na rzutni poziomej π_1 ,



Rys. 72.

pionowej π_2 , względnie bocznej π_3 . Punkty $H_l^n = l^n h_a^n$, $V_l^n = l^n v_a^n$ i $K_l^n = l^n k_a^n$ są rzutami aksonometrycznymi owych trzech śladów. A zatem uzyskujemy

Twierdzenie: Jeżeli prosta l leży na płaszczyźnie α , to aksonetrie H_l^n , V_l^n , K_l^n , trzech śladów poziomego H_l , pionowego V_l i boczno-ego K_l tej prostej, leżą wówczas na odpowiednich aksonetriach h_a^n , v_a^n , k_a^n trzech śladów owej płaszczyzny.

Z łatwością wykazać możemy prawdziwość twierdzenia wzajemnego.

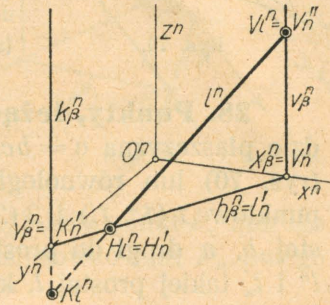
Twierdzenie: Jeżeli aksonometrije dwóch śladów — które nie są zjednoczone w jednym punkcie — pewnej prostej leżą na aksonometriach odpowiednich śladów dowolnej płaszczyzny, to owa prosta leży wówczas na tej płaszczyźnie.

Skoro założymy, że np. aksonometria H_i^n śladu poziomego H_i pewnej prostej l (rys. 72) leży na aksonometrii h_a^n śladu poziomego h_a płaszczyzny α , to punkt H_i leży na śladzie h_a , a tem samym H_i leży na płaszczyźnie α . Podobnie, skoro rzut V_i^n śladu pionowego V_i owej prostej l leży na rzucie v_a^n śladu pionowego v_a płaszczyzny α , to punkt V_i leży na prostej v_a i na płaszczyźnie α . Prosta $l = H_i V_i$, określona swojemi śladami, leży zatem na płaszczyźnie α , gdyż posiada z nią dwa wspólne punkty H_i i V_i .

Na rys. 73 przyjęto płaszczyznę poziomo-rzucającą β ($h_\beta^n, v_\beta^n \parallel k_\beta^n \parallel z^n$), oraz leżącą na niej prostą l . Aksonometrije H_i^n, V_i^n i K_i^n trzech śladów prostej l leżą na odpow. aksonometriach h_β^n, v_β^n , wzgl. k_β^n śladów płaszczyzny β . Ponieważ jednak jest $\beta \perp \pi_1$, przeto rzut aksonometryczny l_n' uważanej prostej zjednoczył się z elementem h_β^n .

Zadanie 2: Dana jest aksonometria l^n (rys. 72) pewnej prostej l , która leży na płaszczyźnie α (h_a^n, v_a^n). Skonstruować aksonometrię l_n' rzutu poziomego l' owej prostej l .

Rozwiązanie: Punkty $H_i^n = l^n h_a^n$ i $V_i^n = l^n v_a^n$, przecięcia się elementu l^n z prostymi h_a^n i v_a^n , są aksonometriami śladów: poziomego H_i i pionowego V_i przyjętej prostej l . Rzut H_n' punktu H_i zjednoczył się z elementem H_i^n , rzut V_n' punktu V_i leży na osi x^n , a prosta $l_n' = H_i^n V_n'$ rozwiązuje zadanie.



Rys. 73.

Z łatwością zauważymy, że konstrukcja ta nie różni się zasadniczo od konstrukcji, jakiej użyliśmy do rozwiązania zadania 1. Poprzednio korzystaliśmy z pomocniczych punktów 1 ($1^n, 1_n'$) i 2 ($2^n, 2_n'$), a obecnie ze śladów (t. zn. punktów szczególnych) poziomego H_i ($H_i^n = H_n'$) i pionowego V_i (V_i^n, V_n'). Na rys. 72 wkreślono ponadto aksonometrię K_i^n śladu bocznego K_i prostej l .

Uwaga: Dla konstruktora ogromnie ważną kwestią jest kontrola rysunku pod względem dokładności przeprowadzonej konstrukcji. W zadaniu 2 prosta $l_n' = H_i^n V_n'$ przecina oś aksonometryczną y^n w punkcie K_n' , a prosta l^n wyznacza na elemencie k_a^n punkt K_i^n . O ile konstrukcja jest dokładnie przeprowadzona, to rzuty K_i^n i K_n' śladu bocznego K_i prostej l leżeć muszą na odnoszącej $K_i^n K_n' \parallel z^n$.

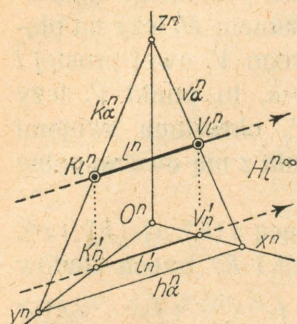
Ćwiczenie 6: Dla poprzedniego zadania wyznaczyć rzuty aksonometryczne l_n'' i l_n''' omawianej prostej l .

Ćwiczenie 7: Na danej płaszczyźnie α (h_a^n, k_a^n) leży prosta l , której rzut l'_n jest podany. Wyznaczyć aksonometrię l^n tej prostej.

Ćwiczenie 8: Rozwiązać poprzednie ćwiczenie, skoro dane są elementy:

a) α (v_a^n, k_a^n) i l'_n , b) α (v_a^n, k_a^n) i l''_n , c) α (h_a^n, k_a^n) i l''_n .

Zadanie 3: Na danej płaszczyźnie α (h_a^n, v_a^n) przyjąć prostą l , równoległą do śladu poziomego h_a tej płaszczyzny.

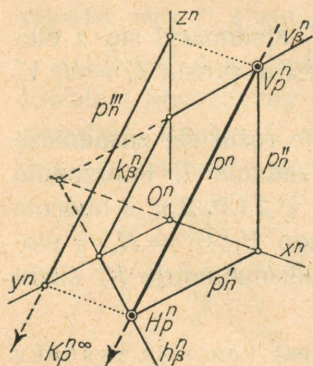


Rys. 74.

Rozwiązanie: Skoro prosta l jest równoległą do śladu poziomego h_a , to jest ona równoległą też i do rzutni poziomej π_1 . Rzuty aksonometryczne l^n i l'_n tej prostej (rys. 74) są zatem (ust. 9 i 20) równoległe do aksonometrii h_a^n śladu poziomego h_a , a dwa pozostałe rzuty $l''_n \parallel x_n$ i $l'''_n \parallel y_n$ przecinają się na osi aksonometrycznej z^n .

Ćwiczenie 9: Narysować rzuty aksonometryczne prostej p , która leży na płaszczyźnie β (h_β^n, v_β^n) i jest równoległą do śladu bocznego k_β (rys. 75) lub do śladu pionowego v_β (rys. 76) tej płaszczyzny.

28. Punkty, leżące na danej płaszczyźnie. Niechaj daną będzie płaszczyzna $\alpha = bc$, wyznaczona przez dwie proste przecinające się (rys. 70) lub równoległe (rys. 71) b (b^n, b'_n) i c (c^n, c'_n). Przy pomocy punktów 1 ($1^n, 1'_n$) i 2 ($2^n, 2'_n$), z których pierwszy przynależy do prostej b , a drugi do prostej c , — wyznaczyliśmy rzuty aksonometryczne l^n i l'_n takiej prostej l , która leży na płaszczyźnie $\alpha = bc$. Każdy punkt tej prostej l , a zatem i punkt P (P^n, P'_n) leży na płaszczyźnie α .



Rys. 75.

Zadanie 1: Na płaszczyźnie $\alpha = bc$ leży punkt P , którego rzut P'_n jest dany. Wyznaczyć aksonometrię P^n owego punktu P .

Rozwiązanie: Przez punkt P'_n (rys. 70 i 71) poprowadźmy dowolną prostą l'_n i uważajmy ją za aksonometrię rzutu poziomego l' pewnej prostej pomocniczej l , która leży na płaszczyźnie $\alpha = bc$. Skonstruujmy punkty $1'_n = l'_n b'_n$ i $2'_n = l'_n c'_n$, a następnie punkty 1^n i 2^n , leżące na prostych b^n względnie c^n , przyczem $1'_n 1^n \parallel 2'_n 2^n \parallel z^n$. Otrzymana w ten sposób prosta $l^n = 1^n 2^n$ jest aksonometrią prostej l , która przynależy do płaszczyzny $\alpha = bc$. Odnosząca

$P'_n P^n$, poprowadzona z punktu P'_n równoległe do osi aksonometrycznej z^n , przecina się z elementem l^n w szukanym punkcie P^n .

Położenie elementu P^n nie jest wcale zależne od przyjętej prostej pomocniczej l (l^n, l'_n). Gdybyśmy bowiem (w sposób omówiony

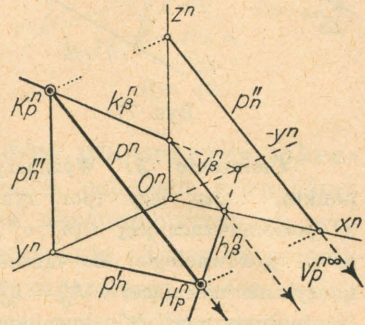
powyżej) obrali na danej płaszczyźnie $\alpha = bc$ inną pomocniczą prostą p (p^n, p'_n), to w wyniku otrzymalibyśmy ten sam punkt P^n , jako aksonometrię uważanego punktu P . Aby się o tem przekonać, poprowadźmy (rys. 70 i 71) przez dany punkt P'_n prostą $d \perp \pi_a$ i wyznaczmy w przestrzeni punkt $P' = d\pi_1$, przebiecia się prostej d z rzutnią poziomą π_1 . Przez otrzymany rzut poziomy P' wykreślmy prostą $e \perp \pi_1$, to prosta e przebiega się z daną płaszczyzną $\alpha = bc$ w jednym ściśle określonym punkcie $P = ea$, spełniającym warunki zadania.

Korzystając z rozwiązania powyższego zadania, ustalić możemy następującą zależność:

Celem wyznaczenia dowolnego punktu P na danej płaszczyźnie α , należy skonstruować na tej płaszczyźnie najpierw pomocniczą prostą l , a następnie dopiero na tej prostej przyjąć ów dowolny punkt P .

Ćwiczenie 1: Dane są płaszczyzna $\alpha = bc$ i aksonometria P^n punktu P , który leży na tej płaszczyźnie. Skonstruować (rys. 70 i 71) rzut aksonometryczny P'_n owego punktu.

Ćwiczenie 2: Rozwiązać ćwiczenie poprzednie dla takiego punktu P , którego aksonometria P^n leży: a) na prostej b'_n , b) na osi x^n , c) na osi y^n .



Rys. 76.

Zadanie 2: Na danej płaszczyźnie α (h_a^n, v_a^n) leży punkt P , którego aksonometria P^n jest elementem danym; skonstruować rzut P'_n owego punktu.

Rozwiązanie: Przez punkt P^n poprowadźmy (rys. 72) dowolną prostą l^n i uważajmy ją za aksonometrię prostokątnej pomocniczej prostej l , która leży na płaszczyźnie α (h_a^n, v_a^n). Punkty $H_i^n = l^n h_a^n$ i $V_i^n = l^n v_a^n$ są aksonometrijami śladów poziomego H_i i pionowego V_i prostej l . Odnosząc $V_i^n V'_n \parallel z^n$ wyznaczy na osi x^n punkt V'_n , który wraz z elementem $H_i^n = H'_n$ określa rzut aksonometryczny $l'_n = V'_n H_i^n$ uważanej prostej l . Na otrzymanej prostej l'_n leżeć musi rzut P'_n punktu P .

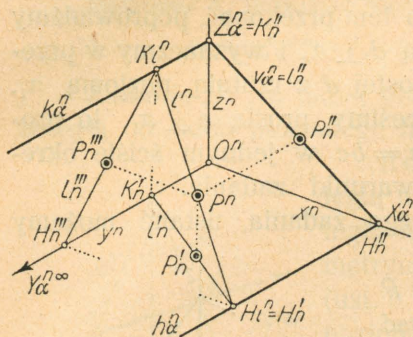
Ćwiczenie 3: Dla punktu P , który leży na danej płaszczyźnie α (h_a^n, v_a^n), znany jest rzut aksonometryczny P'_n . Należy skonstruować (rys. 72) aksonometrię P^n tego punktu.

Ćwiczenie 4: Rozwiązać ćwicz. 3, skoro dla punktu P dany jest rzut P''_n lub P'''_n .

Zadanie 3: Dana jest aksonometria P^n punktu P , który leży na płaszczyźnie pionowo-rzucającej α ($h_a^n \parallel y^n, v_a^n$). Wyznaczyć dalsze rzuty aksonometryczne punktu P .

Rozwiązanie: Na rys. 77 wykreślono, w sposób omówiony w zad. 2, rzuty aksonometryczne pomocniczej prostej l , która leży na płaszczyźnie $\alpha \perp \pi_2$, a następnie wyznaczono rzuty P'_n, P''_n i P'''_n uważanego punktu P . Z przeprowadzonej konstrukcji wynika bezpośrednio, że aksonometria l''_n

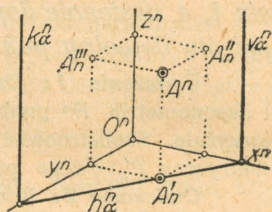
rzutu pionowego l'' prostej l zjednoczyła się z elementem v_a^n , a tem samem rzut P''_n punktu P przynależy też do aksonometrii v_a^n śladu pionowego v_a płaszczyzny pionowo-rzucającej α .



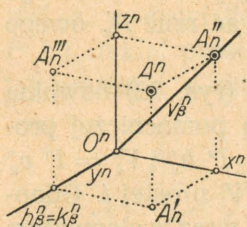
Rys. 77.

Wnosimy stąd, że: dla płaszczyzn rzucających konstrukcja upraszcza się, gdyż zbyteczne jest posługiwanie się prostą pomocniczą l . Wystarczy bowiem przez dany punkt P^n poprowadzić (rys. 77) odnoszącą $P^n P''_n \parallel y^n$ i wyznaczyć na prostej v^n rzut P''_n . Dalsze rzuty aksonometryczne punktu P (P^n, P''_n) znajdziemy w sposób, omówiony w ust. 14.

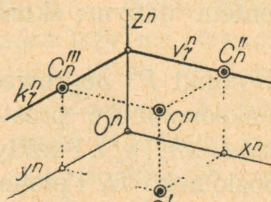
Ćwiczenie 5: Wyznaczyć rzuty aksonometryczne punktu, który leży (por. rys. 78—81) na płaszczyźnie: a) poziomo-rzucającej α ($h_a^n, v_a^n \parallel z^n$), b) przechodzącej przez oś y , c) równoległej do rzutni poziomej π_1 , d) aksonometrycznie-rzucającej δ ($h_\delta^n = v_\delta^n = k_\delta^n$). W przypadku d) przyjąć możemy rzut D'_n dowolnie, ale aksonometrię D^n koniecznien na prostej h_δ^n .



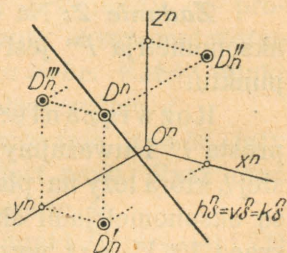
Rys. 78.



Rys. 79.



Rys. 80.

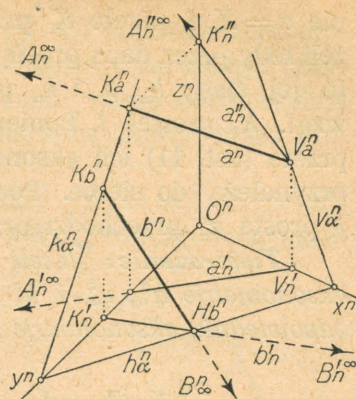


Rys. 81.

29. Aksonometrie prostej niewłaściwej. Na rys. 82 wykreślone są aksonometrie h_a^n, v_a^n i k_a^n trzech śladów dowolnej płaszczyzny α , oraz rzuty aksonometryczne a'', a'_n, a''_n i b'', b'_n, b''_n dwóch prostych a i b , które leżą na płaszczyźnie α . W myśl rozważań ust. 22 wyznaczono aksonometrie prostokątne punktów niewłaściwych A^∞ i B^∞ , z których pierwszy przynależy do prostej a , drugi zaś do prostej b . Punkty owe określają jedną i tylko jedną prostą niewłaściwą $l^\infty = A^\infty B^\infty$, która leży równocześnie i na płaszczyźnie α , bo ma z nią dwa wspólne punkty A^∞ i B^∞ . Wiadomo nam jednak, że dla prostej niewłaściwej l^∞ (ust. 11) jej rzuty aksonometryczne muszą być prostami niewłaściwymi: l^n_∞, l'^n_∞ ,

l_n'''' i l_n'''''' , które zjednoczyły się z prostą niewłaściwą płaszczyzny rysunkowej (rzutni aksonometrycznej) π_a .

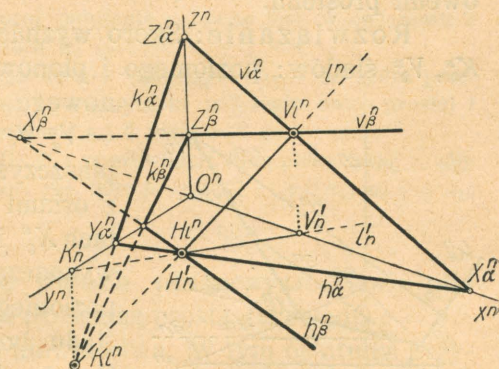
Chcąc zatem w metodzie aksonometrii prostokątnej ustalić położenie prostej niewłaściwej l^∞ , należy podać: 1) aksonometrię dwóch punktów niewłaściwych A^∞ i B^∞ (które są „kierunkami” dwóch prostych właściwych a i b), albo też 2) aksonometrię śladów płaszczyzny właściwej a . W tym drugim przypadku „ustawienie” płaszczyzny a określa (ust. 5) jedną i tylko jedną prostą niewłaściwą.



Rys. 82.

30. Wyznaczenie aksonometrii śladów płaszczyzny, określonej prostemi i punktami. W poprzednich ustępach poznaliśmy sposoby konstrukcyjnego wyznaczenia rzutów aksonometrycznych prostych i punktów, które leżały na danej płaszczyźnie. Teraz zajmujemy się problemem przeciwnym, a mianowicie wyznaczeniem aksonometrii h_a^n , v_a^n i k_a^n trzech śladów płaszczyzny a , która przechodzi przez dane proste i punkty.

Niechaj daną będzie (rys. 83) dowolna prosta l (l^n , l_n'), dla której punkty $H_l^n = l^n l_n'$, V_l^n i K_l^n są aksonometriami trzech jej śladów: poziomego H_l , pionowego V_l i bocznego K_l . Skoro na osi x oberzemy dowolny punkt X_a , którego aksonometrią jest element X_a^n przynależny do osi aksonometrycznej x^n , to punkt X_a i prosta l określają jedną i tylko jedną płaszczyznę $a = X_a l$. Dla tej płaszczyzny prosta $h_a = H_l X_a$ jest oczywiście śladem poziomym, a prosta $v_a = V_l X_a$, śladem pionowym. Proste $h_a^n = H_l^n X_a^n$ i $v_a^n = V_l^n X_a^n$, które są aksonometriami owych śladów, przecinają się z osiami y^n i z^n w punktach $Y_a^n = h_a^n y^n$ i $Z_a^n = v_a^n z^n$.

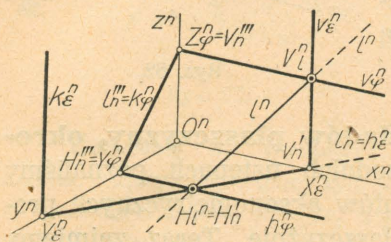


Rys. 83.

Uważając owe punkty za aksonometrię punktów Y_a i Z_a , z których pierwszy leży na osi y , a drugi na osi z , otrzymamy prostą $Y_a Z_a = k_a$, leżącą na rzutni bocznej π_3 i na uważanej płaszczyźnie $a = X_a l$. Prosta k_a jest zatem śladem bocznym tej płaszczyzny a . Ponieważ ślad boczny $K_l = l \pi_3$ prostej l leży równocześnie na rzutni π_3 i na płaszczyźnie

nie $\alpha = X_a l$, przeto K_l przynależy też do śladu bocznego $k_a = Y_a Z_a$. Jeżeli tedy przez daną prostą l (l^n, l'_n) poprowadzimy dowolną płaszczyznę α , to jej ślady h_a, v_a i k_a przechodzą odpowiednio przez ślady H_l, V_l , wzgl. K_l prostej l . Ponieważ elementy h_a i H_l przynależą do siebie, przeto (ust. 11) ich aksonometrie h_a^n i H_l^n są elementami, które również przynależą do siebie. Podobnie prosta v_a^n przechodzi przez punkt V_l^n , a prosta k_a^n przechodzi przez punkt K_l^n .

Twierdzenie: Jeżeli płaszczyzna α przechodzi przez prostą l , to aksonometrie h_a^n, v_a^n i k_a^n trzech śladów tej płaszczyzny przechodzą przez odpowiednie aksonometrie H_l^n, V_l^n , wzgl. K_l^n śladów owej prostej.



Rys. 84.

Przez prostą l poprowadzić można nieograniczoną ilość płaszczyzn, które tworzą t. zw. pęk płaszczyzn o osi l . Na rys. 83 wykreślono aksonometrie śladów dwóch dowolnych płaszczyzn α i β , a na rys. 84. wyznaczono aksonometrie śladów płaszczyzny poziomo-rzucającej ε i boczno-rzucającej φ . Z rys. ostatniego czytamy:

Skoro przez dowolną prostą l przechodzi płaszczyzna poziomo-rzucająca, to aksonometria śladu poziomego tej płaszczyzny nakrywa się z aksonometrią rzutu poziomego owej prostej.

Zadanie 1: Dane są dwie proste równoległe a (a^n, a'_n) i b (b^n, b'_n). Wyznaczyć aksonometrie trzech śladów płaszczyzny $\varepsilon = ab$, określonej owemi prostymi.

Rozwiązanie: Skoro wyznaczymy (rys. 85) aksonometrie $H_a^n, V_a^n, K_b^n, V_b^n$ śladów: poziomego i pionowego prostej a , oraz bocznego i pionowego prostej b , to wówczas prosta $v_\varepsilon^n = V_a^n V_b^n$ jest aksonometrią śladu pionowego płaszczyzny $\varepsilon = ab$. Prosta v_ε^n przecina się z osiami aksonometrycznymi x^n i z^n w punktach X_ε^n i Z_ε^n , które wraz z elementami H_a^n i K_b^n wyznaczają aksonometrię $h_\varepsilon^n = X_\varepsilon^n H_a^n$ śladu poziomego h_ε i aksonometrię $k_\varepsilon^n = Z_\varepsilon^n K_b^n$ śladu bocznego k_ε szukanej płaszczyzny ε . Kontrola rysunku: O ile konstrukcja jest dokładnie przeprowadzoną, to otrzymane powyżej proste h_ε^n i k_ε^n przecinają się w punkcie Y_ε^n , który przynależy do osi aksonometrycznej y^n .

Zadanie 2: Dla płaszczyzny $\varepsilon = aC$, określonej prostą a (a^n, a'_n) i punktem C (C^n, C'_n), wyznaczyć aksonometrie $h_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n$ i k_ε^n trzech jej śladów.

Rozwiązanie: Przez dany punkt C (rys. 85) poprowadźmy prostą b równoległą do danej prostej a (a^n, a'_n). Skoro wykreślimy rzuty $b^n \parallel a^n$ i $b'_n \parallel a'_n$ pomocniczej prostej b , to zadanie nasze sprowadzimy do zadania 1, gdyż płaszczyzna $\varepsilon = ab$ wyznaczoną będzie przez proste $a \parallel b$.

Zadanie 3: Dane są trzy dowolne punkty: $A(A^n, A'_n)$, $B(B^n, B'_n)$ i $C(C^n, C'_n)$, które wyznaczają płaszczyznę $\alpha = ABC$. Skonstruować aksonometrię h_α^n, v_α^n i k_α^n śladów tej płaszczyzny.

Rozwiązanie: Punkty A i B wyznaczają prostą a ($a^n = A^n B^n, a'_n = A'_n B'_n$), podobnie punkty A i C prostą c ($c^n = A^n C^n, c'_n = A'_n C'_n$). Otrzymane w ten sposób dwie proste a i c , przecinające się w punkcie A , określają jedną i tylko jedną płaszczyznę $\alpha = ac$, która spełnia warunki zadania.

Ćwiczenie 1: Przez dany punkt $A(A'_n, A''_n)$ przechodzą (rys. 86) dwie proste $a(a'_n, a''_n)$ i $b(b'_n \parallel y^n, b''_n \parallel y''_n)$. Wyznaczyć aksonometrię $h_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n$ i k_ε^n płaszczyzny $\varepsilon = ab$, określonej owymi prostymi a i b .

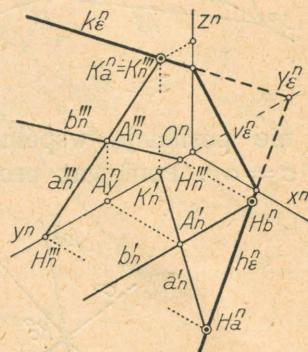
Ćwiczenie 2: Wyznaczyć aksonometrię trzech śladów płaszczyzny $\alpha = ABC$, skoro dane są punkty:

- | | |
|--|--|
| a) $A(A^n, A''_n), B(B^n, B''_n), C(C^n, C''_n)$; | e) $A(A^n = A'_n), B(B^n, B'_n), C(C^n, C'_n)$; |
| b) $A(A^n, A''_n), B(B^n, B''_n), C(C^n, C''_n)$; | f) $A(A^n = A'_n), B(B^n = B'_n), C(C^n, C'_n)$; |
| c) $A(A'_n, A''_n), B(B'_n, B''_n), C(C'_n, C''_n)$; | g) $A(A^n = A'_n), B(B^n = B''_n), C(C^n = C''_n)$; |
| d) $A(A'_n, A''_n), B(B'_n, B''_n), C(C''_n, C''_n)$; | h) $A(A^n = A''_n), B(B^n = B''_n), C(C^n, C'_n)$. |

Ćwiczenie 3: Dla płaszczyzny α , której położenie ustalone jest w ćwiczeniu 2 ustępu 27-go, skonstruować aksonometrię trzech jej śladów.

Ćwiczenie 4: Wyznaczyć aksonometrię śladów płaszczyzny $\alpha = Al$, która przechodzi przez dany punkt $A(A^n, A'_n)$ i prostą l — przy czym położenie owej prostej l ustalone jest warunkami, podanymi w ćwiczeniach 4 i 5 ustępu 21-go.

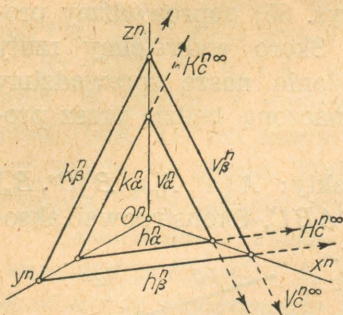
Ćwiczenie 5: Przez dany punkt $C(C^n, C'_n)$ poprowadzić taką płaszczyznę γ , aby spełniała następujący warunek: a) $\gamma \parallel \pi_1$ (por. rys. 80); b) $\gamma \parallel \pi_2$; c) $\gamma \parallel \pi_3$; d) $\gamma \perp \pi_1$; e) $\gamma \perp \pi_2$; f) $\gamma \perp \pi_3$; g) $\gamma \perp \pi_\alpha$.



Rys. 86.

31. Krawędź przecięcia się dwóch płaszczyzn. Dwie płaszczyzny α i β wyznaczają jedną ściśle określoną prostą (krawędź) $c = \alpha\beta$, która może być prostą właściwą lub niewłaściwą. W tym ostatnim przypadku (ust. 5) uważane płaszczyzny są równoległe czyli $\alpha \parallel \beta$ posiadają jedno i to samo „ustawienie“.

Dwie płaszczyzny równoległe $\alpha \parallel \beta$ przetnijmy rzutnią poziomą π_1 , to otrzymamy (ust. 5) dwie równoległe do siebie krawędzie $h_\alpha = \alpha\pi_1$ i $h_\beta = \beta\pi_1$. Skoro owe płaszczyzny przetniemy rzutniami pionową π_2 i boczną π_3 , to pomiędzy śladami pionowymi i bocznymi tych płaszczyzn wystąpią zależności: $v_\alpha \parallel v_\beta, k_\alpha \parallel k_\beta$. Ponieważ aksonometrię prostych

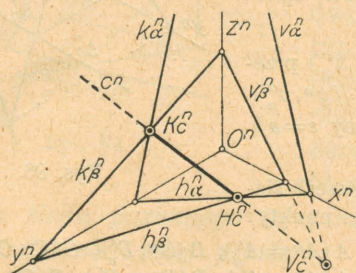


Rys. 87.

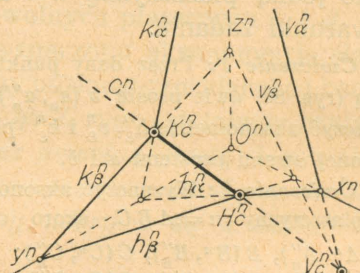
równoległych są (ust. 11) prostami równoległymi, przeto aksonometrije jednoimiennych śladów przyjętych płaszczyzn $\alpha \parallel \beta$ spełniają (rys. 87) następujące warunki: $h_\alpha^n \parallel h_\beta^n$, $v_\alpha^n \parallel v_\beta^n$, $k_\alpha^n \parallel k_\beta^n$. Możemy tedy wypowiedzieć

Twierdzenie: Dla płaszczyzn równoległych aksonometrije ich jednoimiennych śladów (poziomych, pionowych wzgl. bocznych) są prostami równoległymi.

Niechaj dane będą (rys. 88) dwie dowolne płaszczyzny α (h_α^n , v_α^n) i β (h_β^n , v_β^n), które nie posiadają wspólnego „ustawienia“ i przecinają się w krawędzi $c = \alpha\beta$. Ponieważ prosta właściwa c przynależy równocześnie do pła-



Rys. 88.



Rys. 89.

szczyzn α i β , przeto (ust. 27) aksonometrija H_c^n śladu poziomego H_c owej krawędzi c leżeć musi na aksonometriach h_α^n i h_β^n śladów poziomych danych płaszczyzn α i β . Punkt $H_c^n = h_\alpha^n h_\beta^n$, przecięcia się prostych h_α^n i h_β^n , jest zatem (rys. 88) aksonometrią śladu poziomego H_c krawędzi $c = \alpha\beta$. Z tych samych względów punkty: $V_c^n = v_\alpha^n v_\beta^n$ i $K_c^n = k_\alpha^n k_\beta^n$ są obrazami aksonometrycznymi śladów pionowego V_c i boczego K_c owej krawędzi $c = \alpha\beta$. Otrzymane w ten sposób punkty H_c^n , V_c^n i K_c^n leżą na jednej i tylko jednej prostej, a mianowicie na aksonometrii c^n szukanej krawędzi c .

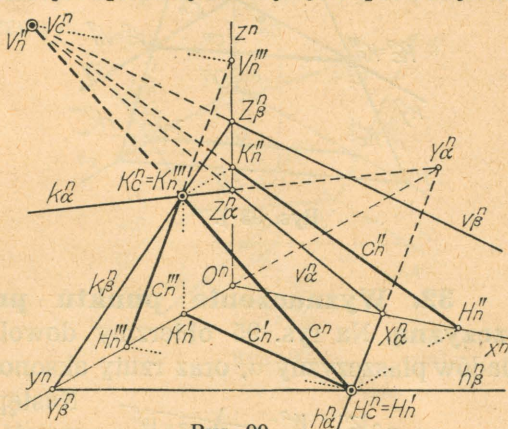
Twierdzenie: Aksonometrije śladów poziomych (pionowych wzgl. bocznych) dwóch danych płaszczyzn przecinają się w punkcie, który jest aksonometrią śladu poziomego (pionowego wzgl. boczego) krawędzi przecięcia się tych płaszczyzn.

Na rys. 88 i 89 punkty H_c^n , V_c^n i K_c^n są punktami właściwymi, natomiast na rys. 87 owe punkty są elementami niewłaściwymi, gdyż są obrazami aksonometrycznymi śladów H_c^∞ , V_c^∞ i K_c^∞ prostej niewłaściwej $c^\infty = \alpha\beta$. Na wymienionych rysunkach uwzględniono części widoczne i niewidoczne danych i wynikowych elementów przy założeniu, że rzut-

nie: π_1 , π_2 i π_3 są nieprzeźroczyste. Na ostatnim rysunku (89) przyjęto również, że dane płaszczyzny α i β są też nieprzeźroczyste.

Zadanie 1: Dane są dwie płaszczyzny α (h_α^n, v_α^n) i β (h_β^n, v_β^n). Wyznaczyć rzuty aksonometryczne krawędzi przecięcia się tych płaszczyzn.

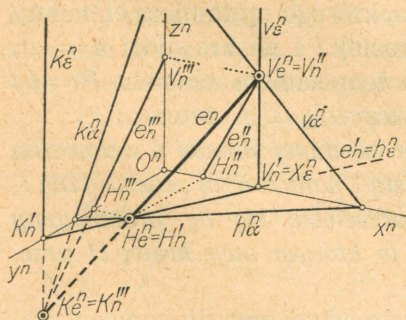
Rozwiązanie: Proste h_α^n i h_β^n przecinają się (rys. 90) w aksonometrii $H_c^n = h_\alpha^n h_\beta^n$ śladu poziomego krawędzi $c = \alpha\beta$. Podobnie punkt $V_c^n = v_\alpha^n v_\beta^n$ jest aksonometrią śladu pionowego V_c , a punkt $K_c^n = k_\alpha^n k_\beta^n$ jest obrazem aksonometrycznym śladu bocznego K_c krawędzi c . Punkty H_c^n , V_c^n i K_c^n przynależą do aksonometrii c^n szukanej krawędzi c . Skonstruowanie dalszych rzutów c'_n , c''_n i c'''_n prostej c nie następuje żadnych trudności.



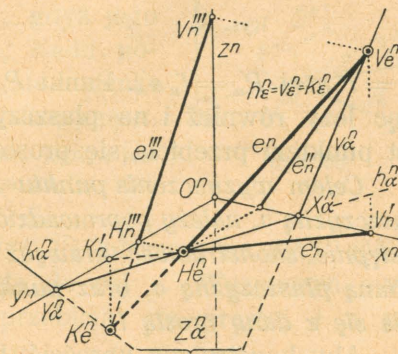
Rys. 90.

Zadanie 2: Wyznaczyć rzuty aksonometryczne krawędzi przecięcia się dowolnej płaszczyzny α (h_α^n, v_α^n) z płaszczyzną poziomo-rzucającą ε ($h_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n$).

Rozwiązanie: Punkty $H_e^n = h_\alpha^n h_\varepsilon^n$, $V_e^n = v_\alpha^n v_\varepsilon^n$ i $K_e^n = k_\alpha^n k_\varepsilon^n$ są aksonometriami trzech śladów krawędzi $e = \alpha\varepsilon$. Ponieważ jednak element ε jest (rys. 91) płaszczyzną poziomo-rzucającą, przeto (ust. 27) aksonometria e'_n (rzutu poziomego e' szukanej krawędzi $e = \alpha\varepsilon$) nakrywa się z prostą h_ε^n . Dalsze rzuty aksonometryczne krawędzi e są prostymi: $e^n = H_e^n V_e^n$, $e''_n = V_e^n H''_n$, $e'''_n = H''_n V'''_n$.



Rys. 91.

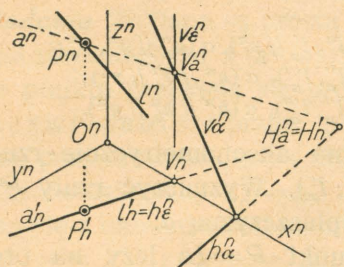


Rys. 92.

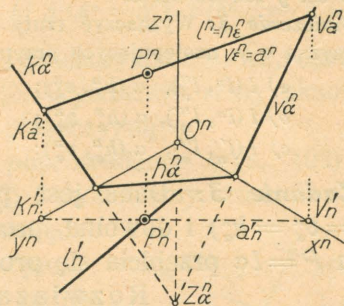
Ćwiczenie 1: Rozwiązać poprzednie zadanie wówczas, skoro dana płaszczyzna ε ($h_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n$) jest płaszczyzną: a) pionowo-rzucającą, b) boczno-rzucającą, c) przechodzącą przez oś z , d) aksonometrycznie-rzucającą (rys. 92).

Ćwiczenie 2: Wyznaczyć aksonometrię krawędzi przecięcia się dowolnej płaszczyzny α (h_α^n, v_α^n) z płaszczyzną γ w przypadkach następujących: a) $\gamma \parallel \pi_1$ (rys. 93), b) $\gamma \parallel \pi_2$, c) $\gamma \parallel \pi_3$.

stałą l (l^n, l'_n) poprowadziliśmy płaszczyznę aksonometrycznie-rzucającą ε ($h_\varepsilon^n = v_\varepsilon^n = l^n$), skonstruowaliśmy krawędź a ($a^n = l^n, a'_n$) przecięcia się tych płaszczyzn α i ε , oraz punkt P ($P'_n = a'_n l'_n, P^n$) przecięcia się prostych a i l . Otrzymany w ten sposób punkt P (P'_n, P^n) jest punktem przebiecia się prostej l z płaszczyzną α .



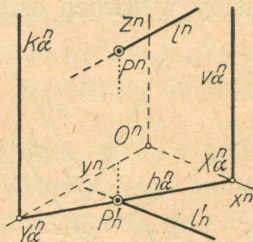
Rys. 96.



Rys. 97.

Zadanie 1: Dane są dowolna prosta $l(l^n, l'_n)$ i płaszczyzna poziomo-rzucająca $\alpha(h^n, v^n)$. Wyznaczyć rzuty aksonometryczne punktu przecięcia się prostej l z płaszczyzną α .

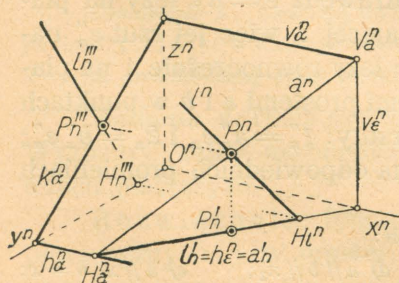
Rozwiązanie: Punkt $P'_n = l'_n h'_a$, w którym (rys. 98) przecinają się proste l'_n i h'_a , uważamy za aksonometrię rzutu poziomego P' punktu P , leżącego na danej prostej l . Odnosząc $P'_n P'_n \parallel z^n$ przecina element l^n w punkcie P^n , który jest aksonometrią owego punktu P . Z łatwością zauważymy jednak, że otrzymany w ten sposób punkt P (P^n, P'_n) leży na płaszczyźnie $\alpha \perp \pi_1$, gdyż jego rzut P'_n przynależy do aksonometrii h'_a śladu poziomego płaszczyzny α . Element P jest zatem punktem $P = l\alpha$ przebiecia się prostej l z płaszczyzną α .



Rys. 98.

Ćwiczenie 1: Rozwiązać powyższe zadanie, jeśli a jest płaszczyzną: a) pionowo-rzucającą, b) boczno-rzucającą (rys. 99), c) przechodzącą przez oś z (względnie y , lub x).

Zadanie 2: Dane są dowolna prosta l (l^n, l'_n) i płaszczyzna α ($h^n_\alpha // v^n_\alpha // x^n$) równoległa do osi x . Wyznaczyć punkt $P = l \cap \alpha$ przebiecia się prostej l z płaszczyzną α .



Rys. 99.

Rozwiązanie 1: Skoro przez prostą l (l^n , l'_n) poprowadzimy (rys. 99) płaszczyznę poziomo-rzucającą ε ($h_\varepsilon^n = l'_n$, v_ε^n) i wyznaczmy krawędź a ($a' = h_\varepsilon^n$, a^n) przecięcia się płaszczyzn α i ε , to punkt P ($P^n = l^n a^n$, P'_n) rozwiązuje zadanie.

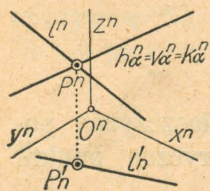
Rozwiązanie 2: Gdyby dany był rzut l_n''' prostej l , to punkt $P_n''' = l_n''' k_a^n$ byłby aksonometrią (porównaj zad. 1) rzutu bocznego P''' szukanego punktu $P = l \alpha$.

Ćwiczenie 2: Rozwiązać poprzednie zadanie dla płaszczyzny α , która jest równoległą do osi y lub do osi z .

Ćwiczenie 3: Wyznaczyć rzuty aksonometryczne punktu przebiecia się prostej l z płaszczyzną α w następujących przypadkach:

- | | |
|--|--|
| a) $l(l^n, l_n''), \alpha(h_a^n, v_a^n);$ | d) $l(l^n, l_n' // x^n), \alpha(h_a^n // y^n, v_a^n);$ |
| b) $l(l^n, l_n''), \alpha(h_a^n, k_a^n);$ | e) $l(l_n'', l_n'''), \alpha(k_a^n // v_a^n // z^n);$ |
| c) $l(l_n', l_n''), \alpha(h_a^n, v_a^n);$ | f) $l(l_n'', l_n'''), \alpha(h_a^n // k_a^n // y^n).$ |

Zadanie 3: Dana jest płaszczyzna aksonometrycznie-rzucająca $\alpha(h_a^n = v_a^n = k_a^n)$ i dowolna prosta $l(l^n, l_n')$. Wyznaczyć rzuty P^n i P_n' punktu $P = l \alpha$ przebiecia się prostej l z płaszczyzną α .



Rys. 100.

Rozwiązanie: Punkt $P = l \alpha$ leży na prostej l i na płaszczyźnie $\alpha \perp \pi_a$, więc jego aksonometria P^n leżeć musi (rys. 100) na rzucie l^n i na prostej $h_a^n = v_a^n = k_a^n$. Z otrzymanego w ten sposób punktu $P^n = l^n h_a^n$ wykreślimy odnoszącą $P^n P_n' // z^n$, to ona przetnie się z rzutem l_n' w aksonometrii P_n' rzutu poziomego P' szukanego punktu P .

33. Zadania i ćwiczenia. Przy pomocy konstrukcji, które poznaliśmy w dwóch ostatnich ustępach, rozwiązać możemy następujące

Zadanie 1: Dane są płaszczyzna $\alpha = ab$, określona przez dwie proste równoległe $a(a^n, a_n'')$ i $b(b^n, b_n'')$, oraz płaszczyzna pionowo-rzucająca $\varepsilon(h_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n)$. Skonstruować krawędź przecięcia się płaszczyzn α i ε .

Rozwiązanie 1: Wyznamy (ust. 32) punkty $1 = a\varepsilon$ i $2 = b\varepsilon$ przebiecia się danych prostych a i b z płaszczyzną $\varepsilon \perp \pi_2$. Prosta $e = 12$, której aksonometriami są (rys. 101) elementy $e^n = 1^n 2^n$ i $e_n'' = 1_n'' 2_n''$, jest krawędzią przecięcia się danych płaszczyzn $\alpha = ab$ i ε .

Rozwiązanie 2: Krawędź $e = a\varepsilon$ leży na płaszczyźnie pionowo-rzucającej ε , więc jej rzut e_n'' nakrywa się z prostą v_ε^n . Ponieważ krawędź e leży równocześnie i na płaszczyźnie $\alpha = ab$, przeto przecina się z danymi prostymi a i b w punktach $1 = ae$ i $2 = be$. Dla tych punktów znane są rzuty: $1_n'' = a_n'' e_n''$ i $2_n'' = b_n'' e_n''$; aksonetrie 1^n i 2^n owych punktów leżą na odpowiednich promieniach a^n i b^n .

Ćwiczenie 1: Rozwiązać zadanie 1 dla prostych:

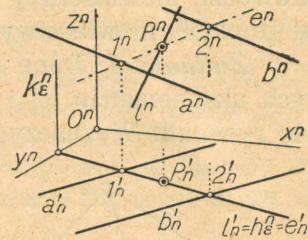
- | | | | | |
|-------------------|---------------------|-----------------------------|-----------------------|---------------------|
| a) $a // b // z;$ | b) $a // b // x;$ | c) $a // b // \pi_1;$ | d) $a // b // \pi_3;$ | e) $a // x, b = x;$ |
| | f) $a // z, b = z;$ | g) $a(a^n = a_n'), b // a.$ | | |

Ćwiczenie 2: Rozwiązać zadanie 1 wówczas, skoro dana płaszczyzna α określona jest elementami:

- | | |
|--|--|
| a) $A (A^n = A''_n), B (B^n, B''_n), C (C^n, C''_n);$ | e) $A (A^n = A''_n), b (b^n, b''_n);$ |
| b) $A (A^n = A''_n), B (B^n = B'_n), C (C^n = C'''_n);$ | f) $A (A^n = A''_n), b (b^n, b''_n);$ |
| c) $A (A^n = A'_n = A''_n), B (B^n, B''_n), C (C^n, C''_n);$ | g) $A (A^n = A'_n), b (b^n // b''_n);$ |
| d) $A (A^n = A''_n = A'''_n), B (B^n, B''_n), C (C^n, C''_n);$ | h) $A (A^n = A'_n), b (b^n // x^n, b'_n).$ |

Zadanie 2: Dane są prosta $l (l^n, l'_n)$ i płaszczyzna $\alpha = ab$, określona prostymi równoległymi $a (a^n, a'_n)$ i $b (b^n, b'_n)$. Wyznaczyć rzuty aksonometryczne punktu przecięcia się prostej l z płaszczyzną α .

Rozwiązanie: przez prostą l poprowadzmy (rys. 102) płaszczyznę poziomo-rzucającą $\varepsilon (h_\varepsilon^n = l'_n, k_\varepsilon^n)$ i wyznaczmy krawędź $e = \alpha \varepsilon$. Rzut aksonometryczny $e'_n = h_\varepsilon^n$ owej krawędzi przecina się z danymi elementami a'_n, b'_n w punktach $1'_n = e'_n a'_n$ i $2'_n = e'_n b'_n$. Aksonometria $e^n = 1^n 2^n$ pomocniczej krawędzi e wyznacza na prostej l^n punkt $P^n = l^n e^n$, który jest obrazem aksonometrycznym wynikowego punktu $P = l \alpha$.



Rys. 102.

Ćwiczenie 3: Rozwiązać zadanie 2 wówczas, jeżeli położenie płaszczyzny α określone jest warunkami, podanymi w ćwiczeniach 1 i 2.

Zadanie 3: Dane są dwie płaszczyzny $\alpha = ab$ i $\beta = lm$, z których pierwsza wyznaczoną jest przez dwie proste równoległe $a (a^n, a'_n)$ i $b (b^n, b'_n)$ a druga przez dwie proste przecinające się $l (l^n, l'_n)$ i $m (m^n, m'_n)$. Skonstruować rzuty aksonometryczne krawędzi $k = \alpha \beta$, przecięcia się tych płaszczyzn.

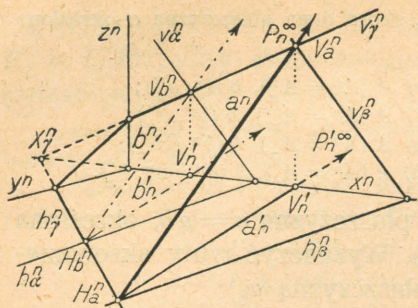
Rozwiązanie: Prosta $l (l^n, l'_n)$ przebija płaszczyznę $\alpha = ab$ (por. rys. 102) w punkcie $P = l \alpha$. W podobny sposób wyznaczymy punkt $R = m \alpha$ przecięcia się danej prostej $m (m^n, m'_n)$ z płaszczyzną $\alpha = ab$. Prosta $k = PR$ jest szukaną krawędzią, gdyż posiada dwa punkty P i R wspólne z płaszczyznami α i β .

Ćwiczenie 4: Rozwiązać poprzednie zadanie, jeżeli płaszczyzna β określona jest przez aksonometrię h_β^n i v_β^n dwóch swoich śladów.

Ćwiczenie 5: Dane są dwie proste równoległe $a (a^n, a''_n)$, $b (b^n, b''_n)$ i dowolny punkt $C (C^n, C''_n)$. Wyznaczyć krawędź przecięcia się płaszczyzny $\alpha = ab$ z płaszczyzną $\beta = Cx$, przechodzącą przez punkt C i przez oś x .

Zadanie 4: Dane są trzy płaszczyzny $\alpha (h_\alpha^n, v_\alpha^n)$, $\beta (h_\beta^n, v_\beta^n)$ i $\gamma (h_\gamma^n, v_\gamma^n)$. Wyznaczyć rzuty aksonometryczne punktu $P = \alpha \beta \gamma$ przecięcia się tych trzech płaszczyzn.

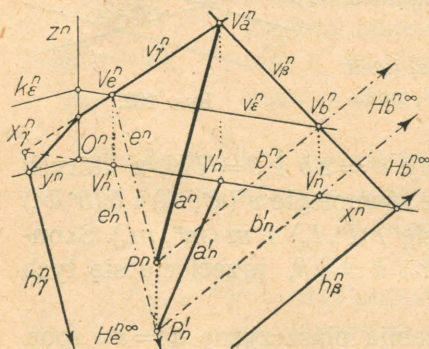
Rozwiązanie: Płaszczyzny α i β przecinają się w prostej $c = \alpha \beta$, płaszczyzny α i γ w prostej $b = \alpha \gamma$, a płaszczyzny β i γ w prostej $a = \beta \gamma$. Skonstruowane w ten sposób trzy krawędzie a , b i c przecinają się



Rys. 103.

krawędzi niewłaściwej $c^\infty = a\beta$. Płaszczyzny $\alpha \parallel \beta$ i γ przecinają się w punkcie niewłaściwym $P^\infty = a\beta\gamma$.

Zadanie 5: Dane są dwie płaszczyzny $\beta (h_\beta^n, v_\beta^n)$ i $\gamma (h_\gamma^n, v_\gamma^n)$, których aksonometrie h_β^n i h_γ^n śladów poziomych nie przecinają się w obrębie rysunku. Wyznaczyć rzuty aksonometryczne krawędzi $a = \beta\gamma$ przecięcia się tych płaszczyzn.



Rys. 104.

w żądanym punkcie P . Do wyznaczenia tego punktu P wystarczą oczywiście dwie krawędzie np. b i c , a trzecia krawędź a służy tylko do kontroli przeprowadzonej konstrukcji.

Na rys. 103 przyjęto dwie płaszczyzny $\alpha \parallel \beta$, które przecięliśmy dowolną płaszczyzną γ . Krawędzie $a = \gamma\beta$ i $b = \gamma\alpha$ są (ust. 5) prostymi równoległymi i przecinają się w punkcie niewłaściwym $P^\infty = a\beta$, który leży też na

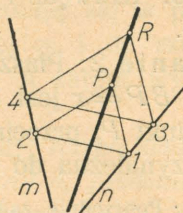
Rozwiązanie 1: Dla krawędzi a znany jest jeden punkt, a mianowicie (rys. 104) ślad pionowy $V_a (V_a^n = v_\beta^n v_\gamma^n, V_n')$ tej prostej. Aby wyznaczyć drugi punkt krawędzi $a = \beta\gamma$, poprowadźmy płaszczyznę np. $\varepsilon \parallel \pi_1$ i skonstruujmy punkt $P = \varepsilon\beta\gamma$ przecięcia się płaszczyzn ε, β i γ . Aksonometrie P^n i P_n' punktu P otrzymamy, jeśli wyznaczymy rzuty aksonometryczne krawędzi $b = \varepsilon\beta$ i $e = \varepsilon\gamma$. Ponieważ ślad poziomy płaszczyzny $\varepsilon \parallel \pi_1$ jest prostą niewłaściwą h_ε^∞ , przeto

aksonometria tego śladu jest również prostą niewłaściwą h_ε^∞ . Pomocnicze krawędzie $b = \varepsilon\beta$ i $e = \varepsilon\gamma$ są równoległe do rzutni poziomej π_1 , bo aksonometrie śladów poziomych tych prostych są punktami niewłaściwymi: $H_b^\infty = h_\beta^\infty h_\beta^n$ i $H_e^\infty = h_\varepsilon^\infty h_\gamma^n$. Przez punkty $V_b^n = v_\beta^n v_\beta^n$ i $V_e^n = v_\varepsilon^n v_\gamma^n$, które są aksonometrijami śladów pionowych krawędzi b i e , wykreślone proste $b^n \parallel h_\beta^\infty$ i $e^n \parallel h_\gamma^\infty$ przecinają się w punkcie P^n . Proste $b_n' = V_n' H_b^\infty$ i $e_n' = V_n' H_e^\infty$ przecinają się w punkcie P_n' . Otrzymane w ten sposób punkty P^n i P_n' są rzutami punktu $P = \varepsilon\beta\gamma$, przez który przejść musi krawędź $a = \beta\gamma$. Łącząc tedy ów punkt $P (P^n, P_n')$ ze śladem pionowym $V_a (V_a^n, V_n')$, otrzymamy żądaną krawędź $a (a^n = P^n V_a^n, a_n' = P_n' V_n')$.

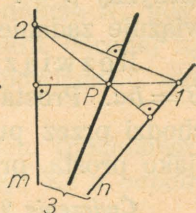
Rozwiązanie 2: Zamiast płaszczyzny $\varepsilon \parallel \pi_1$, użyć możemy do pomocy (por. rys. 103) płaszczyzny α równoległej np. do płaszczyzny β . Punkt przecięcia się trzech płaszczyzn α, β i γ będzie wówczas punktem

niewłaściwym $P^\infty = \alpha\beta\gamma$. Przez punkt P^∞ przejdą krawędzie $b = \alpha\gamma$ i $c^\infty = \alpha\beta$. Jeżeli tedy skonstruujemy krawędź b (b^n, b'_n) i przez punkt V_a ($V_a^n = v_\beta^n v_\gamma^n, V'_n$) poprowadzimy prostą $a \parallel b$, to otrzymana w ten sposób krawędź a ($a^n \parallel b^n, a'_n \parallel b'_n$) rozwiązuje zadanie.

Rozwiązanie 3: Aksonometrię a^n wynikowej krawędzi $a = \beta\gamma$ otrzymamy (rys. 104), jeśli punkt $V_a^n = v_\beta^n v_\gamma^n$ połączymy z punktem $H_a^n = h_\beta^n h_\gamma^n$, leżącym poza obrębem rysunku. Do tego celu zastosować możemy konstrukcje pomocnicze, podane na rys. 105 (podobieństwo trójkątów $P12$ i $R34$) lub na rys. 106 (wysokości trójkąta 123).



Rys. 105.



Rys. 106.

Ćwiczenie 6: Wyznaczyć krawędź przecięcia się dwóch danych płaszczyzn α (h_a^n, v_a^n) i β (h_β^n, v_β^n), jeśli aksonometrię śladów pionowych tych płaszczyzn nie przecinają się w obrębie rysunku.

Ćwiczenie 7: Rozwiązać ćwiczenie 6, jeżeli w obrębie rysunku nie przecinają się wcale ani proste h_a^n i h_β^n , ani też proste v_a^n i v_β^n . (Do konstrukcji użyć należy dwóch pomocniczych płaszczyzn).

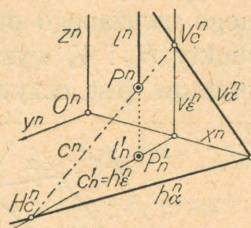
Zadanie 6: Dane są dowolna płaszczyzna α (h_a^n, v_a^n) i prosta l (l^n, l'_n) prostopadła do rzutni poziomej. Wyznaczyć punkt przebiecia się prostej l z płaszczyzną α .

Rozwiązanie: Na rys. 107 wykreślono aksonetrię h_ε^n i v_ε^n płaszczyzny poziomo-rzucającej ε , która przechodzi przez prostą l . Krawędź $c = \alpha\varepsilon$ przecina prostą l w żądanym punkcie $P = l\alpha$ przebiecia się elementu l z płaszczyzną α .

Zadanie 7: Dane są prosta a (a^n, a'_n), płaszczyzna ε ($h_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n$) i punkt P (P^n, P'_n), który leży na ε . Przez P poprowadzić taką prostą l , któraby leżała na płaszczyźnie ε i przecinała się z prostą a .

Rozwiązanie 1: Każda prosta, która przechodzi przez punkt P i przecina prostą a , leży na płaszczyźnie $\alpha = Pa$. Krawędź $l = \alpha\varepsilon$, przecięcia się płaszczyzn α i ε , rozwiązuje zadanie.

Rozwiązanie 2: Prosta a przebija płaszczyznę ε w punkcie $A = a\varepsilon$. Prosta $l = AP$, łącząca punkty A i P , spełnia warunki zadania.



Rys. 107.

Ćwiczenie 8: Poprzednie zadanie rozwiązać, jeśli daną jest płaszczyzna ε : a) $\varepsilon \parallel \pi_1$, b) $\varepsilon \parallel \pi_3$, c) $\varepsilon \parallel x$, d) $\varepsilon \perp y$.

Zadanie 8: Dane są dwie proste skośne a (a^n, a'_n), b (b^n, b'_n) i dowolny punkt P (P^n, P'_n), nie leżący na żadnej z danych prostych. Przez P poprowadzić należy taką prostą r , któraby przecinała się z danymi prostymi a i b .

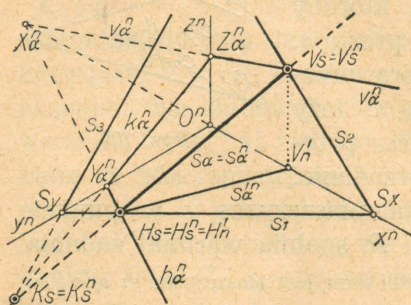
Rozwiązanie 1: Wszystkie proste, które przechodzą przez punkt P i przecinają prostą a , leżą na płaszczyźnie $\alpha = Pa$. Podobnie każda prosta, która przechodzi przez P i przecina element b , przynależy do płaszczyzny $\beta = Pb$. Krawędź $r = \alpha\beta$, przecięcia się tych płaszczyzn, rozwiązuje zadanie.

Rozwiązanie 2: Płaszczyzna $\alpha = Pa$ i prosta b wyznaczają punkt $B = ba$. Prosta $BP = r$ jest elementem wynikowym, gdyż prosta r przechodzi przez punkt P , przecina element b w punkcie B , oraz przecina (jako prosta, przynależna do płaszczyzny $\alpha = Pa$) prostą a .

Ćwiczenie 9: Poprzednie zadanie rozwiązać wówczas, skoro dane proste a i b spełniają następujące warunki:

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------------|--|
| a) $a // x$, b dowolna; | d) $a // \pi_1$, $b \perp \pi_1$; | g) $a \perp \pi_a$, b dowolna |
| b) $a // x$, $b // \pi_2$; | e) $a // \pi_1$, $b \perp \pi_2$; | h) $a \perp \pi_a$, $b // \pi_1$ |
| c) $a // x$, $b // \pi_3$; | f) $a // \pi_1$, $b // \pi_2$; | i) $a \perp \pi_a$, $b \perp \pi_1$. |

34. Ślady aksonometryczne płaszczyzn i prostych. Niechaj dane będą (rys. 108) dowolny ostrokątny trójkąt śladów aksonometrycznych ($s_1 s_2 s_3$) i aksonometrie h_a^n, v_a^n, k_a^n śladów płaszczyzny α . Punkt $H_s = h_a^n s_1$, w którym przecinają się prosta h_a^n i bok $s_1 = \pi_1 \pi_a$ trójkąta śladów ($s_1 s_2 s_3$), leży na rzutni π_1 i na rzutni aksonometrycznej π_a . Punkty H_s i H'_n , t. zn. obrazy aksonometryczne punktu H_s i jego rzutu poziomego H' , nakrywają się z elementem H_s . Podobnie punkt $V_s = v_a^n s_2$, przecięcia się prostych v_a^n i $s_2 = \pi_2 \pi_a$, leży równocześnie na rzutniach pionowej π_2 i aksonometrycznej π_a . Aksonometria V_s^n tego punktu zjednoczyła się z elementem V_s , a natomiast aksonometria V'_n rzutu poziomego uważanego punktu V_s leży na osi aksonometrycznej x^n . Omawiane punkty H_s i V_s wyznaczają prostą $s_a = H_s V_s$, przyczem pierwszy z tych punktów jest oczywiście śladem poziomym H_s , a drugi punkt V_s śladem pionowym tej prostej s_a . Prosta $s_a = H_s V_s$ leży na rzutni aksonometrycznej, gdyż dwa jej ślady H_s i V_s leżą na płaszczyźnie π_a . Aksonometria $s_a^n = H_s^n V_s^n$ prostej s_a nakrywa się z elementem s_a , aksonometria zaś rzutu poziomego s'_a prostej s_a jest promieniem $s'_a^n = H_s^n V'_n$.



Rys. 108.

Z łatwością zauważymy jednak, że prosta s_a leży również i na danej płaszczyźnie α (h_a^n, v_a^n), bo aksonometrie H_s^n i V_s^n śladów poziomego i pionowego prostej s_a leżą (ust. 27) na odpowiednich aksonometriach h_a^n , wzgl. v_a^n śladów płaszczyzny α . Prosta $s_a = \pi_a \alpha$, jako krawędź rzutni

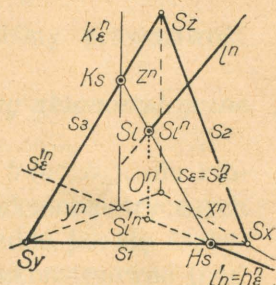
aksonometrycznej π_a i płaszczyzny α , jest zatem śladem aksonometrycznym s_a płaszczyzny α .

Dla prostej s_a wyznaczyliśmy poprzednio dwa jej ślady, a mianowicie $H_s = h_a^n s_1$ i $V_s = v_a^n s_2$. W podobny sposób otrzymamy ślad boczny K_s owej prostej. Proste k_a^n i $s_3 = \pi_a \pi_3$ przecinają się w punkcie K_s , gdyż on przynależy do rzutni aksonometrycznej π_a i do rzutni bocznej π_3 , oraz leży równocześnie na płaszczyźnie α . A zatem wypowiedzieć możemy następujące

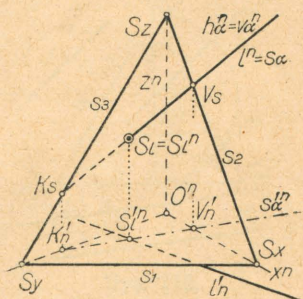
Twierdzenie: Aksonometrije h_a^n , v_a^n i k_a^n , trzech śladów (poziomego, pionowego i bocznego) dowolnej płaszczyzny α , przecinają się z odpow. bokami s_1 , s_2 i s_3 trójkąta śladów aksonometrycznych w trzech punktach (śladach) $H_s = h_a^n s_1$, $V_s = v_a^n s_2$ i $K_s = k_a^n s_3$, które leżą na śladzie aksonometrycznym s_a owej płaszczyzny α .

Dane są (rys. 109) trójkąt śladów aksonometrycznych (s_1 s_2 s_3) i dowolna prosta l (l^n , l'_n). Aby wyznaczyć punkt $S_l = l \pi_a$, przebiecia się prostej l z rzutnią aksonometryczną π_a , poprowadźmy przez l płaszczyznę np. poziomo-rzucającą ε ($h_\varepsilon^n = l'_n$, k_ε^n). Ślad aksonometryczny $s_\varepsilon = \varepsilon \pi_a$ płaszczyzny ε przecina się z prostą l w punkcie S_l , którego rzutami aksonometrycznymi są punkty $S_l^n = l'^n s_\varepsilon^n$ i $S_l'^n$. Otrzymany w ten sposób punkt S_l jest śladem aksonometrycznym danej prostej l .

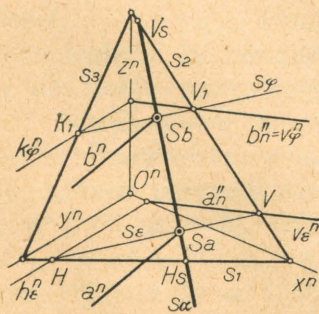
Punkt $S_l = l \pi_a$ wyznaczyć możemy też przy pomocy płaszczyzny aksonometrycznie-rzucającej α , a przechodzącej przez prostą l . Aksonometrije $h_a^n = v_a^n = k_a^n$ trzech śladów pomocniczej płaszczyzny α i jej ślad aksonometryczny s_a nakrywają się (rys. 110) na prostej l^n . Aksonometrija



Rys. 109.



Rys. 110.



Rys. 111.

$s_a^n = V_n K_n'$ rzutu poziomego prostej s_a przecina się z rzutem l'_n w punkcie $S_l'^n$. Odnosząc $S_l'^n S_l || z^n$ wyznaczy na prostej l^n żądany ślad aksonometryczny S_l danej prostej l (l^n , l'_n).

Zadanie 1: Dane są dwie proste równoległe a (a^n , a''^n) i b (b^n , b''^n), które określają płaszczyznę $\alpha = ab$. Wyznaczyć ślad aksonometryczny s_a tej płaszczyzny.

Rozwiązanie: Przez dane proste a i b poprowadźmy płaszczyzny pionowo-rzucające ε ($v_\varepsilon^n = a''^n$, h_ε^n) i φ ($v_\varphi^n = b''^n$, k_φ^n) i wyznaczmy

ślady aksonometryczne s_ε, s_φ tych płaszczyzn. Punkty $S_a = a^n s_\varepsilon$ i $S_b = b^n s_\varphi$ są śladami aksonometrycznymi danych prostych a i b . Ślady S_a i S_b wyznaczają prostą $s_a = S_a S_b$, która jest śladem aksonometrycznym płaszczyzny $\alpha = a b$.

Ćwiczenie 1: Wyznaczyć ślad aksonometryczny płaszczyzny ε , która przechodzi przez oś x i przez dany punkt $A (A^n, A'_n)$.

Ćwiczenie 2: Wyznaczyć ślady aksonometryczne płaszczyzn: a) $\alpha // x$, b) $\beta // y$, c) $\gamma // z$, d) $\delta // \pi_1$, e) $\varepsilon // \pi_3$.

Rozdział V.

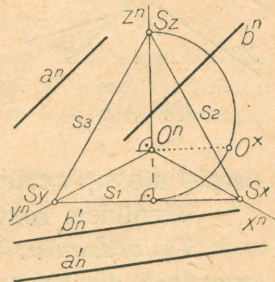
Problemy równoległości i prostopadłości.

35. Proste równoległe. W ust. 24 wykazaliśmy prawdziwość następującego twierdzenia:

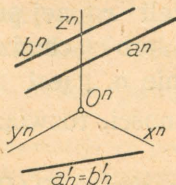
Dla prostych równoległych ich jednoimienne rzuty aksonometryczne są prostami równoległymi.

Przyjmijmy teraz takie dwie proste a (a^n, a'_n) i b (b^n, b'_n), dla których (rys. 112) dwie pary jednoimiennych rzutów aksonometrycznych są prostami równoległymi: $a^n \parallel b^n, a'_n \parallel b'_n$. Chcąc zbadać, jak się zachowują względem siebie owe proste a i b , należy zrekonstruować (por. ust. 18) ich położenie w przestrzeni. W tym celu przez dane proste $a'_n \parallel b'_n$ poprowadźmy odpow. płaszczyzny $\alpha \perp \pi_a$ i $\beta \perp \pi_a$ (prostopadłe do płaszczyzny rysunku π_a), to oczywiście owe płaszczyzny są do siebie równoległe: $\alpha \parallel \beta$. Rzutnia pozioma $\pi_1 = Os_1$ przecina się z elementami $\alpha \parallel \beta$ w dwóch prostych równoległych: $a' = \alpha \pi_1$ i $b' = \beta \pi_1$, które są rzutami poziomymi uważanych prostych a i b . Skoro przez a' poprowadzimy płaszczyznę $\gamma \perp \pi_1$, a przez element b' płaszczyznę $\delta \perp \pi_1$, to owe płaszczyzny są do siebie równoległe: $\gamma \parallel \delta$. Podobnie płaszczyzny $\varepsilon \perp \pi_a$ i $\varphi \perp \pi_a$, z których pierwsza przechodzi przez aksonometrię a^n , a druga przez prostą $b^n \parallel a^n$, są do siebie równoległe. Z warunków równoległości: $\gamma \parallel \delta$ i $\varepsilon \parallel \varphi$ wynika, że krawędzie $a = \gamma \varepsilon$ i $b = \delta \varphi$ są prostami równoległymi. Wykazaliśmy tedy, że dane proste a (a^n, a'_n) i b (b^n, b'_n) są do siebie równoległe.

