



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

DZIEDZINA NAUK SCISŁYCH I PRZYRODNICZYCH

DYSCYPLINA MATEMATYKA

ROZPRAWA DOKTORSKA

Lokalna nieregularność grafów, multigrafów i digrafów

Autor: Igor Grzelec

Promotor rozprawy: prof. dr hab. Mariusz Woźniak

Praca wykonana: Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica
w Krakowie, Wydział Matematyki Stosowanej

Kraków, 2025

Spis treści

Podziękowania	3
Streszczenie	4
Abstract	5
1 Wstęp	6
1.1 Podstawowe definicje	7
1.2 Uwagi historyczne	8
2 Lokalna nieregularność 2-multigrafów	15
2.1 Proste klasy grafów	17
2.2 Grafy dwudzielne	19
2.3 Kaktusy	23
2.4 Grafy regularne	40
2.5 Grafy rozdzielne	41
2.6 Grafy planarne	42
2.7 Grafy subkubiczne	44
2.8 Górne ograniczenie dla lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego 2-multigrafów	58
2.9 Uwagi	60
3 Hipotezy (2,2)	62
3.1 Kaktusy	65
3.2 Grafy subkubiczne zewnętrznie planarne	78
3.3 Grafy o maksymalnym średnim stopniu mniejszym niż $\frac{9}{4}$	87
3.4 Grafy Halina	93
3.5 Grafy planarne o talii co najmniej 16	97
3.6 Potęgi cykli	98
3.7 Grafy k -dzielne pełne	99
3.8 Uwagi	101

4	Nowy problem dotyczący lokalnej nieregularności grafów	103
4.1	Ścieżki, cykle, drzewa i specjalne kaktusy	104
4.2	Grafy pełne, grafy k -dzielne pełne i grafy rozdzielne	114
4.3	Potęgi cykli	120
4.3.1	Terminologia i ogólna idea	120
4.3.2	Dowód lematu 68	125
4.3.3	Dowód lematu 69	127
4.3.4	Dowód lematu 70	131
4.4	Dalsze uwagi	134
5	Lokalna nieregularność digrafów	136
5.1	Słaba lokalna nieregularność	139
5.1.1	Digrafy o k -dzielnym szkieletcie	140
5.1.2	Klasy digrafów bez ograniczenia przez stałą na liczbę chromatyczną szkieletu	144
5.2	Rozkładanie digrafów na silnie lokalnie nieregularne poddigrafy	148
5.2.1	Proste klasy digrafów i ogólne ograniczenie górne silnie lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego digrafów	149
5.2.2	Orientacje kaktusów	152
5.3	Uwagi	162
	Bibliografia	164

Podziękowania

Pragnę bardzo podziękować mojemu promotorowi prof. dr hab. Mariuszowi Woźniakowi za poświęcony mi czas i okazaną pomoc, bez której ta praca nie mogłaby powstać. Dziękuję za przedstawienie mi nowej tematyki, wspólne badania dotyczące nie tylko zagadnień omówionych w tej rozprawie, kierowanie moim rozwojem oraz pomoc przy organizacji mojej pracy naukowej, dzięki czemu mogłem nawiązać owocną współpracę z grupami badawczymi z Francji oraz Słowacji, uczestniczyć w sporej liczbie konferencji i zdobywać cenne doświadczenie.

Dziękuję kolegom z Ústav matematiky, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach: prof. Tomášowi Madarasowi, dr Alfrédowi Onderko i prof. Romanowi Sotákowi za udane wspólne badania, wsparcie finansowe i opiekę w trakcie moich pobytów w instytucie. Ponadto dziękuję kolegom z LaBRI (Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique): prof. Olivierowi Baudonowi, prof. Julienowi Bensmailowi, Morganowi Boivinowi i Clarze Marcille za owocne badania, pomoc finansową i opiekę w trakcie mojego pobytu we Francji.

Z całego serca dziękuję moim Rodzicom za bycie przy mnie i wsparcie w trakcie całego mojego doktoratu.

Streszczenie

W pracy zajmujemy się zagadnieniami związanymi z lokalną nieregularnością grafów. Mówimy, że graf jest lokalnie nieregularny, jeśli każde dwa sąsiednie wierzchołki mają różne stopnie. Praca dotyczy zarówno hipotez dla których znane są już częściowe rezultaty, jak na przykład hipotezy o rozkładzie grafu na trzy podgrafy lokalnie nieregularne, która jest analogiem hipotezy 1-2-3, czy też hipotezy (2,2) mówiącej, że graf spójny o co najmniej czterech wierzchołkach można rozłożyć na dwa grafy, w których możemy rozróżnić sąsiednie wierzchołki sumami za pomocą co najwyżej dwóch kolorów, jak i nowych postawionych niedawno w pracach mojego współautorstwa. W pierwszej części stawiamy hipotezę o rozkładzie multigrafu powstałego z grafu G przez podwojenie wszystkich krawędzi G na dwa multigrafy lokalnie nieregularne i dowodzimy ją dla wybranych klas grafów. Ponadto zajmujemy się ograniczeniami górnymi na liczbę lokalnie nieregularnych multigrafów występujących w rozkładzie dowolnego takiego multigrafu i wybranych klas multigrafów. W następnej części dowodzimy wzmocnioną wersję hipotezy (2,2), dla wybranych klas grafów. W kolejnej części pracy formujemy nowy problem dotyczący lokalnej nieregularności grafów związany z hipotezą (2,2) i hipotezą o rozkładzie grafu na trzy podgrafy lokalnie nieregularne, jak również prezentujemy jego częściowe rozwiązanie. W ostatniej części rozważamy dwa nowe sposoby definiowania lokalnie nieregularnego digrafu, formujemy dwie hipotezy dotyczące rozkładów digrafów na digrafy lokalnie nieregularne i dowodzimy szereg rezultatów dla poparcia tych hipotez.

Słowa kluczowe

lokalna nieregularność grafów, lokalnie nieregularne kolorowanie, ograniczenia lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego, lokalna nieregularność 2-multigrafów, hipoteza (2,2), lokalna nieregularność digrafów

Abstract

In this dissertation we investigate concepts related to the local irregularity of graphs. We say that a graph is locally irregular if every two adjacent vertices have different degrees. The dissertation deals not only with conjectures for which partial results are already known, such as the conjecture of decomposition of a graph into three locally irregular subgraphs, which is an analogue of the 1-2-3 Conjecture, and also the (2,2)-Conjecture stating that a connected graph with at least four vertices can be decomposed into two graphs in which we can distinguish neighboring vertices by sums using at most two colors, but also with new conjectures which was recently stated in papers of my co-authorship. In the first part, we establish a conjecture about the decomposition of a multigraph obtained from a graph G by doubling all edges of G into two locally irregular multigraphs and prove it for selected graph classes. Furthermore, we deal with upper bounds on the number of locally irregular multigraphs occurring in the decomposition of any such multigraph and selected classes of multigraphs. In the next part, we prove the strengthened version of the (2,2)-Conjecture, for selected classes of graphs. In the subsequent part of the dissertation, we present a new problem about the local irregularity of graphs related to the (2,2)-Conjecture and the conjecture of decomposition of a graph into three locally irregular subgraphs, as well as present its partial solution. In the last part, we consider two new methods of defining a locally irregular digraph, formulate two conjectures about the decomposition of digraphs into locally irregular digraphs and prove a number of results which support these conjectures.

Keywords

local irregularity of graphs, locally irregular coloring, bounds for locally irregular chromatic index, local irregularity of 2-multigraphs, (2,2)-Conjecture, local irregularity of digraphs

Rozdział 1

Wstęp

Celem niniejszej rozprawy doktorskiej jest rozważenie zagadnień związanych z problemem lokalnej nieregularności grafów, multigrafów i digrafów. Te stosunkowo nowe problemy wiążą się z problemami kolorowania (etykietowania) krawędzi, które rozróżniają w jakiś sposób sąsiednie wierzchołki, w szczególności słynną hipotezą 1-2-3 [39]. Inne podejścia do problemu lokalnej nieregularności między innymi dotyczą możliwości rozkładu danego grafu na grafy lokalnie nieregularne to znaczy takie, że sąsiednie wierzchołki mają różne stopnie. W pracy zajmiemy się problemami dotyczącymi rozkładu multigrafów i digrafów na lokalnie nieregularne podmultigrafy i poddigrafy. W związku z tym postawimy hipotezę dotyczącą lokalnej nieregularności 2-multigrafów (czyli multigrafów uzyskanych z grafów przez podwojenie wszystkich ich krawędzi) i dwie wersje hipotezy odnośnie lokalnej nieregularności digrafów. Ponadto zbadamy silną wersję hipotezy $(2, 2)$ postawionej w pracy [5], sformujemy nowy problem dotyczący lokalnej nieregularności grafów i przedstawimy jego częściowe rozwiązanie. Wyżej wymienione zagadnienia będziemy rozważać dla wybranych klas grafów, multigrafów i digrafów, a dodatkowo będziemy się starali wskazać górne oszacowania na liczbę lokalnie nieregularnych multigrafów czy digrafów występujących w rozkładzie multigrafu lub digrafu odpowiednio na takie podmultigrafy czy poddigrafy.

Rozprawa doktorska została opracowana w oparciu o dostępną literaturę oraz następujące publikacje i manuskrypty [13, 30, 33, 31, 35, 34] mojego współautorstwa. W dalszej części tego rozdziału przedstawiamy podstawowe pojęcia z teorii grafów (oprócz tych dotyczących digrafów, które zostaną zawarte we wstępie do ostatniego rozdziału) wykorzystywane w pozostałej części pracy oraz dokładną motywację rozważanych problemów z uwzględnieniem historii tego zagadnienia.

1.1 Podstawowe definicje

W tym podrozdziale przedstawimy podstawowe pojęcia teorii grafów, z których będziemy korzystać w dalszej części rozprawy doktorskiej. *Grafem* nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie V jest niepustym zbiorem skończonym, a E zawiera się w zbiorze wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru V . Elementy zbioru V nazywamy *wierzchołkami*, a elementy zbioru E *krawędziami*. Często dla podkreślenia jaki graf opisujemy, będziemy używać oznaczenia $V(G)$ oraz $E(G)$ odpowiednio dla zbiorów wierzchołków i krawędzi grafu G . Jeśli $e = \{u, v\} \in E(G)$, to będziemy pisać $e = uv$ i wówczas mówimy, że wierzchołki u, v są *sąsiednie*. Liczebność zbioru $V(G)$ nazywamy *rzędem*, a liczebność zbioru $E(G)$ *rozmiarem* grafu G . *Stopniem* wierzchołka v w grafie G , oznaczanym jako $d(v)$, nazywamy liczbę incydentnych krawędzi z v . Minimalny stopień wierzchołka w grafie G oznaczamy przez $\delta(G)$, a maksymalny stopień wierzchołka przez $\Delta(G)$. Jeżeli stopień wierzchołka v wynosi jeden, to v nazywamy wierzchołkiem *wiszącym* (*liściem*), natomiast jeśli wynosi zero, to v jest wierzchołkiem *izolowanym*. Krawędź zakończoną wierzchołkiem wiszącym nazywamy *krawędzią wiszącą*. Mówimy, że zbiór $\{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$ jest *sąsiedztwem* wierzchołka v .

Graf H jest *podgrafem* grafu G , jeżeli $V(H) \subseteq V(G)$ oraz $E(H) \subseteq E(G)$. Podgrafem grafu G *indukowanym* przez zbiór $S \subseteq V(G)$, oznaczanym jako $G[S]$, nazywamy graf H , jeżeli $V(H) = S$ oraz $E(H) = \{uv : u, v \in S, uv \in E(G)\}$. Mówimy, że podgraf H grafu G jest *rozpinający* graf G , jeżeli $V(H) = V(G)$. *Dopełnieniem* grafu $G = (V, E)$ nazywamy graf o zbiorze wierzchołków V , gdzie krawędź uv należy do zbioru krawędzi dopełnienia wtedy i tylko wtedy, gdy uv nie jest krawędzią G .

Izomorfizmem grafów G oraz H nazywamy bijekcję $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$, taką że $uv \in E(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$, dla $u, v \in V(G)$. Jeśli istnieje izomorfizm grafów G oraz H to mówimy, że te grafy są *izomorficzne*.

Teraz przedstawimy definicję kilku typowych klas grafów. Grafem *pełnym* nazywamy graf, w którym każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią. Graf pełny rzędu n oznaczamy przez K_n . Mówimy, że graf jest *r-regularny*, jeśli wszystkie jego wierzchołki mają stopień r . *Ścieżką* nazywamy niepusty graf $P = (V, E)$ o zbiorze wierzchołków $V = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ oraz zbiorze krawędzi $E = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{k-1}v_k\}$, gdzie wszystkie wierzchołki v_i są różne. Jeśli $P = v_0 \dots v_{k-1}$ jest ścieżką oraz $k \geq 3$, to graf $C := P + v_{k-1}v_0$ jest *cyklem*. Przez P_n oraz C_n oznaczamy odpowiednio ścieżkę i cykl o n wierzchołkach. Grafem *planarnym* nazywamy graf, który można narysować na płaszczyźnie bez przecięć czyli tak, aby żadne dwie krawędzie się nie przecinały na rysunku poza wierzchołkiem, z którym obie są incydentne.

Graf G nazywamy *spójnym*, jeśli dla dowolnych dwóch wierzchołków $u, v \in V(G)$ istnieje w grafie G ścieżka łącząca u oraz v . *Składową spójną* grafu G nazywamy maksymalny podgraf spójny grafu G . Graf G jest *k-spójny*, jeżeli $k < |G|$ oraz dla każdego $S \subseteq V(G)$ liczebności mniejszej niż k graf $G - S$ jest spójny. *Spójnością* grafu G nazywamy największą liczbę k , dla której G jest *k-spójny*. *Drzewem* nazywamy graf spójny bez cykli. *Ukorzenionym* drzewem nazywamy drzewo T z wyróżnionym wierzchołkiem r nazywanym *korzeniem*. Dla każdego wierzchołka v niebędącego korzeniem r drzewa T , *rodzicem* v nazywamy sąsiada wierzchołka v na (jedynej) ścieżce z korzenia do v w T , natomiast *synem* (*dzieckiem*) każdego innego sąsiada v .

Skojarzeniem w grafie G nazywamy dowolny zbiór krawędzi niezależnych grafu G , to znaczy takich, które nie mają wspólnych wierzchołków. Mówimy, że skojarzenie M jest *pełne*, jeśli każdy wierzchołek grafu należy do pewnej krawędzi w M . *Zbiorem niezależnym* w grafie $G = (V, E)$ nazywamy zbiór wierzchołków pomiędzy którymi nie ma żadnej krawędzi. Zbiór wierzchołków $C \subseteq V$ jest *pokryciem wierzchołkowym* grafu $G = (V, E)$, jeśli każda krawędź G ma co najmniej jeden koniec w zbiorze C . *Kliką* w grafie G nazywamy maksymalny podgraf pełny G .

Odległością pomiędzy dwoma wierzchołkami u oraz v w grafie spójnym nazywamy długość najkrótszej ścieżki pomiędzy tymi wierzchołkami. *Ekscentrycznością* wierzchołka v grafu spójnego G , oznaczaną przez $\text{ecc}(v)$, nazywamy odległość pomiędzy wierzchołkiem v i najbardziej od niego oddalonym wierzchołkiem w grafie G . Przez *promień* grafu spójnego G rozumiemy minimum spośród ekscentryczności wierzchołków grafu spójnego G . Wierzchołek grafu spójnego G nazywamy *centralnym* jeśli jego ekscentryczność jest równa promieniowi G . Krawędzią *centralną* nazywamy krawędź, której końcami są wierzchołki centralne.

Kolorowaniem (wierzchołków) grafu $G = (V, E)$ nazywamy odwzorowanie $c : V \rightarrow C$, gdzie zbiór C nazywamy zbiorem *kolorów*. Kolorowanie jest *właściwe* jeśli sąsiednie wierzchołki mają różne kolory.

Graf $G = (V, E)$ nazywamy *grafem dwudzielnym*, jeśli istnieje podział zbioru $V(G)$ na dwa zbiory niezależne. Podobnie definiujemy graf trójdzielny. Dwudzielny graf pełny oznaczamy przez $K_{p,q}$, a trójdzielny pełny przez $K_{p,q,r}$, gdzie p, q oraz r oznaczają liczebności zbiorów niezależnych. Dwudzielny graf pełny $K_{1,n}$, dla $n \geq 1$ nazywamy *gwiazdą*.

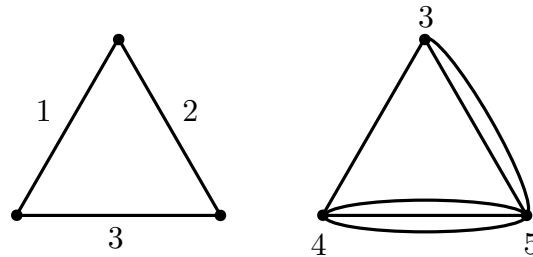
1.2 Uwagi historyczne

Zagadnienia dotyczące rozróżniania wierzchołków pojawiły się w połowie lat 80-tych najpierw w wersji globalnej to jest rozróżniania wszystkich

wierzchołków grafu. Najczęściej jako genezę wymienia się próby zdefiniowania grafu w pełni nieregularnego. Jak wiadomo, nie istnieje graf mający wszystkie stopnie różne. Ale stwierdzenie to nie jest prawdziwe dla multigrafów. Stosunkowo łatwo widać, że zamieniając krawędzie na multikrawędzie jesteśmy w stanie z prawie każdego grafu uzyskać multigraf w pełni nieregularny. Wyjątkami są grafy zawierające krawędzie izolowane lub co najmniej dwa wierzchołki izolowane.

Proces ten możemy opisać precyzyjniej w następujący sposób. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem, a f funkcją określoną na zbiorze krawędzi grafu G , $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$. Funkcję tę będziemy najczęściej nazywać *kolorowaniem* krawędzi grafu, choć w literaturze można spotkać inne nazwy jak na przykład etykietowanie, czy ważenie.

Dla wierzchołka $x \in V$ połóżmy $\sigma(x) = \sum_{x \in e} f(e)$. Dwa wierzchołki x, y są *rozdzielone* jeśli $\sigma(x) \neq \sigma(y)$. Zauważmy, że interpretując kolor krawędzi jako jej wielokrotność, **wyrażenie $\sigma(x)$ jest równe stopniowi wierzchołka x w otrzymanym multigrafie**, a multigraf ten jest w *pełni nieregularny* czyli wszystkie wierzchołki są rozdzielone (zobacz rysunek 1.1).



Rysunek 1.1: Kolorowanie grafu K_3 i odpowiadający mu multigraf.

Kolorowanie f daje także inne możliwości rozróżniania wierzchołków grafu. W istocie, definiuje ono dla każdego wierzchołka *multizbiór* kolorów obecnych na krawędziach incydentnych z danym wierzchołkiem, można więc uznać, że wierzchołki są rozdzielone jeśli odpowiednie multizbiory są różne. Trzecią naturalną możliwością jest potraktowanie multizbiorów jako zbiorów. Wszystkie te możliwości zostały zauważone i były przedmiotem rozważań od samego początku.

I tak, problem rozróżniania za pomocą zbiorów występuje po raz pierwszy w pracy Harary'ego i Plantholta [36] z 1985 roku, problem rozróżniania za pomocą sum jest przedmiotem pracy Chartranda i in. [29] z 1986 roku. Najpóźniej, bo dopiero w 1990 roku pojawił się problem rozróżniania za pomocą multizbiorów w pracy Aignera i Triescha [1].

Idea, aby rozważyć przypadek, kiedy kolorowanie f jest właściwe, pojawiła się niezależnie w dwóch miejscach. W Koszycach, w pracy magisterskiej

R. Sotáka, oraz w Memphis, w pracy doktorskiej A. Burris. Odpowiednie publikacje ukazały się z pewnym opóźnieniem (zobacz [26] i [25]).

Wiek XXI przyniósł dwa kolejne, istotne pomysły.

Pierwsza idea polegała na rozróżnianiu tylko sąsiednich (czyli połączonych) wierzchołków i po raz pierwszy wystąpiła w pracy [43] o właściwym kolorowaniu krawędzi i rozróżnianiu za pomocą zbiorów kolorów. Autorami pracy byli Liu, Zhang i Wang. Niedługo potem, Karoński, Łuczak i Thomasson przenieśli powyższą ideę na kolorowanie ogólne i rozróżnianie za pomocą sum formułując przy okazji hipotezę 1-2-3 [39] (zobacz poniżej), która wkrótce stała się bardzo popularna.

Z kolei, w pracy [3] autorzy (Bača i in.) po raz pierwszy rozważali kolorowanie totalne tzn. kolorowanie krawędzi i wierzchołków grafu oraz rozróżnianie za pomocą sum powiększonych o kolor wierzchołka. Precyzyjniej, kolorowanie jest teraz funkcją $f : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, a wyrażenie rozróżniające dla wierzchołka $x \in V$ ma postać $\sigma(x) = f(x) + \sum_{x \in e} f(e)$.

W niniejszej rozprawie doktorskiej zajmujemy się problemami związanymi z ideą rozróżniania sąsiednich wierzchołków sumami w kolorowaniu ogólnym krawędzi grafu. Zauważmy, że jeśli sąsiednie wierzchołki są rozróżnione w kolorowaniu krawędzi grafu G , to przedstawiona na początku funkcja $\sigma(x)$ definiuje właściwe kolorowanie wierzchołków G . Ponadto, gdy będziemy patrzeć na to kolorowanie krawędzi G jak na tworzenie multigrafu z grafu G przez zwielokrotnianie jego krawędzi, to otrzymany multigraf będzie miał sąsiednie wierzchołki o różnych stopniach. Taki multigraf nazywamy *lokalnie nieregularnym*. Zatem wprowadzamy parametr $\chi_\Sigma(G)$, który jest najmniejszą liczbą całkowitą k taką, że wszystkie sąsiednie wierzchołki są rozróżnione. Takie kolorowanie nazywamy *rozróżniającym sąsiednie wierzchołki sumami*. Jak wspomnieliśmy wcześniej ten problem został wprowadzony w 2004 przez Karońskiego, Łuczaka i Thomassona, którzy postawili **hipotezę 1-2-3**, mówiącą, że dla każdego grafu G niezawierającego izolowanych krawędzi mamy $\chi_\Sigma(G) \leq 3$ [39].

Słabszą wersją tego kolorowania krawędzi rozróżniającego sąsiednie wierzchołki sumami jest kolorowanie krawędzi *rozróżniające sąsiednie wierzchołki multizbiorami*. Dla każdego wierzchołka x z grafu G oznaczamy przez $M(x) := [f(e) : x \in e]$ multizbiór kolorów krawędzi incydentnych z wierzchołkiem x . W tym kolorowaniu dwa sąsiednie wierzchołki x oraz y są rozróżnione, jeśli $M(x) \neq M(y)$. Definiujemy parametr $\chi_M(G)$ jako najmniejszą liczbę całkowitą k , dla której istnieje kolorowanie grafu G rozróżniające sąsiednie wierzchołki multizbiorami.

Możemy łatwo zauważyć, że każdy graf G spełnia $\chi_M(G) \leq \chi_\Sigma(G)$, ponieważ jeśli sumy są różne, to multizbiory są także różne. Najlepszym znanym rezultatem dotyczącym kolorowania krawędzi rozróżniającego sąsiednie

wierzchołki multizbiorami jest następujące twierdzenie z 2018, które zostało udowodnione przez Vučkovića w [54].

Twierdzenie 1 ([54]). *Dla każdego grafu G nie zawierającego izolowanych krawędzi mamy $\chi_M(G) \leq 3$.* $\square$

Przez wiele lat najlepszym ogólnym znanym rezultatem dotyczącym hipotezy 1-2-3 było, że każdy graf niezawierający izolowanych krawędzi spełnia $\chi_\Sigma(G) \leq 5$ i zostało to udowodnione przez Kalkowskiego, Karońskiego i Pfendera w [38]. Pojawiło się również kilka innych wyników dotyczących tej hipotezy w związku z czym odsyłamy czytelnika do artykułu przeglądowego [50]. W ostatnich latach hipoteza była intensywnie badana i w przypadku grafów regularnych Przybyło udowodnił w [49], że każdy d -regularny graf G , spełnia $\chi_\Sigma(G) \leq 4$, i jeśli $d \geq 10^8$, to G spełnia $\chi_\Sigma(G) \leq 3$. Następnie w [41] Keusch udowodnił, że każdy graf nie zawierający izolowanych krawędzi spełnia $\chi_\Sigma(G) \leq 4$. Ostatecznie w 2024 hipoteza 1-2-3 została potwierdzona przez Keuscha, który udowodnił poniższe twierdzenie w [40].

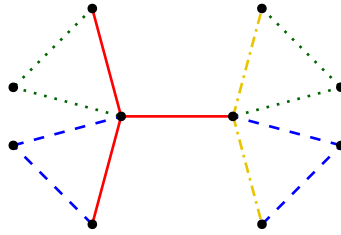
Twierdzenie 2 ([40]). *Dla każdego grafu G niezawierającego izolowanych krawędzi zachodzi $\chi_\Sigma(G) \leq 3$.* $\square$

W 2015 Baudon, Bensmail, Przybyło i Woźniak w pracy [9] zaproponowali inne podejście do zagadnienia lokalnej nieregularności grafów, które zostało zainspirowane obserwacją, że każdy lokalnie nieregularny graf G , czyli taki, w którym sąsiednie wierzchołki mają różne stopnie, spełnia $\chi_\Sigma(G) = \chi_M(G) = 1$. Oznaczamy przez $\text{lir}(G)$ najmniejszą liczbę całkowitą k taką, że istnieje rozkład G na k lokalnie nieregularnych grafów. Możemy łatwo zauważyć, że nie każdy graf ma taki rozkład. Definiujemy rodzinę $\mathfrak{T}$ rekurencyjnie w następujący sposób:

- trójkąt K_3 należy do $\mathfrak{T}$,
- jeśli G jest grafem z rodziny $\mathfrak{T}$, to dowolny graf G' uzyskany z G przez utożsamienie wierzchołka $v \in V(G)$ o stopniu dwa, który należy do trójkąta w G , z końcowym wierzchołkiem ścieżki parzystej długości lub z końcowym wierzchołkiem ścieżki nieparzystej długości takiej, że inny jej końcowy wierzchołek jest utożsamiony z wierzchołkiem nowego trójkąta, należy do $\mathfrak{T}$.

Rodzina $\mathfrak{T}'$ składa się z rodziny $\mathfrak{T}$, wszystkich ścieżek nieparzystej długości i wszystkich cykli nieparzystej długości. W [9] Baudon, Bensmail, Przybyło i Woźniak udowodnili, że jedynie grafy z rodziny $\mathfrak{T}'$ nie mają rozkładu na lokalnie nieregularne grafy.

Jeśli graf G spełnia $\text{lir}(G) \leq k$, to $\chi_M(G) \leq k$. Jest to prawdą, ponieważ w rozkładzie grafu G na k lokalnie nieregularnych grafów każde dwa sąsiednie wierzchołki w G mają różne stopnie w co najmniej jednym lokalnie nieregularnym grafie. Dlatego każde dwa sąsiednie wierzchołki w G mają multizbiory różniące się krotnością co najmniej jednego elementu. Zainspirowani tym faktem Baudon, Bensmail, Przybyło i Woźniak postawili w [9] hipotezę o lokalnej nieregularności grafów mówiącą, że każdy spójny graf $G \notin \mathfrak{T}'$ spełnia $\text{lir}(G) \leq 3$. Jednakże w 2021 Sedlar i Škrekovski udowodnili, że graf B zwany muszką (od ang. bow-tie) przedstawiony na rysunku 1.2 nie jest rozkładalny na trzy lokalnie nieregularne grafy [52] i zapytali, czy istnieją inne grafy, które nie są rozkładalne na trzy lokalnie nieregularne grafy. Co więcej w [51] Sedlar i Škrekovski potwierdzili oryginalną hipotezę o lokalnej nieregularności grafów dla kaktusów (oprócz muszki B) i sformułowali nową wersję tej hipotezy przedstawioną poniżej.



Rysunek 1.2: Muszka B i jej rozkład na cztery lokalnie nieregularne grafy.

Hipoteza 3 (*O lokalnej nieregularności grafów*, Baudon, Bensmail, Przybyło, Woźniak [9], Sedlar, Škrekovski [51]). *Każdy graf spójny $G \notin \mathfrak{T}'$ z wyjątkiem muszki B spełnia $\text{lir}(G) \leq 3$.*

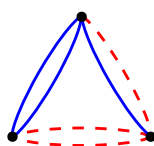
Tutaj warto wspomnieć pewne rezultaty dotyczące hipotezy 3. Została ona potwierdzona dla pewnych klas grafów między innymi: drzew [7], cykli parzystej długości [9], grafów pełnych [9], grafów dwudzielnych pełnych [9], grafów rozdzielnych [42], grafów r -regularnych gdzie $r \geq 10^7$ [9] i grafów o minimalnym stopniu co najmniej 10^{10} [47]. Ponadto wiadomo, że dla grafu spójnego $G \notin \mathfrak{T}'$ mamy: $\text{lir}(G) \leq 15$, jeśli G jest planarny [14], $\text{lir}(G) \leq 7$, jeśli G jest dwudzielny [45] i $\text{lir}(G) \leq 4$, jeśli G jest subkubiczny [45]. Na szczególną uwagę zasługuje praca [21] autorstwa Bensmaila, Merkera i Thomassena, w której zostało udowodnione poniższe twierdzenie zawierające pierwsze ograniczenie górne przez stałą lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego dla dowolnego grafu spójnego.

Twierdzenie 4 ([21]). *Każdy graf spójny $G \notin \mathfrak{T}'$ z wyjątkiem muszki B spełnia $\text{lir}(G) \leq 328$.* $\square$

Następnie to ograniczenie zostało obniżone do 220 przez Lużara, Przybyłę i Sotáka w [45].

Ponadto tematyka pracy dotyczy jeszcze jednego podejścia do problemu lokalnej nieregularności będącego połączeniem kolorowania krawędzi grafu rozróżniającego sąsiednie wierzchołki sumami i rozkładu grafu na podgrafy lokalnie nieregularne. Opiera się ono na pojęciu (l, k) -kolorowania. Niech l, k będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Mówimy, że graf G ma (l, k) -kolorowanie, jeśli istnieje rozkład grafu na co najwyżej l podgrafów takich, że w każdym z nich można rozróżnić sąsiednie wierzchołki sumami używając kolorów od 1 do k . Centralną rolę odgrywa tu **hipoteza (2,2)** postawiona przez Baudona wraz ze współautorami w [5]. Zauważmy, że używając języka (l, k) -kolorowań możemy mówić w przypadku hipotezy 1-2-3 o $(1,3)$ -kolorowaniu, a hipotezy o rozkładach o $(3,1)$ -kolorowaniu.

Jak wspomnieliśmy pojęcie (l, k) -kolorowania łączy dwa podejścia do zagadnienia: rozróżnianie przez sumy kolorów (etykiet) oraz przez rozkład na podgrafy lokalnie nieregularne w ten sposób, że najpierw dokonujemy rozkładu, a potem szukamy kolorowania dla poszczególnych składników. Ostatni krąg zagadnień omawianych w pracy dotyczy **odwrotnej kolejności**. Najpierw kolorujemy graf (zamieniamy krawędzie na multikrawędzie), a następnie tak powstały multigraf staramy się rozłożyć na lokalnie nieregularne multigrafy. Warto podkreślić, że to podejście daje nową możliwość, na przykład trójkąt nie ma $(2,2)$ -kolorowania, ale multigraf uzyskany z trójkąta przez podwojenie każdej jego krawędzi ma rozkład na dwa multigrafy lokalnie nieregularne (zobacz rysunek 1.3). Problematyka ta została wprowadzona w pracy [I. Grzelec, M. Woźniak, *On decomposing multigraphs into locally irregular submultigraphs*, Appl. Math. Comput. [35]].



Rysunek 1.3: Rozkład multigrafu uzyskanego z trójkąta przez podwojenie każdej jego krawędzi na dwa multigrafy lokalnie nieregularne.

Poniżej bardziej szczegółowo omówimy zawartość pracy.

Drugi rozdział zawiera rozważania na temat rozkładów 2-multigrafów na podmultigrafy lokalnie nieregularne, w szczególności potwierdzenie postawionej hipotezy o lokalnej nieregularności 2-multigrafów dla wybranych klas grafów, między innymi grafów dwudzielnych, kaktusów i grafów regularnych, jak również oszacowanie na liczbę lokalnie nieregularnych podmultigrafów występujących w rozkładzie dowolnego 2-multigrafu. Na zakończenie rozdziału

przedstawiamy możliwe kierunki dalszych badań dla tego zagadnienia. Ten rozdział został opracowany w oparciu o [I. Grzelec, M. Woźniak, *On decomposing multigraphs into locally irregular submultigraphs*, Appl. Math. Comput. [35]], [I. Grzelec, M. Woźniak, *Local Irregularity Conjecture for 2-multigraphs versus cacti*, Opuscula Math. [34]] i [I. Grzelec, A. Onderko, M. Woźniak, *On Local Irregularity Conjecture for 2-multigraphs*, arXiv [31]].

W trzecim rozdziale, po wstępie dotyczącym wszystkich trzech hipotez $(2, 2)$ [5] dowodzimy najsilniejszą z nich dla wybranych klas grafów. Na koniec przedstawiamy możliwe kierunki dalszych badań w tym zakresie. Te wyniki zostały zaczerpnięte z [J. Bensmail, M. Boivin, I. Grzelec, C. Marcille, *The Strong $(2, 2)$ -Conjecture for more classes of graphs*, HAL [13]].

W czwartym rozdziale prezentujemy nowy problem dotyczący lokalnej nieregularności grafów. Przedstawiamy również rozwiązanie tego problemu dla wybranych klas grafów, a przy okazji potwierdzamy hipotezę o lokalnej nieregularności grafów [7] dla dwóch następnych klas grafów. Na koniec prezentujemy uwagi odnośnie drugiej wersji tego problemu wraz z dalszymi kierunkami badań. Ten rozdział został opracowany na podstawie [I. Grzelec, T. Madaras, A. Onderko, R. Soták, *On a new problem about the local irregularity of graphs*, arXiv [30]].

Ostatni piąty rozdział zawiera wyniki dotyczące dwóch wersji hipotezy o lokalnej nieregularności digrafów, jak również ograniczenia górne na liczbę lokalnie nieregularnych digrafów występujących w rozkładzie dowolnego digrafu w zależności od wybranej definicji lokalnie nieregularnego digrafu. Te rezultaty pochodzą głównie z [I. Grzelec, A. Onderko, M. Woźniak, *Weak and strong local irregularity of digraphs*, arXiv [33]].

Rozdział 2

Lokalna nieregularność 2-multigrafów

Wszystkie wyniki tego rozdziału pochodzą z prac [I. Grzelec, M. Woźniak, *On decomposing multigraphs into locally irregular submultigraphs*, Appl. Math. Comput. [35]], [I. Grzelec, M. Woźniak, *Local Irregularity Conjecture for 2-multigraphs versus cacti*, Opuscula Math. [34]] i [I. Grzelec, A. Onderko, M. Woźniak, *On Local Irregularity Conjecture for 2-multigraphs*, arXiv [31]].

Zacznijmy od przedstawienia niezbędnej terminologii dotyczącej multigrafów. Niech G będzie grafem. Oznaczamy przez $\mathcal{M}(G)$ rodzinę wszystkich multigrafów utworzonych z G przez *zwielokrotnienie krawędzi*, czyli operację zamiany krawędzi $e = xy$, która jest zbiorem $\{x, y\}$ na skończony multizbiór $[\{x, y\}, \dots, \{x, y\}]$. Zauważmy, że nie musimy zwielokrotniać wszystkich krawędzi w G . Będziemy oznaczać przez $\hat{G}$ multigraf z rodziny $\mathcal{M}(G)$. W związku z tym możemy traktować multigraf $\hat{G} \in \mathcal{M}(G)$ jako graf G z dodatkową funkcją $\mu : E \rightarrow \{1, 2, \dots\}$, gdzie $\mu(e)$ jest krotnością krawędzi e . Będziemy również używać notacji $\mu(e) = 0$, aby wyrazić fakt, że $e \notin \hat{G}$. Będziemy oznaczać przez $\mathcal{M}^{[k]}(G)$ rodzinę wszystkich multigrafów utworzonych z G przez zwielokrotnienie krawędzi, jeśli multigrafy mają krawędzie o krotności co najwyżej k . Przez *2-multigraf* rozumiemy multigraf, w którym wszystkie krawędzie mają krotność dokładnie dwa i oznaczamy go przez 2G . Multigraf $\hat{H}$ jest *podmultigrafem* $\hat{G}$, jeśli H jest podgrafem G i dla każdej krawędzi e z H zachodzi $\mu_{\hat{H}}(e) \leq \mu_{\hat{G}}(e)$. Analogicznie, multigraf $\hat{H}$ jest *indukowanym podmultigrafem* $\hat{G}$, jeśli H jest podgrafem indukowanym G i dla każdej krawędzi e z H zachodzi, że $\mu_{\hat{H}}(e) = \mu_{\hat{G}}(e)$. Oznaczamy przez $\hat{d}(v)$ stopień wierzchołka v w multigrafie (liczbę krawędzi incydentnych z wierzchołkiem v z uwzględnieniem krotności). Mówimy, że multigrafy $\hat{G}_1$ oraz $\hat{G}_2$ tworzą *rozkład* multigrafu $\hat{G}$, jeśli dla każdej krawędzi e z grafu G mamy $\mu_{\hat{G}_1}(e) + \mu_{\hat{G}_2}(e) = \mu_{\hat{G}}(e)$.

Uwaga 5. Gdy rozważamy rozkład multigrafu, to często używamy języka kolorowań krawędzi. Kiedy rozkładamy multigraf na dwa multigrafy używamy czerwono-niebieskiego kolorowania, czyli kolorujemy krawędzie pierwszego multigrafu na czerwono, a drugiego na niebiesko. Oznaczamy przez $\hat{d}_r(v)$ oraz przez $\hat{d}_b(v)$ stopień wierzchołka v w odpowiednio czerwonym i niebieskim multigrafie.

Zanim przedstawimy naszą główną hipotezę w tym rozdziale, to podamy jeszcze kilka definicji. Przez *lokalnie nieregularne kolorowanie krawędzi* multigrafu M rozumiemy takie kolorowanie M , w którym każdy kolor indukuje lokalnie nieregularny podmultigraf M . Mówimy, że multigraf jest *lokalnie nieregularnie kolorowalny*, jeśli ma lokalnie nieregularne kolorowanie krawędzi. *Lokalnie nieregularny indeks chromatyczny* lokalnie nieregularnie kolorowanego multigrafu M , oznaczany przez $\text{lir}(M)$, jest najmniejszą liczbą kolorów potrzebnych w lokalnie nieregularnym kolorowaniu M . W tym rozdziale skupimy się na lokalnie nieregularnym kolorowaniu 2-multigrafu 2G uzyskanym z grafu G przez podwojenie każdej jego krawędzi.