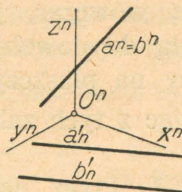
Rozumowanie nasze będzie też prawdziwe w następujących przypadkach:
1) $a^n \parallel b^n, a'_n = b'_n$ (rys. 113),
2) $a^n = b^n, a'_n \parallel b'_n$ (rys. 114) i
3) $a^n \parallel b^n, a'_n = b'_n, b'_n = a^n$ (rys. 115).



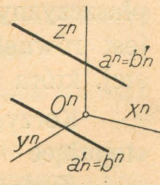
Rys. 112.



Rys. 113.

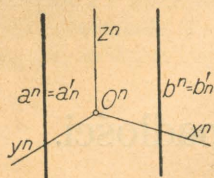


Rys. 114.



Rys. 115.

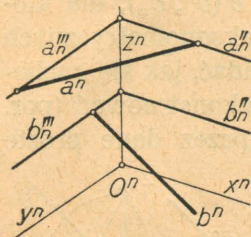
W pierwszym przypadku pomocnicza płaszczyzna α schodzi się z elementem β , oraz płaszczyzna γ nakrywa się z elementem δ ; płaszczyzny $\varepsilon \parallel \varphi$ przecinają płaszczyznę poziomo-rzucającą $\gamma = \delta$ w prostych $a \parallel b$. W drugim przypadku płaszczyzna aksonometrycznie-rzucająca $\varepsilon = \varphi$ przecina płaszczyzny $\gamma \parallel \delta$ w prostych równoległych $a \parallel b$.



Rys. 116.

W trzecim przypadku schodzą się płaszczyzny $\alpha = \varphi$ i $\beta = \varepsilon$, ale elementy $\varepsilon \parallel \varphi$ i $\gamma \parallel \delta$ wyznaczają krawędzie: $a = \gamma \varepsilon$ i $b = \delta \varphi$, które są prostymi równoległymi.

Gdybyśmy jednak (rys. 116) przyjęli, że $a^n = a'_n$, $b^n = b'_n$, przyczem $a^n \parallel b^n \parallel z^n$, to wówczas owe rzuty aksonometryczne nie ustalają wcale (por. ust. 19 rys. 31) położenia prostych a i b w przestrzeni. O ile spełniony będzie dodatkowy warunek: $a'' \parallel b''$ lub $a''' \parallel b'''$, to wówczas — jak z łatwością wykazać możemy — ustalone będzie położenie prostych równoległych $a \parallel b$.



Rys. 117.

W zupełnie analogiczny sposób wykazemy, że skoro dwie pary równoimiennych rzutów np.: $a'' \parallel b''$ i $a''' \parallel b'''$, pewnych prostych są elementami równoległymi, to również i owe proste a, b są do siebie równoległe. Pominąć musimy oczywiście przypadek, podany na rys. 117. Wprawdzie spełnione są warunki: $a'' \parallel b''$ i $a''' \parallel b'''$, ale owe rzuty nie wyznaczają położenia prostych $a \parallel \pi_1$ i $b \parallel \pi_1$ w przestrzeni. Na rys. 117, przez wkreślenie aksonometrii a^n i b^n , ustalone zostało położenie prostych a i b ; owe

proste nie są wcale równoległe, tylko skośne.

Wynikiem rozważań naszych jest następujące

Twierdzenie: Jeżeli dwie pary równoimiennych rzutów aksonometrycznych dwóch prostych są odpowiednio prostymi równoległymi i wystarczają do ustalenia położenia owych prostych w przestrzeni, to uważane proste są do siebie równoległe.

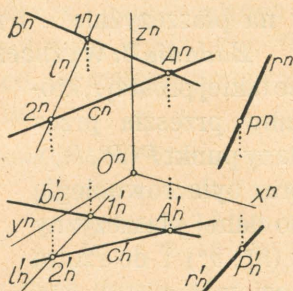
36. O równoległości prostej i płaszczyzny. Wiadomo nam z rozważań ust. 4, że:

prosta r jest równoległą do danej płaszczyzny α wówczas, jeżeli r jest równoległą do dowolnej prostej, która leży na płaszczyźnie α .	płaszczyzna α jest równoległą do danej prostej r wówczas, jeżeli α przechodzi przez dowolną prostą, która jest równoległą do owej prostej r .
---	---

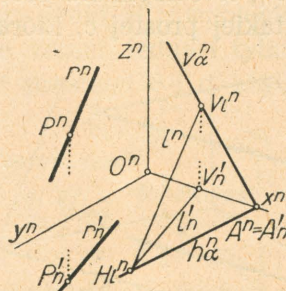
Korzystając z tych zależności, rozwiązać możemy bezpośrednio następujące

Zadanie 1: Przez dany punkt $P(P^n, P'_n)$ poprowadzić prostą r równoległą do danej płaszczyzny α .

Rozwiązanie: Niechaj daną będzie (rys. 118) płaszczyzna $\alpha = bc$, określona dwiema prostymi $b(b^n, b'_n)$ i $c(c^n, c'_n)$, przecinającymi się w punkcie $A(A^n, A'_n)$. Celem rozwiązania naszego zadania, należy na danej płaszczyźnie α przyjąć (por. ust. 27) dowolną prostą $l(l^n = 1^n 2^n, l'_n = 1'_n 2'_n)$, a następnie przez dany punkt P poprowadzić prostą r , równoległą do pomocniczego promienia l . Z punktu P^n wykreślimy prostą $r^n \parallel l^n$, a z punktu P'_n prostą $r'_n \parallel l'_n$, to elementy te są rzutami aksonometrycznymi prostej wynikowej r .



Rys. 118.



Rys. 119.

Na rys. 119 aksonometrię h_a^n i v_a^n dwóch śladów poziomego h_a

i pionowego v_a wyznaczają płaszczyznę α . Na tej płaszczyźnie leży prosta $l(l^n = H_l^n V_l^n, l'_n = H_l^n V'_n)$, a prosta wynikowa r przechodzi przez dany punkt P i jest równoległą do l .

Uwaga: Zadanie 1 posiada nieograniczoną ilość rozwiązań; zmieniając bowiem na płaszczyźnie α położenie pomocniczej prostej $l(l^n, l'_n)$, za każdym razem otrzymamy inną prostą r . Wszystkie proste r , otrzymane w ten sposób, leżą (ust. 4) na płaszczyźnie β równoległej do α .

Ćwiczenie 1: Zadanie 1 rozwiązać, jeśli dana jest płaszczyzna: a) $\alpha \parallel x$, b) $\alpha \parallel y$, c) $\alpha \parallel z$, d) $\alpha \perp x$, e) $\alpha \parallel \pi_1$, f) $\alpha \perp \pi_a$.

Zadanie 2: Dane są dowolna płaszczyzna α , punkt $P(P^n, P'_n)$ i prosta r'_n przechodząca przez punkt P'_n . Uważając element r'_n za aksonometrię rzutu poziomego r' takiej prostej r , która przechodzi przez punkt P i jest równoległą do płaszczyzny α , — należy skonstruować aksonometrię r^n owej prostej r .

Rozwiązanie: Wykreślimy (rys. 118 i 119) prostą $l'_n \parallel r'_n$ i wyznaczmy (ust. 27) aksonometrię l^n tak, aby otrzymana w ten sposób prosta $l(l'_n, l^n)$ leżała na danej płaszczyźnie α . Prosta r^n , wykreślona z punktu P^n równoległe do elementu l^n , rozwiązuje zadanie. Zauważyć należy, że zadanie 2 posiada jedno i tylko jedno rozwiązanie.

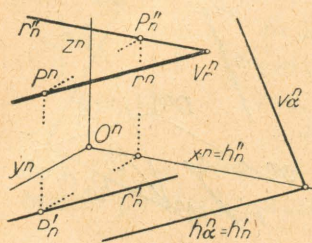
Ćwiczenie 2: Poprzednie zadanie rozwiązać, jeśli dana prosta r'_n spełnia warunki: a) $r'_n \parallel x^n$, b) $r'_n \parallel y^n$, c) $r'_n \perp z^n$.

Ćwiczenie 3: Daną jest aksonometria r^n prostej r , która przechodzi przez dany punkt $P(P^n, P'_n)$ i jest równoległą do danej płaszczyzny $\alpha(h_a^n, v_a^n)$. Skonstruować należy aksonometrię r'_n rzutu pionowego prostej r .

Ćwiczenie 4: W ćwiczeniu 3 wyznaczyć taką prostą $r \parallel \alpha$ i przechodzącą przez P , dla której aksonometria r^n spełnia warunki: a) $r^n \parallel x^n$, b) $r^n \parallel y^n$, c) $r^n \perp z^n$.

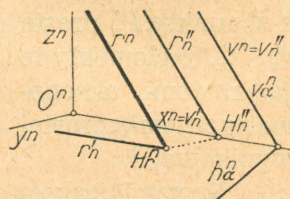
Zadanie 3: Dane są dwie płaszczyzny α (h_a^n, v_a^n) i β (h_β^n, v_β^n), oraz dowolny punkt P (P^n, P'_n). Przez ten punkt należy poprowadzić prostą r , równoległą do płaszczyzny α i β .

Rozwiązanie: Wyznamy (ust. 31) krawędź $c = \alpha\beta$ przecięcia się danych płaszczyzn, następnie poprowadzmy przez punkt P prostą $l \parallel c$. Otrzymana prosta r rozwiązuje zadanie, gdyż r jest równoległą do takiej prostej c , która leży na płaszczyźnie α i na płaszczyźnie β .



Rys. 120.

Zadanie 4: Wyznaczyć rzuty aksonometryczne takiej prostej r , która przeszła przez dany punkt P (P^n, P'_n), oraz była równoległą do danej płaszczyzny α (h_a^n, v_a^n) i do rzutni poziomej π_1 .



Rys. 121.

Rozwiązanie:
Prosta l musi być

równoległą do krawędzi $h_a = \alpha\pi_1$. Rzuty aksonometryczne elementu r są (rys. 120) promieniami: $r^n \parallel r'_n \parallel h_a^n$, $r''_n \parallel x^n$, $r'''_n \parallel y^n$.

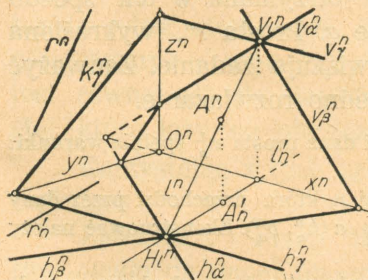
Na rys. 121 wykreślono rzuty $r^n \parallel r'_n \parallel v_a^n$, $r'_n \parallel x^n$ prostej r równoległej do śladu pionowego v_a płaszczyzny α . Prosta r spełnia warunki: $r \parallel \alpha$, $r \parallel \pi_2$.

Ćwiczenie 5: Przez punkt P (P^n, P'_n) poprowadzić taką prostą r (r^n, r'_n), która jest równoległą do danej płaszczyzny α (h_a^n, v_a^n) i do rzutni aksonometrycznej. (Prosta r jest równoległą do śladu aksonometrycznego $s_a = \alpha\pi_a$ płaszczyzny α).

Ćwiczenie 6: Zadanie 3 rozwiązać, jeśli jedna z danych „płaszczyzn” spełnia warunki: a) $\alpha \parallel z$, b) $\alpha \parallel y$, c) $\alpha \parallel x$, d) $\alpha \perp z$, e) $\alpha \perp y$, f) $\alpha \perp \pi_a$.

Zadanie 5: Dane są punkt A (A^n, A'_n) i prosta r (r^n, r'_n). Przez punkt A poprowadzić płaszczyznę (α h_a^n, v_a^n), równoległą do prostej r .

Rozwiązanie: Celem rozwiązania tego zadania, wykreślmy (rys. 118 i 119) rzuty aksonometryczne l^n i l'_n takiej prostej l , która jest równoległą do danej prostej r . Pomocnicza prosta l i dany punkt A określają płaszczyznę $\alpha = lA$, która spełnia warunki zadania. Istnieje nieograniczona ilość rozwiązań, które zależą od położenia konstrukcyjnej prostej $l \parallel r$.



Rys. 122.

Bardzo często jednak korzystamy z takiej pomocniczej prostej $l \parallel r$, która (rys. 122) przechodzi przez dany punkt A (A^n, A'_n). Wszystkie płaszczyzny: $\alpha, \beta, \gamma \parallel x, \dots$, które przechodzą (ust. 30) przez pomocniczą prostą l (l^n, l'_n), rozwiązują zadanie.

Zadanie 6: Dane są dwie proste skośne $a (a^n, a'_n)$ i $b (b^n, b'_n)$, oraz dowolny punkt $P (P^n, P'_n)$. Przez ten punkt poprowadzić płaszczyznę α , równoległą do prostych skośnych a i b .

Rozwiązanie: Przez punkt $P (P^n, P'_n)$ poprowadźmy dwie proste: $c \parallel a$ i $d \parallel b$. Wszystkie płaszczyzny, które przechodzą przez P i są równoległe do prostej a , przechodzą przez prostą $c (c^n \parallel a^n, c'_n \parallel a'_n)$. Podobnie każda płaszczyzna, poprowadzona przez punkt P równoległe do prostej b , zawiera prostą $d (d^n, d'_n)$. Istnieje zatem jedna i tylko jedna płaszczyzna $\varepsilon = cd$, określona pomocniczymi prostymi c i d , która spełnia warunki zadania.

Ćwiczenie 7: Rozwiązać zadanie 6 w następujących przypadkach:

- | | | |
|--|--|--|
| a) $a \parallel \pi_1, \quad b \parallel \pi_2;$ | d) $a \perp \pi_1, \quad b \parallel \pi_1;$ | g) $a \parallel x, \quad b$ dowolna. |
| b) $a \parallel \pi_1, \quad b \parallel \pi_3;$ | e) $a \perp \pi_2, \quad b \parallel \pi_2;$ | h) $a \parallel x, \quad b \parallel y.$ |
| c) $a \parallel \pi_2, \quad b \parallel \pi_3;$ | f) $a \perp \pi_3, \quad b \parallel \pi_2;$ | i) $a \parallel x, \quad b \parallel \pi_3.$ |

Zadanie 7: Przez daną prostą $a (a^n, a'_n)$ poprowadzić płaszczyznę α , równoległą do danej prostej $b (b^n, b'_n)$.

Rozwiązanie: Na promieniu a oberzmy dowolny punkt $C (C^n, C'_n)$ i poprowadźmy przezeń taką prostą l , która jest równoległą do prostej b . Płaszczyzna $\varepsilon = al$, określona prostymi a i l , rozwiązuje zadanie.

Ćwiczenie 8: Rozwiązać zadanie 7, jeżeli położenie danych prostych skośnych a i b określone jest warunkami, podanymi w ćwiczeniu 7.

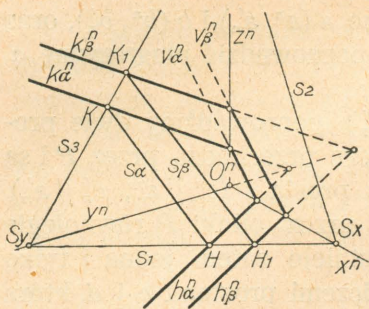
Ćwiczenie 9: Dane są prosta $r (r^n, r'_n)$ i aksonometria h_a^n śladu poziomego płaszczyzny α , która jest równoległą do prostej r . Należy skonstruować aksonometrię v_a^n i k_a^n dwóch dalszych śladów owej płaszczyzny α .

Zadanie 8: Dane są trzy proste skośne $a (a^n, a'_n)$, $b (b^n, b'_n)$ i $c (c^n, c'_n)$. Wyznaczyć należy rzuty aksonometryczne takiej prostej, któraby przecinała się z prostymi a i b , oraz była równoległą do prostej c .

Rozwiązanie 1: Wszystkie proste, które przecinają prostą a i są równoległe do prostej c , leżą na płaszczyźnie α , przechodzącej przez promień a i równoległej do elementu c (por. zad. 7). Podobnie wszystkie proste, przecinające prostą b i równoległe do promienia c , przynależą do płaszczyzny β , która przechodzi przez b i jest równoległą do c . Krawędź $r = \alpha\beta$, przecięcia się pomocniczych płaszczyzn α i β , rozwiązuje zadanie.

Rozwiązanie 2: Przez prostą a poprowadźmy płaszczyznę $\alpha \parallel c$ i wyznaczmy punkt $B = ba$ przebiecia się danej prostej b z płaszczyzną α . Przez punkt B poprowadźmy następnie prostą r równoległą do trzeciej danej prostej c . Otrzymana w ten sposób prosta r jest elementem wynikowym, gdyż spełnia warunki zadania.

37. Płaszczyzny równoległe. Z rozważań ust. 31 wiadomo nam, że: dla płaszczyzn równoległych aksonometrię ich jednoimiennych śladów (poziomych, pionowych, wzgl. bocznych) są prostymi równoległymi.



Rys. 123.

Obierzmy na rys. 123 dowolny ostrokatny trójkąt śladów aksonometrycznych ($s_1 s_2 s_3$), oraz aksonometrie $h_\alpha^n \parallel h_\beta^n$, $v_\alpha^n \parallel v_\beta^n$ i $k_\alpha^n \parallel k_\beta^n$ śladów dwóch płaszczyzn równoległych α i β . Skoro płaszczyzny $\alpha \parallel \beta$ przetniemy rzutnią aksonometryczną π_α , to otrzymane w ten sposób ślady aksonometryczne s_α i s_β tych płaszczyzn są (ust. 4) prostami równoległymi: $s_\alpha \parallel s_\beta$. A zatem wypowiedzieć możemy następujące

Twierdzenie: Dla płaszczyzn równoległych ich ślady aksonometryczne, oraz aksonometrie równoimiennych śladów (poziomych, pionowych, wzgl. bocznych) są parami do siebie równoległe.

Niechaj dane będą takie dwie płaszczyzny α i β , dla których (rys. 123) aksonometrie śladów np. pionowych i bocznych spełniają warunki: $v_\alpha^n \parallel v_\beta^n$ i $k_\alpha^n \parallel k_\beta^n$. Zbadajmy teraz, jakie zajmują położenie względem siebie owe płaszczyzny α i β . W tym celu przez proste $v_\alpha^n \parallel v_\beta^n$ poprowadźmy dwie płaszczyzny $\varepsilon \perp \pi_\alpha$ i $\varphi \perp \pi_\beta$, a następnie przetnijmy owe płaszczyzny $\varepsilon \parallel \varphi$ rzutnią pionową $\pi_2 = O s_2$. Otrzymane w ten sposób ślady pionowe $v_\alpha = \varepsilon \pi_2$ i $v_\beta = \varphi \pi_2$ uważanych płaszczyzn α i β są (ust. 4) prostami równoległymi: $v_\alpha \parallel v_\beta$. Analogicznie wykazać możemy, że z zależności $k_\alpha^n \parallel k_\beta^n$ wynika związek: $k_\alpha \parallel k_\beta$. Skoro przyjmiemy, że ślady $v_\alpha \parallel v_\beta$ i $k_\alpha \parallel k_\beta$ nie posiadają wspólnego kierunku (t. zn. nie są równoległe do osi z), to owe ślady określają (ust. 4) dwie płaszczyzny równoległe $\alpha \parallel \beta$.

Gdyby jednak, obok zależności $v_\alpha \parallel v_\beta$ i $k_\alpha \parallel k_\beta$, wystąpił jeszcze (por. rys. 94) warunek trzeci: $v_\alpha \parallel k_\alpha \parallel z$, to wówczas uważane płaszczyzny α i β byłyby równoległe do osi z . Krawędź $c = \alpha \beta$ przecięcia się tych płaszczyzn może być prostą właściwą lub prostą niewłaściwą. Elementy α i β w pierwszym przypadku nie posiadają wspólnego „ustawienia“, t. zn. nie są do siebie równoległe; natomiast w drugim przypadku byłyby płaszczyznami równoległymi i przecinałyby się w krawędzi $c^\infty = \alpha \beta$.

Przeprowadziliśmy pewne badania aksonometrii śladów pionowych i bocznych dwóch danych płaszczyzn α i β . Analogiczne rozważania dadzą się przeprowadzić dla dwóch innych par śladów: poziomych i pionowych, poziomych i bocznych, lub pionowych v_α, v_β i śladów aksonometrycznych s_α, s_β tych płaszczyzn. Wykazaliśmy tedy prawdziwość następującego

Twierdzenia: Jeżeli obrazy aksonometryczne dwóch par równoimiennych śladów dwóch płaszczyzn są prostami równoległymi, ale każda

z tych par posiada inny kierunek, to wówczas uważane płaszczyzny są do siebie równoległe.

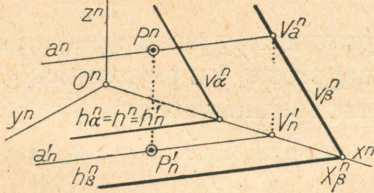
Niechaj dana będzie dowolna płaszczyzna α i punkt P , który nie przynależy do elementu α . Celem wyznaczenia płaszczyzny β , przechodzącej przez punkt P i równoległej do płaszczyzny α , postąpić należy (ust. 4) w sposób następujący:

Przez P poprowadzić należy dwie pomocnicze proste: $a \parallel \alpha$ i $b \parallel \alpha$, to owe proste określają wynikową płaszczyznę $\beta = ab$.

Na α przyjąć należy dwie pomocnicze proste c i d , a następnie przez punkt P poprowadzić płaszczyznę β , równoległą do tych prostych.

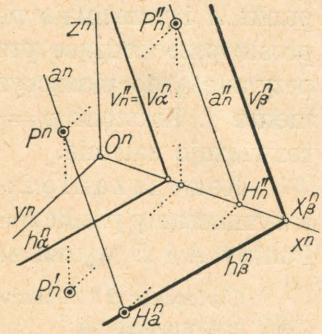
Często jednak zamiast dwóch prostych a i b , wyznaczamy tylko jedną prostą $a \parallel \alpha$ i korzystamy z równoległości jednej z par elementów: $h_a^n \parallel h_\beta^n$, $v_a^n \parallel v_\beta^n$, $k_a^n \parallel k_\beta^n$, wzgl. $s_a \parallel s_\beta$.

Zadanie 1: Dane są płaszczyzna α (h_a^n, v_a^n) i dowolny punkt P (P^n, P'_n). Należy skonstruować aksonometrię śladów płaszczyzny β , przechodzącej przez punkt P i równoległej do płaszczyzny α .



Rys. 124.

Rozwiązanie: Przez punkt P (rys. 124) poprowadź-



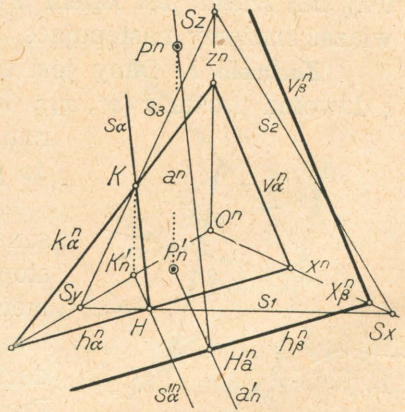
Rys. 125.

my prostą a równoległą np. do śladu poziomego h_a danej płaszczyzny α . Rzutami aksonometrycznymi prostej konstrukcyjnej a są elementy $a^n \parallel a'_n \parallel h_a^n$. Przez aksonometrię V_a^n śladu pionowego tej prostej przechodzi prosta $v_\beta^n \parallel v_a^n$, a przez punkt X_β^n promień $h_\beta^n \parallel h_a^n$. Wykreślone w powyższy sposób proste h_β^n i v_β^n są aksonometriami śladów poziomego h_β i pionowego v_β płaszczyzny β .

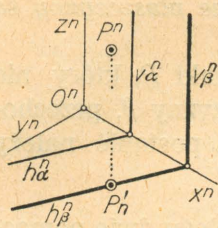
Ćwiczenie 1: Poprzednie zadanie rozwiązać przy pomocy: 1) prostej $a \parallel v_a$ (rys. 125), 2) prostej $a \parallel k_a$, 3) prostej a równoległej do śladu aksonometrycznego s_a uważanej płaszczyzny α (rys. 126), 4) dowolnej prostej $a \parallel \alpha$.

Ćwiczenie 2: Zadanie 1 rozwiązać wówczas, jeżeli dana płaszczyzna α jest: a) poziomo-rzucającą (rys. 127), b) pionowo-rzucającą, c) boczno-rzucającą. (Konstrukcja znacznie uproszczona!)

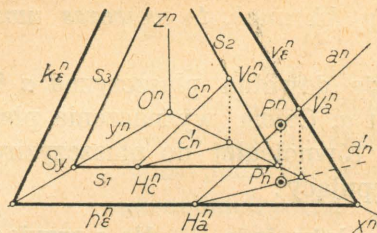
Ćwiczenie 3: Dane są dwie proste równo-



Rys. 126.



Rys. 127.



Rys. 128.

ległe $a (a^n, a'_n)$, $b (b^n, b'_n)$ i dowolny punkt $P (P^n, P'_n)$. Przez P poprowadzić płaszczyznę β , równoległą do płaszczyzny $\alpha = a b$.

Ćwiczenie 4: Przez dany punkt $P (P^n, P'_n)$ poprowadzić (rys. 128) płaszczyznę ϵ , równoległą do do rzutni aksonometrycznej π_a .

Zadanie 2: Dane są punkt $A (A^n, A'_n)$, prosta $b (b^n, b'_n)$ i płaszczyzna $\gamma (h_\gamma^n, v_\gamma^n)$. Przez punkt A poprowadzić taką prostą p , któraby przecinała się z prostą b i była równoległą do płaszczyzny γ .

Rozwiązanie 1: Wszystkie proste, które przechodzą przez punkt A i przecinają prostą b , leżą na płaszczyźnie $\delta = Ab$. Wszystkie proste przechodzące przez punkt A i równoległe do danej płaszczyzny γ , przynależą do płaszczyzny ϵ , poprowadzonej przez A równoległe do elementu γ . Krawędź $p = \delta \epsilon$, przecięcia się tych płaszczyzn $\delta = Ab$ i $\epsilon \parallel \gamma$, rozwiązuje zadanie.

Rozwiązanie 2: Przez dany punkt A prowadzimy płaszczyznę $\epsilon \parallel \gamma$ i wyznaczamy punkt $B = b \epsilon$, przebiecia się danej prostej b z płaszczyzną ϵ . Punkty A i B wyznaczają prostą $p = AB$, która spełnia warunki zadania.

Ćwiczenie 5: Zadanie 2 rozwiązać, jeśli położenie danych elementów b i γ określone jest warunkami:

a) $b \perp \pi_1$, $\gamma \parallel \pi_1$;

c) $b \parallel \pi_1$, $\gamma \parallel x$;

e) $b \perp \pi_a$, $\gamma \parallel z$.

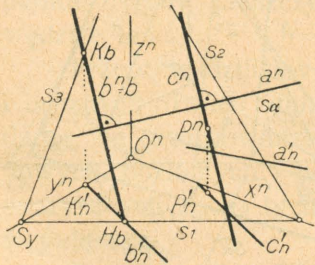
b) $b \perp \pi_1$, $\gamma \parallel \pi_2$;

d) $b \parallel \pi_2$, $\gamma \perp \pi_1$;

f) $b \perp \pi_a$, $\gamma \parallel \pi_1$.

38. Proste prostopadłe. W ust. 10 wykazaliśmy, że: *Rzut prostokątny kąta prostego, którego jedno ramię jest równoległe do (wzgl. leży na) rzutni, jest kątem prostym.* Korzystając z tego twierdzenia, rozwiązać możemy następujące

Zadanie 1: Dany jest trójkąt śladów aksonometrycznych ($s_1 s_2 s_3$) i dowolna prosta $a (a^n, a'_n)$. Wyznaczyć taką prostą b , któraby leżała na rzutni aksonometrycznej π_a i była prostopadłą do promienia a .



Rys. 129.

Rozwiązanie: W myśl powyżej wypisanego twierdzenia prosta b (rys. 129) jest prostopadłą do aksonometrii a^n prostej a . Aksonometria b^n prostej b zjednoczyła się z elementem b i przecina się z bokami s_1 i s_3 w śladach: poziomym $H_b = b^n s_1$ i bocznym $K_b = b^n s_3$. Prosta $b'_n = H_b K'_n$ jest aksonometrią rzutu poziomego b' prostej b .

Zadanie powyższe posiada nieograniczoną ilość rozwiązań, gdyż każda prosta $b \perp a^n$ i leżąca na rzutni π_a spełnia warunki zadania. Zauważyć również należy, że na przeprowadzenie powyższej konstrukcji nie wpływa zupełnie położenie rzutu aksonometrycznego a'_n danej prostej a . Wyjaśnienie tej kwestji zawarte jest w zadaniu następnym.

Zadanie 2: Na rzutni aksonometrycznej leży prosta b ($b^n = b, b'_n$). Skonstruować należy rzuty aksonometryczne prostej a , prostopadłej do promienia b .

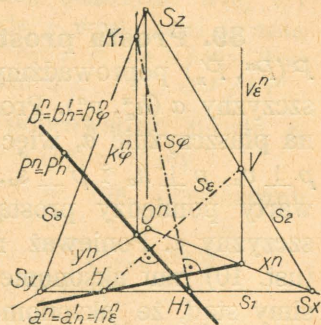
Rozwiązanie: Aksonometria a^n (rys. 129) prostej $a \perp b$ jest prostopadłą do promienia $b = b^n$, gdyż jedno ramię kąta prostego $\sphericalangle ba = 90^\circ$ leży na rzutni π_a . Jeżeli przez promień a^n poprowadzimy płaszczyznę $\alpha \perp b$ czyli $\alpha \perp \pi_a$ (prostopadłą do płaszczyzny rysunku π_a), to na owej płaszczyźnie aksonometrycznie-rzucającej α leżeć musi oczywiście prosta a . Płaszczyzna α jest prostopadłą do prostej b , przeto każda prosta, leżąca na α , jest prostopadłą do elementu b . Wnosimy stąd, że aksonometria a'_n prostej $a \perp b$ jest zupełnie dowolnym promieniem.

Zadanie 3: Przez dany punkt P (P^n, P'_n) poprowadzić prostą c , równoległą do rzutni aksonometrycznej i prostopadłą do danej prostej a (a^n, a'_n).

Rozwiązanie: Z warunków zadania: $c \parallel \pi_a$ i $c \perp a$ wynika zależność: $c^n \perp a^n$, zachodząca pomiędzy aksonetrami prostych c i a . Aksonetrami c^n otrzymamy, jeśli (rys. 129) przez punkt P^n wykreślimy prostą $c^n \perp a^n$. Ponieważ $c \parallel \pi_a$, przeto za pośrednictwem prostej $b \parallel c$ i leżącej na rzutni π_a (por. ust. 36) — wyznaczyć możemy aksonetrię c'_n rzutu poziomego c' wynikowej prostej c .

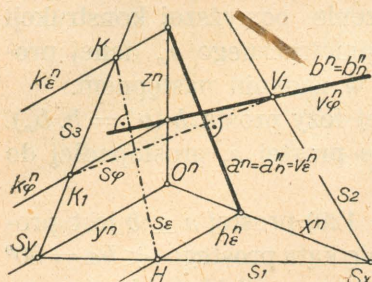
Zadanie 4: Na rzutni poziomej π_1 leży punkt P ($P^n = P'_n$) i prosta a ($a^n = a'_n$). Przez punkt P poprowadzić taką prostą b , któraby leżała na rzutni π_1 i była prostopadłą do promienia a .

Rozwiązanie: Przez daną prostą a (rys. 130) poprowadzmy płaszczyznę poziomo-rzucającą ε ($h_\varepsilon^n = a^n = a'_n, v_\varepsilon^n \parallel z^n$) i wyznaczmy jej ślad aksonometryczny s_ε . Ślad pionowy v_ε tej płaszczyzny jest prostopadły do każdej prostej, leżącej na rzutni poziomej π_1 , a więc v_ε jest również prostopadły i do prostej b . Z warunków: $v_\varepsilon \perp b$ i $a = h_\varepsilon \perp b$ wynika, że szukana prosta b jest prostopadłą do pomocniczej płaszczyzny ε , a tem samem jest prostopadłą też do śladu s_ε tej płaszczyzny. Otrzymaliśmy tedy w przestrzeni kąt prosty $\sphericalangle bs_\varepsilon = 90^\circ$, którego ramię s_ε leży na rzutni aksonometrycznej π_a . Rzut prostokątny owego kąta na rzutnię π_a jest oczywiście kątem prostym,



Rys. 130.

czyli innymi słowy: aksonometria b^n szukanej prostej b jest prostopadłą do elementu s_ε . Prosta $b^n = b'_n$, wykreślona z punktu $P^n = P'_n$ prostopadłe do śladu aksonometrycznego s_ε , pomocniczej płaszczyzny poziomo-rzucającej ε , rozwiązuje zadanie.



Rys. 131.

Proste a i b leżą na rzutni poziomej i są wzajemnie prostopadłe. Przez prostą b (b^n, b'_n) poprowadźmy (rys. 130) płaszczyznę poziomo-rzucającą φ ($h_\varphi^n = b^n, k_\varphi^n \parallel z^n$) i wyznaczmy ślad aksonometryczny s_φ tej płaszczyzny. Ponieważ prosta a jest prostopadłą do φ , przeto $a \perp s_\varphi$, a tem samem

aksonometria a^n tej prostej spełnia też warunek prostokątności: $a^n \perp s_\varphi$. Dowiedliśmy zatem prawdziwości następującego

Twierdzenia: Jeżeli na rzutni poziomej leżą dwie proste wzajemnie prostopadłe, to aksonometria (prostokątna) każdej z nich jest prostopadłą do śladu aksonometrycznego pomocniczej płaszczyzny poziomo-rzucającej, a przechodzącej przez drugą prostą.

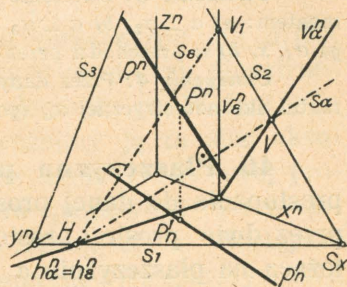
Zupełnie analogicznie wykazać możemy, że: Dwie proste, które leżą na rzutni pionowej π_2 (wzgl. bocznej π_3) i są wzajemnie prostopadłe, posiadają tę własność, że aksonometria każdej z nich jest prostopadłą do śladu aksonometrycznego pomocniczej płaszczyzny, która przechodzi przez drugą prostą i jest prostopadłą do rzutni pionowej π_2 (wzgl. rzutni bocznej π_3).

Na rys. 131 wykreślono obrazy aksonometryczne dwóch prostych $a \perp b$, które leżą na rzutni pionowej π_2 .

39. Prosta prostopadła do płaszczyzny. Przez dowolny punkt P (P^n, P'_n) poprowadźmy (rys. 132) prostą p prostopadłą do danej płaszczyzny α (h_α^n, v_α^n). Prosta p jest prostopadłą do każdej prostej, leżącej na płaszczyźnie α , więc prosta p spełnia następujące warunki: $p \perp h_\alpha$, $p \perp v_\alpha$, $p \perp k_\alpha$ i $p \perp s_\alpha$. Weźmy pod uwagę kąt prosty $\sphericalangle p s_\alpha = 90^\circ$, zawarty pomiędzy prostą p i śladem aksonometrycznym s_α danej płaszczyzny α . Ponieważ ramię s_α tego kąta leży na rzutni π_α , przeto (ust. 10) rzut aksonometryczny owego kąta jest kątem prostym. Wnosimy stąd, że aksonometria p^n uważanej prostej p jest prostopadłą do śladu aksonometrycznego s_α płaszczyzny α .

Z warunku prostokątności $p \perp h_\alpha$ wynika, że rzut poziomy p' prostej p jest prostopadły do śladu poziomego h_α płaszczyzny α , gdyż ramię h_α kąta prostego $\sphericalangle p h_\alpha = 90^\circ$ przynależy do rzutni poziomej π_1 .

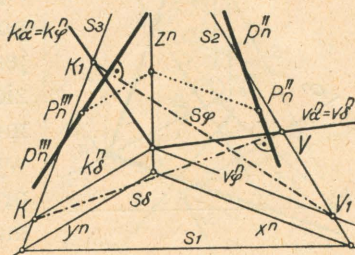
Na rzutni poziomej π_1 otrzymaliśmy tedy dwie proste prostopadłe $p' \perp h_a$. Skoro przez prostą h_a poprowadzimy (rys. 132) płaszczyznę poziomo-rzucającą ε ($h_\varepsilon^n = h_a^n, v_\varepsilon^n$), to (ust. 38) aksonometria p'_n promienia p' jest prostopadłą do śladu aksonometrycznego s_ε pomocniczej płaszczyzny ε . Dla prostej $p \perp \alpha$ rzuty aksonometryczne p^n i p'_n są zatem elementami:



Rys. 132.

Twierdzenie: Jeżeli prosta p jest prostopadłą do płaszczyzny α , to jej aksonometria p^n jest prostopadłą do śladu aksonometrycznego s_α tej płaszczyzny, a aksonometria p'_n rzutu poziomego owej prostej p jest prostopadłą do śladu aksonometrycznego s_ε pomocniczej płaszczyzny poziomo-rzucającej ε , poprowadzonej przez ślad poziomy h_a danej płaszczyzny α .

W zupełnie analogiczny sposób wykazać możemy, że dla prostej $p \perp \alpha$ aksonometria p''_n jej rzutu pionowego p'' jest prostopadłą do śladu aksonometrycznego s_δ (rys. 133) pomocniczej płaszczyzny $\delta \perp \pi_2$, która przechodzi przez ślad pionowy v_a danej płaszczyzny α (k_a^n, v_a^n). Skoro przez ślad boczny k_a płaszczyzny α poprowadzimy płaszczyznę $\varphi \perp \pi_3$, to do śladu aksonometrycznego s_φ prostopadłą będzie aksonometria p'''_n rzutu bocznego p''' uważanej prostej p .



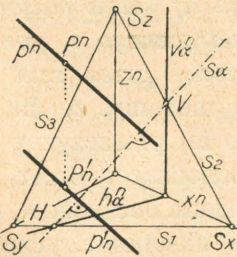
Rys. 133.

Ćwiczenie 1: Przez dany punkt $P(P^n, P'_n)$ poprowadzić (rysunek 132) prostą p , prostopadłą do danej płaszczyzny α (h_a^n, v_a^n).

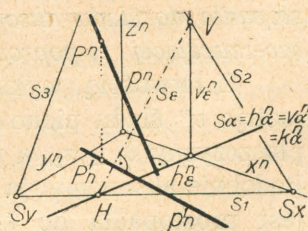
Ćwiczenie 2: Wykreślić rzuty aksonometryczne prostej p , prostopadłej do danej płaszczyzny α (v_a^n, k_a^n), jeśli owa prosta p przechodzi przez punkt P , dla którego dane są rzuty: a) P^n i P''_n , b) P^n i P'''_n , c) P''_n i P'''_n (por. rys. 133), d) P'_n i P''_n , e) P'_n i P'''_n .

Zadanie 1: Przez dany punkt $P(P^n, P'_n)$ poprowadzić prostą p , prostopadłą do płaszczyzny poziomo-rzucającej α ($h_a^n, v_a^n \parallel z^n$).

Rozwiązanie: Z łatwością zauważymy, że dla płaszczyzny $\alpha \perp \pi_1$ konstrukcja ogromnie się upraszcza. W tym wypadku bowiem (por. rys. 134) pomocnicza płaszczyzna ε , poprowadzona przez h_a prostopadłe do rzutni π_1 , zjednoczy się z daną płaszczyzną α . Rzuty aksonometryczne p^n



Rys. 134.



Rys. 135.

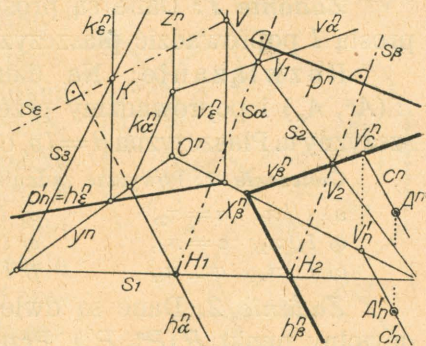
Zadanie 1: Dane są prosta p ($p^n \parallel p'_n$), równoległa do rzutni poziomej i dowolny punkt P (P^n, P'_n). Przez punkt P poprowadzić płaszczyznę β , prostopadłą do prostej p .

Rozwiązanie: Ponieważ $p \parallel \pi_1$, przeto płaszczyzna $\beta \perp p$ jest płaszczyzną poziomo-rzucającą. Dla płaszczyzny β wystarczy skonstruować ślad s_β , który jest prostą prostopadłą do elementu p^n . W tym celu wykreślimy (por. rys. 134) prostą $s_a \perp p^n$ i uważajmy ją za ślad aksonometryczny płaszczyzny $\alpha \perp p$ i $\alpha \perp \pi_1$. Przez ślady V i H owej prostej s_a przejdą aksonometrie $v_a^n \parallel z^n$ i h_a^n śladów pionowego v_a i poziomego h_a pomocniczej płaszczyzny poziomo-rzucającej α . Następnie przez dany punkt P (P^n, P'_n) poprowadzimy płaszczyznę $\beta \parallel \alpha$ (por. rys. 127), to otrzymana w ten sposób płaszczyzna β spełnia warunki zadania.

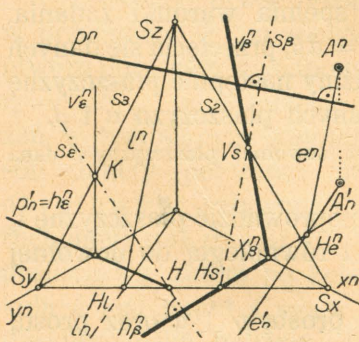
Ćwiczenie 1: Rozwiązać zadanie 1, jeżeli dana jest prosta p : a) $p \parallel \pi_2$, b) $p \parallel \pi_3$, c) $p \parallel \pi_a$, d) p leży na rzutni π_1 , (π_2 , wzgl. π_3).

Zadanie 2: Dana jest dowolna prosta p (p^n, p'_n) i punkt A (A^n, A'_n). Przez ów punkt należy poprowadzić płaszczyznę β , prostopadłą do prostej p .

Rozwiązanie 1: Na rys. 137 wyznaczono najpierw płaszczyznę α prostopadłą do danej prostej p (p^n, p'_n), a następnie przez dany punkt A (A^n, A'_n) poprowadzono płaszczyznę $\beta \parallel \alpha$. W tym celu przez prostą p przesunięto płaszczyznę poziomo-rzucającą ε ($h_\varepsilon^n = p^n$, $v_\varepsilon^n \parallel z^n$), a następnie z dowolnego punktu H_1 prostej s_1 wykreślono proste: $s_a \perp p^n$ i $h_a^n \perp s_\varepsilon$. Pierwsza z nich jest śladem aksonometrycznym, a druga aksonometrią śladu poziomego h_a płaszczyzny $\alpha \perp p$. Do wyznaczenia płaszczyzny β



Rys. 137.

Rys. 138¹⁾.

użyto prostej c ($c^n \parallel c'_n \parallel h_a^n$), przechodzącej przez punkt A i równoległej do śladu h_a płaszczyzny α .

Rozwiązanie 2: Płaszczyzna β , która przechodzi przez punkt A i jest prostopadła do prostej p , posiada tę własność, że każda prosta na niej leżąca jest prostopadłą do danego promienia p . Przez punkt A poprowadźmy (rys. 138) taką prostą pomocniczą e , która by leżała na płaszczyźnie β i była równoległą do rzutni aksonometrycz-

¹⁾ Na rysunku prostą v_ε^n oznaczać należy symbolem k_ε^n .

nej π_a . Owa prosta e spełnia zatem warunki: $e \perp p$ i $e \parallel \pi_a$, przeto jej aksonometria e^n jest prostopadłą do elementu p^n . Aby skonstruować rzut e'_n prostej $e \parallel \pi_a$, obieramy na rzutni π_a prostą l ($l^n \parallel e^n, l'_n$) równoległą do promienia e i przez punkt A'_n kreślimy prostą $e'_n \parallel l'_n$. Przez punkt $H_e^n = l^n l'_n$, t. zn. przez aksonometrię śladu poziomego H_e pomocniczej prostej e , przechodzi prosta $h_\beta^n \perp s_e$, a przez punkty $H_s = h_\beta^n s_1$ i $X_\beta^n = h_\beta^n x^n$ elementy $s_\beta \perp p^n$ i $v_\beta^n = X_\beta^n V_s$.

Ćwiczenie 2: Rozwiązać zadanie 2, jeżeli dane są elementy:

- | | |
|--|--|
| a) $p(p^n, p''_n)$ i $A(A^n, A''_n)$; | d) $p(p''_n, p'''_n)$ i $A(A''_n, A'''_n)$; |
| b) $p(p^n, p'''_n)$ i $A(A^n, A'''_n)$; | e) $p(p'_n, p''_n)$ i $A(A'_n, A''_n)$; |
| c) $p(p'_n, p''_n)$ i $A(A'_n, A''_n)$; | f) $p(p'_n \parallel p''_n)$ i $A(A'_n = A''_n)$. |

41. Płaszczyzny prostopadłe. Z rozważań ust. 4 wiadomo nam, że płaszczyzna β jest prostopadłą do danej płaszczyzny α wówczas, jeśli β przechodzi przez prostą $p \perp \alpha$, lub też jeśli β jest prostopadłą do pomocniczej prostej a , która leży na płaszczyźnie α . Korzystając z tych zależności, rozwiązać możemy następujące

Zadanie 1: Dane są prosta $l(l^n, l'_n)$ i płaszczyzna $\alpha(h_a^n, v_a^n)$. Przez prostą l poprowadzić płaszczyznę β , prostopadłą do płaszczyzny α .

Rozwiązanie: Na danej prostej l obierzmy dowolny punkt $A(A^n, A'_n)$ i poprowadźmy przezeń prostą $p(p^n, p'_n)$, prostopadłą do płaszczyzny α . Płaszczyzna $\beta = lp$, określona prostymi l i p , rozwiązuje zadanie.

Ćwiczenie 1: Powyższe zadanie rozwiązać, jeśli:

- | | | |
|--|--------------------------------------|--|
| a) $l \parallel \pi_1, \alpha = \pi_2$, | d) $l = x, \alpha$ dowolna, | g) l leży na $\pi_1, \alpha \perp \pi_2$ |
| b) $l \parallel \pi_2, \alpha = \pi_a$, | e) $l \perp \pi_2, \alpha = xA$, | h) $l \parallel \pi_3, \alpha \perp \pi_a$ |
| c) $l \parallel \pi_a, \alpha \perp \pi_1$, | f) $l \perp \pi_1, \alpha = \pi_a$, | i) $l \parallel \pi_a, \alpha \parallel x$. |

Zadanie 2: Dane są dwie płaszczyzny $\alpha(h_a^n, v_a^n)$ i $\beta(h_\beta^n, v_\beta^n)$, oraz dowolny punkt $P(P^n, P'_n)$. Przez ten punkt poprowadzić płaszczyznę ε , prostopadłą do danych płaszczyzn.

Rozwiązanie 1: Przez punkt P poprowadźmy proste $a \perp \alpha$ i $b \perp \beta$. Płaszczyzna $\varepsilon = ab$, określona prostymi a i b , spełnia warunki zadania.

Rozwiązanie 2: Wyznaczmy krawędź $c = \alpha\beta$, przecięcia się danych płaszczyzn α i β . Przez dany punkt P poprowadźmy następnie płaszczyznę $\varepsilon \perp c$, to płaszczyzna ε jest prostopadłą do danych płaszczyzn α i β .

Ćwiczenie 2: Zadanie 2 rozwiązać, jeśli zamiast dowolnej płaszczyzny β dana jest rzutnia: a) π_1 , b) π_2 , c) π_3 , d) π_a .

Zadanie 3: Przez dany punkt $P(P^n, P'_n)$ poprowadzić płaszczyznę ε , prostopadłą do danej płaszczyzny $\alpha(h_a^n, v_a^n)$ i równoległą do dowolnej prostej $l(l^n, l'_n)$.

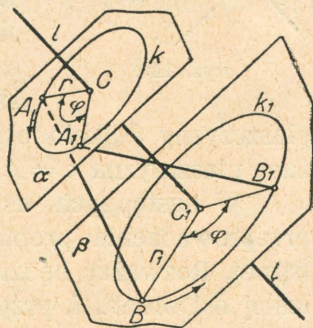
Rozwiązanie: Z punktu P wykreślimy prostą $p \perp \alpha$ oraz prostą $r \parallel l$. Płaszczyzna $\varepsilon = pr$, określona prostymi p i r , spełnia warunki zadania.

Ćwiczenie 3: Zadanie 3 rozwiązać, jeśli położenie prostej l określone jest warunkami, podanymi w ćwiczeniu 1.

Rozdział VI.

Obroty. Zmiana rzutni.

42. Ogólne uwagi o obrotach. Niechaj daną będzie w przestrzeni stała (nieruchoma) prosta l i dowolny utwór geometryczny Γ (np. wielokąt, wielościan, linja krzywa lub powierzchnia). Przez poszczególne punkty $A, B, \dots$ utworu Γ (rys. 139) poprowadźmy płaszczyzny: $\alpha \perp l, \beta \perp l, \dots$, prostopadłe do stałej prostej l i wyznaczmy punkty $C = l\alpha, C_1 = l\beta, \dots$, przecięcia się danego promienia l z płaszczyznami $\alpha, \beta, \dots$. Ponieważ płaszczyzna α jest prostopadłą do l , przeto odcinek $\overline{CA}$ jest prostopadły do elementu l i wyraża „odległość” punktu A od stałej prostej l . Podobnie dalsze odcinki $\overline{C_1B}, \dots$ są prostopadłe do prostej l i wyrażają odległości poszczególnych punktów $B, \dots$ od prostej l . Promieniami $r = \overline{CA}, r_1 = \overline{C_1B}, \dots$ zakresłmy odpow. na płaszczyznach $\alpha, \beta, \dots$ koła $k, k_1, \dots$ dla których punkty $C, C_1, \dots$ są ich środkami.

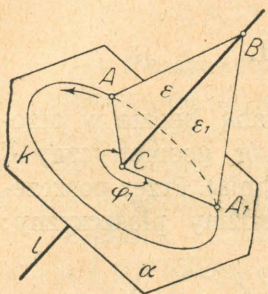


Rys. 139.

Uważany utwór geometryczny Γ niechaj zmienia swoje położenie w przestrzeni w ten sposób, aby: 1) poszczególne punkty $A, B, \dots$ tego utworu poruszały się odpowiednio po kołach $k, k_1, \dots$, 2) promienie $r = \overline{CA}, r_1 = \overline{C_1B}, \dots$ odchylały się równocześnie od swych pierwotnych położeń w tym samym kierunku i o ten sam kąt φ . Określone w ten sposób zmiany położenia utworu Γ w przestrzeni nazywamy ruchem obrotowym sztywnego utworu geometrycznego Γ około stałej (nieruchomej) osi obrotu l . Podczas tego obrotu każdy punkt A utworu Γ porusza się zatem po kole k , leżącym w płaszczyźnie $\alpha \perp l$; środkiem koła k jest punkt $C = l\alpha$, a promieniem odcinek $r = \overline{CA}$. Ogromnie silnie podkreślić musimy, że w czasie obrotu utworu Γ — wzajemne odległości pomiędzy poszczególnymi punktami $A, B, \dots$ uważanego utworu Γ nie ulegają zmianom. Rozważamy zatem tylko obroty utworów „sztywnych”.

Płaszczyzna α , poprowadzona przez uważany punkt A prostopadłe do osi obrotu l , jest płaszczyzną obrotu dla punktu A . Punkt $C = l\alpha$, w którym oś obrotu l przebija płaszczyznę obrotu α , nazywamy środkiem obrotu. Odcinek $r = \overline{CA}$, wyrażający odległość danego punktu A od środka obrotu C , wzgl. od osi obrotu l , jest promieniem obrotu dla punktu A .

Na rys. 139 wkreślono dwie płaszczyzny obrotu $\alpha \perp l$ i $\beta \perp l$ dla punktów A, B , oraz zaznaczono obrót odcinka $\overline{AB}$, dokoła nieruchomej osi l o kąt φ . Dany odcinek $\overline{AB}$ po dokonaniu obrotu zajął nowe



Rys. 140.

położenie $\overline{A_1B_1}$, przyczem obydwa odcinki $\overline{AB}$ i $\overline{A_1B_1}$ są skośne względem stałej osi obrotu l . Na rys. 140 przyjęto taki odcinek $\overline{AB}$, którego punkt B leży na osi obrotu l . Ponieważ punkt B nie zmienia swego położenia podczas dokonywanego obrotu, przeto wystarczy obrócić punkt A około osi l o φ_1 , aby uzyskać odcinek $\overline{A_1B}$. Weźmy wreszcie pod uwagę płaszczyznę $\varepsilon = Al$, określoną punktem A i prostą l . Aby obrócić płaszczyznę ε dokoła osi l , leżącej na tej płaszczyźnie, wystarczy obrócić dowolny punkt A

płaszczyzny ε około osi obrotu l . Po dokonaniu obrotu o φ_1 , uważana płaszczyzna $\varepsilon = Al$ zajmie nowe położenie, a mianowicie: $\varepsilon_1 = A_1l$.

W następnych ustępach zajmiemy się kwestią konstrukcyjnego przeprowadzenia problemu obrotów w metodzie aksonometrii prostokątnej. Rozważać będziemy obroty punktów, prostych i płaszczyzn około stałej osi obrotu l , przyczem owa oś l zajmować będzie położenie dowolne w przestrzeni albo też położenie szczególne względem rzutni π_1, π_2, π_3 i π_a . W aksonetrii prostokątnej ogromnie ważną rolę odgrywają obroty elementów zasadniczych (t. j. punktów, prostych i płaszczyzn) około osi, leżących na rzutni aksonometrycznej. Dowolną płaszczyznę α , wraz z prostymi i punktami na niej leżącymi, obrócić możemy około śladu aksonometrycznego $s_\alpha = \alpha\pi_a$ o taki kąt, aby po dokonaniu obrotu owa płaszczyzna α zjednoczyła się (padła na, nakryła się) z rzutnią aksonometryczną π_a . Powiadamy wówczas, że wykonaliśmy „kład” płaszczyzny α (wraz z jej punktami i prostymi) na rzutnię π_a . W czasie tego obrotu wzajemne ugrupowanie punktów i prostych, które leżą na płaszczyźnie α , nie ulega zmianie. Przez kład płaszczyzny α (wzgl. punktu A) na rzutnię aksonometryczną π_a rozumiemy zatem taki obrót płaszczyzny α około jej śladu aksonometrycznego s_α (wzgl. punktu A około osi leżącej na rzutni π_a), że po dokonaniu obrotu owa płaszczyzna (wzgl. ów punkt) zjednoczy się z rzutnią π_a .

Często jednak będziemy się posługiwać też kładami płaszczyzny α na płaszczyznę ε równoległą do rzutni aksonometrycznej π_a . Oś obrotu będzie wówczas krawędź $e = \alpha \varepsilon$, przecięcia się danej płaszczyzny α z płaszczyzną ε .

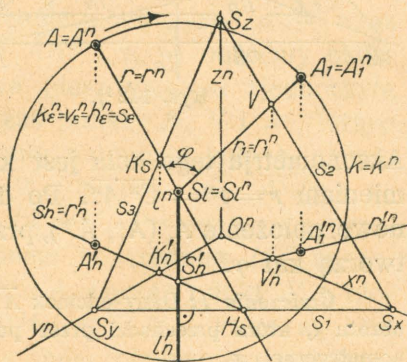
43. Oś obrotu prostopadła do rzutni aksonometrycznej.

Obierzmy (rys. 141) prostą l ($l^n, l'_n \perp s_1$) prostopadłą do płaszczyzny rysunku π_a , oraz dowolny punkt $A = A^n$ leżący na rzutni aksonometrycznej π_a . Prosta l uważajmy za oś obrotu i obróćmy dokoła niej dany punkt A o dowolny kąt φ .

Zanim przystąpimy do konstrukcyjnego rozwiązania tego zagadnienia, wypowiemy pewną uwagę. W każdej metodzie geometrii wykreślnej, gdy chodzi o problem obrotów, należy ustalić przedewszystkiem: 1) oś obrotu, 2) płaszczyznę obrotu, 3) środek obrotu i 4) promień obrotu, a wówczas rozwiązanie odnośnego zagadnienia nie nastręczy zbytnich trudności.

W naszym przykładzie dana jest oś obrotu $l \perp \pi_a$. Płaszczyzna obrotu, poprowadzona z danego punktu A (rys. 141) prostopadłe do osi l , nakrywa się z rzutnią aksonometryczną (płaszczyzną rysunku) π_a . Aby wyznaczyć środek obrotu $S_l = l \pi_a$, t. j. punkt przecięcia się osi l z płaszczyzną obrotu π_a , przesuniemy np. płaszczyznę aksonometrycznie-rzucającą $\varepsilon = lA$. Prosta $s_\varepsilon = AS_l$ jest oczywiście śladem aksonometrycznym pomocniczej płaszczyzny $\varepsilon \perp \pi_a$. Skoro dla prostej $s_\varepsilon = AS = H_s K_s$ wyznaczmy aksonometrię $s'_n = H_s K'_n$ jej rzutu poziomego s' , to owa prosta przetnie się z elementem l'_n w szukanym punkcie $S'_n = s'_n l'_n$. Środek obrotu S_l (S_l^n, S'_n) i dany punkt A ($A = A^n$) wyznaczają promień obrotu $r = \overline{S_l A}$, który zjednoczył się ze śladem s_ε . Odcinki $r = r^n = \overline{S_l A} = \overline{S_l A^n}$ i $r'_n = \overline{S'_n A'_n}$ są rzutami aksonometrycznymi owego promienia obrotu.

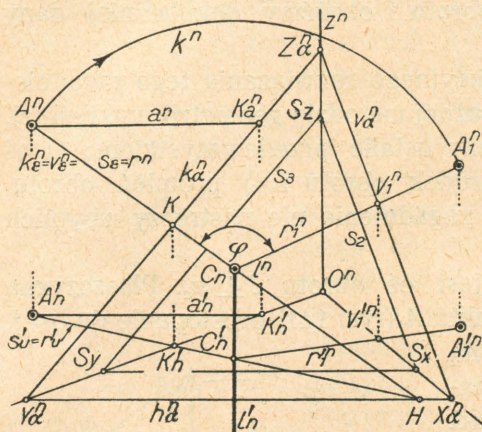
Teraz dopiero przystąpić możemy do rozwiązania właściwego zadania: obrotu punktu A około osi l o dany $\angle \varphi$. Punkt A w czasie obrotu porusza się po kole k , o środku S_l i promieniu $r = \overline{S_l A}$, które leży na płaszczyźnie obrotu π_a . Po dokonanych obrocie punkt A zajmie nowe położenie A_1 , a promień $r = \overline{S_l A}$ nowe położenie $r_1 = \overline{S_l A_1}$. Za pośrednictwem śladu pionowego $V = r_1 s_2$ promienia r_1 , wyznaczmy najpierw rzut $r'_1 = \overline{S'_n V'_n}$, a następnie aksonometrię A'_1 rzutu poziomego A'_1 wynikowego punktu A_1 .



Rys. 141.

Zadanie: Dane są trójkąt śladów aksonometrycznych, prosta l ($l^n, l'_n \perp s_1$) prostopadła do rzutni aksonometrycznej π_a i dowolny punkt A (A^n, A'_n). Należy obrócić punkt A dokoła osi l o dowolny kąt.

Rozwiązanie: Przez punkt A poprowadźmy (rys. 142) płaszczyznę obrotu $\alpha \perp l$. Ponieważ $l \perp \pi_a$, przeto $\alpha \parallel \pi_a$. Celem wyznaczenia aksonometrii k_a^n śladu bocznego k_a owej płaszczyzny α , wykreślmy rzuty $a^n \parallel a'_n \parallel s_1$ pomocniczej prostej a , która przechodzi przez dany punkt

Rys. 142¹⁾.

A (A^n, A'_n) i jest równoległą do boku s_1 trójkąta śladów aksonometrycznych. Przez aksonometrię K_a^n śladu bocznego K_a prostej a przechodzi żądana prosta $k_a^n \parallel s_3$. Przez punkt $Z_a^n = z^n k_a^n$ przechodzi prosta $v_a^n \parallel s_2$, a przez punkt $Y_a^n = y^n k_a^n$ element $h_a^n \parallel s_1$. Oś obrotu l przebiega płaszczyznę obrotu α (h_a^n, v_a^n) w punkcie C ($C^n, C'_n = l'_n s'_n$), który jest środkiem obrotu. Promieniem obrotu $r = \overline{CA}$, którego rzutami są odcinki $r^n = \overline{C^n A^n}$ i $r'_n = \overline{C'_n A'_n}$, należy zakreślić koło k , leżące na płaszczyźnie $\alpha \parallel \pi_a$.

Aksonometria tego koła jest kołem k^n , zakreślonym ze środka C^n promieniem $r = r^n = \overline{C^n A^n}$. Po dokonanych obrocie dany punkt A zajmie nowe położenie A_1 ($A_1^n, A_1'_n$), przyczem promienie $r^n = \overline{C^n A^n}$ i $r'_n = \overline{C'_n A'_n}$ tworzą kąt φ .

Ćwiczenie 1: Dany odcinek $\overline{AB}$ ($\overline{A^n B^n}, \overline{A'_n B'_n}$) obrócić o dowolny kąt dokoła osi obrotu l , która przechodzi przez punkt B (B^n, B'_n) i jest prostopadła do rzutni aksonometrycznej π_a .

Ćwiczenie 2: Rozwiązać ćwiczenie 1, jeżeli oś obrotu $l \perp \pi_a$ nie przecina wcale (jest skośną względem) danego odcinka AB .

44. Kład płaszczyzny aksonometrycznie- i poziomo-rzucającej. Obierzmy dowolny ostrokątny trójkąt śladów aksonometrycznych ($s_1 s_2 s_3$) i płaszczyznę α (rys. 143), prostopadłą do boku s_1 . Płaszczyzna α jest (ust. 4) prostopadłą do rzutni poziomej π_1 i rzutni aksonometrycznej π_a . Uważaną płaszczyznę α obróćmy dokoła jej śladu aksonometrycznego $s_a = HV$ tak, aby po dokonanych obrocie α padła na rzutnię π_a . Aby wykonać ów kład elementu α , wystarczy obrócić punkt np. $A = x\alpha$, przebiecia się osi x z płaszczyzną α , około osi obrotu s_a . Płaszczyzną obrotu dla punktu A ($A^n = A'_n$) jest płaszczyzna $\gamma \perp s_a$, której ślad akso-

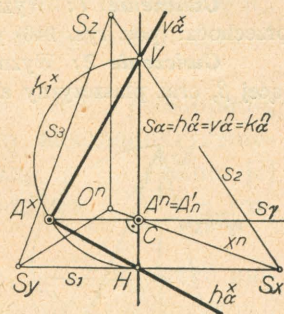
¹⁾ Punkty H i K oznaczyć należy na rysunku symbolami H^n i K^n , a prostą $s'_u = r'_u$ symbolem $s'_n = r'_n$.

nometryczny s_γ jest prostopadły do osi s_a i przecina się z nią w środku obrotu $C = s_\gamma s_a$. Skoro z punktu C , jako środka, zakreślmy promieniem $r = \overline{CA}$ koło k na płaszczyźnie obrotu γ , to po owym kole poruszać się będzie dany punkt A w czasie swego obrotu dokoła osi s_a . Każdy z dwóch punktów, w których owe koło przetnie się ze śladem s_γ , uważać możemy za kład punktu A na rzutni π_a . Ponieważ jednak nie znamy prawdziwej długości promienia $r = \overline{CA}$ pomocniczego koła k , przeto omówionej poprzednio konstrukcji zastosować bezpośrednio nie możemy.

Aby jednak wykonać kład punktu A za-
uważmy, że ów punkt A i ślady $H = s_1 s_a$,
 $V = s_2 s_a$ prostej s_a są wierzchołkami trójkąta prostokątnego (AHV). Przyprostokątniami tego trójkąta są odcinki $\overline{AH}$ i $\overline{AV}$, leżące odpowiednio na śladach poziomym h_a i pionowym v_a danej płaszczyzny $\alpha \perp \pi_1$, a przeciwprostokątnią jest odcinek $\overline{HV}$, leżący na śladzie aksonometrycznym $s_a = \overline{HV}$ owej płaszczyzny. Na trójkącie (AHV) opiszmy koło k_1 , o średnicy $\overline{HV}$, a następnie płaszczyznę α — wraz z trójkątem (AHV), kołem k_1 i odcinkiem $\overline{AA''} \perp s_a$ — obróćmy około osi s_a tak, aby po dokonaniu obrotu owa płaszczyzna α zjednoczyła się z rzutnią aksonometryczną π_a . Wówczas punkty H , V i A'' , leżące na osi obrotu s_a , nie zmieniają swego położenia, natomiast koło k_1 zajmie (rys. 143) nowe położenie k_1^x , odcinek $\overline{AA''} \perp s_a$ położenie $\overline{A^x A''} \perp s_a$, a omawiany trójkąt prostokątny położenie ($A^x HV$). Prosta $s_\gamma \perp s_a$ przecina się z pomocniczym kołem k_1^x , zakreślonym na średnicy $\overline{HV}$, w szukanym punkcie A^x , który jest kładem punktu A . Łącząc punkt A^x z elementami H i V , otrzymamy proste $h_a^x = A^x H$ i $v_a^x = A^x V$, które są kładami śladów poziomego h_a i pionowego v_a danej płaszczyzny α . Przeprowadzoną konstrukcję nazywamy: kładem płaszczyzny α ($h_a^n = v_a^n = s_a$) na rzutnię aksonometryczną π_a , dokonanym około osi obrotu s_a .

Zadanie: Wykonać kład płaszczyzny ζ , która przechodzi przez oś z i jest prostopadła do rzutni π_a , na rzutnię aksonometryczną.

Rozwiązanie: Płaszczyzna ζ jest prostopadła do boku s_1 (rysunek 144), a jej ślad aksonometryczny s_ζ zjednoczył się z osią aksonometryczną z^n i przecina się z bokiem s_1 w punkcie 1. Skoro na trójkącie prostokątnym ($O1S_z$) opiszemy koło k_1 , którego średnicą jest przeciwprostokątnia $\overline{1S_z}$, a następnie — w sposób poprzednio omówiony (por. też ust. 12 rys. 14 i 15) — wykonamy kład płaszczyzny ζ na rzutnię π_a , uważając $s_\zeta = z^n$ za oś obrotu, to w kładzie otrzymamy: koło k_1^x i trójkąt prostokątny ($O^x 1S_z$), przyczem odcinek $\overline{O^x O^n}$ jest prostopadły do osi s_ζ . Punkt O^x jest kładem środka O układu odniesienia $O[x, y, z]$.



Rys. 143.

obrotu s_ζ , przeto jej kład b° pozostanie prostopadły do elementu s_ζ . Prosta b° , wykreślona z punktu A^n prostopadłe do boku s_ζ , przetnie kład x° osi x w punkcie A° , który jest kładem danego elementu A na rzutnię π_a . Odcinek $A^n A^\circ$ rozwiązuje zadanie, gdyż równa się odległości punktu A od rzutni aksonometrycznej.

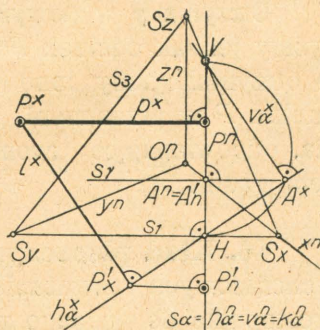
Rozwiązanie 2: Przez pomocniczą prostą $b = AA^n$, prostopadłą do rzutni π_a , poprowadźmy (rys. 143) płaszczyznę aksonometrycznie- i poziomo-rzucającą α . Wykonajmy kład płaszczyzny $\alpha \perp s_1$ około jej śladu aksonometrycznego s_a , to uzyskany w kładzie odcinek $A^n A^x \perp s_a$ rozwiązuje zadanie.

Rozwiązanie 3: Zamiast płaszczyzny $\alpha \perp \pi_a$ i $\alpha \perp \pi_1$, użyć możemy do konstrukcji płaszczyzny $\beta \perp \pi_a$ i $\beta \perp \pi_2$. Pomocnicza płaszczyzna β (rys. 145) jest prostopadła do boku s_2 trójkąta śladów aksonometrycznych. Przy pomocy kładu elementu β na rzutnię π_a , wyznaczmy kład A^x danego punktu A , a zarazem odległość owego punktu od rzutni π_a , równą odcinkowi $A^n A^x$.

Ćwiczenie 1: Zadanie 1 rozwiązać wówczas, jeżeli dany punkt leży: a) na osi y (rys. 145), b) na osi z (rys. 144).

Zadanie 2: Wyznaczyć odległość danego punktu P (P^n , P'_n) od rzutni aksonometrycznej π_a .

Rozwiązanie: Aby wyznaczyć długość odcinka $\overline{PP^n}$, poprowadźmy (rys. 147) przez prostą $p = PP^n$ prostopadłą do rzutni π_a płaszczyznę aksonometrycznie- i poziomo-rzucającą α ($h_a^n = v_a^n = s_a$). W sposób omówiony w poprzednim ustępie, wykonamy kład płaszczyzny $\alpha \perp s_1$ na rzutnię aksonometryczną π_a , otrzymując klady h_a^x i v_a^x śladów poziomego i pionowego owej płaszczyzny. Z łatwością zauważymy, że na pomocniczej płaszczyźnie α leżą proste $p = PP^n$ i $P'P'_n$, prostopadłe do rzutni π_a a zarazem i do śladu s_a . Klady owych prostych otrzymamy, jeśli z punktów P^n i P'_n wykreślimy promienie $p^x \perp s_a$ i $P'_n P'_x \perp s_a$. Rzut poziomy P' punktu P leży na śladzie poziomym h_a płaszczyzny α ; kład P'_x owego rzutu poziomego przynależy zatem do elementu h_a^x . Celem uzyskania kładu P^x danego punktu P , weźmy pod uwagę prostą $l = PP'$, łączącą punkt P z jego rzutem poziomym P' . Prosta l leży na płaszczyźnie α i jest prostopadła do rzutni poziomej π_1 , a zatem prosta l spełnia warunek prostopadłości: $l \perp h_a$. Kład owej prostej l schodzi się z promieniem l^x , wykreślonym z punktu P'_x prostopadłe do elementu h_a^x . Uzyskane w ten sposób proste $p^x \perp s_a$ i $l^x \perp h_a^x$ przecinają się w punkcie $P^x = p^x l^x$, który



Rys. 147.

jest kładem danego punktu P na rzutnię π_a . Odcinek $\overline{P^n P^\times}$ wyraża odległość punktu P od rzutni aksonometrycznej.

Ćwiczenie 2: Wyznaczyć odległość danego punktu $P (P^n, P''')$ od rzutni π_a , używając do konstrukcji płaszczyzny aksonometrycznie- i pionowo-rzucającej.

Ćwiczenie 3: Wyznaczyć odległość danego punktu $P (P^n, P''')$ od rzutni π_a . Konstrukcję należy przeprowadzić zapomocą płaszczyzny aksonometrycznie- i boczno-rzucającej.

Zadanie 3: Dane są aksonometrie P^n pewnego punktu P i odległość owego punktu P od rzutni aksonometrycznej. Wyznaczyć rzut aksonometryczny P'_n uważanego punktu P .

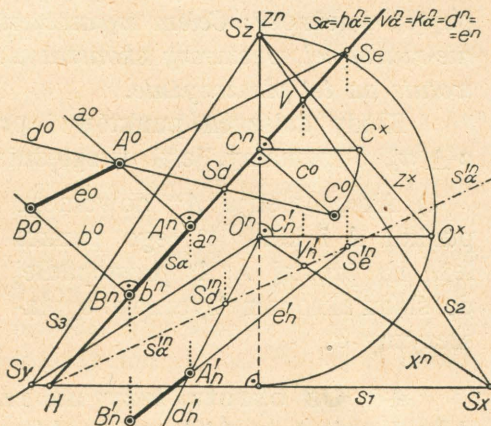
Rozwiązanie: W punkcie P^n (rys. 147) poprowadźmy prostą $p \perp \pi_a$ i odłóżmy na niej odcinek $\overline{P^n P}$, po jednej lub drugiej stronie rzutni aksonometrycznej (płaszczyzny rysunku) π_a — to otrzymamy w przestrzeni żądany punkt P . Celem wyznaczenia aksonometrii P'_n rzutu poziomego P' punktu P , poprowadźmy przez promień $p \perp \pi_a$ płaszczyznę np. prostopadłą do boku s_1 i wykonajmy kład owej płaszczyzny α na rzutnię π_a , obracając α dookoła śladu aksonometrycznego $s_a \perp s_1$. Po dokonanych obrocie prosta p zajmie położenie $p^\times \perp s_a$, a punkt P położenie $P^\times$, przy czym (rys. 147) odcinek $\overline{P^n P^\times}$ równa się danej odległości punktu P od rzutni π_a . Z punktu $P^\times$ wykreślmy następnie prostą $l^\times \perp h_a^\times$, a z punktu $P'_\times = l^\times \cap h_a^\times$ promień $P'_\times P'_n$ prostopadły do osi obrotu s_a . Z łatwością stwierdzimy, że element $P'_\times$ jest kładem rzutu poziomego P' punktu P na rzutnię π_a , a punkt P'_n jest wreszcie aksonometrią punktu P' .

Otrzymany w powyższy sposób punkt P'_n rozwiązuje zadanie. Gdybyśmy jednak odcinek $\overline{P^n P^\times}$ odłożyli po przeciwnej stronie osi obrotu s_a , to otrzymalibyśmy inne punkty $P'_\times$ i P'_n , ustalające położenie drugiego punktu P w przestrzeni. Zadanie nasze posiada zatem dwa rozwiązania, odpowiadające dwom punktom P , symetrycznie ułożonym względem rzutni π_a .

46. Kład płaszczyzny aksonometrycznie-rzucającej. W dotychczasowych rozważaniach omawialiśmy klady płaszczyzn, które były prostopadłe do jednego z boków trójkąta śladów aksonometrycznych, t. zn. płaszczyzn prostopadłych do rzutni π_a i do jednej z trzech rzutni układu $O[x, y, z]$. Teraz zajmiemy się kładem (obrotem) płaszczyzny aksonometrycznie-rzucającej α , która nachylona jest pod dowolnymi kątami do rzutni π_1, π_2 i π_3 układu $[O]$.

Na uważanej płaszczyźnie $\alpha \perp \pi_a$ obierzmy (rys. 148) dwa dowolne punkty $A (A^n, A'_n)$ i $B (B^n, B'_n)$. Aksonometrie A^n i B^n owych punktów leżą oczywiście na śladzie aksonometrycznym s_a płaszczyzny α . Płaszczyznę α obróćmy około osi obrotu s_a i połóżmy ją na rzutnię π_a . Ponieważ proste $a = AA^n$ i $b = BB^n$, leżące na płaszczyźnie α , są prostopadłe do

rzutni π_a i do osi obrotu s_a , przeto kłady tych promieni zajmą nowe położenia: $a^o \perp s_a$ i $b^o \perp s_a$. Celem uzyskania kładów A^o i B^o danych punktów A i B , należałoby na elementach a^o , b^o odłożyć odcinki $\overline{A^n A^o}$, $\overline{B^n B^o}$, wyrażające odległości owych punktów A i B od rzutni aksonometrycznej π_a . Długości tych odcinków moglibyśmy wyznaczyć (por. rys. 147) w sposób, podany w ust. 45. Powyższa metoda byłaby jednak zbyt uciążliwą i dlatego też nie stosujemy jej bezpośrednio. Celem uproszczenia konstrukcji, weźmy pod uwagę punkt przecięcia się płaszczyzny $\alpha \perp \pi_a$ z jedną osią układu $O[x, y, z]$. Na rys. 148 uwzględniono punkt $C = \alpha z$, którego aksonometria jest punktem $C^n = s_a z^n$, a którego rzut C^n zjed-



Rys. 148.

noczył się ze środkiem O^n . W poznany poprzednio sposób wyznaczmy odległość punktu C od rzutni π_a , równą odcinkowi $\overline{C^n C^x}$, a następnie odłożymy odcinek $\overline{C^n C^o} = \overline{C^n C^x}$ na prostej $c^o \perp s_a$. Element c^o jest kładem prostej $c = CC^n$, prostopadłej do rzutni π_a , a tem samem prostopadłej i do osi obrotu s_a , a punkt C^o jest kładem punktu C na rzutnię aksonometryczną.

Skoro wyznaczyliśmy kład C^o punktu C , to kłady $A^o, B^o, \dots$ dalších punktów płaszczyzny α uzyskamy w sposób następujący. Oznaczmy przez d i e proste, które łączą punkt A z elementami C i B . Aksonometrije d^n i e^n owych prostych $d = CA$, $e = AB$ zjednoczyły się ze śladem aksonometrycznym $s_a = HV$ płaszczyzny α , a aksonometrije ich rzutów poziomych d' , e' są prostami $d'_n = C'_n A'_n$, $e'_n = A'_n B'_n$. Dwa ostatnie promienie przecinają się z rzutem aksonometrycznym $s'_a = HV'_n$ elementu s'_a w punktach S'_d i S'_e o tej własności, że odnoszące $S'_d S_d \parallel z^n$ i $S'_e S_e \parallel z^n$ wyznaczają (ust. 34) na prostej s_a ślady aksonometryczne S_d i S_e prostych d i e . Ponieważ punkty S_d i S_e leżą na osi obrotu s_a , przeto, po wykonaniu kładu płaszczyzny α na rzutnię π_a , ślady aksonometryczne S_d i S_e pomocniczych prostych $d = CA$ i $e = AB$ nie zmieniają wcale swego położenia. Łącząc tedy poprzednio wyznaczony kład C^o punktu C ze śladem S_d , uzyskamy kład $d^o = C^o S_d$ prostej d . Element d^o przecina się z prostą $a^o \perp s_a$ w punkcie $A^o = d^o a^o$, który jest kładem punktu $A = da$, przynależnego do prostych d i a . Dla drugiej prostej $e = AB$ otrzymamy jej kład e^o , skoro kład A^o punktu A połączymy ze śladem aksonometrycznym S_e owego promienia e . Proste $e^o = S_e A^o$ i $b^o \perp s_a$ prze-

cinają się w punkcie $B^o = e^o b^o$, który jest kładem danego punktu B . W analogiczny sposób wyznaczyć możemy klady dowolnej ilości prostych i punktów, które leżą na płaszczyźnie aksonometrycznie-rzucającej α .

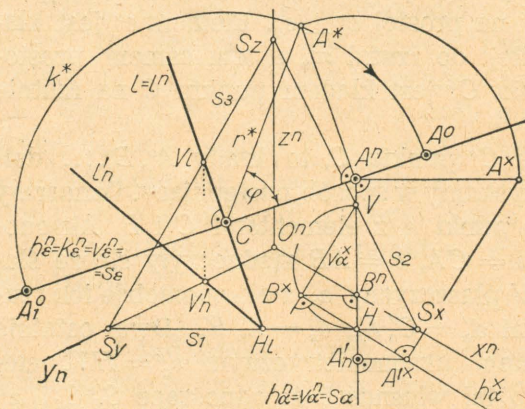
Z rozważań naszych i przeprowadzonej konstrukcji wynika następująca zależność: *Celem wyznaczenia klady płaszczyzny aksonometrycznie-rzucającej, wystarczy skonstruować kład jednego punktu, leżącego dowolnie na tej płaszczyźnie.*

Klady dalszych punktów i prostych, które leżą na płaszczyźnie $\alpha \perp \pi_a$, otrzymamy, jeśli uwzględnimy związki:

1) Aksonometria A^n dowolnego punktu A i kład A^o tego punktu leżą na prostej $A^n A^o$ prostopadłej do śladu aksonometrycznego s_a płaszczyzny α .

2) Dla prostej $e = AB$ jej kład $e^o = A^o B^o$ przechodzi przez klady A^o i B^o punktów A i B , oraz przez ślad aksonometryczny S_e uważanej prostej e .

47. Oś obrotu leży na rzutni aksonometrycznej. Niechaj dana będzie (rys. 149) prosta l ($l = l^n, l_n$), leżąca na rzutni aksonometrycznej π_a , oraz dowolny punkt A (A^n, A_n). Prosta l uważamy za oś obrotu i obróćmy dookoła niej dany punkt A o taki kąt, aby ów punkt po dokonanych obrocie padł na rzutnię π_a . Celem wyznaczeniażądanego



Rys. 149.

klady elementu A na rzutnię π_a , poprowadźmy przez punkt A płaszczyznę obrotu ε prostopadłą do osi obrotu l . Ponieważ l przynależy do π_a , przeto płaszczyzna $\varepsilon \perp l$ jest płaszczyzną aksonometrycznie-rzucającą. Ślad aksonometryczny płaszczyzny obrotu ε jest promieniem s_e , wykreślonym z punktu A^n prostopadłe do osi obrotu l . Punkt $C = ls_e$, przecięcia się prostych l i s_e , jest środkiem obrotu dla punktu A , a odcinek

$\overline{CA}$ promieniem obrotu. Podczas obrotu punktu A około osi l , element A porusza się po kole k , leżącym oczywiście na płaszczyźnie obrotu ε . Środkiem koła k jest punkt C , a promieniem odcinek $r = CA$. Punkty A^o i A_1^o , przecięcia się owego koła k z rzutnią π_a , wzgl. ze śladem s_e płaszczyzny obrotu ε , rozwiązują nasze zadanie. Celem skonstruowania tych punktów, należy wyznaczyć rzeczywistą wielkość promienia r , a to uskutecznimy skoro weźmiemy pod uwagę trójkąt prostokątny (CAA^n) . Odcinek $\overline{AA^n} \perp \pi_a$ jest jedną przyprostokątną, odcinek

nek $\overline{CA^n}$, t. zn. odległość aksonometrii A^n danego punktu A od środka obrotu C , jest drugą przyprostokątnią owego trójkąta, a promień obrotu $r = \overline{CA}$ jest jego przeciwprostokątnią. Ponieważ odcinek $\overline{CA^n}$ leży na rzutni π_a , przeto znamy prawdziwą długość przyprostokątnej $\overline{CA^n}$. Druga przyprostokątnia $\overline{AA^n}$ wyraża odległość punktu A od rzutni π_a ; przy pomocy płaszczyzny $\varepsilon \perp s_1$ skonstruujemy odcinek $\overline{A^n A^x}$ równy co do długości przyprostokątnej $\overline{AA^n}$.

Płaszczyznę $\varepsilon \perp l$, wraz z trójkątem prostokątnym (CAA^n) i kołem k , obróćmy około śladu s_ε i połączmy ją na rzutnię π_a . Po dokonanym kładzie płaszczyzny $\varepsilon \perp \pi_a$, omawiany trójkąt prostokątny zajmie (rys. 149) położenie (CA^*A^n) , przyczem przyprostokątnia $\overline{A^n A^*} = \overline{A^n A^x}$ a koło k zajmie położenie koła k^* . Oznaczmy przez A^o i A_1^o punkty przecięcia się koła k^* ze śladem s_ε płaszczyzny ε , a następnie obróćmy trójkąt (CA^*A^n) i koło k^* dokoła osi s_ε tak, aby utwory te zajęły z powrotem swoje dawne położenie na płaszczyźnie $\varepsilon \perp \pi_a$. Ponieważ punkty A^o i A_1^o leżą na śladzie s_ε , przeto koło k (leżące na ε !) przecina się w owych punktach z rzutnią aksonometryczną π_a . Jeżeli punkt A obrócimy około danej osi obrotu l o kąt $\varphi = \sphericalangle A^*CA^o$, to wówczas element A — poruszający się po kole k — zajmie nowe położenie i zjednoczy się z punktem A^o . Punkt A jednak poruszać się może po kole k w kierunku przeciwnym do poprzedniego i po obrocie o $\sphericalangle 180^\circ - \varphi = \sphericalangle A^*CA_1^o$ padnie na rzutnię aksonometryczną π_a w punkcie A_1^o . Skonstruowane w powyżej omówiony sposób punkty A^o i A_1^o nazywamy: kładami danego punktu A na rzutnię aksonometryczną π_a , uzyskanymi przez obrót elementu A dokoła osi l .

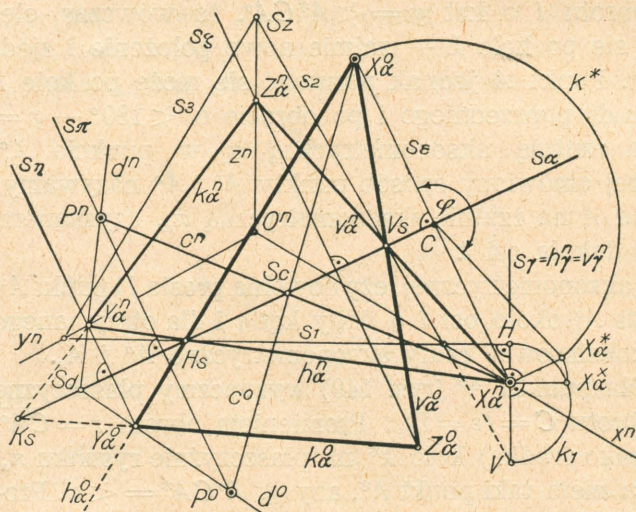
Zadanie: Na rzutni aksonometrycznej leży dowolna prosta l i punkt A^o . Należy obrócić ów punkt A^o około osi l o dany kąt φ i dla otrzymanego po obrocie punktu A skonstruować rzuty aksonometryczne A^n i A_1^n .

Rozwiązanie: Dla punktu A^o (rys. 149) wyznaczmy płaszczyznę obrotu $\varepsilon \perp l$ i środek obrotu $C = l\varepsilon = ls_\varepsilon$. Promieniem obrotu $r = \overline{CA^o}$, zakreślmy (z punktu C jako środka) koło k^* na płaszczyźnie rysunku π_a , a następnie obierzmy na niem taki punkt A^* , aby $\sphericalangle A^oCA^* = \sphericalangle \varphi$. Prosta A^*A^n , prostopadła do śladu s_ε , wyznacza na tym śladzie punkt A^n , który jest rzutem aksonometrycznym żadanego punktu A . W istocie bowiem, skoro koło k^* i odcinek $\overline{A^*A^n} \perp s_\varepsilon$ obrócimy około osi s_ε tak, aby po dokonanym obrocie utwory te padły na płaszczyznę $\varepsilon \perp \pi_a$, to koło k^* zajmie nowe położenie k , a odcinek $\overline{A^*A^n}$ położenie $\overline{AA^n} \perp \pi_a$, przyczem $\sphericalangle A^oCA = \sphericalangle \varphi$. Dla otrzymanego w powyższy sposób punktu A , (który leży na kole k), jego aksonometria schodzi się z punktem A^n , a odcinek $\overline{AA^n} = \overline{A^*A^n}$ wyraża odległość punktu A od rzutni aksonometrycznej π_a . Znając aksonometrię A^n i długość odcinka $\overline{AA^n}$, wykre-

ślić możemy (ust. 45, zadanie 3) rzut aksonometryczny A'_n żadanego punktu A .

Ćwiczenie : Punkt A (A^n, A'_n) obrócić o kąt 60° dokoła danej prostej l ($l = l^n, l'_n$), leżącej na rzutni aksonometrycznej; dla uzyskanego po tym obrocie punktu A_1 skonstruować rzuty aksonometryczne A_1^n i $A_1'^n$.

48. Kład dowolnej płaszczyzny. Wykonać kład danej płaszczyzny α (h_a^n, v_a^n) na rzutnię aksonometryczną π_a (rys. 150) znaczy to: obrócić ową płaszczyznę α dokoła jej śladu aksonometrycznego s_a tak, aby α po obrocie padła na rzutnię π_a . Poszczególne punkty płaszczyzny α w czasie tego obrotu poruszają się będą po kołach, które leżą na płaszczyznach obrotu, poprowadzonych przez uważane punkty prostopadłe do osi obrotu s_a . Weźmy np. pod uwagę punkt $X_a = x\alpha$, przebiecia się osi x z daną płaszczyzną α . Przez X_a poprowadźmy płaszczyznę obrotu $\varepsilon \perp s_a$, to prosta s_ε , wykreślona z punktu X_a^n prostopadłe do osi obrotu s_a , jest śladem aksonometrycznym płaszczyzny ε , a punkt $C = s_a s_\varepsilon$ jest środkiem obrotu. Podczas obrotu płaszczyzny α około osi s_a , punkt X_a



Rys. 150.

poruszać się będzie po kole k , leżącym na płaszczyźnie $\varepsilon \perp s_a$ i zakreślonym ze środka C promieniem $r = CX_a$. Kład punktu X_a zjednoczy się z elementem X_a^o , jak to wynika z konstrukcji (por. ust. 47), uwidocznionej na rys. 150. W podobny sposób moglibyśmy dla poszczególnych punktów $Y_a, Z_a, P, \dots$ płaszczyzny α skonstruować ich kłady $Y_a^n, Z_a^n, P^n, \dots$. Pomiędzy aksonometrijami wymienio-

nych punktów i kładami tych punktów zachodzi ten związek, że proste: $X_a^n X_a^o, Y_a^n Y_a^o, Z_a^n Z_a^o, P^n P^o, \dots$ są prostopadłe do osi obrotu s_a .

Skoro wyznaczyliśmy kład X_a^n punktu X_a , to zbyteczne jest przeprowadzanie tej samej konstrukcji dla dalszych punktów płaszczyzny α . Niechaj P^n będzie aksonometrią dowolnego punktu P , leżącego na α . Kład P^o tego punktu leżeć będzie na prostej s_{π} , poprowadzonej z elementu P^n prostopadłe do osi obrotu s_a . Punkty P i X_a wyznaczają prostą $c = PX_a$, leżącą na danej płaszczyźnie α ; prosta $c^n = P^n X_a^n$ jest akso-

nometrią prostej c , a punkt $S_c = c^n s_a$ jest śladem aksonometrycznym owej prostej. Skoro wykonamy kład płaszczyzny α , to kład c^o elementu $c = PX_a$ przechodzić będzie oczywiście przez klady P^o i X_a^o punktów P i X_a , oraz przez ślad S_c , leżący na osi obrotu s_a . Łącząc tedy punkty S_c i X_a^o , otrzymamy kład $c^o = S_c X_a^o$ pomocniczej prostej c , a następnie kład $P^o = c^o s_{\pi}$ uważanego punktu P .

W zupełnie analogiczny sposób, używając do pomocy punktów (śladów) H_s , V_s i K_s osi obrotu s_a , wyznaczyć możemy klady punktów Y_a i Z_a . Proste $h_a^o = H_s X_a^o$ i $v_a^o = V_s X_a^o$ są kładami śladów poziomego h_a i pionowego v_a płaszczyzny α . Promienie $s_\eta \perp s_a$ i $s_\zeta \perp s_a$, przechodzące przez punkty Y_a^n i Z_a^n , przecinają się z elementami h_a^o i v_a^o w takich punktach Y_a^o i Z_a^o , że prosta $k_a^o = Y_a^o Z_a^o$ jest kładem śladu bocznego k_a płaszczyzny α . O ile konstrukcja jest dokładnie przeprowadzona, to proste h_a^n i k_a^n przecinać się muszą w punkcie K_s , leżącym na osi obrotu s_a .

Pomiędzy rzutami aksonometrycznymi $P^n, \dots, c^n, \dots$ punktów $P, \dots$ i prostych $c, \dots$, leżących na dowolnej płaszczyźnie α , a kładami $P^o, \dots, c^o, \dots$ tych elementów na rzutnię π_a , uzyskanymi przez obrót płaszczyzny α dokoła śladu aksonometrycznego s_a , zachodzą następujące zależności:

1. Aksonometria P^n dowolnego punktu P i jego kład P^o leżą na prostej prostopadłej do osi obrotu s_a .

2. Aksonometria c^n dowolnej prostej c i kład c^o owej prostej przecinają się na osi obrotu s_a .

3. Jeżeli elementy P^n i c^n przynależą do siebie, to również w kładzie punkt P^o i prosta c^o są elementami, przynależnymi do siebie.

Teraz wypowiedzieć możemy (por. też ust. 46) następującą uwagę: Aby wykonać kład płaszczyzny, wystarczy skonstruować kład jednego punktu, leżącego na owej płaszczyźnie. Dla dalszych punktów i prostych, przynależnych do owej płaszczyzny, wyznaczymy ich klady, jeśli skorzystamy z zależności 1, 2 i 3.

49. Podnoszenie z kładu. W dotychczasowych rozważaniach poznaliśmy sposoby konstrukcyjnego wyznaczenia elementów P^o i c^o , skoro dane były elementy P (P^n, P'_n) i c (c^n, c'_n), leżące na dowolnej płaszczyźnie α . Zastanówmy się teraz nad problemem odwrotnym, a mianowicie nad sposobem wyznaczenia elementów P (P^n, P'_n) i c (c^n, c'_n) na płaszczyźnie α , skoro dane są ich klady P^o i c^o . W ust. 47 omawialiśmy już podobne zagadnienia — obecnie rozważymy szczegółowo ów problem.

Niechaj dana będzie (rys. 150) dowolna płaszczyzna α (h_a^n, v_a^n), przecinająca się z osią x w punkcie X_a . Ów punkt obróćmy około śladu aksonometrycznego s_a płaszczyzny α o taki kąt $\sphericalangle \varphi = \sphericalangle X_a^o C X_a^o$, aby punkt X_a po dokonanym obrocie padł na rzutnię aksonometryczną π_a . Powiadamy krótko, żeśmy wyznaczyli kład X_a^o danego punktu X_a . Te-

raz wykonajmy problem odwrotny. Skoro dany jest punkt X_a^o na rzutni π_a , to (por. zadanie w ust. 47) obrócić go możemy o $\nless \varphi$ dokoła osi obrotu s_a i dla otrzymanego w ten sposób punktu X_a w przestrzeni, skonstruować możemy jego rzuty aksonometryczne. Zauważyć jednak musimy, że punkt X_a^o , po dokonanych obrocie o $\nless \varphi$ dokoła osi s_a , padnie na daną płaszczyznę α (h_a^n, v_a^n). Uważając dany na rzutni π_a punkt X_a^o za kład takiego punktu X_a , który leży na płaszczyźnie α , — możemy w omówiony powyżej sposób wyznaczyć położenie punktu X_a na owej płaszczyźnie α . Problem ten nazwiemy krótko podnoszeniem z kładu.

Na rzutni aksonometrycznej π_a obierzmy (rys. 150) dowolnie punkty $P^o, Y_a^o, Z_a^o, \dots$ i proste $c^o = P^o X_a^o, d^o = P^o Y_a^o, k_a^o = Y_a^o Z_a^o, \dots$. Elementy te uważajmy za kłady punktów $P, Y_a, Z_a, \dots$ i prostych $c, d, k_a, \dots$, leżących na danej płaszczyźnie α . Chcąc wyznaczyć położenie punktów $P, \dots$ i prostych $c, \dots$ na płaszczyźnie α , należy dane elementy $P^o, \dots, c^o, \dots$ „podnieść z kładu“, t. zn. należy je obrócić około osi s_a tak, aby po dokonanych obrocie padły na płaszczyznę α . Konstrukcję znacznie uprościmy, skoro skorzystamy z zależności 1, 2 i 3, ustalonych poprzednio w ust. 48. Jeżeli przez $S_c, S_d, K_s, \dots$ oznaczmy punkty przecięcia się osi obrotu s_a z prostymi $c^o, d^o, k_a^o, \dots$, to z łatwością zauważymy, że owe punkty podczas omawianego obrotu nie zmieniają wcale swego położenia. Łącząc tedy punkty S_c i X_a^n , uzyskamy aksonometrię $c^n = S_c X_a^n$ pomocniczej prostej c . Ponieważ prosta $c = P X_a$ przechodzi przez punkt P , przeto na promieniu c^n leżeć będzie aksonometria P^n szukanego punktu P . Z rozważań ust. 48 wiadomo nam jednak, że punkty P^o i P^n leżeć muszą na prostej $s_{\pi} \perp s_a$. Prosta s_{π} , wykreślona z danego punktu P^o prostopadłe do osi obrotu s_a , przecina się z promieniem $c^n = S_c X_a^n$ w żądanym punkcie P^n . Podobnie wyznaczmy dalsze elementy: $d^n = S_d P^n, Y_a^n = d^n s_{\eta}, k_a^n = K_s Y_a^n$ i $Z_a^n = k_a^n s_{\zeta}, \dots$, które są rzutami aksonometrycznymi elementów d, Y_a, k_a i Z_a , przynależnych do płaszczyzny α .

50. Zadania i ćwiczenia. Zajmiemy się teraz kładami płaszczyzn o szczególnem położeniu względem układu $O[x, y, z]$, przyczem starać się będziemy o możliwe uproszczenie konstrukcji.

Zadanie 1: Wyznaczyć kład rzutni poziomej π_1 , oraz kład leżącego na niej punktu A ($A^n = A'_n$).

Rozwiązanie 1: Rzutnię poziomą $\pi_1 = Os_1$ obróćmy (rys. 151) około śladu $s_1 = S_x S_y$ i połóżmy ją na rzutnię aksonometryczną π_a . W tym celu przez początek O układu $O[x, y, z]$ poprowadźmy płaszczyznę obrotu ζ ($h_{\zeta}^n = v_{\zeta}^n = s_{\zeta} = z^n$), prostopadłą do osi obrotu s_1 , a następnie wyznaczmy środek obrotu $C = s_{\zeta} s_1$ i prawdziwą wielkość promienia obrotu $r^* = \overline{CO^*}$. Skoro obrócimy punkt O dokoła osi s_1 , to jego kład O^o na rzutnię π_a leżeć będzie na przecięciu się koła k_1^* ze śladem s_{ζ} .

Z ust. 48 wynika bezpośrednio, że proste $x^o = O^o S_x$ i $y^o = O^o S_y$ są kładami osi $x = OS_x$ i $y = OS_y$. Podobnie dla prostej $b = OA$ jej kład $b^o = O^n S_b$ jest promieniem, który łączy element O^o ze śladem aksonometrycznym S_b owej prostej. Prosta, poprowadzona z punktu A^n prostopadłe do osi obrotu s_1 , przecina promień b^o w szukanym punkcie A^o .

Rozwiązanie 2: Rzutnię poziomą π_1 obracamy dookoła osi s_1 jako „układ sztywny”. Ponieważ osie $x = OS_x$ i $y = OS_y$ są prostymi prostopadłymi, przeto kłady x^o i y^o tych osi tworzą kąt prosty $\sphericalangle x^o y^o = \sphericalangle S_x O^o S_y = \sphericalangle 90^\circ$.

Chcąc wyznaczyć kład O^o punktu O , wystarczy zatem na średnicy $S_x S_y$ zakreślić koło k_2^o i skonstruować (rysunek 151) jeden z punktów przecięcia się tego koła z prostą $z^n \perp s_1$.

Ćwiczenie 1: Na rzutni pionowej leży prosta $c = AB$, przechodząca (rys. 152) przez dane punkty $A (A^n, A'')$ i $B (B^n, B'')$. Skonstruować należy kład $c^o = A^o B^o$ owej prostej na rzutnię aksonometryczną π_a , obracając rzutnię pionową $\pi_2 = Os_2$ około osi s_2 .

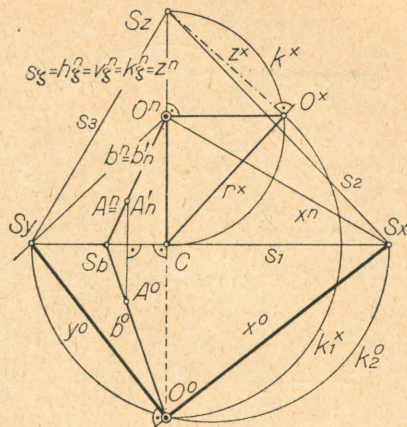
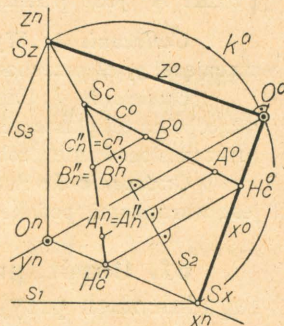
Ćwiczenie 2: Wykonać kład rzutni bocznej $\pi_3 = Os_3$ na rzutnię π_a , uważając ślad $s_3 = S_y S_z$ za oś obrotu.

Zadanie 2: Wyznaczyć kład płaszczyzny poziomo-rzucającej $\alpha (h_a^n, v_a^n)$ na rzutnię aksonometryczną π_a .

Rozwiązanie: Ślad aksonometryczny s_a danej płaszczyzny α (rys. 153) jest osią obrotu.

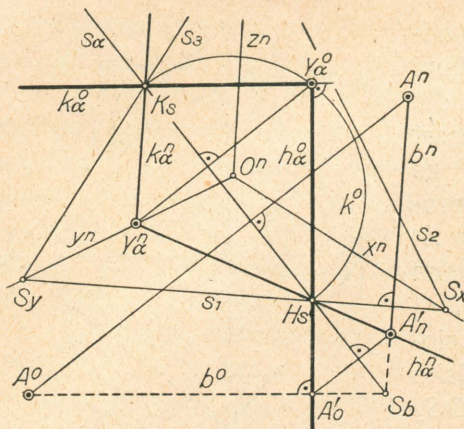
Aby wykonać kład płaszczyzny α , moglibyśmy obrócić np. punkt $Y_a = y\alpha$ dookoła osi s_a w sposób podany w ust. 47. Rozwiązanie zadania znacznie się jednak uprości, jeżeli uwzględnimy warunek prostopadłości: $k_a \perp h_a$, zachodzący pomiędzy śladem bocznym k_a i śladem poziomym h_a płaszczyzny poziomo-rzucającej α . Po dokonanych obrocie, kłady k_a^o i h_a^o są prostymi prostopadłymi. Celem skonstruowania tych prostych, wystarczy na średnicy $K_s H_s$ zakreślić koło k^o , a następnie poprowadzić promień $Y_a^n Y_a^o \perp s_a$. Otrzymany w ten sposób punkt Y_a^o jest kładem punktu $Y_a = y\alpha$, a proste $k_a^o = Y_a^o K_s$ i $h_a^o = Y_a^o H_s$ są kładami dwóch śladów płaszczyzny poziomo-rzucającej α .

Na płaszczyźnie $\alpha \perp \pi_1$ niechaj leży dowolny punkt $A (A^n, A'')$.

Rys. 151¹⁾.

Rys. 152.

¹⁾ Prosta $O^n S_y$ oznaczyć należy na rysunku literą y^n .



Rys. 153.

Dla punktu A jego rzut poziomy A' leży na śladzie poziomym h_a , a prosta pomocnicza $b = AA'$ jest prostopadłą do śladu h_a . Na rys. 153 podane są obrazy aksonometryczne A'_n i $b^n = A^n A'_n$ punktu A' i prostej b . Po dokonanych obrocie płaszczyzny α , punkt A' zajmie położenie A'_0 na kładzie h_a^0 , przyczem prosta $A'_n A'_0$ musi być prostopadłą do osi obrotu s_a . Prosta b^0 , wykreślona z punktu A'_0 prostopadłe do h_a^0 , jest kładem promienia b . O ile konstrukcja dokładnie jest przeprowadzona, to proste b^0

i b^n przeciąć się muszą w punkcie $S_b = b^0 b^n$, który leży na osi obrotu s_a i jest śladem aksonometrycznym promienia b . Ponieważ dany punkt A leży na prostej b , przeto kład A^0 owego punktu przynależy do elementu b^0 . Punkt A^0 jest punktem przecięcia się promieni b^0 i $A^n A^0 \perp s_a$.

Ćwiczenie 3: Wyznaczyć kład płaszczyzny: a) pionowo-rzucającej β , b) boczno-rzucającej γ , c) przechodzącej przez oś x, y , wzgl. z , d) $\delta \parallel \pi_1$, e) $\varepsilon \parallel \pi_2$, f) $\varphi \parallel \pi_3$.

Ćwiczenie 4: Dana jest płaszczyzna poziomo-rzucająca $\alpha (h_a^n, k_a^n)$ i kład A^0 punktu A , leżącego na tej płaszczyźnie. Należy wyznaczyć rzuty aksonometryczne A^n i A'_n punktu A , przez zastosowanie problemu „podnoszenia z kładu”.

Ćwiczenie 5: Rozwiązać ćwiczenie 4 dla płaszczyzny, której położenie określone jest warunkami, podanymi w ćwiczeniu 3.

51. Obrót punktu około dowolnej osi. W dotychczasowych zagadnieniach przyjmowaliśmy za oś obrotu prostą, prostopadłą do rzutni aksonometrycznej π_a lub też leżącą na owej rzutni. Teraz uważać będziemy za oś obrotu prostą l , która jest zupełnie dowolnie położona w przestrzeni.

Zadanie 1: Dany punkt $A (A^n, A'_n)$ należy obrócić o kąt 45° dookoła osi l , której położenie ustalone jest (rys. 154) rzutami l^n i l'_n .

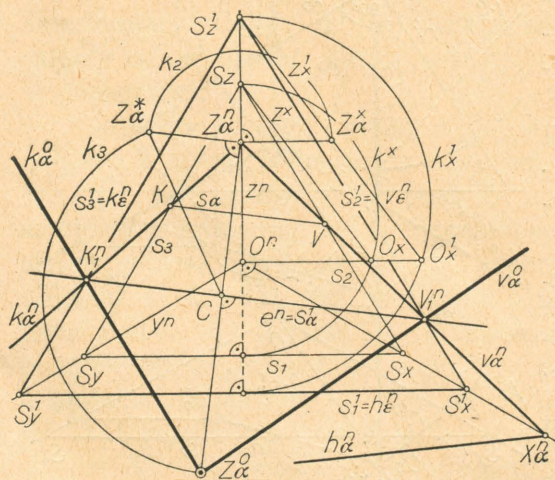
Rozwiązanie: Przez punkt A poprowadźmy (por. rys. 138) płaszczyznę obrotu $\alpha (h_a^n, v_a^n, k_a^n)$, prostopadłą do danej osi obrotu l , a następnie wyznaczmy punkt $C = l\alpha$, przebiecia się prostej l z płaszczyzną α . Element $C (C^n, C'_n)$ jest środkiem obrotu, a odcinek $\overline{CA} = r$ promieniem obrotu. Jeżeli punkt A obraca się około osi l , to wówczas ów punkt porusza się w płaszczyźnie α po kole k , którego środkiem jest punkt C , a promieniem odcinek $r = \overline{CA}$. Po dokonanych obrocie o kąt $\varphi = 45^\circ$, punkt A zajmie na kole k nowe położenie A_1 . Celem skonstruowania rzutów A_1^n i A'_1 punktu A_1 , wykonajmy kład płaszczyzny obrotu α (wraz z kołem k) na rzutnię aksonometryczną π_a , obracając płaszczyznę α do-

$y = OS_y$, b) oś $z = OS_z$, c) ślad $s_1 = \pi_a \pi_1$, d) ślad $s_2 = \pi_a \pi_2$, e) ślad $s_3 = \pi_a \pi_3$, f) prosta $l // \pi_1$, g) prosta $l // \pi_2$, h) prosta $l // \pi_a$.

Zadanie 2: Dane są prosta l (l^n, l''), punkt A (A^n, A'') i płaszczyzna ω (h_ω^n, v_ω^n). Punkt A należy obrócić około osi l o taki kąt, aby po dokonanym obrocie ów punkt padł na płaszczyznę ω .

Rozwiązanie: W sposób omówiony w zadaniu 1 (por. rys. 154), wyznaczmy płaszczyznę obrotu $\alpha \perp l$, środek obrotu $C = la$ i promień obrotu $r = CA$. Punkt A , poddany ruchowi obrotowemu dokoła osi l , porusza się w płaszczyźnie α po kole k , którego środkiem jest punkt C a promieniem odcinek $CA = r$. Ponieważ jednak punkt A po dokonanym obrocie ma paść na płaszczyznę ω , więc musi leżeć na kole k i na krawędzi $g = \alpha \omega$, przecięcia się płaszczyzn α i ω . Krawędź g przecina się z kołem k w dwóch punktach A_1 i A_2 , które spełniają warunki zadania. Celem skonstruowania owych punktów, wykonamy kład (por. rys. 154) płaszczyzny obrotu α na rzutnię aksonometryczną i wyznaczmy kłady C^o , A^o , k^o i g^o wymienionych poprzednio elementów. Prosta g^o przetnie się z kołem k^o w punktach A_1^o i A_2^o , które są kładami szukanych punktów A_1 i A_2 . Stosując problem podnoszenia z kładu do elementów A_1^o i A_2^o , wykreślimy najpierw aksonometrie A_1^n i A_2^n punktów A_1 i A_2 , a następnie rzuty aksonometryczne A_1'' i A_2'' . Uzyskane w ten sposób punkty A_1 i A_2 leżeć muszą oczywiście na poprzednio skonstruowanej krawędzi $g = \alpha \omega$.

52. Kład na płaszczyznę, równoległą do rzutni aksonometrycznej. W dotychczasowych rozważaniach wykonywaliśmy kłady płaszczyzn na rzutnię aksonometryczną. Możemy jednak daną płaszczyznę α (h_α^n, v_α^n) obrócić około krawędzi $e = \alpha \varepsilon$ (rys. 156) i położyć na płaszczyznę ε ($h_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n$), równoległą do rzutni π_a .

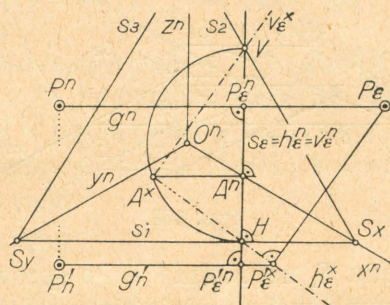


Rys. 156.

Niechaj odcinek $\overline{O^n O_x}$ wyraża odległość środka O od rzutni aksonometrycznej π_a . Skoro układ $O[x, y, z]$ przesuniemy w kierunku prostopadłym do π_a o odcinek $\overline{O_x O_x^1}$, to (por. ust. 16) uzyskamy nowy układ $O^1[x^1, y^1, z^1]$ i nowy trójkąt śladów aksonometrycznych $(S_x^1 S_y^1 S_z^1) = (s_1^1 s_2^1 s_3^1)$. Przyjętą poprzednio płaszczyznę $\varepsilon // \pi_a$ uważać możemy za nową rzutnię aksonometryczną π_a^1 . Podob-

nie krawędź $e = \varepsilon \alpha$, przecięcia się płaszczyzn ε i α , uważać możemy teraz za ślad aksonometryczny s_a^1 płaszczyzny α . Daną płaszczyznę α (h_a^n, v_a^n) obrócić możemy dokoła śladu $s_a^1 = e$ tak, aby po dokonanych obrocie padła na nową rzutnię aksonometryczną $\pi_a^1 = \varepsilon$. Na rys. 156 skonstruowaliśmy kład Z_a^o punktu Z_a (odcinek $Z_a^n Z_a^x$ wyraża odległość punktu Z_a od rzutni $\pi_a^1 = \varepsilon$) i kłady v_a^o, k_a^o dwóch śladów płaszczyzny α .

53. Wprowadzenie nowej rzutni, prostopadłej do rzutni aksonometrycznej. Niechaj dana będzie (rys. 157) płaszczyzna ε ($h_\varepsilon^n = v_\varepsilon^n = k_\varepsilon^n$), prostopadła do rzutni aksonometrycznej π_a i do rzutni poziomej $\pi_1 = O s_1$. Uważajmy płaszczyznę ε za nową rzutnię i wyznaczmy rzut prostokątny dowolnie przyjętego punktu P (P^n, P'_n) na ową rzutnię ε . W tym celu poprowadźmy przez punkt P prostą $g \perp \varepsilon$ i skonstruujmy punkt $P_\varepsilon = g \varepsilon$, przebiecia się promienia rzucającego g z płaszczyzną ε . Ponieważ rzutnia ε jest prostopadła do śladu $s_1 = \pi_a \pi_1$, przeto prosta $g \perp \varepsilon$ jest równoległą do elementu s_1 , a rzuty g^n i g'_n prostej g są też równoległe do s_1 . Ślad aksonometryczny s_ε płaszczyzny ε przecina się z promieniami g^n i g'_n w punktach $P_\varepsilon^n = g^n s_\varepsilon$ i $P_\varepsilon'^n = g'_n s_\varepsilon$, które są rzutami aksonometrycznymi punktu $P_\varepsilon = g \varepsilon$.

Rys. 157¹⁾.

W przestrzeni otrzymaliśmy tedy (por. ust. 2) dwie wzajemnie prostopadłe rzutnie: $\pi_a \perp \varepsilon$, przecinające się w osi s_ε , oraz rzuty prostokątne P^n i P_ε dowolnego punktu właściwego P na uważane rzutnie π_a i ε . Celem sprowadzenia tych rzutni do jednej płaszczyzny rysunkowej, wykonajmy kład płaszczyzny ε na rzutnię aksonometryczną π_a , uważając ślad s_ε za oś obrotu. Po dokonanych obrocie, punkt $P_\varepsilon = g \varepsilon$ (por. ust. 45) zajmie nowe położenie P_ε^x , przyczem elementy P^n i P_ε^x leżą na prostej odnoszącej $P^n P_\varepsilon^x \perp s_\varepsilon$. Odcinek $P_\varepsilon^x P_\varepsilon^n$ wyraża odległość danego punktu P od rzutni aksonometrycznej π_a , odcinek zaś $P^n P_\varepsilon^n$ wyraża odległość punktu P od nowowprowadzonej rzutni ε .

Położenie punktu właściwego P ustalone jest przez parę rzutów P^n i P'_n , albo też przez nową parę rzutów: P^n i P_ε^x , t. zn. przez aksonometrię prostokątną P^n i przez rzut prostokątny P_ε^x punktu P na nową rzutnię ε . Mając dane rzuty P^n i P'_n punktu P , wyznaczaliśmy na rys. 157 rzut P_ε^x owego punktu. Z łatwością jednak możemy skonstruować rzut P'_n , skoro dane są rzuty P^n i P_ε^x . Oczywiście w tych dwóch przypadkach należy ustalić położenie trójkąta śladów aksonometrycznych ($S_x S_y S_z$) i płaszczyzny ε .

¹⁾ Punkt P_ε oznaczyć należy na rysunku symbolem P_ε^x .

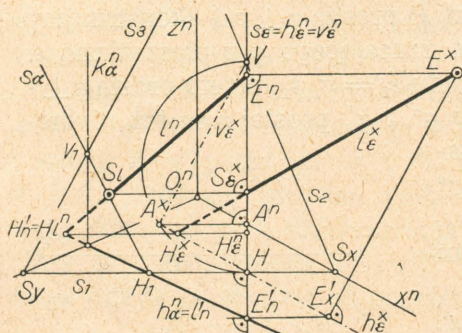
Ćwiczenie 1: Wyznaczyć rzut prostokątny P_ε danego punktu $P (P^n, P''_n)$ na płaszczyznę ε ($s_\varepsilon = h_\varepsilon^n = v_\varepsilon^n$), która jest prostopadłą do rzutni aksonometrycznej π_a i do rzutni pionowej π_2 .

Ćwiczenie 2: Skonstruować rzut prostokątny P_ε danego punktu $P (P^n, P'''_n)$ na płaszczyznę aksonometrycznie- i boczno-rzucającą ε .

Ćwiczenie 3: W ćwiczeniach 1 i 2 dane niechaj będą rzuty P^n i P_ε dowolnego punktu P ; należy wyznaczyć rzuty aksonometryczne P''_n i P'''_n owego punktu P .

Zadanie 1: Dane są dowolna prosta właściwa $l (l^n, l'_n)$ i płaszczyzna aksonometrycznie- i poziomo-rzucająca ε . Wyznaczyć rzut prostokątny l_ε prostej l na rzutnię ε .

Rozwiązanie: Chcąc skonstruować rzut l_ε , należy obrać na prostej l dwa dowolne punkty A, B i wyznaczyć ich rzuty prostokątne



Rys. 158.

$A_\varepsilon, B_\varepsilon$ na nowo przyjętą rzutnię ε . Zamiast dowolnych punktów przyjęto na rys. 158 ślad aksonometryczny S_l prostej l , oraz punkt $E = l_\varepsilon$, przebiecia się owej prostej z rzutnią ε . Dla elementu E , który jest śladem danej prostej l na nowej rzutni ε , wykreśliliśmy rzuty aksonometryczne $E^n = l^n s_\varepsilon$, $E'_n = l'_n s_\varepsilon$ i kład E^x . Prosta $S_l S^x_\varepsilon$ prostopadła do śladu s_ε przecina się z osią s_ε w punkcie S^x_ε , który jest rzutem prostokątnym

śladu S_l na rzutnię ε . Po sprowadzeniu rzutni ε do jednej płaszczyzny rysunkowej z rzutnią aksonometryczną π_a , rzut prostokątny prostej l na płaszczyznę ε zajmie położenie: $l^x_\varepsilon = E^x S^x_\varepsilon$.

Zamiast śladu aksonometrycznego S_l prostej l , mogliśmy użyć do konstrukcji np. śladu poziomego H_l owej prostej. Ponieważ rzutnia ε jest prostopadła do rzutni poziomej π_1 , przeto rzut prostokątny H_ε punktu H_l na płaszczyznę ε leżeć musi na śladzie poziomym h_ε rzutni ε . Prosta odnosząca $H_l H^x_\varepsilon$, wykreślona z punktu H_l prostopadłe do osi s_ε , wyznaczy na kładzie h^x_ε punkt H^x_ε , przez który przechodzi element l^x_ε .

Ćwiczenie 4: Rozwiązać zadanie 1, jeżeli dana jest prosta: a) $l // \pi_1$, b) $l // \pi_2$, c) $l // \pi_3$, d) $l // \pi_a$, e) $l \perp \pi_1$, f) $l \perp \pi_3$, g) $l \perp \pi_a$.

Ćwiczenie 5: Zadanie 1 rozwiązać, jeśli rzutnia ε jest płaszczyzną: a) aksonometrycznie- i boczno-rzucającą, b) aksonometrycznie- i pionowo-rzucającą.

Zadanie 2: Dana jest dowolna płaszczyzna $\alpha (h^n_\alpha, v^n_\alpha, k^n_\alpha)$ i rzutnia ε , przechodząca przez oś $z = OS_z$ i oś aksonometryczną z^n . Wyznaczyć rzuty prostokątne trzech śladów: poziomego, pionowego i bocznego danej płaszczyzny α na przyjętą rzutnię ε .

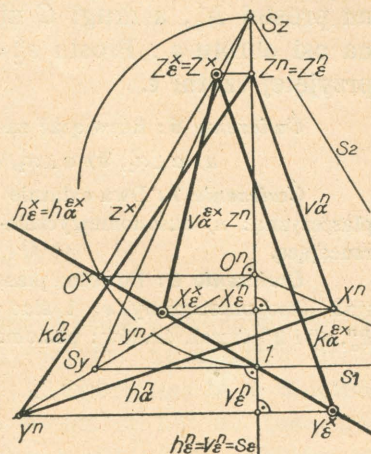
Rozwiązanie: Skoro oznaczymy (rys. 159) przez X, Y, Z punkty

przecięcia się płaszczyzny α z osiami x, y, z układu $[O]$, to wówczas proste: $h_a = XY$, $v_a = XZ$ i $k_a = YZ$ są trzema śladami płaszczyzny α . Celem wyznaczenia rzutów prostokątnych owych prostych h_a, v_a i k_a na rzutnię $\varepsilon = z z^n$, należy skonstruować rzuty prostokątne punktów X i Y na płaszczyznę ε . Ponieważ punkty te leżą na rzutni poziomej $\pi_1 \perp \varepsilon$, przeto rzuty prostokątne X_ε i Y_ε elementów X i Y przynależą do śladu poziomego h_ε rzutni ε . Odnoszące, poprowadzone z punktów X^n i Y^n prostopadłe do osi s_ε , przecinają się ze śladem s_ε w punktach X_ε^n i Y_ε^n , które są aksonometrijami punktów X_ε i Y_ε . Ponieważ punkt $Z = z a$ leży na rzutni ε , przeto jego rzut prostokątny Z_ε zjednoczył się z elementem Z . Proste $h_a^\varepsilon = X_\varepsilon Y_\varepsilon$, $v_a^\varepsilon = X_\varepsilon Z$ i $k_a^\varepsilon = Y_\varepsilon Z$, leżące na płaszczyźnie $\varepsilon \perp s_1$, rozwiązują zadanie, gdyż są rzutami prostokątnymi śladów $h_a = XY$, $v_a = XZ$ i $k_a = YZ$ danej płaszczyzny α na przyjętą rzutnię ε . Po dokonaniu sprowadzenia rzutni ε do jednej płaszczyzny rysunkowej z rzutnią aksonometryczną π_a (t. zn. po wykonaniu kładu rzutni ε), punkty $X_\varepsilon, Y_\varepsilon, Z = Z_\varepsilon$ i proste $h_a^\varepsilon, v_a^\varepsilon, k_a^\varepsilon$ zajmą nowe położenia, a mianowicie:

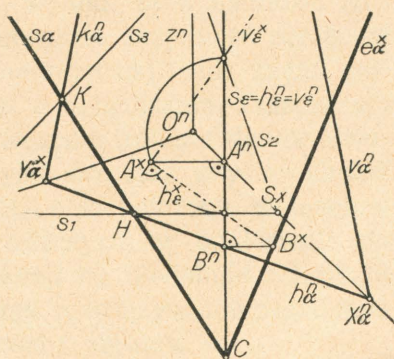
$$X_\varepsilon^x, Y_\varepsilon^x, h_a^{\varepsilon x} = h_a^x = X_\varepsilon^x Y_\varepsilon^x, v_a^{\varepsilon x} = v_a^x = X_\varepsilon^x Z^x, k_a^{\varepsilon x} = k_a^x = Y_\varepsilon^x Z^x.$$

Zadanie 3: Dana jest dowolna płaszczyzna α (h_a^n, v_a^n, k_a^n) i rzutnia ε , prostopadła do boku s_1 trójkąta śladów aksonometrycznych. Skonstruować należy ślad e_α płaszczyzny α z rzutnią ε .

Rozwiązanie: Krawędź $e_\alpha = \alpha \varepsilon$, przecięcia się danej płaszczyzny α z rzutnią ε , jest żądanym śladem. Celem wyznaczenia prostej e_α , weźmy pod uwagę (rys. 160) punkt $B = \alpha \varepsilon \pi_1$, przynależny do trzech płaszczyzn α, ε i π_1 . Ponieważ przez punkt B przechodzą krawędzie: $e_\alpha = \alpha \varepsilon$, $h_\varepsilon = \varepsilon \pi_1$ i $h_a = \alpha \pi_1$, przeto proste h_ε^n i h_a^n przecinają się w aksonometrii B^n owego punktu. Skoro dla płaszczyzny α wyznaczymy jej ślad aksonometryczny s_a , to punkt $C = s_a s_\varepsilon$ leży na płaszczyznach α, π_a i ε , a temsamem i na krawędzi $e_\alpha = \alpha \varepsilon$. Wyznaczyliśmy tedy takie dwa punkty B i C , które



Rys. 159.



Rys. 160.

leżą na szukanym śladzie e_α . Po dokonany kładzie rzutni ε na płaszczyznę rysunku π_α , pierwszy z tych punktów zajmie położenie $B^\times$ na prostej $h_\varepsilon^\times$, a drugi C nie zmieni wcale swego położenia, gdyż leży na osi obrotu s_ε . Prosta $e_\alpha^\times = B^\times C$ jest śladem płaszczyzny α na nowo przyjętej rzutni ε .

Ćwiczenie 6: Rozwiązać zadania 2 i 3 wówczas, jeżeli dana jest płaszczyzna:

a) $\alpha \perp \pi_1$, b) $\alpha \perp \pi_2$, c) $\alpha \perp \pi_3$, d) $\alpha // \pi_1$, e) $\alpha // \pi_2$, f) $\alpha // \pi_3$.

Ćwiczenie 7: Dwa ostatnie zadania rozwiązać, jeżeli nowo przyjęta rzutnia ε jest płaszczyzną: a) aksonometrycznie- i pionowo-rzucającą, b) aksonometrycznie- i boczno-rzucającą.

Ćwiczenie 8: Dowolna płaszczyzna α ($s_\alpha, e_\alpha^\times$) wyznaczona jest (por. rys. 160) przez ślad aksonometryczny s_α i ślad $e_\alpha^\times$ na rzutni ε . Skonstruować należy aksonometrię h_α^n, v_α^n i k_α^n trzech śladów: poziomego h_α , pionowego v_α i bocznego k_α płaszczyzny α .

Rozdział VII.

Zadania miarowe.

54. Podział zadań geometrycznych. Wszelkie zadania geometryczne podzielić możemy na dwie duże kategorie: na zadania miarowe i na zadania opisowe. Do pierwszej kategorii należą te zadania, w których występują długości odcinków i wielkości kątów, oraz powierzchnie i objętości utworów geometrycznych. Do zadań miarowych zaliczamy tedy zagadnienia, odnoszące się np. do odległości: dwóch punktów, dwóch prostych (wzgl. płaszczyzn) równoległych, punktu od prostej, punktu od płaszczyzny lub też odnoszące się do kąta nachylenia; dwóch prostych, prostej do płaszczyzny i dwóch płaszczyzn.

Natomiast wszelkie zagadnienia geometryczne — w których nie występują wcale długości odcinków, wielkości kątów, powierzchnie i objętości utworów geometrycznych — należą do zadań opisowych. Skoro badaliśmy zależności, jakie zachodziły np. pomiędzy aksonometrijami punktów i prostych, pomiędzy śladami płaszczyzny, pomiędzy wzajemną przynależnością punktów, prostych i płaszczyzn, i t. p. — to występowały wówczas w tych problemach zagadnienia opisowe.

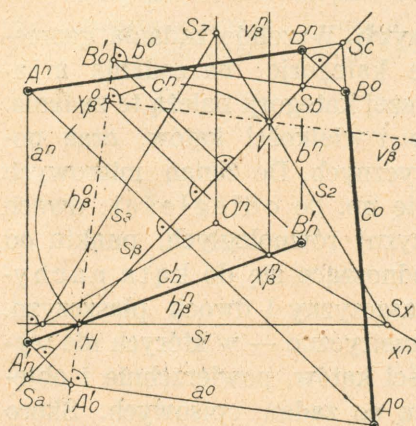
Z dotychczasowych rozważań naszych wynika, że w metodzie rzutów aksonometrycznych nie była potrzebną wcale znajomość położenia trójkąta śladów aksonometrycznych podczas rozwiązywania zadań opisowych. Zupełnie przeciwnie, gdy chodzi o rozwiązanie zagadnienia miarowego, to konieczna jest znajomość położenia trójkąta śladów aksonometrycznych. Ów trójkąt musieliśmy przyjąć wówczas, gdyśmy chcieli ustalić położenie rzutni π_1 , π_2 i π_3 układu $[O]$ oraz położenie elementów zasadniczych (t. j. punktów, prostych i płaszczyzn) w odniesieniu do płaszczyzny rysunku (rzutni aksonometrycznej) π_a . Podobnie z trójkąta śladów aksonometrycznych korzystaliśmy przy rozwiązywaniu zagadnień, odnoszących się do problemów prostopadłości i obrotów.

55. Wyznaczenie długości odcinka. Skoro pewien odcinek $\overline{AB}$ jest równoległy do rzutni π , to jego rzut prostokątny na rzutnię π jest równy co do długości odcinkowi $\overline{AB}$. Dla odcinka $\overline{AB}$, dowolnie nachy-

lonego względem rzutni π , jego rzut prostokątny jest mniejszy od odcinka $\overline{AB}$. To samo stosuje się oczywiście do rzutów aksonometrycznych $A^n B^n$, $A'_n B'_n$, $A''_n B''_n$ i $A'''_n B'''_n$ dowolnego odcinka $\overline{AB}$. W metodzie rzutów aksonometrycznych zapoznać się musimy ze sposobami konstrukcyjnego wyznaczenia prawdziwej długości odcinka.

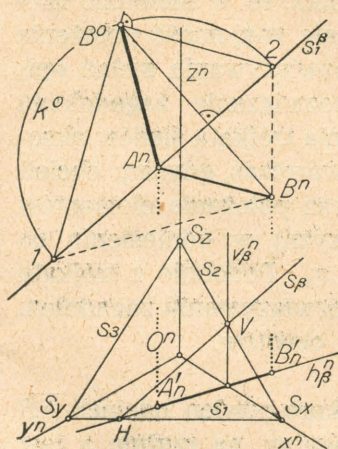
Zadanie 1: Dane są dwa dowolne punkty $A (A^n, A'_n)$ i $B (B^n, B'_n)$; wyznaczyć należy prawdziwą długość odcinka $\overline{AB}$.

Rozwiązanie 1: Przez odcinek $\overline{AB}$ poprowadźmy (por. rys. 148) płaszczyznę aksonometrycznie-rzucającą $\alpha (h_\alpha^n = v_\alpha^n = s_\alpha)$ i wyznaczmy punkt $C (C^n, C'_n = O^n)$, przebiecia się osi z z ową płaszczyzną. Skonstruujmy odcinek $\overline{C^n C^x}$, wyrażający odległość punktu C od rzutni aksonometrycznej π_α , a następnie wykonajmy (ust. 46) kład płaszczyzny α na rzutnię π_α . Przy pomocy kładu C^o punktu C , wyznaczmy kłady A^o i B^o danych punktów, to uzyskany w ten sposób odcinek $\overline{A^o B^o}$ przedstawia prawdziwą długość przyjętego odcinka $\overline{AB}$.



Rys. 161.

metrycznego s_β . Kłady danych punktów A i B wyznaczają odcinek $\overline{A^o B^o}$, który rozwiązuje zadanie.



Rys. 162.

Rozwiązanie 3: Konstrukcję znacznie uprościmy, jeśli wykonamy (rys. 162) kład pomocniczej płaszczyzny poziomo-rzucającej β na płaszczyznę π_α^1 , która jest równoległą do rzutni aksonometrycznej π_α i przechodzi przez punkt np. $A (A^n, A'_n)$. Prosta s_β^1 , wykreślona z punktu A^n równoległe do prostej $s_\beta = \beta \pi_\alpha$, jest śladem aksonometrycznym płaszczyzny β na nowo-wprowadzonej rzutni π_α^1 . Przez punkt B^n wykreślimy proste $B^n 1 \parallel h_\beta^n$ i $B^n 2 \parallel v_\beta^n$, to trójkąt $(1B2)$ jest trójkątem prostokątnym, gdyż jego boki $1B$ i $B2$ są odpowiednio równoległe do śladów $h_\beta \perp v_\beta$ płaszczyzny poziomo-rzucającej β . Skoro wykonamy kład owego trójkąta na rzutnię π_α^1 , obracając go dokoła przeciw-

rzutnię aksonometryczną π_a i odłóżmy na promieniu b° odcinek $\overline{A^\circ B^\circ}$ o długości 5 cm. Następnie podnieśmy z układu punkt B° i wyznaczmy (ust. 49) jego rzuty B^n, B_n' , przynależne do rzutów b^n, b_n' danej prostej b . Powyższe zadanie posiada dwa rozwiązania.

Ćwiczenie 2: Poprzednie zadanie rozwiązać wówczas, jeżeli element b jest prostą: a) $b \perp \pi_1$, b) $b \perp \pi_2$, c) $b \perp \pi_3$, d) $b \perp \pi_a$, e) $b \parallel \pi_1$, f) $b \parallel \pi_2$, g) $b \parallel \pi_3$.

Zadanie 3: Dane są dowolna płaszczyzna α (h_a^n, v_a^n) i dwa punkty B (B^n, B_n'), C (C^n, C_n'), które nie leżą na α . Wyznaczyć rzut prostokątny odcinka $\overline{BC}$ na płaszczyznę α , a następnie skonstruować prawdziwą wielkość tego rzutu.

Rozwiązanie: Przez dane punkty B i C poprowadźmy proste $b \perp \alpha, c \perp \alpha$ i wyznaczmy punkty $B_a = ba, C_a = ca$, przebiecia się tych promieni rzucających z elementem α . Otrzymany w ten sposób odcinek $\overline{B_a C_a}$ jest rzutem prostokątnym odcinka $\overline{BC}$ na płaszczyznę α . Długość tego odcinka wyznaczmy w sposób, omówiony w zadaniu 1.

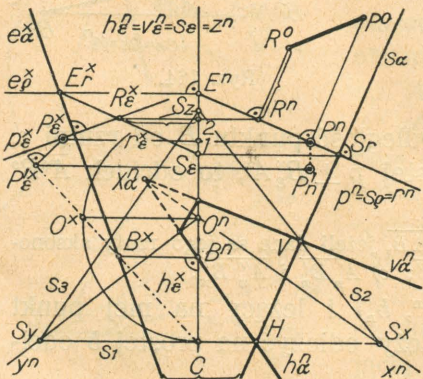
56. Odległość punktu od płaszczyzny. W ust. 45 poznaliśmy sposoby konstrukcyjnego wyznaczenia odległości danego punktu od rzutni aksonometrycznej π_a . Teraz rozwiążemy ogólniejsze

Zadanie: Dane są punkt P (P^n, P_n') i dowolna płaszczyzna α (h_a^n, v_a^n). Wyznaczyć należy odległość punktu P od płaszczyzny α .

Rozwiązanie 1: Przez odległość punktu P od płaszczyzny α rozumiemy odcinek (o długości skończonej) $\overline{PP_a}$, jeżeli przez P_a oznaczymy rzut prostokątny punktu P na ową płaszczyznę α . Celem rozwiązania naszego zadania, poprowadźmy przez punkt P prostą $p \perp \alpha$ i wyznaczmy punkt $P_a = pa$. Prawdziwa długość (kład) odcinka $\overline{PP_a}$ wyraża odległość punktu P od płaszczyzny α .

Rozwiązanie 2: Wprowadźmy (rys. 165) nową rzutnię ε , przechodzącą np. przez oś $z = OS_z$ i prostopadłą do rzutni aksonometrycznej π_a . Skoro skonstruujemy (ust. 53)

rzut prostokątny $P_\varepsilon^\times$ punktu P na rzutnię ε , oraz ślad $e_a^\times = a\varepsilon$ danej płaszczyzny α na owej rzutni ε , to tem samem sprowadziliśmy nasz problem do metody rzutów prostokątnych (ust. 2) na dwie wzajemnie prostopadłe rzutnie π_a i ε . Aby wyznaczyć odległość punktu P (P^n, P_n') od płaszczyzny α ($s_a, e_a^\times$), wykreślmy prostą $p \perp \alpha$ i skonstruujmy punkt $R = pa$, przebiecia się tej prostej z elementem α . Przez prostą p , której rzutami są proste $p^n \perp s_a$ i $p_\varepsilon^\times \perp e_a^\times$,



Rys. 165.

przesuniemy płaszczyznę aksonometrycznie-rzucającą ϱ ($s_\varrho = p^n$, $e_\varrho^\times \perp s_\varrho$) i skonstruujemy krawędź $r = a\varrho$, oraz punkt $R = rp$. Uważając ślad s_ϱ za oś obrotu, wykonajmy następnie kład płaszczyzny $\varrho \perp \pi_a$ na rzutnię π_a ; klady P^o i R^o punktów P i R otrzymamy, jeśli odmierzymy odcinki $\overline{P^n P^o} = \overline{P_\varepsilon^\times 1}$ i $\overline{R^n R^o} = \overline{R_\varepsilon^\times 2}$, wyrażające odległości owych punktów od rzutni π_a . Odcinek $\overline{P^o R^o}$ rozwiązuje zadanie.