Hipoteza 6 (*O lokalnej nieregularności 2-multigrafów*, Grzelec, Woźniak [35]). *Dla każdego spójnego grafu G , który nie jest izomorficzny z K_2 , multigraf 2G uzyskany przez podwojenie każdej krawędzi G spełnia $\text{lir}({}^2G) \leq 2$.*

Uwaga. W hipotezie 6 dopuszczamy multikrawędzie, które są pokolorowane oboma kolorami czerwonym i niebieskim, podczas gdy w innych tego typu problemach, jak na przykład standardowa hipoteza (2,2) (którą omówimy w kolejnym rozdziale) wszystkie elementy tworzące multikrawędź muszą mieć ten sam kolor. Mówimy, że multikrawędź jest pokolorowana na *czerwono-niebiesko*, jeśli jeden element multikrawędzi jest czerwony, a drugi niebieski.

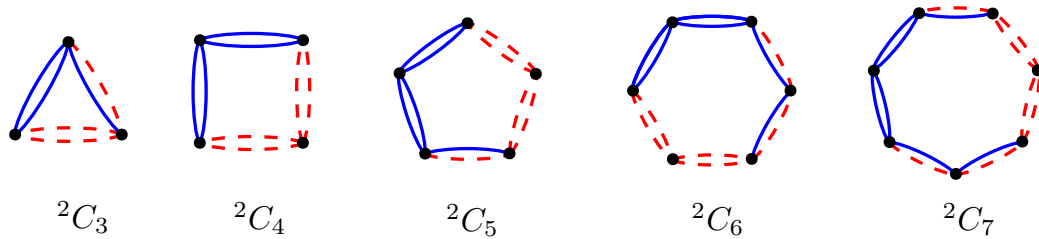
W tym rozdziale pokażemy, że hipoteza 6 jest prawdziwa: dla prostych klas grafów takich jak ścieżki, cykle, koła, grafy pełne i grafy k -dzielne pełne w podrozdziale 1, dla grafów dwudzielnych w podrozdziale 2, dla kaktusów w podrozdziale 3, dla grafów regularnych w podrozdziale 4 i dla grafów rozdzielných w podrozdziale 5. Następnie w dwóch kolejnych podrozdziałach 6 oraz 7 przedstawimy górne ograniczenia lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego dla 2-multigrafów uzyskanych odpowiednio z grafów planarnych i grafów subkubicznych (o ile są lokalnie nieregularnie kolorowalne). W podrozdziale 8 udowodnimy ogólne ograniczenie górne lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego dla wszystkich spójnych 2-multigrafów, które nie są izomorficzne z 2K_2 . Na koniec w podrozdziale 9 przedstawimy możliwe kierunki dalszych badań odnośnie hipotezy 6.

2.1 Proste klasy grafów

W tym podrozdziale rozważymy hipotezę o rozkładzie 2-multigrafów dla ścieżek, cykli, kół, grafów pełnych i grafów k -dzielnych pełnych. Przez P_n będziemy oznaczamy ścieżkę na n wierzchołkach, a przez W_n koło rzędu n , które składa się z cyklu długości $n - 1$ oraz wierzchołka centralnego połączonego ze wszystkimi wierzchołkami na tym cyklu. Ponadto będziemy nazywać *multicyklem* i *multiścieżką* graf uzyskany odpowiednio z cyklu i ścieżki przez podwojenie każdej krawędzi.

Twierdzenie 7 ([35]). *Hipoteza 6 zachodzi dla ścieżek, cykli oraz kół.*

Dowód. Na początku rozważamy multiścieżki 2P_n parzystej długości. Kolorujemy pierwsze dwie multikrawędzie na niebiesko, kolejne dwie na czerwono i powtarzamy ten ciąg kolorów dopóki nie pokolorujemy całej multiścieżki. Następnie rozważamy multiścieżki nieparzystej długości, które nie są izomorficzne z 2K_2 . Kolorujemy pierwszą multikrawędź na niebiesko, drugą na czerwono-niebiesko, trzecią na czerwono, a następnie kolorujemy pozostałe multikrawędzie w taki sam sposób jak multiścieżkę parzystej długości.



Rysunek 2.1: Lokalnie nieregularne kolorowanie multicykli.

W przypadku multicykli najpierw rozważamy te, które mają długości od trzy do siedem i kolorujemy je tak jak na rysunku 2.1. Kolorowanie dłuższego multicyklu uzyskujemy przez dodanie multiścieżki długości podzielnej przez cztery, pokolorowanej w taki sam sposób jak powyżej, do odpowiedniego multicyklu długości od cztery do siedem po dwóch czerwonych multikrawędziach.

Rozważamy multigraf 2W_n uzyskany z koła W_n . Najpierw kolorujemy multicykl o długości $n - 1$ używając powyższej metody. Następnie kolorujemy wszystkie incydentne multikrawędzie z wierzchołkiem centralnym na czerwono. Zauważmy, że wierzchołek centralny w 2-multigrafie 2W_n ma większy stopień niż inne wierzchołki w 2W_n dla $n > 4$. Jeśli $n = 4$, to możemy łatwo zauważyć, że wszystkie wierzchołki mają różne czerwone i niebieskie stopnie. $\square$

Twierdzenie 8 ([35]). *Hipoteza 6 zachodzi dla grafów pełnych i grafów k -dzielnych pełnych dla $k \geq 2$.*

Dowód. Załóżmy, że żadne multigrafy rozważane w tym dowodzie nie są izomorficzne z 2K_2 .

2-multigraf pełny. Konstruujemy kolorowanie tego multigrafu zaczynając od kolorowania 2C_3 przedstawionego na rysunku 2.1. Następnie kolorujemy na niebiesko wszystkie multikrawędzie z czwartego wierzchołka do wierzchołków, które mają pokolorowane część multikrawędzi. Dalej kolorujemy na czerwono wszystkie multikrawędzie z piątego wierzchołka do wierzchołków, które mają pokolorowane część multikrawędzi. Następnie kolorujemy na niebiesko wszystkie multikrawędzie z szóstego wierzchołka do wierzchołków, które mają pokolorowane część multikrawędzi. Kontynuujemy tę procedurę dopóki nie pokolorujemy całego 2-multigrafu.

2-multigraf k -dzielny pełny. Najpierw załóżmy, że $k = 2$ i oznaczmy zbiory niezależne przez X oraz Y . Niech $|X| = p$ oraz $|Y| = q$. Jeśli $p \neq q$, to 2-multigraf ${}^2K_{p,q}$ jest lokalnie nieregularny. W przeciwnym przypadku, jeśli $p = q$ to wybieramy jeden wierzchołek v i kolorujemy wszystkie incydentne multikrawędzie z v na czerwono, a wszystkie pozostałe multikrawędzie na niebiesko. Możemy łatwo zauważyć, że to kolorowanie jest lokalnie nieregularne.

Założmy, że $k = 3$ i oznaczmy zbiory niezależne przez X , Y oraz Z . Niech $|X| = p$, $|Y| = q$ oraz $|Z| = r$. Jeśli p , q , r są parami różne to 2-multigraf ${}^2K_{p,q,r}$ jest lokalnie nieregularny i kolorujemy wszystkie jego multikrawędzie na czerwono. Jeśli $p = q \neq r$, to kolorujemy wszystkie multikrawędzie ze zbioru X do Z na niebiesko oraz wszystkie pozostałe multikrawędzie w ${}^2K_{p,q,r}$ na czerwono. Zatem wszystkie wierzchołki w czerwonym 2-multigrafie: w X mają stopnie równe $2p$, w Y mają stopnie równe $2p + 2r$ oraz w Z mają stopnie równe $2p$. W niebieskim 2-multigrafie wszystkie wierzchołki z X mają stopnie równe $2r$ oraz ze zbioru Z mają stopnie równe $2p$. Zauważmy, że w niebieskim 2-multigrafie nie mamy wierzchołków ze zbioru Y . Podobnego kolorowania używamy również, gdy $p \neq q = r$ oraz $p = r \neq q$. Jeśli $p = q = r$ to kolorujemy wszystkie multikrawędzie: ze zbioru X do Z na czerwono, ze zbioru Y do Z na niebiesko oraz ze zbioru X do Y na czerwono-niebiesko. Zatem, wszystkie wierzchołki: w X mają czerwone stopnie równe $3p$ oraz niebieskie stopnie równe p , w Y mają czerwone stopnie równe p oraz niebieskie stopnie równe $3p$, a w Z mają czerwone i niebieskie stopnie równe $2p$. Zatem to kolorowanie jest lokalnie nieregularne.

Założmy, że $k > 3$. Oznaczamy zbiory niezależne według malejącej (nie rosnącej) liczby wierzchołków przez $A_1, \dots, A_k$. Jeśli dwa zbiory niezależne mają taką samą liczbę wierzchołków to oznaczamy je dowolnie. Najpierw

kolorujemy podmultigraf indukowany przez zbiory niezależne A_1, A_2, A_3 używając tej samej metody co w przypadku 2-multigrafu trójdzielnego pełnego z poprzedniego przypadku. Następnie kolorujemy wszystkie multikrawędzie ze zbioru A_4 do zbiorów A_1, A_2, A_3 na niebiesko. Dalej kolorujemy wszystkie multikrawędzie ze zbioru A_5 do zbiorów $A_1, \dots, A_4$ na czerwono. Następnie kolorujemy wszystkie multikrawędzie ze zbioru A_6 do zbiorów $A_1, \dots, A_5$ na niebiesko. Kontynuujemy tę procedurę dopóki nie pokolorujemy całego 2-multigrafu. Możemy łatwo zauważyć, że to kolorowanie jest lokalnie nieregularne. $\square$

2.2 Grafy dwudzielne

Na początku przedstawimy notację i lemat, który będzie nam potrzebny do dowodu głównego rezultatu dla grafów dwudzielnych. Niech G będzie grafem. Dla zbioru wierzchołków S definiujemy sąsiedztwo jako $N(S) := \bigcup_{s \in S} N(s)$. *Bliźniakami* nazywamy dwa wierzchołki x oraz y , takie że $N(x) = N(y)$. Przez *zbiór bliźniaków* rozumiemy zbiór niezależnych wierzchołków o tym samym sąsiedztwie. Zauważmy, że relacja bycia bliźniakiem jest zwrotna. Następujący lemat został udowodniony w [37].

Lemat 9. *Niech $G = (X, Y; E)$ będzie spójnym grafem dwudzielnym. Wówczas istnieje niepusty zbiór bliźniaków S , taki że graf $G - (S \cup N(S))$ jest spójny.* $\square$

Teraz jesteśmy gotowi do udowodnienia głównego rezultatu dla grafów dwudzielnych.

Twierdzenie 10 ([35]). *Dla każdego spójnego grafu dwudzielnego G , który nie jest izomorficzny z K_2 multigraf 2G spełnia $\text{lr}({}^2G) \leq 2$.*

Dowód. Niech $G = (X, Y; E)$ będzie spójnym grafem dwudzielnym. Rozważymy trzy główne przypadki.

Przypadek 1. **Co najmniej jedna spośród liczebności zbiorów $|X|$ oraz $|Y|$ jest parzysta.**

Założmy, że $|X|$ jest parzysta. Niech $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{2p}\}$. Dla każdego i , $1 \leq i \leq p$, niech P_i będzie ścieżką łączącą wierzchołek x_{2i-1} z wierzchołkiem x_{2i} w grafie G . Rozważamy multigraf 2G . Zaczynamy od multigrafu z wszystkimi multikrawędziami pokolorowanymi na niebiesko. Wierzchołek nazywamy *nieparzystym*, jeśli ma nieparzysty stopień czerwony i niebieski, analogicznie wierzchołek nazywamy *parzystym* jeśli ma parzysty stopień czerwony i niebieski. Zauważmy, że wszystkie wierzchołki są albo parzyste albo nieparzyste,

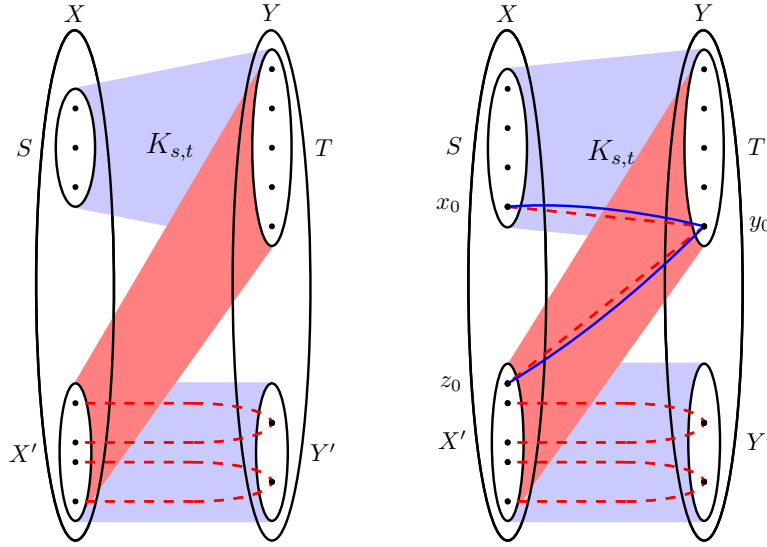
ponieważ w 2-multigrafie każdy wierzchołek ma parzystą sumę czerwonego i niebieskiego stopnia. Następnie, dla każdego i , $1 \leq i \leq p$, zamieniamy kolory wzdłuż ścieżki P_i . Zatem na końcu tego procesu każdy wierzchołek w X jest nieparzysty oraz każdy wierzchołek w Y jest parzysty, czyli otrzymujemy tezę w tym przypadku. Ten zbiór ścieżek nazywamy *systemem ścieżek o końcach w X* .

W dwóch pozostałych przypadkach założymy, że liczebności $|X|$ oraz $|Y|$ są nieparzyste. Z lematu 9, istnieje zbiór bliźniaków S , taki że $G - (S \cup N(S))$ jest spójny. Bez straty ogólności możemy założyć, że $S \subset X$. Zauważmy, że podgraf indukowany przez $S \cup N(S)$ jest grafem dwudzielnym pełnym. Jeśli mamy więcej niż jeden taki zbiór S , to bierzemy S z najmniejszą $|S| + |N(S)|$. Ten ostatni warunek implikuje w szczególności, że każdy wierzchołek y w $N(S)$ ma sąsiada w $X \setminus S$. Istotnie przypuśćmy, że istnieje wierzchołek y w $N(S)$ spełniający $N(y) = S$. Zbiór wszystkich takich wierzchołków y byłby zbiorem bliźniaków, czyli otrzymujemy sprzeczność z zasadami wyboru S . Niech $X' := X \setminus S$, $T := N(S)$, $Y' := Y \setminus N(S)$, $s := |S|$ oraz $t := |T|$. Zauważmy, że nie mamy żadnej krawędzi pomiędzy zbiorami S oraz Y' w grafie G (zobacz rysunek 2.2). Podwajamy wszystkie krawędzie w grafie G . Będziemy rozważać dwa pozostałe przypadki.

Przypadek 2. Przypuśćmy, że s jest nieparzyste.

Najpierw rozważmy podprzypadek, gdy $s \neq t$. Zauważmy, że $|X'|$ jest parzysta. Zatem kolorujemy podmultigraf indukowany przez $X' \cup Y'$ w 2G używając systemu ścieżek o końcach w X' . Bardziej precyzyjnie kolorujemy ten system ścieżek o końcach w X' na czerwono, a resztę multikrawędzi w tym podmultigrafie na niebiesko. Następnie kolorujemy wszystkie multikrawędzie pomiędzy zbiorami wierzchołków S oraz T na niebiesko i kolorujemy wszystkie multikrawędzie pomiędzy T oraz X' na czerwono (zobacz rysunek 2.2). Możemy łatwo zauważyć, że to kolorowanie 2G jest lokalnie nieregularne. Istotnie niebieski multigraf ma dwie składowe: multigraf indukowany przez $S \cup T$ oraz multigraf indukowany przez $X \cup Y'$ bez systemu ścieżek o końcach w X' . Z naszego założenia, iż $s \neq t$, wiemy że niebieski multigraf indukowany przez $S \cup T$ jest lokalnie nieregularny. Ponadto zauważmy, że w niebieskim multigrafie indukowanym przez $X \cup Y'$ bez systemu ścieżek o końcach w X' oraz czerwonym multigrafie wszystkie wierzchołki w X' są nieparzyste i wszystkie wierzchołki w Y są parzyste.

Rozważamy sytuację, gdy $s = t$. Zauważmy, że $|X'|$ jest parzysta. Zatem kolorujemy podmultigraf indukowany przez $X' \cup Y'$ w 2G używając tej samej metody jak w sytuacji gdy $s \neq t$. Następnie kolorujemy wszystkie pozostałe multikrawędzie w 2G na niebiesko. Zauważmy, że multigraf indukowany przez $S \cup T$ jest niebieski. Zatem to kolorowanie 2G jest lokalnie nieregularne, po-



Rysunek 2.2: Kolorowanie dwudzielnego 2-multigrafu 2G w przypadku 2, gdy $s \neq t$ (po lewej stronie) i w przypadku 3, gdy $s \neq t$ (po prawej stronie).

nieważ wszystkie wierzchołki w S mają niebieskie stopnie równe $2t$ i są różne od niebieskich stopni wierzchołków w T , co więcej wszystkie wierzchołki w X' są nieparzyste, a w Y parzyste. Tym samym zakończyliśmy dowód w tym przypadku.

Przypadek 3. Przypuśćmy, że s jest parzyste.

Będziemy rozważać dwa główne podprzypadki. Niech x_0 będzie dowolnym wierzchołkiem w S , a y_0 jego sąsiadem w T . Ponadto, niech z_0 będzie sąsiadem y_0 w X' . Kolorujemy multikrawędzie x_0y_0 oraz y_0z_0 na czerwono-niebiesko. Zauważmy, że $|X' \setminus \{z_0\}|$ jest parzysta. Zatem kolorujemy podmultigraf indukowany przez $(X' \setminus \{z_0\}) \cup Y'$ w 2G używając systemu ścieżek o końcach w $X' \setminus \{z_0\}$. Bardziej precyzyjnie kolorujemy ten system ścieżek o końcach w $X' \setminus \{z_0\}$ na czerwono, a resztę multikrawędzi w tym podmultigrafie na niebiesko. Następnie kolorujemy wszystkie multikrawędzie z wierzchołka z_0 do jego sąsiadów w Y' na niebiesko. Zauważmy, że system ścieżek o końcach w $X' \setminus \{z_0\}$ i ścieżka $x_0y_0z_0$ tworzą system ścieżek o końcach w $X' \cup \{x_0\}$. Ta część kolorowania 2G jest wspólna dla wszystkich podprzypadków.

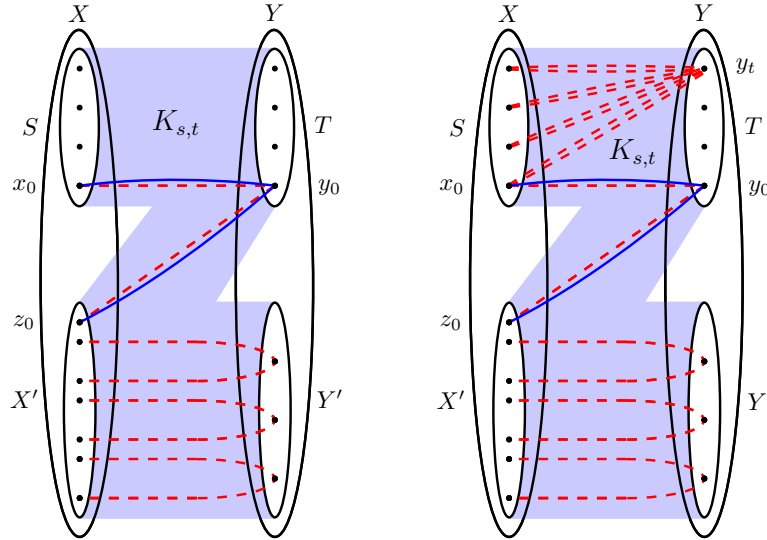
Podprzypadek 3a. Przypuśćmy, że $s \neq t$.

Kolorujemy wszystkie multikrawędzie pomiędzy T oraz X' na czerwono, z wyjątkiem multikrawędzi y_0z_0 , którą kolorujemy na czerwono-niebiesko. Następnie kolorujemy wszystkie pozostałe multikrawędzie w 2G na niebiesko. To kolorowanie 2G jest zaprezentowane na rysunku 2.2.

Zauważmy, że w tym kolorowaniu 2G wszystkie wierzchołki w $X' \cup \{x_0\}$ są nieparzyste, a w Y parzyste. Ponadto zauważmy, że wszystkie wierzchołki w $S \setminus \{x_0\}$ mają niebieskie stopnie równe $2t$ i wszystkie wierzchołki w T wraz z y_0 mają niebieskie stopnie równe $2s$. Zatem to kolorowanie jest lokalnie nieregularne.

Podprzypadek 3b. Przypuśćmy, że $s = t$.

Zaczynamy nasze kolorowanie 2G od części wspólnej dla wszystkich podprzypadków. Następnie kolorujemy wszystkie multikrawędzie pomiędzy wierzchołkami ze zbioru $T \setminus \{y_0\}$ oraz X' na niebiesko. Dalej kolorujemy wszystkie multikrawędzie z y_0 do X' , z wyjątkiem y_0z_0 na niebiesko. Na końcu kolorujemy wszystkie pozostałe multikrawędzie w 2-multigrafie 2G na niebiesko. To wyjściowe kolorowanie dwudzielnego 2-multigrafu 2G , gdy s jest parzyste i $s = t$ jest pokazane na rysunku 2.3.



Rysunek 2.3: Wyjściowe kolorowanie dwudzielnego 2-multigrafu 2G w przypadku 3, gdy $s = t$ (po lewej stronie) i w przypadku 3, gdy $s = t$ oraz jest dokładnie jedna multikrawędź pomiędzy y_0 i zbiorem X' (po prawej stronie).

Zauważmy, że w tym kolorowaniu 2G wszystkie wierzchołki w $X' \cup \{x_0\}$ są nieparzyste, a w Y parzyste. Co więcej każdy wierzchołek x ze zbioru $S \setminus \{x_0\}$ ma $\hat{d}_b(x) = 2t$ oraz każdy wierzchołek y ze zbioru $T \setminus \{y_0\}$ ma $\hat{d}_b(y) \geq 2s + 2$. Ponadto widzimy, że $\hat{d}_b(y_0) \geq 2s$. Jeśli mamy więcej niż jedną multikrawędź pomiędzy y_0 i zbiorem X' to wierzchołek y_0 ma $\hat{d}_b(y_0) \geq 2s + 2$. Zatem w tej sytuacji nie mamy konfliktu pomiędzy wierzchołkami z $S \setminus \{x_0\}$ oraz T , a więc to kolorowanie jest lokalnie nieregularne.

Teraz rozważamy szczególną sytuację, gdy $s = t$ oraz jest dokładnie jedna multikrawędź pomiędzy wierzchołkiem y_0 i zbiorem X' dla każdego wierz-

chołka $y_0 \in T$. Niech y_t będzie dowolnym wierzchołkiem w T różnym od y_0 . Przekolorowujemy wszystkie multikrawędzie z wierzchołka y_t do zbioru S na czerwono w wyjściowym kolorowaniu dwudzielnego 2-multigrafu 2G , gdy s jest parzyste oraz $s = t$ (zobacz rysunek 2.3). Zatem każdy wierzchołek x ze zbioru $S \setminus \{x_0\}$ ma $\hat{d}_b(x) = 2t - 2$ i każdy wierzchołek y ze zbioru $T \setminus \{y_0, y_t\}$ ma $\hat{d}_b(y) \geq 2s + 2$. Ponadto widzimy, że $\hat{d}_b(y_0) = 2s$. Co więcej zauważmy, że nie mamy konfliktu wywołanego przez czerwone stopnie w 2G . Zatem otrzymujemy tezę w tym podprzypadku. $\square$

Z powyższego twierdzenia natychmiast wynika następujący wniosek.

Wniosek 11. *Dla każdego drzewa T , które nie jest izomorficzne z K_2 mamy $\text{lir}({}^2T) \leq 2$.*

2.3 Kaktusy

Kaktusem nazywamy graf spójny, w którym każde dwa cykle są krawędziowo rozłączne. Kaktusy są ważną klasą grafów dla problemu lokalnie nieregularnego kolorowania 2-multigrafów, ponieważ w przypadku grafów jedyny graf wymagający czterech kolorów w lokalnie nieregularnym kolorowaniu jest kaktusem, a ponadto wszystkie grafy, które nie mają lokalnie nieregularnego kolorowania też należą do tej klasy grafów. A więc nasuwa się pytanie, czy w przypadku 2-multigrafów uzyskanych z kaktusów nie znajdziemy jakiegoś kontrprzykładu do hipotezy 6?

Zanim udowodnimy główny rezultat dotyczący kaktusów potrzebujemy przedstawić notację i ważny lemat dotyczący drzew. W dowodzie twierdzenia dotyczącego kaktusów będziemy często używać lokalnie nieregularnego kolorowania ukorzenionych multidrzew przedstawionego w dowodzie tego lematu. Będziemy oznaczać przez $T(r)$ drzewo ukorzenione w wierzchołku r . Przez *krawędź liścia* rozumiemy krawędź, która zawiera wierzchołek będący liściem w drzewie T . *Krzewem* nazywamy dowolne drzewo ukorzenione w liściu. Jedyną krawędź w krzewie incydentną z korzeniem nazywamy *krawędzią korzenia* krzewu. *Gałęzią* ukorzoną w wierzchołku x , oznaczaną przez $B(x)$, będziemy nazywać następujący podgraf w ukorzenionym drzewie T . Jeśli wierzchołek x ma jednego syna x' w drzewie T to gałąź $B(x)$ zawiera: krawędź xx' , krawędzie z wierzchołka x' do wszystkich jego synów $x_1, \dots, x_k$, oraz jeśli x_j ma tylko jednego sąsiada x'_j , który jest liściem w drzewie T to dołączamy do gałęzi $B(x)$ krawędź liścia $x_jx'_j$ dla $j = 1, \dots, k$. Jeśli wierzchołek x ma więcej niż jednego syna w drzewie T to gałąź $B(x)$ zawiera: krawędzie z wierzchołka x do wszystkich jego synów $x_1, \dots, x_k$, oraz jeśli x_j

ma tylko jednego sąsiada x'_j , który jest liściem w drzewie T to dołączamy do gałęzi $B(x)$ krawędź liścia $x_j x'_j$ dla $j = 1, \dots, k$.

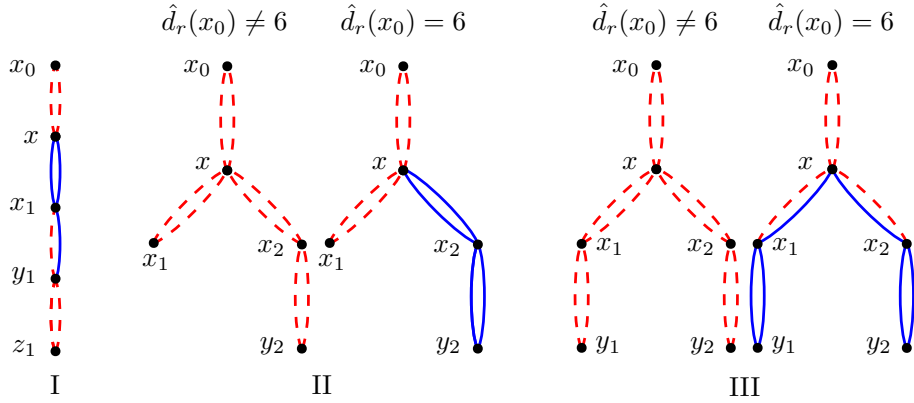
Uwaga 12. *Istnieją tylko cztery gałęzie: K_2 ukorzeniona w początkowym wierzchołku, ścieżka P_4 ukorzeniona w początkowym wierzchołku, ścieżka P_4 ukorzeniona w centralnym wierzchołku i ścieżka P_5 ukorzeniona w centralnym wierzchołku, które nie są lokalnie nieregularne.*

W przypadku 2-multigrafów będziemy używać analogicznej notacji.

Lemat 13 ([34]). *Dla każdego drzewa T ukorzonego w wierzchołku r istnieje rozkład multigrafu 2T na gałęzie generowany przez czerwono-niebieskie prawie lokalnie nieregularne kolorowanie, czyli konflikt (sytuacja, gdy sąsiednie wierzchołki połączone czerwoną (odpowiednio niebieską) krawędzią mają takie same czerwone (odpowiednio niebieskie) stopnie) może jedynie wystąpić pomiędzy wierzchołkiem r oraz jednym lub dwoma jego sąsiadami. Ponadto wszystkie gałęzie zawierają co najmniej dwie multikrawędzie, z wyjątkiem sytuacji, gdy drzewo T jest izomorficzne z K_2 oraz wszystkie krawędzie liści są monochromatyczne w tych gałęziach.*

Dowód. Lemat oczywiście jest prawdziwy dla drzewa $T = K_2$. Załóżmy, że $T \neq K_2$. Najpierw rozkładamy multigraf ${}^2T(r)$ na gałęzie w następujący sposób. Niech ${}^2B(r)$ będzie pierwszą gałęzią z naszego rozkładu. Niech wierzchołek x_i dla $i = 1, \dots, p$ będzie liściem w gałęzi ${}^2B(r)$, który nie jest liściem w T . Następnymi gałęziami naszego rozkładu są ${}^2B(x_1), \dots, {}^2B(x_p)$. Zaczynamy nasze kolorowanie od gałęzi ${}^2B(r)$, następnie kolorujemy gałęzie ukorzenione w wierzchołkach z gałęzi ${}^2B(r)$ i tak dalej. Gałąź ${}^2B(r)$ jest pokolorowana jednym kolorem, z wyjątkiem sytuacji gdy ${}^2B(r) = {}^2T(r)$ oraz ${}^2B(r)$ jest multiścieżką 2P_4 ukorzenioną w jednym z końców. W tej sytuacji kolorujemy multikrawędź korzenia na niebiesko oraz resztę tej gałęzi na czerwono. W takim kolorowaniu jest konflikt pomiędzy korzeniem r a jego synem. Zauważmy, że jeśli gałąź ${}^2B(r)$ nie jest lokalnie nieregularna i jest pokolorowana jednym kolorem to jest konflikt pomiędzy korzeniem r oraz jednym lub dwoma jego synami. Niech ${}^2B(x)$, gdzie $x \neq r$ będzie gałęzią z powyższego rozkładu. Jeśli ${}^2B(x)$ jest lokalnie nieregularna to kolorujemy całą gałąź ${}^2B(x)$ używając tylko jednego koloru różnego od koloru multikrawędzi z wierzchołka x do jego ojca. Zauważmy, że ta multikrawędź jest monochromatyczna. Ponadto możemy łatwo zauważyć, że w takim kolorowaniu multikrawędzie liści w gałęzi są dalej monochromatyczne.

Jeśli gałąź ${}^2B(x)$ nie jest lokalnie nieregularna, to oznaczamy przez x_0 ojca wierzchołka x . Załóżmy, że multikrawędź $x_0 x$ jest pokolorowana na czerwono. Będziemy wykorzystywać kolorowanie gałęzi ${}^2B(x)$, która nie jest lokalnie



Rysunek 2.4: Kolorowanie gałęzi ${}^2B(x)$, która nie jest lokalnie nieregularna.

nieregularna, przedstawione na rysunku 2.4. Zauważmy, że multikrawędź x_0x ma zawsze tylko jeden kolor. $\square$

Zauważmy, że w kolorowaniu ukorzonego multidrzewa przedstawionym w dowodzie powyższego lematu korzeń i jego synowie są zawsze parzyści. W multikaktusie wszystkie wierzchołki na multicyklach nazywamy *cyklicznymi*, a pozostałe wierzchołki *drzewiastymi*. Teraz jesteśmy już gotowi do udowodnienia głównego rezultatu dla kaktusów.

Twierdzenie 14 ([34]). *Dla każdego kaktusa G , który nie jest izomorficzny z K_2 multigraf 2G spełnia $\text{lir}({}^2G) \leq 2$.*

Dowód. Podamy konstrukcję lokalnie nieregularnego kolorowania multikaktusa 2G . Będziemy używać metody *etykietowania wierzchołków*, która nam w tym pomoże. Traktujemy multikaktus jako multigraf uzyskany z multicyklu przez *dobranie* do wierzchołków multicykli i multidrzew, gdzie przez *dobranie* lub *dołączanie* multicyklu do wierzchołka x rozumiemy identyfikowanie wierzchołka x z jednym z wierzchołków na multicyklu oraz rozszerzanie lokalnie nieregularnego kolorowania i etykietowania wierzchołków na ten multicykl. Podobnie przez *dobranie* lub *dołączanie* ukorzonego multidrzewa ${}^2T(r)$ do wierzchołka x rozumiemy identyfikowanie wierzchołka x z korzeniem multidrzewa ${}^2T(r)$, rozszerzanie lokalnie nieregularnego kolorowania na ${}^2T(r)$ i ewentualnie zmianę etykiety wierzchołka x .

Teraz krótko przedstawimy zarys naszej konstrukcji. Najpierw lokalnie nieregularnie kolorujemy najdłuższy multicykl w multigrafie 2G i etykietujemy jego wierzchołki. (Szczegóły i możliwe wyjątki zostaną opisane poniżej.)

Niech x będzie wierzchołkiem w już pokolorowanej części, do którego chcemy dołączyć wciąż niepokolorowane elementy takie jak multicykle lub multidzewo.

Następnie wybieramy jeden wierzchołek na pokolorowanym multicyklu i dołączamy do niego wszystkie multicykle i multidrzewo, które mają być dołączone i rozszerzamy lokalnie nieregularne kolorowanie oraz etykietowanie cyklicznych wierzchołków na dołączone elementy. Należy pamiętać, że nie etykietujemy wierzchołków drzewiastych. Następnie bierzemy pojedynczo pozostałe wierzchołki na tym pokolorowanym multicyklu i traktujemy je analogicznie.

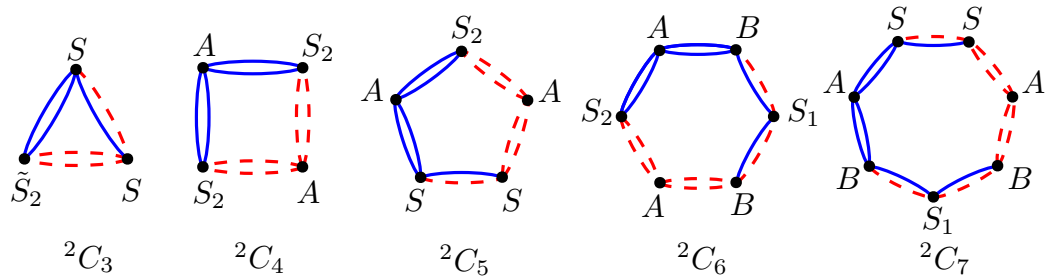
Jeśli x jest wierzchołkiem cyklicznym to ogólnie metoda kolorowania dołączanych elementów zależy od etykiety wierzchołka x , a także rodzaju elementu, który był dołączony.

Jeśli x nie jest wierzchołkiem cyklicznym, to musi być liściem. Postępujemy jak poprzednio. Zauważmy, że pośród elementów, które dodajemy musi być multicykl, zatem wierzchołek x na pewno otrzyma jakąś etykietę.

Wszystkie konieczne szczegóły każdej części naszej konstrukcji zostaną podane poniżej.

Uwaga 15. *Może się zdarzyć, że wierzchołek x zmienia swoją etykietę podczas tej procedury. W pewnych sytuacjach, zamiast multicyklu jesteśmy zmuszeni do rozważenia nieco zmodyfikowanej struktury, a mianowicie multicyklu z kolcami (zobacz poniżej). Wreszcie, w pewnych sytuacjach, zamiast dodawać nowe elementy do ustalonego wierzchołka musimy rozważyć jednoczesne dodawanie elementów do dwóch sąsiednich wierzchołków.*

Początkowa część lokalnie nieregularnego kolorowania 2G . Kolorujemy w standardowy sposób, z wyjątkiem sytuacji opisanej poniżej, najdłuższy multicykl w 2G , używając takiej samej metody jak w dowodzie twierdzenia 7. To kolorowanie będzie nazywane *standardowym*. Podczas reszty dowodu będziemy często używać tego standardowego kolorowania multicyklu. Ponadto etykietujemy wszystkie wierzchołki na tym pokolorowanym multicyklu tak jak na rysunku 2.5. Używamy etykiet $A, B, S_1, S_2, \tilde{S}_2$ oraz S o



Rysunek 2.5: Etykietowanie wierzchołków w standardowym lokalnie nieregularnym kolorowaniu multicykli.

następującym znaczeniu:

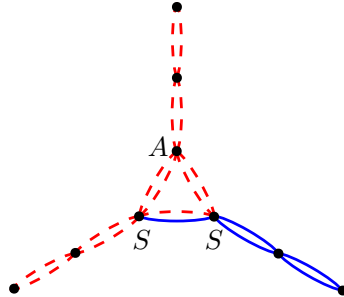
- A - parzysty wierzchołek, który ma czerwony lub niebieski stopień większy niż dwa, zawsze pozostaje z etykietą A oraz którego sąsiedzi mają etykiety ze zbioru $\{B, S_2, S\}$,
- B - nieparzysty wierzchołek, który zawsze pozostaje z etykietą B oraz którego sąsiedzi mają etykiety ze zbioru $\{A, S_1\}$,
- S_1 - parzysty wierzchołek x z: $\hat{d}(x) = 4$, $\hat{d}_r(x) = \hat{d}_b(x) = 2$, dwoma incydentnymi multikrawędziami pokolorowanymi na czerwono-niebiesko, który otrzymuje etykietę A jeśli dołączamy coś do niego i którego sąsiedzi są nieparzyści,
- S_2 - parzysty wierzchołek x na multicyklu o długości większej niż trzy z: $\hat{d}(x) = 4$, $\hat{d}_r(x) = \hat{d}_b(x) = 2$, dwoma incydentnymi multikrawędziami pokolorowanymi pierwsza na czerwono, druga na niebiesko, który otrzymuje etykietę B jeśli dołączamy coś do niego i którego sąsiedzi mają etykietę A ,
- $\tilde{S}_2$ - parzysty wierzchołek x na 2C_3 z: $\hat{d}(x) = 4$, $\hat{d}_r(x) = \hat{d}_b(x) = 2$, dwoma incydentnymi multikrawędziami pokolorowanymi pierwsza na niebiesko, druga na czerwono, który otrzymuje etykietę A jeśli dołączamy coś do niego i którego sąsiedzi mają etykietę S .
- Etykietujemy przez S dwa sąsiednie wierzchołki nieparzyste. Etykieta S występuje tylko na parze wierzchołków i taką parę będziemy nazywać *parą specjalną* S . Sąsiedzi tej pary są parzyści.