Ćwiczenie 1: Rozwiązać poprzednie zadanie, jeżeli a jest płaszczyzną: a) $a \perp \pi_1$, b) $a \perp \pi_2$, c) $a \perp \pi_3$, d) $a \perp \pi_a$, e) $a // \pi_1$, f) $a // \pi_2$, g) $a // \pi_3$.

Ćwiczenie 2: Wyznaczyć odległość danego punktu P (P^n, P_n') od rzutni: a) poziomej π_1 (rys. 147), b) pionowej π_2 , c) bocznej π_3 .

Ćwiczenie 3: Poprzednie zadanie rozwiązać, jeśli dany punkt P leży na rzutni: a) π_1 , b) π_2 , c) π_3 , d) π_a , lub też na osi: e) x , f) y , g) z .

57. Odległość punktu od prostej. Niechaj dane będą dowolna prosta l i punkt P , nie leżący na tej prostej. Przez P poprowadźmy taką prostą c , któraby leżała na płaszczyźnie $\alpha = lP$ i była prostopadłą do promienia l . Skoro przez B oznaczymy punkt $B = lc$, przecięcia się elementów l i c , to odcinek $\overline{PB}$ wyraża odległość punktu P od prostej l .

Zadanie: Wyznaczyć odległość danego punktu P (P^n, P_n') od dowolnej prostej l (l^n, l_n').

Rozwiązanie 1: Dla płaszczyzny $\alpha = Pl$, określonej elementami P i l , wyznaczmy ślad aksonometryczny s_a . Uważając s_a za oś obrotu, wykonajmy kład płaszczyzny α na rzutnię π_a . W kładzie z punktu P^o wykreślimy prostą c^o prostopadłą do promienia l^o i skonstruujemy punkt $B^o = c^o l^o$. Odcinek $\overline{P^o B^o}$ rozwiązuje zadanie.

Rozwiązanie 2: Przez dany punkt P poprowadźmy płaszczyznę β prostopadłą do danej prostej l (ust. 40) i wyznaczmy punkt $B = l\beta$, przebiecia się tej prostej z płaszczyzną β . Otrzymany w ten sposób odcinek $\overline{PB}$ jest prostopadły do promienia l i rozwiązuje zadanie.

Rozwiązanie 3: Możemy wreszcie przyjąć nową rzutnię ε , przechodzącą przez oś np. z i prostopadłą do rzutni π_a . Po wykreśleniu rzutów prostokątnych $P_\varepsilon^\times$ i $l_\varepsilon^\times$ danych elementów P i l na rzutnię $\varepsilon \perp s_1$, rozwiązać możemy (por. ust. 56) zadanie nasze w metodzie rzutów prostokątnych na dwie wzajemnie prostopadłe rzutnie π_a i ε .

Ćwiczenie 1: Poprzednie zadanie rozwiązać dla elementów P i l , leżących na rzutni: a) π_1 , b) π_2 , c) π_3 , d) P na π_1 , l na π_2 , e) P na π_3 , l na π_1 , f) P na π_a , l na π_2 .

Ćwiczenie 2: Wyznaczyć odległość dowolnego punktu P (P^n, P_n'') od osi: a) x , b) y , c) z .

58. Zadania i ćwiczenia.

Zadanie 1: Dane są punkt A (A^n, A_n''), prosta p (p^n, p_n'') i płaszczyzna α (h_α^n, v_α^n). Przez punkt A poprowadzić taką prostą a , która byłaby prostopadłą do danej prostej p i zarazem równoległą do płaszczyzny α .

Rozwiązanie: Wszystkie proste, przechodzące przez punkt A i prostopadłe do prostej p , leżą na płaszczyźnie β prostopadłej do promienia p . Natomiast wszystkie proste, przechodzące przez punkt A i równoległe do płaszczyzny α , leżą na płaszczyźnie $\gamma \parallel \alpha$. Przez dany punkt A prowadzimy zatem dwie płaszczyzny: $\beta \perp p$ i $\gamma \parallel \alpha$, to wówczas krawędź $a = \beta\gamma$, przecięcia się tych płaszczyzn, spełnia warunki zadania.

Zadanie 2: Dane są dwie proste skośne a (a'' , a'_n), b (b'' , b'_n) i dowolny punkt P (P'' , P'_n). Przez ten punkt poprowadzić należy prostą p , prostopadłą do danych prostych skośnych a i b .

Rozwiązanie 1: Przez punkt P poprowadźmy dwie płaszczyzny: $\alpha \perp a$ i $\beta \perp b$. Krawędź $p = \alpha\beta$, przecięcia się tych płaszczyzn, rozwiązuje zadanie i jest w ogólności skośną względem danych prostych.

Rozwiązanie 2: Przez punkt P poprowadźmy płaszczyznę ε , równoległą do prostej a i do prostej b (por. zad. 5, ust. 36), a następnie z punktu P wykreślmy prostą $p \perp \varepsilon$, która spełnia warunki zadania.

Zadanie 3: Przez dany punkt P (P'' , P'_n) poprowadzić taką prostą p , która przecina daną prostą a (a'' , a'_n) i jest do niej prostopadłą.

Rozwiązanie 1: Miejszem geometrycznym prostych, które przechodzą przez punkt P i przecinają prostą a , jest płaszczyzna $\alpha = Pa$. Miejszem geometrycznym prostych, przechodzących przez P i prostopadłych do prostej a , jest płaszczyzna β , poprowadzona z punktu P prostopadłe do owej prostej a . Krawędź $p = \alpha\beta$ jest prostą wynikową.

Rozwiązanie 2: Przez P poprowadźmy płaszczyznę $\beta \perp a$ i wyznaczmy punkt $A = a\beta$, przebicia się prostej a z płaszczyzną β . Prosta $p = PA$, łącząca punkty P i A , spełnia warunki zadania.

Zadanie 4: Dane są dwie proste skośne a (a'' , a'_n) i b (b'' , b'_n). Skonstruować należy taką prostą r , któraby przecinała dane proste skośne i była do nich prostopadłą.

Rozwiązanie 1: Przez dowolnie przyjęty punkt P (P'' , P'_n) poprowadźmy (por. zadanie 2) prostą p , spełniającą warunki: $p \perp a$ i $p \perp b$. Następnie wyznaczmy prostą r , która (por. ust. 36, zadanie 8) przecina proste skośne a , b i jest równoległą do promienia p . Prosta r rozwiązuje zadanie.

Rozwiązanie 2: Przez prostą a przesunimy płaszczyznę α równoległą do prostej b , a przez prostą b poprowadźmy płaszczyznę β prostopadłą do płaszczyzny α . Oznaczmy przez A punkt, w którym prosta a przecina się z krawędzią $c = \alpha\beta$. Prosta r , wykreślona z punktu $A = ac$ prostopadłe do płaszczyzny α , leży oczywiście na płaszczyźnie β i przecina się w punkcie B z prostą b . Z warunków: $\alpha \parallel b$, $r \perp \alpha$ wynika bezpośrednio, że prosta r jest prostopadłą do prostych a i b . Ponieważ nadto r przecina się z prostymi skośnymi a i b w punktach $A = ar$ i $B = br$, przeto prosta r spełnia warunki zadania.

Ćwiczenie 1: Zadania 2, 3 i 4 rozwiązać wówczas, jeżeli położenie danej prostej a określone jest warunkami: a) $a // \pi_1$, b) $a // \pi_2$, c) $a // \pi_3$, d) $a // \pi_a$, e) $a // x$, f) $a // y$, g) $a // z$, h) $a \perp \pi_a$, i) a leży na rzutni poziomej (pionowej, wzgl. bocznej).

Zadanie 5: Wyznaczyć odległość dwóch prostych skośnych a (a^n, a'_n) i b (b^n, b'_n).

Rozwiązanie: Wykreślmy (por. zadanie 4) prostą r , prostopadłą do prostych skośnych a, b i przecinającą się z nimi w punktach $A = ar$ i $B = br$. Odcinek $\overline{AB}$ wyraża odległość prostych skośnych a i b .

Ćwiczenie 2: Wyznaczyć odległość dowolnej prostej b (b^n, b'_n) od osi x (y , wzgl. z).

Ćwiczenie 3: Rozwiązać zadanie 5 wówczas, jeżeli dane są proste:

- | | | |
|------------------------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| a) $a \perp \pi_1, b // \pi_a,$ | c) $a \perp \pi_2, b // \pi_2,$ | e) $a // x, b \perp \pi_a,$ |
| b) $a \perp \pi_1, b \perp \pi_a,$ | d) $a \perp \pi_3, b // \pi_a,$ | f) $a // y, b // z.$ |

Zadanie 6: Wyznaczyć odległość dwóch danych płaszczyzn równoległych α (h_α^n, v_α^n) i β (h_β^n, v_β^n).

Rozwiązanie: Prosta p prostopadła do danych płaszczyzn α i β , przebiega się z nimi w punktach $A = pa$ i $B = p\beta$. Odcinek $\overline{AB}$ równa się odległości płaszczyzn $\alpha // \beta$.

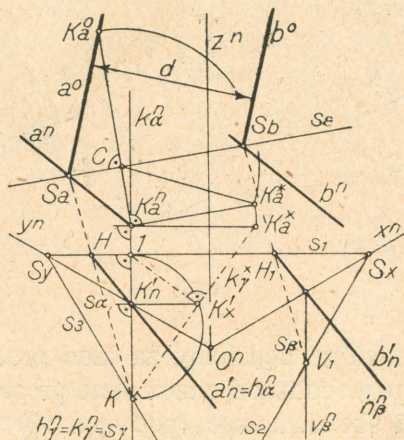
Zadanie 7: Dana jest płaszczyzna α (h_α^n, v_α^n). W odległości 5 cm poprowadzić płaszczyznę, równoległą do elementu α .

Rozwiązanie: W dowolnym punkcie A płaszczyzny α wykreślmy prostą $p \perp \alpha$, a następnie odłóżmy na promieniu p odcinki $\overline{AB} = \overline{AC} = 5 \text{ cm}$ (por. zad. 2, ust. 55). Przez otrzymane w ten sposób punkty B i C przeprowadźmy płaszczyzny: β i γ , równoległe do danej płaszczyzny α .

Ćwiczenie 4: Rozwiązać zadanie 6 i 7, jeżeli płaszczyzna α spełnia warunki: a) $a \perp \pi_1$, b) $a \perp \pi_2$, c) $a \perp \pi_3$, d) $a \perp \pi_a$, e) $a // \pi_1$, f) $a // \pi_2$, g) $a // \pi_3$, h) $a // \pi_a$.

Zadanie 8: Wyznaczyć odległość dwóch danych prostych równoległych a (a^n, a'_n) i b (b^n, b'_n).

Rozwiązanie 1: Skonstruujmy ślad aksonometryczny s_ε płaszczyzny $\varepsilon = ab$, określonej danymi prostymi a i b . Prosta s_ε (rys. 166) łączy ślady aksonometryczne S_a i S_b prostych równoległych $a // b$; owe ślady otrzymaliśmy zapomocą płaszczyzn poziomo-rzucających α ($h_\alpha^n = a'_n$) i β ($h_\beta^n = b'_n$). Wykonajmy następnie kład pomocniczej płaszczyzny $\varepsilon = ab$ na rzutnię π_a i wyznaczmy klady a^o, b^o danych prostych. W tym celu wystarczy obrócić jeden punkt np. K_a (K_a^n, K'_a) prostej a dookoła osi s_ε o taki $\angle K_a^* C K_a^o$, aby punkt K_a po dokonanych obrotach padł na rzutnię π_a (por. ust. 47). Na rys. 166 wyznaczaliśmy odległość



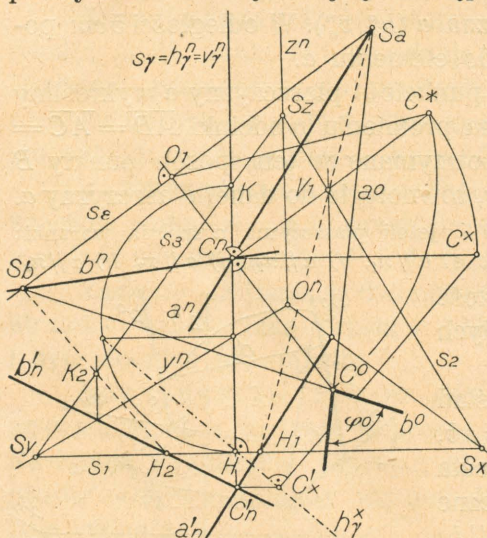
Rys. 166.

$\overline{K_a K_a^x}$ śladu bocznego K_a prostej a od rzutni π_a , środek obrotu C , promień obrotu $\overline{CK_a^*}$ i kład K_a^o owego punktu. Prosta $a^o = S_a K_a^o$ jest kładem prostej a , prosta zaś b^o , wykreślona z punktu S_b równolegle do elementu a^o , jest kładem prostej b . Odcinek d , prostopadły do promieni $a^o \parallel b^o$, wyraża odległość danych prostych równoległych.

Rozwiązanie 2: Zadanie nasze rozwiązać też możemy przy pomocy płaszczyzny δ , prostopadłej do danych prostych a i b . Skoro wyznaczymy punkty $A = a\delta$ i $B = b\delta$, przebiecia się płaszczyzny δ z prostymi a i b , to odcinek do nich prostopadły $\overline{AB}$ rozwiązuje zadanie.

Ćwiczenie 5: W zadaniu 8 przyjąć dwie proste $a \parallel b$, które są nadto równoległe do osi: a) x , b) y , c) z lub też równoległe do rzutni: d) π_1 , e) π_2 , f) π_3 .

59. Kąt nachylenia dwóch prostych. Niechaj dane będą (rys. 167) dwie proste a (a^n, a'_n) i b (b^n, b'_n), przecinające się w punkcie C (C^n, C'_n). Dla płaszczyzny $\varepsilon = ab$, przechodzącej przez dane proste, jej ślad aksonometryczny $s_\varepsilon = S_a S_b$ łączy ślady aksonometryczne S_a i S_b prostych a i b . Wykonajmy następnie kład płaszczyzny ε (wraz z danymi promieniami a i b) na rzutnię



Rys. 167.

to otrzymane proste $a^o = C^o S_a$ i $b^o = C^o S_b$ wyznaczają prawdziwą wielkość kąta nachylenia dwóch danych prostych a i b . Mówiąc o kącie nachylenia dwóch prostych a, b , mamy zazwyczaj na myśli kąt ostry $\varphi = \sphericalangle a b$, zawarty pomiędzy tymi prostymi.

Zadanie 1: Dane są dwie proste, przecinające się w punkcie C . Wyznaczyć symetralną kąta nachylenia tych prostych.

Rozwiązanie: Wyznaczymy w kładzie prawdziwą wielkość kąta nachylenia danych prostych i wykreślimy symetralną (dwusieczną) d^o kąta $\varphi^o = \sphericalangle a^o b^o$. Prostą d^o

uważać będziemy za kład prostej d , która leży na płaszczyźnie $\varepsilon = ab$, przechodzącej przez dane proste a i b . Prostą d^o należy podnieść z kładu i skonstruować (por. ust. 49) rzuty aksonometryczne d^n i d'_n dwusiecznej d . Prosta d^o przecina się ze śladem s_ε płaszczyzny $\varepsilon = ab$ w punkcie $S_d = d^o s_\varepsilon$, który jest śladem aksonometrycznym promienia d . Łącząc ów ślad S_d z punktem $C^n = a^n b^n$, uzyskamy aksonometrię $d^n = S_d C^n$ symetralnej d .

Ćwiczenie 1: Rozwiązać zadanie 1 dla takich prostych a i b , które leżą na płaszczyźnie: a) poziomo-rzucającej ε , b) $\varepsilon \perp \pi_2$, c) $\varepsilon \perp \pi_3$, d) $\varepsilon \perp \pi_a$, e) $\varepsilon // \pi_1$, f) $\varepsilon // \pi_2$, g) $\varepsilon // \pi_3$.

Ćwiczenie 2: Wyznaczyć rzeczywistą wielkość kąta nachylenia dwóch prostych przecinających się $a(a^n, a_n'')$ i $b(b^n, b_n'')$, jeżeli spełnione są warunki:

- a) $a \perp \pi_1$, $b // \pi_2$, c) $a // \pi_1$, $b // x$, e) $a // \pi_2$, $b // \pi_2$,
b) $a \perp \pi_1$, $b // \pi_a$, d) $a // \pi_a$, $b // z$, f) $a \perp \pi_1$, $b \perp \pi_a$.

Zadanie 2: Dane są dwie proste skośne $a(a^n, a_n')$ i $b(b^n, b_n')$. Wyznaczyć prawdziwą wielkość kąta nachylenia tych prostych.

Rozwiązanie: W myśl definicji, podanej w ust. 4, postąpimy w następujący sposób: Przez dowolny punkt $P(P^n, P_n')$ poprowadzimy dwie proste $c // a$ i $d // b$, a następnie wyznaczymy (w kładzie!) wielkość kąta nachylenia, jaki zawierają pomocnicze proste przecinające się c i d .

Ćwiczenie 3: Wyznaczyć kąty nachylenia dowolnej prostej $l(l^n, l_n')$ z osiami x , y i z układu $[O]$.

Ćwiczenie 4: Dana jest prosta l , leżąca na rzutni poziomej π_1 . Wyznaczyć prawdziwe wielkości kątów nachylenia prostej do osi x i do osi y .

Ćwiczenie 5: Rozwiązać zadanie 1 przy pomocy nowej rzutni aksonometrycznej i poziomo-rzucającej.

60. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny. Kątem nachylenia prostej a do płaszczyzny β nazywamy $\sphericalangle ab$, jaki tworzy owa prosta ze swoim rzutem prostokątnym b na płaszczyznę β .

Zadanie 1: Dane są dowolna prosta $a(a^n, a_n')$ i płaszczyzna $\beta(h_\beta^n, v_\beta^n)$. Wyznaczyć prawdziwą wielkość kąta nachylenia tych elementów.

Rozwiązanie: Celem wyznaczenia rzutu prostokątnego b danej prostej a na płaszczyznę β , należy przez element a poprowadzić płaszczyznę ε prostopadłą do β (ust. 41) i skonstruować krawędź $b = \beta \varepsilon$. Proste a i b , leżące na pomocniczej płaszczyźnie ε , wyznaczają $\sphericalangle ab$, który jest szukanym kątem nachylenia prostej a do płaszczyzny β . Aby wykreślić prawdziwą wielkość tego kąta nachylenia $\varphi = \sphericalangle a\beta = \sphericalangle ab$, należy wykonać kład płaszczyzny ε (ale nie płaszczyzny β !) na rzutnię π_a i narysowaćkłady a° i b° prostych a , b . Kąt $a^\circ b^\circ$ rozwiązuje zadanie.

Ćwiczenie 1: W zadaniu 1 przyjąć elementy:

- a) $a \perp \pi_1$, $\beta // x$, c) $a \perp \pi_2$, $\beta // \pi_a$, e) $a // x$, $\beta // z$,
b) $a // \pi_1$, $\beta \perp \pi_1$, d) $a // \pi_a$, $\beta \perp \pi_2$, f) $a(a^n = a_n')$, $\beta = xA$.

Zadanie 2: Wyznaczyć kąt nachylenia dowolnej prostej $a(a^n, a_n')$ do rzutni poziomej π_1 .

Rozwiązanie: Kąt, jaki tworzy prosta a ze swoim rzutem poziomym a' , rozwiązuje zadanie. Płaszczyznę pomocniczą $\varepsilon = aa'$, która jest płaszczyzną poziomo-rzucającą, należy obrócić około śladu s_ε i położyć

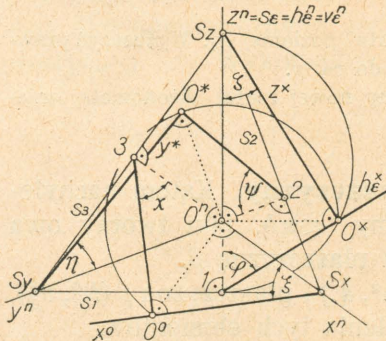
na rzutnię π_a . Kład a° danej prostej a i kład $a'_\circ = h^\circ_\varepsilon$ śladu poziomego pomocniczej płaszczyzny $\varepsilon \perp \pi_1$ — wyznaczają szukany $\sphericalangle a \pi_1 = \sphericalangle a^\circ h^\circ_\varepsilon$.

Ćwiczenie 2: Wyznaczyć kąty nachylenia dowolnej prostej a (a^n, a''_n) do rzutni pionowej π_2 i do rzutni bocznej π_3 .

Zadanie 3: Wyznaczyć kąt nachylenia prostej a (a^n, a'_n) do rzutni aksonometrycznej π_a .

Rozwiązanie: Kąt nachylenia $\varphi = \sphericalangle a \pi_a$ równa się kątowi $\sphericalangle a a^n$, utworzonemu przez prostą a i jej rzut aksonometryczny a^n . Aby wyznaczyć prawdziwą wielkość tego kąta, należy przez daną prostą a poprowadzić płaszczyznę $\varepsilon \perp \pi_a$ i wykonać następnie kład owej płaszczyzny ε , oraz kład a° prostej a . Kąt $\varphi^\circ = \sphericalangle a^\circ a^n$ spełnia warunki zadania.

Ćwiczenie 3: Skonstruować kąty nachylenia osi x, y i z układu $[O]$ do rzutni aksonometrycznej π_a . (Na rys. 168 wyznaczono kąty $\sphericalangle \xi = \sphericalangle x^\circ x^n = \sphericalangle x \pi_a$, $\sphericalangle \eta = \sphericalangle y^\circ y^n = \sphericalangle y \pi_a$ i $\sphericalangle \zeta = \sphericalangle z^\circ z^n = \sphericalangle z \pi_a$, które są rozwiązaniem niniejszego ćwiczenia).



Rys. 168.

Zadanie 4: Dany jest dowolny punkt A (A^n, A'_n) i prosta a'_n przechodząca przez element A'_n . Uważając promień a'_n za aksonometrię rzutu poziomego a' takiej prostej a , która nachylona jest pod $\sphericalangle \varphi = 45^\circ$ do rzutni poziomej π_1 i przechodzi przez dany punkt A , — należy skonstruować aksonometrię a^n owej prostej a .

Rozwiązanie: Skoro przez dany rzut poziomy a' poprowadzimy płaszczyznę $\varepsilon \perp \pi_1$, to prosta a leżeć musi na tej płaszczyźnie. Po wykonaniu kładu płaszczyzny ε na rzutnię π_a , przez kład A° punktu A wykreślimy prostą a° , nachyloną pod $\sphericalangle \varphi = 45^\circ$ do elementu $h^\circ_\varepsilon = a'_\circ$. Element a° należy obrócić tak dokoła śladu aksonometrycznego s_ε , aby po dokonaniu obrotu padł na płaszczyznę $\varepsilon \perp \pi_1$, to uzyskana w ten sposób prosta a (a^n, a'_n) rozwiązuje zadanie.

Ćwiczenie 4: Dana jest aksonometria b^n takiej prostej b , która przechodzi przez dany punkt A (A^n, A'_n) i jest nachylona do rzutni aksonometrycznej pod kątem 60° . Wykreślić dalsze rzuty aksonometryczne b'_n, b''_n i b'''_n prostej b .

Ćwiczenie 5: Na danej płaszczyźnie β ($h^\circ_\beta, v^\circ_\beta$) leży prosta b . Przez punkt C promienia b należy poprowadzić taką prostą a , która by nachylona była do płaszczyzny β pod danym kątem φ . (Problem odwrotny do zadania 1).

61. Kąt nachylenia dwóch płaszczyzn. Kątem nachylenia dwóch płaszczyzn nazywamy kąt, jaki tworzą krawędzie przecięcia się danych płaszczyzn z płaszczyzną do nich prostopadłą.

Zadanie 1: Wyznaczyć prawdziwą wielkość kąta nachylenia φ dwóch danych płaszczyzn $\alpha (h_\alpha^n, v_\alpha^n)$ i $\beta (h_\beta^n, v_\beta^n)$.

Rozwiązanie: Poprowadźmy płaszczyznę $\varepsilon (h_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n)$, prostopadłą (ust. 41) do płaszczyzn α i β czyli prostopadłą do krawędzi $c = \alpha\beta$. Skonstruujmy następnie proste $a = \varepsilon\alpha$ i $b = \varepsilon\beta$, to kąt nachylenia tych prostych jest zarazem kątem nachylenia danych płaszczyzn: $\sphericalangle ab = \sphericalangle \alpha\beta = \sphericalangle \varphi$. Celem otrzymania prawdziwej wielkości kąta φ , wykonamy kład pomocniczej płaszczyzny ε na rzutnię π_a i wyznaczymy kąt $\varphi^\circ = \sphericalangle a^\circ b^\circ$, utworzony przez klady a° i b° krawędzi a i b .

Zadanie 2: Wyznaczyć płaszczyznę symetralną kąta nachylenia φ dwóch danych płaszczyzn $\alpha (h_\alpha^n, v_\alpha^n)$ i $\beta (h_\beta^n, v_\beta^n)$.

Rozwiązanie: W sposób omówiony w zadaniu 1 wyznaczymy w kładzie kąt $\varphi^\circ = \sphericalangle a^\circ b^\circ$, a następnie wykreślimy symetralną (dwusieczną) d° kąta φ° . Po podniesieniu z kładu elementu d° , otrzymamy prostą $d (d^n, d_n')$ na pomocniczej płaszczyźnie ε . Płaszczyzna $\sigma = dc$, przechodząca przez dwusieczną d i krawędź $c = \alpha\beta$, spełnia warunki zadania.

Ćwiczenie 1: Rozwiązać zadania 1 i 2, jeśli dane są płaszczyzny:

a) $\alpha // x, \beta \perp \pi_1,$

c) $\alpha \perp \pi_1, \beta \perp \pi_2,$

e) $\alpha \perp x, \beta \perp \pi_a,$

b) $\alpha // x, \beta \perp \pi_2,$

d) $\alpha // \pi_1, \beta // x,$

f) $\alpha // x, \beta \perp \pi_a.$

Zadanie 3: Wyznaczyć kąt nachylenia dowolnej płaszczyzny $\alpha (h_\alpha^n, v_\alpha^n)$ do rzutni aksonometrycznej.

Rozwiązanie: Pomocnicza płaszczyzna ε jest prostopadła do śladu aksonometrycznego $s_\alpha = \alpha\pi_a$ danej płaszczyzny α i przecina się z nią w krawędzi $a = \varepsilon\alpha$. Kąt $\varphi = \sphericalangle as_\varepsilon$, utworzony przez krawędź a i ślad $s_\varepsilon = \varepsilon\pi_a$ pomocniczej płaszczyzny ε , jest szukanim kątem nachylenia. Prawdziwą wielkość kąta φ otrzymamy, jeśli wykonamy kład płaszczyzny aksonometrycznie-rzucającej ε .

Zadanie 4: Wyznaczyć kąt nachylenia dowolnej płaszczyzny $\alpha (h_\alpha^n, v_\alpha^n)$ do rzutni poziomej π_1 .

Rozwiązanie: Poprowadźmy (por. rys. 169) płaszczyznę $\varepsilon \perp h_\alpha$, to krawędź $a = \varepsilon\alpha$ i ślad poziomy $h_\varepsilon = \varepsilon\pi_1$ pomocniczej płaszczyzny ε wyznaczają żądany kąt nachylenia. Prawdziwą wielkość owego kąta $\varphi = \sphericalangle ah_\varepsilon$ uzyskamy, skoro wykonamy kład płaszczyzny poziomo-rzucającej ε .

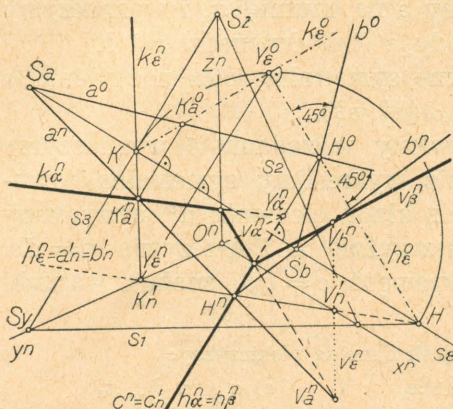
Ćwiczenie 2: Zadania 3 i 4 rozwiązać, jeśli dana jest płaszczyzna: a) $\alpha // x$, b) $\alpha // y$, c) $\alpha // z$, d) $\alpha = Ax$, e) $\alpha \perp \pi_2$, f) $\alpha \perp \pi_3$.

Ćwiczenie 3: Wyznaczyć kąty nachylenia dowolnej płaszczyzny $\alpha (v_\alpha^n, h_\alpha^n)$ do rzutni pionowej π_2 i do rzutni bocznej π_3 .

Ćwiczenie 4: Wyznaczyć (por. rys. 168) rzeczywiste wielkości kątów nachylenia: $\sphericalangle \varphi = \sphericalangle \pi_a \pi_1$, $\sphericalangle \psi = \sphericalangle \pi_a \pi_2$ i $\sphericalangle \chi = \sphericalangle \pi_a \pi_3$ rzutni aksonometrycznej π_a do trzech rzutni: poziomej π_1 , pionowej π_2 i bocznej π_3 .

Zadanie 5: Na rzutni poziomej π_1 leży dowolna prosta c (c^n, c'_n). Przez prostą c poprowadzić płaszczyzny α i β , nachylone do rzutni poziomej π_1 pod kątem 45° .

Rozwiązanie: Płaszczyzna $\varepsilon \perp c$ przetnie się z szukanymi płaszczyznami α i β w takich prostych $a = \varepsilon \alpha$ i $b = \varepsilon \beta$, które muszą być nachylone do śladu poziomego h_ε pod kątami 45° . Skoro poprowadzimy płaszczyznę pomocniczą $\varepsilon \perp c$ i wykonamy (rys. 169) jej kład na rzutnię π_a ,



Rys. 169.

obracając element ε dookoła śladu aksonometrycznego $s_\varepsilon \perp c^n$ – to przez kład H^o punktu $H = c \varepsilon$ przejdą klady a^o i b^o promieni a i b . Proste a^o i b^o , nachylone do elementu h_ε^o pod kątami 45° , należy podnieść z kładu na płaszczyznę ε . Promienie a^o i b^o przecinają się z osią obrotu s_ε w śladach $S_a = a^o s_\varepsilon$ i $S_b = b^o s_\varepsilon$; proste $a^n = S_a H^n$, $b^n = S_b H^n$ są aksonometrami prostych a i b , przynależnych do płaszczyzny poziomo-rzucającej ε . Mając rzuty a^n , b^n i $a'_n = b'_n = h'_\varepsilon$ prostych a i b , z łatwością

wyznamy najpierw aksonometrię V_a^n, V_b^n i K_a^n śladów owych prostych, a następnie aksonometrię $h_a^n = h_b^n = c^n, v_a^n, k_a^n$ i v_b^n śladów płaszczyzn α i β , które spełniają warunki zadania.

Ćwiczenie 5: Przez prostą c ($c^n = c''_n$), która leży na rzutni pionowej π_2 , poprowadzić płaszczyzny α i β , nachylone pod $\nless 60^\circ$ do rzutni π_2 .

Ćwiczenie 6: Dany jest ślad aksonometryczny s_a takiej płaszczyzny α , która nachylona jest do rzutni aksonometrycznej π_a pod $\nless 30^\circ$. Należy skonstruować aksonometrię h_a^n, v_a^n i k_a^n śladów tej płaszczyzny. (Dwa rozwiązania!).

Ćwiczenie 7: Wyznaczyć płaszczyzny, przechodzące przez oś $z = OS_z$ i nachylone pod $\nless 45^\circ$ do rzutni bocznej π_3 .

Ćwiczenie 8: Na danej płaszczyźnie γ (h_γ^n, v_γ^n) leży dowolna prosta c (c^n, c'_n). Przez prostą c poprowadzić dwie płaszczyzny α i β , nachylone pod $\nless 45^\circ$ do danej płaszczyzny γ .

62. Zadania i ćwiczenia.

Zadanie 1: Dany jest odcinek $\overline{AB}$ ($\overline{A^n B^n}, \overline{A'_n B'_n}$) i dowolna prosta l (l^n, l'_n). Na prostej l skonstruować punkt C , równo oddalony od punktów A i B .

Rozwiązanie: Skoro przez środek E odcinka $\overline{AB}$ poprowadzimy płaszczyznę σ , prostopadłą do owego odcinka, to σ jest miejscem geometrycznym punktów równo oddalonych od danych punktów A, B i nazywa

się płaszczyzną symetralną odcinka $\overline{AB}$. Punkt $C = l\sigma$, w którym prosta l przebija się z płaszczyzną σ , spełnia warunki zadania.

Zadanie 2: Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów, które są równo oddalone od trzech danych punktów $A (A^n, A'_n)$, $B (B^n, B'_n)$ i $C (C^n, C'_n)$.

Rozwiązanie 1: Wykreślmy płaszczyzny symetralne σ i τ odcinków $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, to krawędź $e = \sigma\tau$ jest miejscem geometrycznym szukanych punktów.

Rozwiązanie 2: Wykonajmy kład płaszczyzny $\alpha = ABC$ i wyznaczmy środek E^o koła opisanego na trójkącie $(A^o B^o C^o)$. Po podniesieniu z kładu punktu E^o , uzyskamy na płaszczyźnie α punkt E równo oddalony od danych punktów A, B i C . Z łatwością zauważymy, że prosta e , poprowadzona w punkcie E prostopadłe do płaszczyzny $\alpha = ABC$, spełnia warunki zadania.

Ćwiczenie 1: Dane są trzy punkty $A (A^n, A'_n)$, $B (B^n, B'_n)$ i $C (C^n, C'_n)$ i dowolna płaszczyzna $\beta (h_\beta^n, v_\beta^n)$. Na płaszczyźnie β wyznaczyć punkt P , równo oddalony od trzech danych punktów.

Ćwiczenie 2: Dane są trzy proste równoległe: $a (a^n, a'_n)$, $b (b^n, b'_n)$ i $c (c^n, c'_n)$. Wyznaczyć taką prostą e , któraby była równoległą do danych prostych i równo oddaloną od nich.

Zadanie 3: Dane są dwie płaszczyzny $\alpha (h_\alpha^n, v_\alpha^n)$ i $\beta (h_\beta^n, v_\beta^n)$, oraz dowolna prosta $l (l^n, l'_n)$. Na prostej l skonstruować punkty równo oddalone od płaszczyzn α i β .

Rozwiązanie: Wyznaczymy (por. ust. 61, zad. 2) płaszczyznę symetralną σ kąta nachylenia $\varphi = \angle \alpha\beta$ danych płaszczyzn α i β , to owa płaszczyzna σ jest miejscem geometrycznym punktów, równo oddalonych od płaszczyzn α i β . Skoro przez krawędź $c = \alpha\beta$ poprowadzimy płaszczyznę $\delta \perp \sigma$, to z łatwością zauważymy, że poszczególne punkty płaszczyzny δ są też równo oddalone od danych płaszczyzn α i β . Prosta l przebija się z płaszczyznami δ i σ w punktach $P = l\sigma$ i $Q = l\delta$, które rozwiązują nasze zadanie.

Ćwiczenie 3: Na osi z układu $O [x, y, z]$ wyznaczyć punkty, równo oddalone od rzutni aksonometrycznej π_a i od rzutni poziomej π_1 .

Rozdział VIII.

Wielokąty płaskie.

63. Określenia i podział wielokątów. Niechaj dany będzie wielokąt $(ABC...PR)$, którego wierzchołkami są punkty właściwe $A, B, C...P, R$, a bokami odcinki (o długości skończonej): $\overline{AB}, \overline{BC}, ... \overline{PR}, \overline{RA}$, łączące kolejno pary wierzchołków w porządku wypisanym. Wielokąty o trzech, czterech, pięciu, ..., n wierzchołkach nazywamy: trójkątem, czworokątem, pięciokątem, ..., n -kątem. Wielokąty dzielimy na płaskie i skośne zależnie od tego, czy wszystkie wierzchołki uważanego wielokąta leżą na jednej płaszczyźnie, czy też nie leżą na tej samej płaszczyźnie.

Skoro założymy, że każde dwa boki pewnego wielokąta płaskiego, nie przechodzące przez jeden i ten sam wierzchołek, wcale się nie przecinają, to uważany wielokąt płaski nazywamy wypukłym lub wklęsłym zależnie od tego, czy po jednej stronie, czy też po obydwu stronach każdego boku znajdują się wszystkie pozostałe wierzchołki tego wielokąta. O wielokącie wypukłym, którego wszystkie wierzchołki leżą na obwodzie koła k , powiadamy, że jest „wpisany” w to koło. Środek tego koła jest środkiem geometrycznym uważanego wielokąta. Jeżeli w szczególnym przypadku wielokąt wypukły jest wpisany w koło k , a nadto wszystkie jego boki są sobie równe co do długości, to wówczas nazywamy go wielokątem umiарowym lub foremnyм. Trójkąt równoboczny, kwadrat, pięciokąt umiарowy, ... są przykładami wielokątów umiарowych.

Zauważyć należy, że: 1) każdy wielokąt umiарowy posiada zawsze środek geometryczny, który jest środkiem koła „opisanego” na tym wielokącie; 2) natomiast wielokąt wypukły, który posiada środek geometryczny, nie musi być koniecznіe wielokątem umiарowym.

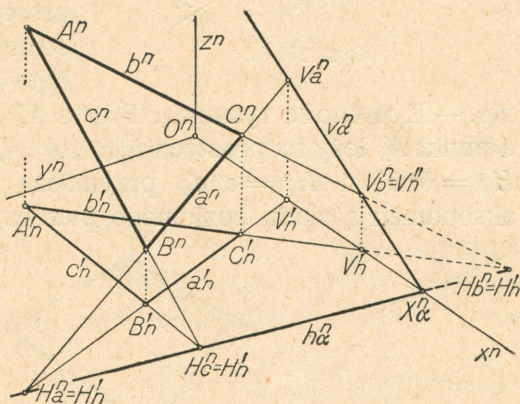
64. Aksonometrie wielokątów płaskich. Na dowolnej płaszczyźnie α niechaj dany będzie wielokąt $(AB...PR)$. Wyznamy rzuty aksonometryczne $A^n, B^n, ... P^n, R^n$, poszczególnych wierzchołków, oraz aksonometrie $\overline{A^n B^n}, ... \overline{P^n R^n}, \overline{R^n A^n}$ poszczególnych boków owego wielo-

kąta płaskiego. Na rzutni aksonometrycznej π_a uzyskamy wówczas nowy wielokąt płaski ($A^n B^n \dots P^n R^n$), który jest odwzorowaniem danego wielokąta na rzutni π_a . Wielokąt ($A^n B^n \dots P^n R^n$) nazywamy aksonometrią (obrazem aksonometrycznym) danego wielokąta ($AB \dots PR$).

W podobny sposób skonstruować możemy rzuty: poziomy ($A'B'R'$... $P'R'$), pionowy ($A''\dots R''$) i boczny ($A'''\dots R'''$) danego wielokąta. Dla uzyskanych w ten sposób trzech nowych wielokątów, które leżą odpowiednio na rzutniach: poziomej π_1 , pionowej π_2 i bocznej π_3 , wyznaczyć możemy wkońcu ich rzuty aksonometryczne: ($A'_n \dots R'_n$), ($A''_n \dots R''_n$) i ($A'''_n \dots R'''_n$).

Zadanie 1: Na danej płaszczyźnie α (h_a^n, v_a^n) leży dowolny trójkąt (ABC), którego (rys. 170) rzut aksonometryczny ($A'_n B'_n C'_n$) jest dany. Skonstruować należy aksonometrię ($A^n B^n C^n$) owego trójkąta.

Rozwiązanie: Proste $A'_n B'_n = c'_n$ i $A'_n C'_n = b'_n$ są aksonometrijami rzutów poziomych dwóch prostych $AB=c$ i $AC=b$, które łączą wierzchołek A z pozostałymi wierzchołkami B i C przyjętego trójkąta (ABC). Ponieważ proste c i b leżą na danej płaszczyźnie α , przeto aksonometrije $H_c^n = h_a^n c'_n$, $H_b^n = h_a^n b'_n$ i V_b^n przynależą (ust. 27) do obrazów aksonometrycznych h_a^n i v_a^n



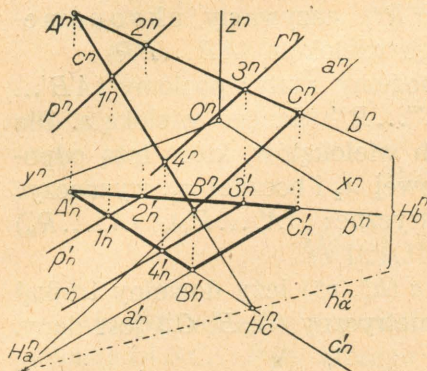
Rys. 170.

odpowiednich śladów h_a i v_a płaszczyzny α . Na aksonetriji $b^n = H_b^n V_b^n$ pomocniczej prostej b leżą aksonetrije A^n i C^n dwóch wierzchołków danego trójkąta. Prosta $A^n H_c^n = c^n$, t. zn. aksonetrija prostej c , oraz odnosząca $B'_n B^n \parallel z^n$ przecinają się w punkcie B^n , który jest obrazem aksonometrycznym trzeciego wierzchołka B przyjętego trójkąta na płaszczyźnie α . Trójkąt ($A^n B^n C^n$) rozwiązuje zadanie. — Kontrola rysunku: Proste $a^n = B^n C^n$ i $a'_n = B'_n C'_n$ muszą się przecinać w punkcie H_a^n na prostej h_a^n , gdyż są rzutami aksonometrycznymi prostej $a = BC$, leżącej na płaszczyźnie α . Z tego samego powodu punkty $V_a^n = a^n v_a^n$ i $V'_n = a'_n x^n$ leżeć muszą na promieniu równoległym do osi z^n .

Zadanie 2: Na płaszczyźnie $\alpha = pr$, określonej dwiema danymi prostymi równoległymi p (p^n, p'_n) i r (r^n, r'_n), leży trójkąt (ABC). Dany jest rzut aksonometryczny ($A^n B^n C^n$); należy skonstruować aksonometrię ($A'_n B'_n C'_n$) rzutu poziomego ($A'B'C'$) owego trójkąta.

Rozwiązanie: Na rys. 171 przyjęto, że aksonetrija $B^n C^n = a^n$ prostej $BC = a$ jest równoległą do elementów $p^n \parallel r^n$. Proste $c = AB$

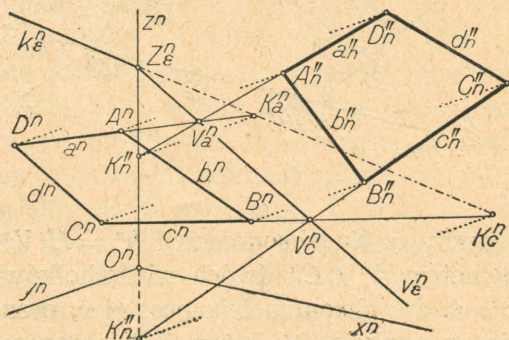
i $b = AC$, łączące wierzchołek A z pozostałymi wierzchołkami trójkąta (ABC) , leżą oczywiście na danej płaszczyźnie $\alpha = pr$. Ich aksonometrije



Rys. 171.1).

c^n i b^n przecinają się z prostymi p^n i r^n w punktach: $1^n = c^n p^n$, $2^n = b^n p^n$, $3^n = b^n r^n$ i $4^n = c^n r^n$. Element $1^n = c^n p^n$ jest obrazem aksonometrycznym punktu $1 = cp$ przecięcia się prostych c i p . Odnosząc $1^n 1'_n \parallel z^n$ przecina daną prostą p'_n w punkcie $1'_n$, który jest aksonometrią rzutu poziomego $1'$ punktu $1 = cp$. W podobny sposób wyznaczamy punkty $2'_n$, $3'_n$ i $4'_n$, a następnie na prostych $1'_n 4'_n = c'_n$ i $2'_n 3'_n = b'_n$ skonstruujemy punkty A'_n , B'_n i C'_n . Trójkąt $(A'_n B'_n C'_n)$ spełnia warunki zadania.

— Kontrola rysunku: Prosta $B'_n C'_n$ jest równoległą do elementu r'_n , a punkt A'_n leży na prostych $b^n c^n$ i $A^n A'_n \parallel z^n$. Ponadto punkty $H'_a = a^n a'_n$, $H'_b = b^n b'_n$ i $H'_c = c^n c'_n$ przynależą do jednej prostej h'_a , która jest aksonometrią śladu poziomego płaszczyzny $\alpha = pr$.



Rys. 172.

Ćwiczenie 1: Zadanie 1 rozwiązać wówczas, jeżeli dana jest płaszczyzna $\alpha = pr$.

Ćwiczenie 2: Zadanie 2 rozwiązać, jeżeli dana jest płaszczyzna $\alpha (h'_a, v'_a)$.

Ćwiczenie 3: Dana jest aksonometrija $(A^n B^n C^n D^n)$ czworokąta $(ABCD)$, leżącego na dowolnej płaszczyźnie $\varepsilon (v'_e, k'_e)$. Skonstruować (por. rys. 172) aksonometrię $(A''_n B''_n C''_n D''_n)$ rzutu pionowego tego wielokąta.

Ćwiczenie 4: Dane są trzy wierzchołki $A (A^n, A''_n)$, $B (B^n, B''_n)$ i $C (C^n, C''_n)$

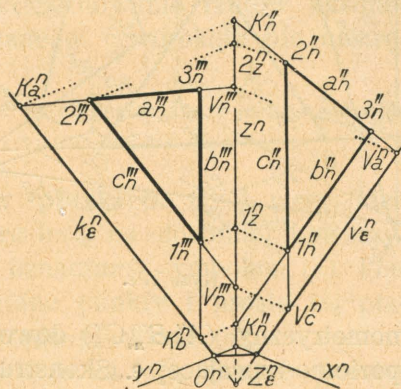
pięciokąta płaskiego $(ABCDE)$, oraz aksonometrije D^n i E^n dwóch jego pozostałych wierzchołków D i E . Znaleźć należy rzuty aksonometryczne D''_n i E''_n punktów D i E .

Zadanie 3: Na płaszczyźnie $\varepsilon (v'_e, k'_e)$ leży trójkąt (123) , którego rzut aksonometryczny $(1''_n 2''_n 3''_n)$ jest dany. Skonstruować aksonometrię $(1'''_n 2'''_n 3'''_n)$ rzutu bocznego tego trójkąta.

Rozwiązanie: Na rys. 173 przyjęto szczególne położenie trójkąta $(1''_n 2''_n 3''_n)$, gdyż dwa jego boki spełniają warunki: $1''_n 2''_n \parallel z^n$, $1''_n 3''_n \parallel v'_e$. Prosta $c = 12$, przechodząca przez wierzchołki 1 i 2 uważanego trójkąta, leży na płaszczyźnie ε i jest równoległą do śladu bocznego k'_e płaszczyzny ε .

¹⁾ Prosta $A'_n C'_n = b^n$ oznaczyć należy na rysunku literą b'_n .

szczyzny ε . Przez punkt $V_c^n = c''_n v_\varepsilon^n$, t. zn. przez aksonometrię śladu pionowego V_c prostej c , poprowadźmy odnoszącą $V_c^n V_n''' \parallel x^n$, a następnie przez V_n''' promień $c'''_n \parallel k_\varepsilon^n$, to otrzymana w ten sposób prosta c'''_n jest aksonometrią rzutu bocznego elementu c . Za pośrednictwem punktów $1''_n$ i $2''_n$, wyznaczmy na prostej c'''_n rzuty aksonometryczne $1'''_n$ i $2'''_n$ dwóch wierzchołków naszego trójkąta. Prosta $b = 13$ leży na płaszczyźnie ε i jest równoległą do jej śladu pionowego v_ε , gdyż rzut b''_n jest równoległy do elementu v_ε^n . Aksonometria b''_n rzutu bocznego tej prostej przechodzi przez aksonometrię K_b^n śladu bocznego prostej b i jest równoległą do osi z^n . Możemy wreszcie wziąć pod uwagę trzecią prostą $a = 23$, łączącą wierzchołki 2 i 3 omawianego trójkąta. Rzut $a''_n = 2''_n 3''_n$ tej prostej przecina się z elementami v_ε^n i z^n w punktach V_a^n i K_n^n . Skoro wykreśliśmy rzut V_n''' i aksonometrię K_a^n śladu bocznego promienia $a = 23$, to łącząc dwa ostatnie punkty, otrzymamy rzut $a'''_n = V_n''' K_a^n$. — O ile konstrukcja jest dokładnie przeprowadzona, to prosta b'''_n przejść musi przez punkt $1'''_n$, a promień a'''_n przez punkt $2'''_n$.



Rys. 173.

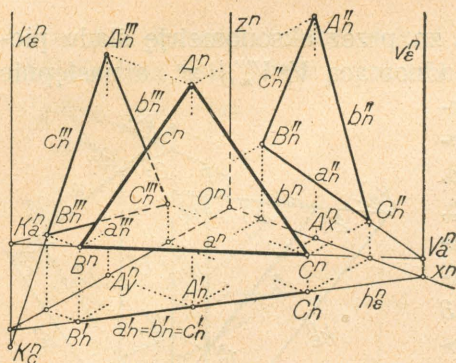
Ćwiczenie 5: Dany jest rzut ($1''_n 2''_n 3''_n$) trójkąta (123), leżącego (rys. 173) na dowolnej płaszczyźnie ε ($v_\varepsilon^n, k_\varepsilon^n$). Wyznaczyć aksonometrię ($1'''_n 2'''_n 3'''_n$) rzutu pionowego tego trójkąta.

Ćwiczenie 6: Zadanie 3 rozwiązać wówczas, jeżeli płaszczyzna ε określona jest dwiema prostymi równoległymi p (p''_n, p'''_n) i r (r''_n, r'''_n).

65. Aksonometrije wielokątów, leżących na płaszczyznach rzucających. W poprzednim ustępie zajmowaliśmy się konstrukcyjnym wyznaczaniem rzutów aksonometrycznych wielokątów, leżących na dowolnej płaszczyźnie. Teraz omawiać będziemy podobne zagadnienia, przyjmując wielokąty na płaszczyznach rzucających. Wprawdzie moglibyśmy stosować i tutaj poznane poprzednio konstrukcje, ale z uwagi na szczególne położenie płaszczyzn, na których leżą wielokąty, sprawa konstrukcyjnego rozwiązania tych zagadnień znacznie się uprości.

Zadanie 1: Dana jest aksonometria ($A^n B^n C^n$) dowolnego trójkąta (ABC), który leży na płaszczyźnie poziomo-rzucającej ε ($h_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n$). Wyznaczyć należy aksonometrije rzutów: poziomego, pionowego i bocznego owego trójkąta.

Rozwiązanie: Ponieważ płaszczyzna ε jest prostopadła do rzutni poziomej, przeto (rys. 174) aksonometrije A'_n, B'_n i C'_n wierzchołków trójkąta

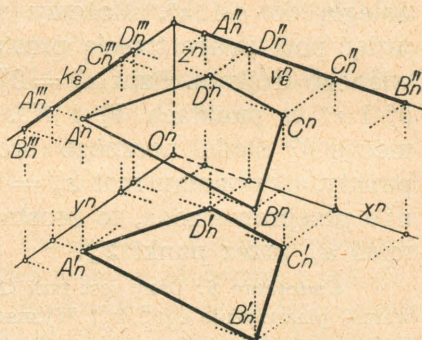


Rys. 174.

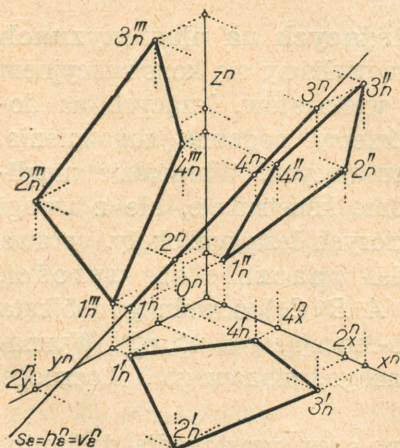
kąta (ABC) leżeć muszą (ust. 28) na aksonometrii h_ε^n śladu poziomego płaszczyzny ε . Wystarczy tedy z punktu np. A'' wykreślić odnoszącą $A''A'_n \parallel z''$ i wyznaczyć punkt A'_n , w którym owa odnosząca przetnie się z elementem h_ε^n . Mając dwa rzuty A'' i A'_n wierzchołka A , otrzymamy dalsze rzuty aksonometryczne A''_n i A'''_n owego punktu w sposób, omówiony w ust. 14.

Zadanie 2: Dany jest rzut aksonometryczny $(A''B''C'')$ dowolnego trójkąta, który leży na płaszczyźnie poziomo-rzucającej ε . Skonstruować aksonometrię owego trójkąta (ABC) .

Rozwiązanie: Celem uproszczenia konstrukcji (rys. 174) wyznaczmy dla wierzchołka A najpierw rzut A'_n na prostej h_ε^n , a następnie dopiero aksonometrię A''_n . Za pośrednictwem odnoszących $A''_nA'_n \parallel z''$ i $A''_nA'_n \parallel y''$ otrzymujemy aksonometrię A'_n rzutu poziomego wierzchołka A , a następnie (por. ust. 15) przez wykreślenie odnoszących $A''_nA'_n \parallel y''$ i $A''_nA'_n \parallel z''$ dochodzimy do punktu A''_n . W podobny sposób wyznaczymy obrazy aksonometryczne B''_n i C''_n dwóch pozostałych wierzchołków danego trójkąta.



Rys. 175.



Rys. 176.

Ćwiczenie 1: Zadanie 1 i 2 rozwiązać wówczas, jeżeli płaszczyzna ε jest: a) pionowo-rzucającą, b) boczno-rzucającą, c) przechodzącą przez oś x , d) przez oś y , e) przez oś z .

Ćwiczenie 2: Wyznaczyć rzuty aksonometryczne czworokąta $(ABCD)$, leżącego na płaszczyźnie ε równoległej do rzutni: a) poziomej π_1 (por. rys. 175), b) pionowej π_2 , c) bocznej π_3 .

Zadanie 3: Dany jest rzut $(1'2'3'4')$ czworokąta, leżącego na płaszczyźnie aksonometrycznie-rzucającej ε ($s_\varepsilon = h_\varepsilon^n = v_\varepsilon^n$). Wyznaczyć trzy dalsze rzuty aksonometryczne czworokąta (1234) .

Rozwiązanie: Ponieważ płaszczyzna $\varepsilon \perp \pi_a$, przeto aksonometria $(1''2''3''4'')$ danego wielokąta leżeć musi (rys. 176) na

śladzie aksonometrycznym s_ε tej płaszczyzny. Odnoszące, poprowadzone z punktów $1'_n, \dots, 4'_n$ równoległe do osi z^n , przecinają ślad s_ε w szukanych punktach: $1^n, 2^n, 3^n$ i 4^n . Skonstruowanie rzutów aksonometrycznych ($1''_n \dots 4''_n$) i ($1'''_n \dots 4'''_n$) uważanego czworokąta nie następuje żaden trudności.

Ćwiczenie 3: Rozwiązać zadanie 3 wówczas, gdy płaszczyzna ε jest prostopadłą do dwóch rzutni: a) $\varepsilon \perp \pi_a$ i $\varepsilon \perp \pi_1$, b) $\varepsilon \perp \pi_a$ i $\varepsilon \perp \pi_2$, c) $\varepsilon \perp \pi_a$ i $\varepsilon \perp \pi_3$.

66. O powinowactwie układów płaskich. Ogół wszystkich punktów $A, B, \dots$ i prostych $a, b, \dots$, które leżą na dowolnej płaszczyźnie α , nazywamy układem płaskim i oznaczamy symbolem (α) . Płaszczyzna α jest podstawą, a poszczególne punkty i proste tej płaszczyzny są elementami uważanego układu płaskiego (α) .

Niechaj dane będą dwa układy płaskie (α_1) i (α_2) , których podstawami są dwie dowolne płaszczyzny właściwe α_1 i α_2 , przecinające się w prostej właściwej $p = \alpha_1 \alpha_2$, albo też dwie płaszczyzny zjednoczone (nakrywające się) na jednej i tej samej płaszczyźnie właściwej α . Pomiedzy temi układami (α_1) i (α_2) ustanówmy następującą zależność geometryczną:

1. Niechaj każdemu punktowi właściwemu A_1 pierwszego układu (α_1) podporządkowany będzie jeden i tylko jeden punkt właściwy A_2 drugiego układu (α_2) , i wzajemnie.

2. Niechaj każdej prostej właściwej b_1 pierwszego układu odpowiada jedna i tylko jedna prosta właściwa b_2 w układzie drugim, i wzajemnie.

3. Punktowi A_1 i prostej b_1 , przynależnym do siebie w układzie (α_1) , niechaj odpowiadają w układzie (α_2) punkt A_2 i prosta b_2 , które również przynależą do siebie.

4. Punkty podporządkowane: A_1 i A_2 , B_1 i $B_2, \dots$ niechaj leżą na prostych równoległych, a proste podporządkowane: a_1 i a_2 , b_1 i $b_2, \dots$ niechaj przecinają się na stałej prostej właściwej p .

Ustanowioną w ten sposób zależność geometryczną pomiędzy układami płaskimi (α_1) i (α_2) nazywamy powinowactwem środkowym lub perspektywicznym (pokrewieństwem środkowym, wzgl. homologją równoległą). Punkty A_1 i A_2 lub proste b_1 i b_2 , podporządkowane sobie w obu układach (α_1) i (α_2) , nazywamy elementami homologicznymi. Proste równoległe $A_1 A_2$, $B_1 B_2, \dots$, łączące pary punktów homologicznych, są promieniami powinowactwa i przecinają się w punkcie niewłaściwym S^∞ , t. zw. środku powinowactwa. Stała prosta właściwa p , na której przecinają się pary homologicznych prostych: a_1 i a_2 , b_1 i $b_2, \dots$, jest osią powinowactwa. W przypadku dwóch różnych od siebie płaszczyzn α_1 i α_2 , osią powinowactwa jest krawędź $p = \alpha_1 \alpha_2$ przecięcia się tych płaszczyzn.

$= W^\infty Z_2^\infty$. Wreszcie prostej $l_1 = C_1 W^\infty$, równoległej do osi powinowactwa p , podporządkowana jest w układzie (a_2) prosta $l_2 = C_2 W^\infty$. Dowolny punkt B , leżący na osi powinowactwa p , uważać możemy za dwa nakrywające się punkty homologiczne B_1 i B_2 . Możemy tedy powiedzieć, że dwa układy płaskie środkowo-powinowate posiadają następujące własności:

a) Proste niewłaściwe w_1^∞ i w_2^∞ tych układów są elementami homologicznymi.

b) Każdemu punktowi niewłaściwemu Z_1^∞ układu (a_1) podporządkowany jest jeden i tylko jeden punkt niewłaściwy Z_2^∞ w układzie płaskim (a_2) , i wzajemnie.

c) Prostym równoległym $g_1 \parallel b_1$ układu (a_1) podporządkowane są w układzie (a_2) również proste równoległe $g_2 \parallel b_2$.

d) Dwie homologiczne proste l_1 i l_2 są do siebie równoległe tylko wówczas, jeżeli owe proste są równoległe do osi powinowactwa.

e) W każdym punkcie B osi powinowactwa p zjednoczone są dwa homologiczne punkty B_1 i B_2 .

Z przeprowadzonych konstrukcyj na rys. 177 i 178 wynika bezpośrednio następujący związek:

Powinowactwo środkowe, zachodzące pomiędzy dwoma układami płaskimi, jest wyznaczone wówczas, skoro dane są oś powinowactwa i jedna para punktów homologicznych.

Przejdźmy teraz do związków geometrycznych nieco ogólniejszych, aniżeli powinowactwo środkowe. Niechaj dla dwóch płaskich układów (a_1) i (a_2) — których podstawami są dwie różne od siebie płaszczyzny właściwe a_1 i a_2 , albo też dwie płaszczyzny zjednoczone z płaszczyzną a — spełnione będą poprzednio wymienione zależności: 1, 2 i 3, a nadto, w miejsce związku 4, ustanówmy nową zależność:

5. Każdemu punktowi niewłaściwemu Z_1^∞ układu (a_1) podporządkujmy jeden i tylko jeden punkt niewłaściwy Z_2^∞ w układzie (a_2) , i wzajemnie.

Skoro wykluczmy związek 4, to ustaloną w ten sposób zależność geometryczną pomiędzy dwoma układami płaskimi (a_1) i (a_2) nazywamy powinowactwem ogólnym lub wprost powinowactwem.

Złatwością zauważymy, że dwa płaskie układy powinowate (a_1) i (a_2) posiadają własności, wypisane poprzednio pod: a) i c). Natomiast nie są wcale spełnione własności d) i e), gdyż dwa układy „ogólnie-powinowate“ nie posiadają ani środka, ani też osi powinowactwa.

Przyjmijmy trzy układy płaskie (a_1) , (a_2) , (a_3) i ustanówmy pewne powinowactwo ogólne pomiędzy układami (a_1) i (a_2) , oraz drugie powi-

nowactwo ogólne pomiędzy układami (α_1) i (α_3) . Wówczas każdemu punktowi A_1 pierwszego układu płaskiego (α_1) podporządkowany będzie jeden i tylko jeden punkt A_2 w układzie (α_2) , oraz jeden ściśle oznaczony punkt A_3 w układzie (α_3) . Podobnie każdej prostej b_1 układu (α_1) odpowiadać będzie jedna i tylko jedna prosta b_2 w układzie (α_2) , oraz jedna ściśle określona prosta b_3 w układzie (α_3) . Za pośrednictwem każdego punktu A_1 pierwszego układu podporządkować możemy każdemu punktowi A_2 układu (α_2) jeden i tylko jeden punkt A_3 w układzie (α_3) , i wzajemnie: punktowi A_3 odpowiada tylko punkt A_2 . Podobnie każde takie dwie proste b_2 i b_3 układów (α_2) i (α_3) , które podporządkowane są tej samej prostej b_1 układu (α_1) , uważać możemy za promienie homologiczne. W ten sposób — za pośrednictwem układu (α_1) — ustanowiliśmy powinowactwo ogólne pomiędzy układami płaskimi (α_2) i (α_3) . A zatem możemy wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 1: *Dwa układy płaskie, powinowate z trzecim układem płaskim, są między sobą też powinowate.*

Korzystając z tego twierdzenia, udowodnić możemy z łatwością

Twierdzenie 2: *Rzut ukośny dwóch płaskich układów powinowatych na dowolną rzutnię wyznacza na owej rzutni dwa nowe układy powinowate.*

W istocie bowiem, skoro dla punktów $A_1, \dots, A_2, \dots$ i prostych $b_1, \dots, b_2, \dots$ dwóch układów płaskich (α_1) i (α_2) skonstruujemy ich rzuty ukośne: $A_1^u, \dots, A_2^u, \dots$, $b_1^u, \dots, b_2^u, \dots$ na dowolnie przyjętą rzutnię π , to elementy $A_1^u, \dots, b_1^u, \dots$ utworzą układ płaski $(\alpha_1)^u$, a punkty $A_2^u, \dots$ i proste $b_2^u, \dots$ układ płaski $(\alpha_2)^u$. Otrzymane zapomocą tego rzutu ukośnego dwa nowe układy $(\alpha_1)^u$ i $(\alpha_2)^u$ złączone są na tej samej płaszczyźnie podstawowej π . Układy (α_1) i $(\alpha_1)^u$, oraz układy (α_2) i $(\alpha_2)^u$ są środkowo-powinowate. Osią pierwszego powinowactwa jest krawędź $p_1 = \alpha_1 \pi$, a drugiego krawędź $p_2 = \alpha_2 \pi$; natomiast kierunek rzutów jest wspólnym „kierunkiem powinowactwa”. Ponieważ układy (α_1) i (α_2) , jak również układy (α_1) i $(\alpha_1)^u$ są powinowate, przeto, na mocy tw. 1, zachodzi powinowactwo pomiędzy układami (α_2) i $(\alpha_1)^u$. Z powinowactwa układów: (α_2) i $(\alpha_1)^u$ oraz (α_2) i $(\alpha_2)^u$ wynika ostatecznie powinowactwo pomiędzy układami $(\alpha_1)^u$ i $(\alpha_2)^u$, c. b. d. w.

Załóżmy teraz, że dane dwa układy płaskie (α_1) i (α_2) są środkowo-powinowate, a osią tego powinowactwa niechaj będzie prosta $p = \alpha_1 \alpha_2$. Proste homologiczne np. c_1 i c_2 tych układów przecinają się w punkcie $C = c_1 c_2$ na osi powinowactwa p . Skoro wyznaczymy rzuty ukośne c_1^u i c_2^u owych prostych na rzutnię π , to punkt $C^u = c_1^u c_2^u$ leżeć musi (ust. 9) na rzucie ukośnym p^u osi p . Promienie powinowactwa: $a = A_1 A_2$, $b = B_1 B_2, \dots$, łączące homologiczne punkty układów (α_1) i (α_2) , są do siebie równoległe. Rzuty ukośne $a^u = A_1^u A_2^u$, $b^u = B_1^u B_2^u, \dots$ owych

promieni łączą podporządkowane sobie punkty układów $(a_1)^n$, $(a_2)^n$ i są oczywiście prostymi równoległymi. Wykazaliśmy tedy, że dla układów powinowatych $(a_1)^n$ i $(a_2)^n$ spełniony jest związek 4, czyli innymi słowy: dwa ostatnie układy są perspektywicznie-powinowate, a osią tego powinowactwa jest rzut ukośny p^n osi p na przyjętą rzutnię π .

Twierdzenie 3: *Rzut ukośny dwóch płaskich układów środkowo-powinowatych na dowolną rzutnię — wyznacza na owej rzutni dwa nowe układy środkowo-powinowate.*

67. Powinowactwa, zachodzące pomiędzy rzutami aksonometrycznymi wielokąta płaskiego. Na dowolnej płaszczyźnie α niechaj leży wielokąt Γ , dla którego (por. rys. 170 i 171) skonstruowaliśmy aksonometrię Γ^n i aksonometrię Γ'_n rzutu poziomego Γ' owego wielokąta. Zbadajmy zależności geometryczne, jakie zachodzą pomiędzy wielokątami Γ , Γ^n , Γ' i Γ'_n . Pomiedzy wielokątem płaskim Γ a jego aksonometrią Γ^n zachodzi powinowactwo środkowe; osią tego powinowactwa jest ślad aksonometryczny $s_a = \alpha \pi_a$ płaszczyzny podstawowej α , a „kierunek powinowactwa“ jest prostopadły do rzutni aksonometrycznej π_a . Podobnie pomiędzy wielokątem Γ a jego rzutem poziomym Γ' zachodzi inne powinowactwo perspektywiczne; osią powinowactwa jest ślad poziomy $h_a = \alpha \pi_1$ płaszczyzny α , a kierunek powinowactwa jest prostopadły do rzutni poziomej π_1 . Zauważyć musimy, że wielokąty Γ i Γ^n są środkowo-powinowate tylko wówczas, gdy płaszczyzna α nie jest prostopadłą do rzutni π_a ; analogicznie wielokąty Γ i Γ' są perspektywicznie-powinowate, gdy płaszczyzna α nie jest prostopadłą do rzutni poziomej π_1 . — Skoro dla układów (wielokątów) Γ i Γ' skonstruujemy ich rzuty aksonometryczne prostokątne Γ^n i Γ'_n , to wówczas — na mocy tw. 3 ustępu 66 — owe układy są perspektywicznie-powinowate. Możemy tedy wypowiedzieć twierdzenie, ważne jednak tylko dla wielokąta, leżącego na takiej płaszczyźnie α , która nie jest ani aksonometrycznie- ani też poziomo-rzucającą.

Twierdzenie: *Pomiedzy aksonometrią prostokątną pewnego wielokąta płaskiego i aksonometrią jego rzutu poziomego zachodzi powinowactwo środkowe. Osią tego powinowactwa jest aksonometria śladu poziomego płaszczyzny, na której ów wielokąt leży, a promieniami powinowactwa są odnoszące, równoległe do osi aksonometrycznej z^n .*

Z tego powinowactwa środkowego możemy korzystać przy wyznaczaniu rzutów aksonometrycznych wielokątów płaskich (por. rys. 170 i 171). W tych wypadkach wystarczy skonstruować oś powinowactwa h_a^n i parę punktów homologicznych np. A^n i A'_n , gdyż elementy te wyznaczają już owe powinowactwo. Na rysunkach 172 i 174 podane są aksonometrie wielokątów płaskich, oraz aksonometrie ich rzutów pionowych.

Również i tutaj zachodzi powinowactwo środkowe, którego osią jest prosta v_ε^n , a promieniami powinowactwa są odnoszące, równoległe do osi y^n . Na rys. 174 występuje wreszcie powinowactwo środkowe, o osi k_ε^n i kierunku równoległym do osi x^n , zachodzące pomiędzy wielokątami $(A^n B^n C^n)$ i $(A''_n B''_n C''_n)$.

Zbadajmy teraz charakter zależności geometrycznej, jaka zachodzi (por. rys. 173) pomiędzy aksonometrijami $(1''_n 2''_n 3''_n)$ i $(1'''_n 2'''_n 3'''_n)$ wielokąta (123) , leżącego na dowolnej płaszczyźnie ε . Niechaj symbol Γ oznacza ów wielokąt płaski, to pomiędzy Γ i jego rzutem pionowym Γ'' zachodzi powinowactwo środkowe, o osi $v_\varepsilon = \varepsilon \pi_2$ i kierunku powinowactwa prostopadłym do rzutni π_2 . Podobnie wielokąt Γ i jego rzut boczny Γ''' są perspektywicznie-powinowate, przyczem osią powinowactwa jest ślad boczny k_ε , a kierunkiem prosta $11''' \perp \pi_3$. Wnosimy stąd (ust. 66 tw. 1), że wielokąty Γ'' i Γ''' są powinowate, ale — jak z łatwością stwierdzimy — bynajmniej nie środkowo-powinowate. W istocie bowiem oś $z = \pi_2 \pi_3$, jako krawędź przecięcia się podstaw $\pi_2 \perp \pi_3$ uważanych wielokątów Γ'' i Γ''' , nie jest wcale osią tego powinowactwa, gdyż proste homologiczne np. $1'' 2''$ i $1''' 2'''$ nie przecinają się na osi z . Skoro dla wielokątów powinowatych Γ'' i Γ''' wyznaczmy rzuty aksonometryczne Γ''_n i Γ'''_n , to wówczas (ust. 66 tw. 2) otrzymane aksonometrie są powinowate. Możemy tedy wysłowić następujące twierdzenie, ważne tylko wówczas, gdy płaszczyzna ε nie jest ani pionowo-, ani boczno-rzucającą.

Twierdzenie: *Pomiędzy aksonometrijami prostokątnymi rzutu pionowego i rzutu bocznego pewnego wielokąta płaskiego zachodzi powinowactwo ogólne.*

W podobny sposób wykazać możemy, że aksonometria Γ''_n rzutu pionowego i aksonometria Γ'_n rzutu poziomego pewnego wielokąta płaskiego są wielokątami powinowatymi. Analogiczny związek zachodzi też pomiędzy rzutami Γ'_n i Γ'''_n wielokąta płaskiego. Oczywiście i tutaj musimy poczynić pewne zastrzeżenia. W pierwszym przykładzie płaszczyzna ε tego wielokąta nie może być: $\varepsilon \perp \pi_2$, $\varepsilon \perp \pi_1$; natomiast w drugim przykładzie płaszczyzna ε nie może spełniać warunków: $\varepsilon \perp \pi_1$, $\varepsilon \perp \pi_3$.

68. Kład i podnoszenie z kładu wielokąta płaskiego. Dotychczas omawialiśmy sposoby konstrukcyjnego wyznaczenia rzutów aksonometrycznych wielokątów płaskich, a następnie badaliśmy zależności geometryczne, zachodzące pomiędzy obrazami aksonometrycznymi tego samego wielokąta płaskiego. Teraz zajmiemy się wyznaczaniem prawdziwego kształtu (postaci, wielkości kątów i boków) wielokąta płaskiego, skoro dane są jego rzuty aksonometryczne.

Zadanie 1: Na dowolnej płaszczyźnie α (h_a^n, v_a^n) leży wielokąt płaski; wyznaczyć prawdziwą wielkość (kształt) tego wielokąta.

Rozwiązanie: Na rys. 179 przyjęto dowolnie rzut ($A'_n B'_n C'_n$) trójkąta (ABC), leżącego na płaszczyźnie α , a następnie skonstruowano jego aksonometrię ($A^n B^n C^n$). Celem wyznaczenia rzeczywistej wielkości trójkąta (ABC), wykonano kład płaszczyzny α na rzutnię π_a , obracając ją około śladu aksonometrycznego s_a . Przy pomocy kładu X_a^o punktu $X_a = ax$ wyznaczono kład ($A^o B^o C^o$) uważanego trójkąta, korzystając z zależności 1, 2 i 3, ustalonych w ust. 48. Uzyskany w ten sposób trójkąt ($A^o B^o C^o$) rozwiązuje zadanie. Z rozważań ust. 66 wynika bezpośrednio

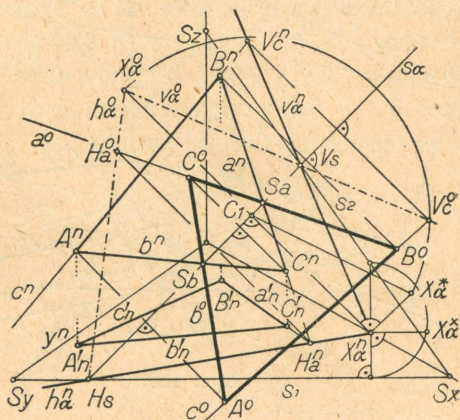
Twierdzenie: *Pomiędzy aksonometrią wielokąta płaskiego — który nie leży na płaszczyźnie aksonometrycznie-rzucającej — a jego kładem na rzutnię aksonometryczną zachodzi powinowactwo środkowe. Osią tego powinowactwa jest ślad aksonometryczny (oś obrotu) płaszczyzny uważanego wielokąta, a kierunkiem powinowactwa jest prosta prostopadła do osi obrotu.*

Wiadomo nam, że powinowactwo środkowe wyznaczone jest (ust. 66) osią i parą punktów homologicznych. Dlatego też wypowiedzieć możemy (por. ust. 48) następującą uwagę: Aby wyznaczyć kład wielokąta płaskiego, wystarczy skonstruować kład jednego punktu, leżącego na płaszczyźnie owego wielokąta.

Ćwiczenie 1: Zadanie 1 rozwiązać wówczas, jeżeli płaszczyzna α spełnia warunek: a) $\alpha \perp \pi_1$, b) $\alpha \perp \pi_2$, c) $\alpha \perp \pi_3$, d) $\alpha \parallel \pi_1$, e) $\alpha \parallel \pi_2$, f) $\alpha \parallel x$, g) $\alpha = \pi_1$, h) $\alpha = \pi_2$, i) $\alpha = \pi_3$.

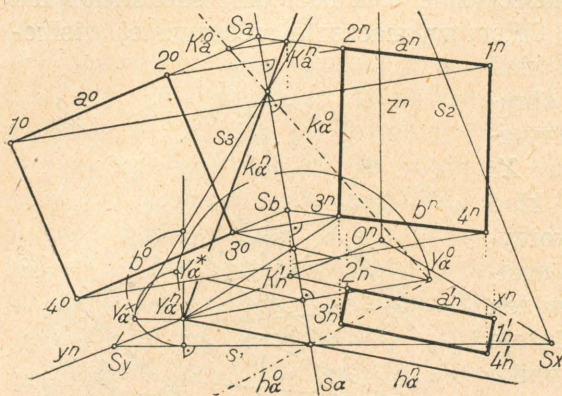
Ćwiczenie 2: Dane są rzuty aksonometryczne ($A^n B^n C^n D^n$) i ($A'_n B'_n C'_n D'_n$) czworokąta, leżącego na płaszczyźnie aksonometrycznie-rzucającej α ($s_a = h_a^n = v_a^n$). Wyznaczyć prawdziwą wielkość tego czworokąta (por. ust. 46).

Bardzo często jednak spotykamy się z zagadnieniem przeciwnym: wyznaczyć obrazy aksonometryczne wielokąta płaskiego, jeżeli dany jest jego kład. Uważajmy np. wielokąt ($A^o B^o C^o$) za kład (rys. 179) trójkąta, leżącego na dowolnej płaszczyźnie α (h_a^n, v_a^n). Celem skonstruowania aksonetrii ($A^n B^n C^n$), należy trójkąt ($A^o B^o C^o$) „podnieść z kładu“, t. zn. obrócić poszczególne wierzchołki A^o, B^o, C^o i boki $A^o B^o, B^o C^o, C^o A^o$ około osi s_a tak, aby po dokonanych obrotach (por. ust. 49) owe



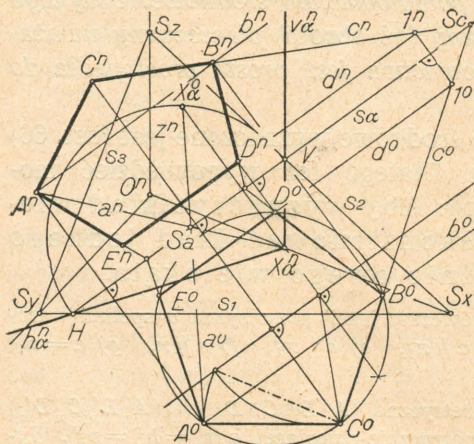
Rys. 179.

elementy padły na daną płaszczyznę α (h_a^n, v_a^n). Ponieważ jednak pomiędzy trójkątami ($A^0 B^0 C^0$) i ($A^n B^n C^n$) zachodzi powinowactwo perspektywiczne, które wyznaczone jest osią powinowactwa s_a i parą homologicznych punktów np.



Rys. 180.

nometrię ($1^n 2^n 3^n 4^n$) tego kwadratu, a następnie (por. ust. 64) rzut ($1'_n 2'_n 3'_n 4'_n$). Zauważyć musimy, że obrazy aksonometryczne kwadratu, nakreślone na rys. 180, są oczywiście równoległobokami.



Rys. 181.

Ćwiczenie 3: Wyznaczyć rzuty aksonometryczne pięciokąta umiarkowanego, który leży (rys. 181) na płaszczyźnie poziomo-rzucającej α (h_a^n, v_a^n).

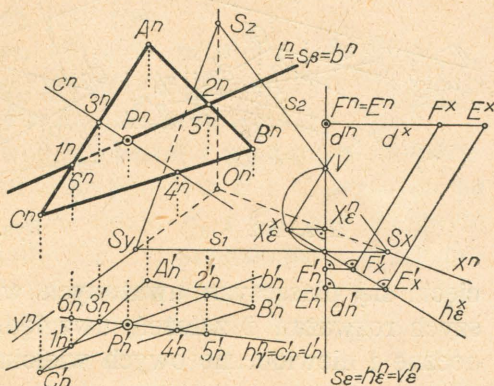
Ćwiczenie 4: Rozwiązać ćwiczenie 3 dla płaszczyzny: a) $\alpha \parallel \pi_1$, b) $\alpha \parallel \pi_2$, c) $\alpha \parallel \pi_3$, d) $\alpha \perp \pi_2$, e) $\alpha \perp \pi_3$, f) $\alpha \perp \pi_a$.

Ćwiczenie 5: Wyznaczyć rzuty aksonometryczne kwadratu, leżącego na rzutni: a) poziomej π_1 , b) pionowej π_2 , c) bocznej π_3 .

Ćwiczenie 6: Skonstruować obrazy aksonometryczne trójkąta równobocznego, który leży na płaszczyźnie ε , przechodzącej przez: a) oś x , b) oś y , c) oś z .

69. Przenikanie się wielokątów płaskich. Niechaj dany będzie (rys. 182) dowolny trójkąt (ABC), którego wierzchołkami są punkty A (A^n, A'_n), B (B^n, B'_n) i C (C^n, C'_n). Obierzmy dowolną prostą l (l^n, l'_n) i wyznaczmy punkt P (P^n, P'_n), przebiecia się tej prostej z płaszczyzną $\alpha = ABC$ uważanego trójkąta. W tym celu poprowadźmy (ust. 32) przez prostą l płaszczyznę aksonometrycznie-rzucającą β ($s_\beta = l^n$), skon-

struujemy krawędź b ($b^n = l^n = 1^n 2^n$, $b'_n = 1'_n 2'_n$), przecięcia się płaszczyzn α i β , oraz punkt P ($P^n = l'_n b'_n$, P^n), w którym owa krawędź b przecina się z prostą l . Konstrukcję przeprowadzić też możemy przy pomocy płaszczyzny poziomo-rzucającej γ ($h_\gamma^n = l'_n$). Krawędź c ($c'_n = h_\gamma^n = 3'_n 4'_n$, $c^n = 3^n 4^n$), przecięcia się płaszczyzn α i γ , wyznacza na danej prostej l żądany punkt P (P^n , P'_n), przebiecia się prostej l z płaszczyzną trójkąta (ABC) . Na rys. 182 uwzględniliśmy części „widoczne” i „niewidoczne” prostej l przy założeniu, że uważany trójkąt (ABC) jest nieprzezroczysty, a punkt O leży poniżej (za) płaszczyzną rysunku π_a . Celem dokładniejszego omówienia tej sprawy, weźmy najpierw pod uwagę prostą d (d^n , $d'_n \perp s_1$), prostopadłą

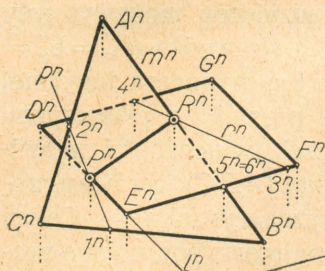


Rys. 182.

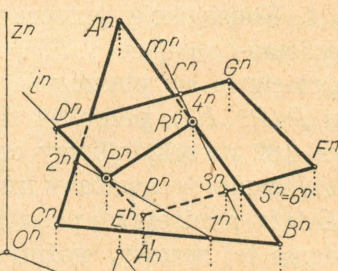
oko obserwatora umieścimy na prostej $d \perp \pi_a$ nad płaszczyzną rysunkową π_a w odległości większej aniżeli punktów E i F , to wówczas ten punkt uważać będziemy za widoczny, który znajduje się bliżej oka obserwatora. W myśl tego punkt E jest widoczny, a punkt F jest niewidoczny. Aby jednak za każdym razem nie wyznaczać w kładzie odległości dwóch punktów E i F , leżących na prostej $d \perp \pi_a$, od rzutni aksonometrycznej π_a , zauważyć musimy, że: dla punktu widocznego E jego rzut E'_n leży poniżej elementu F'_n (o ile początek O znajduje się pod płaszczyzną rysunkową π_a).

Teraz z łatwością wyznaczmy części widoczne i niewidoczne prostej l . W tym celu punkt przecięcia się elementów l^n i $A^n B^n$ na rys. 182 uważajmy raz za aksonometrię 2^n punktu 2 (2^n , $2'_n$), przynależnego do boku AB , a drugi raz za aksonometrię 5^n takiego punktu 5 (5^n , $5'_n$), który leży na prostej l . Ponieważ punkt $5'_n$ leży poniżej elementu $2'_n$, przeto punkt 5 jest widoczny, a punkt 2 jest niewidoczny. Odcinek (o skończonej długości) $P5$ prostej l jest zatem widoczny, a odcinek $P2$ jest niewidoczny. Do tego samego wyniku dojdziemy, gdy uwzględnimy punkty 1 (1^n , $1'_n$) i 6 ($6^n = 1^n$, $6'_n$), leżące na prostej prostopadłej do rzutni π_a . Ponieważ rzut $1'_n$ leży poniżej rzutu $6'_n$, przeto punkt 1 jest widoczny, a punkt 6 i odcinek $P6$ są niewidoczne.

Zadanie: Na rys. 183 i 184 dane są rzuty aksonometryczne dowolnego trójkąta (ABC) i równoległoboku ($DEFG$). Skonstruować należy przenikanie się tych wielokątów.



Rys. 183.



Rys. 184.

leży przenikanie się tych wielokątów.

Rozwiązanie:

Wyznamy punkt $P(P^n, P'_n)$ przecięcia się prostej $l = DE$ z płaszczyzną trójkąta (ABC), oraz punkt $R(R^n, R'_n)$, w którym bok $m = AB$ przebija płaszczyznę równoległoboku ($DEFG$). Prosta PR rozwiązuje zadanie, gdyż jest krawędzią prze-

cięcia się płaszczyzn uważanych wielokątów. W myśl poprzednich naszych rozważań i założeń, uwzględniliśmy na rys. 183 i 184 części widoczne i niewidoczne owych wielokątów płaskich.

Ćwiczenie 1: Wyznaczyć przenikanie się dowolnego trójkąta (ABC) z pięciokątem ($DEFGI$), który leży na płaszczyźnie α (h_α^n, v_α^n).

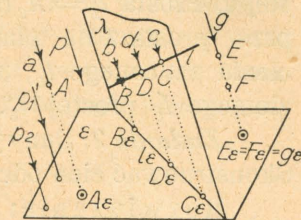
Ćwiczenie 2: Rozwiązać ćwiczenie 1, jeśli dana jest płaszczyzna: a) $\alpha \perp \pi_1$, b) $\alpha \perp \pi_2$, c) $\alpha \parallel x$, d) $\alpha \parallel \pi_1$, e) $\alpha \parallel \pi_2$, f) $\alpha \parallel \pi_3$.

Ćwiczenie 3: Zadanie 1 rozwiązać, jeśli (por. rys. 195) trójkąt leży na płaszczyźnie poziomo-rzucającej γ (h_γ^n, v_γ^n), a równoległobok na płaszczyźnie ε ($v_\varepsilon^n, k_\varepsilon^n$) równoległej do rzutni poziomej.

70. Cienie punktów i prostych, przy oświetleniu równoległym. Uważajmy dowolną płaszczyznę ε , która (rys. 185) całkowicie odbija promienie światła $p_1, p_2, \dots$, równoległe do przyjętego kierunku p . Mówimy wówczas, że owe promienie światła oświetlają płaszczyznę ε . Przez dowolny punkt właściwy A , nie leżący na płaszczyźnie ε , poprowadźmy promień światła $a \parallel p$ i wyznaczmy punkt $A_\varepsilon = a \varepsilon$ przecięcia się promienia a z płaszczyzną ε . Skoro założymy, że przyjęty punkt A odbija całkowicie promień światła a , to punkt A jest „oświetlony“, a natomiast punkt A_ε jest w „cieniu“, gdyż do niego nie dochodzi wcale ów, odbity od punktu A , promień światła a . Punkt A_ε nazywamy cieniem rzuconym przez punkt A na płaszczyznę ε lub wprost cieniem punktu A na tę płaszczyznę.

Przez poszczególne punkty $B, C, D, \dots$ prostej właściwej l (rys. 185) poprowadźmy promienie światła $b \parallel c \parallel d \parallel \dots \parallel p$. Promienie te przebi-

jają płaszczyznę ε w punktach: $B_\varepsilon = b\varepsilon$, $C_\varepsilon = c\varepsilon$, $D_\varepsilon = d\varepsilon$, ..., które są cieniami rzuconymi przez uważane punkty na płaszczyznę ε . Cieniem rzuconym przez dowolną prostą l na płaszczyznę ε nazwiemy miejsce geometryczne cieni B_ε , ... poszczególnych punktów B , ... tej prostej l na ową płaszczyznę ε . W myśl tej definicji, przy rozważaniu „oświetleniu równoległym“, cień rzucony przez prostą l na płaszczyznę ε jest linią prostą lub punktem zależnie od tego, czy owa prosta l nie jest równoległą, czy też jest równoległą do promieni światła. Na rys. 185 cień prostej l jest prostą l_ε , a cień prostej $g \parallel p$ jest punktem g_ε , w którym zjednoczyły się cienie $E_\varepsilon = F_\varepsilon = \dots$ poszczególnych punktów $E, F, \dots$ promienia g .

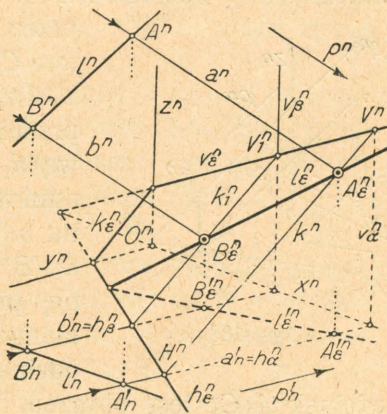


Rys. 185.

Celem otrzymania cienia l_ε dowolnej prostej l wystarczy skonstruować cienie B_ε i C_ε dwóch jakichkolwiek punktów B i C , leżących na prostej l . Prosta $l_\varepsilon = B_\varepsilon C_\varepsilon$, łącząca owe cienie B_ε i C_ε , jest żądanym cieniem prostej l . — Promienie światła $b, c, \dots$, przechodzące przez poszczególne punkty $B, C, \dots$ prostej l , przynależą wraz z danym elementem l do jednej płaszczyzny $\lambda = lb$. Wnosimy stąd, że krawędź $l_\varepsilon = \lambda \varepsilon$, przecięcia się płaszczyzny $\lambda \parallel p$ z płaszczyzną ε , jest cieniem prostej l . Jeżeli przez dowolny punkt D_ε cienia l_ε poprowadzimy promień światła $d \parallel p$, to ów promień d leży oczywiście na płaszczyźnie λ i przecina daną prostą l w takim punkcie właściwym D , którego cień na płaszczyznę ε schodzi się z przyjętym poprzednio punktem D_ε .

Zadanie 1: Dane są dowolna płaszczyzna ε ($h_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n$), prosta właściwa l (l^n, l'_n) i kierunek światła p (p^n, p'_n). Wyznaczyć cień l_ε prostej l na płaszczyznę ε .

Rozwiązanie: Na danej prostej l obierzmy (rys. 186) dwa dowolne punkty A (A^n, A'_n), B (B^n, B'_n) i poprowadźmy przez nie promienie światła a (a^n, a'_n), b (b^n, b'_n), równoległe do promienia p . Celem wyznaczenia punktu $A_\varepsilon = a\varepsilon$, przebiecia się promienia światła a , z płaszczyzną ε , przesunęliśmy przez a płaszczyznę poziomo-rzucającą α ($h_\alpha^n = a'_n, v_\alpha^n$) i skonstruowaliśmy krawędź $k = a\varepsilon$. Punkt $A_\varepsilon = ka$, w którym owa krawędź k (k^n, k'_n) przecina promień światła a , jest cieniem rzuconym przez punkt A na płaszczyznę ε . Na rys. 186 wykreślono obrazy aksonome-

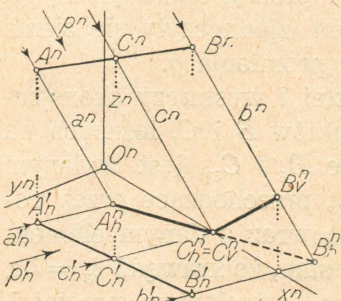


Rys. 186.

tryczne A_ε^n i $A_\varepsilon'^n$ cienia A_ε . — W podobny sposób wyznaczyliśmy cień B_ε ($B_\varepsilon^n, B_\varepsilon'^n$) drugiego punktu B , przyjętego dowolnie na danej prostej l . Prosta $l_\varepsilon = A_\varepsilon B_\varepsilon$ rozwiązuje zadanie, gdyż jest cieniem rzuconym przez prostą l na płaszczyznę ε . Element $l_\varepsilon^n = A_\varepsilon^n B_\varepsilon^n$ jest aksonometrią cienia rzuconego l_ε , a prosta $l_\varepsilon'^n = A_\varepsilon'^n B_\varepsilon'^n$ jest aksonometrią rzutu poziomego l_ε prostej l_ε .

Zadanie 2: Dany jest dowolny odcinek $\overline{AB}$ i kierunek światła p (p^n, p'_n). Skonstruować cień odcinka $\overline{AB}$ na rzutnię poziomą π_1 i rzutnię pionową π_2 .

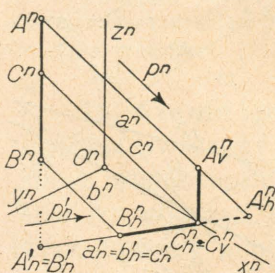
Rozwiązanie: Przez dane punkty A (A^n, A'_n) i B (B^n, B'_n) poprowadźmy (rys. 187) promienie światła a (a^n, a'_n), b (b^n, b'_n), równoległe do danego kierunku p . Wyznamy następnie punkty $A_h = a\pi_1$ i $B_h = b\pi_1$,



Rys. 187.

przebiecia się promieni a i b z rzutnią π_1 (czyli ślady poziome tych promieni), to otrzymamy cienie punktów A i B na rzutnię π_1 . Punkty $A_h^n = a^n a'_n$ i $B_h^n = b^n b'_n$ są aksonometriami żądanych cieni A_h i B_h . Odcinek zaś $\overline{A_h B_h}$ jest aksonometrią cienia rzuconego przez odcinek $\overline{AB}$ na rzutnię poziomą π_1 .

Przez punkt C_h , przecięcia się odcinka $\overline{A_h B_h}$ z osią aksonometryczną x^n , wykreślimy proste: $c^n \parallel p^n$ i $c'_n \parallel p'_n$. Uzyskany w ten sposób promień światła c (c^n, c'_n) przechodzi przez punkt C_h cienia rzuconego $A_h B_h$ i leży na płaszczyźnie ab , określonej promieniami światła a i b . Promień c przecina zatem dany odcinek $\overline{AB}$ w takim punkcie C (C^n, C'_n), że cień rzucony

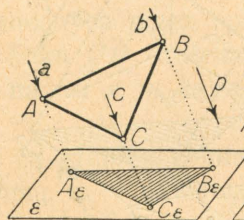


Rys. 188.

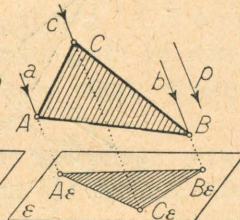
przez punkt C na rzutnię poziomą π_1 jest punktem C_h . Ponieważ jednak punkt C_h leży na osi $x = \pi_1 \pi_2$, przeto jest zarazem punktem $C_v = c\pi_2$ przebiecia się promienia światła c z rzutnią pionową π_2 , czyli innymi słowy: $C_h = C_v$ jest cieniem punktu C i na rzutnię pionową π_2 . Promień światła b (b^n, b'_n) przebiega płaszczyznę π_2 w punkcie B_v (B_v^n, B'_n), który jest cieniem punktu B na rzutnię pionową π_2 . Łącząc punkty C_v i B_v otrzymamy aksonometrię $\overline{C_v B_v}$ cienia rzuconego przez odcinek $\overline{CB}$ na rzutnię pionową π_2 , podczas gdy odcinek $\overline{A_h C_h}$ jest obrazem aksonometrycznym cienia rzuconego przez odcinek $\overline{AC}$ na rzutnię poziomą π_1 . Cień uważanego odcinka $\overline{AB}$ pada częściowo na rzutnię poziomą π_1 , a po załamaniu się w punkcie $C_h = C_v$ na osi x , występuje w dalszym ciągu na rzutni pionowej π_2 .

Ćwiczenie: Rozwiązać zadanie 2 dla odcinka $\overline{AB}$, prostopadłego do rzutni: a) poziomej π_1 (por. rys. 188), b) pionowej π_2 , c) bocznej π_3 , d) aksonometrycznej π_a .

71. Cienie wielokątów płaskich. Niechaj dane będą dowolny trójkąt (ABC) , kierunek światła p i płaszczyzna ε . Przez wierzchołki A , B i C danego trójkąta poprowadźmy (rys. 189 i 190) promienie światła $a \parallel b \parallel c \parallel p$ i wyznaczmy cienie $A_\varepsilon = a\varepsilon$, $B_\varepsilon = b\varepsilon$, $C_\varepsilon = c\varepsilon$ owych wierzchołków na przyjętą płaszczyznę ε . Skoro założymy, że część płaszczyzny ograniczonej trójkątem (ABC) odbija całkowicie promienie światła, to wówczas ta strona owego trójkąta, na którą bezpośrednio padają promienie światła (por. rys. 189), jest oświetloną, a strona przeciwna (por. rys. 190) jest w cieniu własnym. Promienie światła, które oświetlają trójkąt (ABC) , odbijają się od niego i nie dochodzą wcale do płaszczyzny ε . Część (obszar) płaszczyzny ε , ograniczoną trójkątem $(A_\varepsilon B_\varepsilon C_\varepsilon)$, na którą nie padają promienie światła, nazywamy cieniem rzuconym przez dany trójkąt (ABC) na płaszczyznę ε . Celem wyznaczenia cienia rzuconego przez trójkąt (ABC) na płaszczyznę ε , wystarczy zatem skonstruować cienie A_ε , B_ε i C_ε poszczególnych wierzchołków A , B i C , względnie cienie $\overline{A_\varepsilon B_\varepsilon}$, $\overline{B_\varepsilon C_\varepsilon}$, $\overline{C_\varepsilon A_\varepsilon}$ poszczególnych boków $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ owego trójkąta.



Rys. 189.



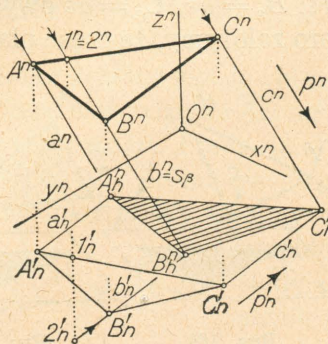
Rys. 190.

Zadanie 1: Dane są trzy dowolne punkty właściwe $A (A^n, A'_n)$, $B (B^n, B'_n)$ i $C (C^n, C'_n)$, oraz kierunek światła $p (p^n, p'_n)$. Wyznaczyć cień trójkąta (ABC) na rzutnię poziomą π_1 , oraz ustalić, która strona owego trójkąta jest w cieniu własnym.

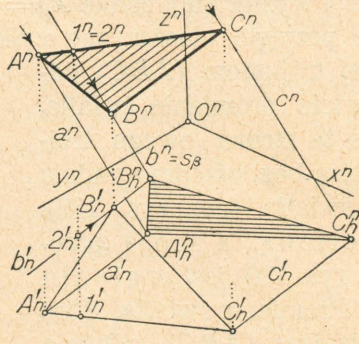
Rozwiązanie: Na rys. 191 i 192 wyznaczyliśmy, w sposób poprzednio poznany, cienie A_h , B_h i C_h poszczególnych wierzchołków, oraz cienie $\overline{A_h B_h}$, $\overline{B_h C_h}$ i $\overline{C_h A_h}$ poszczególnych boków uważanego trójkąta (ABC) . Trójkąt $(A_h B_h C_h)$ jest aksonometrią cienia rzuconego $(A_h B_h C_h)$ przez dany trójkąt (ABC) na rzutnię poziomą π_1 .

Pozostaje jeszcze sprawa ustalenia, która strona trójkąta (ABC) jest oświetloną, a która znajduje się w cieniu własnym. W tym celu przez promień światła $b (b^n, b'_n)$ poprowadźmy płaszczyznę aksonometrycznie-rzucającą $\beta (s_\beta = b^n)$ i wyznaczmy punkt $1 (1^n, 1'_n)$, przebiecia się boku $\overline{AC}$ z płaszczyzną β . Punkt $1^n = A^n C^n$. b^n oznaczmy przez 2^n i element 2^n uważajmy za aksonometrię takiego punktu $2 (2^n, 2'_n)$, który leży na promieniu światła b . Skoro na prostej 12 , prostopadłej do rzutni aksonometrycznej π_a , umieścimy oko obserwatora w dość znacznej odległości nad płaszczyznę rysunkową π_a , a początek O układu odniesienia $O [x, y, z]$ poniżej rzutni π_a , to wówczas z zachowania się rzutów $1'_n$ i $2'_n$ wnosimy (por. ust. 69), że: punkt 2 na rys. 191 jest widoczny,

a punkt 2 na rys. 192 jest niewidoczny. W pierwszym przypadku odcinek (o skończonej długości) $2B$ promienia światła b jest widoczny, a tem samem — przy uwzględnieniu kierunku padania promieni świa-



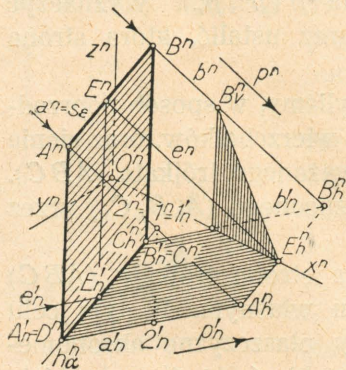
Rys. 191.



Rys. 192.

tła — widoczna strona uważanego trójkąta jest oświetlona. Natomiast w drugim przypadku (rys. 192) odcinek $2B$ promienia światła b jest niewidoczny, więc niewidoczna strona trójkąta (ABC) jest oświetlona, a strona widoczna znajduje się w cieniu własnym.

Zadanie 2: Na płaszczyźnie poziomo-rzucającej α leży prostokąt $(ABCD)$, którego jeden bok CD schodzi się ze śladem poziomym h_α tej płaszczyzny. Należy skonstruować cienie rzucone przez ów prostokąt na rzutnie poziomą π_1 i pionową π_2 , oraz ustalić, która strona owego wielokąta jest w cieniu własnym.



Rys. 193.

Rozwiązanie: Aksonometria przyjętego prostokąta jest (rys. 193) równoległobokiem $(A^n B^n C^n D^n)$, którego dwa boki są równoległe do osi z^n , a trzeci bok $C^n D^n$ leży na elemencie h_α^n . Przy pomocy promieni światła $a \parallel b \parallel p$ wyznaczaliśmy aksonometrię $A_h^n = a^n a'_n$, $B_h^n = b^n b'_n$ i B_v^n cieni rzucanych przez wierzchołki A i B na rzutnię poziomą π_1 i pionową π_2 . Bok AB rzuca cień $A_h B_h$ na rzutnię π_1 , a aksonometrią tego cienia rzuconego jest odcinek $A_h^n B_h^n$. Przez

punkt E_h^n , przecięcia się osi x^n z odcinkiem $A_h^n B_h^n$, wykreślimy proste $e^n \parallel p^n$ i $e'_n \parallel p'_n$. Otrzymany promień światła e (e^n , e'_n) wyznaczy na boku AB taki punkt E (E^n , E'_n), że cień owego punktu E na rzutnię poziomą π_1 (por. rys. 187) jest punktem E_n , przynależnym do osi x . Odcinek AE rzuca cień całkowicie na rzutnię poziomą, a odcinek EB rzuca

cień tylko na rzutnię pionową; odcinki $\overline{A_h^n E_h^n}$ i $\overline{E_h^n B_v^n}$ są aksonometrijami owych cieni.

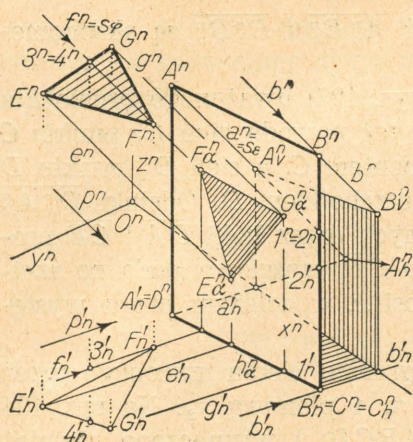
Dwa pozostałe wierzchołki C i D (rys. 193) uważanego prostokąta ($ABCD$) leżą na rzutni poziomej. Z tego też powodu cień C_h punktu C na rzutnię poziomą π_1 schodzi się z elementem C , a cień D_h punktu D na rzutnię π_1 również nakrywa się z wierzchołkiem D . Odcinki $\overline{D_h^n A_h^n}$ i $\overline{C_h^n B_h^n}$ są aksonometrijami cieni rzuconych przez boki $\overline{DA}$ i $\overline{CB}$ prostokąta na rzutnię poziomą π_1 . Cień boku $\overline{CB}$ częściowo pada na rzutnię poziomą π_1 , a po załamaniu się na osi x , w dalszym ciągu występuje na rzutni pionowej π_2 .

Na rysunku 193 zakreskowane są granice cienia rzuconego przez prostokąt ($ABCD$) na rzutnię poziomą π_1 i pionową π_2 . Na rys. 194 przyjęto w innym położeniu prostokąt ($ABCD$) i wyznaczono również jego cień na obie rzutnie. Z samego układu cieni rzuconych wnosimy, że widoczna strona prostokąta na rys. 194 jest oświetlona, a na rys. 193 jest w cieniu własnym. Możemy jednak przeprowadzić badania w sposób, omówiony poprzednio w zadaniu 1. Przez promień światła a (a^n, a'_n) poprowadźmy mianowicie płaszczyznę aksonometrycznie-rzucającą ε ($s_\varepsilon = a^n$) i wyznaczmy punkt 1 ($1^n, 1'_n$), przebiecia się tej płaszczyzny ε z bokiem $\overline{CD}$ (na rys. 193), wzgl. z bokiem $\overline{CB}$ (patrz rys. 194). Na promieniu światła a (a^n, a'_n) obierzmy następnie taki punkt 2 ($2^n, 2'_n$), którego aksonometria 2^n zjednoczyła się z elementem 1^n . Na rys. 193 rzut $2'_n$ leży poniżej rzutu $1'_n$, a na rys. 194 zupełnie przeciwnie rzut $2'_n$ leży powyżej rzutu $1'_n$. Skoro na prostej $12 \perp \pi_a$ umieścimy (w dość znacznej odległości od rzutni aksonometrycznej π_a) oko obserwatora nad płaszczyzną π_a , a początek O poniżej płaszczyzny rysunku π_a , to z rozważań ust. 69 wynika, że: punkt 2 na rys. 193 jest widoczny, a na rys. 194 jest niewidoczny. Odcinek (o skończonej długości) $\overline{A2}$, leżący na „przedłużeniu“ promienia światła a (odbitego od punktu A !), jest w pierwszym przypadku widoczny, a w drugim niewidoczny. Wnosimy stąd, że widoczna strona prostokąta ($ABCD$) jest w cieniu własnym na rys. 193, a przeciwnie na rys. 194 owa strona widoczna jest oświetlona.

Ćwiczenie 1: Zadanie 2 rozwiązać wówczas, jeżeli płaszczyzna α posiada następujące położenie: a) $\alpha // \pi_1$, b) $\alpha // \pi_2$, c) $\alpha // \pi_3$, d) $\alpha \perp \pi_2$, e) $\alpha \perp \pi_3$, f) $\alpha \perp \pi_a$.

Ćwiczenie 2: Dany jest pięciokąt umiarowy, leżący na dowolnej płaszczyźnie α (h_a^n, v_a^n). Wyznaczyć cień tego pięciokąta na rzutnie π_1 i π_2 .

Zadanie 3: Dane są na rys. 194 obrazy aksonometryczne dowolnego trójkąta (EFG) i prostokąta ($ABCD$), leżącego na płaszczyźnie poziomo-rzucającej α . Wyznaczyć cień rzucony przez ten trójkąt na płaszczyznę prostokąta.



Rys. 194.

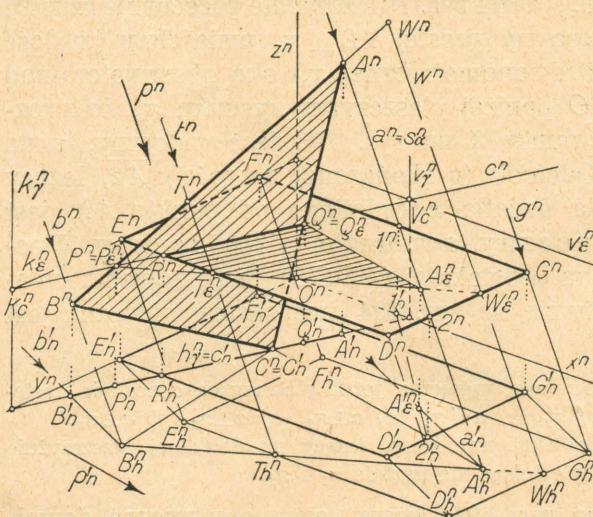
Rozwiązanie: Przez wierzchołki $E(E^n, E'_n)$, $F(F^n, F'_n)$ i $G(G^n, G'_n)$ przyjętego trójkąta poprowadźmy promienie światła $e \parallel f \parallel g \parallel p$ i wyznaczmy punkty $E_a = ea$, $F_a = fa$, $G_a = ga$ przebiecia się owych promieni światła z płaszczyzną $a \perp \pi_1$. Uzyskany w ten sposób trójkąt $(E'_a F'_a G'_a)$ jest aksonometryczną cienia rzuconego przez dany trójkąt (EFG) na płaszczyznę prostokąta $(ABCD)$.

Przy pomocy płaszczyzny aksonometrycznie-rzucającej φ ($s_\varphi = f^n$), oraz punktów 3 ($3^n, 3'_n$) i 4 ($4^n, 4'_n$), które leżą na prostej $34 \perp \pi_a$, ustalono, że

widoczna strona trójkąta (EFG) znajduje się w cieniu własnym.

Zadanie 4: Dane są dowolny trójkąt (ABC) , leżący na płaszczyźnie poziomo-rzucającej γ (h_γ^n, v_γ^n), oraz prostokąt $(DEFG)$, przynależny do płaszczyzny ε ($v_\varepsilon^n, k_\varepsilon^n$) równoległej do rzutni poziomej. Skonstruować należy cień rzucony przez trójkąt na płaszczyznę czworokąta.

Rozwiązanie 1: Na rys. 195 wyznaczaliśmy najpierw krawędź c ($c^n, c'_n = h_\gamma^n$), przecięcia się płaszczyzny $\gamma \perp \pi_1$ i $\varepsilon \parallel \pi_1$, a następnie punkty



Rys. 195.

$P(P^n, P'_n)$ i $Q(Q^n, Q'_n)$ przebiecia się prostych AB i AC z płaszczyzną a . Punkt $R(R^n, R'_n)$ jest wreszcie punktem przebiecia się boku DE prostokąta z płaszczyzną trójkąta. — Aby otrzymać cień wierzchołka A na płaszczyznę prostokąta, poprowadźmy przez punkt A promień światła a (a^n, a'_n) i wyznaczmy punkt $A_\varepsilon = a\varepsilon$ przebiecia się owego promienia a z płaszczyzną ε . Płaszczyzna np. aksonometrycznie-rzucająca a ($s_a = a^n$) przecina się z płaszczyzną ε

w krawędzi 12 ($1^n 2^n, 1'_n 2'_n$). Punkt A_ε ($A_\varepsilon^n, A'_\varepsilon^n$), przynależny do prostych 12 i a , jest żądanym cieniem punktu A na płaszczyznę pro-

stokąta. Ponieważ poprzednio wyznaczone punkty P i Q leżą na płaszczyźnie ε , przeto ich cienie P_ε i Q_ε na ową płaszczyznę ε schodzą się odpow. z elementami P i Q . Odcinki $\overline{A_\varepsilon P^n}$ i $\overline{A_\varepsilon Q^n}$ są aksonometrijami cieni rzuconych przez odcinki $\overline{AP}$ i $\overline{AQ}$ na płaszczyznę ε . Przez punkt T_ε^n , w którym odcinek $\overline{A_\varepsilon P^n}$ przecina się z bokiem $\overline{D^n E^n}$, wykreślimy prostą $t^n \parallel p^n$, to promień t^n wyznaczy nam na boku $\overline{A^n B^n}$ punkt T^n . Skoro otrzymany w ten sposób punkt T^n uważać będziemy za aksonometrię punktu T , leżącego na boku $\overline{AB}$ danego trójkąta, to z łatwością zauważymy, że: punkt T_ε^n jest obrazem aksonometrycznym cienia rzuconego przez punkt T na płaszczyznę ε . Wielokąt $(A_\varepsilon^n Q_\varepsilon^n R_\varepsilon^n T_\varepsilon^n)$ rozwiązuje nasze zadanie, gdyż jest aksonometrią cienia, jaki trójkąt (ABC) rzuca na płaszczyznę prostokąta $(DEFG)$.

Rozwiązanie 2: Celem skonstruowania cienia rzuconego przez bok $\overline{AB}$ trójkąta na płaszczyznę prostokąta, wyznaczmy aksonometrię cieni $A_h^n B_h^n$, $D_h^n E_h^n$ i $D_h^n G_h^n$ prostych AB , DE i DG na rzutnię np. poziomą π_1 . Prosta $A_h^n B_h^n$ niechaj przecina się z prostymi $D_h^n E_h^n$ i $D_h^n G_h^n$ w punktach T_h^n i W_h^n . Promień t^n , wykreślony z punktu T_h^n równolegle do elementu p^n , wyznaczy na bokach $\overline{A^n B^n}$ i $\overline{D^n E^n}$ punkty T^n i T_ε^n . Z łatwością zauważymy, że element T_ε^n jest aksonometrią cienia rzuconego przez punkt T na płaszczyznę ε . Podobnie promień w^n , wykreślony z punktu W_h^n równolegle do elementu p^n , wyznaczy na prostych $\overline{A^n B^n}$ i $\overline{D^n G^n}$ takie punkty W^n i W_ε^n , że punkt W_ε^n jest obrazem aksonometrycznym cienia rzuconego przez punkt W (W^n , W_ε^n) na płaszczyznę ε . Odcinek (o skończonej długości) $\overline{TW}$ prostej AB rzuca cień na płaszczyznę prostokąta $(DEFG)$, a aksonometrią owego cienia jest odcinek $\overline{T_\varepsilon^n W_\varepsilon^n}$. Ponieważ wierzchołek A leży na odcinku $\overline{TW}$, przeto jego cień A_ε na płaszczyznę ε przynależeć musi do odcinka $\overline{T_\varepsilon^n W_\varepsilon^n}$. Promień a^n , wykreślony z punktu A^n równolegle do kierunku p^n , wyznaczy na odcinku $\overline{T_\varepsilon^n W_\varepsilon^n}$ punkt A_ε^n , t. zn. aksonometrię żadanego cienia A_ε . Wkońcu nakreślić możemy wielokąt $(A_\varepsilon^n Q_\varepsilon^n R_\varepsilon^n T_\varepsilon^n)$, spełniający warunki zadania.

Rozdział IX.

Wielościany.

72. Określenia i podział wielościanów. Część przestrzeni, ograniczoną ze wszystkich stron wielokątami płaskimi, nazywamy wielościanem. Owe wielokąty są ścianami, a boki i wierzchołki tych wielokątów są krawędziami i wierzchołkami wielościanu. Przekątniami wielościanu nazywamy odcinki (o długości skończonej), które łączą dwa dowolne jego wierzchołki, nieleżące na jednej ścianie. Wielościan nazywamy wypukłym wówczas, jeżeli każda jego ściana posiada tę własność, że po jednej i tej samej stronie jej płaszczyzny leżą wszystkie pozostałe ściany tego wielościanu. Jeżeli ta własność nie jest spełnioną, to wielościan nazywamy wklęsłym. W rozważaniach naszych zajmować się będziemy przeważnie tylko wielościanami wypukłymi. Wielościan nazywamy: czworościanem, pięcio-, sześćo-ścianem, ... n -ścianem zależnie od ilości ścian. O wielościanie wypukłym, którego wszystkie wierzchołki leżą na powierzchni kuli, mówimy, że jest „wpisany“ w tę kulę. Na szczególniejszą uwagę zasługują wielościany umiarowe, ostrosłupy i graniastoslupy.

Wielościanem umiarowym (foremny) nazywamy taki wielościan wypukły i wpisany w kulę, którego wszystkie ściany są wielokątami umiarowymi i przystającymi do siebie. Takich wielościanów mamy pięć, a mianowicie: czworościan umiarowy, sześcian, ośmiościan umiarowy, dwunastościan umiarowy i dwudziestościan umiarowy. Sześcian ograniczony jest sześcioma kwadratami, dwunastościan umiarowy ograniczony jest dwunastoma pięciokątami umiarowymi. Natomiast trzy pozostałe wielościany umiarowe ograniczone są trójkątami równobocznymi.

Ostrosłupem nazywamy wielościan, ograniczony wielokątem płaskim i trójkątami o wspólnym wierzchołku W , a których podstawami są poszczególne boki owego wielokąta. Wielokąt ten nazywamy podstawą, a jego wierzchołki i boki nazywamy wierzchołkami podstawy i krawędziami podstawy uważanego ostrosłupa. Trójkąty o wspólnym wierzchołku W są ścianami bocznymi, punkt W jest wierzchołkiem ostrosłupa, a odległość wierzchołka od płaszczyzny podstawy

jest wysokością tego ostrosłupa. Krawędziami bocznymi ostrosłupa nazywamy te jego krawędzie, które przechodzą przez jego wierzchołek. Zależnie od ilości ścian bocznych ostrosłupa — przyczem nie wliczamy wcale podstawy! — nazywamy ostrosłup: trójsściennym, czworosściennym, pięciosściennym, ..., n -ściennym. Ostrosłup np. czworosścienny ograniczony jest czterema trójkątami i dowolnym czworokątem podstawowym; ostrosłup ten jest oczywiście wielościanem pięciosściennym.

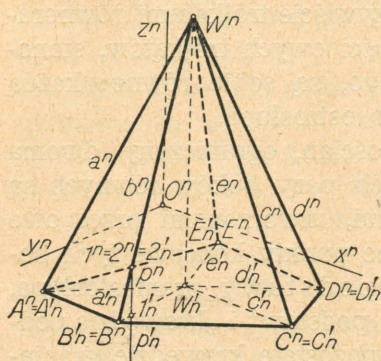
Podstawa ostrosłupa może posiadać środek geometryczny S , o ile wielokąt podstawowy (por. ust. 63) jest wpisany w koło. Jeżeli odcinek $\overline{SW}$, łączący środek geometryczny S podstawy pewnego ostrosłupa z jego wierzchołkiem W , jest prostopadły do płaszczyzny podstawy, (t. zn. $\overline{SW}$ jest wysokością ostrosłupa), to wówczas ów wielościan nazywamy ostrosłupem prostym. Ponieważ nadto środek S jest środkiem koła opisanego na wielokącie podstawowym uważanego ostrosłupa, przeto: jego krawędzie boczne są równej długości, a tem samem ściany boczne są trójkątami równoramiennymi. Ostrosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt umiarowy, nazywamy ostrosłupem umiarowym; ściany boczne tego ostrosłupa są oczywiście trójkątami równoramiennymi i przystającymi do siebie. Wysokości owych trójkątów, stanowiących ściany boczne ostrosłupa umiarowego, są sobie równe; każdą z tych wysokości nazywamy apotemą tego ostrosłupa.

Graniastosłupem nazywamy wielościan, ograniczony dwoma przystającymi wielokątami płaskimi, których pary boków równych są do siebie równoległe, oraz równoległobokami, utworzonymi przez owe pary boków równych i przez odcinki, łączące punkty końcowe tych boków. Wymienione dwa wielokąty stanowią podstawy graniastosłupa, ich wierzchołki i boki stanowią „wierzchołki podstaw“ i „krawędzie podstaw“ uważanego graniastosłupa. Wszystkie pozostałe krawędzie graniastosłupa są do siebie równoległe i nazywają się krawędziami bocznymi owego wielościanu. Równoległoboki, ograniczające graniastosłup, są jego ścianami bocznymi, a odległość podstaw jest wysokością tego graniastosłupa. Graniastosłup nazywamy prostym wówczas, jeżeli jego krawędzie boczne są prostopadłe do płaszczyzny podstawowej. Jeżeli podstawy graniastosłupa prostego są wielokątami umiarowymi, to ów wielościan nazywamy graniastosłupem umiarowym. Jeżeli podstawy pewnego graniastosłupa są równoległobokami, to wielościan taki nazywamy równoległościanem. Mówimy wreszcie o graniastosłupach: trójsściennych, czworosściennych, pięcio-, ..., n -ściennych zależnie od ilości ścian bocznych tego wielościanu. Ponieważ nie wliczamy wcale podstaw, przeto graniastosłup np. pięciosścienny jest wielościanem siedmiosściennym.

73. Aksonometrie wielościanów. Uważajmy w przestrzeni dowolny wielościan Γ , którego wierzchołkami są punkty właściwe $A, B, C, \dots$, a krawędziami odcinki $\overline{AB}, \overline{BC}, \dots$. Aksonometrię tego wielościanu otrzymamy, skoro wyznaczmy rzuty aksonometryczne $A^n, B^n, C^n, \dots$ i $\overline{A^n B^n}, \overline{B^n C^n}, \dots$ poszczególnych wierzchołków i krawędzi tego wielościanu. Aksonometrię rzutu poziomego uważanego wielościanu Γ wyznaczmy, jeśli skonstruujemy rzuty $A'_n, B'_n, C'_n, \dots$ i $\overline{A'_n B'_n}, \overline{B'_n C'_n}, \dots$ wymienionych powyżej elementów. Podobnie wyznaczyć możemy aksonometrię rzutu pionowego i rzutu bocznego tego wielościanu.

Ponieważ dwa dowolne rzuty aksonometryczne punktu lub prostej — ustalają położenie owych elementów w przestrzeni, przeto: skoro dane są dwa rzuty aksonometryczne pewnego wielościanu, to jego położenie w przestrzeni jest dokładnie ustalone.

Zastosujmy te uwagi do ostrosłupa pięciosiennego (rys. 196), którego podstawa ($ABCDE$) leży na rzutni poziomej π_1 , a wierzchołek W (W^n, W'_n) jest dowolnym punktem właściwym. Z określeń ustępu poprzedniego wiadomo nam, że skoro dane są podstawa i wierzchołek ostrosłupa, to



Rys. 196.

wielościan ten jest dokładnie wyznaczony w przestrzeni. Dla krawędzi bocznych $\overline{WA}, \overline{WB}, \dots$ tego ostrosłupa otrzymamy ich rzuty aksonometryczne, jeśli wykreślimy odcinki $\overline{W^n A^n}, \overline{W^n B^n}, \dots$. Odcinki zaś $\overline{W'_n A'_n}, \overline{W'_n B'_n}, \dots$ są aksonometriami rzutów poziomych $\overline{W'A'}, \overline{W'B'}, \dots$ poszczególnych krawędzi bocznych uważanego ostrosłupa. Na rys. 196 uwzględniliśmy krawędzie widoczne (pełne) i niewidoczne (kreskowane), przy założeniu, że przyjęty ostrosłup jest „nieprzezroczysty“.

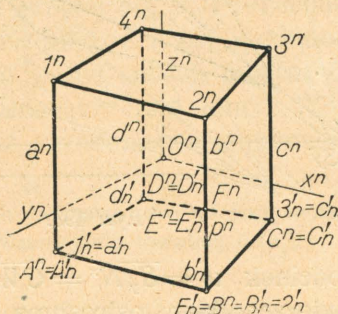
Aby zbadać, które krawędzie i ściany tego ostrosłupa są widoczne — skoro oko obserwatora umieścimy w dość znacznej odległości na prostej prostopadłej do rzutni aksonometrycznej π_a — weźmy pod uwagę np. punkt przecięcia się odcinków $\overline{A^n E^n}$ i $\overline{B^n W^n}$. W owym punkcie $1^n = 2^n$ poprowadźmy prostą p ($p^n = 1^n$, $p'_n \parallel z^n$) prostopadłą do rzutni π_a i wyznaczmy punkty $1(1^n, 1'_n), 2(2^n, 2'_n)$, w których prosta p przecina się z krawędziami $\overline{BW} = b$ i $\overline{AE}$ ostrosłupa. Jeżeli oko obserwatora znajduje się ponad płaszczyzną rysunku π_a , a początek O poniżej rzutni aksonometrycznej π_a , to wówczas (por. ust. 69) punkt 1 jest widoczny, a punkt 2 jest niewidoczny, gdyż rzut $1'_n$ leży poniżej rzutu $2'_n$. Wnosimy stąd, że odcinek $\overline{BW}$, przechodzący przez widoczny punkt 1 , jest krawędzią widoczną, a natomiast krawędź $\overline{AE}$ jest niewidoczną.

W podobny sposób zbadać możemy, że krawędzie $\overline{ED}$ i $\overline{EW}$ są też niewidoczne. Po ustaleniu krawędzi widocznych i niewidocznych naszego ostrosłupa, zająć się musimy wyznaczeniem ścian widocznych i ścian niewidocznych uważanego ostrosłupa. W ogólności te ściany, które ograniczone są tylko krawędziami widocznymi, są widoczne; natomiast ściany, na których leżą krawędzie widoczne i niewidoczne, lub tylko same krawędzie niewidoczne, są ścianami niewidocznymi. W naszym przykładzie ściany: (ABW) , (BCW) i (CDW) są zatem ścianami widocznymi, a natomiast ściany (DEW) , (EAW) i podstawa $(ABCDE)$ są niewidoczne.

Uwaga: Może się jednak zdarzyć, że ściana, która zawiera tylko same krawędzie widoczne, jest mimo to ścianą niewidoczną! Na rys. 196 wystarczyłoby przyjąć np. punkt W^n „wewnątrz“ wielokąta podstawowego $(A^n B^n C^n D^n E^n)$, to wówczas krawędzie $\overline{AE}$ i $\overline{ED}$ byłyby również widoczne. Wszystkie ściany boczne takiego ostrosłupa byłyby widoczne, a jego podstawa $(ABCDE)$ byłaby wówczas niewidoczną.

W omawianym poprzednio przykładzie (rys. 196) weźmy pod uwagę krawędzie: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DW}$ i $\overline{WA}$, które odgraniczają ściany widoczne od ścian niewidocznych przyjętego ostrosłupa. Z łatwością zauważymy, że krawędzie te nie leżą w ogólności na jednej płaszczyźnie i tworzą wielokąt przestrzenny $(ABCDW)$. Wielokąt ten — w odniesieniu do rzutni aksonometrycznej π_a — nazywamy konturem lub zarysem ostrosłupa. Rzut aksonometryczny konturu $(ABCDW)$ jest oczywiście wielokątem płaskim $(A^n B^n C^n D^n W^n)$; ten ostatni wielokąt nazywać będziemy aksonometrią konturu uważanego ostrosłupa.

Na rzutni poziomej π_1 obierzmy (rys. 197) dowolny czworokąt $(ABCD)$ i uważajmy go za podstawę graniastostłupa prostego. Krawędzie boczne tego wielościanu są prostopadłe do rzutni π_1 . Skoro w punktach A^n , B^n , C^n i D^n poprowadzimy proste $a^n \parallel b^n \parallel c^n \parallel d^n \parallel z^n$ i odłożymy na nich odcinki równej długości, to uzyskamy aksonometrię krawędzi bocznych owego graniastostłupa. Czworokąty $(A^n B^n C^n D^n)$ i $(1^n 2^n 3^n 4^n)$ są obrazami aksonometrycznymi podstaw graniastostłupa. Na rys. 197 uwzględniliśmy krawędzie widoczne i niewidoczne, przyjmując dany graniastostłup za „nieprzezroczysty“. W punkcie przecięcia się odcinków $\overline{D^n C^n}$ i $\overline{B^n 2^n}$ wyprowadźmy prostą $p(p^n, p'_n)$, prostopadłą do płaszczyzny rysunku π_a , i oznaczmy przez $E(E^n, E'_n)$, $F(F^n, F'_n)$ punkty przecięcia się owego promienia p z krawędziami $\overline{DC}$ i $\overline{B2}$. Jeżeli na prostej $p \perp \pi_a$ umieścimy oko obserwatora w odpowiedniej odległości ponad płaszczyznę rysun-



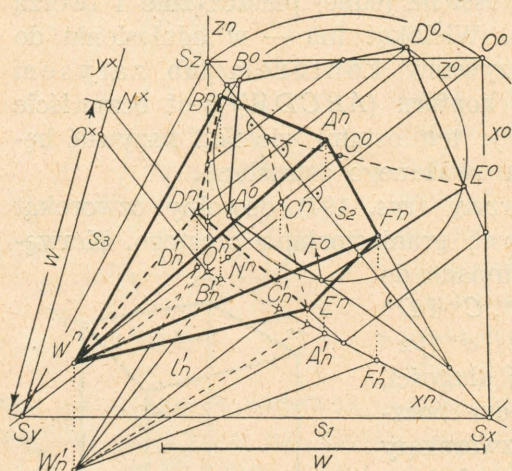
Rys. 197.

kową π_a , a środek O układu $O[x, y, z]$ poniżej rzutni π_a , to wówczas (por. ust. 69) punkt F jest widoczny, a punkt E jest niewidoczny, a tem samem krawędź $\overline{B2}$ jest widoczną, natomiast krawędź $\overline{DC}$ jest niewidoczną. Wnosimy stąd, że krawędzie $\overline{AD}$ i $\overline{D4}$ są niewidoczne, jak również ściany $(AD41)$, $(DC34)$ i $(ABCD)$ graniastostupa są też niewidoczne. W myśl poprzednich naszych rozważań krawędzie: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{C3}$, $\overline{34}$, $\overline{41}$ i $\overline{1A}$ odgraniczają ściany widoczne od ścian niewidocznych przyjętego graniastostupa. Wielokąt przestrzenny $(ABC341)$ — w odniesieniu do rzutni aksonometrycznej π_a — stanowi kontur naszego graniastostupa prostego, a wielokąt płaski $(A^n B^n C^n 3^n 4^n 1^n)$ stanowi „aksonometrię konturu” owego wielościanu.

74. Zadania i ćwiczenia.

Zadanie 1: Wyznaczyć rzuty aksonometryczne ostrosłupa prostego pięciościennego, którego podstawa leży na rzutni pionowej, a wysokość równa się danemu odcinkowi w .

Rozwiązanie: Podstawą ostrosłupa prostego jest wielokąt wpisany w koło; jednak wielokąt ten nie musi być konieczniewielokątem



Rys. 198.

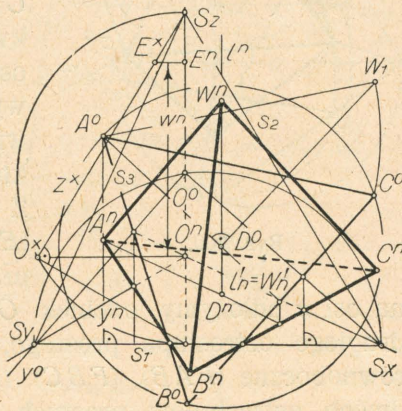
umiarowym. Aby wykreślić aksonometrię podstawy, wykonajmy (rys. 198) kład rzutni pionowej π_2 na płaszczyznę rysunku π_a . Wkładzie z dowolnego środka C^o zakresłmy koło i na jego obwodzie obierzmy pięć punktów A^o, B^o, D^o, E^o, F^o . Skoro podnieśliemy zkład pięciokąt $(A^o B^o D^o E^o F^o)$ i punkt C^o , otrzymamy aksonometrię $(A^n B^n D^n E^n F^n)$ podstawy ostrosłupa, oraz aksonometrię C^n środka geometrycznego wielokąta podstawy. W punkcie C ($C^n = C''_n$) wykreślimy prostą $l \perp \pi_2$ i odłóżmy na niej dany

odcinek $w = \overline{S_y N^x} = \overline{CW}$, to uzyskany w ten sposób punkt W jest wierzchołkiem ostrosłupa prostego. Ponieważ $l \parallel y$, przeto na kładzie y^x osi y odmierzymy daną wysokość $w = \overline{S_y N^x}$ i wyznaczmy rzut N^n na osi y^n . Na prostej l^n , wykreślonej z punktu C^n równolegle do osi aksonometrycznej y^n , odłóżmy odcinek $\overline{C^n W^n} = \overline{S_y N^n}$; element W^n jest aksonometrią wierzchołka W ostrosłupa prostego. — Na rys. 198 uwzględniono krawędzie i ściany widoczne, oraz niewidoczne owego wielościanu, a nadto wyznaczono aksonometrię rzutu poziomego tego ostrosłupa.

Ćwiczenie 1: Skonstruować aksonometrię ostrosłupa umiowego pięciosciennego, którego podstawa leży: a) na rzutni bocznej π_3 , b) na rzutni poziomej π_1 .

Zadanie 2: Wyznaczyć aksonometrię czworościanu umiowego, którego podstawa leży na rzutni poziomej.

Rozwiązanie: Podstawą tego wielościanu jest trójkąt równoboczny. Na rys. 199 wykonaliśmy kład rzutni poziomej π_1 i przyjęliśmy w kładzie trójkąt równoboczny ($A^0 B^0 C^0$). Uważając ów trójkąt za kład podstawy czworościanu, podnieśliśmy go następnie z kładu i skonstruowaliśmy rzut aksonometryczny ($A^n B^n C^n$). Ponieważ czworościan umiowy jest trójsściennym ostrosłupem prostym, którego podstawa (ABC) i ściany boczne (WAB), (WBC), (WCA) są trójkątami równobocznymi, przeto jego wysokość $\overline{WD}$ i wierzchołek np. A wyznaczają trójkąt prostokątny (WDA). Jedną przyprostokątnią jest, nieznaną co do długości, wysokość WD czworościanu, drugą przyprostokątnią DA jest odległość środka geometrycznego D podstawy czworościanu od wierzchołka A , a przeciwprostokątnią jest odcinek $\overline{AW}$ równy (co do długości) bokowi trójkąta podstawy. Narysujmy trójkąt prostokątny ($A^0 D^0 W_1$), którego przeciwprostokątnią $A^0 W_1 = \overline{A^0 C^0}$, a wierzchołek D^0 kąta prostego schodzi się ze środkiem geometrycznym trójkąta równobocznego ($A^0 B^0 C^0$), to wówczas odcinek $\overline{D^0 W_1}$ wyraża wysokość czworościanu. Wysokość tę należy odłożyć na prostej $l \perp \pi_1$ i przechodzącej przez punkt D . Ponieważ $l \parallel z$, przeto na kładzie z^x osi z odmierzymy odcinek $\overline{O^x E^x} = \overline{D^0 W_1}$ i dla uzyskanego w ten sposób punktu E wykreślimy rzut E^n . Na promieniu $l^n \parallel z^n$ wyznaczmy taki punkt W^n , aby odcinek $\overline{D^n W^n} = \overline{O^n E^n}$, to element W^n jest aksonometrią szukanego wierzchołka czworościanu.



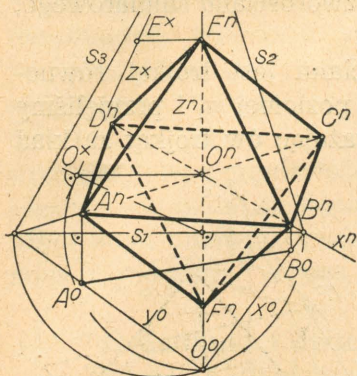
Rys. 199.

Ćwiczenie 2: Rozwiązać zadanie 2 wówczas, jeżeli podstawa czworościanu umiowego leży na: a) rzutni pionowej π_2 , b) bocznej π_3 , c) płaszczyźnie dowolnej α (h_a^n, v_a^n), d) na $\alpha \parallel \pi_1$, e) na $\alpha \perp \pi_1$, f) na $\alpha \parallel x$.

Zadanie 3: Wyznaczyć aksonometrię ośmiościanu umiowego, którego jedna przekątnia jest prostopadłą do rzutni poziomej.