Teraz przedstawimy ideę stojącą za tym etykietowaniem wierzchołków. Weźmy na przykład multicykl o długości podzielnej przez cztery. Na tym multicyklu w standardowym kolorowaniu występują tylko wierzchołki z etykietami A oraz S_2 . Oczywiście sąsiednie wierzchołki na tym multicyklu mają różne czerwone i niebieskie stopnie. Jeśli będziemy dodawać dalsze elementy, kolorować je i etykietować zgodnie z powyższymi zasadami to wierzchołki z etykietą A pozostaną z etykietą A , a wierzchołki z etykietą S_2 otrzymają etykietę B lub pozostaną z etykietą S_2 (jeśli nic do nich nie dodamy). W każdym razie jesteśmy pewni, że stopnie sąsiednich wierzchołków w obu kolorach na tym multicyklu są różne (bez konieczności obliczania ich dokładnej wartości).

Niestety nie wszystkie multicykle mają długość podzielną przez cztery. Już na multicyklu 2C_6 pojawia się wierzchołek z etykietą S_1 , która powinna

się zamienić na A , jeśli dodamy coś do tego wierzchołka, ale jest to nie możliwe, gdy chcemy dodać ścieżkę długości dwa (zobacz poniżej). Zauważmy ponadto, że dla multicykli nieparzystej długości co najmniej dwa sąsiednie wierzchołki muszą być tej samej parzystości, co sprawia, że ich rozróżnienie nie jest automatyczne. Te problemy sprawiają, że musimy rozważyć wiele przypadków.

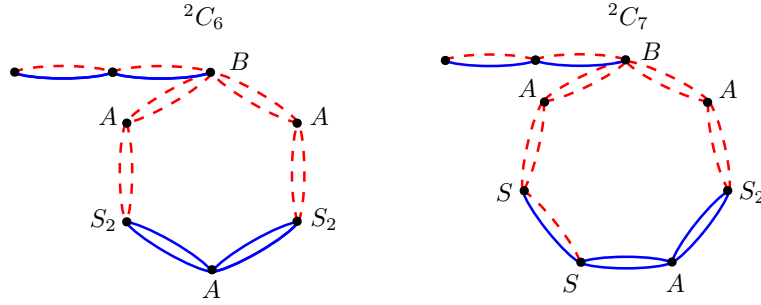
Zauważmy, że multidrzewo 2P_3 ukorzenione w jednym z końców stwarza szczególne problemy. Będziemy nazywać taką multiścieżkę *kolcem*. Zauważmy, że koło sprawia szczególne problemy tylko wtedy, gdy samotny koło jest dołączony do cyklicznego wierzchołka x . Z tego powodu przez dodawanie lub dołączanie kolca zawsze rozumiemy dodawanie samotnego kolca i nic więcej. Zauważmy, że koło nie może być dodany do wierzchołka z etykietą S_1 , a także do wierzchołka z etykietą $\tilde{S}_2$. Możemy uniknąć tego problemu na dwa sposoby. Po pierwsze starając się zmienić kolory w standardowym kolorowaniu multicyklu w taki sposób, aby wierzchołek, do którego dodajemy koło miał inną etykietę. Czasami jest to niemożliwe, na przykład w sytuacji gdy multicykl 2C_3 ma koło dodany do każdego wierzchołka. Ten szczególny przypadek został przedstawiony na rysunku 2.6. Po drugie, w sytuacji gdy



Rysunek 2.6: Kolorowanie multicyklu 2C_3 z kolcami.

wyjściowy multicykl ma długość $4k + 2$ lub $4k + 3$ dla $k \geq 1$ i następna część konstrukcji wymaga dodania kolca (do wierzchołka z etykietą S_1) będziemy rozważać multicykl z kolcem zamiast multicyklu. Zauważmy, że w wyjściowym multicyklu o długości $4k + 2$ lub $4k + 3$ dla $k \geq 1$ mamy tylko jeden wierzchołek z etykietą S_1 . Kolorowanie tego multicyklu z kolcem jest przedstawione na rysunku 2.7. Zauważmy, że na tym rysunku mamy przedstawione kolorowanie tylko dla multicykli o długości sześć oraz siedem, ale możemy je łatwo rozszerzyć dla dłuższych multicykli z kolcem.

Możemy założyć, że w następnej części konstrukcji nie będziemy nigdy dodawać kolca do wierzchołka z etykietą $\tilde{S}_2$ na 2C_3 . Jeśli to nie jest prawda możemy łatwo zamienić kolory w standardowym kolorowaniu 2C_3 . Zauważmy, że ten problem nie dotyczy wierzchołków z etykietą S_2 .



Rysunek 2.7: Wyjściowe kolorowanie 2C_6 z kołcem oraz 2C_7 z kołcem.

Uwaga 16. W następnej części konstrukcji pojawią się nowe etykiety dla szczególnych par wierzchołków.

Dołączanie wszystkich multidrzew i multicykli do wierzchołków na wybranym multicyklu w 2G . Wybieramy jeden pokolorowany multicykl w 2G . Najpierw dołączamy wszystkie multidrzewa i multicykle do wierzchołków z etykietami A , B , S_1 , S_2 oraz $\tilde{S}_2$ na wybranym multicyklu. Następnie rozważamy parę wierzchołków z etykietą S lub innymi etykietami, które pojawiają się później.

Niech $\tilde{G}$ będzie już pokolorowaną częścią multigrafu 2G . To oznacza w szczególności, że każdy cykliczny wierzchołek w $\tilde{G}$ ma swoją własną etykietę. Niech x będzie cyklicznym wierzchołkiem w $\tilde{G}$. Opiszemy jak dodawać kolejne elementy do x . Metoda kolorowania i etykietowania ich zależy głównie od etykiety wierzchołka x . Wprowadzamy zasadę, że jeśli zaczniemy dołączać elementy do wierzchołka x to dołączamy wszystkie elementy i w pozostałej części konstrukcji nie możemy nic dodać do wierzchołka x . Zakładamy, że multicykle, które dołączamy są pokolorowane standardowo i mają przypisane etykiety jak na rysunku 2.5.

Dołączanie do wierzchołka z etykietą A . Przypomnijmy, że nie zmieniamy parzystości i etykiety wierzchołka z etykietą A . W związku z tym dodawanie multicykli jest bardzo proste w tym przypadku. Przez *dominujący* kolor w wierzchołku x rozumiemy kolor, w którym wierzchołek x ma większy stopień. Dołączamy do wierzchołka x z etykietą A wszystkie multicykle:

- 2C_3 używając ich wierzchołków z etykietą $\tilde{S}_2$,
- ${}^2C_{4k}$ oraz ${}^2C_{4k+1}$ używając ich wierzchołków z etykietą A , tak że zwiększamy stopień wierzchołka x w dominującym kolorze,
- ${}^2C_{4k+2}$ oraz ${}^2C_{4k+3}$ używając ich wierzchołków z etykietą S_1 .

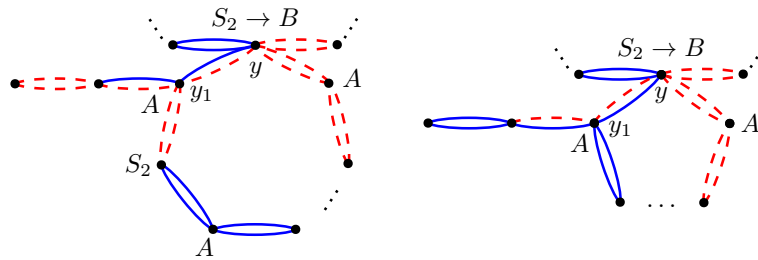
Po dołączeniu multicykli dołączamy ukorzenione multidrzewo. A więc dołączamy ukorzenione multidrzewo, które nie jest multikrzewem do wierzchołka x z etykietą A zaczynając od multikrawędzi incydentnych z jego korzeniem pokolorowanych dominującym kolorem w x wykorzystując lemat 13. Jeśli ukorzenione multidrzewo dołączone do wierzchołka x z etykietą A jest izomorficzne z 2K_2 lub 2P_3 to kolorujemy je dominującym kolorem w x . Ponadto, jeśli ukorzenione multidrzewo dołączone do wierzchołka x z etykietą A jest izomorficzne z 2P_5 to kolorujemy je następująco: multikrawędź xx' dominującym kolorem w x , drugą multikrawędź innym kolorem, trzecią multikrawędź na czerwono-niebiesko i ostatnią multikrawędź dominującym kolorem w x . Jeśli ukorzenione multidrzewo dołączone do wierzchołka x z etykietą A jest multikrzewem i nie jest izomorficzne z 2K_2 , 2P_3 lub 2P_5 to kolorujemy jego multikrawędź korzenia xx' dominującym kolorem w x , a resztę tego multikrzewu ukorzenioną w wierzchołku r' kolorujemy zaczynając od innego koloru niż użyty na multikrawędzi xx' z lematu 13. Jeśli $\hat{d}(r') = 6$ w multigrafie 2G i mamy wiszącą multiścieżkę 2P_3 w wierzchołku r' to przekolorowujemy tę multiścieżkę na czerwono-niebiesko. Będąc bardziej precyzyjnym przekolorowujemy każdą multikrawędź tej multiścieżki używając obu kolorów czerwonego i niebieskiego.

Dołączanie do wierzchołka z etykietą B. Przypomnijmy, że wierzchołek z etykietą B jest nieparzysty i pozostaje nieparzysty (z etykietą B). W związku z tym dodawanie multidrzew jest bardzo proste w tym przypadku, ponieważ z lematu 13 zawsze mamy $\hat{d}(x) \neq \hat{d}(r')$ dla każdego wierzchołka r' , który jest sąsiadem x w dodanym multidzewie. Gdy dodajemy multicykl to identyfikujemy wierzchołek y na tym multicyklu z wierzchołkiem x . Musimy upewnić się, że sąsiedzi wierzchołka y na multicyklu są parzyści. Dla multicyklu ${}^2C_{4k}$ lub ${}^2C_{4k+1}$ używamy standardowego kolorowania multicyklu i wierzchołka y z etykietą S_2 . Dla multicyklu ${}^2C_{4k+2}$ lub ${}^2C_{4k+3}$ z wyjątkiem 2C_3 oznaczamy przez y wierzchołek z etykietą B oraz większym stopniem w dominującym kolorze w wierzchołku x . Multikrawędzie incydentne z wierzchołkiem z etykietą S_1 dołączonego multicyklu przekolorowujemy na kolor dominujący w wierzchołku y . Zatem wierzchołek x pozostaje nieparzysty. Dla multicyklu 2C_3 używamy standardowego kolorowania multicyklu i wierzchołka y z etykietą $\hat{S}_2$. Następnie przekolorowujemy na czerwono multikrawędź pokolorowaną na czerwono-niebiesko w standardowym kolorowaniu dołączonego 2C_3 . Dalej przypisujemy sąsiadom y na 2C_3 etykietę **T**. Używając pogrubionej czcionki chcemy podkreślić fakt, że dana para wierzchołków pojawia się pierwszy raz. Te dwa sąsiednie wierzchołki na 2C_3 tworzą nową parę specjalną T , gdzie przez *parę specjalną* T rozumiemy parę parzystych sąsiednich wierzchołków na 2C_3 , które mają sąsiada z etykietą B i formę: multikrawędź pokolorowana na czerwono, pierwszy wierzchołek z pary T ,

multikrawędź pokolorowana na czerwono, drugi wierzchołek z pary T i multikrawędź pokolorowana na niebiesko (zobacz rysunek 2.10).

Dołączanie do wierzchołka z etykietą S_1 lub $\tilde{S}_2$. Nigdy nie będziemy dołączać kolca do wierzchołka z etykietą S_1 lub $\tilde{S}_2$. Zauważmy, że jeśli musieliśmy dołączać kolec do wierzchołka z etykietą S_1 lub $\tilde{S}_2$, to zamiast standardowego kolorowania i etykietowania dla multicyklu użyliśmy kolorowania i etykietowania dla multicyklu z kolcem. Dołączamy wszystkie multicykle do wierzchołka x z etykietą S_1 lub $\tilde{S}_2$ używając takiej samej metody jak dołączamy do wierzchołka z etykietą A . Następnie dołączamy multidrzewo do wierzchołka x używając metody dołączania do wierzchołka z etykietą A . Przypomnijmy, że po dołączeniu wszystkich elementów wierzchołek x otrzymuje etykietę A .

Dołączanie do wierzchołka z etykietą S_2 . Należy pamiętać, że w tym przypadku musimy zmienić parzystość i etykietę wierzchołka x . Jeśli dodajemy multicykle to używamy pierwszego dodanego multicyklu do zmiany parzystości wierzchołka x , a później dodajemy pozostałe elementy używając takiej samej metody jak w przypadku dodawania do wierzchołka z etykietą B . Teraz opiszemy jak dodać pierwszy multicykl. Niech y będzie wierzchołkiem z etykietą B na ${}^2C_{4k+2}$ lub ${}^2C_{4k+3}$, z wyjątkiem 2C_3 , takim że jego sąsiad y_1 ma etykietę S_1 . Dołączamy ten multicykl do x używając wierzchołka y . Jeśli mamy kolec w wierzchołku y_1 to zamieniamy ten multicykl na multicykl z kolcem. Kolorowanie tego multicyklu z kolcem zostało przedstawione na rysunku 2.8.



Rysunek 2.8: Kolorowanie multicyklu ${}^2C_{4k+2}$ lub ${}^2C_{4k+3}$ z kolcem dołączonym do wierzchołka z etykietą S_2 (po lewej stronie) oraz ${}^2C_{4k}$ lub ${}^2C_{4k+1}$ z kolcem dołączonym do wierzchołka z etykietą S_2 (po prawej stronie).

Multicykl ${}^2C_{4k}$ lub ${}^2C_{4k+1}$ w standardowym kolorowaniu albo nie ma nieparzystego wierzchołka, albo ma nieparzysty wierzchołek z nieparzystym sąsiadem. W związku z tym to kolorowanie nie może być użyte w tym przypadku. Zatem zanim dołączymy multicykl ${}^2C_{4k}$ do wierzchołka x z etykietą S_2 przekolorowujemy dwie multikrawędzie incydentne z jednym z wierzchołków z etykietą A na czerwono-niebiesko. Zatem ten wierzchołek y_1 otrzymuje ety-

Zanim dołączymy multicykl ${}^2C_{4k+1}$ z wyjątkiem 2C_5 do x to przekolorujemy dwie multikrawędzie incydentne z jednym z wierzchołków z etykietą A , który nie ma sąsiada należącego do pary specjalnej S na czerwono-niebiesko. Zatem ten wierzchołek y_1 otrzymuje etykietę S_1 , a jego sąsiedzi etykietę B . Następnie dołączamy ten przekolorowany multicykl ${}^2C_{4k+1}$ do x używając takiej samej metody, jak gdy dołączamy ${}^2C_{4k}$ do wierzchołka z etykietą S_2 .

The figure consists of three diagrams labeled 1., 2., and 3. from left to right, illustrating the construction of a tree T from a graph G .

- Diagram 1:** Shows a graph G with vertices A, S, S', y, y_1, S_1 . There are blue solid edges (A, S) , (A, y) , (y, S_1) , and (S, S') . There are red dashed edges (S, y_1) , (y_1, S_1) , and (S, S') . A vertex S_2 is shown at the top with a blue solid edge (S_2, y) and a red dashed edge (S_2, S_1) . A label $S_2 \rightarrow B$ is next to S_2 .
- Diagram 2:** Shows the same graph G as in Diagram 1, but with a different set of edges. The blue solid edges are (A, S) , (A, y) , (y, S_1) , and (S, S') . The red dashed edges are (S, y_1) , (y_1, S_1) , and (S, S') . The vertex S_2 is at the top with a blue solid edge (S_2, y) and a red dashed edge (S_2, S_1) . A label $S_2 \rightarrow B$ is next to S_2 .
- Diagram 3:** Shows a tree T with vertices T', T' . There are blue solid edges (T', T') and (T', T') . There are red dashed edges (T', T') and (T', T') . A vertex S_2 is shown at the top with a blue solid edge (S_2, T') and a red dashed edge (S_2, T') . A label $S_2 \rightarrow B$ is next to S_2 . The label $1.$ is below the tree.

śmy po raz pierwszy etykiet $\mathbf{S}'$ oraz $\mathbf{T}'$. Etykiety S' oraz T' występują jedynie w parach na sąsiednich wierzchołkach. Nazywamy je odpowiednio *parą specjalną* S' oraz *parą specjalną* T' . Używamy etykiety S' w dwóch sytuacjach:

- 32

Używamy etykiety T' dla obu wierzchołków z pary sąsiednich wierzchołków na 2C_3 , która stanie się parą specjalną T , jeśli dołączymy coś do obu wierzchołków z tej pary, ponieważ teraz ma jednego sąsiada z etykietą B oraz formę:

1. multikrawędź pokolorowana na czerwono, pierwszy wierzchołek z pary T' , multikrawędź pokolorowana na czerwono, drugi wierzchołek z pary T' oraz multikrawędź pokolorowana na czerwono-niebiesko (lub symetrycznie)
2. multikrawędź pokolorowana na czerwono, pierwszy wierzchołek z pary T' , multikrawędź pokolorowana na niebiesko, drugi wierzchołek z pary T' oraz multikrawędź pokolorowana na czerwono-niebiesko (lub symetrycznie). Ta forma pojawi się później (zobacz rysunek 2.10).

Zawsze używamy przedstawionego kolorowania 2C_5 z kołcem, gdy dołączamy 2C_5 do wierzchołka z etykietą S_2 i co najmniej jeden z sąsiadów y na dołączonym multicyklu 2C_5 ma kołec, ponieważ chcemy uniknąć potencjalnych problemów z parą specjalną S' .

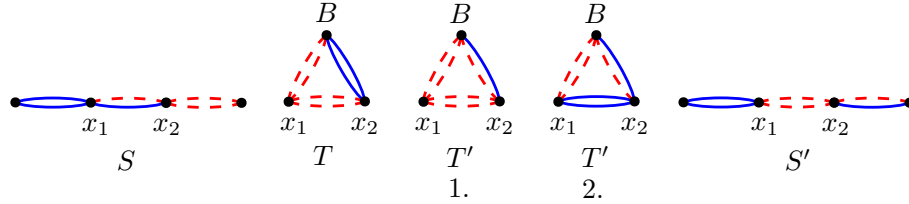
Teraz przedstawimy metodę dołączania tylko multidrzewa 2T ukorzonego w wierzchołku r do wierzchołka x z etykietą S_2 . Rozważamy dwa przypadki. Załóżmy, że kolor czerwony jest dominujący w wierzchołku x .

Przypadek 1: $\hat{d}(r) = 2$ w multidrzewie 2T . Kolorujemy multikrawędź korzenia rx' na czerwono-niebiesko. Jeśli $\hat{d}(x') > 4$, to kolorujemy multidrzewo ukorzone w wierzchołku x' używając lematu 13, tak że niebieski jest kolorem dominującym w wierzchołku x' . Jeśli $\hat{d}(x') = 4$, to kolorujemy multikrawędź $x'x_1$ na czerwono-niebiesko, a następnie kolorujemy ukorzone multidrzewo w wierzchołku x_1 korzystając z lematu 13, tak że niebieski jest kolorem dominującym w wierzchołku x_1 .

Przypadek 2: $\hat{d}(r) > 2$ w multidrzewie 2T . Traktujemy to ukorzone multidrzewo jako zbiór multikrzewów ze wspólnym korzeniem. Wybieramy jeden z tych multikrzewów i kolorujemy go w taki sam sposób jak w pierwszym przypadku. Następnie kolorujemy pozostałą część multidrzewa używając takiej samej metody jak gdy dołączamy go do wierzchołka z etykietą B , tak że czerwony jest kolorem dominującym w wierzchołku x .

Teraz przedstawimy szczegółowo metodę dołączania elementów do par wierzchołków z etykietami S , T , T' oraz S' na multicyklu. Zauważmy, że w każdym pokolorowanym multicyklu jest co najwyżej jedna para wierzchołków z etykietami S lub S' lub T lub T' . Gdy rozważamy każdą z tych par to dołączamy w tym samym czasie wszystkie multidrzewa i multicykle do obu wierzchołków tworzących tę parę. Przypomnijmy, że pary wierzchołków z etykietami T lub T' występują tylko na multicyklu 2C_3 . Poniżej na rysunku

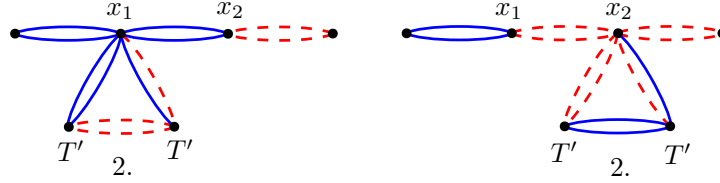
2.10 przypominamy formę każdej z par, ale może się zdarzyć, że będziemy mieli pary z symetrycznym kolorowaniem i wówczas traktujemy je analogicznie. Zauważmy, że w każdej parze wierzchołków obydwie wierzchołki tworzące tę parę mają taką samą etykietę, i ta etykieta tworzy nazwę pary.



Rysunek 2.10: Forma pary wierzchołków z etykietami S , T , T' oraz S' .

Para S. Rozważamy dwa przypadki.

Przypadek 1: dołączamy tylko jeden multicykl spośród 2C_3 , ${}^2C_{4k}$ oraz ${}^2C_{4k+1}$ do pary specjalnej S . Gdy dołączamy 2C_3 używamy jednego z następujących kolorowań przedstawionych na rysunku 2.11. Zauważmy, że stworzyliśmy parę specjalną T' w drugiej formie na tym multicyklu 2C_3 .



Rysunek 2.11: Kolorowania multicyklu 2C_3 dołączonego do pary specjalnej S .

Gdy dołączamy multicykl ${}^2C_{4k}$ lub ${}^2C_{4k+1}$ do wierzchołka x_1 to najpierw przekolorowujemy multikrawędź x_1x_2 na niebiesko, a następnie dołączamy ten multicykl używając metody dołączania do wierzchołka z etykietą S_2 . Gdy dołączamy multicykl ${}^2C_{4k}$ lub ${}^2C_{4k+1}$ do wierzchołka x_2 to najpierw przekolorowujemy multikrawędź x_1x_2 na czerwono, a następnie dołączamy ten multicykl używając metody dołączania do wierzchołka z etykietą S_2 .

Przypadek 2: w przeciwnym razie, dołączamy ukorzenione multidrzewo i wszystkie rodzaje multicykli do wierzchołka x_1 korzystając z metody dołączania do wierzchołka z etykietą B , tak że niebieski jest kolorem dominującym w x_1 . Następnie dołączamy ukorzenione multidrzewo i wszystkie rodzaje multicykli do wierzchołka x_2 korzystając z metody dołączania do wierzchołka z etykietą B , tak że czerwony jest kolorem dominującym w x_2 . Zauważmy, że czerwone multikrawędzie w x_1 pochodzą z multicykli ${}^2C_{4k}$, ${}^2C_{4k+1}$ oraz 2C_3 ,

podobnie niebieskie multikrawędzie w wierzchołku x_2 pochodzą z multicykli ${}^2C_{4k}$, ${}^2C_{4k+1}$ oraz 2C_3 .

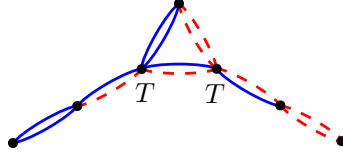
Oczywiście możemy mieć konflikt pomiędzy wierzchołkami x_1 oraz x_2 . Najpierw rozważmy konflikt, gdy jeden wierzchołek z pary S , powiedzmy x_1 spełnia $\hat{d}(x_1) = 4$. To oznacza, że $\hat{d}_b(x_1) = \hat{d}_b(x_2) = 3$. W związku z tym wystarczy przekolorować symetrycznie jeden z multicykli ${}^2C_{4k+3}$, ${}^2C_{4k+2}$ lub ukorzenione multidrzewo dołączone do wierzchołka x_2 , aby rozwiązać ten konflikt. Jeśli mamy podobny konflikt i wierzchołek x_2 spełnia $\hat{d}(x_2) = 4$, to rozwiązujemy go analogicznie. Załóżmy, że $\hat{d}(x_1) > 4$, $\hat{d}(x_2) > 4$ i mamy konflikt pomiędzy wierzchołkami x_1 oraz x_2 . Zatem na pewno dołączyliśmy co najmniej dwa multicykle ze zbioru wszystkich multicykli ${}^2C_{4k+1}$, ${}^2C_{4k}$ oraz 2C_3 do jednego z wierzchołków x_1 lub x_2 . Aby rozwiązać ten konflikt przekolorujemy używając kolorowania z metody dołączania do wierzchołka z etykietą S_2 i tak, że zwiększamy stopień w dominującym kolorze dokładnie dwa multicykle ze zbioru wszystkich multicykli ${}^2C_{4k+1}$, ${}^2C_{4k}$ oraz 2C_3 dołączonych do jednego wierzchołka z pary S . Zatem zawsze rozwiążemy ten konflikt, ponieważ używając powyższej procedury zwiększamy stopień w dominującym kolorze o dwa i zmniejszamy stopień w drugim kolorze o dwa w jednym wierzchołku z pary S . Tym samym zakończyliśmy rozważanie pary specjalnej S .

Uwaga 17. *Podczas procedury dodawania multicykli opisanej powyżej nowe etykiety zostały przypisane do par specjalnych T , T' oraz S' . W związku z tym poniżej musimy opisać jak dodać dalsze elementy do tych par.*

Para S' , występująca jedynie na multicyklach 2C_5 oraz 2C_3 jest unikalna w tym sensie, że powinniśmy zacząć proces dodawania elementów do tych multicykli od tej pary, aby uniknąć potencjalnych problemów z sąsiadami pary S' na 2C_5 .

Para T . Gdy dodajemy tylko do jednego wierzchołka z pary specjalnej T to wybieramy wierzchołek x_1 i używamy metody dołączania do wierzchołka z etykietą A . Gdy dołączamy 2K_2 do jednego wierzchołka i coś (element bądź elementy) do drugiego wierzchołka z pary T to dołączamy niebieski 2K_2 do x_2 i pozostałe elementy do wierzchołka x_1 używając metody dołączania do wierzchołka z etykietą A . Szczegółne kolorowanie pary specjalnej T z dodanym kolcem do każdego jej wierzchołka jest przedstawione na rysunku 2.12.

Rozważmy sytuację, gdy będziemy dodawać coś (z wyjątkiem kolca) do jednego wierzchołka z pary T i kolce do drugiego wierzchołka z pary T . Dołączamy kolce pokolorowane na czerwono do wierzchołka x_1 , a następnie dołączamy elementy do wierzchołka x_2 zaczynając od multicykli a później ewentualnie multidrzewo używając takiej samej metody jak gdy dołączamy



Rysunek 2.12: Szczególne kolorowanie pary specjalnej T z kółcami.

do wierzchołka z etykietą A i tak, że niebieski jest kolorem dominującym w x_2 . Jeśli mamy konflikt ($\hat{d}_r(x_1) = \hat{d}_r(x_2) = 6$), to przekolorowujemy kolec dołączony do wierzchołka x_1 na niebiesko.

W pozostałej sytuacji dołączamy zaczynając od multicykli, a następnie dołączamy multidrzewa do wierzchołków x_1 oraz x_2 używając takiej samej metody jak, gdy dołączamy do wierzchołka z etykietą A , tak że czerwony jest kolorem dominującym w x_1 , a niebieski w x_2 . Jeśli mamy konflikt pomiędzy wierzchołkami x_1 oraz x_2 to bez przekolorowywania przenosimy wszystkie dołączone elementy z wierzchołka x_1 do x_2 , a z wierzchołka x_2 do x_1 (wykonujemy zamianę pokolorowanych elementów między wierzchołkami x_1 oraz x_2). Tym samym zakończyliśmy rozważanie pary specjalnej T .

Para T' . Najpierw zaprezentujemy ogólną metodę dołączania multidrzewa 2T o korzeniu r do wierzchołka x_2 . Rozważamy dwa przypadki.

Przypadek 1: $\hat{d}(r) = 2$ w multidrzewie 2T . Kolorujemy multikrawędź korzenia rx' na czerwono-niebiesko. Następnie kolorujemy multidrzewo ukorzenione w wierzchołku x' korzystając z lematu 13.

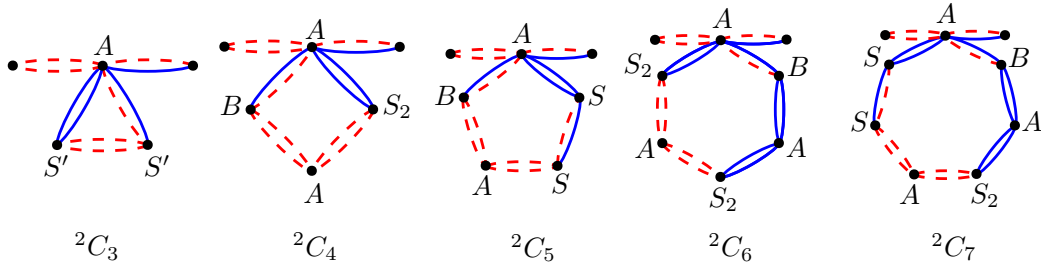
Przypadek 2: $\hat{d}(r) \geq 4$ w multidrzewie 2T . Traktujemy multidrzewo ukorzenione w wierzchołku r jako zbiór multikrzewów o wspólnym korzeniu. Wybieramy jeden multikrzew ukorzeniony w wierzchołku r i kolorujemy go w taki sam sposób jak w przypadku pierwszym. Następnie dołączamy pozostałą część 2T do wierzchołka x_2 korzystając z metody dołączania do wierzchołka z etykietą A zaczynając od multikrawędzi korzenia w dominującym kolorze w x_2 jeśli $\hat{d}(r) = 4$ w 2T oraz zaczynając od innego koloru multikrawędzi incydentnych do r w pozostałej części 2T jeśli $\hat{d}(r) > 4$ w 2T .

Teraz przedstawimy szczegółowo metodę dołączania elementów do pary specjalnej T' w pierwszej formie. Gdy dołączamy tylko do jednego wierzchołka z pary T' to wybieramy wierzchołek x_1 i używamy metody dołączania do wierzchołka z etykietą A .

Gdy dołączamy jedynie multidrzewo do każdego wierzchołka z pary specjalnej T' to dołączamy pierwsze multidrzewo do x_1 używając tej samej metody co gdy dołączamy do wierzchołka z etykietą A oraz drugie multidrzewo do wierzchołka x_2 używając ogólnej metody dołączania multidrzewa ukorzenionego w r do wierzchołka x_2 tak, że niebieski jest kolorem dominującym w x_2 ,

jeśli dołączamy multidrzewo o stopniu korzenia równym co najmniej sześć. Jeśli dołączamy multidrzewo o stopniu korzenia równym dwa i multidrzewo o stopniu korzenia równym cztery to dołączamy multidrzewo o stopniu korzenia równym dwa do wierzchołka x_2 i multidrzewo o stopniu korzenia równym cztery do wierzchołka x_1 , aby uniknąć konfliktu.

W pozostałym przypadku najpierw dołączamy dokładnie jeden multicykl do wierzchołka x_2 używając kolorowania przedstawionego na rysunku 2.13. Kolorowanie dłuższego multicyklu uzyskujemy przez zamienienie dwóch czerwonych multikrawędzi na multiścieżkę długości $4k+2$ pokolorowaną: pierwsze dwie multikrawędzie na czerwono, następne dwie multikrawędzie na niebiesko, kolejne dwie multikrawędzie na czerwono i tak dalej na odpowiednim pokolorowanym multicyklu o długości od cztery do siedem. Następnie konty-



Rysunek 2.13: Kolorowanie multicyklu dołączonego na początku do wierzchołka x_2 w parze specjalnej T' .

nuujemy dołączanie multicykli i ewentualnie multidrzewa do wierzchołka x_2 używając takiej samej metody, jak gdy dołączamy do wierzchołka z etykietą A , tak że niebieski jest kolorem dominującym w x_2 . Następnie dołączamy elementy do wierzchołka x_1 używając takiej samej metody, jak gdy dołączamy do wierzchołka z etykietą A , tak że czerwony jest kolorem dominującym w x_1 . Na koniec, jeśli mamy konflikt pomiędzy wierzchołkami x_1 oraz x_2 , a mianowicie $\hat{d}_r(x_1) = \hat{d}_r(x_2)$, to przekolorowujemy symetrycznie (zamieniamy kolory wszystkich multikrawędzi) dołączony jako pierwszy multicykl do wierzchołka x_2 .

Teraz przedstawimy metodę dołączania elementów do pary specjalnej T' w drugiej formie. Gdy dołączamy tylko do jednego wierzchołka z pary T' , to wybieramy wierzchołek x_2 i rozważamy dwie sytuacje. W pierwszej sytuacji dołączamy tylko multidrzewo używając ogólnej metody dołączania multidrzewa do wierzchołka x_2 . W drugiej sytuacji, gdy dołączamy multicykl lub multicykle i ewentualnie multidrzewo używamy metody dołączania do wierzchołka x_2 z pary specjalnej T' w pierwszej formie. Jeśli dołączamy coś do obu wierzchołków z pary specjalnej T' w drugiej formie, to zaczynamy od przekolorowania multikrawędzi x_1x_2 na czerwono. Zatem para T' otrzymuje

pierwszą formę i korzystamy z powyższej metody dołączania do pary specjalnej T' w pierwszej formie. Tym samym zakończyliśmy rozważania pary specjalnej T' .

Para S' . Ta para występuje jedynie na multicyklu 2C_3 oraz 2C_5 . Dodatkowo, jeśli para S' pojawia się na multicyklu 2C_5 dołączonym do pokolorowanej części multikaktusa w wierzchołku x , to sąsiedzi x na 2C_5 nie mają kolca i odległość pomiędzy x oraz x_1 jest taka sama jak odległość pomiędzy x oraz x_2 . Z powyższych własności pary specjalnej S' i faktu, że zaczynamy rozważanie pokolorowanego multicyklu 2C_5 z parą S' od tej pary wynika, że możemy wybrać, gdzie dołączamy (do x_1 , czy do x_2) pierwszą i drugą część elementów jakie mamy dołączyć do pary specjalnej S' .

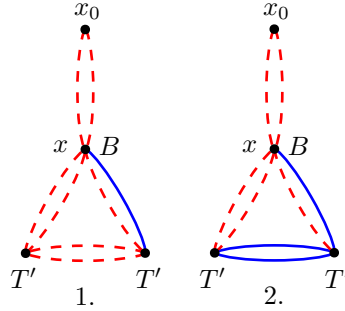
Gdy dołączamy do tylko jednego wierzchołka z pary specjalnej S' , to wybieramy wierzchołek x_2 i używamy metodę dołączania do wierzchołka z etykietą B , tak że czerwony jest kolorem dominującym w x_2 . Następnie możemy również dołączyć ukorzenione multidrzewo do wierzchołka x_1 używając takiej samej metody, jak gdy dołączamy do wierzchołka z etykietą S_2 , tak że niebieski jest kolorem dominującym w x_1 .

Rozważamy pozostały przypadek, gdy dołączamy co najmniej jeden multicykl do każdego wierzchołka z pary specjalnej S' . Najpierw dołączamy wszystko z pierwszej części elementów jakie musimy dołączyć do tej pary S' do wierzchołka x_2 używając metody dołączania do wierzchołka z etykietą B , tak że czerwony jest kolorem dominującym w x_2 . Następnie dołączamy dokładnie jeden multicykl do x_1 używając metody dołączania do wierzchołka z etykietą S_2 , tak że $\hat{d}_r(x_1) = 3$ oraz $\hat{d}_b(x_2) = 5$. Dalej dołączamy multicykle i ewentualnie multidrzewo do x_1 używając takiej samej metody, jak gdy dołączamy do wierzchołka z etykietą B , tak że niebieski jest kolorem dominującym w x_1 . Na koniec, jeśli mamy konflikt pomiędzy wierzchołkami x_1 oraz x_2 , a mianowicie $\hat{d}_r(x_1) = \hat{d}_r(x_2)$, to przekolorujemy symetrycznie dołączony jako pierwszy multicykl do wierzchołka x_1 . Tym samym zakończyliśmy rozważania pary specjalnej S' .

Dołączanie multicykli i dodatkowego multidrzewa do liścia w pokolorowanej części 2G . Zauważmy, że nigdy nie dołączamy tylko samego multidrzewa do liścia w 2G . Oznaczamy przez x wybrany liść w pokolorowanej części 2G , a przez x_0 jedyne sąsiada x w pokolorowanej części 2G . Przedstawimy metodę dołączania najdłuższego multicyklu do liścia. Po dołączeniu tego multicyklu wierzchołek x otrzymuje etykietę A lub B i ma różną parzystość od wierzchołka x_0 . W związku z tym możemy łatwo dołączyć pozostałe elementy do x . Będziemy rozważać cztery główne przypadki ze względu na kolor multikrawędzi xx_0 oraz parzystość stopni wierzchołka x_0 w obu kolorach.

Przypadek 1: multikrawędź xx_0 jest monochromatyczna, bez straty ogól-

ności czerwona, i wierzchołek x_0 jest parzysty. Najpierw opiszemy metodę dołączania multicyklu 2C_3 do wierzchołka x . Gdy dołączamy 2C_3 i coś jeszcze do x to używamy pierwszego kolorowania 2C_3 przedstawionego na rysunku 2.14. Zauważmy, że jeśli dołączymy jeszcze tylko samo multidrzewo do x to powinniśmy dążyć do uczynienia niebieskiego kolorem dominującym w wierzchołku x , aby uniknąć potencjalnego konfliktu. W innym przypadku, gdy dołączamy tylko multicykl 2C_3 do wierzchołka x to używamy drugiego kolorowania 2C_3 przedstawionego na rysunku 2.14.