Rozwiązanie: Obierzmy (rys. 200) na rzutni poziomej π_1 kwadrat ($ABCD$), którego środek zjednoczył się z początkiem O układu $O[x, y, z]$, a którego wierzchołki leżą na osiach x i y . Aby wyznaczyć aksonometrię ($A^n B^n C^n D^n$) tego kwadratu, musimy wykonać kład rzutni π_1 i na osiach x^0, y^0 odłożyć odcinki $\overline{O^0 B^0} = \overline{O^0 A^0}$. Po podnie-

sieniu z kładu rzutni poziomej, otrzymamy aksonometrię A^n i B^n dwóch wierzchołków owego kwadratu. Rzut aksonometryczny kwadratu jest



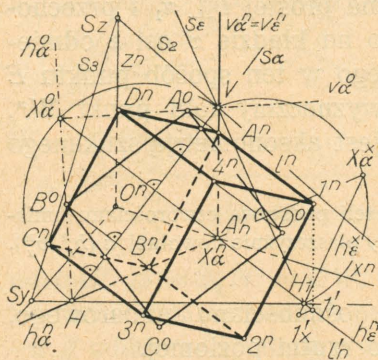
Rys. 200.

równoległobokiem, więc w naszym przykładzie z łatwością skonstruujemy rzuty C^n i D^n dwóch pozostałych wierzchołków, gdyż zachodzą relacje: $\overline{A^n D^n} = \overline{B^n C^n}$, $\overline{A^n B^n} = \overline{D^n C^n}$ i $\overline{A^n D^n} \parallel \overline{B^n C^n}$, $\overline{A^n B^n} \parallel \overline{D^n C^n}$ lub też: $\overline{O^n A^n} = \overline{O^n C^n}$ i $\overline{O^n B^n} = \overline{O^n D^n}$. Otrzymany kwadrat $(ABCD)$ uważamy za podstawę ostrosłupa prostego czworosściennego, którego wysokość $\overline{OE} = \overline{OA} = \overline{OB}$. Aksonometrię E^n wierzchołka znajdziemy za pośrednictwem kładu z^x osi z , przyczem $\overline{O^x E^x} = \overline{O^o A^o} = \overline{O^o B^o}$. Z łatwością zauważymy, że ściany boczne (EAB) , (EBC) , (ECD) i (EDA) ostrosłupa prostego są trójkątami równobocznymi. Skoro

na osi z odłożymy odcinek $\overline{OF} = \overline{OE}$, to punkt F jest wierzchołkiem drugiego ostrosłupa prostego, którego ścianami bocznymi są trójkąty równoboczne (FAB) , (FBC) , (FCD) i (FDA) . Zespół (połączenie) tych dwóch ostrosłupów prostych, o wspólnej podstawie $(ABCD)$, tworzy wielościan, ograniczony ośmioma trójkątami równobocznymi, t. zn. ośmiościan umiarowy.

Ćwiczenie 3: Wyznaczyć aksonometrię ośmiościanu umiarowego, którego dwie przekątne leżą na płaszczyźnie: a) dowolnej α (h_a^n, v_a^n), b) $\alpha \parallel \pi_1$, c) $\alpha \parallel x$, d) $\alpha \parallel y$, e) $\alpha \perp \pi_1$.

Zadanie 4: Skonstruować aksonometrię sześcianu, którego podstawa leży na płaszczyźnie poziomo-rzucającej α (h_a^n, v_a^n).



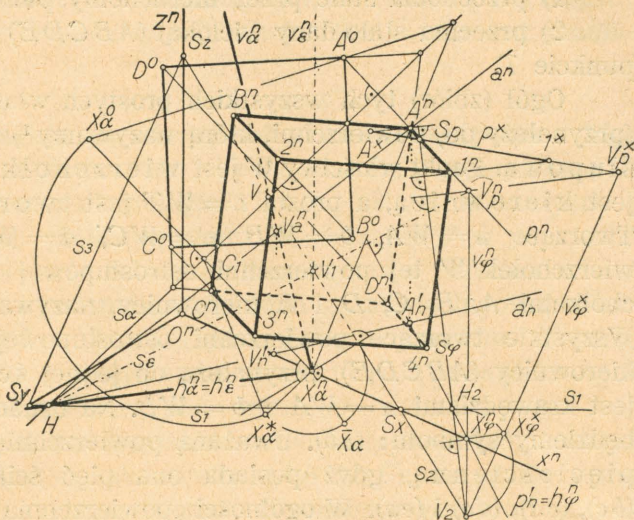
Rys. 201.

Rozwiązanie: Sześcian jest czworosściennym graniastosłupem prostym, którego dwie podstawy i cztery ściany boczne są kwadratami. Celem wyznaczenia podstawy tego sześcianu, wykonajmy kład płaszczyzny $\alpha \perp \pi_1$ na rzutnię π_a , obracając α około śladu aksonometrycznego s_a . Na rys. 201 przyjęliśmy w kładzie dowolny kwadrat ($A^o B^o C^o D^o$), a następnie (po podniesieniu z kładu) wykreśliśmy rzut aksonometryczny ($A^n B^n C^n D^n$) żądanej podstawy sześcianu. Na prostej l , poprowadzonej w punkcie A (A^n, A'_n) prostopadłe do płaszczyzny α , należy odłożyć odcinek $\overline{AI} = \overline{A^o B^o}$, to odcinek ten będzie krawędzią boczną sześcianu. Z warunków $l \perp \alpha$ i $\alpha \perp \pi_1$ wynika, że prosta $l \parallel \pi_1$, a zarazem jest $l \parallel h_\varepsilon$, gdzie ε oznacza płaszczyznę pozio-

moją. Z warunków $l \perp \alpha$ i $\alpha \perp \pi_1$ wynika, że prosta $l \parallel \pi_1$, a zarazem jest $l \parallel h_\varepsilon$, gdzie ε oznacza płaszczyznę pozio-

mo-rzucającą i przechodzącą przez promień l . Aby otrzymać aksonometrię $A^n 1^n$ krawędzi bocznej $A1 \parallel h_\varepsilon$, wystarczy wyznaczyć kład płaszczyzny ε i na kładzie $h_\varepsilon^\times$ śladu poziomego odmierzyć odcinek $\overline{X_a^\times 1'_\times} = \overline{A^0 B^0}$. Prosta $1'_\times 1'_n$, prostopadła do osi obrotu $s_\varepsilon = \varepsilon \pi_a$, przecina się z elementem h_ε^n w punkcie $1'_n$, który jest aksonometrią rzutu poziomego $1'$ punktu 1. Aksonometria 1^n punktu 1 leży na promieniu l^n .

W wierzchołkach B^n, C^n i D^n równoległoboku $(A^n B^n C^n D^n)$ wykreślimy proste równoległe do promienia l^n , t. zn. proste prostopadłe do śladu s_a . Skoro na tych prostych odłożymy odcinki $\overline{B^n 2^n} = \overline{C^n 3^n} = \overline{D^n 4^n} = \overline{A^n 1^n}$, to uzyskamy aksonometrię krawędzi bocznych uważanego sześciangu.



Rys. 202.

Ćwiczenie 4: Wyznaczyć rzuty aksonometryczne sześciangu, którego podstawa leży na rzutni: a) poziomej π_1 , b) pionowej π_2 , c) bocznej π_3 , lub na płaszczyźnie: d) dowolnej α (por. rys. 202), e) $\alpha \perp \pi_2$, f) $\alpha \perp \pi_3$.

Ćwiczenie 5: Wyznaczyć aksonometrię graniastosłupa prostego o wysokości 6 cm, którego podstawą jest pięciobok umiarkowany, leżący na dowolnej płaszczyźnie α .

75. Powierzchnie ostrosłupowe i graniastosłupowe. W ustępie 72 zajmowaliśmy się podziałem wielościanów, przyczem szczególniejszą uwagę zwróciliśmy na ostrosłupy i graniastosłupy. Teraz rozszerzymy nieco zakres naszych rozważań.

Obierzmy w tym celu dowolny punkt właściwy W i pewien wielokąt — płaski lub skośny — $(ABCDE)$, którego wierzchołkami są punkty właściwe $A, \dots, E$, a bokami są odcinki (o długości skończonej!) $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$ i $\overline{EA}$. Na boku np. $\overline{AB}$ tego wielokąta przyjmijmy dowolny punkt T i oznaczmy przez $t = WT$ prostą właściwą, łączącą dany punkt W z punktem T . O takiej prostej $t = WT$ mówimy, że ona przecina uważany wielokąt $(ABCDE)$ w punkcie T . Uważajmy punkt W za stały (nieruchomy), a punkt T za ruchomy, który porusza się stale tylko po poszczególnych bokach (t. zn. po odcinkach o długości skończonej!) $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$ i $\overline{EA}$ naszego wielokąta. Równocześnie prosta wła-

ściwa $t = WT$ również zmienia swoje położenie w przestrzeni, przyczem owa prosta:

- 1) przechodzi stale przez nieruchomy punkt właściwy W , i
- 2) przecina stale dany wielokąt $(ABCDE)$ w zmiennym (ruchomym) punkcie T .

Ogół (zbiór) tych wszystkich prostych właściwych $t = WT$ leży na (przynależy do) powierzchni, którą nazywamy¹⁾ powierzchnią ostrosłupową. Punkt właściwy W jest wierzchołkiem, wielokąt $(ABCDE)$ jest kierownicą, a prosta $t = WT$ jest tworzącą owej powierzchni. Tworzące $a = WA$, $b = WB$, $c = WC$, $d = WD$ i $e = WE$, łączące wierzchołek W tej powierzchni ostrosłupowej z poszczególnymi wierzchołkami A , B , C , D i E kierownicy, nazywamy jej krawędziami. Wszystkie tworzące powierzchni ostrosłupowej, przecinające bok $\overline{AB}$ kierownicy $(ABCDE)$, przynależą do jednej ściany, która ograniczona jest krawędziami $a = WA$ i $b = WB$. Na oznaczenie tej ściany używać będziemy symbolu: (ab) . Uważaną powierzchnię ostrosłupową nazwiemy pięciościenneą, gdyż posiada ona pięć ścian, a mianowicie: (ab) , (bc) , (cd) , (de) i (ea) . W ogólności „powierzchnia ostrosłupowa n -ścienna” posiada n ścian i n krawędzi, a jej kierownicą jest n -kąt (wielokąt o n bokach i n wierzchołkach).

Z łatwością zauważymy, że skoro kierownicą powierzchni ostrosłupowej pięciościennej będzie wielokąt płaski $(ABCDE)$, to część tej powierzchni, ograniczoną trójkątami (WAB) , (WBC) , (WCD) , (WDE) i (WEA) , oraz podstawą $(ABCDE)$ stanowi ostrosłup pięciościenny, o wierzchołku W .

Zamiast punktu właściwego W , przyjmijmy teraz punkt niewłaściwy W^∞ za wierzchołek powierzchni ostrosłupowej. Tworzące $t = W^\infty T, \dots$ tej powierzchni są do siebie równoległe (posiadają wspólny kierunek W^∞) i przecinają w punktach właściwych $T, \dots$ kierownicę $(ABCDE)$. Również i krawędzie $a = W^\infty A$, $b = W^\infty B$, $c = W^\infty C$, $d = W^\infty D$, $e = W^\infty E$ tej powierzchni są prostymi równoległymi. Taką powierzchnię, o wierzchołku niewłaściwym W^∞ , nazywamy powierzchnią graniastosłupową. Ponieważ powierzchnia ta posiada pięć ścian: (ab) , (bc) , (cd) , (de) i (ea) , przeto jest ona powierzchnią graniastosłupową pięciościenneą.

Na krawędziach bocznych a , b , c , d i e powierzchni graniastosłupowej Γ , której kierownicą jest wielokąt płaski $(ABCDE)$, odłóżmy odcinki równej długości i leżące po jednej stronie płaszczyzny pięciokąta $(ABCDE)$, a mianowicie: $\overline{A1} = \overline{B2} = \overline{C3} = \overline{D4} = \overline{E5}$. Otrzymane w ten sposób punkty $1, \dots, 5$ wyznaczają pięciokąt płaski (12345) , którego boki

¹⁾ Tadeusz Łazowski: Geometria wykreślna, Warszawa 1916, str. 163.

$\overline{12}, \dots, \overline{51}$ leżą odpow. na poszczególnych ścianach $(ab), \dots, (ea)$ powierzchni Γ . Z łatwością zauważymy, że część powierzchni graniastosłupowej Γ , która ograniczona jest równoległobokami $(AB21)$, $(BC32), \dots, (EA15)$, oraz dwoma wielokątami $(ABCDE)$ i (12345) , stanowi graniastosłup pięciościenny.

76. Przekroje płaskie powierzchni graniastosłupowej. Niechaj dana będzie dowolna płaszczyzna ε i powierzchnia graniastosłupa Γ , której krawędziami są proste równoległe $a \parallel b \parallel c \parallel d \parallel e$. Płaszczyzna ε przecina się z poszczególnymi krawędziami powierzchni Γ w punktach: $1 = a\varepsilon$, $2 = b\varepsilon$, $3 = c\varepsilon$, $4 = d\varepsilon$ i $5 = e\varepsilon$. Płaszczyzna ε przecina ściany (ab) , (bc) , (cd) , (de) i (ea) uważanej powierzchni graniastosłupowej w odcinkach: $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$, $\overline{45}$ i $\overline{51}$. Otrzymany w ten sposób wielokąt (12345) na płaszczyźnie ε nazywamy przekrojem płaskim powierzchni graniastosłupowej Γ ową płaszczyzną ε .

Zadanie 1: Dana jest powierzchnia graniastosłupowa, której wierzchołek W^∞ leży na osi z , a kierownica $(ABCDE)$ na płaszczyźnie α (k_α^n, v_α^n) równoległej do rzutni poziomej. Wyznaczyć przekrój tej powierzchni dowolną płaszczyzną ε ($h_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n$).

Rozwiązanie 1: Na rysunku 203 przyjęliśmy aksonometrię $(A^n B^n C^n D^n E^n)$ kierownicy, oraz rzut W_∞^n wierzchołka tej powierzchni graniastosłupowej Γ . Łącząc punkt W_∞^n z wierzchołkami kierownicy $(AB \dots E)$, otrzymamy krawędzie $a = W_\infty^n A, \dots, e = W_\infty^n E$ powierzchni Γ . Ponieważ W_∞^n jest punktem niewłaściwym osi z , przeto krawędzie $a \dots e$ są równoległe do osi z . Aksonometrije a^n, b^n, c^n, d^n i e^n tych krawędzi są równoległe do osi aksonometrycznej z^n , a aksonometrije $a'_n, \dots, e'_n$ rzutów poziomych owych krawędzi są punktami, które zjednoczyły się z poszczególnymi wierzchołkami wielokąta $(A'_n B'_n C'_n D'_n E'_n)$.

Celem wyznaczenia przekroju powierzchni graniastosłupowej Γ płaszczyzną ε ($h_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n$), należy skonstruować punkty przebiecia się krawędzi $a, \dots, e$ powierzchni Γ z płaszczyzną ε , albo też krawędzie (odcinki!) przecięcia się poszczególnych ścian owej powierzchni z płaszczyzną ε . Na rys. 203 poprowadziliśmy przez krawędzie b (b^n, b'_n) i c (c^n, c'_n) płaszczyznę γ (h_γ^n, v_γ^n), która jest w naszym przykładzie płaszczyzną poziomo-rzucającą. Płaszczyzna pomocnicza $\gamma = bc$ przecina płaszczyznę przekroju ε w prostej k ($k^n, k'_n = h_\gamma^n$). Punkty 2 ($2^n = k^n b^n, 2'_n$) i 3 ($3^n = k^n c^n, 3'_n$), przecięcia się prostej k z krawędziami b i c powierzchni Γ , są wierzchołkami wielokąta przekroju. Ściana (bc) powierzchni graniastosłupowej Γ leży na płaszczyźnie $\gamma = bc$ i przecina się z płaszczyzną ε w odcinku $\overline{23}$. Odcinek ten jest bokiem szukanego wielokąta przekroju. — Za pośrednictwem płaszczyzny $\gamma = bc$ wyznaczyliśmy tedy wierzchołki 2 i 3, oraz bok $\overline{23}$ wielokąta przekroju. W zupełnie podobny sposób,

Twierdzenie: *Pomiędzy aksonometrijami (prostokątnymi) dwóch przekrojów płaskich powierzchni graniastosłupowej zachodzi w ogólnym przypadku powinowactwo środkowe. Osią tego powinowactwa jest aksonometria krawędzi przecięcia się płaszczyzn owych przekrojów, a promieniami powinowactwa są aksonometrie krawędzi uważanej powierzchni graniastosłupowej.*

Uwaga: Gdyby jedna z płaszczyzn przekroju była aksonometrycznie-rzucającą lub równoległą do krawędzi powierzchni Γ lub też gdyby krawędzie owej powierzchni graniastosłupowej były prostopadłe do rzutni aksonometrycznej π_a — to twierdzenie powyższe nie miałoby wówczas zastosowania.

Dotychczas badaliśmy związki pomiędzy aksonometrijami wielokątów ($ABCDE$) i (12345). Zastanówmy się teraz nad zależnością geometryczną, jaka zachodzi w przestrzeni pomiędzy owymi wielokątami. Poprzednio zauważyliśmy (por. rozwiązanie 2), że przez punkty P, P_1, P_2, P_3 i P_4 krawędzi $p = a\varepsilon$ przechodzą odpowiednio proste: BC i 23 , CD i 34 , DE i 45 , EA i 51 , AB i 12 . Wnosimy stąd (por. ust. 66) o prawdziwości następującego

Twierdzenia: *Pomiędzy dwoma przekrojami płaskimi powierzchni graniastosłupowej — o ile płaszczyzny tnące nie są równoległe do krawędzi tej powierzchni — zachodzi powinowactwo środkowe. Osią tego powinowactwa jest krawędź przecięcia się płaszczyzn tnących, a promieniami powinowactwa są krawędzie uważanej powierzchni graniastosłupowej.*

Korzystając z tego twierdzenia i rozważań ust. 66 (por. tw. 3), ustalić możemy następujące zależności:

Aksonometrie ($A''_n B''_n C''_n D''_n E''_n$) i ($1''_n 2''_n 3''_n 4''_n 5''_n$) rzutów pionowych dwóch przekrojów płaskich powierzchni graniastosłupowej Γ są w ogólności wielokątami środkowo-powinowatemi. Osią powinowactwa jest aksonometria p''_n krawędzi p przecięcia się płaszczyzn tnących, a środkiem powinowactwa jest rzut $W''_{\infty n}$ wierzchołka W_{∞} owej powierzchni graniastosłupowej.

Wielokąty ($A'_n \dots E'_n$) i ($1'_n \dots 5'_n$), jak również ($A'''_n \dots E'''_n$) i ($1'''_n \dots 5'''_n$) są w ogólnym przypadku też wielokątami perspektywicznie-powinowatemi. Osią powinowactwa w pierwszym przykładzie jest element p'_n , a w drugim element p'''_n . Środkiem powinowactwa jest punkt niewłaściwy $W''_{\infty n}$, wzgl. $W'''_{\infty n}$.

Zadanie 2: Dany jest (por. rys. 197) graniastosłup prosty czworosieczny, którego podstawa leży na rzutni poziomej, oraz dowolna płaszczyzna ε ($h_{\varepsilon}^n, v_{\varepsilon}^n$). Wyznaczyć przekrój owego graniastosłupa płaszczyzną ε .

Rozwiązanie: Krawędzie boczne a, b, c i d graniastosłupa prostego wyznaczają powierzchnię graniastosłupową czworosieczną Γ ,

a podstawa $(ABCD)$ naszego graniastopu uważaną być może za przekrój płaski powierzchni graniastopowej Γ rzutnią poziomą π_1 . W poznany poprzednio sposób skonstruujemy przekrój $(A_\varepsilon B_\varepsilon C_\varepsilon D_\varepsilon)$ powierzchni Γ daną płaszczyzną $\varepsilon (h_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n)$, to pomiędzy wielokątami $(A^n B^n C^n D^n)$ i $(A_\varepsilon^n B_\varepsilon^n C_\varepsilon^n D_\varepsilon^n)$ zachodzić będzie powinowactwo środkowe. Ośią tego powinowactwa jest aksonometria h_ε^n śladu poziomego płaszczyzny tnącej, gdyż ślad h_ε jest krawędzią przecięcia się płaszczyzn π_1 i ε . Ponieważ powinowactwo perspektywiczne określone jest osią h_ε^n i parą homologicznych punktów np. A^n i A_ε^n , przeto celem rozwiązania naszego zadania wystarczy skonstruować tylko punkt $A_\varepsilon (A_\varepsilon^n, A_\varepsilon'^n)$, przebiecia się krawędzi bocznej $a (a^n, a'^n)$ danego graniastopu z płaszczyzną ε . Pozostałe wierzchołki żadanego przekroju $(A_\varepsilon B_\varepsilon C_\varepsilon D_\varepsilon)$ otrzymamy za pośrednictwem wymienionego powinowactwa środkowego.

Ćwiczenie 1: Dane są płaszczyzna $\varepsilon (h_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n)$ i sześcián, którego podstawa (rys. 202) leży na dowolnej płaszczyźnie $\alpha (h_\alpha^n, v_\alpha^n)$. Wyznaczyć aksonometrię przekroju tego sześciánu płaszczyzną ε .

Ćwiczenie 2: Rozwiązać ćwiczenie 1, jeśli płaszczyzna tnąca ε jest płaszczyzną:
a) $\varepsilon \perp \pi_1$, b) $\varepsilon \perp \pi_2$, c) $\varepsilon \perp \pi_3$, d) $\varepsilon // \pi_1$, e) $\varepsilon // \pi_2$, f) $\varepsilon // \pi_3$.

Ćwiczenie 3: Ćwiczenie 1 rozwiązać, jeśli podstawa sześciánu leży na rzutni:
a) poziomej π_1 , b) pionowej π_2 , c) bocznej π_3 , lub na płaszczyźnie: d) $\alpha \perp \pi_1$ (por. rys. 201), e) $\alpha \perp \pi_2$, f) $\alpha // x$, g) $\alpha \perp \pi_3$.

77. O kolineacji układów płaskich. W ust. 66 ustanowiliśmy pomiędzy dwoma układami płaskimi powinowactwo. Teraz zajmiemy się taką zależnością geometryczną, która jest nieco ogólniejszą od powinowactwa.

Uważajmy dwa układy płaskie (α_1) i (α_2) , których podstawami są dwie dowolne płaszczyzny właściwe α_1 i α_2 , przecinające się w prostej właściwej $p = \alpha_1 \alpha_2$, albo też dwie płaszczyzny α_1 i α_2 zjednoczone (nakrywające się) na jednej i tej samej płaszczyźnie właściwej α . Pomiedzy temi układami płaskimi (α_1) i (α_2) ustanówmy następującą zależność geometryczną:

1. Niechaj każdemu punktowi A_1 pierwszego układu (α_1) podporządkowany będzie jeden i tylko jeden punkt A_2 drugiego układu (α_2) , i wzajemnie.

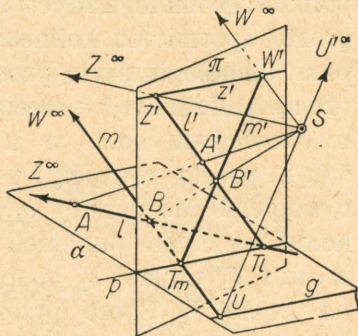
2. Niechaj każdej prostej b_1 układu (α_1) odpowiada jedna i tylko jedna prosta b_2 w układzie (α_2) , i wzajemnie.

3. Punktowi A_1 i prostej b_1 , przynależnym do siebie w układzie (α_1) , niechaj podporządkowane będą w układzie (α_2) punkt A_2 i prosta b_2 , które również przynależą do siebie.

4. Punkty podporządkowane: A_1 i A_2 , B_1 i $B_2, \dots$ niechaj leżą na takich prostych, które przecinają się w stałym punkcie właściwym S , a proste podporządkowane: a_1 i a_2 , b_1 i $b_2, \dots$ niechaj przecinają się na stałej prostej właściwej p .

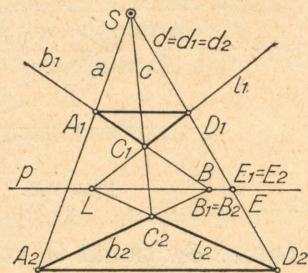
Ustanowioną w ten sposób zależność geometryczną pomiędzy układami płaskimi (α_1) i (α_2) nazywamy kolineacją środkową lub perspektywiczną (wzgl. homologią). Punkty A_1 i A_2 lub proste b_1 i b_2 , podporządkowane sobie w obu tych układach środkowo-kolineacyjnych (α_1) i (α_2) , nazywamy elementami homologicznymi. Proste $A_1 A_2$, $B_1 B_2, \dots$, łączące pary punktów homologicznych, nazywamy promieniami kolineacji, a ich wspólny punkt przecięcia S nazywamy środkiem kolineacji. Stała prosta właściwa p , na której przecinają się pary homologicznych prostych: a_1 i a_2 , b_1 i $b_2, \dots$ jest osią kolineacji. W przypadku dwóch różnych od siebie płaszczyzn α_1 i α_2 , osią kolineacji jest krawędź $p = \alpha_1 \alpha_2$ przecięcia się tych płaszczyzn.

Jako przykład takiej kolineacji środkowej niechaj posłużą nam zależność, zachodząca (por. rys. 204) pomiędzy dowolnym układem płaskim (α) a jego rzutem środkowym (perspektywą). Uważając punkt właściwy S za środek rzutów, a płaszczyznę π za tło, to wówczas: każdemu punktowi A płaszczyzny α podporządkowana jest jego perspektywa A' , a każdej prostej l układu (α) jej perspektywa l' . Jeżeli elementy A i l przynależą do siebie, to również i elementy im podporządkowane A' i l' przynależą też do siebie. Oś kolineacji jest krawędź $p = \alpha \pi$, środkiem kolineacji jest środek rzutów S , a promieniami kolineacji są promienie rzucające $AA', BB', \dots$, przechodzące przez środek S .



Rys. 204.

Weźmy teraz pod uwagę dwa płaskie układy „perspektywnie-kolineacyjne” czyli „środkowo-kolineacyjne” (α_1) i (α_2) , złączone na jednej i tej samej (rys. 205) płaszczyźnie rysunkowej. Oś kolineacji niechaj będzie prosta właściwa p , a środkiem kolineacji punkt właściwy S . Skoro dana jest jedna para homologicznych punktów A_1 i A_2 tych układów (α_1) i (α_2) , przyczem promień kolineacji a musi przechodzić przez środek S — to wówczas, korzystając z ustalonych zależności 1, 2, 3 i 4, skonstruować możemy dowolną ilość par elementów homologicznych przyjętych układów (α_1) i (α_2) . Prostej b_1 , która przechodzi przez punkt A_1 i przecina oś kolineacji p w punkcie B , podporządkowana jest w układzie (α_2) prosta $b_2 = BA_2$, łącząca punkty B i A_2 . Dowolny promień kolineacji przecina proste b_1 i b_2 w dwóch homologicznych punktach C_1 i C_2 . Podobnie



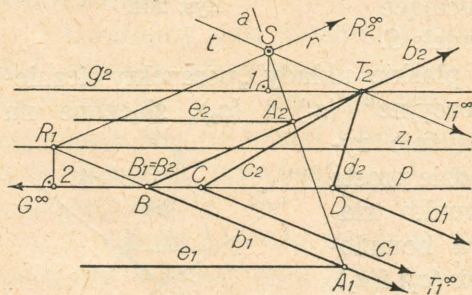
Rys. 205.

prostej $l_1 = C_1 L$, uważanej za element układu (α_1) , odpowie w układzie (α_2) prosta $l_2 = C_2 L$.

Mając dane elementy: S , p i A_1 , A_2 , wzgl. A i A' skonstruowaliśmy (por. rys. 205 i 204) dalsze pary homologicznych punktów, oraz pary homologicznych prostych dwóch płaskich układów środkowo-kolineacyjnych. Z łatwością zauważymy jednak, że powyższe konstrukcje dadzą się również przeprowadzić i wówczas, gdy zamiast pary punktów homologicznych przyjmiemy parę prostych homologicznych b_1 i b_2 , wzgl. l i l' . A zatem:

Kolineacja środkowa, zachodząca pomiędzy dwoma układami płaskimi, jest wyznaczona wówczas, skoro dane są: środek kolineacji, oś kolineacji i para homologicznych elementów (punktów lub prostych).

Na rys. 206 niechaj dane będą: oś kolineacji p , środek S i para punktów homologicznych A_1 i A_2 , leżąca wraz ze środkiem S na jednej prostej (promieniu kolineacji). Przez dowolny punkt B osi p przechodzi para homologicznych prostych $b_1 = BA_1$ i $b_2 = BA_2$. Ponieważ każdy promień kolineacji przecina proste b_1 i b_2 w dwóch punktach podporządkowanych sobie w układach perspektywnie-kolineacyjnych (α_1) i (α_2) , przeto również i promień kolineacji t , wykreślony ze środka S równoległe do prostej b_1 , przetnie się z elementami b_1 i b_2 w dwóch homologicznych punktach $T_1^\infty = tb_1$ i $T_2 = tb_2$. Punktowi niewłaściwemu T_1^∞ prostej b_1 podporządkowany jest zatem punkt właściwy T_2 na prostej b_2 . Skoro przez środek S poprowadzimy promień kolineacji $r \parallel b_2$, to wówczas punktowi właściwemu $R_1 = rb_1$ odpowiada na prostej b_2 punkt niewłaściwy $R_2^\infty = rb_2$.



Rys. 206.

Przez punkt T_1^∞ poprowadzmy proste $b_1 \parallel c_1 \parallel d_1$, przecinające się z osią kolineacji p w punktach B , C , D . Owym prostym, w myśl ustalonych zależności 1, ..., 4, podporządkowane będą w układzie (α_2) proste: $b_2 = T_2 B$, $c_2 = T_2 C$ i $d_2 = T_2 D$, przecinające się w punkcie właściwym T_2 . Zamiast punktu D obierzmy punkt niewłaściwy G^∞ na osi p .

Łącząc ów punkt G^∞ z punktami T_1^∞ i T_2 , uzyskamy dwie proste homologiczne: $g_1^\infty = G^\infty T_1^\infty$ i $g_2 = G^\infty T_2$. Podobnie proste $z_1 = G^\infty R_1$ i $z_2^\infty = G^\infty R_2^\infty$ są również elementami homologicznymi układów (α_1) i (α_2) . Prostej niewłaściwej g_1^∞ układu (α_1) podporządkowana jest w układzie (α_2) jedna i tylko jedna prosta właściwa g_2 , równoległa do osi kolineacji p . Prostej niewłaściwej z_2^∞ układu (α_2) podporządkowana jest w układzie (α_1) jedna ściśle określona prosta właściwa z_1 , równoległa

do osi kolineacji p . Proste g_2 i z_1 nazywamy: prostami granicznymi, prostami zbiegu lub osiami wzajemnymi dwóch płaskich układów środkowo-kolineacyjnych. Prosta graniczna g_2 przynależy do układu (a_2) , a prosta zbiegu z_1 do układu (a_1) .

Punkt G^∞ osi p połączyć możemy wreszcie z punktami np. A_1 i A_2 , to uzyskane proste homologiczne $e_1 = G^\infty A_1$ i $e_2 = G^\infty A_2$ są równoległe do osi kolineacji. Wkońcu zauważyć musimy, że w każdym punkcie B osi kolineacji p nakrywają się dwa homologiczne punkty B_1 i B_2 .

Z łatwością zauważymy, że takie same własności posiadają dwa płaskie układy środkowo-kolineacyjne, których podstawami są (np. płaszczyzna α i tło π) dwie różne płaszczyzny właściwe. Na rys. 204 punktowi W^∞ podporządkowany jest punkt W' , a punktowi U element U'_∞ . Proste $z' \parallel p$ i $g \parallel p$ są osiami granicznymi dwóch układów perspektywicznie-kolineacyjnych (α) i (π) . Możemy tedy powiedzieć ogólnie, że dwa płaskie układy środkowo-kolineacyjne (a_1) i (a_2) , bez względu na to, czy ich podstawami są dwie różne płaszczyzny α_1 i α_2 , czy też dwie płaszczyzny zjednoczone na wspólnej płaszczyźnie α — posiadają następujące własności:

a) Prostej niewłaściwej jednego układu podporządkowana jest w drugim układzie prosta graniczna, równoległa do osi kolineacji p , i wzajemnie.

b) Każdemu punktowi niewłaściwemu jednego układu podporządkowany jest w drugim układzie jeden i tylko jeden punkt właściwy, leżący na prostej granicznej drugiego układu, i wzajemnie.

c) Prostym równoległym jednego układu podporządkowane są w układzie drugim takie proste, które przecinają się w punkcie na osi granicznej drugiego układu, i wzajemnie.

d) Dwie homologiczne proste e_1 i e_2 są do siebie równoległe tylko wówczas, jeżeli owe proste są równoległe do osi kolineacji p .

e) W każdym punkcie B osi kolineacji p zjednoczone są dwa homologiczne punkty B_1 i B_2 .

Skoro porównamy te własności z własnościami a)...e) dwóch płaskich układów środkowo-powinowatych, podanymi w ust. 66, to zwrócimy uwagę na wybitne różnice. Odnoszą się one do własności, wymienionych pod a), b) i c). Natomiast wspólne są dla tych dwóch związków geometrycznych własności, wypisane pod d) i e). Na tem miejscu zaznaczyć należy, że powinowactwo środkowe jest tylko szczególnym przypadkiem kolineacji środkowej. Skoro bowiem dla dwóch płaskich układów perspektywicznie-kolineacyjnych (a_1) i (a_2) założymy, że środek

kolineacji jest punktem niewłaściwym S^∞ , to owe układy są „środkowo-powinowate“.

Zbadajmy teraz zależność, zachodzącą pomiędzy środkiem kolineacji, osią kolineacji i prostymi granicznymi. Na rys. 206 wykreśliliśmy proste: $r \parallel b_2$ i $t \parallel b_1$, więc odcinki $\overline{ST_2}$ i $\overline{R_1B}$ są sobie równe. Poprowadźmy następnie odcinki $\overline{S1} \perp g_2$ i $\overline{R_12} \perp p$, a ponieważ prosta zbiegu g_2 jest równoległą do osi p , przeto kąty $\sphericalangle ST_21$ i $\sphericalangle R_1B2$ są sobie równe, a trójkąty prostokątne (ST_21) i (R_1B2) są przystające. Z przystawania owych trójkątów wynika równość odcinków $\overline{S1} = \overline{R_12}$. Udowodniliśmy tedy następujące

Twierdzenie: *Dla dwóch płaskich układów środkowo-kolineacyjnych odległość środka kolineacji od jednej prostej granicznej równą jest odległości drugiej prostej granicznej od osi kolineacji.*

Twierdzenie powyższe stosuje się nie tylko do dwóch kolineacyjnych układów (α_1) i (α_2) , zjednoczonych na jednej płaszczyźnie właściwej α , ale również i do dwóch takich układów, których podstawami są dwie dowolne płaszczyzny właściwe α_1 i α_2 . Na rys. 204 wykreśliliśmy najpierw proste $SW' \parallel m$ i $SU \parallel m'$, a następnie przez punkt W' prostą zbiegu $z' \parallel p$, oraz prostą graniczną $g \parallel p$. Wnosimy stąd o równości odcinków: $\overline{SW'} = \overline{UT_m}$ i $\overline{SU} = \overline{W'T_m}$, a tem samym o prawdziwości naszego twierdzenia.

Przejdźmy teraz do związków nieco ogólniejszych, aniżeli kolineacja środkowa. Niechaj dla dwóch płaskich układów (α_1) i (α_2) — których podstawami są dwie różne od siebie płaszczyzny właściwe α_1 i α_2 , albo też dwie płaszczyzny α_1 i α_2 zjednoczone z płaszczyzną właściwą α — spełnione będą poprzednio wymienione w ust. 77 zależności: 1, 2 i 3, a nadto, w miejsce związku 4, ustanówmy nową zależność:

5. *Każdemu punktowi niewłaściwemu Z_1^∞ układu (α_1) podporządkujemy jeden i tylko jeden punkt właściwy Z_2 w układzie (α_2) , i wzajemnie.*

Skoro wykluczmy związek 4, to ustaloną w powyższy sposób zależność geometryczną pomiędzy dwoma układami płaskimi (α_1) i (α_2) nazywamy kolineacją ogólną, homografią lub wprost kolineacją.

Z łatwością zauważymy, że dwa płaskie układy kolineacyjne (α_1) i (α_2) posiadają następujące własności:

a) Prostej niewłaściwej jednego układu podporządkowana jest w drugim układzie prosta właściwa, zwana prostą graniczną (zbiegu, wzgl. wzajemną).

b) Prostym równoległym jednego układu podporządkowane są w układzie drugim takie proste, które przecinają się w punkcie na prostej granicznej drugiego układu, i wzajemnie.

Natomiast nie są wcale spełnione własności, wypisane poprzednio pod *d*) i *e*), gdyż dwa układy kolineacyjne (homograficzne) nie posiadają ani środka, ani osi kolineacji.

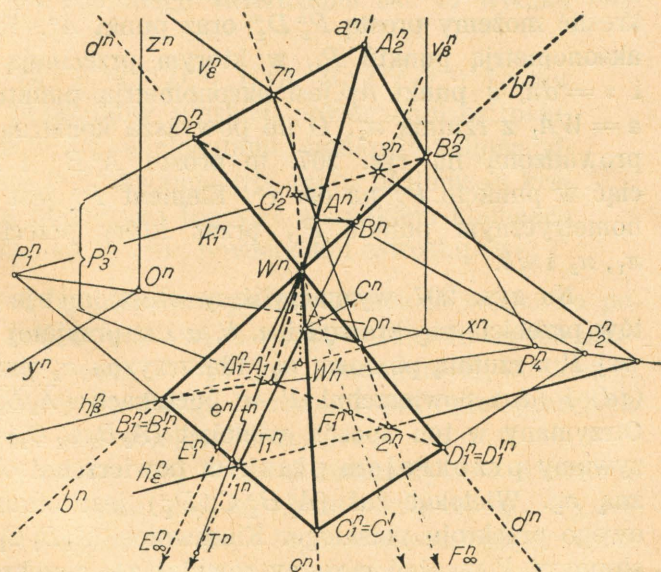
W ust. 66 dowiedliśmy prawdziwości trzech twierdzeń, oznaczonych przez 1, 2 i 3, dla dwóch układów powinowatych. W zupełnie analogiczny sposób udowodnić możemy następujące

Twierdzenie 1: Dwa układy płaskie, kolineacyjne z trzecim układem płaskim, są między sobą też kolineacyjne.

Twierdzenie 2: Rzut ukośny dwóch płaskich układów kolineacyjnych na dowolną rzutnię wyznacza na owej rzutni dwa nowe układy kolineacyjne.

Twierdzenie 3: Rzut ukośny dwóch płaskich układów środkowo-kolineacyjnych na dowolną rzutnię wyznacza na owej rzutni dwa nowe układy środkowo-kolineacyjne.

78. Przekroje płaskie powierzchni ostrosłupowej. Dowolny czworokąt ($A_1 B_1 C_1 D_1$), leżący (rysunek 207) na rzutni poziomej, uważamy za kierownicę, a punkt właściwy W (W^n, W'_n) za wierzchołek powierzchni ostrosłupowej Γ . Proste $a^n = W^n A_1$, $b^n = W^n B_1$, $c^n = W^n C_1$ i $d^n = W^n D_1$ są aksonometriami krawędzi uważanej powierzchni ostrosłupowej czworosiennej. Niechaj zadaniem naszym będzie wyznaczenie punktów przecięcia się krawędzi $a = WA_1$, $b = WB_1$, $c = WC_1$ i $d = WD_1$ powierzchni Γ z rzutnią np. pionową π_2 . W tym celu przez prostą $b = WB_1$ poprowadźmy płaszczyznę poziomo-rzucającą β ($h_\beta^n = B_1 W^n \parallel v_\beta^n | z^n$), to punkt $B_2^n = b^n v_\beta^n$ jest oczywiście rzutem aksonometrycznym punktu $B_2 = b \pi_2$, w którym krawędź b przebija rzutnię pionową π_2 . W podobny sposób moglibyśmy wyznaczyć obrazy aksonometryczne A_2^n, C_2^n i D_2^n punktów przecięcia się trzech pozostałych kra-



Rys. 207.

wędzi a , c i d powierzchni ostrosłupowej Γ z rzutnią pionową π_2 . Zamiast płaszczyzn poziomo-rzucających, użyć możemy do konstrukcji takich płaszczyzn, z których każda przechodzi przez dwie krawędzie powierzchni ostrosłupowej Γ . Weźmy pod uwagę np. płaszczyznę $\omega = bc$, wyznaczoną krawędziami $b = WB_1$ i $c = WC_1$. Rzutnia π_1 , płaszczyzna przekroju π_2 i płaszczyzna $\omega = bc$ przecinają się w punkcie $P_1 = \pi_1 \pi_2 \omega$, przez który przejść muszą krawędzie $x = \pi_1 \pi_2, B_1 C_1 = \pi_1 \omega$ i $k_1 = \pi_2 \omega$. Punkt P_1^n , przecięcia się prostej $B_1^n C_1^n$ z osią aksonometryczną x^n , jest obrazem aksonometrycznym owego punktu P_1 . Ponieważ krawędź $k_1 = \pi_2 \omega$ przejść musi przez punkt $P_1 = \pi_1 \pi_2 \omega$ i przez poprzednio wyznaczony punkt $B_2 = b \pi_2$, przeto (rys. 207) aksonometrię k_1^n tej krawędzi otrzymamy, skoro połączymy punkty P_1^n i B_2^n . Proste $k_1^n = P_1^n B_2^n$ i $c^n = W^n C_1^n$ przecinają się w punkcie C_2^n , który jest aksonometrią szukanego punktu $C_2 = c \pi_2$.

Podobnie wyznaczyć możemy aksonometrię D_2^n i A_2^n punktów $D_2 = d \pi_2$ i $A_2 = a \pi_2$. Płaszczyzny π_1 , π_2 i $\sigma = cd$ przecinają się w punkcie $P_2 = \pi_1 \pi_2 \sigma$, którego aksonometria P_2^n wyznaczona jest prostymi x^n i $C_1^n D_1^n$. Prosta $P_2^n C_2^n$ jest obrazem aksonometrycznym krawędzi przecięcia się płaszczyzn π_2 i $\sigma = cd$, a punkt D_2^n , przynależny do prostych $P_2^n C_2^n$ i d^n , jest aksonometrią żadanego punktu $D_2 = d \pi_2$. Za pośrednictwem punktu P_3^n , w którym prosta $D_1^n A_1^n$ przecina się z osią x^n , wykreślić możemy prostą $P_3^n D_2^n$ oraz punkt A_2^n . Element P_3^n jest bowiem aksonometrią punktu P_3 , w którym przecinają się płaszczyzny π_1 , π_2 i $\tau = da$, a punkt A_2^n jest aksonometrią punktu przebiecia się krawędzi $a = WA_1$ z rzutnią π_2 . O ile powyższa konstrukcja jest dokładnie przeprowadzoną na rys. 207, to proste $A_1^n B_1^n$ i $A_2^n B_2^n$ muszą się przeciąć w punkcie P_4^n na osi x^n . Element P_4^n jest bowiem obrazem aksonometrycznym punktu P_4 , przez który przechodzą trzy płaszczyzny: π_1 , π_2 i ab .

Na rys. 207 wyznaczyliśmy aksonometrię A_2^n , B_2^n , C_2^n i D_2^n punktów przebiecia się krawędzi a , b , c i d przyjętej powierzchni ostrosłupowej Γ z rzutnią pionową π_2 . Płaszczyzna π_2 przecina ściany (ab) , (bc) , (cd) i (da) powierzchni Γ w odcinkach: $A_2 B_2$, $B_2 C_2$, $C_2 D_2$ i $D_2 A_2$. Otrzymany w ten sposób wielokąt $(A_2 B_2 C_2 D_2)$ na płaszczyźnie π_2 nazywamy przekrojem płaskim powierzchni ostrosłupowej Γ płaszczyzną π_2 . Wielokąt zaś $(A_2^n B_2^n C_2^n D_2^n)$ jest obrazem aksonometrycznym owego przekroju płaskiego. Kierownicę $(A_1 B_1 C_1 D_1)$ powierzchni ostrosłupowej Γ uważać możemy również za „przekrój płaski“ powierzchni Γ rzutnią poziomą π_1 .

Z łatwością zauważymy, opierając się na przeprowadzonej poprzednio konstrukcji i na rozważaniach ust. 77, że wielokąty $(A_1^n B_1^n C_1^n D_1^n)$ i $(A_2^n B_2^n C_2^n D_2^n)$ są środkowo-kolineacyjne. Ośią tej kolineacji jest pro-

sta x^n , środkiem kolineacji punkt W^n , a promieniami kolineacji proste a^n , b^n , c^n i d^n . Uzyskaliśmy zatem następujące

Twierdzenie: *Pomiędzy aksonometrijami (prostokątnymi) dwóch przekrojów płaskich powierzchni ostrosłupowej zachodzi w ogólnym przypadku kolineacja środkowa. Osią tej kolineacji jest aksonometria krawędzi przecięcia się płaszczyzn owych przekrojów, a środkiem tej kolineacji jest aksonometria wierzchołka uważanej powierzchni ostrosłupowej.*

Uwaga: Gdyby jedna z płaszczyzn przekroju była aksonometrycznie-rzucającą lub przechodziła przez wierzchołek W powierzchni ostrosłupowej Γ , to twierdzenie powyższe nie miałooby wówczas zastosowania.

Z dotychczasowych rozważań naszych wiadomo nam (por. rys. 207), że proste A_1B_1 i A_2B_2 , B_1C_1 i B_2C_2 , C_1D_1 i C_2D_2 , oraz D_1A_1 i D_2A_2 przecinają się parami w punktach P_4 , P_1 , P_2 i P_3 , które leżą na krawędzi $x = \pi_1\pi_2$. Wnosimy stąd (por. ust. 77) o prawdziwości następującego

Twierdzenia: *Pomiędzy dwoma przekrojami płaskimi powierzchni ostrosłupowej — o ile płaszczyzny tnące nie przechodzą przez wierzchołek tej powierzchni — zachodzi kolineacja środkowa. Osią kolineacji jest krawędź przecięcia się płaszczyzn owych przekrojów, a środkiem kolineacji jest wierzchołek uważanej powierzchni ostrosłupowej.*

Z tego twierdzenia i z ostatniego twierdzenia ust. 77 wynika bezpośrednio zależność:

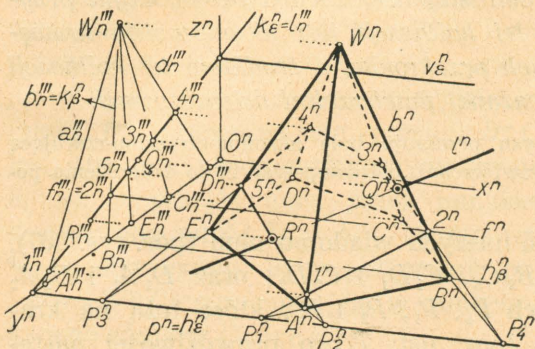
Aksonometrie $(A_1^n B_1^n C_1^n D_1^n)$ i $(A_2^n B_2^n C_2^n D_2^n)$ rzutów poziomych dwóch przekrojów płaskich powierzchni ostrosłupowej Γ są w ogólności wielokątami środkowo-kolineacyjnymi. Osią kolineacji jest aksonometria rzutu poziomego krawędzi przecięcia się płaszczyzn tnących, a środkiem kolineacji jest rzut W_n wierzchołka W owej powierzchni ostrosłupowej Γ .

Podobnie zachodzi w ogólnym przypadku kolineacja środkowa pomiędzy aksonometrijami rzutów pionowych (wzgl. bocznych) owych przekrojów płaskich. Punkt W_n'' (wzgl. W_n''') jest środkiem tej kolineacji, a aksonometria rzutu pionowego (wzgl. bocznego) krawędzi przecięcia się płaszczyzn tnących jest osią owej kolineacji.

Zadanie 1: Dane są na rys. 208 rzuty aksonometryczne ostrosłupa pięciosiennego, którego podstawa leży na rzutni poziomej π_1 . Wyznaczyć przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną ε ($h_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n$) równoległą do osi x .

Rozwiązanie 1: Krawędź $b = WB$ ostrosłupa przebija płaszczyznę ε w punkcie 2 ($2^n, 2_n'''$). Punkt 2 wyznaczyliśmy przy pomocy płaszczyzny boczno-rzucającej β ($k_\beta^n = b_n'''$, $h_\beta^n \parallel x^n$), którą przeprowadziliśmy przez krawędź b . Płaszczyzny ε i β przecinają się w krawędzi $f = \varepsilon\beta$, a rzut aksonometryczny f^n wyznacza na prostej $b^n = W^nB^n$ szukany

punkt 2^n . Pomiedzy aksonometrią ($A^n B^n C^n D^n E^n$) podstawy ostrosłupa i aksonometrią ($1^n 2^n 3^n 4^n 5^n$) jego przekroju zachodzi kolineacja środkowa. Mając dane: środek kolineacji W^n , oś kolineacji $p^n = h_\varepsilon^n$ oraz



Rys. 208.

parę homologicznych punktów B^n i 2^n , wyznaczyć możemy (za pośrednictwem punktów P_1^n , P_2^n , P_3^n i P_4^n) aksonometrię pozostałych wierzchołków wielokąta przekroju (12345).

Rozwiązanie 2: Ponieważ płaszczyzna tnąca ε (h_ε^n , k_ε^n) jest boczno-rzucającą, przeto aksonometria ($1''^n 2''^n 3''^n 4''^n 5''^n$) wielokąta przekroju leżeć musi na prostej k_ε^n . Aksonometria k_ε^n śladu bocznej płaszczyzny ε

przecina się z prostymi $a''^n = W''^n A''^n, \dots, e''^n = W''^n E''^n$ w punktach $1''^n, \dots, 5''^n$. Proste odnoszące, wykreślone z owych punktów równoległe do osi x^n , wyznaczają na prostych $a^n = W^n A^n, \dots, e^n = W^n E^n$ punkty $1^n, 2^n, 3^n, 4^n$ i 5^n , będące aksonometriami wierzchołków wielokąta przekroju.

Cwiczenie 1: Rozwiązać poprzednie zadanie, jeżeli płaszczyzną przekroju jest element: a) $\varepsilon \parallel y$, b) $\varepsilon \parallel z$, c) $\varepsilon \parallel \pi_a$, d) $\varepsilon = \pi_a$, e) $\varepsilon \perp \pi_a$.

Cwiczenie 2: Zadanie 1 rozwiązać wówczas, jeżeli podstawa ostrosłupa leży na płaszczyźnie: a) $a \perp \pi_1$, b) $a \perp \pi_2$, c) $a \parallel x$, d) $a \perp \pi_a$, e) $a = \pi_a$, f) $a \perp x$.

Cwiczenie 3: Czworoscian umiarowy, którego podstawa leży na dowolnej płaszczyźnie α (h_α^n, v_α^n), przeciąć: a) dowolną płaszczyzną β (h_β^n, v_β^n), b) rzutnią poziomą π_1 , c) rzutnią aksonometryczną π_a .

Zadanie 2: Na rysunku 207 dany jest rzut aksonometryczny powierzchni ostrosłupowej czworosciennej, oraz dowolna płaszczyzna ε ($h_\varepsilon^n, v_\varepsilon^n$). Należy skonstruować aksonometrię przekroju tej powierzchni płaszczyzną ε .

Rozwiązanie: Celem rozwiązania powyższego zadania, należałoby wyznaczyć obrazy aksonometryczne punktów $A = a\varepsilon$, $B = b\varepsilon$, $C = c\varepsilon$ i $D = d\varepsilon$, przebiecia się krawędzi $a = WA_1, \dots, d = WD_1$ powierzchni ostrosłupowej Γ z płaszczyzną przekroju ε . Ponieważ na rysunku 207 obok rzutu aksonometrycznego kierownicy ($A_1 B_1 C_1 D_1$), podana jest aksonometria ($A_2 B_2 C_2 D_2$) przekroju powierzchni ostrosłupowej Γ rzutnią pionową π_2 , — przeto konstrukcja nasza da się znacznie uprościć. Oznaczmy mianowicie przez 1^n i 2^n punkty przecięcia się odcinków $\overline{B_1^n C_1^n}$ i $\overline{A_1^n D_1^n}$ z elementem h_ε^n , a przez 3^n i 4^n punkty przecięcia się odcinków $\overline{B_2^n C_2^n}$ i $\overline{A_2^n D_2^n}$ z elementem v_ε^n . Ponieważ boki $\overline{B_1^n C_1^n}$

i $\overline{B_2 C_2}$ leżą na ścianie (bc) powierzchni ostrosłupowej Γ , przeto punkty 1^n i 3^n są aksonometrijami punktów przebicia się owych dwóch boków z płaszczyzną ε , a prosta $1^n 3^n$ jest aksonometrią krawędzi przecięcia się płaszczyzny ε ze ścianą (bc) . Punkty B^n i C^n , w których prosta $1^n 3^n$ przecina się z elementami $b^n = W^n B_1^n$ i $c^n = W^n C_1^n$, są obrazami aksonometrycznymi punktów $B = b\varepsilon$ i $C = c\varepsilon$ przebicia się krawędzi $b = WB_1$ i $c = WC_1$ z daną płaszczyzną ε . Podobnie prosta $2^n 4^n$ jest rzutem aksonometrycznym krawędzi przecięcia się ściany (ad) powierzchni ostrosłupowej Γ z płaszczyzną przekroju ε , a punkty A^n i D^n są aksonometrijami punktów $A = a\varepsilon$ i $D = d\varepsilon$ przebicia się krawędzi $a = WA_1$ i $d = WD_1$ z daną płaszczyzną ε .

Uzyskane w ten sposób punkty A^n, B^n, C^n i D^n są aksonometrijami wierzchołków wielokąta, według którego płaszczyzna ε przecina powierzchnię ostrosłupową Γ . Wiadomo nam, że pomiędzy wielokątem $(A_1^n B_1^n C_1^n D_1^n)$ a wielokątem o wierzchołkach A^n, B^n, C^n i D^n zachodzi kolineacja środkowa. Środkiem tej kolineacji jest punkt W^n , a osią kolineacji prosta h_ε^n (t. j. aksonometria krawędzi $h_\varepsilon = \pi_1 \varepsilon$ przecięcia się płaszczyzn tnących π_1 i ε). Punktom B_1^n i C_1^n pierwszego wielokąta podporządkowane są punkty B^n i C^n wielokąta drugiego, przyczem punkty homologiczne B_1^n i B^n leżą na promieniu kolineacji $b^n = W^n B_1^n$, a punkty homologiczne C_1^n i C^n na promieniu kolineacji $c^n = W^n C_1^n$. Ponieważ punkt 1^n leży na osi kolineacji h_ε^n , przeto odcinkowi $\overline{C_1^n 1^n}$ pierwszego wielokąta podporządkowany jest odcinek (o długości skończonej!) $\overline{C^n 1^n}$ wielokąta drugiego. Ze środka kolineacji W^n wykreślmy (rys. 207) dowolny promień t^n , który przecina się z prostymi homologicznymi $C_1^n B_1^n$ i $C^n B^n$ w punktach homologicznych T_1^n i T^n . Natomiast promień kolineacji $e^n \parallel B^n C^n$ wyznaczy na owych prostych dwa homologiczne punkty E_1^n i E_∞^n , przyczem drugi z tych punktów jest elementem niewłaściwym. Wnosimy stąd, że odcinkowi (o długości skończonej) $\overline{1^n E_1^n B_1^n}$ pierwszego wielokąta podporządkowany jest w wielokącie drugim odcinek $\overline{1^n E_\infty^n B^n}$ o długości nieskończenie wielkiej. Przez punkt W^n wykreślmy wreszcie promień f^n równoległy do prostej $2^n D^n$, to zauważymy z łatwością, że odcinkowi (o długości skończonej) $\overline{D_1^n F_1^n A_1^n}$ pierwszego wielokąta podporządkowany jest w wielokącie drugim również odcinek $\overline{D^n F_\infty^n A^n}$ o długości nieskończenie wielkiej. Wielokątowi $(A_1^n B_1^n C_1^n D_1^n)$ podporządkowany jest zatem kolineacyjnie wielokąt płaski o wierzchołkach A^n, B^n, C^n i D^n , oraz o bokach $A^n B^n, B^n E_\infty^n, C^n D^n$ i $D^n F_\infty^n A^n$.

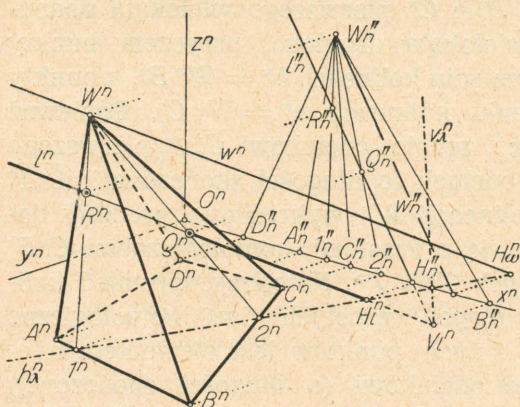
79. Punkty przebicia się prostych z wielościanami. Celem wyznaczenia punktów przebicia się dowolnej prostej l z danym wielościanem Γ , należy przez l poprowadzić pomocniczą płaszczyznę ε i skon-

struować przekrój owego wielościanu Γ tą płaszczyzną. Ponieważ na płaszczyźnie ε leży prosta l i wielokąt przekroju, przeto punkty, w których prosta l przetnie się z poszczególnymi bokami wielokąta przekroju, są szukanymi punktami przebicia się danej, prostej l z wielościanem Γ .

Zadanie 1: Dane są rzuty aksonometryczne dowolnej prostej l i ostrosłupa pięciościennego. Należy skonstruować punkty przebicia się prostej l z tym ostrosłupem.

Rozwiązanie 1: Konstrukcja znacznie się uprości, jeżeli przez daną prostą l (l^n, l'') poprowadzimy (rys. 208) płaszczyznę boczno-rzucającą ε ($k_\varepsilon^n = l''$). Płaszczyzna ta przetnie dany ostrosłup w wielokącie (12345), dla którego wyznaczaliśmy rzut aksonometryczny ($1^n \dots 5^n$). Prosta l^n przecina się z bokami $1^n 5^n$ i $2^n 3^n$ w punktach R^n i Q^n , które są aksonometrami szukanых punktów R i Q , przebicia się prostej l z danym ostrosłupem.

Rozwiązanie 2: Do rozwiązania naszego zadania bardzo często używamy też takiej płaszczyzny pomocniczej $\lambda = Wl$, która przechodzi przez daną prostą l i wierzchołek W ostrosłupa. Na rys. 209 wykreśli-



Rys. 209.

liśmy przez punkt W (W^n, W'') prostą w (w^n, w''), równoległą do danej prostej l (l^n, l''), a następnie dla płaszczyzny $\lambda = Wl = wl$ wyznaczaliśmy aksonometrię $h_\lambda^n = H_l^n H_w^n$ jej śladu poziomego h_λ . Ponieważ podstawa ($ABCD$) przyjętego ostrosłupa leży na rzutni poziomej π_1 , przeto punkty 1^n i 2^n — przecięcia się boków $A''B''$ i $B''C''$ z prostą h_λ^n — są aksonometrami takich punktów 1 i 2 , w których ślad poziomy h_λ płaszczyzny λ przecina

podstawę ($ABCD$). Pomocnicza płaszczyzna $\lambda = Wl$ przecina ostrosłup czworościenny w trójkącie ($W12$), a punkty R (R^n, R'') i Q (Q^n, Q''), leżące na prostej l i na bokach $W1, W2$ owego trójkąta przekroju, są szukanymi punktami przebicia się prostej l z danym ostrosłupem.

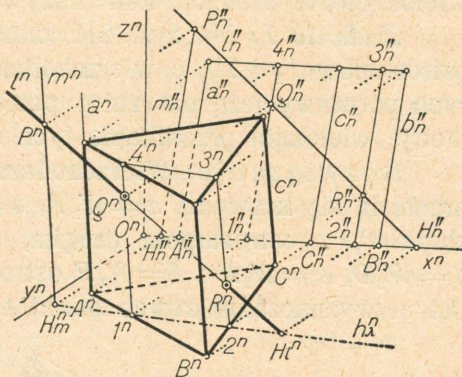
Ćwiczenie 1: Wyznaczyć punkty przebicia się prostej l (l^n, l'') z czworościanem umiarywym, którego podstawa leży na dowolnej płaszczyźnie α (h_α^n, v_α^n).

Zadanie 2: Dane są rzuty aksonometryczne graniastosłupa i dowolnej prostej l . Wyznaczyć należy punkty przebicia się tej prostej z owym graniastosłupem.

Rozwiązanie 1: Przez daną prostą l (l^n, l'') poprowadźmy np. płaszczyznę pionowo-rzucającą ε ($v_\varepsilon^n = l''$) i skonstruujmy przekrój owego

graniastosłupa ową płaszczyzną ε . Punkty, w których prosta l przecina ów przekrój, rozwiązują zadanie.

Rozwiązanie 2: Do konstrukcji użyć możemy też takiej pomocniczej płaszczyzny λ , która przechodzi przez daną prostą l i jest równoległą do krawędzi bocznych przyjętego graniastosłupa. Celem wyznaczenia płaszczyzny λ , obierzmy (rys. 210) na prostej l (l^n, l''^n) dowolny punkt P (P^n, P''^n) i poprowadźmy przezeń prostą m (m^n, m''^n), równoległą do krawędzi bocznej a (a^n, a''^n) graniastosłupa. Płaszczyzna $\lambda = lm$ — dla której wyznaczono aksonometrię $h_\lambda^n = H_l^n H_m^n$ jej śladu poziomego — jest równoległą do krawędzi bocznych graniastosłupa trójsiennego i przecina ten wielościan w równoległoboku (1234). Ponieważ podstawa (ABC) graniastosłupa leży na rzutni poziomej π_1 , przeto punkty 1^n i 2^n , w których element h_λ^n przecina się z bokami $A^n B^n$ i $B^n C^n$, są aksonometriami dwóch wierzchołków 1 i 2 wielokąta przekroju. Aksonometrije 3^n i 4^n dwóch dalszych wierzchołków równoległoboku (1234) otrzymamy, jeśli wykreślimy odcinki: $1^n 4^n \parallel 2^n 3^n \parallel a^n$. Dana prosta l (l^n, l''^n) przecina się z bokami 14 ($1^n 4^n, 1''^n 4''^n$) i 23 ($2^n 3^n, 2''^n 3''^n$) w punktach R (R^n, R''^n) i Q (Q^n, Q''^n), które rozwiązują zadanie.



Rys. 210.

Ćwiczenie 2: Wyznaczyć punkty przebiecia się prostej l (l^n, l''^n) z sześcianiem, którego podstawa leży (por. rys. 202) na dowolnej płaszczyźnie α (h_α^n, v_α^n).

Ćwiczenie 3: Rozwiązać poprzednie ćwiczenie, jeżeli podstawa sześcianu leży na płaszczyźnie: a) $\alpha \parallel \pi_1$, b) $\alpha \parallel \pi_2$, c) $\alpha \perp \pi_1$ (rys. 201), d) $\alpha \perp \pi_2$, e) $\alpha \perp \pi_\alpha$.

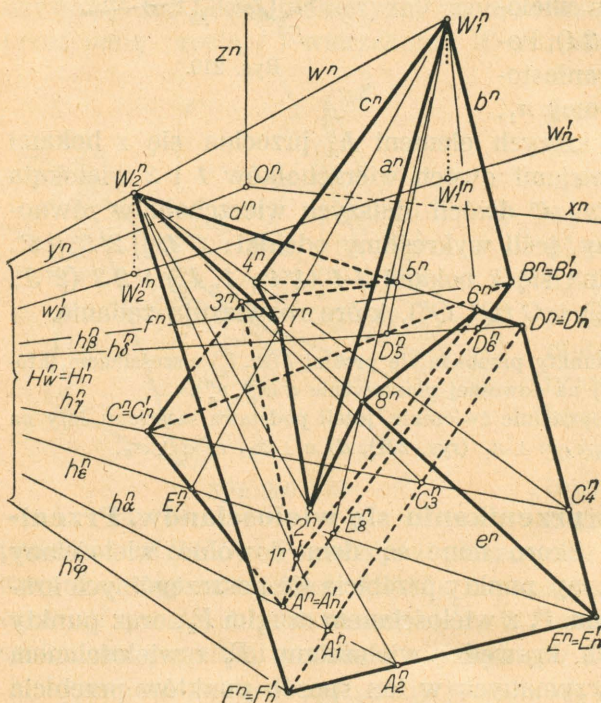
80. Uwagi ogólne o przenikaniu się wielościanów. Przenikanie się ostrosłupów. Skoro dane są dwa dowolne wielościany Γ_1 i Γ_2 , to wyznaczyć możemy punkty przebiecia się poszczególnych krawędzi pierwszego wielościanu Γ_1 z wielościanem drugim Γ_2 , oraz punkty przebiecia się poszczególnych krawędzi wielościanu Γ_2 z wielościanem pierwszym Γ_1 . Z pośród otrzymanych w ten sposób punktów przebiecia się 1, 2, ... weźmy pod uwagę takie dwa punkty np. 1 i 5, które leżą równocześnie na ścianie α_1 wielościanu Γ_1 , oraz na ścianie ε_2 wielościanu Γ_2 . Odcinek 15 posiada oczywiście tę własność, że każdy jego punkt leży równocześnie na ścianie α_1 i ścianie ε_2 , a tem samem i na obydwóch wielościanach Γ_1 i Γ_2 .

W podobny sposób łączyć możemy odcinkami dalsze pary takich

punktów, które leżą równocześnie na jednej ścianie wielościanu Γ_1 i na jednej ścianie wielościanu Γ_2 . Po połączeniu wszystkich możliwych par takich punktów, otrzymamy pewien wielokąt przestrzenny, którego wszystkie boki leżą równocześnie na danych wielościanach Γ_1 i Γ_2 . O wielościanach Γ_1 i Γ_2 mówimy wówczas, że przenikają się w owym wielokącie, a wielokąt ten nazywamy wielokątem przenikania.

Zadanie 1: Na rys. 211 dane są obrazy aksonometryczne dwóch ostrosłupów Γ_1 i Γ_2 , o wierzchołkach W_1 ($W_1^n, W_1'^n$) i W_2 ($W_2^n, W_2'^n$), których podstawy leżą na rzutni poziomej π_1 . Należy wyznaczyć aksonometrię wielokąta przenikania tych ostrosłupów.

Rozwiązanie: Wierzchołkami wielokąta przenikania będą punkty przebiecia się krawędzi $a = W_1 A$, $b = W_1 B$ i $c = W_1 C$ pierwszego ostrosłupa Γ_1 z ostrosłupem drugim, oraz punkty przebiecia się krawędzi $d = W_2 D$, $e = W_2 E$ i $f = W_2 F$ ostrosłupa Γ_2 z ostrosłupem pierwszym Γ_1 . Celem wyznaczenia owych punktów, użyjemy do konstrukcji najchętniej



Rys. 211.

takich płaszczyzn pomocniczych, które przechodzić będą przez poszczególne krawędzie $a \dots f$, oraz przez prostą $w = W_1 W_2$, łączącą wierzchołki danych ostrosłupów. Prosta w ($w^n = W_1^n W_2^n$, $w'^n = W_1'^n W_2'^n$) przebija rzutnię poziomą π_1 , na której leżą podstawy (ABC) i (DEF) ostrosłupów Γ_1 i Γ_2 , w punkcie H_w ($H_w^n = H_w'^n$). Chcąc wyznaczyć punkty przebiecia się krawędzi $a = W_1 A$ z ostrosłupem Γ_2 , poprowadźmy przez tę krawędź i przez prostą $w = W_1 W_2$ płaszczyznę $\alpha = aw$. Prosta $h_a^n = A^n H_w^n$ (rys. 211) jest aksonometrią śladu poziomego h_a pomocniczej płaszczyzny α . Punkty A_1^n i A_2^n , w których prosta h_a^n przecina się z bokami $F^n D^n$ i $F^n E^n$, połączmy z wierzchołkiem W_2^n , to uzyskany w ten sposób trójkąt ($W_2^n A_1^n A_2^n$) jest obrazem aksonometrycznym trójkąta ($W_2 A_1 A_2$), według którego płaszczyzna $\alpha = W_2 a$ przecina ostrosłup Γ_2 . Punkty przecięcia się krawę-

dzi $a = \overline{W_1 A}$ z bokami $\overline{W_2 A_1}$ i $\overline{W_2 A_2}$ owego trójkąta są szukanymi punktami 1 i 2 przebiecia się krawędzi $a = W_1 A$ z ostrosłupem Γ_2 . Rzuty aksonometryczne 1^n i 2^n tych punktów otrzymamy, jeśli wyznaczymy punkty przecięcia się prostej $a^n = W_1^n A^n$ z prostymi $W_2^n A_1^n$ i $W_2^n A_2^n$.