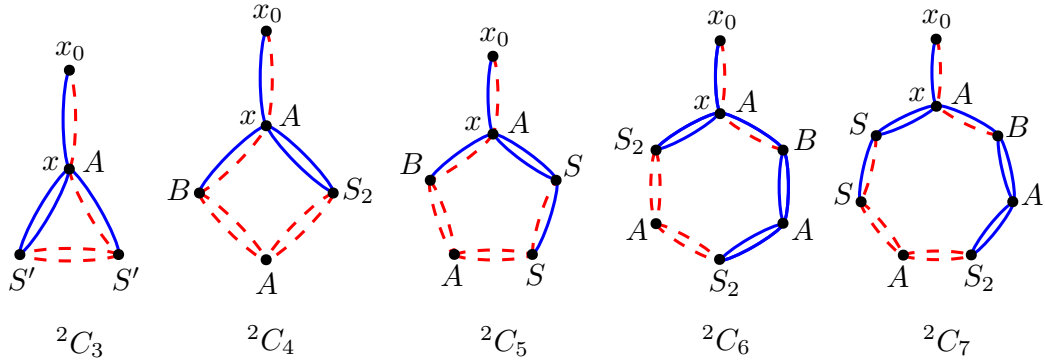
Rysunek 2.14: Kolorowania multicyklu 2C_3 dołączonego do wierzchołka x w przypadku 1.

Multicykl o długości większej niż trzy dołączamy do wierzchołka x używając metody dołączania do wierzchołka z etykietą S_2 . Zatem w całym tym przypadku wierzchołek x z dołączonym multicyklem ma etykietę B .

Przypadek 2: multikrawędź xx_0 jest monochromatyczna, bez straty ogólności czerwona, i wierzchołek x_0 jest nieparzysty. Dołączamy multicykl do wierzchołka x używając metody dołączania do wierzchołka z etykietą A , tak że czerwony jest kolorem dominującym w x . Zatem wierzchołek x z dołączonym multicyklem ma etykietę A .

Przypadek 3: multikrawędź xx_0 jest pokolorowana na czerwono-niebiesko i wierzchołek x_0 jest parzysty. Dołączamy multicykl do wierzchołka x używając metody dołączania do wierzchołka z etykietą B , tak że czerwony jest kolorem dominującym w x . Zatem wierzchołek x z dołączonym multicyklem ma etykietę B .

Przypadek 4: multikrawędź xx_0 jest pokolorowana na czerwono-niebiesko i wierzchołek x_0 jest nieparzysty. Dołączamy multicykl do wierzchołka x wykorzystując kolorowanie przedstawione na rysunku 2.15. Kolorowanie dłuższego multicyklu uzyskujemy przez zamienienie dwóch czerwonych multikrawędzi na multiścieżkę długości $4k + 2$ pokolorowaną: pierwsze dwie multikrawędzie na czerwono, następne dwie multikrawędzie na niebiesko, kolejne dwie multikrawędzie na czerwono i tak dalej na odpowiednim pokolorowanym



Rysunek 2.15: Kolorowanie multicyklu dołączonego do wierzchołka x w przypadku 4.

multicyklu o długości od cztery do siedem. Zatem wierzchołek x z dołączonym multicyklem ma etykietę A . Tym samym zakończyliśmy ostatni etap konstrukcji. $\square$

2.4 Grafy regularne

W tym podrozdziale przedstawimy krótki dowód potwierdzający, że hipoteza 6 zachodzi dla grafów regularnych. Będzie on oparty na twierdzeniu 2, które zostało niedawno udowodnione przez Keuscha w [40].

Twierdzenie 18 ([31]). *Dla każdego spójnego grafu regularnego G , który nie jest izomorficzny z K_2 multigraf 2G spełnia $\text{lir}({}^2G) \leq 2$.*

Dowód. Niech G będzie grafem d -regularnym, gdzie $d > 1$. Z twierdzenia 2 otrzymujemy kolorowanie krawędzi grafu G rozróżniające sąsiednie wierzchołki sumami, oznaczmy je przez φ , wykorzystujące kolory 1, 2 i 3. Oczywiście kolorowanie krawędzi ψ grafu G , takie że $\psi(e) = \varphi(e) - 1$ jest również rozróżniające sąsiednie wierzchołki sumami. Z kolorowania ψ tworzymy lokalnie nieregularne kolorowanie multigrafu 2G w następujący sposób: każdą krawędź w kolorze 0 zamieniamy na niebieską multikrawędź, każdą krawędź w kolorze 1 zamieniamy na czerwono-niebieską multikrawędź oraz każdą krawędź w kolorze 2 zamieniamy na czerwoną multikrawędź. Zauważmy, że liczba czerwonych krawędzi incydentnych z wierzchołkiem równa się sumie kolorów użytych na tych krawędziach w kolorowaniu ψ . Zatem, z faktu, że kolorowanie ψ jest rozróżniające sąsiednie wierzchołki sumami otrzymujemy, że czerwone stopnie każdych dwóch sąsiednich wierzchołków w kolorowaniu 2G są różne. Z faktu, że multigraf 2G jest $2d$ -regularny wiemy, iż dwa wierzchołki mają róż-

ne niebieskie stopnie, gdy mają różne czerwone stopnie. Zatem kolorowanie 2G jest lokalnie nieregularne. $\square$

2.5 Grafy rozdzielne

Na początku zdefiniujemy grafy rozdzielne i przedstawimy dwa twierdzenia z [42], które będą potrzebne do udowodnienia głównego rezultatu dla tej klasy grafów. Mówimy, że graf $G(X, Y)$ jest *rozdzielny*, jeśli istnieje podział $V(G) = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$ zbioru wierzchołków G taki, że $G[X]$ jest grafem pełnym, a Y zbiorem niezależnym. Niech $G(X, Y)$ będzie grafem rozdzielnym o zbiorze $X = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dla każdego wierzchołka $v_i \in X$ oznaczamy przez d_i liczbę sąsiadów v_i w zbiorze Y .

Twierdzenie 19 ([42]). *Niech $G(X, Y)$ będzie grafem rozdzielnym o zbiorze $X = \{v_1, \dots, v_n\}$, gdzie $d_1 \geq \dots \geq d_n$. Jeśli $n \geq 10$, to zachodzi:*

- $\text{lir}(G) \leq 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d_1 \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ lub $d_2 \geq 1$;
- $\text{lir}(G) = 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d_1 < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ oraz $d_2 = 0$. $\square$

Twierdzenie 20 ([42]). *Niech $G(X, Y)$ będzie grafem rozdzielnym o zbiorze $X = \{v_1, \dots, v_n\}$, gdzie $d_1 \geq \dots \geq d_n$. Dla $n \leq 9$, mamy:*

- G jest nierozkładalny, jeśli G jest izomorficzny z K_2 , K_3 lub P_4 ;
- gdy G jest rozkładalny, to:
 - dla $d_1 > d_2 > \dots > d_n$ zachodzi $\text{lir}(G) = 1$;
 - dla $3 \leq n \leq 9$ oraz $\sum_{i=1}^n d_i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ zachodzi $\text{lir}(G) = 2$;
 - dla $8 \leq n \leq 9$, $\sum_{i=1}^3 d_i = 3$, oraz $d_2 \geq 1$ zachodzi $\text{lir}(G) = 2$;
 - dla $n = 9$ oraz $d_1 = d_2 = 1$ zachodzi $\text{lir}(G) = 2$;
 - we wszystkich pozostałych przypadkach zachodzi $\text{lir}(G) = 3$. $\square$

Twierdzenie 21 ([31]). *Dla każdego grafu rozdzielnego G , który nie jest izomorficzny z K_2 multigraf 2G spełnia $\text{lir}({}^2G) \leq 2$.*

Dowód. Niech $G(X, Y)$ będzie grafem rozdzielnym o zbiorze $X = \{v_1, \dots, v_n\}$, gdzie $d_1 \geq \dots \geq d_n$. Bez straty ogólności możemy założyć, że zbiór wierzchołków, który indukuje klikę jest maksymalny możliwy. Jeśli $n \leq 2$, to G jest drzewem i teza wynika bezpośrednio z wniosku 11.

Następnie założymy, że $n > 2$. Z twierdzenia 19 i twierdzenia 20 wynika, że tylko następujące szczególne przypadki wymagają rozważenia:

- $d_1 < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ oraz $d_2 = 0$,
- $d_1 = d_2 = 1$ oraz $n \in \{6, 7, 8\}$.

Są to jedyne grafy rozdzielne z $n > 2$ i lokalnie nieregularnym indeksem chromatycznym równym trzy. Dla każdego innego grafu rozdzielnego G , gdzie $n > 2$, uzyskujemy z twierdzenia 19 i twierdzenia 20, że $\text{lir}(G) \leq 2$, a więc $\text{lir}(^2G) \leq 2$.

Rozważmy przypadek gdy $d_1 < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ oraz $d_2 = 0$. Z twierdzenia 8 otrzymujemy lokalnie nieregularne kolorowanie kliki indukowanej przez zbiór X w multigrafie 2G za pomocą dwóch kolorów. Bez straty ogólności przypuśćmy, że niebieski stopień wierzchołka v_1 jest maksymalny możliwy. Możemy łatwo zauważyć, że pokolorowanie pozostałych multikrawędzi (wiszących multikrawędzi incydentnych z wierzchołkiem v_1) na niebiesko utworzy lokalnie nieregularne kolorowanie 2G za pomocą dwóch kolorów.

Teraz rozważmy przypadek, gdy $d_1 = d_2 = 1$ oraz $n \in \{6, 7, 8\}$. Jak w poprzednim przypadku z twierdzenia 8 otrzymujemy lokalnie nieregularne kolorowanie kliki indukowanej przez zbiór X w multigrafie 2G za pomocą dwóch kolorów. Zauważmy, że wierzchołek z największym niebieskim stopniem jest różny od wierzchołka z największym czerwonym stopniem. W przeciwnym przypadku wszystkie wierzchołki miałyby takie same czerwone i niebieskie stopnie, co przeczy, że kolorowanie jest lokalnie nieregularne. Przypuśćmy, że wierzchołki v_1 oraz v_2 mają największe odpowiednio niebieskie i czerwone stopnie. Niech w_1 będzie sąsiadem v_1 poza kliką oraz w_2 będzie sąsiadem v_2 poza kliką. Aby dokończyć kolorowanie, kolorujemy multikrawędź v_1w_1 na niebiesko, a multikrawędź v_2w_2 na czerwono. Możemy łatwo zauważyć, iż żaden konflikt nie powstał pomimo możliwości, że $w_1 = w_2$. Zatem, również w tym przypadku otrzymujemy $\text{lir}(^2G) \leq 2$. $\square$

2.6 Grafy planarne

W [14], Bensmail, Dross i Nisse udowodnili, że lokalnie nieregularny indeks chromatyczny każdego lokalnie nieregularnie kolorowalnego grafu planarnego G wynosi co najwyżej 15. Ponadto gdy rozmiar G jest parzysty to lokalnie nieregularny indeks chromatyczny jest ograniczony z góry przez 14. Ten rezultat w oczywisty sposób daje nam ograniczenie górne przez 15 lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego 2-multigrafu uzyskanego z kolorowalnego grafu planarnego. W tym podrozdziale znacząco obniżymy to ograniczenie.

Twierdzenie 22 ([31]). *Dla każdego spójnego grafu planarnego G , który nie jest izomorficzny z K_2 multigraf 2G spełnia $\text{lir}(^2G) \leq 4$.*

Dowód. Z twierdzenia o czterech kolorach wiemy, że $\chi(G) \leq 4$. Zauważmy, że jeśli $\chi(G) \leq 2$, czyli graf G jest dwudzielny, to nasza teza wynika z twierdzenia 10. Zatem w dalszej części dowodu możemy założyć, że $\chi(G) \in \{3, 4\}$. Niech $V_1, \dots, V_{\chi(G)}$ będą klasami kolorów we właściwym kolorowaniu wierzchołków grafu G za pomocą $\chi(G)$ kolorów.

Jeśli $\chi(G) = 3$ to oznaczamy przez G_1 podgraf rozpinający grafu G o $E(G_1) = \{uv : u \in V_1\}$ oraz przez G_2 oznaczmy podgraf rozpinający G o $E(G_2) = E(G) \setminus E(G_1)$. Jeśli $\chi(G) = 4$, to niech G_1 będzie podgrafem rozpinającym G o $E(G_1) = \{uv : (u \in V_1 \cup V_3 \wedge v \in V_2) \vee (u \in V_3 \wedge v \in V_4)\}$, oraz niech G_2 będzie podgrafem rozpinającym G o $E(G_2) = E(G) \setminus E(G_1)$. Oczywiście podgrafy G_1 oraz G_2 są dwudzielne. Ponadto zauważmy, że jeśli $i, j \in \{1, \dots, \chi(G)\}$ oraz $i \neq j$, to jest co najmniej jedna krawędź łącząca wierzchołek ze zbioru V_i z wierzchołkiem ze zbioru V_j . Zatem $\chi(G_1) = 2$ oraz $\chi(G_2) = 2$.

Może się zdarzyć, że któryś z podgrafów G_1 lub G_2 zawiera izolowaną krawędź i przez to twierdzenie 10 nie może być zastosowane do niego. Aby uniknąć tego problemu używamy następującego lematu udowodnionego przez Baudona i in. w [5].

Lemat 23 ([5]). *Założmy, że możemy pokolorować krawędzie grafu G bez izolowanych krawędzi i izolowanych trójkątów za pomocą dwóch kolorów czerwonego i niebieskiego w taki sposób, że czerwony podgraf indukowany G_R oraz niebieski podgraf indukowany G_B spełniają: $\chi(G_R) = r$ oraz $\chi(G_B) = b$, gdzie $r, b \geq 2$. Wówczas graf G może być również pokolorowany dwoma kolorami, czerwonym i niebieskim w taki sposób, że $\chi(G_R) \leq r$, $\chi(G_B) \leq b$, oraz G_R i G_B są bez izolowanych krawędzi.*

Z lematu 23 otrzymujemy rozkład grafu G na dwa grafy dwudzielne G_1 oraz G_2 bez izolowanych krawędzi. Zatem z twierdzenia 10 obydwie 2-multigrafy 2G_1 oraz 2G_2 mają lokalnie nieregularne kolorowanie za pomocą dwóch kolorów. Niech multigraf 2G_1 będzie pokolorowany za pomocą kolorów czerwonego i niebieskiego, a multigraf 2G_2 za pomocą kolorów zielonego i żółtego. Podmultigrafy multigrafów 2G_1 oraz 2G_2 indukowane przez krawędzie w tym samym kolorze tworzą rozkład multigrafu 2G na cztery lokalnie nieregularne podmultigrafy, czyli $\text{lir}({}^2G) \leq 4$. $\square$

Jako natychmiastową konsekwencję powyższego twierdzenia otrzymujemy następujący rezultat.

Twierdzenie 24 ([31]). *Dla każdego spójnego grafu trójdzielnego lub czterodzielnego G multigraf 2G spełnia $\text{lir}({}^2G) \leq 4$.*

2.7 Grafy subkubiczne

W tym podrozdziale przedstawimy nowe ograniczenie górne przez stałą dla lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego multigrafu 2G w przypadku, gdy G jest grafem subkubicznym (o maksymalnym stopniu co najwyżej trzy) różnym od K_2 . To nowe ograniczenie górne dla grafów subkubicznych poprawia ograniczenie wynikające bezpośrednio z twierdzenia 24. Ponadto udowodnimy hipotezę 6 dla dwóch szczególnych rodzin grafów subkubicznych.

Zacniemy od przedstawienia kilku definicji i twierdzeń potrzebnych do udowodnienia wyżej wymienionych rezultatów. Niech $K''_{1,3}$ będzie podpodzieloną gwiazdą otrzymaną z gwiazdy $K_{1,3}$ przez zastąpienie dwóch jej krawędzi ścieżkami długości dwa. Rozkład grafu spójnego nazywamy *odpowiednim* jeśli składa się ze ścieżek długości dwa i co najwyżej jednego podgrafu izomorficznego z gwiazdą $K_{1,3}$ lub podpodzieloną gwiazdą $K''_{1,3}$. Rozkład grafu spójnego, oznaczany przez $\mathcal{D}$, jest *bardzo odpowiedni*, jeśli jest odpowiedni i gdy rozkład $\mathcal{D}$ zawiera podgraf izomorficzny z $K''_{1,3}$, to graf nie ma odpowiedniego rozkładu bez $K''_{1,3}$. Mówimy, że dwa elementy odpowiedniego rozkładu grafu są *sąsiednie* jeśli mają wspólny wierzchołek.

W [21] Bensmail, Merker i Thomassen pokazali poniższe ważne twierdzenie.

Twierdzenie 25 ([21]). *Każdy graf posiadający lokalnie nieregularne kolorowanie ma odpowiedni rozkład.* $\square$

Korzystając z tego rezultatu Lužar, Przybyło i Soták udowodnili następujące twierdzenie.

Twierdzenie 26 ([45]). *Niech G będzie grafem subkubicznym mającym lokalnie nieregularne kolorowanie, a $\mathcal{D}$ bardzo odpowiednim rozkładem G . Wówczas graf G posiada lokalnie nieregularne kolorowanie za pomocą czterech kolorów takie, że:*

- *krawędzie każdego elementu rozkładu $\mathcal{D}$ są pokolorowane tym samym kolorem i*
- *jeśli krawędzie dwóch sąsiednich elementów p_1, p_2 rozkładu $\mathcal{D}$ są pokolorowane tym samym kolorem to ich wspólny wierzchołek jest wierzchołkiem centralnym albo p_1 , albo p_2 .* $\square$

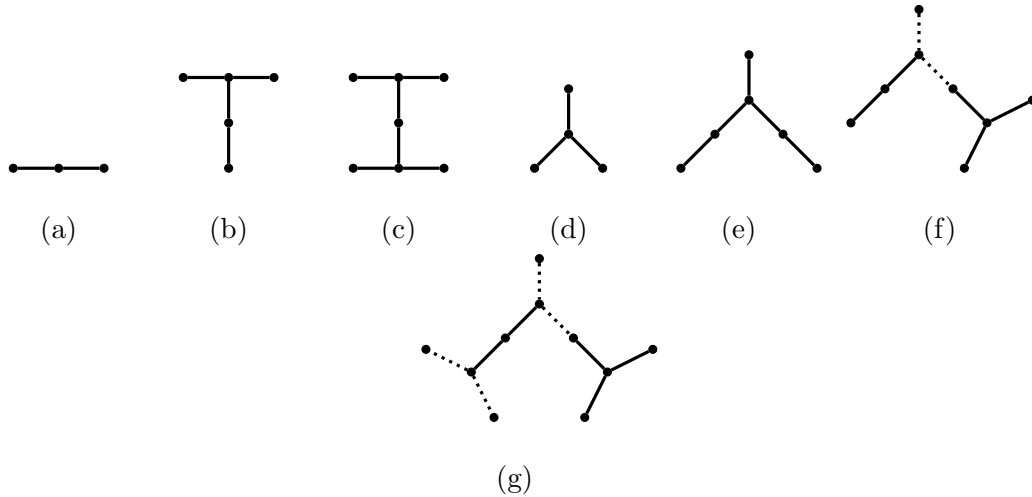
Możemy łatwo zauważyć, że również powyższy rezultat implikuje, iż dla każdego spójnego grafu G mającego lokalnie nieregularne kolorowanie multigraf 2G spełnia $\text{lir}({}^2G) \leq 4$. Poniżej poprawimy ten wniosek z twierdzenia 26 dowodząc następujące twierdzenie.

Twierdzenie 27 ([31]). *Dla każdego spójnego grafu subkubicznego G , który nie jest izomorficzny z K_2 multigraf 2G spełnia $\text{lir}({}^2G) \leq 3$.*

Dowód. Z twierdzenia 14 wiemy, że $\text{lir}({}^2G) \leq 2$ dla każdego kaktusa $G \neq K_2$. Korzystając z faktu, że wszystkie grafy spójne nie mające lokalnie nieregularnego kolorowania są kaktusami możemy założyć, że G ma lokalnie nieregularne kolorowanie.

Z rezultatu Bensmaila, Merkera i Thomassena [21] mamy odpowiedni rozkład G , a stąd otrzymujemy bardzo odpowiedni rozkład $\mathcal{D}$ grafu G . Następnie korzystając z twierdzenia 26 mamy lokalnie nieregularne kolorowanie φ grafu G za pomocą co najwyżej czterech kolorów z dodatkowymi własnościami. Niech kolorowanie φ używa kolorów 1, 2, 3, 4. Bez straty ogólności założymy, że liczba krawędzi w kolorze 4 jest minimalna możliwa i założymy, że $\varphi(p) = 1$ jeśli element $p \in \mathcal{D}$ jest izomorficzny z $K_{1,3}$ lub $K''_{1,3}$.

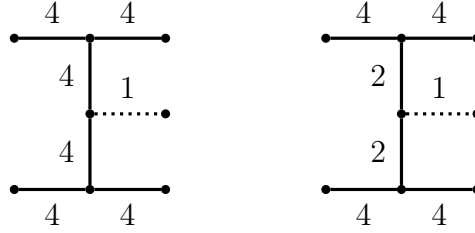
W dalszej części dowodu będziemy oznaczać przez $G[\varphi^{-1}(c)]$ podgraf grafu G indukowany przez krawędzie w kolorze c w kolorowaniu φ .



Rysunek 2.16: Potencjalnie możliwe składowe spójne monochromatycznych podgrafów. Jeśli rozkład $\mathcal{D}$ jest bardzo odpowiedni, składowe spójne (f) oraz (g) są niemożliwe do uzyskania (rozkład bez $K''_{1,3}$ został zasugerowany za pomocą ciągłych i przerywanych krawędzi).

Kolorowanie φ jest lokalnie nieregularne, a z dodatkowych własności φ (zobacz twierdzenie 26) wynika, że każda składowa spójna monochromatycznego podgrafu G może mieć, hipotetycznie mówiąc, jedną z siedmiu form przedstawionych na rysunku 2.16. Jednakże dwie z nich, a mianowicie (f) oraz (g) z rysunku 2.16 przeczą założeniu, że rozkład $\mathcal{D}$ jest bardzo odpowiedni. Zatem, jeśli rozmiar G jest parzysty to każda składowa spójna

monochromatycznego podgrafu G jest izomorficzna z (a), (b) lub (c) z rysunku 2.16. Z drugiej strony, jeśli rozmiar grafu G jest nieparzysty, to mamy dokładnie jedną składową spójną podgrafu G indukowaną przez kolor 1, która jest izomorficzna z (d) lub (e) z rysunku 2.16, a każda inna składowa spójna monochromatycznego podgrafu jest izomorficzna z (a), (b) lub (c).



Rysunek 2.17: Obniżenie liczby krawędzi w kolorze 4, jeśli składowa spójna $G[\varphi^{-1}(4)]$ jest izomorficzna z (c) (kolory 1 oraz 2 mogą być zamienione na dowolną kombinację dwóch kolorów ze zbioru $\{1, 2, 3\}$).

Z założenia, że liczba krawędzi w kolorze 4 jest najmniejszą możliwą w kolorowaniu φ wiemy, że żadna składowa spójna podgrafu grafu G indukowanego przez krawędzie w kolorze 4 nie jest izomorficzna z (c). Gdyby istniała taka składowa spójna, to moglibyśmy przekolorować krawędzie środkowej części (c) na kolor, który nie był użyty na elementach rozkładu $\mathcal{D}$ sąsiednich z nią (zobacz rysunek 2.17) i przez to zmniejszyć liczbę krawędzi w kolorze 4. Zatem składowe spójne $G[\varphi^{-1}(4)]$ są izomorficzne z (a) lub (b) z rysunku 2.16.

W dalszej części dowodu stworzymy lokalnie nieregularne kolorowanie multigrafu 2G za pomocą kolorów: czerwonego, zielonego i niebieskiego o następującej własności (W): *jeśli element $p \in \mathcal{D}$ ma kolor $\varphi(p) \in \{1, 2, 3\}$, to jego wiszące wierzchołki nie mają czerwonego, zielonego lub niebieskiego stopnia równego pięć w tym kolorowaniu 2G* . Kolorujemy krawędzie multigrafu 2G w dwóch krokach. Zauważmy, że jeśli dany kolor jest przypisany do krawędzi 2G w jakimś kroku to nie jest nigdy zmieniany w kolejnych krokach.

Najpierw kolorujemy każdą multikrawędź 2G , która odpowiada krawędzi w kolorze 1, 2 lub 3 w kolorowaniu φ w następujący sposób: jeśli $\varphi(e) = 1$, to multikrawędź e kolorujemy na niebiesko w 2G , jeśli $\varphi(e) = 2$, to multikrawędź e kolorujemy na zielono w 2G , a jeśli $\varphi(e) = 3$, to multikrawędź e kolorujemy na czerwono w 2G . Zauważmy, że po tym kroku multikrawędzie odpowiadające krawędzom w kolorze 4 w grafie G są nie pokolorowane i uzyskane częściowe kolorowanie 2G ma własność (W), ponieważ stopnie każdego wierzchołka we wszystkich kolorach w takim częściowym kolorowaniu są parzyste.

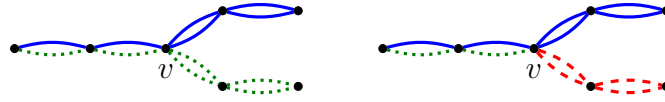
Przechodzimy teraz do drugiego etapu kolorowania 2G , w którym będziemy kolorować resztę krawędzi, czyli $E(G[\varphi^{-1}(4)])$. Jak pokazaliśmy wcześniej składowe spójne $G[\varphi^{-1}(4)]$ są izomorficzne z (a) lub (b).

Najpierw przypuśćmy, że mamy składową spójną $G[\varphi^{-1}(4)]$, która jest izomorficzna z (a) i oznaczmy przez p odpowiadający element rozkładu $\mathcal{D}$. Jeśli centralny wierzchołek elementu p nie jest wierzchołkiem końcowym pewnego elementu $q \in \mathcal{D}$, to kolorujemy każdą multikrawędź p w multigrafie 2G na czerwono-niebiesko. Jeśli wierzchołek centralny elementu p jest wierzchołkiem końcowym pewnego elementu $q \in \mathcal{D}$, to rozważamy przypadki w zależności od $\varphi(q)$: jeśli $\varphi(q) = 1$ (czyli multikrawędzie q są pokolorowane na niebiesko w multigrafie 2G), to kolorujemy każdą multikrawędź p na czerwono-zielono, jeśli $\varphi(q) = 2$ (czyli multikrawędzie q są pokolorowane na zielono w multigrafie 2G), to kolorujemy każdą multikrawędź p na czerwono-niebiesko, jeśli $\varphi(q) = 3$ (czyli multikrawędzie q są pokolorowane na czerwono w multigrafie 2G), to kolorujemy każdą multikrawędź p na zielono-niebiesko. W ten sposób nie utworzyliśmy konfliktu pomiędzy wierzchołkiem centralnym elementu p oraz wierzchołkiem centralnym elementu q . Zatem, jeśli konflikt został utworzony, to jest on pomiędzy końcowym wierzchołkiem elementu p i jakimś innym wierzchołkiem.

Przypuśćmy, że multikrawędzie elementu p zostały pokolorowane za pomocą kolorów zielonego i niebieskiego (jeśli inne kombinacje kolorów zostały użyte, to wystarczy po prostu zamienić role kolorów w poniższym argumencie). Niech v będzie wierzchołkiem końcowym elementu p . Najpierw przypuśćmy, że v jest wierzchołkiem centralnym elementu $r \in \mathcal{D}$. Jeśli element r jest niebieski (podobny argument może być użyty dla koloru zielonego) to niebieski stopień wierzchołka v wynosi pięć. Niebieski stopień wierzchołka centralnego elementu p wynosi co najwyżej cztery i sąsiedzi wierzchołka v w elemencie r nie mają niebieskiego stopnia równego pięć (jeden z nich jest w każdym przypadku wiszący i używamy własności (W), a drugi jest albo wiszący, albo wierzchołkiem stopnia trzy w (d) lub (e), i albo używamy własności (W), albo faktu, że ma niebieski stopień sześć). Jeśli element r jest czerwony, to żaden konflikt nie został utworzony na tym końcu elementu p .

Następnie przypuśćmy, że dwa elementy s oraz t z rozkładu $\mathcal{D}$ są incydentne z elementem p zawierającym wierzchołek v . Wyróżniamy dwa niesymetryczne przypadki zależące od kolorów elementów s oraz t . Przypuśćmy, że $\varphi(s) = 1$ oraz $\varphi(t) = 2$ (czyli multikrawędzie elementów s oraz t są pokolorowane na odpowiednio niebiesko i zielono). W tym przypadku niebieski i zielony stopień wierzchołka centralnego elementu p jest parzysty, niebieski i zielony stopień wierzchołka v jest równy trzy, niebieski stopień sąsiada v w elemencie s wynosi co najmniej cztery i zielony stopień sąsiada v w elemencie t jest równy co najmniej cztery. Zatem żaden konflikt nie został

utworzony i własność (W) została zachowana. Rozważmy teraz drugi przypadek, gdy $\varphi(s) = 1$ oraz $\varphi(t) = 3$ (czyli multikrawędzie elementów s oraz t są pokolorowane na odpowiednio niebiesko i czerwono). W tym przypadku niebieski i zielony stopień wierzchołka centralnego elementu p jest parzysty. Niebieski, zielony i czerwony stopień wierzchołka v wynosi odpowiednio trzy, jeden oraz dwa. Niebieski stopień sąsiada v w elemencie s wynosi co najmniej cztery i czerwony stopień sąsiada v w elemencie t wynosi co najmniej cztery. Zatem również w tym przypadku żaden konflikt nie został utworzony i własność (W) została zachowana. Przegląd tych przypadków można znaleźć na rysunku 2.18.

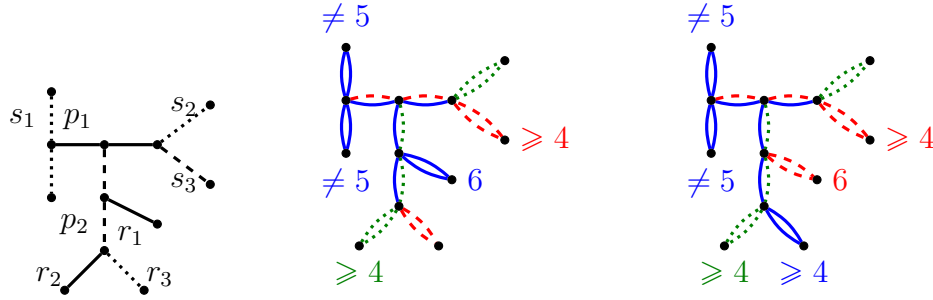


Rysunek 2.18: Przypadki gdy element $p \in \mathcal{D}$ koloru 4 w kolorowaniu φ jest izomorficzny z (a) oraz wierzchołek końcowy v elementu p jest wierzchołkiem końcowym elementów s oraz t , gdzie $s, t \in \mathcal{D}$.

Przypuśćmy zatem, że pokolorowaliśmy dotychczas niepokolorowane multikrawędzie, które odpowiadały krawędzią składowych spójnych $G[\varphi^{-1}(4)]$ izomorficznych z P_3 . Przechodzimy do kolorowania pozostałych multikrawędzi, które odpowiadają krawędzią składowych spójnych $G[\varphi^{-1}(4)]$ izomorficznych z (b). Niech $p_1, p_2 \in \mathcal{D}$ będą dwoma incydującymi elementami koloru 4 w kolorowaniu φ . Bez straty ogólności przypuśćmy, że centralny wierzchołek elementu p_1 jest wiszącym wierzchołkiem elementu p_2 . Zauważmy, że oba elementy p_1 oraz p_2 są incydujące z elementami $\mathcal{D}$ we wszystkich kolorach ze zbioru $\{1, 2, 3\}$, ponieważ w przeciwnym razie moglibyśmy przekolorować p_1 lub p_2 kolorem ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ i uzyskać odpowiednie lokalnie nieregularne kolorowanie G z mniejszą liczbą krawędzi w kolorze 4. Zatem są pewne elementy r_1, r_2, r_3 o różnych kolorach ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ takie, że wiszący wierzchołek elementu r_1 jest centralnym wierzchołkiem p_2 i wiszący wierzchołek p_2 jest także wiszącym wierzchołkiem elementów r_2 oraz r_3 . Oznaczamy przez x centralny wierzchołek elementu p_2 i przez y wierzchołek wiszący elementów p_2, r_2 oraz r_3 . Zauważmy, że sąsiad wierzchołka x w elemencie r_1 jest incydujący z trzema krawędziami w kolorze $\varphi(r_1)$. Jeśli by tak nie było to element p_1 mógłby być pokolorowany kolorem $\varphi(r_1)$, a tym samym liczba krawędzi w kolorze 4 byłaby niższa (i w pewnych przypadkach własność, że rozkład $\mathcal{D}$ jest bardzo odpowiedni byłaby niespełniona, zobacz (e) oraz (f) na rysunku 2.16).

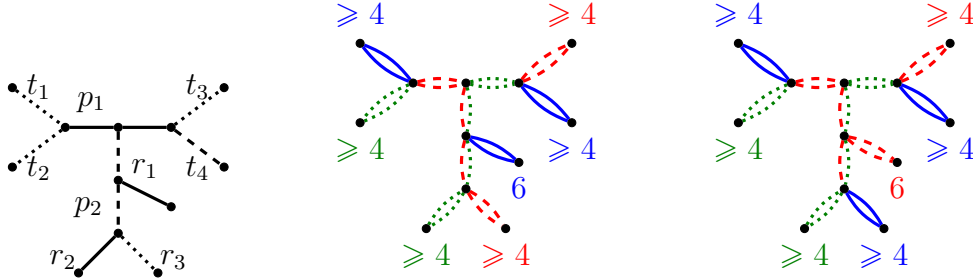
Dla liczby elementów rozkładu $\mathcal{D}$ sąsiadujących z elementem p_1 mamy dwie możliwości i przez to wyróżniamy dwa przypadki.

Przypadek 1. Element p_1 jest incydentny z czterema elementami $\mathcal{D}$, mianowicie p_2 , s_1 , s_2 oraz s_3 , gdzie wierzchołek wiszący elementu p_1 jest centralnym wierzchołkiem s_1 i inny wierzchołek wiszący elementu p_1 jest wierzchołkiem wiszącym obu elementów s_2 oraz s_3 . Dla lepszego zobrazowania sytuacji przypadek został przedstawiony na rysunku 2.19. Przypuśćmy, że $\varphi(s_1) = 1$, $\varphi(s_2) = 2$ oraz $\varphi(s_3) = 3$, czyli multikrawędzie odpowiadające elementom s_1 , s_2 oraz s_3 są pokolorowane, odpowiednio, na niebiesko, zielono i czerwono (podobny argument działa, gdy kolory elementów s_1, s_2, s_3 są spermutowane). Kolorujemy każdą multikrawędź elementu p_1 na czerwono-niebiesko i każdą multikrawędź elementu p_2 na zielono-niebiesko. Możemy łatwo zauważyć, że takie kolorowanie nie tworzy konfliktu (zobacz rysunek 2.19 dla przeglądu stopni wierzchołków w różnych kolorach). Zauważmy, że każdy sąsiad centralnego wierzchołka elementu p_1 w elemencie s_1 ma niebieski stopień różny od pięciu, ponieważ albo jest wierzchołkiem wiszącym s_1 i własność (W) zachodzi, albo jest wierzchołkiem stopnia trzy w (e).



Rysunek 2.19: Elementy $\mathcal{D}$ incydentne z p_1 oraz p_2 i możliwe kolorowania p_1 oraz p_2 z Przypadku 1.

Przypadek 2. Element p_1 jest incydentny z pięcioma elementami $\mathcal{D}$, mianowicie p_2 , t_1 , t_2 , t_3 oraz t_4 , gdzie elementy p_1 , t_1 oraz t_2 mają wspólny wierzchołek i elementy p_1 , t_3 oraz t_4 mają wspólny wierzchołek. Przypuśćmy, że $\varphi(t_1) = \varphi(t_4) = 1$, $\varphi(t_2) = 2$ oraz $\varphi(t_3) = 3$ (podobny argument działa, gdy kolory elementów t_1, t_2, t_3, t_4 są spermutowane). Są dwa podprzypadki do rozważenia, w zależności od koloru elementu r_1 . Jednakże niezależnie od koloru elementu r_1 , kolorujemy multikrawędzie elementów p_1 oraz p_2 w następujący sposób: multikrawędź incydentną do wspólnego wierzchołka p_1 , t_1 oraz t_2 na czerwono, a drugą multikrawędź elementu p_1 na zielono. Następnie kolorujemy multikrawędzie elementu p_2 na czerwono-zielono. Możemy łatwo zauważyć, na podstawie stopni w różnych kolorach wierzchołków z elementów p_1 , p_2 i ich sąsiadów, że takie kolorowanie nie powoduje żadnego konfliktu (zobacz rysunek 2.20).



Rysunek 2.20: Elementy $\mathcal{D}$ incydentne z p_1 oraz p_2 i możliwe kolorowania p_1 oraz p_2 z Przypadku 2. (podprzypadek gdy element r_1 jest niebieski (w środku) i podprzypadek gdy element r_1 jest czerwony (po prawej)).

Zatem każda krawędź multigrafu 2G została pokolorowana i nie powstał żaden konflikt, co kończy dowód. $\square$

Teraz udowodnimy hipotezę 6 dla dwóch rodzin grafów subkubicznych.

Twierdzenie 28 ([31]). *Dla każdego spójnego grafu subkubicznego $G \neq K_2$, w którym wierzchołki stopnia trzy tworzą zbiór niezależny, multigraf 2G spełnia $\text{lir}({}^2G) \leq 2$.*

Dowód. Udowodnimy, że istnieje lokalnie nieregularne kolorowanie multigrafu 2G za pomocą dwóch kolorów czerwonego i niebieskiego takie, że nie zawiera ono wiszącej multikrawędzi pokolorowanej na czerwono-niebiesko, która ma wierzchołek końcowy o czerwonym stopniu równym trzy i niebieskim stopniu równym trzy. Przypuśćmy, że jest to nieprawda. Niech graf G będzie kontrprzykładem o minimalnej liczbie krawędzi.

Zauważmy, że 2-multigrafy utworzone ze ścieżek (o długości co najmniej dwa) i cykli posiadają lokalnie nieregularne kolorowanie za pomocą dwóch kolorów (zobacz twierdzenie 7). Co więcej te 2-multigrafy nie mają wierzchołków stopnia sześć, a zatem nie mają wiszącej multikrawędzi pokolorowanej na czerwono-niebiesko, która ma końcowy wierzchołek o czerwonym stopniu trzy i niebieskim stopniu trzy. Tym samym graf G nie jest ani ścieżką, ani cyklem.

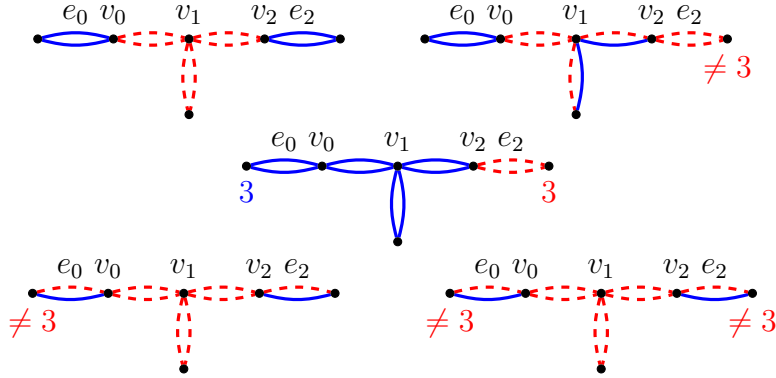
Ponadto graf G nie jest ani gwiazdą $K_{1,3}$ ani gwiazdą $K_{1,3}$ z podpodzielonymi jednokrotnie pewnymi krawędziami, ponieważ te grafy są lokalnie nieregularne. Jeśli G jest gwiazdą $K_{1,3}$ z jedną z krawędzi podpodzieloną dwukrotnie, a pozostałymi krawędziami podpodzielonymi jednokrotnie, to kolorujemy na niebiesko dwie ostatnie krawędzie na najdłuższej ścieżce, a pozostałą część grafu na czerwono, w rezultacie $\text{lir}(G) \leq 2$ i w konsekwencji $\text{lir}({}^2G) \leq 2$. Jeśli G jest trójkątem z dołączoną krawędzią do jednego z

jego wierzchołków, to możemy pokolorować dwie incydentne krawędzie na niebiesko i pozostałe dwie krawędzie na czerwono, a więc $\text{lir}(G) \leq 2$ i w konsekwencji $\text{lir}(^2G) \leq 2$.

Teraz przypuśćmy, że H jest podgrafem G izomorficznym z gwiazdą $K_{1,3}$ lub gwiazdą $K_{1,3}$ z co najwyżej dwoma jej krawędziami podpodzielonymi raz, dołączoną do reszty grafu G za pomocą wierzchołka stopnia jeden incydentnego z wierzchołkiem stopnia trzy w H . Wykazaliśmy już, że G nie jest gwiazdą $K_{1,3}$ z wszystkimi jej krawędziami podpodzielonymi raz. Zatem możemy przypuścić, że graf $G' = G - H$ jest różny od K_2 . Z minimalności G wynika, że istnieje lokalnie nieregularne kolorowanie multigrafu $^2G'$ za pomocą dwóch kolorów, w którym wiszące multikrawędzie pokolorowane na czerwono-niebiesko nie są incydentne z wierzchołkiem o czerwonym i niebieskim stopniu równym trzy. Z faktu, że H jest dołączony do wiszącej krawędzi G' wiemy, iż co najmniej jedno z dwóch monochromatycznych kolorowań 2H nie tworzy konfliktu na końcach wiszącej krawędzi G' , do której H jest dołączony. Zatem $\text{lir}(^2G) \leq 2$ w takim przypadku.

Przypuśćmy, że mamy wiszącą ścieżkę P dołączoną do wierzchołka v_1 o stopniu trzy taką, iż usunięcie P oraz v_1 skutkuje grafem bez izolowanych krawędzi, ponieważ w przeciwnym przypadku graf G nie będący ścieżką miałby wiszącą gwiazdę $K_{1,3}$ lub $K_{1,3}$ z pewnymi krawędziami podpodzielonymi raz. Oznaczmy przez v_0 oraz v_2 sąsiadów wierzchołka v_1 , którzy nie należą do ścieżki P . Oznaczmy przez G' graf uzyskany z G po usunięciu ścieżki P oraz wierzchołka v_1 . Z tego, że każda składowa spójna G' jest różna od K_2 multigraf $^2G'$ posiada odpowiednie kolorowanie. Zauważmy, że ponieważ wszystkie wierzchołki stopnia trzy są niezależne w G , to obydwie wierzchołki v_0 oraz v_2 są stopnia jeden w G' . Teraz rozważamy wszystkie możliwości jak multikrawędzie incydentne z wierzchołkami v_0 oraz v_2 w multigrafie $^2G'$ mogą być pokolorowane. Oznaczamy przez e_0 oraz e_2 multikrawędzie incydentne z wierzchołkami odpowiednio v_0 oraz v_2 w multigrafie $^2G'$. Wyróżniamy cztery przypadki w zależności od kolorów multikrawędzi e_0 oraz e_2 . Dla lepszego zobrazowania sytuacji rozważane przypadki zostały dodatkowo przedstawione na rysunku 2.21.

Przypadek 1. Przypuśćmy, że multikrawędzie e_0 oraz e_2 są monochromatyczne, pokolorowane tym samym kolorem bez straty ogólności niebieskim. W tym przypadku kolorujemy multikrawędzie incydentne z wierzchołkiem v_1 na czerwono. Jeśli ścieżka P jest nieparzystej długości to kolorujemy pozostałe multikrawędzie następująco: pierwsze dwie na niebiesko, kolejne dwie na czerwono, następne dwie na niebiesko i tak dalej. Jeśli ścieżka P jest parzystej długości to kolorujemy multikrawędź najbliższą wierzchołkowi v_1 na czerwono, a następnie kolorujemy pozostałe multikrawędzie tej ścieżki jak w poprzednim przypadku. Zatem we wszystkich tych przypadkach każda multikrawędź



Rysunek 2.21: Przypadki rozważane w dowodzie twierdzenia 28.

2P jest monochromatyczna. W oczywisty sposób uzyskane kolorowanie jest lokalnie nieregularne i wisząca multikrawędź 2P nie jest czerwono-niebieska.

Przypadek 2. Przypuśćmy, że multikrawędzie e_0 oraz e_2 są monochromatyczne, ale w różnych kolorach. Bez straty ogólności, niech multikrawędź e_0 będzie niebieska, a multikrawędź e_2 będzie czerwona. Rozważamy trzy podprzypadki.

Podprzypadek 2.1. Jeśli czerwony stopień sąsiada v_2 jest różny od trzech to kolorujemy v_0v_1 na czerwono, v_1v_2 na czerwono-niebiesko i multikrawędź P incydentną z wierzchołkiem v_1 także na czerwono-niebiesko. Jeśli długość ścieżki P jest nieparzysta to kolorujemy pozostałe multikrawędzie następująco: pierwsze dwie na niebiesko, kolejne dwie na czerwono, następne dwie na niebiesko i tak dalej. Jeśli długość ścieżki P jest parzysta to kolorujemy multikrawędź najbliższą wierzchołkowi v_1 na niebiesko, a następnie kolorujemy pozostałe multikrawędzie tej ścieżki następująco: pierwsze dwie na czerwono, kolejne dwie na niebiesko, następne dwie na czerwono i tak dalej. Zatem we wszystkich przypadkach każda multikrawędź 2P jest monochromatyczna, z wyjątkiem multikrawędzi incydentnej z wierzchołkiem v_1 . Jednakże, ponieważ czerwony i niebieski stopień wierzchołka v_1 wynosi odpowiednio cztery i dwa, uzyskane kolorowanie zachowuje własność, że nie występuje w nim wisząca multikrawędź pokolorowana na czerwono-niebiesko, która ma wierzchołek końcowy o czerwonym i niebieskim stopniu równym trzy.

Podprzypadek 2.2. Jeśli czerwony stopień sąsiada wierzchołka v_2 jest równy trzy i niebieski stopień sąsiada v_0 jest różny od trzech, to wystarczy zamienić rolami niebieski i czerwony kolor w podprzypadku 2.1.

Podprzypadek 2.3. Jeśli niebieski stopień sąsiada wierzchołka v_0 jest różny od trzech i czerwony stopień sąsiada v_2 jest różny od trzech, to kolorujemy każdą multikrawędź incydentną z wierzchołkiem v_1 na niebiesko. Następnie kolorujemy pozostałe multikrawędzie 2P w podobny sposób jak w

przypadku 1 (zamieniamy kolory na 2P).

Przypadek 3. Przypuśćmy, że multikrawędź e_0 jest czerwono-niebieska, a e_1 monochromatyczna. Bez straty ogólności niech multikrawędź e_2 będzie niebieska. Zauważmy, że czerwony stopień sąsiada wierzchołka v_0 jest różny od trzech, ponieważ w przeciwnym razie niebieski stopień takiego wierzchołka byłby równy trzy, ale to jest nie możliwe z powodu dodatkowego założenia, że końcowy wierzchołek wiszącej multikrawędzi (w tym przypadku e_0 w multigrafie ${}^2G'$) pokolorowanej na czerwono-niebiesko nie ma czerwonego i niebieskiego stopnia równego trzy. Zatem w tym przypadku kolorujemy każdą multikrawędź incydentną z v_1 na czerwono, a pozostałe multikrawędzie 2P jak w przypadku 1.

Przypadek 4. Przypuśćmy, że obydwie multikrawędzie e_0 oraz e_2 są czerwono-niebieskie. Jak w przypadku 3 sąsiedzi wierzchołków v_0 oraz v_2 nie mają czerwonego i niebieskiego stopnia równego odpowiednio trzy i trzy. Zatem w tym przypadku kolorujemy każdą multikrawędź incydentną z v_1 na czerwono, a pozostałe multikrawędzie 2P jak w przypadku 1.

W dalszej części dowodu zakładamy, że graf G nie zawiera wiszącej ścieżki. Przypuśćmy, że w grafie G występuje wiszący trójkąt, czyli dwa wierzchołki v_1, v_2 stopnia dwa i wierzchołek v_3 stopnia trzy połączone krawędziami v_1v_2 , v_1v_3 i v_2v_3 . Niech G' będzie grafem uzyskanym z G po usunięciu wierzchołków v_1, v_2 oraz v_3 . Rozważmy lokalnie nieregularne kolorowanie multigrafu ${}^2G'$ dwoma kolorami czerwonym i niebieskim, w którym żadna wisząca multikrawędź pokolorowana na czerwono-niebiesko nie ma wierzchołka końcowego z czerwonym i niebieskim stopniem równym odpowiednio trzy i trzy. Oznaczmy przez v_4 sąsiada wierzchołka v_3 różnego od v_1 oraz v_2 . Zauważmy, że wszyscy sąsiedzi v_3 mają stopień dwa w grafie G . Zatem v_4 jest wierzchołkiem wiszącym w G' .

Jeśli multikrawędź incydentna z wierzchołkiem v_4 w multigrafie ${}^2G'$ jest monochromatyczna, bez straty ogólności na przykład niebieska, to kolorujemy multikrawędzie v_3v_4 , v_1v_3 na czerwono, a pozostałe multikrawędzie na niebiesko.

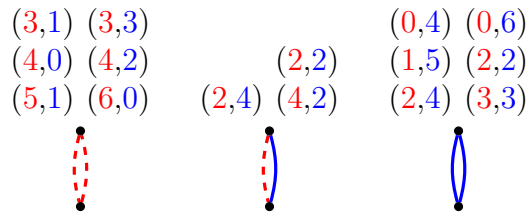
Jeśli multikrawędź incydentna z wierzchołkiem v_4 jest czerwono-niebieska, czerwony lub niebieski stopień sąsiada v_4 jest różny od trzech, to możemy bez straty ogólności założyć, że czerwony stopień sąsiada v_4 jest różny od trzech. Wówczas po raz kolejny kolorujemy multikrawędzie v_3v_4 , v_1v_3 na czerwono, a pozostałe multikrawędzie na niebiesko.

Zatem we wszystkich przypadkach, jeśli graf G ma wiszący trójkąt, to multigraf 2G ma lokalnie nieregularne kolorowanie za pomocą dwóch kolorów.

W związku z tym w dalszej części założymy, że graf G nie ma wiszącego trójkąta. Przypuśćmy, że są dwa sąsiednie wierzchołki v_1 oraz v_2 o stopniu dwa w G . Z faktu, iż G nie jest cyklem możemy założyć, że wierzchołek v_1 jest

sąsiedni z wierzchołkiem v_0 o stopniu trzy. Niech G' będzie grafem uzyskanym z G po usunięciu wierzchołków v_0 oraz v_1 . Rozważamy lokalnie nieregularne kolorowanie multigrafu ${}^2G'$ za pomocą kolorów czerwonego i niebieskiego, w którym żadna wisząca multikrawędź pokolorowana na czerwono-niebiesko nie ma wierzchołka końcowego z czerwonym i niebieskim stopniem równym odpowiednio trzy i trzy. Jeśli G' jest niespójny, to z faktu, że G nie ma wiszącej ścieżki wynika, iż G' nie zawiera izolowanych krawędzi. Stąd każda składowa spójna ${}^2G'$ posiada odpowiednie lokalnie nieregularne kolorowanie.

Oznaczmy przez x_0 oraz y_0 sąsiadów wierzchołka v_0 różnych od v_1 . Zauważmy, że wierzchołki x_0 oraz y_0 mają stopień dwa w G (graf G nie zawiera wiszącego wierzchołka). Oznaczmy przez x_1 oraz y_1 sąsiadów, odpowiednio, x_0 oraz y_0 w G' , ponieważ G nie zawiera wiszącego trójkąta, to oba wierzchołki x_0 oraz y_0 są różne od v_2 . Ponadto oznaczmy przez z sąsiada v_2 różnego od v_1 . Podobnie jak w poprzednich przypadkach omówionych w tym dowodzie rozróżniamy przypadki w zależności od kolorów użytych na multikrawędziach x_0x_1 , y_0y_1 oraz v_2z . Dla każdego kolorowania każdej z rozważanych multikrawędzi rozróżniamy także przypadki w zależności od czerwonych i niebieskich stopni wierzchołków x_1 , y_1 oraz z . Ogólnie rzecz biorąc, dla każdej z tych trzech multikrawędzi mamy 15 możliwości jej pokolorowania wraz z możliwym czerwonym i niebieskim stopniem na jednym z jej końców, zobacz rysunek 2.22. Ze względu na liczbę wszystkich przypadków do rozważenia użyliśmy programu komputerowego, który dla każdej kombinacji kolorowań multikrawędzi x_0x_1, y_0y_1, v_2z , przechodzi przez wszystkie możliwości kolorowania usuniętej części środkowej (multikrawędzie incydentne z wierzchołkami v_1 oraz v_2) i sprawdza możliwe konflikty na wierzchołkach tego podgrafu. W każdym przypadku można znaleźć dobre kolorowanie usuniętych multikrawędzi.



Rysunek 2.22: Możliwe kolorowania multikrawędzi x_0x_1 , y_0y_1 oraz v_2z .

Zatem graf G nie zawiera sąsiednich wierzchołków stopnia dwa. A więc graf G jest uzyskany z grafu kubicznego przez podpodzielenie każdej jego krawędzi dokładnie raz. Jednakże to oznacza, że graf G jest dwudzielny i nie zawiera wiszących krawędzi. Zatem z twierdzenia 10 multigraf 2G ma lokalnie nieregularne kolorowanie za pomocą dwóch kolorów z żadaną właściwością.

□

Twierdzenie 29 ([31]). *Dla każdego grafu spójnego G uzyskanego z grafu kubicznego przez zamianę pewnych jego krawędzi na ścieżki o długości co najmniej pięć multigraf 2G spełnia $\text{lir}({}^2G) \leq 2$.*

Dowód. Niech G_1 będzie grafem subkubicznym dla którego multigraf 2G_1 spełnia $\text{lir}({}^2G_1) \leq 2$. Niech u oraz v będą sąsiednimi wierzchołkami stopnia trzy w G_1 . Oznaczmy przez G_2 graf uzyskany z G_1 przez zamianę krawędzi uv na ścieżkę P o długości $\ell \geq 5$, ponadto oznaczmy przez $u, x_1, x_2, \dots, x_{\ell-1}, v$ wierzchołki tej ścieżki.

W tym dowodzie będziemy wielokrotnie używać pewnego szczególnego kolorowania multiścieżek, które będziemy nazywać standardowym. Mówimy, że kolorowanie multiścieżki $v_1v_2 \dots v_{4k+3}$ o długości $4k+2$ jest *standardowe*, jeśli wszystkie multikrawędzie $v_1v_2, v_2v_3, v_5v_6, v_6v_7, \dots, v_{4k+1}v_{4k+2}, v_{4k+2}v_{4k+3}$ są pokolorowane na czerwono (lub niebiesko), a pozostałe jej multikrawędzie są pokolorowane na niebiesko (lub odpowiednio czerwono).

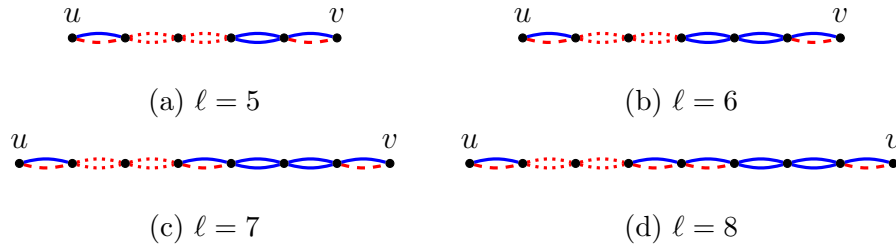
Rozważamy lokalnie nieregularne kolorowanie multigrafu 2G_1 za pomocą dwóch kolorów i dwa przypadki w zależności od kolorowania multikrawędzi uv w 2G_1 .

Przypadek 1. Multikrawędź uv jest monochromatyczna w kolorowaniu 2G_1 . Bez straty ogólności przypuśćmy, że uv jest niebieska. Zauważmy, że co najmniej jeden z wierzchołków u oraz v nie ma niebieskiego stopnia równego cztery, zatem założmy, że niebieski stopień wierzchołka u jest różny od czterech. Kolorujemy multikrawędzie $ux_1, x_1x_2, x_{\ell-1}, v$ na niebiesko. Otrzymane częściowe kolorowanie jest lokalnie nieregularne. Niepokolorowana część multigrafu 2G_2 jest multiścieżką ${}^2P'$ o długości $\ell - 3$. Jeśli $\ell - 3 \equiv 2 \pmod{4}$, to stosujemy standardowe kolorowanie multiścieżki zaczynające i kończące się na czerwonych multikrawędziach. Jeśli $\ell - 3 \equiv 3 \pmod{4}$, to kolorujemy x_2x_3 na czerwono-niebiesko, a resztę multiścieżki ${}^2P'$ standardowo zaczynając i kończąc czerwonymi multikrawędziami. Jeśli $\ell - 3 \equiv 0 \pmod{4}$, to kolorujemy multikrawędzie x_2x_3 oraz x_3x_4 na czerwono-niebiesko i stosujemy standardowe kolorowanie reszty multiścieżki ${}^2P'$ zaczynające i kończące się czerwonymi multikrawędziami. Jeśli $\ell - 3 \equiv 1 \pmod{4}$, to kolorujemy multikrawędzie x_2x_3 oraz x_3x_4 na czerwono-niebiesko, multikrawędź x_4x_5 na niebiesko, a resztę multiścieżki ${}^2P'$ standardowo zaczynając i kończąc czerwonymi multikrawędziami. Nie trudno zauważyć, że we wszystkich tych przypadkach otrzymane kolorowanie jest lokalnie nieregularne.

Przypadek 2. Multikrawędź uv jest czerwono-niebieska w kolorowaniu 2G_1 . Oznaczmy przez r_u oraz r_v czerwone stopnie wierzchołków u oraz v w kolorowaniu multigrafu 2G_1 . Z faktu, że kolorowanie jest lokalnie nieregularne

i czerwono-niebieska multikrawędź łączy wierzchołki u oraz v w 2G_1 otrzymujemy, że $r_u \neq r_v$. Zatem w dalszej części możemy założyć, że $1 \leq r_u < r_v$. Kolorujemy multikrawędzie ux_1 oraz $x_{\ell-1}v$ na czerwono-niebiesko. Zatem wierzchołki u oraz v mają takie same stopnie w obu kolorach w kolorowaniu multigrafu 2G_2 jak miały w kolorowaniu 2G_1 , czyli żaden konflikt pomiędzy wierzchołkami u lub v i ich sąsiadami poza ścieżką P nie został utworzony. Rozważamy podprzypadki w zależności od pary (r_u, r_v) i długości ℓ .

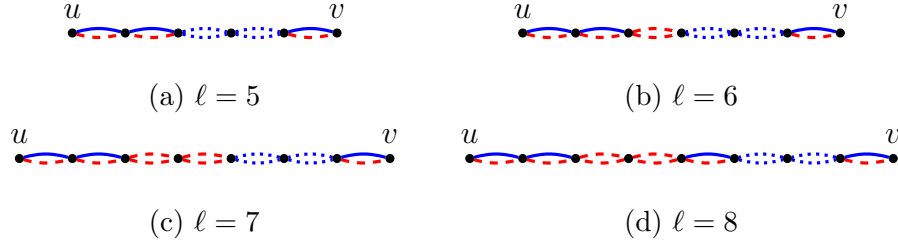
Podprzypadek 2.1. Przypuśćmy, że $(r_u, r_v) \in \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$. Jeśli $\ell \leq 8$, to używamy jednego z kolorowań przedstawionych na rysunku 2.23. Jeśli $\ell \geq 9$, to rozszerzamy takie kolorowanie multiścieżki przez zamianę dwóch incydentnych czerwonych multikrawędzi na standardowo pokolorowaną multiścieżkę dowolnej długości postaci $4k + 2$, zaczynającą i kończącą się czerwonymi multikrawędziami. Z faktu, że $r_u \neq 3$ wiemy, iż nie został utworzony żaden konflikt pomiędzy wierzchołkiem u i jego sąsiadem ze ścieżki P . Podobnie, $r_v \neq 3$, a więc niebieski stopień wierzchołka v jest różny od trzech i nie ma konfliktu pomiędzy v i jego sąsiadem ze ścieżki P . Zatem, jeśli otrzymane kolorowanie nie jest lokalnie nieregularne to jest konflikt pomiędzy dwoma wewnętrznymi wierzchołkami P . Ale tak nie jest, co można łatwo zobaczyć na rysunku 2.23.



Rysunek 2.23: Kolorowanie pozostałych multikrawędzi w podprzypadku 2.1 z dowodu twierdzenia 29. Jeśli $\ell \geq 9$, to dwie incydentne czerwone multikrawędzie (kropkowane) są zamieniane na standardowo pokolorowaną multiścieżkę długości $4k + 2$ zaczynającą i kończącą się czerwonymi multikrawędziami.

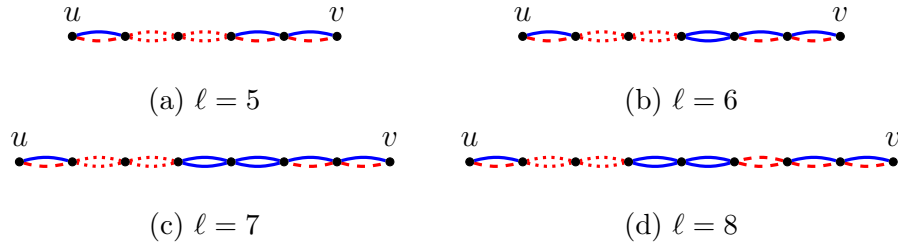
Podprzypadek 2.2. Przypuśćmy, że $(r_u, r_v) \in \{(3, 4), (3, 5)\}$. Podobnie jak w podprzypadku 2.1. zaczynamy od pokolorowania pozostałych multikrawędzi w przypadku, gdy $\ell \leq 8$ (zobacz rysunek 2.24), a następnie wydłużamy tę pokolorowaną multiścieżkę, jeśli $\ell \geq 9$. W tym przypadku zamieniamy dwie incydentne niebieskie multikrawędzie na standardowo pokolorowaną multiścieżkę długości $4k + 2$, a więc zaczynającą i kończącą się dwoma niebieskimi multikrawędziami. Nie ma konfliktu pomiędzy wierzchołkami u lub v i ich odpowiednimi sąsiadami ze ścieżki P , ponieważ $r_u = 3$ i niebieski stopień v wynosi co najwyżej dwa (bo $r_v \geq 4$). Jako, że nie ma konfliktu pomię-

dzy dwoma sąsiednimi wierzchołkami ze ścieżki P (zobacz rysunek 2.24), to otrzymane kolorowanie jest lokalnie nieregularne.



Rysunek 2.24: Kolorowanie pozostałych multikrawędzi w podprzypadku 2.2 z dowodu twierdzenia 29. Jeśli $\ell \geq 9$, to dwie incydentne niebieskie multikrawędzie (kropkowane) są zamieniane na standardowo pokolorowaną multiścieżkę długości $4k + 2$ zaczynającą i kończącą się niebieskimi multikrawędziami.

Podprzypadek 2.3. Przypuśćmy, że $(r_u, r_v) \in \{(1, 3), (2, 3)\}$. Kolorujemy multikrawędzie multiścieżki 2P jak przedstawiono na rysunku 2.25. Nie ma konfliktu pomiędzy wierzchołkiem u i jego sąsiadem ze ścieżki P , ponieważ czerwony stopień u wynosi co najwyżej dwa i niebieski stopień u wynosi co najmniej cztery. Podobnie nie ma konfliktu pomiędzy wierzchołkiem v i jego sąsiadem ze ścieżki P , ponieważ czerwony i niebieski stopień v wynosi odpowiednio trzy i trzy. Ponadto nie ma konfliktu pomiędzy dwoma sąsiednimi, wewnętrznymi wierzchołkami P , a więc kolorowanie jest lokalnie nieregularne.



Rysunek 2.25: Kolorowanie pozostałych multikrawędzi w podprzypadku 2.3 z dowodu twierdzenia 29. Jeśli $\ell \geq 9$, to dwie incydentne czerwone multikrawędzie (kropkowane) są zamieniane na standardowo pokolorowaną multiścieżkę długości $4k + 2$ zaczynającą i kończącą się czerwonymi multikrawędziami.

Zatem we wszystkich przypadkach pokazaliśmy jak rozszerzyć lokalnie nieregularne kolorowanie multigrafu 2G_1 za pomocą dwóch kolorów do lokalnie nieregularnego kolorowania multigrafu 2G_2 , co kończy dowód. $\square$

2.8 Górne ograniczenie dla lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego 2-multigrafów

W [21] Bensmail, Merker i Thomassen udowodnili ograniczenie górne przez stałą równą 328 dla lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego dowolnego grafu spójnego nie należącego do rodziny $\mathfrak{T}'$. Łatwo zauważyć, że jeśli graf G jest rozkładalny na k grafów lokalnie nieregularnych to multigraf 2G jest również rozkładalny na k multigrafów lokalnie nieregularnych, bo wystarczy użyć tego samego rozkładu co w przypadku grafów, a krawędzie zastąpić multikrawędziami. Tym samym z powyższego rezultatu otrzymujemy ograniczenie górne przez stałą równą 328 dla lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego dowolnego 2-multigrafu utworzonego z grafu spójnego nie należącego do rodziny $\mathfrak{T}'$. W tym podrozdziale istotnie poprawimy to ograniczenie stosując taką samą technikę jak w pracy [21] i wykorzystując przedstawione w tym rozdziale rezultaty dla 2-multigrafów.

Poniższy lemat dotyczący rodziny $\mathfrak{T}$ jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 14.

Lemat 30. *Dla każdego grafu G z rodziny $\mathfrak{T}$, multigraf 2G spełnia $\text{lir}({}^2G) \leq 2$.* $\square$

Z twierdzenia 7 wiemy, że 2-multigrafy utworzone z cykli i ścieżek o długości co najmniej dwa mają lokalnie nieregularny indeks chromatyczny co najwyżej dwa. Zatem hipoteza 6 zachodzi dla grafów z rodziny $\mathfrak{T}'$.

Poniżej udowodnimy lepsze ograniczenie górne lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego dowolnego spójnego 2-multigrafu różnego od 2K_2 . W naszym dowodzie przedstawimy wszystkie niezbędne twierdzenia i lematy dostosowane do naszego przypadku, które są bezpośrednią konsekwencją oryginalnych twierdzeń i lematów w pracy [21] dzięki obserwacji, którą poczyniliśmy na początku tego podrozdziału.

Twierdzenie 31 ([35]). *Dla każdego spójnego grafu G , który nie jest izomorficzny z K_2 mamy $\text{lir}({}^2G) \leq 76$.*

Dowód. Podczas całego dowodu oraz we wszystkich niezbędnych twierdzeniach i lematach przez 2G będziemy oznaczać multigraf uzyskany ze spójnego grafu G , który nie należy do rodziny $\mathfrak{T}'$ (dla 2-multigrafów uzyskanych z grafów z rodziny $\mathfrak{T}'$ teza zachodzi dzięki naszym wcześniejszym rezultatom). Teraz przedstawimy trzy przydatne twierdzenia będące konsekwencją rezultatów z [21].

Twierdzenie 32. *Multigraf 2G , który ma stopień minimalny co najmniej $2 \cdot 10^{10}$ spełnia $\text{lir}({}^2G) \leq 3$.* $\square$

Twierdzenie 33. *Niech 2G będzie spójnym multigrafem o rozmiarze podziel-
nym przez cztery. Jeśli ${}^2G \notin \mathfrak{T}'$, to multigraf 2G zawiera lokalnie nieregularny
podmultigraf 2H taki, że każda składowa spójna multigrafu ${}^2G - E({}^2H)$ ma
rozmiar podzielny przez cztery.* $\square$

Przez k -zdegenerowany multigraf rozumiemy multigraf, w którym każdy
podmultigraf ma wierzchołek stopnia co najwyżej k .

Twierdzenie 34. *Niech $d \geq 1$ będzie liczbą naturalną. Jeśli 2G jest $2d$ -
zdegenerowanym multigrafem, w którym każda składowa spójna ma rozmiar
podzielny przez cztery, to multigraf 2G można rozłożyć na $\lceil \log_2(d+1) \rceil + 1$
dwudzielnych 2-multigrafów, w których wszystkie składowe spójne mają roz-
miar podzielny przez cztery.* $\square$

Z naszego rezultatu dla grafów dwudzielnych i twierdzenia 34 uzyskujemy
następujący wniosek.

Wniosek 35. *Jeśli 2G jest spójnym $2d$ -zdegenerowanym multigrafem o roz-
miarze podzielnym przez cztery to $\text{lir}({}^2G) \leq 2 \cdot (\lceil \log_2(d+1) \rceil + 1)$.*

Teraz przedstawimy jeszcze jeden przydatny lemat wynikający bezpośred-
nio z [21].

Lemat 36. *Niech d będzie liczbą naturalną. Jeśli 2G jest spójnym multigrafem
o rozmiarze podzielnym przez cztery, to 2G można rozłożyć na dwa multigrafy
 2D oraz 2H , takie że 2D jest $4d$ -zdegenerowany, każda składowa spójna 2D
ma rozmiar podzielny przez cztery i stopień minimalny 2H jest co najmniej
 $2d-2$.* $\square$

Z twierdzenia 33 wystarczy pokazać, że $\text{lir}({}^2G) \leq 75$ dla spójnego multi-
grafu 2G o rozmiarze podzielnym przez cztery. Z lematu 36 możemy rozłożyć
 2G na dwa multigrafy 2D oraz 2H tak, że 2D jest $(4 \cdot 10^{10} + 4)$ -zdegenerowany,
każda składowa spójna 2D ma rozmiar podzielny przez cztery i stopień mi-
nimalny 2H jest co najmniej $2 \cdot 10^{10}$. Z twierdzenia 32 mamy $\text{lir}({}^2H) \leq 3$, a
z wniosku 35 dostajemy

$$\begin{aligned} \text{lir}({}^2D) &\leq 2 \cdot (\lceil \log_2(0,5 \cdot (4 \cdot 10^{10} + 4) + 1) \rceil + 1) \\ &= 2 \cdot (\lceil \log_2(2 \cdot 10^{10} + 3) \rceil + 1) = 72. \end{aligned}$$

Stąd mamy

$$\text{lir}({}^2G) \leq \text{lir}({}^2D) + \text{lir}({}^2H) \leq 72 + 3 = 75.$$

Co kończy dowód twierdzenia 31. $\square$

2.9 Uwagi

W tym rozdziale postawiliśmy hipotezę o lokalnej nieregularności 2-multigrafów, która mówi, że dowolny spójny 2-multigraf oprócz 2K_2 możemy rozłożyć na dwa multigrafy lokalnie nieregularne. Z uwagi na wspomnianą już obserwację, że jeśli graf G jest rozkładalny na k grafów lokalnie nieregularnych to multigraf 2G jest również rozkładalny na k multigrafów lokalnie nieregularnych, byliśmy zainteresowani klasami 2-multigrafów uzyskanych z grafów nierozkładalnych na grafy lokalnie nieregularne lub z grafów o lokalnie nieregularnym indeksie chromatycznym większym niż dwa.

Zgodnie z głównym kierunkiem badań dla tego typu problemów, na początku, zajęliśmy się 2-multigrafami uzyskanymi z grafów o niskiej liczbie chromatycznej i potwierdziliśmy hipotezę 6 między innymi dla cykli, grafów dwudzielnych, kaktusów oraz szczególnych rodzin grafów subkubicznych. Kolejnym kierunkiem badań było rozważenie gęstych 2-multigrafów o dobrze znanej strukturze takich jak 2-multigrafy uzyskane z grafów pełnych, k -dzielnych pełnych, rozdzielných czy regularnych. Dla wszystkich tych klas 2-multigrafów udało nam się potwierdzić hipotezę 6. Na koniec naturalnym podejściem było zbadanie ograniczenia górnego dla lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego dowolnego spójnego 2-multigrafu różnego od 2K_2 jak i wybranych klas 2-multigrafów.

Pierwszym, dość oczywistym, kierunkiem dalszych badań nad tą hipotezą byłoby uogólnienie lub poprawienie niektórych z wyników przedstawionych w tym rozdziale. Celem byłoby na przykład udowodnienie hipotezy o lokalnej nieregularności 2-multigrafów dla wszystkich grafów subkubicznych, grafów zewnętrznie planarnych, czy być może grafów trójdzielnych. Już samo pokazanie ograniczenia górnego przez trzy dla lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego trójdzielnego 2-multigrafu pozwoliłoby nam obniżyć ogólne ograniczenie górne lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego dowolnego spójnego 2-multigrafu różnego od 2K_2 . Ponadto warto byłoby pokazać lepsze ograniczenia górne lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego dla innych klas 2-multigrafów takich jak na przykład 2-multigrafy planarne.

Patrząc z szerszej perspektywy, można by było rozważyć uogólnienia problemu rozkładu 2-multigrafu na multigrafy lokalnie nieregularne. Naturalnym uogólnieniem byłoby rozważanie rozkładu k -multigrafów, gdzie $k > 2$, na multigrafy lokalnie nieregularne. Być może zachodzi następująca nieopublikowana hipoteza.

Hipoteza 37 (Grzelec, Woźniak). *Dla każdego spójnego grafu G , który nie jest izomorficzny z K_2 , multigraf kG dla $k > 1$, uzyskany przez k -krotne zwielenokrotnienie każdej krawędzi G , spełnia $\text{lir}({}^kG) \leq 2$.*

Ponadto interesujące było udowodnienie, że istnieje taka liczba $k > 1$, iż każdy spójny l -multigraf oprócz lK_2 , gdzie $l \geq k$ ma rozkład na dwa multigrafy lokalnie nieregularne, o ile to w ogóle możliwe.

Rozdział 3

Hipotezy (2,2)

Wszystkie wyniki tego rozdziału pochodzą z pracy [J. Bensmail, M. Bovin, I. Grzelec, C. Marcille, *The Strong (2, 2)-Conjecture for more classes of graphs*, HAL [13]]

Głównym celem w tym rozdziale będzie udowodnienie tak zwanej **silnej hipotezy** (2, 2) dla nowych klas grafów. Najpierw jednak przedstawimy dotychczas znane rezultaty i terminologię dotyczącą hipotez (2, 2).

Niech G będzie grafem, a $p, k \geq 1$ dwoma liczbami całkowitymi. Przez (p, k) -kolorowanie grafu G rozumiemy przyporządkowanie $\ell : E(G) \rightarrow \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, k\}$ kolorowych etykiet do krawędzi grafu, gdzie każda krawędź e otrzymuje etykietę $\ell(x, y)$ w ℓ o kolorze x oraz wartości y . Bardziej intuicyjnie na (p, k) -kolorowanie grafu G możemy patrzeć jak na rozkład grafu G na co najwyżej p podgrafów, które kolorujemy każdy innym kolorem (ze zbioru $\{1, \dots, p\}$), a następnie tworzymy z nich multigrafy poprzez przypisanie każdej krawędzi krotności ze zbioru $\{1, \dots, k\}$. Teraz, dla każdego wierzchołka v grafu G i każdego $i \in \{1, \dots, p\}$ możemy policzyć *i-sumę* $\sigma_\ell^i(v)$ wierzchołka v w ℓ , która jest w istocie sumą etykiet w kolorze i przypisanych do krawędzi incydentnych z wierzchołkiem v (w przypadku interpretacji multigrafowej jest to stopień wierzchołka v w multigrafie o kolorze i). W zależności od tego, czy będą zachodzić poniższe warunki będziemy uważać, że dwa sąsiednie wierzchołki w G są *rozdzielone* przez ℓ lub *w konflikcie* w przeciwnym przypadku. Bardziej precyzyjnie, będziemy rozważać głównie poniższe trzy sposoby rozróżniania wierzchołków wprowadzone w [5]:

- ℓ jest *słabe* jeśli, dla każdych dwóch sąsiednich wierzchołków u oraz v istnieje $i \in \{1, \dots, p\}$ takie, że $\sigma_\ell^i(u) \neq \sigma_\ell^i(v)$,
- ℓ jest *standardowe* jeśli, dla każdych dwóch sąsiednich wierzchołków u oraz v takich, że krawędź uv ma przypisaną etykietę w kolorze $i \in \{1, \dots, p\}$ przez ℓ , mamy $\sigma_\ell^i(u) \neq \sigma_\ell^i(v)$,

- ℓ jest *silne* jeśli, dla każdych dwóch sąsiednich wierzchołków u oraz v mamy $\sigma_\ell^i(u) \neq \sigma_\ell^i(v)$ dla wszystkich $i \in \{1, \dots, p\}$ takich, że $\sigma_\ell^i(u), \sigma_\ell^i(v) \neq 0$.

W interpretacji multigrafowej na przykład mówimy, dwa sąsiednie wierzchołki u oraz v są rozróżnione w standardowym (p, k) -kolorowaniu grafu G , jeśli dla multikrawędzi uv w kolorze i stopnie wierzchołków u oraz v są różne w multigrafie koloru i .

Oczywiście silne kolorowanie jest standardowym kolorowaniem i standardowe kolorowanie jest słabym kolorowaniem, ale implikacje w odwrotną stronę nie są prawdziwe. Te trzy typy kolorowań zostały wprowadzone w [5]. Zauważmy, że są uogólnieniem innych typów rozróżniających kolorowań, takich jak kolorowanie rozróżniające sąsiednie wierzchołki sumami (standardowe $(1, k)$ -kolorowania – pojęcia związane z hipotezą 1-2-3 [39]) i lokalnie nieregularne kolorowanie (standardowe $(p, 1)$ -kolorowania – pojęcia związane z hipotezą o lokalnej nieregularności grafów [9, 51]).