W podobny sposób, przy pomocy płaszczyzny $\gamma = cw$, wyznaczaliśmy punkty 3 i 4 przebiecia się krawędzi $c = W_1 C$ z ostrosłupem Γ_2 . W tym celu wykreśliliśmy najpierw aksonometrię $h_\gamma^n = C^n H_w^n$ śladu poziomego płaszczyzny γ , następnie punkty C_3^n i C_4^n leżące odpowiednio na bokach $F^n D^n$ i $D^n E^n$, a wkońcu punkty 3^n i 4^n przecięcia się prostej $c^n = W_1^n C^n$ z dwoma bokami trójkąta ($W_2^n C_3^n C_4^n$). Otrzymane w ten sposób punkty 3^n i 4^n są aksonometriami żądanych punktów 3 i 4, w których krawędź $c = W_1 C$ przebiega ostrosłup Γ_2 . Stosując tę samą konstrukcję do krawędzi $b = W_1 B$ zauważymy, że krawędź ta wcale nie przebiega ostrosłupa Γ_2 , gdyż aksonometria h_β^n (śladu poziomego pomocniczej płaszczyzny $\beta = bw$) nie przecina boków trójkąta ($D^n E^n F^n$).

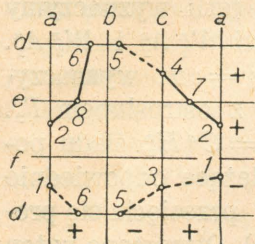
Punkty 5 i 6, przebiecia się krawędzi $d = W_2 D$ z ostrosłupem Γ_1 , otrzymamy przy pomocy płaszczyzny $\delta = dw$. Aksonometria $h_\delta^n = D^n H_w^n$ śladu poziomego tej płaszczyzny przecina boki $\overline{B^n C^n}$ i $\overline{B^n A^n}$ w punktach D_5^n i D_6^n . Proste $W_1^n D_5^n$ i $W_1^n D_6^n$ przecinają się z elementem $d^n = W_2^n D^n$ w żądanych punktach 5^n , 6^n . Przy pomocy płaszczyzny $\varepsilon = ew$ otrzymaliśmy wierzchołki 7 i 8 wielokąta przenikania, leżące na krawędzi $e = W_2 E$ ostrosłupa Γ_2 . Z położenia aksonetrii $h_\varphi^n = F^n H_w^n$ śladu poziomego płaszczyzny $\varphi = fw$ wnosimy, że krawędź $f = FW_2$ nie przebiega wcale ostrosłupa Γ_1 .

Celem ustalenia porządku, w jakim należy połączyć poszczególne wierzchołki wielokąta przenikania, postąpimy w sposób następujący¹⁾: Na rys. 212 niechaj proste a , b i c oznaczają krawędzie boczne ostrosłupa Γ_1 , a proste d , e i f krawędzie boczne ostrosłupa Γ_2 . Obszary zaś płaszczyzny rysunkowej, zawarte pomiędzy prostymi: a i b , b i c , c i a , d i e , e i f , f i d , niechaj oznaczają odpowiednie ściany boczne (ab) , ..., (fd) uważanych ostrosłupów Γ_1 i Γ_2 . Znakami „+” oznaczono ściany widoczne (por. rys. 211), a znakami „—” ściany niewidoczne owych ostrosłupów.

Z przeprowadzonej konstrukcji na rys. 211 wiadomo nam, że punkt 1 leży na krawędzi $a = W_1 A$ i na ścianie (df) , a punkt 2 na krawędzi a i na ścianie (ef) . Na rys. 212 zanotujemy to w ten sposób, że punkty 1 i 2 umieścimy tak na prostej a , aby element 1 przynależał do obszaru (df) , a punkt 2 do obszaru (ef) . Ponieważ punkty 3 i 4 leżą na krawędzi $c = W_1 C$ i na ścianach $(W_2 DF) = (df)$, wzgl. $(W_2 DE) = (de)$ ostrosłupa Γ_2 , przeto na rys. 212 umieściliśmy element 3 na prostej c

¹⁾ Porównaj np. podręcznik *Tadeusza Łazowskiego: Geometria wykreślna*, Warszawa 1916, str. 177.

i w obrębie obszaru (df), a punkt 4 na prostej c i w obszarze (de). Wierzchołki 5 i 6 wielokąta przenikania leżą na krawędzi $d = W_2 D$ i na ścianach $(W_1 B C) = (bc)$, względnie $(W_1 A B) = (ab)$, a wierzchołki 7 i 8 na krawędzi $e = W_2 E$ i na ścianach $(W_2 A C) = (ac)$, wzgl. $(W_2 A B) = (ab)$.



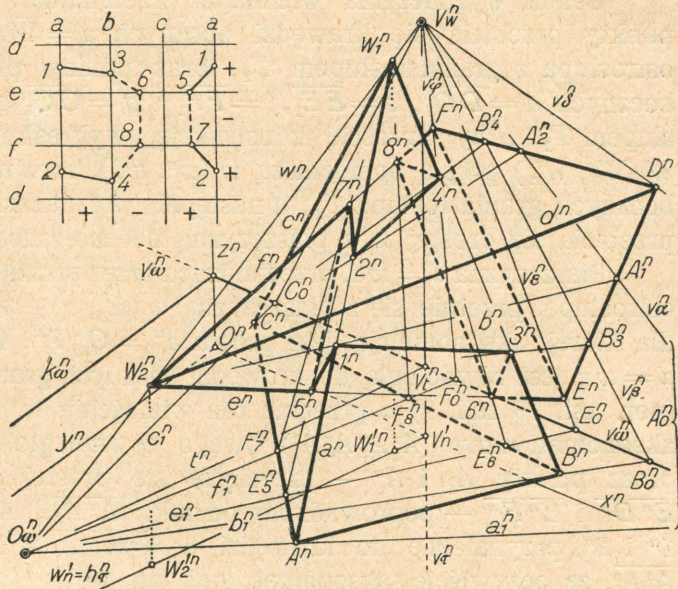
Rys. 212.

Z rozważań ust. 80 wiadomo nam, że takie dwa wierzchołki wielokąta przenikania, które leżą na jednej ścianie ostrosłupa Γ_1 i równocześnie na jednej ścianie ostrosłupa Γ_2 , wyznaczają bok owego wielokąta. Na rys. 212 weźmy pod uwagę np. wierzchołek 4. Element 4 połączyć możemy tylko z punktami 5 i 7, bo odcinek $\overline{45}$ leży równocześnie na ścianie (bc) i (de) , a odcinek $\overline{47}$ przynależy równocześnie do ścian (ca) i (de) . Postępując w myśl tej zasady, łączymy odcinkami punkty w następującym porządku: 4 i 7, 7 i 2, 2 i 8, 8 i 6, 6 i 1, 1 i 3, 3 i 5, 5 i 4, otrzymując wielokąt przenikania (47286135). Obrazem aksonometrycznym skośnego wielokąta przenikania jest (por. rys. 211) wielokąt płaski ($4^n 7^n 2^n 8^n 6^n 1^n 3^n 5^n$). Bok $\overline{4^n 7^n}$ jest widoczny, gdyż odcinek $\overline{47}$ leży na dwóch ścianach widocznych (oznaczonych znakami $+$ na rys. 212), a mianowicie na ścianie $+$ (ca) i na ścianie $+$ (de) . Natomiast bok $\overline{4^n 5^n}$ jest niewidoczny, gdyż odcinek $\overline{45}$ leży na ścianie niewidocznej $-$ (bc) i na ścianie widocznej $+$ (de) . Na rys. 212 i rys. 211 linią kreskowaną oznaczyliśmy boki niewidoczne wielokąta przenikania. Przy wyznaczaniu wielokąta przenikania tabelka umieszczona na rys. 212 oddaje nam duże usługi, gdyż odczytujemy z niej nie tylko porządek, w jakim należy łączyć wierzchołki wielokąta przenikania, ale zarazem poznajemy też boki widoczne i boki niewidoczne owego wielokąta.

Zadanie 2: Na rys. 213 dane są rzuty aksonometryczne dwóch ostrosłupów trójsściennych, o wierzchołkach $W_1 (W_1^n, W_1'^n)$ i $W_2 (W_2^n, W_2'^n)$. Podstawa (ABC) pierwszego ostrosłupa Γ_1 leży na płaszczyźnie $\omega (v_\omega^n, k_\omega^n)$ równoległej do rzutni poziomej π_1 , podstawa zaś (DEF) drugiego ostrosłupa Γ_2 leży na rzutni pionowej π_2 . Wyznaczyć należy obraz aksonometryczny wielokąta przenikania tych ostrosłupów.

Rozwiązanie: Prosta $w (w^n = W_1^n W_2^n, w'^n = W_1'^n W_2'^n)$, łącząca wierzchołki W_1 i W_2 ostrosłupów Γ_1 i Γ_2 , przebija płaszczyznę ω w punkcie $O_\omega (O_\omega^n, O_\omega'^n)$, a rzutnię π_2 w punkcie $V_w (V_w^n, V_w')$. Chcąc wyznaczyć punkty przebiecia się krawędzi $a = W_1 A$ z ostrosłupem Γ_2 , należy przez proste a i w poprowadzić płaszczyznę $\alpha = aw$, a następnie skonstruować krawędzie $a_1 = a\omega$ i $v_a = a\pi_2$, przecięcia się płaszczyzny α z płaszczyznami podstawowymi ω i π_2 , oraz punkt $A_o = \alpha\omega\pi_2$, przynależny do trzech płaszczyzn α, ω i π_2 . Prosta $a_1^n = O_\omega^n A^n$ jest aksonometrią krawędzi a_1 , punkt $A_o^n = a_1^n v_\omega^n$ jest rzutem aksonometrycznym punktu A_o ,

a prosta $v_a^n = A_o^n V_w^n$ jest wreszcie aksonometrią krawędzi v_a . Teraz bardzo łatwo wyznaczyć możemy punkty 1 i 2 przebiecia się krawędzi $a = W_1 A$ z ostrosłupem Γ_2 . Punkty A_1^n i A_2^n , w których element v_a^n przecina się z bokami $E^n D^n$ i $D^n F^n$, połączmy z wierzchołkiem W_2^n , to uzyskamy w ten sposób trójkąt $(W_2^n A_1^n A_2^n)$ jest aksonometrią trójkąta $(W_2 A_1 A_2)$, podług którego pomocnicza płaszczyzna $\alpha = aw$ przecięła ostrosłup Γ_2 . Krawędź $a = W_1 A$ wyznacza na bokach $W_2 A_1$ i $W_2 A_2$ żądane punkty 1 i 2. Ich obrazy aksonometryczne 1^n i 2^n otrzymamy, jeśli wyznaczymy punkty przecięcia się prostej $a^n = W_1^n A^n$ z bokami $W_2^n A_1^n$ i $W_2^n A_2^n$. Z przeprowadzonej konstrukcji wynika, że punkt 1 leży na



Rys. 213.

krawędzi a i na ścianie widocznej $(W_2 D E) = (de)$, a punkt 2 na krawędzi a i na ścianie $(W_2 D F) = (df)$. W pomocniczej tabelce, umieszczonej na rys. 213, uwidoczniliśmy równocześnie położenie uzyskanych wierzchołków 1 i 2 wielokąta przenikania.

W zupełnie analogiczny sposób, przy pomocy płaszczyzn $\beta = bw$, $\varepsilon = ew, \dots$, wyznaczaliśmy aksonetrie pozostałych wierzchołków wielokąta przenikania, oraz zanotowaliśmy równocześnie położenie tych wierzchołków na załączonej tabelce. Uwzględniając ściany widoczne (+) i niewidoczne (-), wykreślimy w tabelce odcinki: 13, 36, 68, 84, 42, 27, 75 i 51. Wnosimy stąd, że dane ostrosłupy Γ_1 i Γ_2 przenikają się w wielokącie skośnym (1 3 6 8 4 2 7 5), którego obraz aksonometryczny jest wielokątem płaskim ($1^n 3^n 6^n 8^n 4^n 2^n 7^n 5^n$).

Ćwiczenie: Zadanie 2 rozwiązać wówczas, jeżeli podstawa ostrosłupa Γ_1 leży na dowolnej płaszczyźnie ω (h_ω^n, v_ω^n) a podstawa ostrosłupa Γ_2 na płaszczyźnie φ (h_φ^n, v_φ^n), równoległej do rzutni aksonometrycznej π_a .

81. Przenikanie się ostrosłupa z graniastosłupem. Na rys. 214 dane są rzuty aksonometryczne ostrosłupa trójsściennego Γ_1 i graniasto-

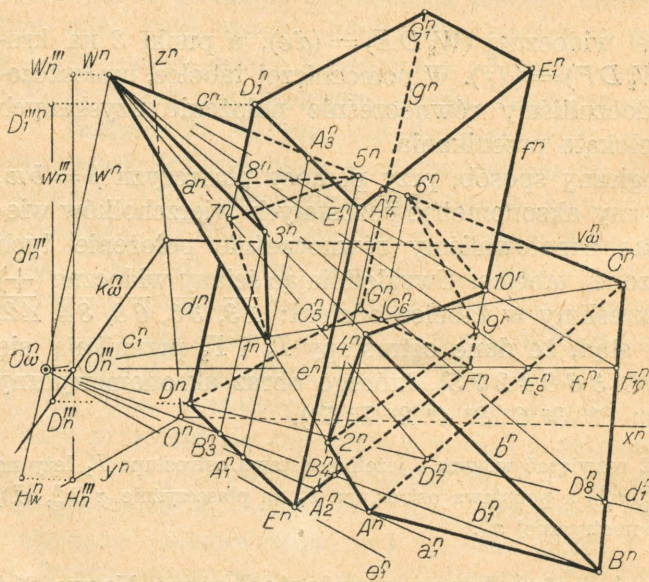
słupa czworościennego Γ_2 . Podstawy (ABC) i $(DEFG)$ tych wielościanów leżą na płaszczyźnie boczno-rzucającej ω ($v_\omega^n \parallel x^n, k_\omega^n$). Punkt $W(W^n, W''_n)$ jest wierzchołkiem ostrosłupa Γ_1 , a odcinek $\overline{DD_1}$ ($D''_n D''_1$, $D'''_n D'''_1$) jest krawędzią boczną graniastoslupa Γ_2 .

Celem wyznaczenia wielokąta przenikania, należy skonstruować punkty przebicia się krawędzi bocznych $a = \overline{WA}$, $b = \overline{WB}$ i $c = \overline{WC}$ ostrosłupa z graniastoslupem Γ_2 , oraz punkty przebicia się krawędzi bocznych $d = \overline{DD_1}$, $e = \overline{EE_1}$, $f = \overline{FF_1}$ i $g = \overline{GG_1}$ graniastoslupa z ostrosłupem Γ_1 . Aby uprościć konstrukcję, wykreślimy przez wierzchołek $W(W^n, W''_n)$ prostą pomocniczą w (w^n, w''_n), równoległą do krawędzi bocznych graniastoslupa Γ_2 , a następnie wyznaczmy punkt O_ω (O''_ω, O''_n) przebicia się prostej w z płaszczyzną boczno-rzucającą ω .

Płaszczyzna $\alpha = wa$, przechodząca przez prostą w i krawędź $a = \overline{WA}$ ostrosłupa, przetnie się z płaszczyzną ω (k_ω^n, v_ω^n) w krawędzi $a_1 = \overline{O_\omega A}$, dla której aksonometrią jest prosta $a''_1 = \overline{O''_\omega A''_n}$. Ponieważ płaszczyzna $\alpha = wa$ jest równoległą do krawędzi bocznych graniastoslupa Γ_2 , przeto (por. ust. 79 zad. 2) α przecina ten wielościan w równoległoboku. Rzut aksonometryczny ($A''_1 A''_2 A''_3 A''_4$) owego równoległoboku otrzymamy, jeśli przez punkty A''_1 i A''_2 — przecięcia się prostej $a''_1 = \overline{O''_\omega A''_n}$ z bokami $\overline{E''_n D''_n}$ i $\overline{E''_n F''_n}$ — poprowadzimy odcinki: $A''_1 A''_3 \parallel A''_2 A''_4 \parallel \overline{E''_n E''_1}$. Punkty $1''$ i $2''$, przynależne do krawędzi $a'' = \overline{W''_n A''_n}$ i do boku $A''_1 A''_3$, wzgl. $A''_2 A''_4$, są oczywiście aksonometriami punktów 1 i 2, przebicia się krawędzi $a = \overline{WA}$ ostrosłupa Γ_1 z graniastoslupem Γ_2 . Z przeprowadzonej

konstrukcji wynika, że punkt 1 leży na krawędzi $a = \overline{WA}$ i na ścianie $(DEE_1 D_1) = (de)$, a punkt 2 na krawędzi a i na ścianie $(EFF_1 E_1) = (ef)$. To położenie wierzchołków 1 i 2 wielokąta przenikania zanotowaliśmy równocześnie na pomocniczej tabelce, umieszczonej na rys. 215.

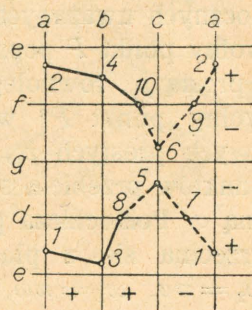
Zupełnie podobnie, przy pomocy płaszczyzny $\beta = bw$, wyznaczmy punkty 3 i 4 przebicia się kra-



Rys. 214.

wędzi $b = WB$ z graniastosłupem Γ_2 . Prosta $b_1^n = O_\omega^n B^n$ jest aksonometrią krawędzi $b_1 = \beta\omega$ i wyznacza na bokach $\overline{E^n D^n}$, $\overline{E^n F^n}$ punkty B_3^n i B_4^n . Proste, wykreślone z owych punktów równoległe do krawędzi $e^n = \overline{E^n E_1^n}$, przecinają promień $b^n = W^n B^n$ w żądanych punktach 3^n i 4^n . Korzystając z tej konstrukcji, zanotujemy w tabelce na rys. 215, że wierzchołek 3 wielokąta przenikania leży na krawędzi b i na ścianie (de) , a wierzchołek 4 na krawędzi b i na ścianie (ef) . W ten sam sposób wyznaczymy — przy użyciu płaszczyzny $\gamma = cw$ — punkty 5 i 6 przebiecia się krawędzi $c = WC$ ostrosłupa z graniastosłupem Γ_2 . Punkt 5 leży na ścianie (dg) , a punkt 6 na ścianie (fg) .

Chcąc wyznaczyć punkty 7 i 8, w których krawędź $d = DD_1$ graniastosłupa Γ_2 przebija ostrosłup Γ_1 , należy użyć do konstrukcji płaszczyzny $\delta = wd$. Płaszczyzna δ przecina (rys. 214) płaszczyznę podstawową ω w krawędzi $d_1 = O_\omega D$, a ostrosłup Γ_1 w trójkącie $(WD_7 D_8)$. Wkreślając rzuty $d_1^n = O_\omega^n D^n$ i $(W^n D_7^n D_8^n)$ wyznaczaliśmy za ich pośrednictwem na boku $d^n = \overline{D^n D_1^n}$ aksonometrię 7^n i 8^n żądanych punktów 7, 8 wielokąta przenikania. Wierzchołek 7 leży na ścianie (ac) , a wierzchołek 8 na ścianie (bc) ; położenie tych punktów uwzględniliśmy na tabelce w rys. 215. Przy pomocy płaszczyzny $\varphi = wf$ wyznaczaliśmy wreszcie punkty 9 i 10, w których krawędź $f = \overline{FF_1}$ przebija ostrosłup Γ_1 . Prosta $f_1^n = O_\omega^n F^n$ przecina boki $\overline{A^n C^n}$, $\overline{B^n C^n}$ w punktach F_9^n i F_{10}^n , a prosta $f^n = \overline{F^n F_1^n}$ przecina się z trójkątem $(W^n F_9^n F_{10}^n)$ w szukanych punktach 9^n i 10^n . — Ponieważ pomocnicze proste $e_1^n = O_\omega^n E^n$ i $g_1^n = O_\omega^n G^n$ nie przecinają boków trójkąta $(A^n B^n C^n)$, przeto krawędzie $e = \overline{EE_1}$ i $f = \overline{FF_1}$ graniastosłupa Γ_2 nie przebijają wcale ostrosłupa Γ_1 .



Rys. 215.

Przy pomocy tabelki (rys. 215) ustalimy porządek, w jakim należy łączyć poszczególne wierzchołki wielokąta przenikania. Zaczynając np. od punktu 3, wykreślimy odcinki: $\overline{38}$, $\overline{85}$, $\overline{57}$, $\overline{71}$ i $\overline{13}$, które wskazują na wystąpienie wielokąta przenikania ($\overline{38571}$). Zaczynając zaś od punktu np. 10, otrzymamy boki: $\overline{10,6}$, $\overline{6,9}$, $\overline{9,2}$, $\overline{2,4}$ i $\overline{4,10}$ wielokąta skośnego ($\overline{10,6924}$). Wnosimy stąd, że ostrosłup Γ_1 i graniastosłup Γ_2 przenikają się w takim wielokącie, który *rozpadł się na dwie oddzielne części*: ($\overline{38571}$) i ($\overline{10,6924}$). Wykreślenie rzutów aksonometrycznych ($3^n 8^n 5^n 7^n 1^n$) i ($10^n 6^n 9^n 2^n 4^n$) owych wielokątów (por. rys. 214), jak również uwzględnienie krawędzi widocznych i niewidocznych, nie nastręcza już żadnych trudności.

Ćwiczenie 1: Wyznaczyć aksonometrię wielokąta przenikania czworosściennego ostrosłupa z pięciostoiennym graniastosłupem, jeżeli podstawa $(ABCD)$ ostrosłupa

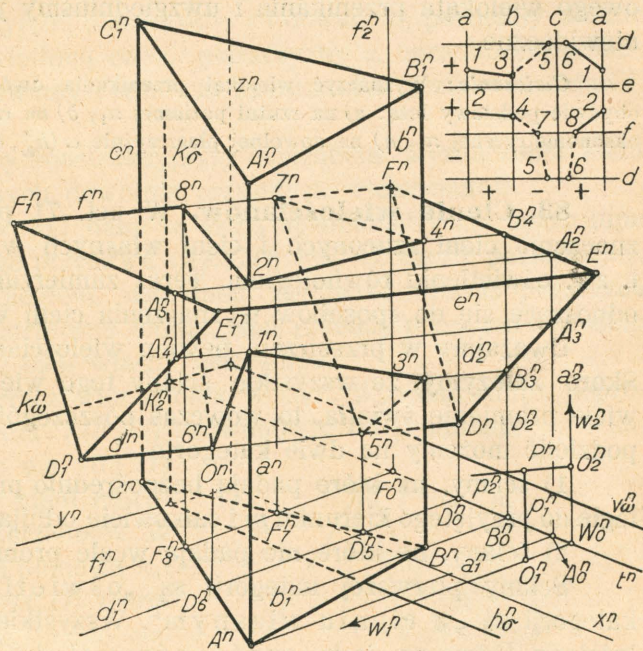
leży na rzutni poziomej π_1 , a podstawa ($EFGIL$) graniastoslupa leży na rzutni pionowej π_2 .

Ćwiczenie 2: Rozwiązać ćwiczenie 1 wówczas, jeżeli dwie dowolne płaszczyzny ω (h_ω^n, v_ω^n) i ψ (h_ψ^n, v_ψ^n) uważać będziemy odpow. za płaszczyzny podstawowe tych wielościanów.

82. Przenikanie się graniastoslupów. Na rysunku 216 dane są rzuty aksonometryczne dwóch graniastoslupów trójsściennych Γ_1 i Γ_2 . Podstawa (ABC) pierwszego graniastoslupa leży na płaszczyźnie ω (v_ω^n, k_ω^n) równoległej do rzutni poziomej π_1 , podstawa zaś (DEF) graniastoslupa Γ_2 leży na płaszczyźnie σ (h_σ^n, k_σ^n) równoległej do rzutni pionowej π_2 . Aby wyznaczyć wierzchołki wielokąta przenikania tych graniastoslupów, należy skonstruować punkty przebicia się krawędzi graniastoslupa Γ_1 z wielościanem Γ_2 , oraz punkty przebicia się krawędzi graniastoslupa Γ_2 z wielościanem Γ_1 . Konstrukcja znacznie się uprości, jeżeli do pomocy użyjemy płaszczyzn, równoległych do krawędzi bocznych uważanych graniastoslupów Γ_1 i Γ_2 . W tym celu przez dowolny punkt P poprowadźmy prostą p_1 , równoległą do krawędzi $a = AA_1$ i prostą p_2 , równoległą do krawędzi $e = EE_1$. Na rysunku 216 przez dowolny punkt P^n wykreśliliśmy aksonometrię $p_1^n \parallel A^n A_1^n$ i $p_2^n \parallel E^n E_1^n$ owych prostych p_1, p_2 . Punkty O_1^n i O_2^n niechaj będą aksonometrijami punktów przebicia się prostej p_1 z płaszczyzną ω i prostej p_2 z płaszczyzną σ . Pomocnicza płaszczyzna $\pi = p_1 p_2$, wyznaczona prostymi p_1 i p_2 , przecina się z płaszczyznami podstawowymi σ i ω w krawędziach $w_2 = \pi \sigma$, $w_1 = \pi \omega$, których aksonometrijami są proste: $w_2^n = O_2^n W_2^n$ i $w_1^n = O_1^n W_1^n$. Ponieważ przyjęty wielościan Γ_1 jest graniastoslupem prostym, przeto jego krawędzie boczne są równoległe do osi z i do płaszczyzny σ , a tem samem pomocnicza prosta p_1 musi być równoległą do płaszczyzny σ , a zarazem i do krawędzi $w_2 = \pi \sigma$. Aksonometrię w_2^n owej prostej otrzymamy zatem, jeśli z punktu O_2^n poprowadzimy prostą $w_2^n \parallel p_1^n$. Oznaczywszy przez t^n aksonometrię krawędzi $t = \omega \sigma$ (przecięcia się płaszczyzn podstawowych ω i σ), a przez W_2^n punkt przynależny do prostych t^n i w_2^n , otrzymamy przez połączenie elementów W_2^n i O_1^n aksonometrię $w_1^n = W_2^n O_1^n$ krawędzi $w_1 = \pi \omega$.

Teraz dopiero przystąpić możemy do konstrukcyjnego wyznaczenia wierzchołków wielokąta przenikania. Chcąc wykreślić obrazy aksonometryczne 1^n i 2^n punktów 1, 2 przebicia się krawędzi bocznej $a = AA_1$ graniastoslupa Γ_1 z drugim graniastoslupem Γ_2 , poprowadźmy przez prostą $a = AA_1$ płaszczyznę α równoległą do płaszczyzny $\pi = p_1 p_2$. Ponieważ π jest płaszczyzną równoległą do krawędzi bocznych graniastoslupa Γ_2 , przeto płaszczyzna $\alpha \parallel \pi_2$ przetnie wielościan Γ_2 w równoległoboku. Prosta $a_1^n = A^n A_1^n$, wykreślona z punktu A^n równoległe do promienia $w_1^n = O_1^n W_1^n$, jest aksonometrią krawędzi $a_1 = a \omega$; prosta a_2^n ,

wykreślona z punktu $A_0^n = a_1^n t^n$ równolegle do elementu $w_2^n = O_2^n W_0^n$, jest rzutem aksonometrycznym krawędzi $a_2 = a\sigma$. Jeżeli przez punkty A_3^n i A_2^n , leżące na prostej a_2^n i na bokach $\overline{E^n D^n}$, wzgl. $\overline{E^n F^n}$, poprowadzimy odcinki $\overline{A_3^n A_4^n} \parallel \overline{A_2^n A_5^n} \parallel e^n$, to uzyskany w ten sposób równoległobok ($A_3^n A_2^n A_5^n A_4^n$) jest aksonometrią równoległoboku, według którego płaszczyzna α przecina graniastosłup Γ_2 . Prosta $a^n = A^n A_1^n$ wyznacza na bokach $\overline{A_3^n A_4^n}$ i $\overline{A_2^n A_5^n}$ punkty 1^n i 2^n , które są aksonometriami szukanych wierzchołków 1, 2 wielokąta przenikania. Z konstrukcji powyższej wynika, że punkt 1 leży na krawędzi $a = AA_1$ i na ścianie $(DEE_1 D_1) = (de)$, a punkt 2 na krawędzi a i na ścianie $(EFF_1 E_1) = (ef)$. Wynik ten zanotowaliśmy również i na tabelce, umieszczonej na rys. 216.



Rys. 216.

Zupełnie podobnie, prowadząc przez krawędź np. $d = DD_1$ płaszczyznę δ równoległą do płaszczyzny pomocniczej $\pi = p_1 p_2$, wyznaczyć możemy punkty 5 i 6 przebiecia się krawędzi d z graniastosłupem Γ_1 . Prosta d_2^n , wykreślona z punktu D^n równolegle do promienia $w_2^n = O_2^n W_0^n$, jest obrazem aksonometrycznym krawędzi $d_2 = d\sigma$, a prosta d_1^n , poprowadzona przez punkt $D_0^n = d_2^n t^n$ równolegle do elementu $w_1^n = O_1^n W_0^n$, jest aksonometrią krawędzi $d_1 = d\omega$. Skoro przez punkty D_5^n i D_6^n , w których prosta d_1^n przecina się z bokami $\overline{B^n C^n}$ i $\overline{A^n C^n}$, wykreślimy proste równoległe do promienia $A^n A_1^n$, to one wyznaczą na odcinku $\overline{D^n D_1^n}$ żądane punkty 5^n i 6^n . W tabelce (na rys. 216) zanotujemy, opierając się na powyższej konstrukcji, że: wierzchołek 5 wielokąta przenikania leży na krawędzi $d = DD_1$ i na ścianie $(BCC_1 B_1) = (bc)$, a wierzchołek 6 na krawędzi d i na ścianie $(ACC_1 A_1) = (ac)$.

Analogicznie skonstruujemy aksonometrię $3^n, 4^n, 7^n$ i 8^n pozostałych wierzchołków wielokąta przenikania. Z odcinków: $\overline{13}, \overline{35}, \overline{57}, \overline{74}, \overline{42}, \overline{28}, \overline{86}$ i $\overline{61}$ (wykreślonych na tabelce) wnosimy, że uważane gra-

niastosłupy Γ_1 i Γ_2 przenikają się w wielokącie skośnym (13574286). Na rys. 216 narysowaliśmy rzut aksonometryczny ($1^n 3^n 5^n 7^n 4^n 2^n 8^n 6^n$) owego wielokąta przenikania i uwzględniliśmy jego boki widoczne, oraz niewidoczne.

Ćwiczenie: Wyznaczyć wielokąt przenikania dwóch graniastosłupów, których obydwie podstawy leżą: a) na rzutni poziomej π_1 , b) na rzutni bocznej π_3 , c) na rzutni aksonometrycznej π_a , d) na dowolnej płaszczyźnie ω (h_ω^n, v_ω^n).

83. Cienie wielościanów. W ust. 71 poznaliśmy sposoby wyznaczenia cieni rzuconych i cieni własnych wielokątów płaskich, przy t. zw. oświetleniu równoległym. Teraz zamierzamy omówić zagadnienia, odnoszące się do sposobów wyznaczenia cieni wielościanów.

Uważajmy w przestrzeni pewien wielościan Γ i kierunek światła p . Skoro założymy, że wszystkie ściany tego wielościanu odbijają całkowicie promienie światła, to wówczas poszczególne ściany wielościanu Γ podzielić możemy na dwie kategorie:

- 1) ściany, na które padają bezpośrednio promienie światła (równoległe do przyjętego kierunku p) i całkowicie odbijają się od tych ścian, oraz
- 2) ściany, na które nie padają wcale promienie światła.

Ściany pierwszej kategorii są „oświetlone“, a ściany drugiej kategorii są „w cieniu własnym“. Wszystkie ściany oświetlone wielościanu Γ tworzą jego część oświetloną, a wszystkie pozostałe ściany, będące w cieniu własnym, stanowią jego część nieoświetloną lub część znajdującą się w cieniu własnym. Gdybyśmy, dla przyjętego kierunku światła p , ustalili część nieoświetloną wielościanu Γ (t. zn. gdybyśmy wyznaczyli wszystkie jego ściany nieoświetlone), to wówczas mówimy, że wyznaczyliśmy cień własny tego wielościanu. Na przyjętym wielościanie Γ wystąpią wówczas pewne charakterystyczne krawędzie, które odgraniczają część oświetloną wielościanu Γ od części nieoświetlonej. Krawędzie te są w ogólności bokami wielokąta skośnego; wielokąt ten nazywamy granicą cienia własnego uważanego wielościanu Γ .

Przypuśćmy, że granicą cienia własnego wielościanu Γ jest wielokąt skośny ($ABCD$), o bokach $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$. Wyznamy teraz cienie A_ε , B_ε , C_ε i D_ε poszczególnych wierzchołków wielokąta ($ABCD$), oraz cienie $\overline{A_\varepsilon B_\varepsilon}$, $\overline{B_\varepsilon C_\varepsilon}$, $\overline{C_\varepsilon D_\varepsilon}$ i $\overline{D_\varepsilon A_\varepsilon}$ jego poszczególnych boków na dowolnie przyjętą płaszczyznę ε . Otrzymany w ten sposób wielokąt płaski ($A_\varepsilon B_\varepsilon C_\varepsilon D_\varepsilon$) jest (por. ust. 71) cieniem rzuconym przez wielokąt ($ABCD$) na płaszczyznę ε . Te promienie światła, równoległe do elementu p , które padają bezpośrednio na „ściany oświetlone“ wielościanu Γ , odbijają się całkowicie od tych ścian (wedle naszego założenia!) i nie dochodzą wcale do płaszczyzny ε . Z łatwością zauważymy, że obszar płaszczyzny ε ,

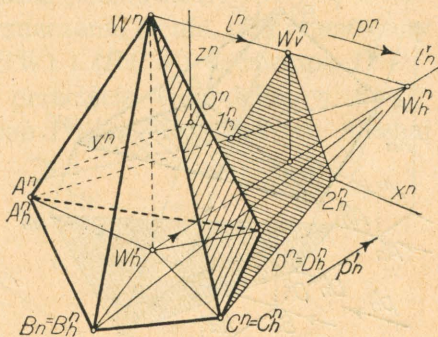
do którego nie dochodzą wcale wymienione powyżej promienie światła, ograniczony jest wielokątem ($A_\varepsilon B_\varepsilon C_\varepsilon D_\varepsilon$). Natomiast wszystkie inne promienie światła, które nie padają na żadną ścianę wielościanu Γ , dochodzą bezpośrednio do przyjętej płaszczyzny ε i oświetlają pozostały obszar tej płaszczyzny. Nieoświetloną część płaszczyzny ε , ograniczoną wielokątem ($A_\varepsilon B_\varepsilon C_\varepsilon D_\varepsilon$), nazywamy cieniem rzuconym przez wielościan Γ na płaszczyznę ε .

Teraz zajmijmy się konstrukcyjnym sposobem wyznaczenia cieni własnych i cieni rzuconych dowolnie przyjętych wielościanów.

Zadanie 1: Na rys. 217 dane są rzuty aksonometryczne ostrosłupa czworosściennego, którego podstawa ($ABCD$) leży na rzutni poziomej π_1 . Przy oświetleniu równoległym, ustalonym za pośrednictwem promienia światła p (p^n, p'_n), skonstruować należy cień rzucony przez ten ostrosłup na rzutnie π_1 i π_2 , oraz cień własny ostrosłupa.

Rozwiązanie: Przez wierzchołek W (W^n, W'_n) ostrosłupa poprowadźmy promień światła l (l^n, l'_n), równoległy do promienia p , a następnie wyznaczmy (por. ust. 70 i 71) aksonometrię W_h^n i W'_h^n cieni rzuconych W_h, W'_h przez wierzchołek W na rzutnię poziomą π_1 i pionową π_2 . Ponieważ podstawa ($ABCD$) ostrosłupa leży na rzutni π_1 , przeto cienie A_h, B_h, C_h i D_h wierzchołków podstawy zjednoczyły się odpowiednio z owymi punktami.

Z rozważań ust. 71 wiadomo nam, że odcinek $\overline{A_h W_h^n}$ jest aksonometrią cienia rzuconego przez odcinek $\overline{AW}$ na rzutnię π_1 , a trójkąt ($A_h^n B_h^n W_h^n$) jest obrazem aksonometrycznym cienia, jaki trójkąt (ABW) rzuca na rzutnię poziomą. Podobnie trójkąt ($B_h^n C_h^n W_h^n$) jest aksonometrią cienia rzuconego przez ścianę (BCW) ostrosłupa na rzutnię π_1 . Wszystkie promienie światła, które padają na ściany (ABW) i (BCW) przyjętego ostrosłupa, odbijają się całkowicie od tych ścian i nie dochodzą wcale do rzutni π_1 . Owe dwie ściany ostrosłupa są oświetlone, a obszar płaszczyzny poziomej π_1 , ograniczony wielokątem ($A_h B_h C_h W_h$), nie jest wcale oświetlony. Z położenia promienia światła p wnosimy, że podstawa ($ABCD$) ostrosłupa znajduje się w cieniu własnym. Podobnie i dwie pozostałe ściany boczne (CDW) i (DAW) ostrosłupa są w cieniu własnym, gdyż cień $\overline{D_h W_h}$ krawędzi $\overline{DW}$ znajduje się (por. rys. 217) wewnątrz obszaru nieoświetlonego ($A_h B_h C_h W_h$). Obszar ten jest cieniem rzuconym przez ostrosłup na rzutnię poziomą π_1 , a wie-



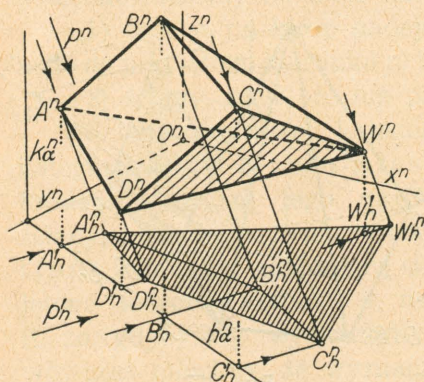
Rys. 217.

łokat skośny ($ABCW$) stanowi granicę cienia własnego owego ostrosłupa.

Na rys. 217 wyznaczyliśmy nadto punkty 1_h^n i 2_h^n , przecięcia się osi aksonometrycznej x^n z bokami $A_h^n W_h^n$ i $C_h^n W_h^n$, a następnie owe dwa punkty z elementem W_h^n . Cienie odcinków AW i CW występują częściowo na rzutni poziomej π_1 , a po załamaniu się w punktach 1_h i 2_h (por. ust. 70) na osi x , występują w dalszym ciągu na rzutni pionowej π_2 . Wielokąt ($A_h^n B_h^n C_h^n 2_h^n W_h^n 1_h^n$) jest obrazem aksonometrycznym cienia rzucanego przez przyjęty ostrosłup na rzutnie π_1 i π_2 . Widoczną część tego wielokąta płaskiego zakreskowano, jak również przez zakreskowanie trójkąta ($C_h^n D_h^n W_h^n$) na rys. 217 zaznaczono, że widoczna ściana (CDW) ostrosłupa znajduje się w cieniu własnym.

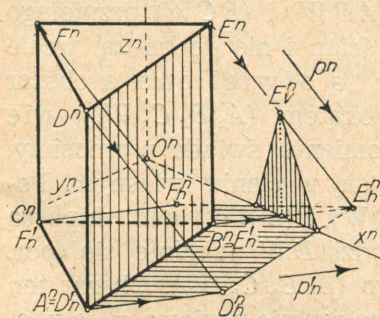
Ćwiczenie 1: Zadanie 1 rozwiązać, jeżeli podstawa ostrosłupa leży na rzutni pionowej π_2 .

Zadanie 2: Na rys. 218 dane są rzuty aksonometryczne ostrosłupa czworosiecznego, którego podstawa ($ABCD$) leży na płaszczyźnie poziomo-rzucającej α (h_a^n, k_a^n). Dla kierunku światła p (p^n, p_h^n) wyznaczyć cień własny ostrosłupa i jego cień rzucony na rzutnię poziomą π_1 .



Rys. 218.

Rozwiązanie: Dla poszczególnych wierzchołków W (W^n, W_h^n), A (A^n, A_h^n), ... D (D^n, D_h^n) uważanego wielościanu skonstruujemy aksonometrię $W_h^n, A_h^n, B_h^n, C_h^n$ i D_h^n cieni rzuconych przez owe punkty na rzutnię poziomą π_1 . Wielokąt płaski ($W_h^n A_h^n D_h^n C_h^n$) jest aksonometrią cienia rzucanego przez ostrosłup na rzutnię π_1 , a wielokąt przestrzenny ($WADC$) jest granicą cienia własnego. Podstawa ($ABCD$) oraz ściany (BCW) i (ABW) ostrosłupa są oświetlone, ściany zaś (DCW) i (ADW) są w cieniu własnym.



Rys. 219.

Ćwiczenie 2: Wyznaczyć cienie własne i rzucone czworosiecznemu umiarowemu, którego podstawa leży na płaszczyźnie: a) $\alpha \parallel \pi_1$, b) $\alpha \parallel \pi_2$, c) $\alpha \parallel \pi_3$, d) $\alpha \perp \pi_2$, e) $\alpha \parallel \pi_a$ f) $\alpha \perp \pi_a$.

Ćwiczenie 3: Dane są rzuty graniastosłupa prostego (rys. 219), którego podstawa (ABC) leży na rzutni poziomej π_1 . Należy skonstruować cienie tego graniastosłupa na rzutni π_1 i π_2 .

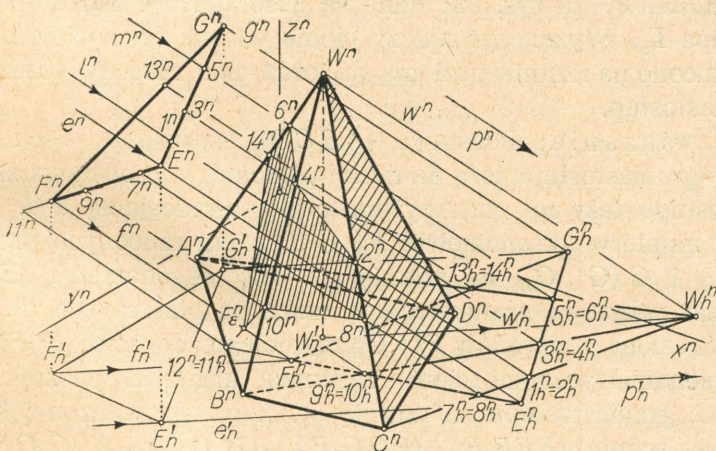
Ćwiczenie 4: Wyznaczyć cień własny i cień rzucony (na rzutni π_1 i π_2) sześciannu, którego podstawa leży na płaszczyźnie: a) dowolnej α (h_a^n, v_a^n), b) $\alpha \parallel \pi_1$, c) $\alpha \parallel x$, d) $\alpha \perp \pi_2$, e) $\alpha \perp \pi_a$, f) $\alpha \parallel \pi_a$.

84. Cienie wzajemne wielokątów i wielościanów. W ust. 71 omówiliśmy sposoby wyznaczenia cieni rzuconych przez jeden wielokąt płaski na wielokąt drugi. Teraz zajmiemy się konstrukcyjnym wyznaczeniem cieni rzuconych przez wielokąty na wielościany, oraz cieni rzuconych przez jeden wielościan na wielościan drugi.

Zadanie 1: Na rys. 220 dane są rzuty aksonometryczne trójkąta (EFG) i ostrosłupa Γ , którego podstawa ($ABCD$) leży na rzutni poziomej π_1 . Dla kierunku światła p (p^n, p'_n) należy skonstruować aksonometrię cienia rzuconego przez ów trójkąt na ostrosłup Γ .

Rozwiązanie: Wyznamy najpierw aksonetrię W_h^n, E_h^n, F_h^n i G_h^n cieni punktów W, E, F i G na rzutnię np. poziomą π_1 . Odcinki $E_h^n F_h^n, E_h^n G_h^n$ i $F_h^n G_h^n$ są aksonetrami cieni rzuconych przez boki trójkąta (EFG) na rzutnię π_1 . Podobnie odcinki $A^n W_h^n, C^n W_h^n$ i $B^n W_h^n$ są obrazami aksonometrycznymi cieni rzuconych przez krawędzie $\overline{AW}, \overline{CW}$ i $\overline{BW}$ ostrosłupa Γ na płaszczyznę π_1 . Z położenia tych odcinków wnosimy, że ściany (ABW) i (BCW) ostrosłupa są oświetlone, natomiast ściany boczne (CDW) i (ADW), oraz podstawa ($ABCD$) są w cieniu własnym. Zadaniem naszym jest wyznaczenie cienia, jaki rzuca dany trójkąt (EFG) na ściany oświetlone (ABW) i (BCW) ostrosłupa Γ .

W tym celu przez punkt $1_h^n = 2_h^n$, przecięcia się odcinków $E_h^n G_h^n$ i $C^n W_h^n$ (rys. 220), poprowadźmy promień $l^n \parallel p^n$. Promień ten niechaj



Rys. 220.

przetnie się z bokiem $E^n G^n$ w punkcie 1^n , a z bokiem $C^n W^n$ w punkcie 2^n . Otrzymane w ten sposób elementy 1^n i 2^n uważajmy za aksonetrię takich punktów 1 i 2 , z których pierwszy leży na boku $\overline{EG}$ trójkąta, a drugi na krawędzi $\overline{CW}$ ostrosłupa. Ponieważ cienie 1_h i 2_h tych punktów zjednoczyły się w jednym punkcie rzutni π_1 , a nadto punkt 1

leży bliżej źródła światła aniżeli punkt 2, przeto: punkt 1 rzuca cień na punkt 2, a tem samem punkt 1 rzuca cień w punkcie 2 na krawędź $\overline{CW}$ ostrosłupa Γ .

W podobny sposób, przy pomocy punktów $3^n = 4^n$ i $5^n = 6^n$, przecięcia się boku $\overline{E_h^n G_h^n}$ z odcinkami $\overline{B^n W_h^n}$ i $\overline{A^n W_h^n}$, wyznaczyliśmy na boku $\overline{EG}$ danego trójkąta takie punkty 3 i 5, z których pierwszy rzuca cień w punkcie 4 na krawędź $\overline{BW}$ ostrosłupa Γ , a drugi rzuca cień w punkcie 6 na krawędź $\overline{AW}$. Odcinki $\overline{2^n 4^n}$ i $\overline{4^n 6^n}$ są aksonometrijami cienia rzuconego przez bok $\overline{EG}$ (wzgl. przez odcinki $\overline{13}$ i $\overline{35}$!) na oświetlone ściany (CBW) i (BAW) uważanego ostrosłupa.

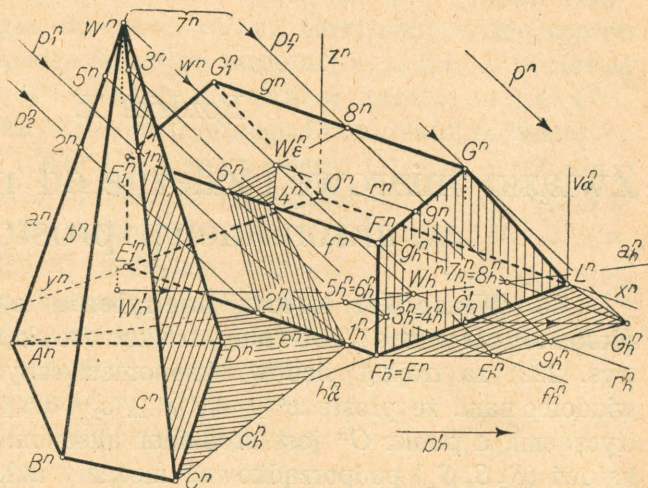
Za pośrednictwem punktów $7^n = 8^n$, $9^n = 10^n$ i $11^n = 12^n$ (t. zn. punktu przecięcia się prostej $\overline{E_h^n F_h^n}$ z bokiem $\overline{A^n B^n}$, wykreśliliśmy obrazy aksonometryczne $\overline{8^n 10^n}$ i $\overline{10^n 12^n}$ cieni rzuconych przez prostą EF na oświetlone ściany ostrosłupa Γ . Promień f^n , wykreślony z punktu F^n równoległe do prostej p^n , wyznacza na odcinku $\overline{10^n 12^n}$ taki punkt F_ε^n , który jest rzutem aksonometrycznym cienia wierzchołka F na ścianę $\varepsilon = ABW$. Wkońcu za pośrednictwem punktu $13^n = 14^n$ przecięcia się prostych $\overline{F_h^n G_h^n}$ i $\overline{A^n W_h^n}$, skonstruowaliśmy taki punkt 13 na boku $\overline{FG}$, którego cień na krawędź $\overline{AW}$ jest punktem 14. Otrzymany wielokąt $(2^n 4^n 6^n 14^n F_\varepsilon^n 10^n 8^n)$ jest obrazem aksonometrycznym cienia rzuconego przez dany trójkąt (EFG) na ostrosłup Γ .

Zadanie 2: Na rys. 221 dane są aksonometrie ostrosłupa Γ_1 i graniastosłupa Γ_2 . Wyznaczyć należy cienie własne tych wielościianów, ich cienie rzucone na rzutnię poziomą π_1 , oraz cień rzucony przez ostrosłup na graniastosłup.

Rozwiązanie: Podstawa $(ABCD)$ ostrosłupa i ściana boczna (EE_1OL) graniastosłupa leżą na rzutni poziomej π_1 , podstawa zaś (EFG_L) graniastosłupa leży na płaszczyźnie poziomo-rzucającej α (h_a^n, v_a^n). Wyznamy najpierw aksonometrie F_h^n i G_h^n cieni rzuconych przez punkty F (F^n, F'_n) i G (G^n, G'_n) na rzutnię π_1 , oraz aksonometrię $(E^n L^n G_h^n F_h^n)$ cienia, jaki podstawa graniastosłupa rzuca na płaszczyznę π_1 . Proste f_h^n i g_h^n , wykreślone z punktów F_h^n i G_h^n równoległe do boku $\overline{F^n F'_1^n}$, są obrazami aksonometrycznymi cieni rzuconych krawędzi bocznych $f = \overline{FF_1}$ i $g = \overline{GG_1}$ graniastosłupa na rzutnię π_1 . Z przeprowadzonej konstrukcji wynika, że ściany (EFF_1E_1) , (FGG_1F_1) , $(GLOG_1)$ i $(F_1G_1OE_1)$ graniastosłupa są oświetlone, a natomiast ściana (EE_1OL) i podstawa (EFG_L) są w cieniu własnym.

Skoro wyznaczymy cień W_h wierzchołka W danego ostrosłupa Γ_1 na rzutnię π_1 , to zauważymy, że podstawa $(ABCD)$, oraz ściany boczne (CDW) i (DAW) są w cieniu własnym, a ściany (ABW) i (BCW) są oświetlone. Ostrosłup Γ_1 rzuca cień na rzutnię poziomą, przyczem wielokąt $(A^n B^n C^n W_h^n)$ jest aksonometrią owego cienia rzuconego.

Pozostaje nam jeszcze do wyznaczenia cień, jaki ostrosłup Γ_1 rzuca na graniastosłup Γ_2 . W tym celu przez punkt 1^n , przecięcia się prostych $c_h^n = C^n W_h^n$ i $e^n = E^n E_1^n$, wykreślmy promień $p_1^n \parallel p^n$ i uważajmy punkt $1^n = a^n p_1^n$ za aksonometrię punktu 1, leżącego na krawędzi $c = \overline{WC}$ ostrosłupa. Otrzymany w ten sposób punkt 1 rzuca cień na krawędź $e = \overline{EE_1}$ graniastosłupa Γ_2 . Przy pomocy punktu $2^n = a_h^n e^n$ i promienia $p_2^n \parallel p^n$, skonstruowaliśmy taki punkt 2 na krawędzi $a = \overline{WA}$ ostrosłupa, że jego cień pada również na krawędź $e = \overline{EE_1}$ graniastosłupa.



Rys. 221.

Analogicznie, korzystając z punktów $3_h^n = 4_h^n$, $5_h^n = 6_h^n$ i $7_h^n = 8_h^n$ przecięcia się c_h^n , a_h^n z prostymi f_h^n i g_h^n , otrzymaliśmy punkt 3 na krawędzi $c = \overline{WC}$ oraz punkty 5 i 7 na prostej $a = \overline{AW}$. Punkty 3 i 5 rzucają cień w punktach 4 i 6 na krawędź $f = \overline{FF_1}$, a punkt 7 rzuca cień w punkcie 8 na krawędź $g = \overline{GG_1}$. Odcinki $2_h^n 6_h^n$ i $6_h^n 8_h^n$ są aksonometriami cieni rzuconych przez prostą $a = \overline{AW}$ na ściany boczne (EFF_1E_1) i (FGG_1F_1) graniastosłupa, a punkt W_ε^n — przecięcia się odcinka $6_h^n 8_h^n$ z promieniem $W^n W_h^n$ — jest obrazem aksonometrycznym cienia, jaki wierzchołek ostrosłupa rzuca na ścianę (FGG_1F_1) graniastosłupa.

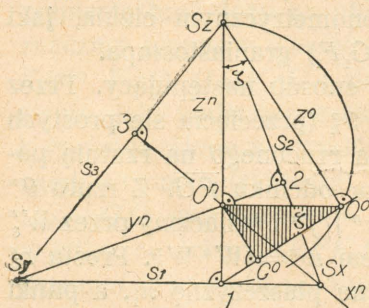
Element W_ε^n wyznaczyć możemy też w sposób następujący. Przez punkt W_h^n wykreślmy prostą $r_h^n \parallel f_h^n$ i punkt 9_h^n (przecięcia się prostych r_h^n i $F_h^n G_h^n$) uważajmy za aksonometrię cienia rzuconego na rzutnię poziomą π_1 przez taki punkt 9, który leży na odcinku $\overline{FG}$. Z rzutu 9_h^n owego punktu 9 wykreślmy następnie prostą $r^n \parallel f^n$ i oznaczmy przez W_ε^n punkt przecięcia się elementu r^n z promieniem $w^n = \overline{W^n W_h^n}$. Prosta r_h^n jest aksonometrią cienia, jaki prosta r rzuca na płaszczyznę π_1 , a punkt W_ε^n jest aksonometrią cienia rzuconego przez wierzchołek W na prostą r , a tem samem i na ścianę (FGG_1F_1) graniastosłupa.

Rozdział X.

Związki miarowe i zależne od nich konstrukcje w aksonometrii prostokątnej.

85. Własności kątów nachylenia osi x , y i z do rzutni aksonometrycznej. Dowolny trójkąt ostrokątny ($S_x S_y S_z$) uważajmy (rys. 222) za trójkąt śladów aksonometrycznych. Z rozważań ust. 12 wiadomo nam, że proste $x^n \perp s_3$, $y^n \perp s_2$ i $z^n \perp s_1$ są osiami aksonometrycznymi, a punkt O^n jest środkiem aksonometrycznym. Owemu trójkątowi ($S_x S_y S_z$) podporządkować możemy układ potrójnie prostokątny $O[x, y, z]$, przyczem początek O tego układu niechaj leży poniżej rzutni aksonometrycznej (płaszczyzny rysunku) π_a w odległości $\overline{O^n O^o}$ na prostej w , wykreślonej z punktu O^n prostopadłe do rzutni π_a . Osiami tego układu $O[x, y, z]$ są wówczas proste $x = OS_x$, $y = OS_y$, $z = OS_z$, a rzutniami płaszczyzny $\pi_1 = OS_1$, $\pi_2 = OS_2$ i $\pi_3 = OS_3$.

Oznaczmy przez ξ , η i ζ kąty nachylenia osi x , y , wzgl. z do rzutni aksonometrycznej π_a . Celem wyznaczenia prawdziwej wielkości kąta ζ , jaki oś z zawiera z rzutnią π_a , poprowadźmy przez oś z płaszczyznę $\gamma \perp \pi_a$. Ponieważ płaszczyzna $\gamma = zz^n$ określona jest prostymi



Rys. 222.

z i z^n , przeto kąt ζ równy jest kątowi $\sphericalangle zz^n$, zawartemu pomiędzy osią z i osią aksonometryczną z^n . Skoro płaszczyznę aksonometrycznie-rzucającą $\gamma = zz^n$ obrócimy dokoła osi obrotu z^n i położymy na rzutnię π_a , to wówczas punkt O^o (rys. 222) jest kładem punktu O , prosta $z^o = O^o S_z$ jest kładem osi z , a kąt $\zeta = \sphericalangle z^o z^n$ jest prawdziwą wielkością kąta nachylenia osi z do rzutni π_a . W podobny sposób wyznaczyć możemy (por. ust. 60, rys. 168)

dwa pozostałe kąty ξ i η , t. zn. kąty nachylenia osi x i osi y do rzutni aksonometrycznej π_a .

Zajmiemy się teraz zbadaniem zależności, jakie zachodzą pomiędzy kątami ξ , η i ζ . W tym celu wykreślmy (rys. 222) z punktu O^n odci-

nek $\overline{O^n C^o}$ prostopadły do boku $\overline{O^o 1}$ czyli równoległy do boku $z^o = \overline{O^o S_z}$. Jeżeli trójkąt $(S_z 1 O^o)$ obrócimy dokoła osi z^n tak, aby po dokonanych obrocie punkt O^o zjednoczył się z początkiem układu O , to uważany trójkąt padnie na płaszczyznę $\gamma = z z^n$, a odcinek $\overline{O^n C^o}$ zajmie nowe położenie $\overline{O^n C}$, równoległe do osi $z = O S_z$. Otrzymany w ten sposób odcinek $\overline{O^n C}$ jest prostopadły do rzutni poziomej $\pi_1 = O s_1$, a ponieważ punkt C (przynależny do boku $\overline{O 1}$) leży na rzutni π_1 , przeto: odcinek $\overline{O^n C}$ określa odległość środka aksonometrycznego O^n od rzutni poziomej π_1 . Z prostokątnego trójkąta $(O^o O^n C^o)$ wynika relacja $\overline{O^n C^o} = \overline{O^n O^o} \cdot \sin \zeta$, a ponieważ $\overline{O^n C^o} = \overline{O^n C}$ i $\overline{O^n O^o} = \overline{O^n O}$, przeto: $\overline{O^n C} = \overline{O^n O} \cdot \sin \zeta$.

Z punktu O^n (rys. 223) wykreślmy odcinki $\overline{O^n C} \perp \pi_1$, $\overline{O^n B} \perp \pi_2$ i $\overline{O^n A} \perp \pi_3$, to owe odcinki wyrażają odpowiednio odległości środka aksonometrycznego O^n od trzech rzutni: poziomej π_1 , pionowej π_2 i bocznej π_3 . Dla kąta ζ , pod jakim oś z nachylną jest do rzutni aksonometrycznej π_a , uzyskaliśmy relację $\overline{O^n C} = \overline{O^n O} \cdot \sin \zeta$. Zupełnie analogicznie dla dwóch dalszych kątów η i ξ , t. zn. kątów nachylenia osi y i osi x do rzutni π_a , otrzymamy związki następujące: $\overline{O^n B} = \overline{O^n O} \cdot \sin \eta$ i $\overline{O^n A} = \overline{O^n O} \cdot \sin \xi$. Skoro na rys. 223 wykreślmy odcinki $\overline{OC} \perp \overline{O^n C}$ i $\overline{CD} \parallel \overline{O^n B}$, to z trójkątów prostokątnych (ODC) i $(OC O^n)$ wynikają zależności:

$$\overline{OC}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{CD}^2, \quad \overline{O^n O}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{O^n C}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{O^n C}^2.$$

Ponieważ $\overline{OD} = \overline{O^n A}$, $\overline{CD} = \overline{O^n B}$, przeto:

$$\overline{O^n O}^2 = \overline{O^n A}^2 + \overline{O^n B}^2 + \overline{O^n C}^2 = \overline{O^n O}^2 \cdot \sin^2 \xi + \overline{O^n O}^2 \cdot \sin^2 \eta + \overline{O^n O}^2 \cdot \sin^2 \zeta = \overline{O^n O}^2 \cdot (\sin^2 \xi + \sin^2 \eta + \sin^2 \zeta)$$

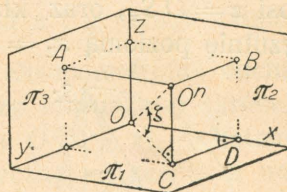
lub: $1 = \sin^2 \xi + \sin^2 \eta + \sin^2 \zeta = (1 - \cos^2 \xi) + (1 - \cos^2 \eta) + (1 - \cos^2 \zeta)$ czyli ostatecznie otrzymaliśmy zależność:

$$\cos^2 \xi + \cos^2 \eta + \cos^2 \zeta = 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

występującą pomiędzy kątami nachylenia trzech osi x , y i z układu $O[x, y, z]$ do rzutni aksonometrycznej π_a .

Weźmy pod uwagę (rys. 222) trójkąt prostokątny $(O^n O^o S_z)$, w którym jedną przyprostokątnią $\overline{O^n O^o}$ jest odległość początku O od środka aksonometrycznego O^n , a drugą przyprostokątnią $\overline{O^n S_z}$ jest odległość środka aksonometrycznego O^n od śladu aksonometrycznego S_z osi z . Dla odcinka $\overline{O^n S_z}$ otrzymamy zależność:

$$\overline{O^n S_z} = \overline{O^n O^o} \cdot \cotg \zeta.$$



Rys. 223.

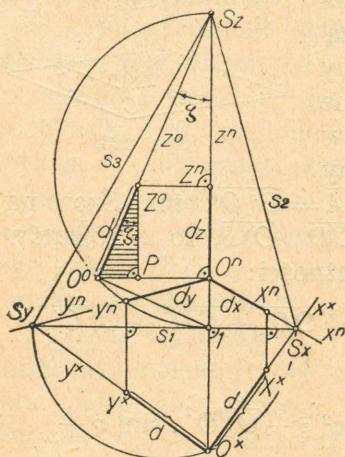
Podobnie otrzymamy relacje:

$$\overline{O^n S_y} = \overline{O^n O^o} \cdot \cotg \eta$$

$$\overline{O^n S_x} = \overline{O^n O^o} \cdot \cotg \xi$$

wyrażające odległości środka aksonometrycznego O^n od śladów aksonometrycznych S_y i S_x dwóch dalszych osi y i x układu $O[x, y, z]$.

86. Własności stosunków skróceń aksonometrycznych dla trzech osi x, y i z . Liczby stosunkowe. Dla trójkąta śladów aksonometrycznych ($S_x S_y S_z$) wyznaczmy na rys. 224 osie aksonometryczne x^n, y^n, z^n i środek aksonometryczny O^n . Następnie wykonajmy kład z^o osi $z = OS_z$, oraz kład x^x i y^x osi x i y na płaszczyznę π_a , obracając rzutnię poziomą $\pi_1 = OS_1$ dokoła osi s_1 . Skoro na osiach x, y, z układu $O[x, y, z]$ odmierzymy od środka O trzy odcinki równej długości $\overline{OX} = \overline{OY} = \overline{OZ} = d$, to ich kłady schodzą się z odcinkami $\overline{O^x X^x} = \overline{O^y Y^y} = \overline{O^z Z^z} = d$, odmierzonemi odpowiednio na prostych x^x, y^y i z^z . Kreśląc z punktów X^x i Y^y proste prostopadłe do śladu s_1 , a z punktu Z^z prostopadłą do z^n , otrzymamy na osiach aksonometrycznych punkty X^n, Y^n i Z^n , które są aksonometrijami elementów X, Y i Z . Odcinki $d_x = \overline{O^n X^n}$, $d_y = \overline{O^n Y^n}$ i $d_z = \overline{O^n Z^n}$ są oczywiście rzutami aksonometrycznymi uważanych odcinków $d = \overline{OX} = \overline{OY} = \overline{OZ}$. W aksonometrii prostokątnej zachodzą nierówności



Rys. 224.

$$d_x < d \quad d_y < d \quad d_z < d$$

gdyż rzut prostokątny odcinka, który nie jest ani równoległy ani też prostopadły do przyjętej rzutni, jest mniejszy od uważanego odcinka.

Dla odcinka $d = \overline{OZ}$ jego rzut aksonometryczny $d_z = \overline{O^n Z^n}$ uległ pewnemu skróceniu, który zależny jest od kąta nachylenia ξ osi z do rzutni π_a . W istocie bowiem z trójkąta prostokątnego ($O^o Z^o P$), w którym (rys. 224) przyprostokątnia $Z^o P$ jest równoległą do osi z^n , wynika zależność:

$$\frac{\overline{O^o P}}{\overline{O^o Z^o}} = \cos \xi \quad \text{lub} \quad \frac{d_z}{d} = \cos \xi.$$

Dla odcinków $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \dots$ różnej długości, odmierzonych na osi $z = OS_z$ układu $O[x, y, z]$, ich aksonometrie prostokątne nie-

chaj będą odcinkami $\overline{A^n B^n}$, $\overline{B^n C^n}$, $\overline{C^n D^n}$, ... Z ust. 9 wynika bezpośrednio, że

$$\frac{\overline{A^n B^n}}{AB} = \frac{\overline{B^n C^n}}{BC} = \frac{\overline{C^n D^n}}{CD} = \dots = \frac{d_z}{d} = \cos \xi$$

czyli: stosunek długości rzutu aksonometrycznego pewnego odcinka, odmierzonego na osi z , do długości owego odcinka jest liczbą stałą, która zależy jedynie od kąta nachylenia ξ . Stosunek $\frac{d_z}{d}$ nazywać będziemy *stosunkiem skrócenia aksonometrycznego dla osi z* .

Zupełnie w ten sam sposób ustalić możemy stosunki skróceń aksonometrycznych $\frac{d_x}{d}$ i $\frac{d_y}{d}$ dla dwóch pozostałych osi x i y układu odniesienia $O[x, y, z]$, przy czym d_x i d_y (rys. 224) są aksonometrijami odcinków d , odmierzonych na osiach x i y . Pomiędzy stosunkami skróceń aksonometrycznych dla trzech osi x, y, z układu $O[x, y, z]$, a kątami nachylenia ξ, η, ζ tych osi do rzutni aksonometrycznej π_a zachodzą następujące związki:

$$\frac{d_x}{d} = \cos \xi \quad \frac{d_y}{d} = \cos \eta \quad \frac{d_z}{d} = \cos \zeta \quad (2)$$

Z zależności (1), otrzymanej w ust. 85, wynika bezpośrednio relacja:

$$\left(\frac{d_x}{d}\right)^2 + \left(\frac{d_y}{d}\right)^2 + \left(\frac{d_z}{d}\right)^2 = 2 \quad (3)$$

pozwalająca nam wypowiedzieć następujące

Twierdzenie: W aksonometrii prostokątnej suma kwadratów stosunków skróceń aksonometrycznych dla trzech osi x, y i z równa się dwa.