Zgodnie z powiązanymi hipotezami i problemami, głównym celem, biorąc pod uwagę graf G , jest ustalenie, czy G posiada słabe, standardowe i silne (p, k) -kolorowanie dla p lub k tak małych, jak to tylko możliwe. Po pierwsze, przy założeniu, że p oraz k mogą być dowolne można zaobserwować, że słabe, standardowe i silne (p, k) -kolorowania istnieją dla wszystkich spójnych grafów różnych od K_2 (na przykład twierdzenie 1-2-3, które zachodzi dla wszystkich takich grafów [40] implikuje, że posiadają one standardowe $(1, 3)$ -kolorowanie, które jest jednocześnie silnym $(1, 3)$ -kolorowaniem). Głównym tematem tego rozdziału jest sytuacja, gdy $p, k \leq 2$. Dla słabego kolorowania mówimy, że graf jest *stosowny*, jeśli nie posiada składowej spójnej K_2 , podczas gdy w standardowym i silnym kolorowaniu graf nazywamy *stosownym* jeśli nie zawiera składowej spójnej K_2 lub K_3 . Teraz podamy trzy główne hipotezy z [5], którymi będziemy się zajmować w tym rozdziale.

Hipoteza 38 (Słaba hipoteza $(2, 2)$, Baudon i in. [5]). *Każdy stosowny graf posiada słabe $(2, 2)$ -kolorowanie.*

Hipoteza 39 (Standardowa hipoteza $(2, 2)$, Baudon i in. [5]). *Każdy stosowny graf posiada standardowe $(2, 2)$ -kolorowanie.*

Hipoteza 40 (Silna hipoteza $(2, 2)$, Baudon i in. [5]). *Każdy stosowny graf posiada silne $(2, 2)$ -kolorowanie.*

Z pośród tych trzech hipotez jedynie najslabsza została udowodniona do dzisiaj. Mianowicie, w [12] Bensmail pokazał następujące twierdzenie.

Twierdzenie 41 ([12]). *Jeśli hipoteza 1-2-3 jest prawdziwa, to implikuje słabą hipotezę $(2, 2)$.*

Dowód. Niech G będzie stosownym grafem. Z założenia G ma kolorowanie rozróżniające sąsiednie wierzchołki sumami za pomocą co najwyżej trzech kolorów, a więc ma standardowe $(1,3)$ -kolorowanie, oznaczmy go przez ℓ . Utworzymy teraz słabe $(2,2)$ -kolorowanie ℓ' z ℓ . Każda krawędź G , która w kolorowaniu ℓ miała etykietę o kolorze jeden i wartości jeden lub dwa zachowuje ją w ℓ' , natomiast każda krawędź G , która w kolorowaniu ℓ miała etykietę o kolorze jeden i wartości trzy otrzymuje w ℓ' etykietę o kolorze dwa i wartość jeden. Możemy zauważyć, że jeśli w kolorowaniu ℓ' zachodzi $\sigma_{\ell'}^1(u) = \sigma_{\ell'}^1(v)$ oraz $\sigma_{\ell'}^2(u) = \sigma_{\ell'}^2(v)$ dla krawędzi uv w G , to w kolorowaniu ℓ mamy $\sigma_{\ell}^1(u) = \sigma_{\ell}^1(v)$, czyli otrzymujemy sprzeczność, ponieważ ℓ jest standardowym $(1,3)$ -kolorowaniem. Zatem ℓ' jest słabym $(2,2)$ -kolorowaniem G . $\square$

Zatem, ponieważ hipoteza 1-2-3 została ostatnio potwierdzona przez Keuschę w [40], to otrzymaliśmy również potwierdzenie słabej hipotezy $(2,2)$.

Pozostałe dwie silniejsze hipotezy $(2,2)$ są wciąż otwarte, pomimo kilku prac na ten temat [5, 12, 18, 46, 48]. W skrócie, standardowa hipoteza $(2,2)$ została udowodniona głównie dla grafów 2-zdegenerowanych, grafów subkubicznych i grafów o minimalnym stopniu co najmniej 10^6 . Silna hipoteza $(2,2)$ została potwierdzona między innymi dla grafów pełnych i grafów dwudzielnych (zatem, także standardowa hipoteza $(2,2)$ zachodzi dla tych klas grafów).

Naszym głównym celem w tym rozdziale jest udowodnienie silnej hipotezy $(2,2)$ dla kolejnych interesujących klas grafów. Bardziej precyzyjnie, skupimy się na klasach grafów, które są albo gęste, albo 3-kolorowalne (ze względu na liczbę chromatyczną). Rozważanie grafów trójdzielnych jest dość powszechnym sposobem postępowania z tego typu problemami. Podział wierzchołków grafu na bardzo ograniczoną liczbę zbiorów niezależnych znacząco ułatwia tworzenie kolorowań rozróżniających wierzchołki, w tym sensie, że możemy budować takie kolorowanie na zbiorach wierzchołków, które nigdy nie będą w konflikcie (najlepszą ilustracją jest to, że w stosownych grafach trójdzielnych możemy skonstruować silne $(1,3)$ -kolorowanie, w którym wierzchołki należące do trzech różnych zbiorów niezależnych mają różne sumy modulo 3 [39]). Z faktu, że silna hipoteza $(2,2)$ została udowodniona dla stosownych grafów dwudzielnych w [5], następnym naturalnym krokiem jest skupienie się na grafach trójdzielnych. Z kolei gęste grafy mają tendencję do posiadania dużej liczby chromatycznej, co pozwala nam podejść do silnej hipotezy $(2,2)$ z innej strony. Ponadto, gęste grafy zachowują się w pewien przewidywalny sposób pod względem struktury, co pozwala na łatwiejsze tworzenie rozróżniających kolorowań. W dowodach twierdzeń przedstawionych w tym rozdziale wykorzystamy szereg różnych metod, w szczególności metodę rozładowania (*discharging*), twierdzenie *Combinatorial Nullstellensatz* Alona z [2],

czy też reprezentację drzewiastą kaktusów i grafów subkubicznych zewnętrznie planarnych.

W tym rozdziale udowodnimy silną hipotezę (2,2) dla kaktusów w podrozdziale 3.1, grafów subkubicznych zewnętrznie planarnych w podrozdziale 3.2, grafów o maksymalnym średnim stopniu mniejszym niż $\frac{9}{4}$ w podrozdziale 3.3, grafów Halina w podrozdziale 3.4 i grafów planarnych o talii co najmniej 16 w podrozdziale 3.5, czyli klas grafów, które z grubsza rzecz biorąc mają liczbę chromatyczną co najwyżej trzy. Udowodnimy również silną hipotezę (2,2) dla klas grafów o nieograniczonej liczbie chromatycznej, a mianowicie potęg cykli w podrozdziale 3.6 i grafów k -dzielnych pełnych w podrozdziale 3.7. Rozdział zakończymy kilkoma słowami podsumowania w podrozdziale 3.8.

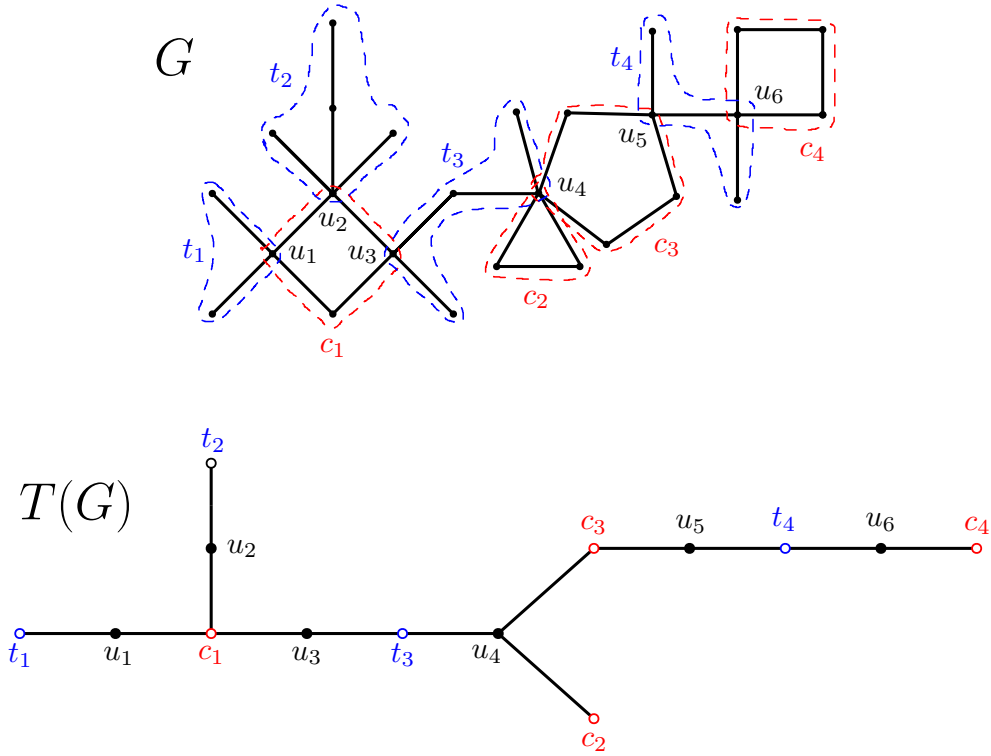
Notacja

Zauważmy, że w kontekście hipotezy 40 jesteśmy zainteresowani jedynie silnymi (p, k) -kolorowaniami dla $p = k = 2$. Z tego powodu wygodniej jest patrzeć na $(2, 2)$ -kolorowania jako na przypisywanie etykiet, powiedzmy, czerwonych i niebieskich o wartościach jeden lub dwa. Zatem w dowolnym grafie w $(2, 2)$ -kolorowaniu ℓ dla każdego wierzchołka v uzyskujemy *czerwoną sumę*, którą oznaczamy przez $\sigma_\ell^r(v)$ i *niebieską sumę*, którą oznaczamy przez $\sigma_\ell^b(v)$. W tej notacji silna hipoteza (2,2) jest równoważna stwierdzeniu, że każdy stosowny graf ma etykietowanie ℓ przypisujące czerwone i niebieskie jedynki oraz dwójki tak, że dla każdych dwóch sąsiednich wierzchołków u oraz v mamy $\sigma_\ell^r(u) \neq \sigma_\ell^r(v)$ oraz $\sigma_\ell^b(u) \neq \sigma_\ell^b(v)$ lub $\sigma_\ell^r(u) \neq \sigma_\ell^r(v)$ oraz $\sigma_\ell^b(u) = \sigma_\ell^b(v) = 0$ lub $\sigma_\ell^b(u) \neq \sigma_\ell^b(v)$ oraz $\sigma_\ell^r(u) = \sigma_\ell^r(v) = 0$.

3.1 Kaktusy

Przypomnijmy, że kaktus jest grafem spójnym, w którym żadne dwa cykle nie mają wspólnej krawędzi. Można zauważyć, że kaktusy mają podobną strukturę do drzew. Ponadto przypomnijmy, że kaktusy są 2-zdegenerowane, a więc mają właściwe kolorowanie wierzchołków trzema kolorami. Warto również wspomnieć, że dla każdego stosownego drzewa zachodzi silna hipoteza (2,2), ponieważ wszystkie takie drzewa mają silne $(1, 2)$ -kolorowania (zobacz [44]).

W następnym twierdzeniu pokażemy prawdziwość silnej hipotezy (2, 2) dla kaktusów. Podkreślimy, że w nadchodzącym dowodzie, a także w kolejnych, kilka konfiguracji zostanie wprowadzonych za pomocą notacji „Ck”, której nie należy mylić z oznaczeniem cyklu długości k , czyli „ C_k ”.



Rysunek 3.1: Przykład kaktusa G wraz z odpowiadającą reprezentacją drzewiastą $T(G)$ przedstawioną w dowodzie twierdzenia 42.

Twierdzenie 42 ([13]). *Jeśli graf G jest kaktusem różnym od K_2 oraz K_3 , to G jest silnie $(2, 2)$ -kolorowalny.*

Dowód. Zaczniemy od zdefiniowania *reprezentacji drzewiastej* kaktusa G , którą będziemy oznaczać przez $T(G)$. W reprezentacji drzewiastej $T(G)$ będziemy wyróżniać dwa główne typy wierzchołków *wierzchołki składowe* i *wierzchołki mieszane*. Wierzchołki składowe typu „cykl” odpowiadają cyklom w grafie G . Wierzchołki składowe typu „drzewo” odpowiadają składowym drzewiastym w grafie powstałym z G przez usunięcie każdej krawędzi leżącej na cyklu w G oraz powstałych izolowanych wierzchołków. Wierzchołki mieszane odpowiadają tym wierzchołkom grafu G , które należą do co najmniej dwóch cykli lub cyklu i składowej drzewiastej (reprezentowanej przez wierzchołek typu „drzewo” w $T(G)$). Krawędzie dodajemy między wierzchołkami mieszanymi a składowymi wtedy i tylko wtedy, gdy wierzchołek mieszany należy do danego cyklu lub składowej drzewiastej. Dla lepszego zobrazowania sytuacji został podany przykład na rysunku 3.1.

Taka reprezentacja drzewiasta jest faktycznie drzewem, ponieważ w przeciwnym przypadku jedna krawędź w G byłaby wspólna dla dwóch cykli lub

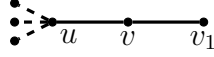
wierzchołek składowy odpowiadający drzewu należałby do pewnego cyklu w $T(G)$, co jest nie możliwe. Reprezentacja drzewiasta kaktusów jest bliska reprezentacji blokowej kaktusów (zobacz [16]). Możemy zauważyć, że wszystkie liście $T(G)$ są wierzchołkami składowymi. Ponadto w $T(G)$ zbiór wierzchołków mieszanych, jak również zbiór wierzchołków składowych są obydwa zbiorami niezależnymi.

Rozważmy graf G będący minimalnym kontrprzykładem (ze względu na liczbę krawędzi) do twierdzenia 42. Zakładając, że reprezentacja drzewiasta $T(G)$ jest ukorzeniona w pewnym wierzchołku, *końcowym cyklem* (odpowiednio *końcowym drzewem*) kaktusa G nazywamy indukowany cykl (odpowiednio drzewo) reprezentowany przez liść o maksymalnej wysokości w $T(G)$. Naszym celem jest udowodnienie, że G nie może zawierać pewnej liczby konfiguracji (C1 do C6c), dzięki którym możemy ostatecznie zaprzeczyć istnieniu G . Zauważmy, że skoro poniżej udowadniamy, iż niektóre konfiguracje nie pojawiają się w minimalnym kontrprzykładzie, to możemy rozważyć dowolny sposób ukorzenienia $T(G)$, o ile nie zakładamy niczego na temat położenia wierzchołka względem korzenia.

Udowodnijmy więc najpierw, że G ze względu na swoją minimalność nie może zawierać pewnych konfiguracji, które przedstawimy poniżej.

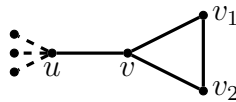
(C1) Najpierw założmy, że $T(G)$ ma wierzchołek składowy T będący liściem, związany z drzewem o wysokości co najmniej dwa. W szczególności możemy założyć, że wysokość drzewa T jest dokładnie dwa, ponieważ możemy patrzeć na T jako na dwa drzewa o wspólnym wierzchołku. Bardziej intuicyjnie, ta konfiguracja zawiera indukowane drzewo o wysokości co najmniej dwa, gdzie co najwyżej jeden wierzchołek jest sąsiedni z wierzchołkami z poza drzewa (zobacz rysunek 3.2). Oznaczamy przez u rodzica w T oraz przez v jedyne sąsiada u w T . Skoro T jest o wysokości co najmniej dwa, to oznaczmy przez $v_1, \dots, v_k$ dzieci v w drzewie T i rozważamy graf $G' = G - \{v_1, \dots, v_k\}$. Zauważmy, że albo G' jest stosowny, albo G jest gwiazdą i oczywiście ma silne $(2, 2)$ -kolorowanie. Skoro G' jest kaktusem i G jest minimalnym kontrprzykładem do twierdzenia 42, to graf G' jest silnie $(2, 2)$ -kolorowalny i oznaczamy przez ℓ' silne $(2, 2)$ -kolorowanie G' . Od teraz i w kilku innych miejscach w tym rozdziale naszym celem jest rozszerzenie ℓ' przez przypisanie etykiet do krawędzi $E(G) \setminus E(G')$ tak, że otrzymane $(2, 2)$ -kolorowanie G jest silne (zaprzeczając tym samym, że G jest kontrprzykładem oraz, że G nie może zawierać bieżącej konfiguracji). W obecnym przypadku zakładamy bez straty ogólności, że $\sigma_{\ell'}^b(v) > 0$, a zatem wystarczy przypisać niebieską etykietę jeden do $vv_2, \dots, vv_k$ oraz wystarczy przypisać do vv_1 którąkolwiek niebieską etykietę sprawiającą, że $\sigma_{\ell'}^b(v)$ jest różna od

$\sigma_\ell^b(u)$.



Rysunek 3.2: Szczególny przypadek konfiguracji C1 z tylko jednym wierzchołkiem stopnia jeden. Na tym rysunku, a także kolejnych, przerywane krawędzie są krawędziami incydentnymi w G' .

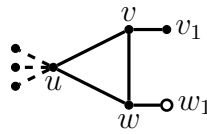
(C2) Załóżmy, że $T(G)$ ma wierzchołek składowy C będący liściem związanym z C_3 o rodzicu v , gdzie wierzchołek mieszany v jest także sąsiedni z wierzchołkiem składowym T odpowiadającym drzewu T , w którym v jest liściem. Dalej zakładamy, że stopień wierzchołka v w reprezentacji drzewiastej $T(G)$ jest dokładnie dwa i oznaczmy przez u jedyne sąsiada v w T . Bardziej intuicyjnie, ta konfiguracja odpowiada trójkątowi wiszącemu na końcu krawędzi w G (zobacz rysunek 3.3). Oznaczamy przez v_1, v_2 dwa wierzchołki C_3 inne niż v i rozważamy graf $G' = G - \{v_1, v_2\}$. Jeśli $V(G) \neq \{u, v, v_1, v_2\}$ (bo w przeciwnym razie łatwo zauważyć, że G nie jest kontrprzykładem do Twierdzenia 42) to, G' jest stosowny, a zatem silnie $(2, 2)$ -kolorowalny, i rozważamy ℓ' jako silne $(2, 2)$ -kolorowanie. Zakładamy bez straty ogólności, że $\sigma_{\ell'}^b(v) > 0$, przypisujemy do vv_1 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(v)$ różni się od $\sigma_\ell^b(u)$. Następnie przypisujemy do vv_2 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(v)$ różni się od $\sigma_\ell^r(u)$ i do v_1v_2 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(v_1)$ różni się od $\sigma_\ell^r(v)$ (o wartość, której nie wybraliśmy dla vv_2).



Rysunek 3.3: Konfiguracja C2.

(C3) Załóżmy, że istnieje wierzchołek składowy C w reprezentacji drzewiastej $T(G)$ związany z C_3 o wierzchołkach u, v, w , gdzie jeśli istnieją wierzchołki mieszane v, w , to są sąsiednie z C oraz wierzchołkami składowymi związanymi z drzewami (można założyć, że o wysokości jeden, ponieważ w przeciwnym razie G zawierałby konfigurację jeden). Dalej zakładamy, że jest co najmniej jedno takie drzewo. Bardziej intuicyjnie, ta konfiguracja odpowiada cyklowi C_3 z dołączonym co najmniej jednym wierzchołkiem stopnia jeden (zobacz rysunek 3.4). Oznaczamy przez u rodzica wierzchołka mieszanego C oraz przez v, w pozostałe

dwa wierzchołki z C . Ponadto oznaczamy przez $v_1, \dots, v_k$ (odpowiednio $w_1, \dots, w_l$) wierzchołki stopnia jeden będące dziećmi v (odpowiednio w). O ile u nie jest stopnia dwa w G (bo gdy u jest stopnia dwa to G jest znany w całości i łatwo znaleźć silne $(2, 2)$ -kolorowanie G), to graf $G' = G - \{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l\}$ jest silnie $(2, 2)$ -kolorowalny, a więc niech ℓ' będzie silnym $(2, 2)$ -kolorowaniem G' . Zauważmy, że wierzchołki v oraz w można dowolnie zamieniać ze sobą w G' , a także zauważmy, że krawędź vw musi mieć ten sam kolor (bez straty ogólności niebieski) w ℓ' jak jedna z jego incydentnych krawędzi, powiedzmy uv .



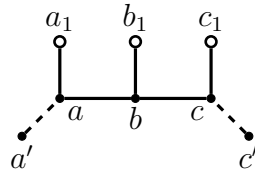
Rysunek 3.4: Szczególny przypadek konfiguracji C3, gdzie każdy z wierzchołków v oraz w jest sąsiedni z tylko jednym wierzchołkiem stopnia jeden. Na tym rysunku, jak i kolejnych białe wierzchołki są tymi, które mogą nie istnieć.

Są dwa przypadki do rozważenia.

- Załóżmy, że krawędź uw jest niebieska w ℓ' . Z dokładnością do zamiany rolami wierzchołków v oraz w w G' możemy założyć, że $\sigma_{\ell'}^b(v) > \sigma_{\ell'}^b(w)$ i $k \geq l$. Jeśli $l = 0$, to przypisujemy do vw którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_{\ell'}^r(w)$ oraz $\sigma_{\ell'}^r(u)$ są różne (zauważmy, że przy zastosowanej zmianie koloru, wierzchołki v oraz w nadal mają różne niebieskie sumy). Kończymy przypisując czerwoną etykietę jeden do $vv_2, \dots, vv_k$ i przypisując do krawędzi vv_1 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_{\ell'}^r(v)$ oraz $\sigma_{\ell'}^r(u)$ są różne. Można sprawdzić, że w ten sposób otrzymujemy silne $(2, 2)$ -kolorowanie G .

Teraz zakładamy, że $l, k \geq 1$. Jeśli $\sigma_{\ell'}^b(u) = \sigma_{\ell'}^b(v) + k$ (czyli przypisanie niebieskiej etykiety jeden do każdej krawędzi vv_i dla $1 \leq i \leq k$ daje kolorowanie, które nie jest silne), to przypisujemy niebieską etykietę jeden do każdej krawędzi ww_j dla $1 \leq j \leq l$, niebieską etykietę jeden do każdej krawędzi vv_i dla $2 \leq i \leq k$ oraz niebieską etykietę dwa do vv_1 . W ten sposób $\sigma_{\ell'}^b(u) = \sigma_{\ell'}^b(v) + k = \sigma_{\ell'}^b(v) - 1$ oraz $\sigma_{\ell'}^b(w) \leq \sigma_{\ell'}^b(v) - 2$. Z drugiej strony, jeśli $\sigma_{\ell'}^b(u) = \sigma_{\ell'}^b(w) + l$, to przypisujemy niebieską etykietę dwa do vv_1 oraz ww_1 i przypisujemy niebieską etykietę jeden do pozostałych krawędzi. Podobne argumenty prowadzą do silnego $(2, 2)$ -kolorowania G .

- Zakładamy, że krawędź uw ma przypisana czerwoną etykietę w ℓ' . Z dokładnością do zamiany rolami wierzchołków v oraz w w G' możemy również założyć, że $k \geq l$. Jeśli $l = 0$, to zamieniamy etykiety przypisane do krawędzi uv oraz uw przez ℓ' tak, że uv jest teraz w kolorze czerwonym. Następnie przypisujemy czerwoną etykietę jeden do $vv_2, \dots, vv_k$ i przypisujemy do vv_1 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(v)$ oraz $\sigma_\ell^r(u)$ są różne, co skutkuje silnym $(2, 2)$ -kolorowaniem G . Teraz możemy założyć, że $k, l \geq 1$. Na podstawie podobnych argumentów jak wcześniej, przypisujemy niebieską (odpowiednio czerwoną) etykietę jeden do $vv_2, \dots, vv_k$ (odpowiednio $ww_2, \dots, ww_l$) i przypisujemy do vv_1 (odpowiednio ww_1) którąkolwiek z niebieskich (odpowiednio czerwonych) etykiet tak, że niebieskie (odpowiednio czerwone) sumy wierzchołków u oraz v (odpowiednio w) są różne. Ponownie, można sprawdzić, że skutkuje to oczekiwanym silnym $(2, 2)$ -kolorowaniem G .
- (C4) Załóżmy, że istnieje wierzchołek składowy C reprezentacji drzewiastej $T(G)$ związany z cyklem C o trzech kolejnych wierzchołkach a, b, c na cyklu C w G takich, że żaden z nich nie ma odpowiadającego wierzchołka mieszanego w $T(G)$, który jest połączony z wierzchołkiem odpowiadającym drzewu o rozmiarze co najmniej dwa (zobacz rysunek 3.5). Jeśli istnieją w G , wierzchołki (inne niż a, b, c) tych drzew, to oznaczamy je odpowiednio przez a_1, b_1, c_1 . Zauważmy, że graf $G' = G - \{b\}$ jest zawsze stosowany, a więc niech ℓ' będzie silnym $(2, 2)$ -kolorowaniem G' . Oznaczamy przez a' (odpowiednio c') jedynego sąsiada a (odpowiednio c) w grafie G' .



Rysunek 3.5: Szczególny przypadek konfiguracji C4, gdzie każdy z wierzchołków a, b, c jest sąsiedni z jednym wierzchołkiem stopnia jeden.

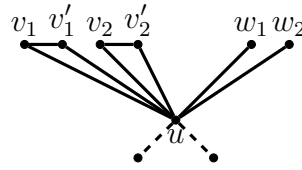
- Załóżmy najpierw, że krawędzie aa' oraz cc' mają ten sam kolor, powiedzmy niebieski, w ℓ' . Przypisujemy do ab (odpowiednio bc) którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(a)$ oraz $\sigma_\ell^r(a')$ są różne (odpowiednio c, c'). Jeśli wierzchołki a_1 oraz c_1 istnieją, to przypisujemy do krawędzi incydentnych z nimi którekolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(a)$ oraz $\sigma_\ell^b(a')$ są różne (analogicznie dla wierzchołków c, c'). Jeśli wierzchołek b_1 istnieje to przypisujemy czerwoną etykietę jeden do

krawędzi bb_1 .

- Załóżmy, że krawędź aa' jest pokolorowana na czerwono, a cc' na niebiesko w ℓ' . Przypisujemy, jeśli istnieje, czerwoną (odpowiednio niebieską) etykietę jeden do krawędzi aa_1 (odpowiednio cc_1). Następnie przypisujemy do krawędzi ab którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(a)$ oraz $\sigma_\ell^r(a')$ są różne i do bc przypisujemy którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(c)$ oraz $\sigma_\ell^b(c')$ są różne. Jeśli wierzchołek b_1 istnieje, to przypisujemy również do krawędzi bb_1 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(b)$ jest różna od $\sigma_\ell^r(a)$.

W obu przypadkach można sprawdzić, że uzyskaliśmy silne $(2, 2)$ -kolorowanie G .

- (C5) Załóżmy, że istnieje wierzchołek mieszany u taki, że dokładnie jeden wierzchołek reprezentacji drzewiastej $T(G)$ sąsiedni z u nie jest liściem $T(G)$ i wszystkie inne wierzchołki $T(G)$ sąsiednie z u są związane albo z drzewem, albo cyklem C_3 . Intuicyjnie, ta konfiguracja obejmuje przypadki gdy mamy k drzew i l trójkątów wiszących w pojedynczym wierzchołku (zobacz rysunek 3.6). Oznaczamy przez $w_1, \dots, w_k$ dla $k \geq 0$ wierzchołki drzew różne od u (pamiętamy, że drzewa są o wysokości co najwyżej jeden) oraz oznaczamy przez $v_1, v'_1, \dots, v_l, v'_l$ dla $l \geq 0$ wierzchołki cykli różne od u (gdzie $v_i v'_i$ jest krawędzią pewnego trójkąta dla każdego $i \in \{1, \dots, l\}$). Rozważmy graf $G' = G - \{v_1, \dots, v'_l, w_1, \dots, w_k\}$, gdzie $k+l \geq 2$ (przypadkiem gdzie $k+l \leq 1$ będziemy się zajmować później w konfiguracjach od 6a do 6c). Zauważmy, że stopień wierzchołka u w grafie G' wynosi dwa. Skoro istnieje wierzchołek niebędący liściem w $T(G)$ sąsiedni z wierzchołkiem u w $T(G)$ to koniecznie graf G' jest stosowny.



Rysunek 3.6: Szczególny przypadek konfiguracji C5, gdzie $k = l = 2$.

- Załóżmy najpierw, że $k + l \geq 4$. Możemy założyć bez straty ogólności, że $\sigma_\ell^b(u) > 0$. Wybieramy zbiór A złożony z czterech wierzchołków a_1, a_2, a_3, a_4 w $G - V(G')$ taki, że jeśli dla pewnego $1 \leq i \leq l$ mamy $v_i \in A$, to $v'_i \in A$. Bardziej intuicyjnie to oznacza, że wybraliśmy dowolnie cztery wierzchołki stopnia jeden, albo cykl i dwa wierzchołki stopnia

jeden, albo dwa cykle. Dla $1 \leq i \leq k$, jeśli $w_i \notin A$, to przypisujemy niebieską etykietę jeden do uw_i . Dla $1 \leq j \leq l$, jeśli $v_j \notin A$ (stąd również $v'_j \notin A$), to przypisujemy niebieską etykietę jeden do uv_i , czerwoną etykietę dwa do uv'_i i czerwoną etykietę jeden do $v_i v'_i$. Bez straty ogólności możemy założyć, że wierzchołki a_1, a_3 nie leżą na jednym cyklu. Przypisujemy do ua_1, ua_3 (odpowiednio ua_2, ua_4) którąkolwiek z czerwonych (odpowiednio niebieskich) etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(u)$ (odpowiednio $\sigma_\ell^b(u)$) różni się od czerwonych (odpowiednio niebieskich) sum obydwu jego sąsiadów w G' . Na koniec, jeśli dwa wierzchołki ze zbioru A są sąsiednie, to przypisujemy niebieską etykietę jeden do krawędzi incydentnej z oboma tymi wierzchołkami. Udowodnimy, że w ten sposób otrzymujemy silne $(2, 2)$ -kolorowanie G . Łatwo sprawdzić, że wierzchołek u jest rozróżniony od swoich sąsiadów w obu kolorach w G' . Skoro wierzchołki a_1 oraz a_3 otrzymały na incydentnych krawędziach niebieskie etykiety, a wierzchołki a_2, a_4 otrzymały na incydentnych krawędziach czerwone etykiety, to wierzchołek u jest rozróżniony od wszystkich swoich sąsiadów stopnia jeden. Rozważmy teraz wierzchołki v_i oraz v'_i dla $1 \leq i \leq l$. Jeśli $v_i \in A$, to bez straty ogólności $\sigma_\ell^b(v_i) = 2$, $\sigma_\ell^b(v'_i) = 1$, $\sigma_\ell^r(v_i) = 0$ oraz $\sigma_\ell^b(v'_i) = 1$. Zauważmy następnie, że wierzchołki v_i oraz v'_i nie mają tej samej czerwonej sumy. Zatem pozostało nam udowodnić, że $\sigma_\ell^b(u) > 2$. To zachodzi, ponieważ $\sigma_\ell^b(u) > 0$ i co najmniej dwie krawędzie ze zbioru $E(G) \setminus E(G')$ incydentne z wierzchołkiem u mają przypisane niebieskie etykiety.

- Teraz założmy, że $k \geq 2$ oraz $l = 0$. Oznaczamy przez $v_1, \dots, v_k$ dzieci wierzchołka u w drzewie T oraz rozważamy graf $G' = G - \{v_1, \dots, v_k\}$. Zauważmy, że stopień wierzchołka u w grafie G' wynosi dwa. O ile G' nie jest cyklem C_3 (bo w takim przypadku łatwo utworzyć silne $(2, 2)$ -kolorowanie G), to graf G' jest stosowny. Zatem niech ℓ' będzie silnym $(2, 2)$ -kolorowaniem G' . Przypisujemy do krawędzi $uv_3, \dots, uv_k$ niebieską etykietę jeden, a następnie przypisujemy niebieskie etykiety do krawędzi uv_1 oraz uv_2 tak, że $\sigma_\ell^b(u)$ różni się od niebieskich sum obu jego sąsiadów w G' , co jest zawsze możliwe, ponieważ możemy zmienić niebieską sumę wierzchołka u na trzy różne sposoby.

Zauważmy, że ten przypadek wraz z konfiguracją jeden zapobiega sytuacji, w której dowolny wierzchołek minimalnego kontrprzykładu do twierdzenia 42 sąsiaduje z wieloma wierzchołkami podgrafu będącego drzewem, które są liśćmi.

- Załóżmy następnie, że $k + l = 3$.

* Jeśli $k = 2$ oraz $l = 1$, to przypisujemy niebieską etykietę dwa do

uv_1 , niebieską etykietę jeden do uv'_1 oraz $v_1v'_1$, a następnie przypisujemy niebieskie etykiety do krawędzi uw_1 oraz uw_2 tak, że $\sigma_\ell^b(u)$ różni się od niebieskich sum obu jego sąsiadów w G' .

- * Jeśli $k = 1$ oraz $l = 2$, to przypisujemy czerwoną etykietę dwa do uw_1 , niebieskie (odpowiednio czerwone) etykiety do uv_1 oraz uv_2 (odpowiednio uv'_1, uv_2) tak, że $\sigma_\ell^b(u)$ (odpowiednio $\sigma_\ell^r(u)$) różni się od niebieskich sum obu jego sąsiadów w G' oraz przypisujemy czerwoną etykietę jeden do $v_1v'_1, v_2v'_2$.
- * Jeśli $l = 3$, to przypisujemy niebieską etykietę jeden do $v_3v'_3$, czerwoną etykietę dwa do uv_3 i niebieską etykietę dwa do uv'_3 . Stosujemy dokładnie ten sam proces co w ostatnim przypadku dla pozostałych krawędzi.

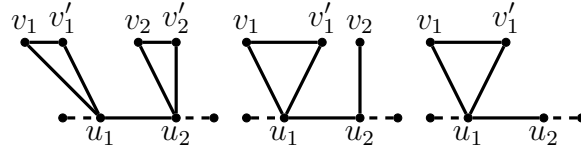
We wszystkich przypadkach otrzymujemy silne $(2, 2)$ -kolorowanie grafu G .

– Załóżmy na koniec, że $k + l = 2$ oraz $l \neq 0$.

- * Najpierw założmy, że $k = 0$. Przypisujemy niebieską etykietę jeden do krawędzi $v_1v'_1, v_2v'_2$ oraz przypisujemy niebieskie (odpowiednio czerwone) etykiety do uv_1 oraz uv_2 (odpowiednio uv'_1, uv_2) tak, że $\sigma_\ell^b(u)$ (odpowiednio $\sigma_\ell^r(u)$) różni się od niebieskich sum obu jego sąsiadów w G' . Bez straty ogólności możemy założyć, że $\sigma_\ell^b(u) > 0$, a więc otrzymujemy $\sigma_\ell^b(u) > 2$.
- * Teraz zakładamy, że $k = l = 1$. Oznaczamy przez a oraz b dwóch sąsiadów u w grafie G' . Najpierw zajmujemy się przypadkiem gdzie $\{\sigma_{\ell'}^r(a), \sigma_{\ell'}^r(b)\} = \{\sigma_{\ell'}^r(u) + 4, \sigma_{\ell'}^r(u) + 5\}$ oraz $\{\sigma_{\ell'}^b(a), \sigma_{\ell'}^b(b)\} = \{\sigma_{\ell'}^b(u) + 4, \sigma_{\ell'}^b(u) + 5\}$. W tym przypadku przypisujemy niebieską etykietę jeden do uv_1 oraz uw_1 , czerwoną etykietę dwa do uv'_1 i przypisujemy do $v_1v'_1$ którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(v_1)$ oraz $\sigma_\ell^r(u)$ się różnią. Teraz rozważamy przypadki, gdzie na przykład, jedna z $\sigma_{\ell'}^r(a), \sigma_{\ell'}^r(b)$ jest różna od obu $\sigma_{\ell'}^r(u) + 4$ oraz $\sigma_{\ell'}^r(u) + 5$. Wówczas przypisujemy czerwoną etykietę jeden do uv_1 oraz $v_1v'_1$, czerwoną etykietę dwa do uv'_1 i przypisujemy do krawędzi uw_1 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(u)$ różni się od czerwonych sum jego sąsiadów w G' , co zawsze jest możliwe, ponieważ jedna z sum $\sigma_{\ell'}^r(a), \sigma_{\ell'}^r(b)$ jest różna od obu $\sigma_{\ell'}^r(u) + 4$ oraz $\sigma_{\ell'}^r(u) + 5$.

We wszystkich przypadkach ponownie otrzymujemy silne $(2, 2)$ -kolorowanie G .

(C6a) Załóżmy, że w $T(G)$ istnieją dwa liście C, C' związane z dwoma cyklami C_3 , gdzie C (odpowiednio C') jest sąsiedni z wierzchołkiem mieszanym u_1 (odpowiednio u_2) i wierzchołki u_1, u_2 odpowiadające wierzchołkom mieszanym u_1, u_2 są sąsiednie w G . Dalej zakładamy, że wierzchołki mieszane u_1, u_2 oprócz wierzchołków składowych C, C' są sąsiednie jedynie z pewnym wierzchołkiem składowym N reprezentacji drzewiastej $T(G)$. Ta konfiguracja jest przedstawiona na rysunku 3.7. W szczególności $d(u_1) = d(u_2) = 4$, ponieważ w przeciwnym razie mielibyśmy konfigurację dwa. Oznaczamy w G przez v_1, v'_1 (odpowiednio v_2, v'_2) dwa inne wierzchołki z cyklu C (odpowiednio C') i rozważamy graf $G' = G - \{v_1, v'_1, v_2, v'_2, u_1u_2\}$. Dodatkowo, oznaczamy przez w_1 (odpowiednio w_2) jedyne sąsiada u_1 (odpowiednio u_2) w G' . Skoro G' jest stosowny (w przeciwnym razie G zawierałby konfigurację pięć), to istnieje ℓ' - silne $(2, 2)$ -kolorowanie G' . Podzielimy nasze argumenty na dwa główne przypadki.



Rysunek 3.7: Konfiguracje od C6a do C6c.

- Najpierw założmy, że krawędzie w_1u_1 oraz w_2u_2 mają ten sam kolor, powiedzmy niebieski, w ℓ' . Bez straty ogólności możemy założyć, że $\sigma_{\ell'}^b(u_1) \geq \sigma_{\ell'}^b(u_2)$. Przypisujemy niebieską etykietę jeden do krawędzi u_1v_1 oraz v'_1v_1 , i niebieską etykietę dwa do $u_1v'_1$. Następnie przypisujemy do u_2v_2 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_{\ell'}^r(u_2)$ oraz $\sigma_{\ell'}^r(w_2)$ się różnią. Dalej przypisujemy do u_1u_2 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_{\ell'}^b(u_1)$ oraz $\sigma_{\ell'}^b(w_1)$ się różnią. Na koniec przypisujemy do $u_2v'_2$ którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_{\ell'}^b(u_2)$ oraz $\sigma_{\ell'}^b(w_2)$ się różnią. Skoro $\sigma_{\ell'}^b(u_1) \geq \sigma_{\ell'}^b(u_2)$, to możemy zauważyć, że $\sigma_{\ell'}^b(u_1) - \sigma_{\ell'}^b(u_2) = \sigma_{\ell'}^b(u_1) + 3 - (\sigma_{\ell'}^b(u_2) + \ell(u_2v'_2)) > 0$, a więc uzyskujemy silne $(2, 2)$ -kolorowanie grafu G .
- Załóżmy teraz, że krawędź w_1u_1 ma przypisaną niebieską etykietę w ℓ' , podczas gdy w_2u_2 ma przypisaną czerwoną etykietę. Jeśli $\sigma_{\ell'}^r(w_2) \neq \sigma_{\ell'}^r(u_2) + 3$, to przypisujemy czerwoną etykietę jeden do u_2v_2 oraz $v_2v'_2$, a także czerwoną etykietę dwa do $u_2v'_2$. W przeciwnym przypadku przypisujemy niebieską etykietę jeden do u_2v_2 , a do krawędzi $u_2v'_2$ oraz $v_2v'_2$ przypisujemy czerwoną etykietę o wartości, która nie została wybrana

w ℓ' dla krawędzi u_2w_2 . Następnie przypisujemy do u_1u_2 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_2)$ oraz $\sigma_\ell^b(w_2)$ są różne. Przypisujemy do u_1v_1 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(u_1)$ oraz $\sigma_\ell^r(w_1)$ są różne i przypisujemy do $v_1v'_1$ którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(v'_1)$ oraz $\sigma_\ell^r(u_1)$ są różne. Na koniec przypisujemy do krawędzi $u_1v'_1$ którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_1)$ oraz $\sigma_\ell^b(w_1)$ są różne.

Teraz uzasadnimy fakt, że skutkuje to silnym $(2, 2)$ -kolorowaniem G . W szczególności sprawdzimy, że wierzchołki u_1, u_2, v_2, v'_2 nie są w konflikcie. Skoro $u_2v'_2$ ma przypisaną albo niebieską etykietę jeden, albo czerwona etykietę i u_1 ma dwie incydentne krawędzie różne od u_1u_2 z przypisaną niebieską etykietą, to rzeczywiście wierzchołki u_1 oraz u_2 mają różne niebieskie sumy. Ponadto $\sigma_\ell^r(u_1) \leq 2$ gdy $\sigma_\ell^r(u_2) \geq 3$, a więc wierzchołki u_1 oraz u_2 są rozróżnione w obu kolorach. Wszystkie pary złożone z wierzchołków u_2, v_2, v'_2 są trywialnie rozróżnione w kolorze niebieskim, podczas gdy $\sigma_\ell^r(v'_2) \leq 2$, skąd wnioskujemy, że u_2 oraz v'_2 są rozróżnione w kolorze czerwonym. Teraz, albo krawędź $u_2v'_2$ miała przypisaną czerwoną etykietę i łatwo sprawdzić, że ℓ jest takie jak potrzebujemy, albo krawędź $u_2v'_2$ miała przypisaną niebieską etykietę jeden. W tym przypadku, skoro przypisaliśmy taką samą czerwoną etykietę do u_2v_2 oraz $v_2v'_2$, to zauważmy, że $\sigma_\ell^r(v_2)$ oraz $\sigma_\ell^r(v'_2)$ są obie parzyste, podczas gdy, skoro przypisaliśmy do obu wartość, która nie była przypisana do u_2w_2 , to mamy, że $\sigma_\ell^r(u_2)$ jest nieparzysta, co gwarantuje inne rozróżnienie. Na podstawie tych argumentów można stwierdzić, że ℓ ma żądane właściwości.

(C6b) Załóżmy, że w $T(G)$ istnieją dwa liście C, T związane odpowiednio z cyklem C_3 i drzewem, gdzie C (odpowiednio T) jest sąsiedni z wierzchołkiem mieszanym u_1 (odpowiednio u_2) oraz wierzchołki u_1, u_2 odpowiadające wierzchołkom mieszanym u_1, u_2 są sąsiednie w G . Dalej załóżmy, że wierzchołki mieszane u_1, u_2 oprócz wierzchołków składowych C oraz T są sąsiednie jedynie z pewnym wierzchołkiem składowym N w $T(G)$ (zobacz rysunek 3.7). Oznaczamy w G przez v_1, v'_1 (odpowiednio v_2) inne wierzchołki C_3 (odpowiednio drzewa T) i rozważamy graf $G' = G - \{v_1, v'_1, v_2, u_1u_2\}$. Ponadto oznaczamy przez w_1 (odpowiednio w_2) jedyne sąsiada u_1 (odpowiednio u_2) w G' . Skoro G' jest stosowny (bo w przeciwnym przypadku G by zawierałby jedną z konfiguracji jeden oraz pięć), to rozważamy ℓ' - silne $(2, 2)$ -kolorowanie G' . Zakładając bez straty ogólności, że krawędź w_1u_1 ma przypisaną niebieską etykietę w ℓ' rozważamy dwa główne przypadki.

- Załóżmy najpierw, że $\sigma_{\ell'}^b(u_2) > \sigma_{\ell'}^b(u_1)$ (stąd krawędź w_2u_2 ma przypis-

sana niebieską etykietę w ℓ' oraz $\ell'(w_1u_1) = 1$, podczas gdy $\ell'(w_2u_2) = 2$). Przypisujemy czerwoną etykietę jeden do u_1v_1 oraz $v_1v'_1$, jak również czerwoną etykietę dwa do $u_1v'_1$. Następnie przypisujemy do u_1u_2 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(u_1)$ oraz $\sigma_\ell^r(w_1)$ są różne i przypisujemy do u_2v_2 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(u_2)$ oraz $\sigma_\ell^r(w_2)$ są różne.

- Następnie założymy, że $\sigma_{\ell'}^b(u_2) \leq \sigma_{\ell'}^b(u_1)$. W tym przypadku przypisujemy niebieską etykietę jeden do u_1v_1 oraz $v_1v'_1$, a także niebieską etykietę dwa do $u_1v'_1$. Następnie przypisujemy do krawędzi u_1u_2 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_1)$ oraz $\sigma_\ell^b(w_1)$ są różne i do u_2v_2 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_2)$ oraz $\sigma_\ell^b(w_2)$ są różne.

W obu przypadkach łatwo sprawdzić, że w ten sposób otrzymaliśmy silne $(2, 2)$ -kolorowanie G .

(C6c) Założymy, że w $T(G)$ istnieje liść C związany z cyklem C_3 , gdzie C jest sąsiedni z wierzchołkiem mieszanym u_1 , którego odpowiednik u_1 jest sąsiedni z wierzchołkiem u_2 w grafie G , gdzie u_2 nie jest wierzchołkiem mieszanym w $T(G)$. Założymy dalej, że u_1 oprócz wierzchołka składowego C jest sąsiedni tylko z pewnym wierzchołkiem składowym N w reprezentacji drzewiastej $T(G)$ (zobacz rysunek 3.7). W szczególności zauważmy, że u_2 musi należeć do podgrafu N w grafie G . Ponadto możemy założyć, że wierzchołek u_2 jest stopnia dwa w G (bo w przeciwnym razie powrócilibyśmy do konfiguracji 6b). Rozważamy graf $G' = G - \{u_1u_2, v_1, v'_1\}$, gdzie v_1 oraz v'_1 są wierzchołkami cyklu C . Dodatkowo oznaczamy przez w_1, w_2 odpowiedniego sąsiada u_1, u_2 w grafie G' . Skoro G' jest stosowny (bo w przeciwnym przypadku G zawierałby jedną z konfiguracji jeden lub pięć), to możemy rozważyć ℓ' -silne $(2, 2)$ -kolorowanie G' . Ponownie skupiamy się na dwóch głównych przypadkach.

- Założymy najpierw, że krawędź u_1w_1 ma przypisaną niebieską etykietę, podczas gdy krawędź u_2w_2 ma przypisaną czerwoną etykietę w ℓ' . Przypisujemy do u_1u_2 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(u_2)$ oraz $\sigma_\ell^r(w_2)$ są różne. Następnie, jeśli $\sigma_{\ell'}^r(w_1) = 3$, to przypisujemy czerwoną etykietę jeden do $u_1v_1, v_1v'_1$ oraz czerwoną etykietę dwa do $u_1v'_1$. W przeciwnym razie przypisujemy do krawędzi u_1v_1 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_1)$ oraz $\sigma_\ell^b(w_1)$ są różne i do $u_1v'_1, v_1v'_1$ czerwoną etykietę o wartości, której nie użyliśmy na krawędzi u_1u_2 . Za pomocą podobnego argumentu jak wcześniej uzyskujemy żądane własności.
- Następnie założymy, że krawędzie u_1w_1, u_2w_2 mają przypisaną niebieską

etykietę w ℓ' . Rozważmy wartość $k \in \{1, 2\}$ taką, że przypisanie niebieskiej etykiety k do krawędzi u_1u_2 sprawi, iż $\sigma_\ell^b(u_2)$ oraz $\sigma_\ell^b(w_2)$ będą różne. Jeśli $\sigma_{\ell'}^b(u_1) + k + 3 \neq \sigma_{\ell'}^b(w_1)$, to przypisujemy niebieską etykietę k do u_1u_2 , niebieską etykietę jeden do u_1v_1 , $v_1v'_1$ oraz niebieską etykietę dwa do $u_1v'_1$. W przeciwnym przypadku przypisujemy do krawędzi u_1u_2 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(u_2)$ oraz $\sigma_\ell^r(w_2)$ są różne. Następnie przypisujemy do u_1v_1 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(u_1)$ oraz $\sigma_\ell^r(w_1)$ są różne. Na koniec przypisujemy do krawędzi $u_1v'_1$, $v_1v'_1$ takie same niebieskie etykiety o wartości różnej od tej użytej na krawędzi u_1w_1 . Argumentacja podobna do poprzedniej daje nam silne $(2, 2)$ -kolorowanie G .

Teraz jesteśmy gotowi do udowodnienia, że nie istnieje kaktus różny od K_2 oraz K_3 , który nie zawiera żadnej z tych konfiguracji, co implikuje tezę twierdzenia 42. Rozważmy graf G będący kaktusem (różnym od K_2 oraz K_3) o reprezentacji drzewiastej $T(G)$ ukorzenionej w dowolnym wierzchołku składowym. Niech L będzie liściem o największej wysokości w $T(G)$. Skoro G nie zawiera konfiguracji cztery, to L nie może być związany z cyklem o długości większej niż cztery. Oznaczmy przez P dziadka wierzchołka L w reprezentacji drzewiastej $T(G)$. Jeśli L jest związany z drzewem, to z faktu, że G nie zawiera konfiguracji jeden wynika, iż L ma wysokość co najwyżej jeden. Możemy założyć, że L jest związany z drzewem, albo cyklem C_3 . Jeśli P jest związany z drzewem, to bez straty ogólności L jest związany cyklem C_3 , i albo wierzchołek u należący do podgrafów P oraz L (w $T(G)$ będzie reprezentowany przez wierzchołek mieszany u) ma stopień trzy w G i graf G będzie zawierał konfigurację dwa, albo u ma stopień większy niż cztery w G . Skoro L jest liściem o największej wysokości, dowolny wierzchołek składowy sąsiedni z wierzchołkiem mieszanym u jest również liściem, a więc jest związany z C_3 , albo drzewem, to G zawiera konfigurację pięć. Skoro G nie zawiera konfiguracji C3 i C6c, P nie może być związany z C_3 , to w rezultacie P jest związany z cyklem o długości co najmniej cztery. Rozważmy sąsiadów u , czyli wierzchołka wspólnego dla P oraz L . Z faktu, że L jest liściem o największej wysokości wiemy, że co najmniej jeden sąsiad u w grafie G nie należy do podgrafu reprezentowanego przez P' , czyli dziadka P w reprezentacji drzewiastej $T(G)$. Oznaczmy go przez v . W końcu oznaczmy przez w innego sąsiada v w podgrafie reprezentowanym przez P . Skoro P jest związany z cyklem o długości co najmniej cztery, to wierzchołki u, v, w są parami różne i każdy wierzchołek w $T(G)$ odpowiadający podgrafowi zawierającemu którykolwiek z nich jest liściem. Skoro G nie zawiera konfiguracji cztery, to żaden z nich nie jest zawarty w cyklu o długości większej niż cztery różnym od tego reprezentowanego przez P . Jeśli jeden z tych wierzchołków należy do

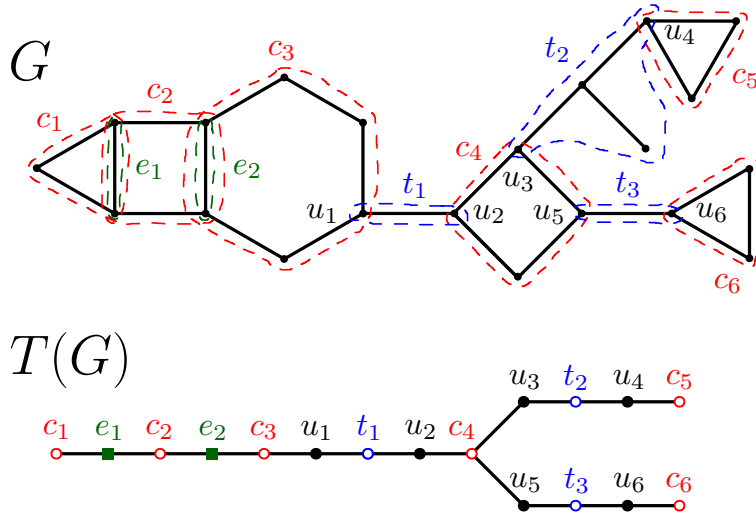
cyklu C_3 , to co najmniej jeden z jego sąsiadów ze zbioru $\{u, v, w\}$ należy do innego cyklu C_3 (i wówczas G zawiera konfigurację C6a), należy do drzewa (i wówczas G zawiera konfigurację C6b) albo nie należy nigdzie (i wówczas G zawiera konfigurację C6c). Stąd żaden z tych wierzchołków nie należy do C_3 oraz G zawiera konfigurację cztery. A więc L musi być jedynym wierzchołkiem reprezentacji drzewiastej $T(G)$. Jeśli L jest związany z cyklem o długości większej niż cztery, to mamy tezę. Zatem G jest izomorficzny z K_2 lub K_3 , co kończy dowód twierdzenia. $\square$

3.2 Grafy subkubiczne zewnętrznie planarne

Mówimy, że graf G jest *zewnętrznie planarny* jeśli G jest planarny i dodatkowo wszystkie jego wierzchołki leżą na zewnętrznej ścianie. Przypomnijmy, że grafy zewnętrznie planarne są 2-zdegenerowane, a więc mają liczbę chromatyczną co najwyżej trzy. Naszym głównym rezultatem w tym podrozdziale będzie poniższe twierdzenie, które potwierdza silną hipotezę (2,2) dla stosownych grafów subkubicznych zewnętrznie planarnych.

Twierdzenie 43 ([13]). *Jeśli G jest stosownym grafem subkubicznym zewnętrznie planarnym, to G jest silnie (2,2)-kolorowalny.*

Dowód. Struktura tego dowodu jest taka sama jak dowodu twierdzenia 42. Podobnie jak poprzednio, zaczniemy od zdefiniowania *reprezentacji drzewiastej* grafu subkubicznego zewnętrznie planarnego G , którą będziemy oznaczać przez $T(G)$. W reprezentacji drzewiastej $T(G)$ będziemy wyróżniać trzy główne typy wierzchołków: *wierzchołki krawędziowe*, *wierzchołki składowe* i *wierzchołki mieszane*. Każdy wierzchołek krawędziowy w $T(G)$ odpowiada krawędzi należącej do dwóch cykli w grafie subkubicznym zewnętrznie planarnym G . Wierzchołki składowe typu „cykl” odpowiadają indukowanym cyklom bez cięciw w grafie G . Wierzchołki składowe typu „drzewo” odpowiadają składowym drzewiastym w grafie powstałym z G przez usunięcie każdej krawędzi leżącej na dowolnym cyklu w G oraz powstałych izolowanych wierzchołków. Wierzchołki mieszane odpowiadają tym wierzchołkom grafu G , dla których podgrafy reprezentowane przez co najmniej dwa wierzchołki składowe typu „cykl” lub wierzchołek składowy typu „cykl” i wierzchołek składowy typu „drzewo” mają dokładnie jeden wspólny wierzchołek. Dodawanie krawędzi do $T(G)$ zaczynamy od dodania krawędzi między wierzchołkami krawędziowymi a wierzchołkami składowymi typu „cykl” wtedy i tylko wtedy, gdy krawędź odpowiadająca wierzchołkowi krawędziowemu należy do danego cyklu. Następnie do $T(G)$ dodajemy krawędzie między wierzchołkami mieszanymi a składowymi wtedy i tylko wtedy, gdy wierzchołek mieszany należy



Rysunek 3.8: Przykład grafu subkubicznego zewnętrznie planarnego G wraz z odpowiadającą reprezentacją drzewiastą $T(G)$ przedstawioną w dowodzie twierdzenia 43.

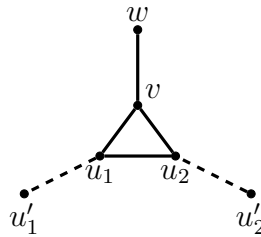
do danego indukowanego cyklu lub składowej drzewiastej. Dla lepszego zobrazowania sytuacji został podany przykład na rysunku 3.8.

Możemy zauważyć, że wszystkie liście $T(G)$ są wierzchołkami składowymi. Ponadto zbiór wierzchołków mieszanych wraz z wierzchołkami krawędziowymi jak również zbiór wierzchołków składowych są obydwa zbiorami niezależnymi. Podobnie jak w przypadku kaktusów taka reprezentacja drzewiasta grafu subkubicznego zewnętrznie planarnego G jest drzewem. Aby to pokazać założymy, że $T(G)$ zawiera cykl C . Wówczas żaden wierzchołek składowy z tego cyklu nie jest związany z drzewem (bo w przeciwnym przypadku to drzewo nie miałoby krawędzi będącej mostem w G). Jeśli jakiś wierzchołek z C jest wierzchołkiem krawędziowym, to jeden z wierzchołków G nie należy do ściany zewnętrznej i stąd C jest utworzony z wierzchołków mieszanych i wierzchołków składowych związanych z cyklami. Rozważmy dwa wierzchołki mieszane u, v sąsiednie z wierzchołkiem składowym S , gdzie wszystkie trzy z nich są wierzchołkami z C . Twierdzimy, że wierzchołki w G odpowiadające wierzchołkom mieszanym u, v są sąsiednie w G . Skoro wierzchołek składowy S jest związany z cyklem, to istnieje wierzchołek w należący do cyklu S nie należący do ściany zewnętrznej, co stanowi sprzeczność. W szczególności wszystkie wierzchołki z C tworzą cykl bez cięciw w G mający wspólną krawędź uv z S , co jest sprzecznością, ponieważ C nie zawiera wierzchołków krawędziowych.

W szczególności zauważmy, że wszystkie konfiguracje użyte w dowodzie

twierdzenia 42 mają nadal zastosowanie, ponieważ kaktusy są grafami zewnętrznie planarnymi. Konfiguracje C1 do C6c zajmują się wierzchołkami składowymi sąsiednimi z wierzchołkami mieszanymi. Zasadniczo, aby rozszerzyć dowód na grafy subkubiczne zewnętrznie planarne, musimy zatem zająć się przypadkami obejmującymi wierzchołki składowe sąsiednie z wierzchołkami krawędziowymi.

(C7) Załóżmy, że w $T(G)$ istnieje wierzchołek składowy C związany z cyklem C_3 sąsiedni z wierzchołkiem krawędziowym związanym z krawędzią u_1u_2 gdzie, jeśli oznaczymy przez v ostatni wierzchołek z C w grafie G , to wierzchołek mieszany odpowiadający v jest sąsiedni z liściem w $T(G)$. W szczególności, skoro G jest subkubiczny, to wierzchołek mieszany odpowiadający v musi być stopnia dwa w $T(G)$. Ponadto załóżmy, że podgraf w G będący drzewem reprezentowanym przez liść w $T(G)$, który jest sąsiedni z wierzchołkiem mieszanym v ma wysokość jeden i oznaczmy przez w jego jedyny wierzchołek różny od v w tym podgrafie. Na koniec możemy założyć, że $d(u_1) = d(u_2) = 3$ (bo w przeciwnym przypadku G zawierałby konfigurację trzy). Dodatkowo w G oznaczamy przez u'_1 (odpowiednio u'_2) drugiego sąsiada u_1 (odpowiednio u_2). Intuicyjnie ta konfiguracja odpowiada trójkątowi z wiszącą krawędzią incydentną z jednym jego wierzchołkiem i połączoną z resztą grafu przez dwa pozostałe wierzchołki trójkąta (zobacz rysunek 3.9). Rozważamy graf $G' = G - \{u_1u_2, v, w\}$. Skoro G' jest stosowny (bo w przeciwnym razie G zawierałby konfigurację trzy), to możemy rozważyć ℓ' - silne $(2, 2)$ -kolorowanie G' . Bez straty ogólności możemy założyć, że krawędź u'_1u_1 ma przypisaną niebieską etykietę w ℓ' .



Rysunek 3.9: Konfiguracja C7.

- Załóżmy, że krawędź u'_2u_2 ma przypisaną czerwoną etykietę w ℓ' . Przypisujemy do u_1u_2 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_2)$ oraz $\sigma_\ell^b(u'_2)$ są różne. Przypisujemy do krawędzi u_1v którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_1)$ oraz $\sigma_\ell^b(u'_1)$ są różne. Przypisujemy do u_2v którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(u_2)$ oraz $\sigma_\ell^r(u'_2)$ są różne. Jeśli $\ell(u_1u_2) = 2$, to przypisujemy do krawędzi vw którąkolwiek

z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_2)$ oraz $\sigma_\ell^b(v)$ są różne. Zauważmy, że $\sigma_\ell^b(u_1) \geq \ell(u_1v) + 3$. Stąd niezależnie od tego, którą etykietę przypiszemy do krawędzi vw wierzchołki v oraz u_1 muszą być rozróżnione. W przeciwnym razie przypisujemy do krawędzi vw którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_1)$ oraz $\sigma_\ell^b(v)$ są różne. Skoro $\sigma_\ell^b(u_2) = 1$, to uzyskujemy silne $(2, 2)$ -kolorowanie G .

Od teraz możemy zatem założyć, że krawędź u'_2u_2 ma przypisaną niebieską etykietę w ℓ' .

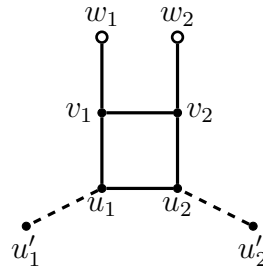
- Załóżmy najpierw, że $\ell'(u'_1u_1) = \ell'(u'_2u_2) = 1$. Załóżmy również, że $\sigma_{\ell'}^r(u'_1) \neq 3$. Przypisujemy do krawędzi u_1u_2 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(u_2)$ oraz $\sigma_\ell^r(u'_2)$ są różne i do u_1v czerwoną etykietę o wartości ze zbioru $\{1, 2\}$, której nie przypisaliśmy do u_1u_2 . W ten sposób $\sigma_\ell^r(u_1) = 3$. Następnie przypisujemy do krawędzi u_2v którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_2)$ oraz $\sigma_\ell^b(u'_2)$ są różne. Przypisujemy do vw którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_2)$ oraz $\sigma_\ell^b(v)$ są różne. Teraz możemy założyć, że $\sigma_{\ell'}^r(u'_1) = \sigma_{\ell'}^r(u'_2) = 3$. Przypisujemy czerwoną etykietę jeden do vw oraz u_1v . Następnie przypisujemy do krawędzi u_1u_2 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_1)$ oraz $\sigma_\ell^b(u'_1)$ są różne i do vu_2 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_2)$ oraz $\sigma_\ell^b(u'_2)$ są różne. O ile $\ell(u_1u_2) = 1$ oraz $\ell(vu_2) = 2$, to otrzymujemy silne $(2, 2)$ -kolorowanie G . Jednakże przypadek będący wyjątkiem występuje tylko jeśli $\sigma_{\ell'}^b(u'_2) = 4$ oraz $\sigma_{\ell'}^b(u'_1) = 3$, w takiej sytuacji możemy po prostu zamienić rolami u_1 oraz u_2 w wyborach dokonanych powyżej, aby rozwiązać tą sytuację w ten sam sposób.
- W drugim przypadku załóżmy, że $\ell'(u'_1u_1) = 2$ oraz $\ell'(u'_2u_2) = 1$. Najpierw załóżmy, że $\sigma_{\ell'}^r(u'_2) \neq 3$. Przypisujemy do krawędzi u_1u_2 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(u_1)$ oraz $\sigma_\ell^r(u'_1)$ są różne i przypisujemy czerwoną etykietę o innej wartości do u_2v . Następnie przypisujemy do u_1v którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_1)$ oraz $\sigma_\ell^b(u'_1)$ są różne i do vw którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_1)$ oraz $\sigma_\ell^b(v)$ są różne. Teraz możemy założyć, że $\sigma_{\ell'}^r(u'_2) = 3$. Załóżmy najpierw, że $\sigma_{\ell'}^r(u'_1) \neq 3$. Przypisujemy czerwoną etykietę jeden do u_1u_2, u_2v, vw i czerwoną etykietę dwa do u_1v , aby uzyskać odpowiednie kolorowanie. Załóżmy teraz, że $\sigma_{\ell'}^r(u'_1) = \sigma_{\ell'}^r(u'_2) = 3$. Jeśli $\sigma_{\ell'}^b(u'_1) = 5$ oraz $\sigma_{\ell'}^b(u'_2) = 3$, to przypisujemy niebieską etykietę dwa do u_1u_2, u_1v, vw i niebieską etykietę jeden do u_2v . W przeciwnym razie przypisujemy czerwoną etykietę jeden do u_1v oraz vw , przypisujemy do u_1u_2 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_2)$ oraz $\sigma_\ell^b(u'_2)$ są różne i do u_1v którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_1)$ oraz

$\sigma_\ell^b(u'_1)$ są różne. To skutkuje silnym $(2, 2)$ -kolorowaniem G o ile nie zachodzi $\sigma_\ell^b(v) = \sigma_\ell^b(u_2)$. W tej sytuacji musieliśmy wybrać $\ell(u_1u_2)$, aby mieć wartość jeden i $\ell(u_1v)$, aby mieć wartość dwa, czyli jesteśmy w sytuacji, którą już omówiliśmy.

- W trzecim przypadku założymy, że $\ell'(u'_1u_1) = \ell'(u'_2u_2) = 2$. Najpierw założymy, że $\sigma_{\ell'}^r(u'_1) \neq 3$. Przypisujemy do krawędzi u_1u_2 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(u_2)$ oraz $\sigma_\ell^r(u'_2)$ są różne i do u_1v czerwoną etykietę o wartości, której nie przypisaliśmy do krawędzi u_1u_2 . W ten sposób $\sigma_\ell^r(u_1) = 3$. Następnie przypisujemy do krawędzi u_2v którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_2)$ oraz $\sigma_\ell^b(u'_2)$ są różne. Jeśli $\ell(u_2v) = 1$, to przypisujemy czerwoną etykietę dwa do vw . W przeciwnym razie przypisujemy niebieską etykietę jeden do vw . Teraz możemy założyć, że $\sigma_{\ell'}^r(u'_1) = \sigma_{\ell'}^r(u'_2) = 3$. Przypisujemy do krawędzi u_1u_2 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_1)$ oraz $\sigma_\ell^b(u'_1)$ są różne i do u_2v którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_2)$ oraz $\sigma_\ell^b(u'_2)$ są różne. Wówczas na koniec przypisujemy czerwoną etykietę jeden do krawędzi u_1v oraz vw . We wszystkich przypadkach można sprawdzić, że ostatecznie otrzymujemy silne $(2, 2)$ -kolorowanie G .

- (C8) Założymy, że w $T(G)$ istnieje wierzchołek składowy C związany z cyklem C_4 taki, że C jest sąsiedni z pewnym wierzchołkiem krawędziowym odpowiadającym krawędzi u_1u_2 . Oznaczmy przez v_1 oraz v_2 pozostałe dwa wierzchołki z C w grafie G . Dalej zakładamy, że jeśli $T(G)$ zawiera wierzchołek odpowiadający v_1, v_2 , albo krawędzi v_1v_2 w G , to wszystkie wierzchołki sąsiednie z tym wierzchołkiem różne od C są liśćmi. Bardziej intuicyjnie, ta konfiguracja odpowiada cyklowi C_4 , gdzie dwa wierzchołki są sąsiednie z drzewami o wysokości jeden lub C_3 (zobacz rysunek 3.10). Dodatkowo w grafie G , jeśli istnieje, to oznaczamy przez w_1 (odpowiednio w_2) sąsiada z poza cyklu C_4 wierzchołka v_1 (odpowiednio v_2), gdzie ewentualnie $w_1 = w_2$. W tej konfiguracji rozważmy graf $G' = G - \{u_1u_2, v_1, v_2\}$, jak również ℓ' - silne $(2, 2)$ -kolorowanie G' (zauważmy, iż graf G' jest rzeczywiście stosowny). Zakładamy bez straty ogólności, że $\sigma_{\ell'}^b(u_1) \geq \sigma_{\ell'}^b(u_2)$ oraz, iż krawędź $u_1u'_1$ ma przypisaną niebieską etykietę w ℓ' . Przypisujemy do u_1u_2 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u'_2)$ oraz $\sigma_\ell^b(u_2)$ są różne. Następnie przypisujemy do krawędzi v_1u_1 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u'_1)$ oraz $\sigma_\ell^b(u_1)$ są różne, do v_1w_1 (jeśli istnieje) którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_1)$ oraz $\sigma_\ell^b(v_1)$ są różne i do u_2v_2 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(u'_2)$ oraz $\sigma_\ell^r(u_2)$ są różne. Przypisujemy również do krawędzi v_1v_2 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(v_2)$ oraz

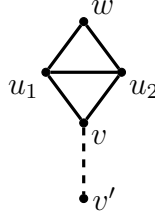
$\sigma_\ell^r(u_2)$ są różne. Jeśli krawędź v_2w_2 istnieje, to również przypisujemy do v_2w_2 czerwoną etykietę o wartości, której nie przypisaliśmy do v_1v_2 . W ten sposób, w przypadku gdy wierzchołek w_2 istnieje oraz w_2, v_1 są sąsiednie, to te wierzchołki mają różne czerwone sumy. Łatwo jest również sprawdzić, że dowolna para sąsiednich wierzchołków jest rozróżniana w obu kolorach za pomocą przedstawionego kolorowania. Stąd uzyskujemy silne $(2, 2)$ -kolorowanie G .



Rysunek 3.10: Szczególny przypadek konfiguracji C8, gdzie wierzchołki w_1 oraz w_2 istnieją, ale są różne.

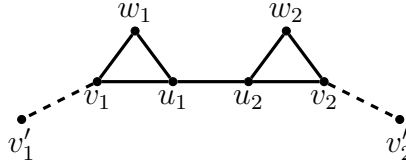
(C9) Załóżmy, że w $T(G)$ istnieje wierzchołek krawędziowy związany z krawędzią u_1u_2 sąsiedni z dwoma wierzchołkami składowymi, obydwooma związanymi z cyklami C_3 . Dalej załóżmy, że jeden z tych wierzchołków składowych jest liściem w $T(G)$ (zobacz rysunek 3.11). Oznaczamy w G przez w ostatni wierzchołek cyklu C_3 związanego z liściem w $T(G)$ i przez v ostatni wierzchołek drugiego cyklu C_3 . Możemy również założyć, że $d(v) = 3$, v' oznacza jego ostatniego sąsiada i, że graf $G' = G - \{u_1, u_2, w\}$ jest stosowny. Rozważamy ℓ' - silne $(2, 2)$ -kolorowanie G' . Bez straty ogólności załóżmy, że krawędź vv' ma przypisaną niebieską etykietę w ℓ' . Przypisujemy do krawędzi vu_1 którąkolwiek z niebieskich tak, że $\sigma_\ell^b(v)$ oraz $\sigma_\ell^b(v')$ są różne i do u_1w którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(v)$ oraz $\sigma_\ell^b(u_1)$ są różne. Następnie przypisujemy do vu_2 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(v)$ oraz $\sigma_\ell^r(v')$ są różne, taką samą czerwoną etykietę do u_2w oraz przypisujemy do u_1u_2 czerwoną etykietę o wartości, której nie przypisaliśmy do u_2w tak, że rzeczywiście czerwone sumy wierzchołków u_2 oraz w są różne. Następnie można sprawdzić, że to skutkuje silnym $(2, 2)$ -kolorowaniem G .

(C10) Załóżmy, że w $T(G)$ istnieją dwa wierzchołki składowe C, C' , obydwa związane z cyklami C_3 takie, że cykl C w grafie G zawiera wierzchołek u_1 oraz cykl C' w grafie G zawiera wierzchołek u_2 , gdzie u_1 oraz u_2 są



Rysunek 3.11: Konfiguracja C9.

sąsiednie w G (zobacz rysunek 3.12). Oznaczamy w G przez v_1 oraz w_1 (odpowiednio v_2 oraz w_2) pozostałe dwa wierzchołki z C (odpowiednio C') i dalej założmy, że $d(w_1) = d(w_2) = 2$. Skoro G nie zawiera konfiguracji dwa, to musimy mieć $d(v_1) = d(v_2) = 3$ i oznaczamy przez v'_1 (odpowiednio v'_2) innego sąsiada v_1 (odpowiednio v_2). Ponadto, ponieważ G nie zawiera konfiguracji trzy, graf $G' = G - \{u_1, u_2, w_1, w_2\}$ jest stosowny i możemy rozważyć ℓ' - silne $(2, 2)$ -kolorowanie G' . Ponownie rozważamy dwa główne przypadki.



Rysunek 3.12: Konfiguracja C10.

- Najpierw założmy, że krawędzie $v_1v'_1$ oraz $v_2v'_2$ mają przypisane etykiety o tym samym kolorze, powiedzmy niebieskim, w ℓ' . Przypisujemy do krawędzi w_2v_2 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(v_2)$ oraz $\sigma_\ell^b(v'_2)$ są różne i do v_1u_1 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(v_1)$ oraz $\sigma_\ell^b(v'_1)$ są różne. Przypisujemy do v_1w_1 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(v_1)$ oraz $\sigma_\ell^r(v'_1)$ są różne i przypisujemy do krawędzi u_1u_2 czerwoną etykietę o innej wartości. Ponadto przypisujemy do u_1w_1 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(u_1)$ oraz $\sigma_\ell^r(v_1)$ są różne i do u_2v_2 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(v_2)$ oraz $\sigma_\ell^r(v'_2)$ są różne. Na koniec przypisujemy do u_2w_2 czerwoną etykietę o pewnej wartości tak, że $\sigma_\ell^r(v_2)$ oraz $\sigma_\ell^r(w_2)$ są różne, i której wartość nie została przypisana do u_2v_2 . W ten sposób niezależnie od etykiety, którą przypisaliśmy do krawędzi u_1w_1 wierzchołki u_1 oraz u_2 są rozróżnione, a więc otrzymujemy silne $(2, 2)$ -kolorowanie.
- Teraz założmy, że krawędź $v_1v'_1$ ma przypisaną niebieską etykietę, podczas gdy $v_2v'_2$ ma czerwoną etykietę. Dalej założmy, że albo $\ell'(v_1v'_1) = 2$,

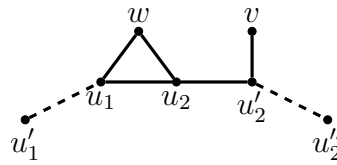
albo $\sigma_{\ell'}^b(v'_2) \neq 3$. Przypisujemy do krawędzi v_1w_1 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_{\ell}^b(v_1)$ oraz $\sigma_{\ell}^b(v'_1)$ są różne. Powyższy warunek implikuje, że albo przypisaliśmy etykietę o wartości dwa, albo $\sigma_{\ell}^b(v_1) \neq 2$. Następnie przypisujemy do u_1v_1 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_{\ell}^r(v_2)$ oraz $\sigma_{\ell}^r(v'_2)$ są różne i do u_1w_1 czerwoną etykietę o innej wartości. Dalej przypisujemy do krawędzi u_1u_2 jakąkolwiek niebieską etykietę, która nie powoduje konfliktu pomiędzy u_1 i ani w_1 , ani v_1 , co jest zawsze możliwe, ponieważ albo $\ell(v_1w_1) = 2$ (i wówczas możemy przypisać niebieską etykietę jeden do u_1u_2), albo $\sigma_{\ell}^b(v_1) = 3$ (i wówczas możemy przypisać niebieską etykietę dwa do u_1u_2). Ponadto przypisujemy do krawędzi v_2w_2 niebieską etykietę jeden, a do u_2v_2 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_{\ell}^b(v_2)$ oraz $\sigma_{\ell}^b(v'_2)$ są różne, jak również przypisujemy niebieską etykietę o innej wartości do u_2w_2 . Można sprawdzić, że w ten sposób uzyskujemy silne $(2, 2)$ -kolorowanie G .

Teraz możemy założyć, że $\sigma_{\ell'}^b(v'_2) = 3$ oraz $\ell'(v_1v'_1) = 1$. Przypisujemy niebieską etykietę dwa do wszystkich krawędzi spośród u_1v_1, v_1w_1, u_1w_1 oraz u_1u_2 . Następnie przypisujemy niebieską etykietę jeden do v_2w_2 . Przypisujemy do u_2v_2 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_{\ell}^b(v_2)$ oraz $\sigma_{\ell}^b(v'_2)$ są różne, jak również niebieską etykietę o innej wartości do u_2w_2 . Można sprawdzić, że postępując w ten sposób niebieskie sumy wierzchołków v_2 oraz w_2 są różne, czyli w szczególności ponownie otrzymujemy silne $(2, 2)$ -kolorowanie G .