W rozważaniach naszych przyjęliśmy taką rzutnię aksonometryczną π_a , która nie jest ani prostopadłą ani też równoległą do żadnej osi układu $O[x, y, z]$. Dla kątów ξ, η i ζ , pod jakimi owa rzutnia π_a nachylona jest do osi x, y i z , występują zatem zależności

$$0^\circ < \xi < 90^\circ \quad 0^\circ < \eta < 90^\circ \quad 0^\circ < \zeta < 90^\circ \quad . . . (4)$$

Dla kąta nachylenia ζ mamy tedy:

$$0 < \cos \zeta < 1 \quad \text{lub} \quad 0 < \frac{d_z}{d} < 1, \quad \left(\frac{d_z}{d}\right)^2 < 1,$$

a ponieważ

$$\left(\frac{d_x}{d}\right)^2 + \left(\frac{d_y}{d}\right)^2 = 2 - \left(\frac{d_z}{d}\right)^2,$$

przeto

$$\left(\frac{d_x}{d}\right)^2 + \left(\frac{d_y}{d}\right)^2 > 1 \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{d_x}{d}\right)^2 + \left(\frac{d_y}{d}\right)^2 > \left(\frac{d_z}{d}\right)^2.$$

Podobne zależności otrzymamy również i dla kątów ξ i η . A zatem wypisać możemy następujące nierówności:

$$\begin{array}{lll} O < \frac{d_x}{d} < 1 & \left(\frac{d_x}{d}\right)^2 + \left(\frac{d_y}{d}\right)^2 > 1 & \left(\frac{d_x}{d}\right)^2 + \left(\frac{d_y}{d}\right)^2 > \left(\frac{d_z}{d}\right)^2 \\ O < \frac{d_y}{d} < 1 & \left(\frac{d_y}{d}\right)^2 + \left(\frac{d_z}{d}\right)^2 > 1 & \left(\frac{d_y}{d}\right)^2 + \left(\frac{d_z}{d}\right)^2 > \left(\frac{d_x}{d}\right)^2 \\ O < \frac{d_z}{d} < 1 & \left(\frac{d_z}{d}\right)^2 + \left(\frac{d_x}{d}\right)^2 > 1 & \left(\frac{d_z}{d}\right)^2 + \left(\frac{d_x}{d}\right)^2 > \left(\frac{d_y}{d}\right)^2 \end{array} \quad (5)$$

Wykazaliśmy tedy prawdziwość następującego

Twierdzenia: W aksonetrii prostokątnej suma kwadratów dwóch stosunków skróceń aksonometrycznych dla każdych dwóch osi układu $O[x, y, z]$ jest większą od jeden, a tem samem większą od kwadratu pozostałego trzeciego stosunku.

Oznaczmy przez λ , μ i ν wartości stosunków skróceń aksonometrycznych, to

$$\frac{d_x}{d} = \lambda, \frac{d_y}{d} = \mu, \frac{d_z}{d} = \nu \quad \text{lub} \quad \cos \xi = \lambda, \cos \eta = \mu, \cos \zeta = \nu \quad (6)$$

przyczem λ , μ i ν są liczbami niemianowanemi. Skoro we formułach (3) i (5) zamiast stosunków skróceń aksonometrycznych podstawimy wartości λ , μ , ν tych stosunków, to otrzymamy:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 2 \quad (3_1)$$

$$\begin{array}{lll} O < \lambda < 1 & \lambda^2 + \mu^2 > 1 & \lambda^2 + \mu^2 > \nu^2 \\ O < \mu < 1 & \mu^2 + \nu^2 > 1 & \mu^2 + \nu^2 > \lambda^2 \\ O < \nu < 1 & \nu^2 + \lambda^2 > 1 & \nu^2 + \lambda^2 > \mu^2 \end{array} \quad (5_1)$$

Liczby niemianowane λ , μ i ν pomnóżmy przez dowolną liczbę niemianowaną e i połączmy:

$$\lambda e = l \quad \mu e = m \quad \nu e = n \quad (7)$$

to otrzymane w ten sposób wielkości l , m , n są również liczbami niemianowanemi. Liczby l , m i n , proporcjonalne do wartości λ , μ i ν trzech stosunków skróceń aksonometrycznych dla osi układu $O[x, y, z]$, nazywamy *liczbami stosunkowemi*.

Ze związków (3₁) i (5₁), po podstawieniu wartości $\lambda = \frac{l}{e}$, $\mu = \frac{m}{e}$ i $\nu = \frac{n}{e}$, otrzymamy zależności:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 2e^2 \quad (3_2)$$

$$\begin{array}{lll} O < l < e & l^2 + m^2 > e^2 & l^2 + m^2 > n^2 \\ O < m < e & m^2 + n^2 > e^2 & m^2 + n^2 > l^2 \\ O < n < e & n^2 + l^2 > e^2 & n^2 + l^2 > m^2 \end{array} \quad (5_2)$$

W aksonometrii prostokątnej bardzo często nie jest nam wcale potrzebna znajomość poszczególnych wartości λ , μ i ν stosunków skróceń aksonometrycznych $\frac{d_x}{d}$, $\frac{d_y}{d}$ i $\frac{d_z}{d}$. Celem rozwiązania zagadnień konstrukcyjnych wystarczy bowiem, skoro (por. ust. 88) podany jest stosunek wartości λ , μ i ν , wyrażony zapomocą stosunku trzech liczb stosunkowych l , m i n . Z formuł (7) wynika wówczas zależność

$$\lambda : \mu : \nu = l : m : n \quad \dots \dots \dots (7_1)$$

87. Trójkąt skróceń aksonometrycznych. Niechaj dany będzie na rys. 225 ostrokatny trójkąt śladów aksonometrycznych ($S_x S_y S_z$), osie x^n , y^n i z^n , oraz środek O^n . Na średnicy $\overline{S_x S_y}$ zakresłmy koło k_1 o środku C_1 , to owe koło przejść musi przez punkty $2 = s_2 y^n$ i $3 = s_3 x^n$, będące wierzchołkami kątów prostych: $\sphericalangle S_x 2 S_y = \sphericalangle S_x 3 S_y = 90^\circ$. Zupełnie podobnie koła k_2 i k_3 — o środkach C_2 , C_3 i o średnicach $\overline{S_x S_z}$, $\overline{S_y S_z}$ — przejść muszą przez punkty 1 i 3 , wzgl. 1 i 2 . Na łukach $\widehat{S_x 2}$, $\widehat{S_x 1}$, wzgl. $\widehat{21}$ kół k_1 , k_2 i k_3 wspierają się równe sobie kąty obwodowe:

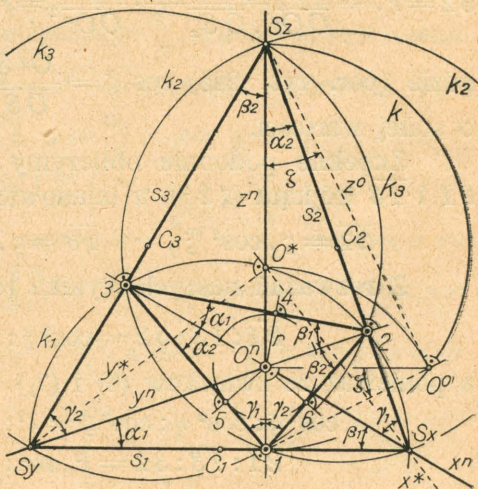
$$\begin{aligned} \sphericalangle S_x 3 2 &= \sphericalangle S_x S_y 2 = \sphericalangle a_1 && \text{dla koła } k_1 \\ \sphericalangle S_x 3 1 &= \sphericalangle S_x S_z 1 = \sphericalangle a_2 && \text{„ „ } k_2 \\ \sphericalangle 2 S_y 1 &= \sphericalangle 2 S_z 1 = \sphericalangle a_1 = \sphericalangle a_2 && \text{„ „ } k_3 \end{aligned}$$

Zupełnie podobnie wykazać możemy równość kątów: $\sphericalangle \beta_1 = \sphericalangle \beta_2$ i $\sphericalangle \gamma_1 = \sphericalangle \gamma_2$, a temsamem dowieść, że: osie aksonometryczne x^n , y^n i z^n (por. rys. 225) są symetralnemi kątów wewnętrznych trójkąta (123), a środek aksonometryczny O^n jest środkiem koła wpisanego w ów trójkąt. Jeżeli przez $r = \overline{O^n 4}$ oznaczmy promień tego koła, to z podobieństwa trójkątów ($3 O^n 2$) i ($S_y O^n S_x$) wynika:

$$\overline{32} : r = \overline{S_y S_x} : \overline{O^n 1} \text{ lub } \overline{32} = r \frac{\overline{S_y S_x}}{\overline{O^n 1}}.$$

Wykonajmy kład O^o , obracając początek układu $O [x, y, z]$ dokoła osi obrotu z^n , to z podobieństwa trójkątów ($O^o O^n 1$) i ($S_z O^n O^o$) wynikają związki:

$$\begin{aligned} \overline{O^o 1} : \overline{O^o O^n} &= \overline{O^o S_z} : \overline{O^n S_z} \quad \text{oraz} \quad \overline{O^n 1} : \overline{O^o 1} = \overline{O^o O^n} : \overline{O^o S_x} \\ \text{lub} \\ \overline{O^o 1} &= \frac{\overline{O^o O^n} \cdot \overline{O^n S_z}}{\overline{O^n S_z}}, \quad \overline{O^n 1} + \frac{\overline{O^o 1} \cdot \overline{O^o O^n}}{\overline{O^o S_z}} = \frac{\overline{O^o O^n}^2 \cdot \overline{O^n S_z}}{\overline{O^o S_z} \cdot \overline{O^n S_z}} = \frac{\overline{O^o O^n}^2}{\overline{O^n S_z}}. \end{aligned}$$



Rys. 225.

88. Konstrukcje podstawowe. Korzystając z rozważań trzech ostatnich ustępów, przystąpić możemy do rozwiązania następujących zadań.

Zadanie 1: Dany jest trójkąt śladów aksonometrycznych ($S_x S_y S_z$); należy wyznaczyć stosunki skróceń aksonometrycznych dla trzech osi układu $O [x, y, z]$.

Rozwiązanie: Wiadomo nam, że pomiędzy żądanymi stosunkami a kątami ξ , η i ζ zachodzi relacja (2), a mianowicie: $\frac{d_x}{d} = \cos \xi$, $\frac{d_y}{d} = \cos \eta$, $\frac{d_z}{d} = \cos \zeta$. W sposób podany na rys. 222 (por. też rys. 230), skonstruujemy najpierw kąty ξ , η i ζ , a następnie stosunki skróceń $\frac{d_x}{d}$, $\frac{d_y}{d}$ i $\frac{d_z}{d}$.

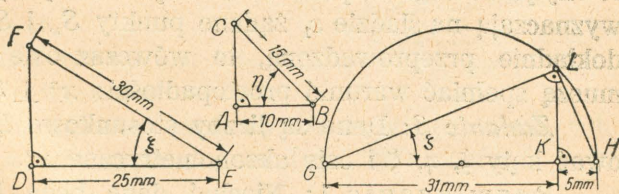
Zadanie 2: Dane są wartości dwóch stosunków skróceń aksonometrycznych dla dwóch osi układu $O [x, y, z]$. Należy skonstruować osie aksonometryczne x^n , y^n i z^n .

Rozwiązanie: Niechaj dane będą np. wartości λ i μ stosunków skróceń aksonometrycznych $\frac{d_x}{d}$ i $\frac{d_y}{d}$ dla osi x i y . Z nierówności (5₁) wynika, że wartości λ i μ tych stosunków spełniać muszą następujące warunki: $0 < \lambda < 1$, $0 < \mu < 1$, $\lambda^2 + \mu^2 > 1$. Skoro przez ν oznaczymy wartość stosunku skrócenia aksonometrycznego $\frac{d_z}{d}$ dla osi z , to z równania (3₁) otrzymamy wartość $\nu = \sqrt{2 - \lambda^2 - \mu^2}$. Znając wartości λ , μ , ν i korzystając z relacji: $\lambda = \frac{d_x}{d} = \cos \xi$, $\mu = \frac{d_y}{d} = \cos \eta$, $\nu = \frac{d_z}{d} = \cos \zeta$, możemy teraz skonstruować kąty ξ , η i ζ .

Jako przykład konkretny przyjmijmy wartości $\lambda = \frac{5}{6}$ i $\mu = \frac{2}{3}$, spełniające warunki: $0 < \frac{5}{6} < 1$, $0 < \frac{2}{3} < 1$, $\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 > 1$. Dla ν otrzymamy wówczas wartość $\nu = \sqrt{2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{31}{36}}$. Skoro $\cos \xi = \frac{5}{6}$, a $\cos \eta = \frac{2}{3}$, to kąty ξ i η otrzymamy (rys. 226) z trójkątów prostokątnych (ABC) i (DEF), dla których zachodzą relacje:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{10 \text{ mm}}{15 \text{ mm}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ i } \frac{DE}{EF} = \frac{25 \text{ mm}}{30 \text{ mm}} = \frac{5}{6}$$



Rys. 226.

Celem skonstruowania kąta ζ ,

którego $\cos \zeta = \sqrt{\frac{31}{36}}$, odmierzymy (w przyjętych jednostkach długości) odcinki $\overline{GK} = 31 \text{ mm}$ i $\overline{GH} = 36 \text{ mm}$, a następnie wyznaczmy punkt L , przecięcia się prostej $KL \perp GH$

z półkolem, zakreślonym na średnicy $\overline{GH}$. Z relacji $\overline{GL} : \overline{GK} = \overline{GH} : \overline{GL}$ wynika

$$\overline{GL}^2 = \overline{GK} \cdot \overline{GH} \quad \text{czyli} \quad \left(\frac{\overline{GL}}{\overline{GH}} \right)^2 = \frac{\overline{GK}}{\overline{GH}} = \frac{31 \text{ mm}}{36 \text{ mm}} \quad \text{lub} \quad \frac{\overline{GL}}{\overline{GH}} = \sqrt{\frac{31}{36}}.$$

Ponieważ jednak $\cos \zeta = \sqrt{\frac{31}{36}}$, przeto dla trójkąta prostokątnego (GHL) zachodzi związek

$$\frac{\overline{GL}}{\overline{GH}} = \cos \zeta, \quad \text{zatem} \quad \sphericalangle LGH = \sphericalangle \zeta.$$

Mając prawdziwe wielkości kątów ξ , η i ζ , wyznaczyć możemy osie aksonometryczne x^n , y^n , z^n i trójkąt śladów aksonometrycznych $(S_x S_y S_z)$. Przez dowolny punkt O^n (rys. 227), który uważać będziemy za środek aksonometryczny, wykreślimy dwie proste prostopadłe $O^n O^o \perp z^n$. Przez O^o poprowadzmy takie proste $O^o T$, $O^o U$ i $O^o S_z$, które nachylone są do promienia z^n pod kątami ξ , η , względnie ζ . Skoro punkt O^o uważać będziemy za kład na rzutnię π_a (pł. rysunku) środka O układu $O[x, y, z]$, to z relacji:

$\overline{O^n S_z} = \overline{O^n O^o} \cdot \cotg \zeta$ wynika (por. ust. 85), że S_z jest śladem aksonometrycznym osi z . Prosta $O^o S_z = z^o$ jest zatem kładem osi z , a prosta $O^o T \perp z^o$ przecina się z osią z^n w takim punkcie 1 , przez który przechodzi (por. rys. 222) bok s_1 trójkąta śladów aksonometrycznych.

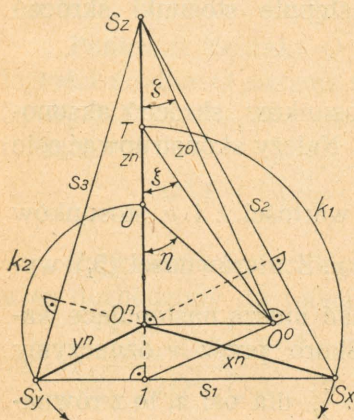
Na prostej $s_1 \perp z^n$ leżeć muszą ślady aksonometryczne S_x i S_z dwóch dalszych osi x i y , przyczem (ust. 85) spełnione muszą być relacje:

$$\overline{O^n S_x} = \overline{O^n O^o} \cdot \cotg \xi \quad \overline{O^n S_y} = \overline{O^n O^o} \cdot \cotg \eta.$$

Dla trójkątów prostokątnych $(O^n O^o T)$ i $(O^n O^o U)$ mamy $\overline{O^n T} = \overline{O^n O^o} \cdot \cotg \xi$ i $\overline{O^n U} = \overline{O^n O^o} \cdot \cotg \eta$, przeto odcinek $\overline{O^n T} = \overline{O^n S_x}$ wyraża nam odległość środka aksonometrycznego O^n od śladu S_x , a odcinek $\overline{O^n U} = \overline{O^n S_y}$ równy jest odległości punktów O^n i S_y . Koła k_1 i k_2 , zakreślone ze środka O^n , wyznaczają na śladzie s_1 żądane punkty S_x i S_y . O ile konstrukcja jest dokładnie przeprowadzoną, to wówczas osie $x^n = O^n S_x$ i $y^n = O^n S_y$ muszą spełniać warunki prostopadłości: $x^n \perp S_y S_z$ i $y^n \perp S_x S_z$.

Zadanie 3: Dane są liczby stosunkowe l , m i n . Należy skonstruować kąty ξ , η , ζ i osie aksonometryczne x^n , y^n i z^n .

Rozwiązanie 1: Niechaj dane będą liczby stosunkowe $l=9$, $m=5$, $n=10$, przyczem owe liczby niemianowane muszą być tak dobrane, aby spełniały [por. (5₂)] nierówności: $l^2 + m^2 > n^2$, $m^2 + n^2 > l^2$ i $n^2 + l^2 > m^2$. W zadaniu naszym wcale nie znamy wartości λ , μ i ν trzech stosunków skróceń aksonometrycznych, podany jest tylko sto-



Rys. 227.

sunek tych trzech wartości λ , μ i ν , a mianowicie $\lambda:\mu:\nu=9:5:10$. Celem wyznaczenia kątów ξ , η i ζ , obliczymy z równania (3₂) najpierw wartość $e = \sqrt{\frac{l^2 + m^2 + n^2}{2}}$ a następnie — korzystając ze związków (6) i (7) — wielkości kątów z równań:

$$\cos \xi = \lambda = \frac{l}{e} = \sqrt{\frac{2 l^2}{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \cos \eta = \mu = \frac{m}{e} = \sqrt{\frac{2 m^2}{l^2 + m^2 + n^2}},$$

$$\cos \zeta = \nu = \frac{n}{e} = \sqrt{\frac{2 n^2}{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Powyższe obliczenie arytmetyczne zastąpić możemy następującą konstrukcją. Narysujmy trójkąt prostokątny (ABC), którego (rys. 228) przyprostokątnymi — w przyjętych jednostkach długości l — są odcinki $\overline{AB} = l_l = 9_l$ i $\overline{AC} = m_l = 5_l$. Odłóżmy następnie odcinek $\overline{BD} = n_l = 10_l$ na prostej prostopadłej do przeciwprostokątnej $\overline{CB}$ i wyznaczmy trójkąt prostokątny równoramienny (CDE) o przeciwprostokątnej $\overline{CD}$. Z przeprowadzonej konstrukcji wynika, że:

$$\overline{CB} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{l^2 + m^2}_l, \quad \overline{CD} = \sqrt{\overline{CB}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}_l,$$

$$\overline{CS} = \overline{SD} = \frac{1}{2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}_l, \quad \overline{ED} = \sqrt{\overline{SD}^2 + \overline{SE}^2} = \sqrt{\frac{l^2 + m^2 + n^2}{2}}_l = e_l.$$

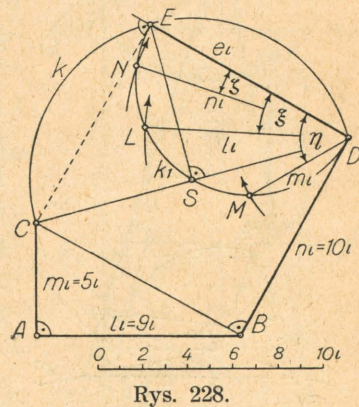
Na średnicy $\overline{ED}$ zakresłmy koło k_1 i narysujmy cięciwy $\overline{DL} = l_l = \overline{AB}$, $\overline{DM} = m_l = \overline{AC}$ i $\overline{DN} = n_l = \overline{BD}$. Konstrukcja ta da się przeprowadzić, gdyż — wedle relacji (5₂) — odcinek $\overline{ED} = e_l$ jest większy od odcinków $\overline{AB} = l_l$, $\overline{AC} = m_l$ i $\overline{BD} = n_l$. Z trójkąta prostokątnego (EDL), o przeciwprostokątnej $\overline{ED}$, oraz równań (6) i (7) wynika, że:

$$\frac{\overline{DL}}{\overline{ED}} = \frac{l_l}{e_l} = \frac{l}{e} = \lambda = \cos \xi.$$

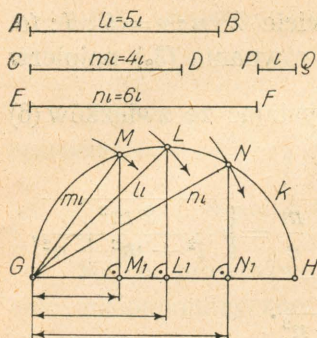
Wnosimy stąd, że $\sphericalangle LDE$ równy jest kątowi ξ nachylenia osi x do rzutni aksonometrycznej π_a . Podobnie wykazać możemy, że kąty nachylenia η i ζ osi y i osi z do rzutni π_a równe są kątom (rys. 228) $\sphericalangle MDE = \sphericalangle \eta$ i $\sphericalangle NDE = \sphericalangle \zeta$.

Znając kąty ξ , η i ζ , wyznaczyć możemy osie aksonometryczne x^n , y^n i z^n w sposób, omówiony w zadaniu poprzednim.

Rozwiązanie 2: Skoro dane są liczby stosunkowe $l=5$, $m=4$ i $n=6$ — spełniające warunki $l^2 + m^2 > n^2$, $m^2 + n^2 > l^2$ i $n^2 + l^2 > m^2$ —



Rys. 228.



Rys. 229.

to korzystając z własności trójkąta skrótów aksonometrycznych, wyznaczyć możemy najpierw osie x^n , y^n i z^n , a następnie dopiero kąty ξ , η , ζ . W tym celu weźmy (rys. 229) pod uwagę trzy odcinki $\overline{AB} = l_t = 5l$, $\overline{CD} = m_t = 4l$ i $\overline{EF} = n_t = 6l$, przyczem niechaj odcinek $\overline{PQ}$ przedstawia nam jednostkę długości l . Na dowolnym odcinku $\overline{GH}$, który jest dłuższy od trzech poprzednio przyjętych odcinków, zakresłmy półkole k , narysujmy trzy cięciwy $\overline{GL} = l_t = \overline{AB}$, $\overline{GM} = m_t = \overline{CD}$, $\overline{GN} = n_t = \overline{EF}$, oraz odcinki $\overline{LL_1}$, $\overline{MM_1}$ i $\overline{NN_1}$ prostopadłe do boku $\overline{GH}$. Dla trójkątów prostokątnych (GHL) , (GHM) i (GHN) mamy związki:

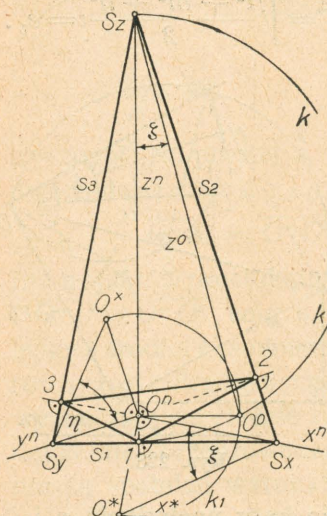
$$\overline{GL}^2 = \overline{GH} \cdot \overline{GL_1} \quad \overline{GM}^2 = \overline{GH} \cdot \overline{GM_1} \quad \overline{GN}^2 = \overline{GH} \cdot \overline{GN_1}$$

$$\text{lub } \overline{GL}^2 : \overline{GM}^2 : \overline{GN}^2 = \overline{GL_1} : \overline{GM_1} : \overline{GN_1}$$

$$\text{czyli } (l_t)^2 : (m_t)^2 : (n_t)^2 = l^2 : m^2 : n^2 = \overline{GL_1} : \overline{GM_1} : \overline{GN_1}.$$

Skoro uwzględnimy relację (8₁) z ust. 87, a mianowicie $l^2 : m^2 : n^2 = 21 : 13 : 32$, to wówczas otrzymamy zależność:

$$\overline{21} : \overline{13} : \overline{32} = \overline{GL_1} : \overline{GM_1} : \overline{GN_1}.$$



Rys. 230.

Wnosimy stąd, że odcinki $\overline{GL_1}$, $\overline{GM_1}$ i $\overline{GN_1}$ (rys. 229) są proporcjonalne do boków $\overline{21}$, $\overline{13}$ i $\overline{32}$ trójkąta skrótów aksonometrycznych (123) lub też wprost równe bokom tego trójkąta. Na rys. 230 skonstruowaliśmy trójkąt skrótów aksonometrycznych (123) o bokach $\overline{21} = \overline{GL_1}$, $\overline{13} = \overline{GM_1}$ i $\overline{32} = \overline{GN_1}$. Wyznaczenie tego trójkąta jest zawsze możliwe, gdyż zachodzą — jak to z relacji (5₂) wynika — następujące nierówności:

$$\overline{GL_1} + \overline{GM_1} > \overline{GN_1}, \quad \overline{GM_1} + \overline{GN_1} > \overline{GL_1},$$

$$\overline{GN_1} + \overline{GL_1} > \overline{GM_1}.$$

Wkreślając symetralne kątów wewnętrznych trójkąta skrótów aksonometrycznych (123), uzyskujemy osie aksonometryczne x^n , y^n i z^n .

Narysowanie trójkąta śladów aksonometrycznych ($S_x S_y S_z$) i wyznaczenie kątów ξ , η , ζ nie następuje już żadnych trudności.

89. Aksonometria prostokątna jako metoda pośrednia. Na rysunku 231 niechaj dane będą rzuty prostokątne (poziomy i pionowy) pewnego zespołu geometrycznego, złożonego z dwóch graniastosłupów ($ABCD, EFGH$) i ($1234, 5678$), oraz ostrosłupa ściętego ($1234, EFGH$), którego wierzchołkiem jest punkt W (W', W''). Zajmiemy się teraz omówieniem sposobów konstrukcyjnego wyznaczenia rzutu aksonometrycznego uważanego zespołu geometrycznego.

Zadanie 1: Wyznaczyć aksonometrię prostokątną zespołu geometrycznego, przedstawionego na rys. 231, jeżeli dane są liczby stosunkowe $l=5$, $m=4$ i $n=6$.

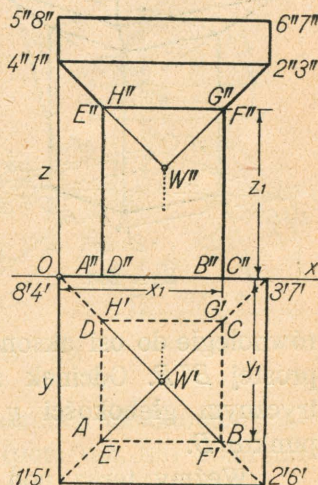
Rozwiązanie 1: Dla powyższych liczb stosunkowych skonstruowaliśmy na rys. 230 osie aksonometryczne x'' , y'' , z'' i kąty nachylenia ξ , η , ζ . Osie aksonometryczne przenieśliśmy na rys. 233, a kąty ξ , η i ζ umieściliśmy na rys. 232.

Chcąc wyznaczyć rzut aksonometryczny przyjętego na rys. 231 zespołu geometrycznego, musimy skonstruować aksonometrię poszczególnych wierzchołków $A, B, \dots$ tego zespołu. Weźmy np. pod uwagę punkt B , leżący na rzutni poziomej π_1 . Odcinek $OB'' = x_1$ (rys. 231) jest „szerokością”, a odcinek $\overline{BB''} = y_1$ jest „głębokością” punktu B . Aby uzyskać aksonometrię B'' punktu B , należy skonstruować rzuty aksonometryczne odcinków x_1 i y_1 . Dla odcinka $x_1 = \overline{OB''}$, leżącego na osi x układu $O[x, y, z]$, jego rzut aksonometryczny $x_1'' = \overline{O''B''}$ ulega pewnemu skróceniu, które zależy od kąta ξ (nachylenia osi x do rzutni aksonometrycznej π_a). Z ust. 86 wiadomo nam, że stosunek skrócenia aksonometrycznego dla osi x wyraża się wzorem $\frac{x_1''}{x} = \frac{O''B''}{OB} = \cos \xi$. Skoro

zatem na jednym z ramion kąta ξ odłożymy (rys. 232) odcinek $\overline{PT} = \overline{OB''} = x_1$ i przez otrzymany punkt T poprowadzimy prostą $\overline{TT_0}$ prostopadłą do drugiego ramienia tego kąta ξ , to wówczas z trójkąta prostokątnego (PTT_0) wynika zależność $\cos \xi = \frac{\overline{PT_0}}{\overline{PT}} = \frac{x_1''}{x_1}$. Otrzymany w ten

sposób odcinek $x_1'' = \overline{PT_0}$ wyraża nam długość rzutu aksonometrycznego odcinka $x_1 = \overline{OB''}$.

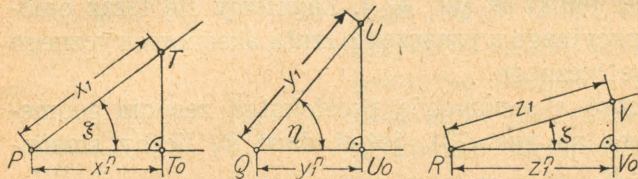
Dla odcinka $y_1 = \overline{BB''}$ (rys. 231) wyznaczmy w podobny sposób długość jego rzutu aksonometrycznego $y_1'' = \overline{B''B''}$. Ponieważ odcinek $y_1 = \overline{BB''}$ jest równoległy do osi y układu $O[x, y, z]$, przeto rzut aksonometryczny tego odcinka ulega skróceniu, które zależy



Rys. 231.

od kąta η nachylenia osi y do rzutni π_a . Z relacji $\frac{y_1^n}{y} = \frac{\overline{B^n B''}}{\overline{BB''}} = \cos \eta$

wynika następująca konstrukcja: Na jednym ramieniu kąta η (rys. 232) odłożmy odcinek $\overline{QU} = y_1 = \overline{BB''}$ i poprowadźmy odcinek $\overline{UU_o}$ prostopadły do drugiego ramienia tego kąta. Otrzy-



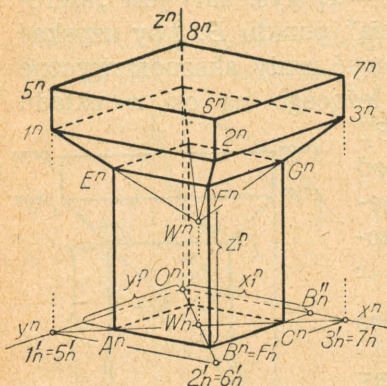
Rys. 232.

miany w ten sposób odcinek $\overline{QU_o} = y_1^n$ wyraża nam długość rzutu aksonometrycznego odcinka $y_1 = \overline{BB''}$.

Szerokość $x_1 = \overline{OB''}$

i głębokość $y_1 = \overline{BB''}$ nazywamy współrzędnymi uważanego punktu B . Odcinki zaś $x_1^n = \overline{PT_o}$ i $y_1^n = \overline{QU_o}$, wyznaczone w powyżej omówiony sposób na rys. 232, nazywać będziemy współrzędnymi aksonometrycznymi punktu B . Skoro dane są współrzędne x_1 i y_1 punktu B , to położenie tego punktu B na rzutni poziomej π_1 jest dokładnie usta-

lone, w odniesieniu do przyjętego układu $O[x, y, z]$. Znajomość „współrzędnych aksonometrycznych” x_1^n i y_1^n pozwoli nam w sposób bardzo łatwy skonstruować rzut aksonometryczny B^n owego punktu B . Skoro na osi x^n (por. rys. 233) odmierzymy od środka aksonometrycznego O^n odcinek $\overline{O^n B''_n} = x_1^n = \overline{PT_o}$, to otrzymany punkt B''_n jest oczywiście obrazem aksonometrycznym punktu B'' , leżącego (por. rys. 231) na osi x . Ponieważ współrzędna $y_1 = \overline{B''B}$, t. zn. jego głębokość, jest równoległą do osi y , przeto prosta $B''_n B''_n$, wykreślona (na rys. 233) z punktu B''_n



Rys. 233.

równoległą do osi aksonometrycznej y^n , jest obrazem aksonometrycznym prostej $B''B$. Odcinek zaś $\overline{B''_n B''_n} = y_1^n = \overline{OU_o}$ jest rzutem aksonometrycznym głębokości $y_1 = \overline{B''B}$, a punkt B''_n jest aksonometrią danego punktu B .

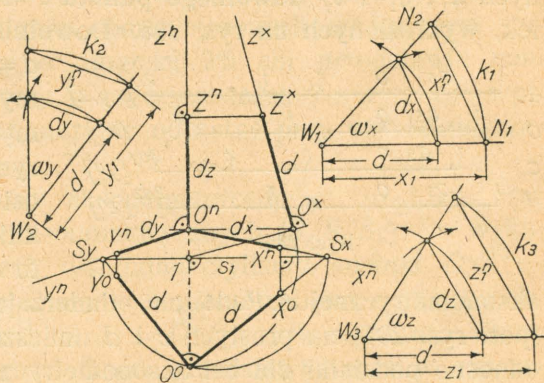
Weźmy teraz pod uwagę punkt (F', F'') , którego współrzędnymi (rys. 231) są: szerokość $x_1 = \overline{OB''}$, głębokość $y_1 = \overline{B''F'}$ i wysokość $z_1 = \overline{B''F''}$. Dla współrzędnych x_1 i y_1 skonstruowaliśmy na rys. 232 poprzednio już długości współrzędnych aksonometrycznych $x_1^n = \overline{PT_o}$ i $y_1^n = \overline{QU_o}$. Aby otrzymać trzecią współrzędną aksonometryczną z_1^n , odłożymy na ramieniu kąta ξ odcinek $\overline{RV} = z_1 = \overline{B''F''}$ i, za pośrednictwem prostej $\overline{VV_o}$ prostopadłej do drugiego ramienia kąta ξ , wyznaczmy odcinek

$z_1^n = \overline{RV}_o$. Ponieważ wysokość $z_1 = \overline{B''F''}$ punktu $F(F', F'')$ jest równoległą do osi z układu $O[x, y, z]$, przeto jej rzut aksonometryczny będzie odcinkiem równoległym do osi aksonometrycznej z^n . Jeżeli tedy na rys. 233 przez punkt $F'_n = B^n$ wykreślimy prostą równoległą do osi z^n i odmierzymy na tej prostej odcinek $\overline{F'_n F''} = z_1^n = \overline{RV}_o$, to otrzymamy wówczas aksonometrię F^n punktu F . Dla punktu $F(F', F'')$ o współrzędnych x_1, y_1 i z_1 , wyznaczyliśmy jego obraz aksonometryczny F^n , używając do pomocy trzech współrzędnych aksonometrycznych x_1^n, y_1^n i z_1^n .

W podobny sposób, korzystając z „podziałek kątowych” ξ, η i ζ , umieszczonych na rys. 232, skonstruować możemy aksonometrię $A^n, C^n, D^n, E^n, G^n, 1^n, 2^n, \dots, 8^n$ pozostałych wierzchołków uważanego zespołu geometrycznego. O ile konstrukcja jest dokładnie przeprowadzoną, to na przekątnej $\overline{I'_n 3'_n}$ równoległoboku $(I'_n 2'_n 3'_n O^n)$ leżeć muszą punkty A^n, C^n i W^n . Podobnie przez punkt W^n , który jest aksonometrią wierzchołka $W(W', W'')$ ostrosłupa, przejść muszą proste $1^n E^n, 3^n G^n, \dots$

Rozwiązanie 2: Używanie podziałek kątowych, podanych na rys. 232, jest dosyć uciążliwe. Ze względów praktycznych chętniej stosujemy zazwyczaj inne podziałki kątowe, które uzyskamy w sposób następujący. Na rys. 234 obierzmy jeszcze raz osie aksonometryczne x^n, y^n i z^n , odpowiadające warunkom naszego zadania (porównaj rys. 233).

Wkreślimy bok $s_1 = S_x S_y$ trójkąta śladów aksonometrycznych, wykonajmy kład rzutni poziomej $\pi_1 = O s_1$, otrzymując klady $x^o = O^o S_x$ i $y^o = O^o S_y$ osi x i y , a następnie wyznaczmy kład z^o osi z . Skoro dowolny odcinek d odłożymy na osiach x^o, y^o i z^o jako odcinki $\overline{O^o X^o} = \overline{O^o Y^o} = \overline{O^o Z^o} = d$ i wyznaczmy rzuty $\overline{O^n X^n} = d_x,$



Rys. 234.

$\overline{O^n Y^n} = d_y$ i $\overline{O^n Z^n} = d_z$, to wówczas stosunki skróceń aksonometrycznych dla trzech osi układu $O[x, y, z]$ wyrazimy (por. ust. 86) wzorami $\frac{d_x}{d} = \cos \xi, \frac{d_y}{d} = \cos \eta, \frac{d_z}{d} = \cos \zeta$. Przy pomocy odcinków d i d_x, d i d_y , wzgl. d i d_z skonstruujemy kąty ω_x, ω_y i ω_z w sposób, uwidoczniony na rys. 234.

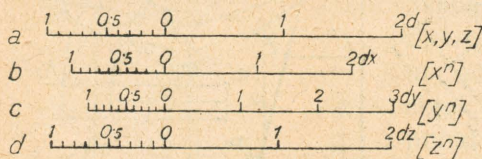
Z otrzymanych w ten sposób podziałek kątowych korzystać będziemy przy wyznaczaniu współrzędnych aksonometrycznych punktu $F(F', F'')$, jeżeli dane są (rys. 231) jego współrzędne $x_1 = \overline{OB''}, y_1 = \overline{B''F''}$

i $z_1 = \overline{B''F''}$. Zakreślmy koło k_1 , którego środkiem jest wierzchołek W_1 kąta ω_x , a promieniem odcinek $x_1 = \overline{OB''}$, to wówczas koło k_1 przetnie się z ramionami kąta ω_x w punktach N_1 i N_2 . Z podobieństwa trójkątów wynika relacja

$$\frac{d_x}{d} = \frac{\overline{N_1 N_2}}{x_1}, \text{ a że } \frac{d_x}{d} = \cos \xi = \frac{x_1^n}{x_1}, \text{ więc } \frac{\overline{N_1 N_2}}{x_1} = \frac{x_1^n}{x_1}$$

czyli innymi słowy: odcinek $\overline{N_1 N_2} = x_1^n$ jest spórzędną aksonometryczną dla punktu F . Podobnie, za pośrednictwem podziałek kątowych ω_y i ω_z , otrzymamy dwie dalsze spórzędne aksonometryczne y_1^n i z_1^n dla uważanego punktu F . W tym celu wystarczy na rys. 234 zakreślić koła k_2 i k_3 o promieniach $y_1 = \overline{B''F'}$, $z_1 = \overline{B''F''}$ i o środkach schodzących się z wierzchołkami W_2 , W_3 kątów ω_y i ω_z . Uzyskane punkty przecięcia się tych kół z ramionami kątów ω_y i ω_z ograniczają odcinki y_1^n i z_1^n , będące szukanymi spórzędnymi aksonometrycznymi punktu F (F' , F''). Z łatwością zauważymy, że stosowanie podziałek kątowych ω_x , ω_y i ω_z jest o wiele korzystniejsze, niż używanie podziałek kątowych ξ , η i ζ , umieszczonych na rys. 232.

Rozwiązanie 3: Do wyznaczenia spórzędnych aksonometrycznych x_1^n , y_1^n i z_1^n dowolnego punktu F (F' , F'') użyć możemy też podziałek, wykreślonych na rys. 235. Dowolnie przyjęty na rys. 234 odcinek



Rys. 235.

$d = \overline{O^o X^o} = \overline{O^o Y^o} = \overline{O^o Z^o}$ uważamy za jednostkę długości i odłożymy go kilka razy na prostej a (por. rys. 235), otrzymując podziałkę dla osi x , y i z . Na prostej b odmierzymy kilkakrotnie odcinek $d_x = \overline{O^n X^n}$, to otrzymamy podziałkę dla osi

aksonometrycznej x^n . Podobnie, odmierzając odcinki $d_y = \overline{O^n Y^n}$ i $d_z = \overline{O^n Z^n}$ (por. rys. 234) na prostych c i d umieszczonych na rys. 235, otrzymamy odnośne podziałki dla osi aksonometrycznych y^n i z^n .

Wiadomo nam, że stosunek skrócenia aksonometrycznego dla osi x wyraża się wzorem: $\cos \xi = \frac{d_x}{d} = \frac{x_1^n}{x_1}$, gdzie $x_1 = \overline{OB''}$ jest szerokością punktu F (F' , F''), a $x_1^n = \overline{O^n B''}$ jest jego spórzędną aksonometryczną (por. rys. 231 i 233). Odcinek $x_1 = \overline{OB''}$ weźmy w „rozwartość cyrkla” i, porównując go z podziałką a na rys. 235, odczytajmy jego długość, równą w naszym przypadku 1,4 jednostkom d . Z relacji $x_1 : d = x_1^n : d_x$ wynika, że długość odcinka x_1^n wynosi 1,4 jednostek d_x , którą to długość otrzymujemy wprost z podziałki b na rys. 235. Podobnie porównując odcinki $y_1 = \overline{B''F'}$ i $z_1 = \overline{B''F''}$ (rys. 231) z podziałką a na rys. 235 odczytujemy, że długości tych odcinków wynoszą $y_1 = 1,4 d$ i $z_1 = 1,45 d$;

dla współrzędnych aksonometrycznych y_1^n i z_1^n otrzymujemy odcinki $y_1^n = 1.4 d_y$ i $z_1^n = 1.45 d_z$, wyrażone (por. podziałki c i d na rys. 235) w jednostkach długości d_y , wzgl. d_z . Skoro na osi x^n (rys. 233) odmierzymy odcinek $x_1^n = 1.4 d_x$, a przez otrzymany punkt B''_n narysujemy prostą równoległą do osi y^n i odłożymy na niej odcinek $y_1^n = 1.4 d_y$, a wkońcu na prostej $F'_n F''_n \parallel z^n$ odmierzymy współrzędną $z_1^n = 1.45 d_z$, to otrzymamy aksonometrię F^n uważanego punktu $F(F', F'')$.

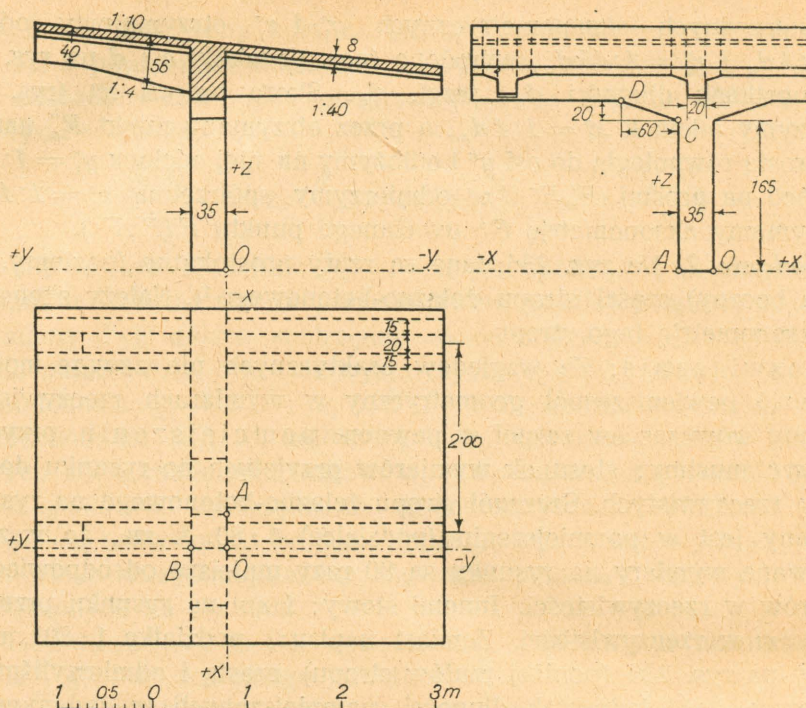
Zadanie 2: Na rys. 236 dane są rzuty prostokątne (poziomy, pionowy i boczny) części stropu żelazno-betonowego¹⁾. Należy skonstruować aksonometrię tego stropu.

Rozwiązanie: Ze względów praktycznych nie zawsze możemy narysować pewien zespół geometryczny w wymiarach rzeczywistych. Rysujemy wówczas ów zespół w pewnym pomniejszeniu, przyczem zaznaczyć musimy: stosunek wymiarów przyjętych na rysunku do wymiarów rzeczywistych. Szczegół stropu żelazno-betonowego na rys. 236 wykonany jest w pomniejszeniu (podziałce) 1:80, t. zn., że wszelkie narysowane wymiary na rysunku są 80 razy mniejsze od odpowiednich wymiarów w rzeczywistości. Innymi słowy: 1 *cm* na rysunku przedstawia 80 *cm* w rzeczywistości. Zamiast napisu: „podziałka 1:80“, umieściliśmy na rys. 236 (poniżej rzutów stropu) prostą i odmierzyliśmy na niej pewną ilość jednostek długości, pomniejszonych w żądanym stosunku. Odcinek od 0 do 2 *m* o długości 2.5 *cm* przedstawia nam 80 · 2.5 *cm* = 2 *m*, t. zn. dwa metry w rzeczywistości. Na rys. 236 wpisano niektóre wymiary, inne zaś możemy odczytać przy użyciu załączonej podziałki.

Na rys. 237 przyjęliśmy osie aksonometryczne x^n , y^n i z^n , oraz bok $s_1 = \overline{S_x S_y}$ trójkąta śladów aksonometrycznych ($S_x S_y S_z$). Po wykonaniu kładów x^o , y^o i z^o trzech osi, odmierzyliśmy odcinki $\overline{O^o X^o} = \overline{O^o Y^o} = \overline{O^o Z^o} = d$ o długości 2 *cm* i skonstruowaliśmy rzuty aksonometryczne $d_x = \overline{O^n X^n}$, $d_y = \overline{O^n Y^n}$ i $d_z = \overline{O^n Z^n}$ tych odcinków. Skoro założymy, że odcinek d o długości 2 *cm* przedstawia nam w rzeczywistości 1 metr, to rys. 237 wykonaliśmy w (podziałce) pomniejszeniu 1:50. Na prostej a wykreśliliśmy następnie podziałkę dla osi x , y i z , a na prostych b , c i d podziałki dla osi aksonometrycznych x^n , y^n , z^n , przyczem posługiwaliśmy się odcinkami $d = 2$ *cm*, $d_x = \overline{O^n X^n}$, $d_y = \overline{O^n Y^n}$ i $d_z = \overline{O^n Z^n}$.

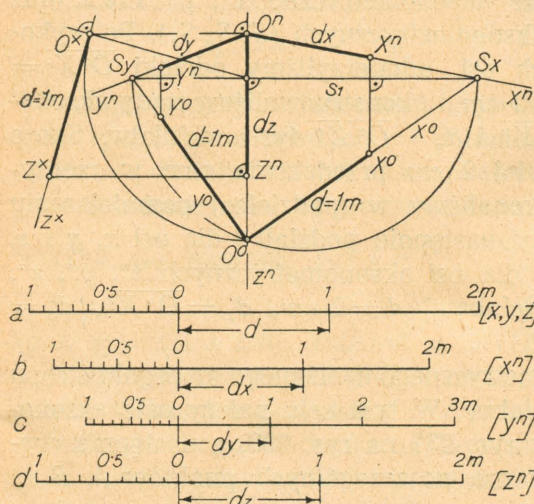
Wyznaczenie obrazu aksonometrycznego uważanego szczegółu stropu żelazno-betonowego jest bardzo łatwe. W tym celu należy osie aksonometryczne x^n , y^n i z^n przenieść z rys. 237 na rys. 238, a następnie wyznaczyć współrzędne aksonometryczne poszczególnych punktów A , B ,...

¹⁾ Temat powyższego zadania podał Prof. Dr. Adam Kuryłło.



Rys. 236.

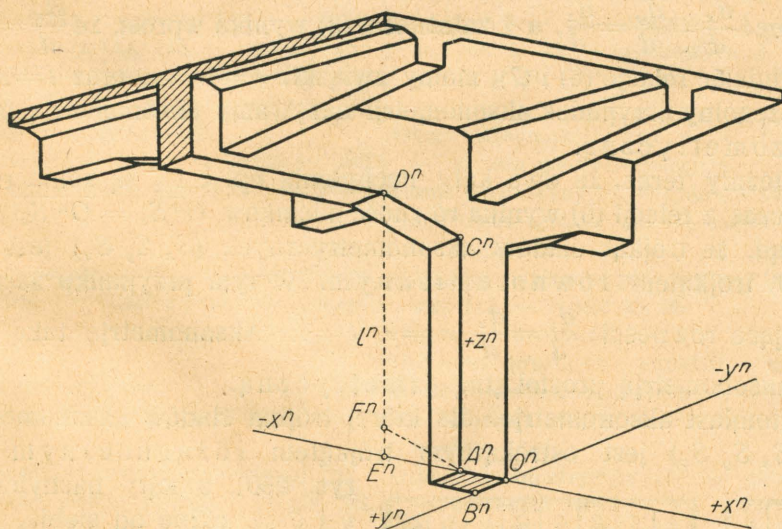
Z rys. 236 wiadomo nam, że dla punktu A jego szerokość wynosi — 35 cm, gdyż element A leży na osi $-x$ w odległości 35 cm od środka O. Obraz



Rys. 237.

aksonometryczny A^n otrzymamy, jeśli w „rozwartość cyrkuła” weźmiemy odcinek $x_1'' = = 0.35 d_x = 0.35 m$ wedle podziałki dla osi x^n , umieszczonej (por. rys. 237) na prostej b , a następnie spółrzędną aksonometryczną x_1'' odłożymy (por. rys. 238) na osi $-x^n$ jako odcinek $O^n A^n$. Dla punktu B czytamy z rys. 236, że jego głębokość $y_1 = +35 cm$. Odpowiadająca spółrzędna aksonometryczna jest odcinkiem o długości $y_1'' = 35 cm$ wedle podziałki dla osi y^n , umieszczonej na prostej c (rys. 237). Odcinek

ten weźmiemy w rozwartość cyrkla i odmierzymy od punktu O^n począwszy (rys. 238) na osi $+y^n$. Otrzymany w ten sposób punkt B^n jest aksonometrią punktu B . Dla punktu C , którego wysokość wynosi 165 cm , otrzymamy spórzędną aksonometryczną z_1^n , jeśli w rozwartość cyrkla weźmiemy (rys. 237) odcinek $y_1^n = 165\text{ cm}$ wedle podziałki dla osi z^n , umieszczonej na prostej d . Skoro odcinek ten odmierzymy na rys. 238 od punktu A^n począwszy na prostej $A^n C^n \parallel z^n$, to otrzymamy aksonometrię C^n punktu C . Na rys. 238 podana jest wreszcie konstrukcja punktu D^n , będącego aksonometrią takiego punktu D (rys. 236), którego szerokość wynosi $-(35\text{ cm} + 60\text{ cm})$, a wysokość $+(165\text{ cm} + 20\text{ cm})$. Odpowiednie spórzędne aksonometryczne x_2^n i z_2^n punktu D są odcinkami $x_2^n = 95\text{ cm}$ i $z_2^n = 185\text{ cm}$, mierzonymi oczywiście wedle podziałek dla osi x^n i z^n , umieszczonych na rys. 237. Odcinek $\overline{O^n E^n}$ na rys. 238 równa się spórzędnej x_2^n , odcinek zaś $\overline{E^n D^n} \parallel z^n$ równa się spórzędnej z_2^n . Aksonometrię D^n punktu D możemy wreszcie uzyskać w ten sposób, że skonstruujemy najpierw aksonometrię F^n pomocniczego punktu F , o wysokości 20 cm i szerokości -95 cm , a następnie wykreślimy odcinek $\overline{C^n D^n} \parallel \overline{A^n F^n}$.



Rys. 238.

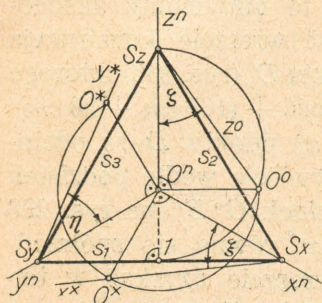
90. Rodzaje aksonometrii prostokątnej. Z rozważań ust. 85 wiadomo nam, że odległość środka aksonometrycznego O^n od wierzchołków trójkąta śladów aksonometrycznych ($S_x S_y S_z$) wyraża się zapomocą wzorów:

$$\overline{O^n S_x} = \overline{O O^n} \cdot \cotg \xi \quad \overline{O^n S_y} = \overline{O O^n} \cdot \cotg \eta \quad \overline{O^n S_z} = \overline{O O^n} \cdot \cotg \zeta \quad (9)$$

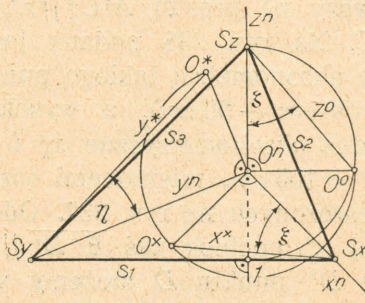
gdzie odcinek $\overline{O O^n}$ oznacza odległość środka O układu $O[x, y, z]$ od

rzutni aksonometrycznej π_a , a kąty ξ , η i ζ są kątami nachylenia osi x , y i z do rzutni π_a . Dla stałej wartości OO^n , odległości środka aksonometrycznego O^n od wierzchołków trójkąta $(S_x S_y S_z)$ zależą jedynie tylko od kątów ξ , η i ζ .

Skoro przyjmiemy wszystkie kąty sobie równe: $\xi = \eta = \zeta$, to wówczas zachodzi zależność: $\overline{O^n S_x} = \overline{O^n S_y} = \overline{O^n S_z}$, a tem samym trójkąt



Rys. 239.



Rys. 240.

śladów aksonometrycznych $(S_x S_y S_z)$ jest trójkątem równobocznym. I wzajemnie, jeżeli trójkąt $(S_x S_y S_z)$ jest równoboczny, to wówczas (por. rysunek 239) kąty nachylenia ξ , η i ζ są sobie równe. Dla

tej aksonometrii (por. ust. 86) stosunki skróceń aksonometrycznych są sobie równe: $\frac{d_x}{d} = \frac{d_y}{d} = \frac{d_z}{d}$, a z zależności (3) wynika wprost, że $\frac{d_x}{d} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Uwzględniając relacje (6) i (7), mamy związki: $\lambda = \mu = \nu$, oraz $l = m = n$. Ten szczególny przypadek aksonometrii nazywamy aksonometrią prostokątną izometryczną.

Założmy teraz, że dwa kąty nachylenia np. ξ i ζ są sobie równe, to wówczas z relacji (9) wynika równość odcinków $\overline{O^n S_x} = \overline{O^n S_z}$. Wnosimy stąd, że trójkąt śladów aksonometrycznych $(S_x S_y S_z)$ jest (por. rys. 240) trójkątem równoramiennym. W tym przypadku zachodzą następujące równości: $\frac{d_x}{d} = \frac{d_z}{d}$, $\lambda = \nu$, $l = n$. Aksonometrię taką nazywamy aksonometrią prostokątną dimetryczną.

Natomiast aksonometrię, dla której trójkąt śladów aksonometrycznych $(S_x S_y S_z)$ jest ostrokątnym trójkątem różnobocznym (por. rys. 230), a kąty nachylenia ξ , η i ζ są różne od siebie, nazywamy aksonometrią prostokątną anizometryczną.

l	2	3	4
m	1	1	1
n	2	3	4

l	5	8	9	9	17	31	49
m	4	5	5	6	6	8	10
n	6	9	10	10	18	32	50

Rys. 241.

Na rys. 241 umieszczono dwie tabelki, zawierające najczęściej używane wartości dla liczb sto-

sunkowych l , m i n . Pierwsza tabelka odnosi się do aksonometrii prostokątnej dimetrycznej, a druga do anizometrycznej.

Skorowidz alfabetyczny.

(Liczby oznaczają stronicę).

- Aksonometria** (metoda rzutów) 7, — anizometryczna 206, — dimetryczna 206, — izometryczna 206, — perspektywiczna 7, — prostokątna 7, 24, — środkowa 7.
- Aksonometria konturu wielościanu** 153, — prostej 24, 39, — prostej niewłaściwej 64, — punktu 6, 24, — punktu niewłaściwego 51, — śladów płaszczyzny 54, 65, — śladów prostej 51, — wielokąta 128, — wielościanu 152.
- Apotema ostrosłupa** 151.
- Cecha punktu** 5.
- Cień odcinka** 144, — prostej 143, — punktu 142, — rzucony 142, 145, — rzucony wielokąta 145, — rzucony wielościanu 183, — własny 145, — własny trójkąta 146, — własny wielościanu 182.
- Cienie wielokątów** 145, — wielościanów 182.
- Część oświetlona (płaszczyzny)** 145, — wielościanu 182.
- Elementy niewłaściwe** 12, 14, — układu płaskiego 133, — właściwe 14, — zasadnicze 7.
- Głębokość (punktu)** 199.
- Graniastosłup** 151, — prosty 151, — umiarkowany 151.
- Granica cienia własnego (wielościanu)** 182.
- Homologiczne elementy** 133, — proste 133, — punkty 133.
- Homologia** 163, — równoległa 133.
- Homografia** 166.
- Kąt nachylenia osi** 124, 188, — płaszczyzn 124, — prostej i płaszczyzny 123, — prostych 122, — prostych skośnych 10.
- Kierownica powierzchni ostrosłupowej** 158.
- Kierunek powinowactwa** 134, — prostej 12, — rzutów 4, 22, 24.
- Kład** 94, — płaszczyzny 94, 96, — punktu 94, — prostej 94, — wielokąta 138.
- Kolineacja ogólna** 166, — perspektywiczna 163, — środkowa 163, — układów płaskich 162, 166.
- Kontur wielościanu** 153.
- Krawędzie powierzchni ostrosłupowej** 158, — wielościanu 150.
- Liczby stosunkowe** 190, 192.
- Metoda pośrednia** 199.
- Metoda rzutów aksonometrycznych** 6, cechowanych 5, — prostokątnych 22, — równoległych 4, 20, — środkowych 3, — ukośnych 4, 20.
- Obraz aksonometryczny** 6, — punktu 3, — utworu geometrycznego 4.
- Obrót płaszczyzny** 94, — punktu 94.
- Odbudować prostą** 40, — punkt 31, 34, — rzutnie 28.
- Odległość punktu od płaszczyzny** 118, — prostej 119, — rzutni 28, 98.
- Odnosząca prosta** 30.
- Odtworzyć prostą** 40, — punkt 31, — rzutnie 28.
- Odwzorowanie geometryczne** 3, 6.
- Oś kolineacji** 163, — obrotu 93, — powinowactwa 133.
- Osie aksonometryczne** 26, — układu 6, — wzajemne 165.
- Ostrosłup** 150, — prosty 151, — umiarkowany 151.
- Pęk płaszczyzn** 66.
- Perspektywa prostej** 16, — punktu 3, 15, 16, — utworu geometrycznego 4.
- Płaszczyzna niewłaściwa** 14, — obrazu 3, — obrotu 94, — symetralna 125, 127, — tłowa 3, — widzenia 3, — właściwa 14, — zniknięcia 15.
- Płaszczyzna rzucająca** 3, 22, 25, 64, — akso-

- nometrycznie- 25, 58, — boczno- 25, 57,
 — pionowo- 25, — poziomo-rzucająca 25, 56.
 Początek układu 6.
 Podnoszenie z układu 105, 139.
 Podstawa układu płaskiego 133, — wielo-
 ścianu 150.
 Podział wielokątów 128, — wielościanów 150,
 — zadań geometrycznych 115.
 Podziały aksonometryczne 202, — kątowne 201.
 Pokrewieństwo środkowe 133.
 Położenie prostej 18, — punktu 4.
 Półosie 27.
 Półproste 27.
 Powierzchnia ostrosłupowa 157, — grania-
 stoślupowa 158.
 Powinowactwo 133, — ogólne 135, — per-
 spektywiczne 133, — środkowe 133, — ukła-
 dów płaskich 133.
 Problem prostokątności 7, 79, — równole-
 głości 7, 79.
 Promień kolineacji 163, — obrotu 94, — po-
 winowactwa 133, — rzucający 3, — widze-
 nia 3.
 Prosta graniczna 165, — niewłaściwa 13,
 — odnosząca 30, — rzucająca 3, 4, — wła-
 ściwa 13, — wzajemna 165, — zbiegu 165.
 Przekrój płaski (wielościanu) 159, 167.
 Przenikanie się wielokątów 140, — wielo-
 ścianów 173, 177, 180.
 Przesunięcie układu 36.
 Punkt niewidoczny 146, — niewłaściwy 13,
 — oświetlony 142, — w cieniu 142, — wi-
 doczny 146, — właściwy 13.
 Rodzaje aksonometrii 7, 206.
 Ruch obrotowy 93.
 Rzutnia 3, — aksonometryczna 6, 24, — bocz-
 na 6, — pionowa 5, — pozioma 5.
 Rzut aksonometryczny 6, 24, — prostokątny
 24, — prostej 24, — punktu 24, — wielokąta
 128, — wielościanu 152.
 Rzut cechowany 5, — boczny 6, — kąta pro-
 stego 22, — prostokątny 5, 22, — poziomy
 5, — pionowy 5, — równoległy 4, 20, — uko-
 śny 4, 20, — środkowy 3, 4, 16.
 Ściana wielościanu 150, — oświetlona 182,
 powierzchni ostrosłupowej 158, — w cie-
 niu własnym 182.
 Ślad aksonometryczny 77, — prostej 25, 77,
 — płaszczyzny 25, 77, — boczny 25, 48
 — pionowy 25, 48, — poziomy 25, 48,
 — tłowy 18, — zbiegu 18.
 Spółrzędne aksonometryczne punktu 200.
 Środek aksonometryczny 26, — geometrycz-
 ny (wielokąta) 128, — kolineacji 163,
 — obrotu 94, — powinowactwa 133, — rzu-
 tów 3, — układu 6.
 Stosunki skróceń aksonometrycznych 190.
 Szerokość (punktu) 199.
 Symbol 7, 8, — $A (A^n, A'_n)$ 31, — (a) 133,
 — $a (h_a^n, v_a^n)$ 55, — $l (l^n, l'_n)$ 40, — $(a b)$
 158.
 Tło 1.
 Trójkąt skróceń aksonometrycznych 194,
 — śladów aksonometrycznych 25.
 Tworząca powierzchni ostrosłupowej 158,
 — graniastoslupowej 158.
 Układ odniesienia 6, — płaski 133.
 Układy płaskie kolineacyjne 166, — ogólnie
 powinowate 135, — perspektywicznie-ko-
 lineacyjne 163, — perspektywicznie-powi-
 nowate 134, — środkowo-kolineacyjne 163,
 — środkowo-powinowate 134.
 Ustawienie płaszczyzny 12.
 Utwór geometryczny 3, — sztywny 93.
 Wartości liczb stosunkowych 192, — sto-
 sunków skróceń aksonometrycznych 192.
 Wielokąt płaski 128, — przenikania 174,
 — przestrzenny 174, — skośny 128, — umia-
 rowy 128, — wklęsły 128, — wypukły 128.
 Wielościan 150, — umiary 150, — wklę-
 sły 150, — wypukły 150.
 Wysokość (punktu) 200, — graniastoslupa 151,
 — ostrosłupa 151.
 Wyznaczenie kolineacji 164, — powinowac-
 twa 135.
 Zadania miarowe 115, — opisowe 115.
 Zarys wielościanu 153.
 Zespół 156.
 Zjednoczony 4.
 Zmiana rzutni 93.
 Znamień punktu 5.
 Zrekonstruować położenie (punktu, prostej)
 31, 40, 46.
 Związki miarowe 188.

KSIĄŻNICA-ATLAS

LWÓW, CZARNIECKIEGO 12
WARSZAWA, NOWY ŚWIAT 59

POLECHA:

S. P. Timoszenko:

KURS WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

Przełożył z IV wydania i uzupełnił M. T. HUBER, inż., prof. politechniki lwowskiej

Str. 363 z 415 rys. w tekście.

„Tak autor, jak i tłumacz, należą do specjalistów, znanych z prac oryginalnych także w piśmiennictwie zachodnio-europejskim, co starczy za najlepsze zalecenie książki, odznaczającej się nadto przystępnością wykładu przy wysokim poziomie naukowym i nader obfitej treści“.

(N. R. w „Przeglądzie wydawnictw Książnicy Polskiej T. N. S. W.“, nr. 3 i 4 z r. 1923, str. 28).

„Szczegół wdzięczność winniśmy prof. dr. M. T. Huberowi za przyswojenie polskiej literaturze technicznej dzieła, wyróżniającego się pod każdym względem korzystnie nawet wśród poczytnych podręczników literatury światowej z zakresu wytrzymałości materiałów“.

(Inż. dr. Z. Fuchs w „Mechaniku“, nr. 7 z r. 1922).

CENA 10—ZŁ.

Dr. K. Weigel:

RACHUNEK WYRÓWNAWCZY

WEDŁUG METODY NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW.

Str. XII + 336.

„Przed niedawnym czasem otrzymałem od Panów to wspaniałe dzieło... Zwrócę na to poważne wydawnictwo uwagę naszego Tow. technicznego w Pradze“.

(Prof. dr. inż. A. Tichy, Wyższa szkoła techniczna w Bernie, w liście z 4. X. 1923).

CENA 9—ZŁ.

Dr. M. Wolfke:

ZASADY TEORJI CIEPŁA

Str. VIII + 120 i 27 rysunków w tekście.

„Autor ujął w sposób zwięzły lecz dokładny podstawy termodynamiki z jej zastosowaniami i ogólne zasady kinetycznej teorii ciepła. W podręczniku tym zostały u nas po raz pierwszy uwzględnione najnowsze wyniki badań współczesnych. W termodynamice posiłkuje się autor wynikami ostatnich badań sławnego laboratorium kriogenicznego w Lejdzie, które miał sposobność osobiście bliżej poznać.“

Również została uwzględniona teoria kwantów w jej zastosowaniu do zjawisk cieplnych.

Całość daje zatem ścisły obraz współczesnych poglądów na tę dziedzinę zjawisk fizycznych.

Dlatego też książka ta jest przeznaczona nie tylko dla słuchaczy wyższych zakładów naukowych, ale również dla tych wszystkich, którzy pragną już posiadane wiadomości w tych dziedzinach pogłębić i uzupełnić“.

(„Ekspress Lubelski“ z dnia 9. IX. 1924).

CENA 3-60 ZŁ.

KSIĄŻNICA-ATLAS

LWÓW, CZARNIECKIEGO 12
WARSZAWA, NOWY ŚWIAT 59

POLECA:

W. Borawski:

PROJEKTOWANIE BUDYNKÓW MIESZKALNYCH

Str. VIII + 154 z 1 kol. ilustr. i 82 rys.

„Dzieło to wzbudziło zainteresowanie w szerokich kołach naszego społeczeństwa: odpowiada ono bowiem potrzebie czasu... Dlatego też inicjatywę autora należy powitać z uznaniem. Praca jego jest bardzo sumienna i widać staranne wyczerpanie tematu w ramach możliwie skromnych. Dobór przykładów jest dobry. Tak, jak praca jest podana, widać, że w ogólnych zarysach jest doskonale ujęta, i należy tylko życzyć, by była zapowiedzią szeregu następnych prac, dalej pogłębiających dane zagadnienia”.

(*A. Gravier w „Przeglądzie Technicznym”, nr. 31 z r. 1924.*)

CENA 4⁵⁰ ZŁ.

H. Mierzejewski:

METROLOGJA TECHNICZNA

Str. VI + 206 z licz. ilustr. i rys.

Treść: Przedmowa. — Pasowanie wałków i długości. — Pasowanie gwintów. — Narzędzia miernicze. — Specjalne metody miernicze. — Wiadomości z optyki geometrycznej. — Maszyny miernicze i podziałkowe. — Metody interferencyjne. — Wyznaczenie metra w długości fali świetlnej. — Bibliografia. — Skorowidz.

CENA 9[—] ZŁ.

W. Mozer:

BUDOWA PAROWOZÓW

TOM I. CZĘŚĆ OGÓLNA

Str. VI + 185 z licz. rys. i ilustr.

„Jeśli z radością witamy każde nowo wydane dzieło techniczne, to tem silniej skandujemy swe zadowolenie, gdy dane dzieło dotyczy zakresu w piśmiennictwie słabo lub zupełnie nie opracowanego, i gdy ten dział potraktowany jest z europejskiego punktu widzenia i opracowania. Takim jest nasze zadowolenie z książki W. Mozera”.

(*„Kurier Lwowski”, nr. 125 z r. 1924.*)

CENA 9[—] ZŁ.

BIBLIOTEKA
GŁÓWNA



AKADEMII
GÓRNICZO
HUTNICZEJ

14349

*Nie
wypożycza się*
NZB 4404