Tak czy inaczej mamy oczekiwane kolorowanie G .

- (C11) Załóżmy, że w $T(G)$ istnieje wierzchołek składowy C związany z cyklem C_3 sąsiedni albo z dwoma wierzchołkami mieszanymi u_1, u_2 , opowiadanymi wierzchołkom u_1, u_2 w G , albo z wierzchołkiem krawędziowym odpowiadającym krawędzi u_1u_2 (zobacz rysunek 3.13). Oznaczamy w grafie G przez w ostatni wierzchołek z C_3 , przez u'_1 innego sąsiada u_1 i przez u'_2 innego sąsiada u_2 . Dalej załóżmy, że jeśli $d(u'_2) = 3$, to jeden z jego sąsiadów, oznaczmy go przez v , jest stopnia jeden. Tak, czy inaczej oznaczmy przez u''_2 innego sąsiada u'_2 . Bardziej intuicyjnie ta konfiguracja odpowiada trójkątowi sąsiedniemu albo z wierzchołkiem stopnia dwa, albo z wierzchołkiem stopnia trzy z incydentną wieszającą krawędzią. Skoro G nie zawiera konfiguracji jeden lub trzy, to graf $G' = G - \{w, u_2, v\}$ jest stosowny i niech ℓ' będzie silnym $(2, 2)$ -kolorowaniem G' . Bez straty ogólności możemy założyć, że krawędź $u_1u'_1$ ma przypisaną niebieską etykietę w ℓ' . Przypisujemy do krawędzi u_1w którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_{\ell}^b(u_1)$ oraz $\sigma_{\ell}^b(u'_1)$ są różne, do u_1u_2 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_{\ell}^r(u_1)$ oraz

$\sigma_\ell^r(u'_1)$ są różne i do u_2w czerwoną etykietę o innej wartości. Ponadto, jeśli wierzchołek v istnieje, to przypisujemy do krawędzi u'_2v jakąkolwiek z czerwonych etykiet, która skutkuje tym, że $\sigma_\ell^r(u'_2) + \ell(u'_2v) \neq 3$. Na koniec przypisujemy do $u_2u'_2$ którąkolwiek z czerwonych krawędzi tak, że $\sigma_\ell^r(u'_2)$ oraz $\sigma_\ell^r(u''_2)$ są różne. Można sprawdzić, że jeśli wierzchołek v nie istnieje, to $\sigma_\ell^r(u'_2) < \sigma_\ell^r(u_2)$. W przeciwnym razie u_2 oraz u'_2 są rozróżnione dzięki czerwonej etykiecie przypisanej do krawędzi u'_2v . Tak, czy inaczej kończymy z silnym $(2, 2)$ -kolorowaniem grafu G .



Rysunek 3.13: Konfiguracja C11.

Teraz jesteśmy gotowi do udowodnienia, że nie istnieje żaden minimalny kontrprzykład do twierdzenia 43. Rozważmy taki kontrprzykład G i jego reprezentację drzewiastą $T(G)$ ukorzoną w dowolnym wierzchołku. Najpierw założmy, że istnieje liść T o największej wysokości w $T(G)$ związany z drzewem. Skoro G nie zawiera konfiguracji jeden, to T jest związany z K_2 . Oznaczmy przez u jego ojca w $T(G)$. Skoro graf G jest subkubiczny, to w $T(G)$ wierzchołek u ma dokładnie jednego sąsiada oprócz T , którego oznaczamy przez N . Z faktu, że G nie zawiera konfiguracji siedem wierzchołek N nie może być związany z C_3 . Jeśli N jest związany z C_4 , to albo wierzchołek odpowiadający wierzchołkowi mieszanemu u jest sąsiedni z wierzchołkiem o stopniu dwa w G oraz G zawiera jedną z konfiguracji cztery i osiem, albo obydwa sąsiedzi wierzchołka odpowiadającego wierzchołkowi mieszanemu u mają stopień trzy. W szczególności, skoro G jest zewnętrźnie planarny to jeden z nich, oznaczmy go przez u' , należy do podgrafu reprezentowanego przez liść w $T(G)$ różny od T , oznaczmy go przez L . Z faktu, że G nie zawiera konfiguracji osiem wynika, że L musi być związany z cyklem. Teraz, skoro G nie zawiera ani konfiguracji cztery, ani osiem, to L nie może być związany z cyklem o długości większej niż trzy, a stąd G zawiera konfigurację jedenaście.

Zatem $T(G)$ nie może zawierać żadnego liścia o największej wysokości związanego z drzewem. Teraz założmy, że istnieje liść C o największej wysokości w $T(G)$ związany z cyklem. Skoro G nie zawiera ani konfiguracji cztery ani osiem, to C musi być związany z cyklem C_3 . Z faktu, że G nie zawiera konfiguracji dziewięć wiemy, że w G musi istnieć wierzchołek u' sąsiedni z wierzchołkiem z C_3 wspólnym z innym podgrafem reprezentowanym przez

liść o największej wysokości w $T(G)$. Używając podobnych argumentów do tych wykorzystanych na końcu dowodu twierdzenia 42 możemy wywnioskować, że wierzchołek z C_3 jest sąsiedni albo z wierzchołkiem stopnia dwa (co skutkuje konfiguracją jedenaście), z wierzchołkiem z innego cyklu C_3 (co skutkuje konfiguracją dziesięć), z wierzchołkiem z cyklu C_4 (co skutkuje konfiguracją osiem), albo z wierzchołkiem z dłuższego cyklu (co skutkuje konfiguracją cztery). Zatem kontrprzykład G nie może istnieć, a twierdzenie jest prawdziwe. $\square$

3.3 Grafy o maksymalnym średnim stopniu mniejszym niż $\frac{9}{4}$

Przypomnijmy, że *średni stopień* $\text{ad}(G)$ grafu G jest zdefiniowany jako $\frac{2|E(G)|}{|V(G)|}$. Przez *maksymalny średni stopień* $\text{mad}(G)$ grafu G rozumiemy maksimum wartości średnich stopni $\text{ad}(H)$ wszystkich podgrafów H grafu G . W pozostałej części tego podrozdziału przedstawimy dowód silnej hipotezy $(2, 2)$ dla stosownych grafów o maksymalnym średnim stopniu mniejszym niż $\frac{9}{4}$. Zauważmy, że takie grafy są 2-zdegenerowane, a więc mają liczbę chromaticzną co najwyżej trzy.

Twierdzenie 44 ([13]). *Jeśli G jest grafem o $\text{mad}(G) < \frac{9}{4}$, to albo G jest silnie $(2, 2)$ -kolorowalny, albo G ma składową spójną izomorficzną z K_2 lub K_3 .*

Dowód. Będziemy korzystać z *metody rozładowania*, gdzie najpierw udowodnimy w podobnym stylu jak w dowodach twierdzeń 42 oraz 43, że minimalny kontrprzykład (ze względu na liczbę krawędzi) do twierdzenia 44 nie może zawierać pewnych rzadkich konfiguracji. Następnie dochodzimy do sprzeczności z rzadkością minimalnego kontrprzykładu poprzez użycie funkcji ładunku. W celu uzyskania bardziej szczegółowego wyjaśnienia tej metody odsyłamy czytelnika do dwóch pierwszych akapitów dowodu twierdzenia 4.1 w [19]. Wzmocnimy metodę rozładowania o tak zwaną *metodę wierzchołków duchów* (wprowadzoną formalnie w [23]), która w kontekście grafów o ograniczonym maksymalnym średnim stopniu zapewnia sposób, poprzez pewien proces rozładowania, na pokazanie, że graf ma duży maksymalny średni stopień.

Twierdzenie 45 ([22]). *Niech G będzie grafem, m pewną wartością, a (V_1, V_2) (takie, że $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) dowolnym podziałem $V(G)$. Niech ω będzie funkcją ładunku, gdzie $\omega(v) = d(v) - m$ dla każdego $v \in V(G)$. Jeśli istnieje proces rozładowania skutkujący funkcją ładunku ω^* , gdzie*

- $\omega^*(v) \geq 0$ dla każdego $v \in V_1$ oraz
- $\omega^*(v) \geq \omega(v) + d_{V_1}(v)$ dla każdego $v \in V_2$,

to $\text{mad}(G) \geq m$. □

Teraz rozważamy graf G będący minimalnym kontrprzykładem do twierdzenia 44. Wierzchołek $u \in V(G)$ nazywamy k -wierzchołkiem (odpowiednio k^+ , k^-) jeśli $d(u) = k$ (odpowiednio $d(u) \geq k$, $d(u) \leq k$). 3-wierzchołek nazywamy słabym jeśli jest sąsiedni z 1-wierzchołkiem.

Fakt 46. *Graf G nie zawiera żadnej z następujących konfiguracji:*

- (C1) 3^- -wierzchołek sąsiedni z dwoma 1-wierzchołkami,
- (C2) d -wierzchołek sąsiedni z więcej niż $\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$ 1-wierzchołkami, dla każdego $d \geq 4$,
- (C3) dwa sąsiednie słabe 3-wierzchołki,
- (C4) d -wierzchołek sąsiedni z $d - 2$ 1-wierzchołkami i jednym słabym 3-wierzchołkiem, dla każdego $d \geq 4$,
- (C5) 2-wierzchołek sąsiedni z dwoma 2-wierzchołkami,
- (C6) 2-wierzchołek sąsiedni z 1-wierzchołkiem,
- (C7) słaby 3-vertex sąsiedni z 2-wierzchołkiem.

Dowód. Dla każdej konfiguracji H założmy, że graf G zawiera H jako podgraf indukowany. Rozważmy graf G' , uzyskany z G przez usunięcie krawędzi, i gdy tylko będzie to możliwe, otrzymamy ℓ' - silne $(2, 2)$ -kolorowanie G' z minimalność kontrprzykładu G . Jeśli będziemy mogli rozszerzyć ℓ' na usunięte krawędzie tak, że powstałe kolorowanie ℓ będzie silnym $(2, 2)$ -kolorowaniem G , to otrzymamy sprzeczność. Zauważmy, że rozszerzenie kolorowania ℓ' do ℓ może jedynie zmienić sumy wierzchołków incydentnych z usuniętymi krawędziami. Stąd musimy jedynie lokalnie sprawdzić, czy ℓ jest silnym $(2, 2)$ -kolorowaniem.

W dalszej części dowodu kolejność, w jakiej zajmujemy się konfiguracjami od C1 do C7, będzie zależała od stopnia skomplikowania naszych argumentów.

- (C1) Załóżmy, że istnieje 3^- -wierzchołek $u \in V(G)$ sąsiedni z dwoma 1-wierzchołkami v_0 oraz v_1 . Jeśli u jest 2-wierzchołkiem, to G jest ścieżką P_3 i rezultat oczywiście zachodzi. Stąd oznaczamy przez v_2 ostatniego sąsiada u i rozważamy graf $G' = G - \{uv_0, uv_1\}$. Zauważmy, że

skoro stopień u w grafie G' musi być jeden, to albo G' jest izomorficzny z K_2 (w takim przypadku G jest silnie $(2, 2)$ -kolorowalny, ponieważ jest izomorficzny z gwiazdą o trzech liściach), albo G' jest silnie $(2, 2)$ -kolorowalny i oznaczamy przez ℓ' takie kolorowanie krawędzi G' . Dalej założmy bez straty ogólności, że krawędź uv_2 ma przypisaną czerwoną etykietę. Przypisujemy niebieską etykietę jeden do uv_0 i przypisujemy do uv_1 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u)$ jest różna od $\sigma_{\ell'}^b(v_2)$ (która jest równa $\sigma_\ell^b(v_2)$). Łatwo sprawdzić, że to skutkuje silnym $(2, 2)$ -kolorowaniem G .

- (C6) Załóżmy, że istnieje 2-wierzchołek $u \in V(G)$ sąsiedni z 1-wierzchołkiem v_0 . Oznaczamy przez v_1 innego sąsiada u i rozważamy graf $G' = G - \{uv_0\}$. Zauważmy, że skoro stopień wierzchołka u w grafie G' musi być równy jeden, to albo G' jest izomorficzny z K_2 (w takim przypadku G jest silnie $(2, 2)$ -kolorowalny, ponieważ jest izomorficzny z P_3), albo G' jest silnie $(2, 2)$ -kolorowalny i oznaczamy przez ℓ' takie kolorowanie krawędzi G' . Dalej założmy bez straty ogólności, że krawędź uv_1 ma przypisaną czerwoną etykietę. Przypisujemy do krawędzi uv_0 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(u)$ jest różna od $\sigma_{\ell'}^r(v_1)$ (która jest równa $\sigma_\ell^r(v_1)$). Ponownie uzyskujemy silne $(2, 2)$ -kolorowanie G .
- (C5) Załóżmy, że istnieje 2-wierzchołek $u \in V(G)$ sąsiedni z dwoma 2-wierzchołkami v_0, v_1 . Zauważmy, że v_0 oraz v_1 nie mogą być sąsiednie, ponieważ w przeciwnym razie graf G byłby izomorficzny z K_3 , a więc możemy oznaczyć odpowiednio przez v'_0, v'_1 ich drugiego sąsiada. Rozważamy graf $G' = G - \{uv_0, uv_1\}$. Zauważmy, że G' nie może mieć składowej spójnej izomorficznej z K_2 (bo w przeciwnym razie G zawierałaby konfigurację sześć), ani K_3 (ponieważ obie składowe spójne mają 1-wierzchołek). Zatem mamy silne $(2, 2)$ -kolorowanie ℓ' grafu G' .
- Załóżmy, że krawędzie $v_0v'_0$ oraz $v_1v'_1$ mają ten sam kolor w ℓ' (bez straty ogólności niebieski). Przypisujemy do krawędzi uv_0 (odpowiednio uv_1) którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(v_0)$ oraz $\sigma_\ell^r(v'_0)$ (odpowiednio $\sigma_\ell^r(v_1)$ oraz $\sigma_\ell^r(v'_1)$) są różne.
 - Załóżmy, że krawędzie $v_0v'_0$ oraz $v_1v'_1$ mają różne kolory w ℓ' , powiedzmy bez straty ogólności, że $v_0v'_0$ jest niebieska. Przypisujemy do krawędzi uv_0 (odpowiednio uv_1) którąkolwiek z niebieskich (odpowiednio czerwonych) etykiet tak, że niebieskie (odpowiednio czerwone) sumy wierzchołków v_0 oraz v'_0 (odpowiednio v_1 oraz v'_1) są różne.

Łatwo sprawdzić, że w obu przypadkach otrzymujemy silne $(2, 2)$ -kolorowanie G .

(C3) Załóżmy, że istnieją dwa sąsiednie 3-wierzchołki $u_0, u_1 \in V(G)$ i dwa 1-wierzchołki v_0, v_1 , gdzie wierzchołek u_0 jest sąsiedni z v_0 oraz wierzchołek u_1 jest sąsiedni z v_1 . Oznaczamy również przez w_0 (odpowiednio w_1) innego sąsiada u_0 (odpowiednio u_1) i rozważamy graf $G' = G - \{u_0v_0, u_0u_1, u_1v_1\}$. Jak w poprzednim przypadku graf G' nie może mieć składowej spójnej izomorficznej z K_2 , bo w przeciwnym razie G zawierałby konfigurację jeden. Każda składowa spójna G' ma co najmniej jeden 1-wierzchołek, a więc żadna składowa spójna G' nie może być izomorficzna z K_3 i możemy rozważyć ℓ' - silne $(2, 2)$ -kolorowanie grafu G' .

– Załóżmy, że krawędzie u_0w_0 oraz u_1w_1 mają ten sam kolor w ℓ' (bez straty ogólności niebieski). Możemy również dalej założyć, że $\sigma_{\ell'}^b(u_0) \geq \sigma_{\ell'}^b(u_1)$. Przypisujemy do krawędzi u_0v_0 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_{\ell'}^b(u_0)$ oraz $\sigma_{\ell'}^b(w_0)$ są różne. Następnie przypisujemy do u_0u_1 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_{\ell'}^r(u_0)$ oraz $\sigma_{\ell'}^r(w_0)$ są różne. Kończymy konstrukcję ℓ przypisując do u_1v_1 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_{\ell'}^r(u_1)$ oraz $\sigma_{\ell'}^r(w_1)$ są różne. Skoro $\sigma_{\ell'}^b(u_1) = \sigma_{\ell'}^b(u_1)$, to potrzebujemy tylko sprawdzić, że wierzchołki u_0 oraz u_1 mają różne niebieskie i czerwone sumy. Pamiętamy, iż założyliśmy, że $\sigma_{\ell'}^b(u_0) \geq \sigma_{\ell'}^b(u_1)$. Skoro $\sigma_{\ell'}^b(u_0) > \sigma_{\ell'}^b(u_1)$ oraz jedyną czerwoną krawędzią incydentną z wierzchołkiem u_0 jest u_0u_1 , to oczywiście ℓ jest silnym $(2, 2)$ -kolorowaniem G .

– Załóżmy, że krawędzie u_0w_0 oraz u_1w_1 mają różne kolory w ℓ' , powiedzmy bez straty ogólności, że u_0w_0 jest niebieska. Ponownie, dzięki podobnym argumentom, przypisujemy do krawędzi u_0v_0 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_{\ell'}^b(u_0)$ oraz $\sigma_{\ell'}^b(w_0)$ są różne, do u_0u_1 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_{\ell'}^r(u_0)$ oraz $\sigma_{\ell'}^r(w_0)$ są różne, i na koniec do u_1v_1 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_{\ell'}^r(u_1)$ oraz $\sigma_{\ell'}^r(w_1)$ są różne. Wówczas łatwo sprawdzić, że otrzymujemy silne $(2, 2)$ -kolorowanie G .

(C2) Załóżmy, że istnieje d -wierzchołek u dla $d \geq 4$ i pewne 1-wierzchołki $v_1, \dots, v_k$ sąsiednie z u , gdzie $k = \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$ (zauważmy, że może być więcej niż k wierzchołków stopnia jeden sąsiednich z u , ale bierzemy pod uwagę tylko k z nich). Rozważamy graf $G' = G - \{uv_1, \dots, uv_k\}$. Zauważmy, że stopień wierzchołka u w grafie G' jest nadal co najmniej dwa, a więc

jeśli G' jest izomorficzny z K_3 , to $d = 4$ i znamy cały graf G , czyli możemy sprawdzić, że G ma silne $(2, 2)$ -kolorowanie. Zatem możemy założyć, że istnieje silne $(2, 2)$ -kolorowanie ℓ' grafu G' . Załóżmy bez straty ogólności, że większość krawędzi incydentnych z wierzchołkiem u w grafie G' ma przypisaną czerwoną etykietę w ℓ' . Przypisujemy niebieskie etykiety do wszystkich krawędzi ze zbioru $\{uv_1, \dots, uv_k\}$ tak, że $\sigma_\ell^r(u)$ pozostaje równa $\sigma_{\ell'}^r(u)$. Poprzez przypisanie niebieskich etykiet do krawędzi ze zbioru $\{uv_1, \dots, uv_k\}$ możemy zmienić niebieską sumę wierzchołka u na dowolną wartość pomiędzy $\sigma_{\ell'}^b(u) + k$ i $\sigma_{\ell'}^b(u) + 2k$, a więc na $k + 1$ różnych możliwych wartości. Skoro u ma co najwyżej k sąsiadów w G' , to istnieje co najmniej jedna możliwość wyboru $\sigma_\ell^b(u)$, skutkująca silnym $(2, 2)$ -kolorowaniem G .

- (C4) Zauważmy, że ta konfiguracja jest pokryta przez konfigurację dwa.
- (C7) Załóżmy, że istnieje słaby 3-wierzchołek u_0 sąsiedni z 2-wierzchołkiem u_1 oraz z 1-wierzchołkiem v_0 . Oznaczamy przez u'_0 oraz u'_1 innego sąsiada odpowiednio u_0 oraz u_1 . Rozważamy graf $G' = G - \{u_0u_1, u_0v_0\}$. Zauważmy, że dzięki podobnym argumentom jak wcześniej, żadna składowa spójna G' nie może być izomorficzna z K_3 lub K_2 , ponieważ w przeciwnym razie graf G zawierałby konfigurację jeden lub sześć. Zatem możemy rozważyć silne $(2, 2)$ -kolorowanie ℓ' grafu G' . Bez straty ogólności załóżmy, że krawędź $u_0u'_0$ ma przypisaną niebieską etykietę. Rozważamy trzy przypadki:
- Załóżmy, że $\sigma_{\ell'}^b(u_0) = \sigma_{\ell'}^b(u_1)$. Przypisujemy do krawędzi u_0u_1 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_1)$ jest różna od $\sigma_\ell^b(u'_1)$, a następnie przypisujemy do u_0v_0 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_0)$ jest różna od $\sigma_\ell^b(u'_0)$. Skoro $\sigma_{\ell'}^b(u_0) = \sigma_{\ell'}^b(u_1)$ i przypisaliśmy niebieską etykietę do u_0v_0 , to mamy $\sigma_\ell^b(u_0) > \sigma_\ell^b(u_1)$.
 - W przeciwnym razie załóżmy, że krawędź $u_1u'_1$ ma przypisaną niebieską etykietę w ℓ' . Przypisujemy do u_0u_1 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(u_1)$ jest różna od $\sigma_\ell^r(u'_1)$. Następnie przypisujemy do krawędzi u_0v_0 którąkolwiek z czerwonych etykiet tak, że $\sigma_\ell^r(u_0)$ jest różna od $\sigma_\ell^r(u'_0)$.
 - Na koniec załóżmy, że krawędź $u_1u'_1$ ma przypisaną czerwoną etykietę w ℓ' . Przypisujemy do krawędzi u_0u_1 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_1)$ jest różna od $\sigma_\ell^b(u'_1)$. Następnie przypisujemy do u_0v_0 którąkolwiek z niebieskich etykiet tak, że $\sigma_\ell^b(u_0)$ jest różna od $\sigma_\ell^b(u'_0)$.

W każdym przypadku można sprawdzić, że otrzymane $(2, 2)$ -kolorowanie G jest silne.

To kończy dowód faktu. □

Teraz definiujemy funkcję ładunku ω dla grafu G , gdzie dla każdego $u \in V(G)$ przyjmujemy $\omega(u) = d(u) - \frac{9}{4}$. Ponadto rozważamy podział wierzchołków ze zbioru $V(G)$ na dwa zbiory V_2 oraz V_1 , gdzie V_2 zawiera 1-wierzchołki w G , a V_1 jest zbiorem wszystkich 2^+ -wierzchołków. Zauważmy, że skoro graf G nie jest izomorficzny z K_2 , to żaden 1-wierzchołek nie jest sąsiedni z innym 1-wierzchołkiem, a więc dla każdego wierzchołka $v \in V_2$ mamy $d_{V_1}(v) = d(v) = 1$. Rozważamy następujące zasady rozładowania:

- (R1) Każdy 3^+ -wierzchołek wysyła $\frac{1}{4}$ do każdego sąsiedniego 2-wierzchołka.
- (R2) Każdy 3^+ -wierzchołek wysyła $\frac{1}{4}$ do każdego sąsiedniego słabego 3-wierzchołka.
- (R3) Każdy 3^+ -wierzchołek wysyła 1 do każdego sąsiedniego 1-wierzchołka.

Oznaczamy przez ω^* otrzymaną funkcję ładunku. Naszym celem jest uzyskanie sprzeczności poprzez twierdzenie 45, które wymaga dla każdego wierzchołka $u \in V(G)$, że jeśli $d(u) \geq 2$, to $\omega^*(u) \geq 0$, a w przeciwnym razie, że $\omega^*(u) \geq \omega(u) + 1$. Dowodzimy, że jest to prawda dla każdego wierzchołka $u \in V(G)$:

- Załóżmy, że $d(u) = 1$. Skoro graf G nie jest izomorficzny z K_2 oraz G nie zawiera konfiguracji sześć, to wierzchołek u jest sąsiedni z 3^+ -wierzchołkiem i otrzymuje od niego 1 z reguły trzy. W międzyczasie wierzchołek u nie wysyła żadnego ładunku z reguł jeden, dwa i trzy. Ostateczny ładunek wynosi zatem $\omega^*(u) = \omega(u) + 1$.
- Załóżmy, że $d(u) = 2$. Ponownie wierzchołek u nie wysyła żadnego ładunku z reguł jeden, dwa i trzy. Teraz, skoro graf G nie zawiera konfiguracji pięć, ani konfiguracji sześć, to u jest sąsiedni z 3^+ -wierzchołkiem i otrzymuje od niego $\frac{1}{4}$ z reguły dwa. Ostateczny ładunek wynosi zatem $\omega^*(u) \geq 0$.
- Załóżmy, że $d(u) = 3$.
 - Najpierw załóżmy, że wierzchołek u jest słaby. Skoro graf G nie zawiera konfiguracji siedem, to wierzchołek u nie jest sąsiedni z żadnym 2-wierzchołkiem. Skoro G nie zawiera konfiguracji jeden, to wierzchołek u jest również sąsiedni z co najwyżej jednym

1-wierzchołkiem, a ponieważ G nie zawiera konfiguracji trzy, to wierzchołek u nie jest sąsiedni z żadnym słabym 3-wierzchołkiem. W szczególności u jest sąsiedni z 3^+ -wierzchołkiem, od którego otrzymuje $\frac{1}{4}$ z reguły dwa i sam wysyła 1 z reguły jeden. Ostateczny ładunek wynosi zatem $\omega^*(u) \geq \frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{4} = 0$.

– Teraz założmy, że wierzchołek u nie jest słaby. Dla każdego sąsiada v wierzchołka u albo v jest słabym 3-wierzchołkiem i u wysyła $\frac{1}{4}$ do v z reguły dwa, albo v jest 2-wierzchołkiem i u wysyła $\frac{1}{4}$ do v z reguły jeden, albo u nie wysyła żadnego ładunku do v (w szczególności, ponieważ u nie jest słaby, v nie może być 1-wierzchołkiem). Tak czy inaczej, końcowy ładunek wynosi $\omega^*(u) \geq \frac{3}{4} - 3 \times \frac{1}{4} = 0$.

- Załóżmy, że $d(u) \geq 4$. Oznaczamy przez k_1 liczbę 1-wierzchołków sąsiednich z u oraz przez k_2 liczbę 2-wierzchołków lub słabych 3-wierzchołków sąsiednich z u . Z reguły jeden, dwa i trzy wierzchołek u wysyła 1 do k_1 wierzchołków oraz $\frac{1}{4}$ do k_2 wierzchołków. Końcowy ładunek wynosi zatem $\omega^*(u) = \omega(u) - k_1 - k_2 \frac{1}{4}$. Skoro $k_1 + k_2 \leq d(u)$, to wartość $\omega^*(u)$ jest minimalna gdy k_1 jest maksymalne. Z tego, że G nie zawiera konfiguracji $C4$, możemy więc założyć, że

$$\omega^*(u) \geq d(u) - \frac{9}{4} - \left\lfloor \frac{d(u)+1}{2} \right\rfloor + 1 - \left(d(u) - \left\lfloor \frac{d(u)+1}{2} \right\rfloor + 1 \right) \frac{1}{4}.$$

Zauważmy, że na prawą stronę nierówności możemy patrzeć jak na funkcję $d(u)$, a więc jest oczywiście rosnąca. Następnie możemy sprawdzić, że jest ona nieujemna, gdy $d(u) = 4$, co kończy ten przypadek.

Zatem z twierdzenia 45 mamy $\text{mad}(G) \geq \frac{9}{4}$, czyli otrzymujemy sprzeczność, a więc zachodzi nasza teza. $\square$

3.4 Grafy Halina

Grafem Halina G nazywamy graf planarny uzyskany z drzewa T rzędu co najmniej cztery, niemającego żadnego wierzchołka stopnia dwa przez połączenie cyklem C liści T w porządku wierzchołków na cyklu zdefiniowanym przez reprezentację płaską drzewa T . Krawędzie T nazywamy *krawędziami drzewiastymi* G , a krawędzie C *krawędziami cyklicznymi*.

Można zauważyć, że grafy Halina są 3-zdegenerowane, a więc mają właściwe kolorowanie wierzchołków za pomocą co najwyżej czterech kolorów. To ograniczenie górne liczby chromatycznej grafów Halina jest ciasne, ponieważ

jest osiągane dla kół o parzystym rzędzie, podczas gdy pozostałe grafy Halina mają liczbę chromatyczną równą trzy (zobacz [55]). W dalszej części udowodnimy, że silna hipoteza $(2, 2)$ zachodzi dla grafów Halina. W tym celu potrzebujemy następującego twierdzenia udowodnionego przez Alona w [2].

Twierdzenie 47 (*Combinatorial Nullstellensatz* [2]). *Niech $P(X_1, \dots, X_n)$ będzie wielomianem nad ciałem $\mathbb{K}$. Przypuśćmy, że współczynnik jednomianu $X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$ w wielomianie $P(X_1, \dots, X_n)$ jest niezerowy oraz $k_1 + \dots + k_n$ jest maksymalnym stopniem $P(X_1, \dots, X_n)$. Jeśli $S_1, \dots, S_n$ są skończonymi podziorami $\mathbb{K}$, gdzie $|S_i| > k_i$ dla $i = 1, \dots, n$, to istnieją $x_1 \in S_1, \dots, x_n \in S_n$ takie, że $P(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. $\square$*

Teraz jesteśmy gotowi do udowodnienia głównego rezultatu w tym podrozdziale.

Twierdzenie 48 ([13]). *Jeśli G jest grafem Halina, to G jest silnie $(2, 2)$ -kolorowalny.*

Dowód. Oznaczmy odpowiednio przez T oraz C drzewo i cykl, na które dzielimy krawędzie grafu. Ponadto wybieramy dowolny wierzchołek r grafu G tak, że r jest sąsiedni z co najmniej dwoma liśćmi w T i ukorzeniamy T w wierzchołku r . Dodatkowo (wirtualnie) orientujemy C na jeden z dwóch naturalnych sposobów, definiując w ten sposób porządek kolejnych wierzchołków C , w szczególności jeśli dowolny wierzchołek T jest sąsiedni z liśćmi, to te liście pojawiają się kolejno na cyklu C . Niech ϕ będzie dowolnym właściwym kolorowaniem wierzchołków nie będących liśćmi w T za pomocą kolorów ze zbioru $\{1, 2\}$. Mogąc dowolnie permutować kolory w ϕ założymy, że $\phi(r) = 2$. Wreszcie, dla każdego wierzchołka v w drzewie T sąsiadującego z liśćmi, jak wspomniano, mamy, że $d \geq 1$ liści $u_1, \dots, u_d$ sąsiadujących z v (w T) pojawia się kolejno na C , powiedzmy, że te wierzchołki pojawiają się zgodnie z ciągiem $(u_1, \dots, u_d)$. Definiujemy vu_1 jako *specjalną krawędź* incydentną z wierzchołkiem v .

Teraz konstruujemy silne $(2, 2)$ -kolorowanie ℓ grafu G . Zaczynamy etykietując krawędzie T w następujący sposób:

- Rozważamy wierzchołki nie będące liśćmi w T jeden po drugim w kolejności, w jakiej są one napotymane podczas wykonywania algorytmu BFS rozpoczynając od wierzchołka r .
- Dla każdego wierzchołka v niebędącego liściem T rozważanego w ten sposób niech $w_1, \dots, w_d$ oznacza $d \geq 2$ dzieci v w T . Ze względu na wcześniejszy etap procesu, w tym momencie tylko krawędź uv , gdzie u jest unikalnym rodzicem v (chyba że $u = r$), może mieć przypisaną etykietę w ℓ , a w tym przypadku jest to czerwona etykieta. Teraz:

- Jeśli, powiedzmy wierzchołek w_d nie jest liściem T , to postępujemy w następujący sposób. W przypadku gdy wierzchołek v jest sąsiedni z liściem, to zakładając, że vw_1 jest specjalną krawędzią incydentną z v bez straty ogólności przypisujemy niebieską etykietę $\phi(v)$ do krawędzi vw_1 . Następnie w każdym przypadku przypisujemy czerwone etykiety o naprzemiennych wartościach $1, 2, 1, 2, \dots$ do wszystkich pozostałych krawędzi vw_i oprócz vw_d w taki sposób, że żadne dwa kolejne wierzchołki w_i na cyklu C nie otrzymają takiej samej czerwonej sumy. Na koniec przypisujemy do krawędzi vw_d dowolną czerwoną etykietę tak, że $\sigma_\ell^r(v) \equiv \phi(v) \pmod{2}$.
- Jeśli teraz wszystkie wierzchołki w_i są liśćmi T , to zasadniczo postępujemy w ten sam sposób. Mianowicie zakładając, że vw_1 jest specjalną krawędzią incydentną z v przypisujemy niebieską etykietę $\phi(v)$ do vw_1 . Następnie zakładając, że pozostałe wierzchołki w_i występują na cyklu zgodnie z ciągiem $(w_2, \dots, w_d)$ przypisujemy czerwone etykiety $1, 2, 1, 2, \dots$ lub $2, 1, 2, 1, \dots$ do krawędzi $vw_2, \dots, vw_d$ w zależności od tego, który sposób, biorąc pod uwagę $\ell(uv)$, daje $\sigma_\ell^r(v) \equiv \phi(v) \pmod{2}$. Osiąga się to na jeden z tych dwóch sposobów, ponieważ te dwie sumy $d - 1$ etykiet nie mają tej samej parzystości.

Gdy proces ten zostanie zakończony, każdy wierzchołek niebędący liściem w T będzie miał wszystkie incydentne krawędzie z drzewa poetykietowane w ℓ . W szczególności, jeśli v jest wierzchołkiem nie będącym liściem w T , to $\sigma_\ell^r(v) \equiv \phi(v) \pmod{2}$, ze względu na niebieskie sumy albo v nie jest sąsiedni z liśćmi i $\sigma_\ell^b(v) = 0$, albo $\sigma_\ell^b(v) = \phi(v)$. W szczególności, już w tym momencie, zgodnie z definicją ϕ , jeśli u oraz v są dwoma sąsiednimi wierzchołkami T , to $\sigma_\ell^r(u) \neq \sigma_\ell^r(v)$ oraz $0 \in \{\sigma_\ell^b(u), \sigma_\ell^b(v)\}$ lub $\sigma_\ell^b(u) \neq \sigma_\ell^b(v)$. Tak więc, aby to zrobić, pozostaje poetykietować krawędzie cyklu C tak, aby liście drzewa T nie były w konfliktach w grafie G .

Wszystkie cykliczne krawędzie będą właściwie miały przypisane niebieskie etykiety, co oznacza, że czerwone sumy liści w drzewie T nie będą dalej modyfikowane. Zanim przejdziemy dalej, od razu zauważmy, że dowolne dwa liście u oraz v w drzewie T , które sąsiadują ze sobą w G , nie mogą mieć tej samej czerwonej sumy, ze względu na wcześniejsze wybory. Po pierwsze, możemy założyć, że ani u , ani v nie jest incydentny z specjalną krawędzią, bo przeciwnym razie mielibyśmy $\sigma_\ell^r(u) = 0$ lub $\sigma_\ell^r(v) = 0$, a więc nie byłoby konfliktu. Zatem $\sigma_\ell^r(u), \sigma_\ell^r(v) \in \{1, 2\}$. Teraz, aby wierzchołki u oraz v były sąsiednie w G muszą być kolejne na cyklu C , wtedy albo u oraz v mają tego samego rodzica w , albo nie. W pierwszym przypadku, przypomnijmy, że przypisaliśmy czerwone etykiety jeden oraz dwa do krawędzi liści incydent-

nych z w naprzemiennie na C , zatem musimy mieć $\{\sigma_\ell^r(u), \sigma_\ell^r(v)\} = \{1, 2\}$ i nie mamy tutaj konfliktu pomiędzy u oraz v . Ten drugi przypadek nie może wystąpić, ponieważ wymagałoby to, aby wierzchołek u lub v był traktowany jako pierwsze dziecko swojego rodzica, a zatem byłby incydentny ze specjalną krawędzią, innymi słowy, musimy mieć tutaj $0 \in \{\sigma_\ell^r(u), \sigma_\ell^r(v)\}$.

Teraz przyjmijmy $C = u_0 \dots u_{k-1} u_0$. Dla każdego $i \in \{0, \dots, k-1\}$, zauważmy, że może istnieć unikalna krawędź $u'_i u_i$ o przypisanej niebieskiej etykiecie w ℓ oraz w przypadku gdy wierzchołek u'_i istnieje, to mamy $\sigma_\ell^b(u'_i) \in \{1, 2\}$. Po przypisaniu do krawędzi cyklu C niebieskich etykiet zauważmy, że nie możemy zmienić niebieskich sum u'_i , w szczególności oznacza to, że ostatecznie żaden wierzchołek u'_i nie może być w konflikcie (ze względu na niebieskie sumy) z u_i . Z powodu wyboru r , możemy założyć, że wierzchołki u_0 oraz u_1 są sąsiednie z r , a $u_0 r$ jest specjalną krawędzią incydentną z r , to oznacza, że wierzchołek u'_1 nie istnieje. Również z powodu naszego wyboru ϕ mamy $\ell(u_0 u'_0) = 2$, a więc ostatecznie po przypisaniu niebieskich etykiet do krawędzi cyklu C będziemy mieć $\sigma_\ell^b(u_0) > 3 + \ell(u_0 u_1) > 2 + \ell(u_0 u_1) \geq \sigma_\ell^b(u_1)$. Innymi słowy nie musimy się martwić o możliwe konflikty pomiędzy wierzchołkami u_0 oraz u_1 ze względu na niebieskie sumy.

Aby pokazać, że możemy poetykietować krawędzie cyklu C zgodnie z potrzebą, modelujemy sytuację za pomocą wielomianu, a następnie stosujemy narzędzie algebraiczne, aby uzyskać nasz wniosek. Dla każdego $i \in \{0, \dots, k-1\}$ oznaczamy przez e_i krawędź $u_i u_{i+1}$ (gdzie, tutaj i w dalszej części dowodu działania na indeksach są modulo k) i definiujemy n_i jako aktualną niebieską sumę wierzchołka u_i (odziedziczoną z niebieskiej etykiety przypisanej do krawędzi $u_i u'_i$ w przypadku, gdy wierzchołek u'_i istnieje). Dla każdego $i \in \{0, \dots, k-1\}$ niech również $X_i \in \{1, 2\}$ będzie zmienną modelującą, czy krawędź e_i ma przypisaną etykietę jeden lub dwa w rozszerzeniu ℓ na krawędzie C . Przedstawiamy teraz ograniczenia, które musimy wziąć pod uwagę, modelowane przez wielomian

$$P(X_0, \dots, X_{k-1}) = \prod_{i=0}^{k-1} (X_{i-1} + n_i - X_{i+1} - n_{i+1}).$$

Teraz, jeśli istnieją wartości $x_0, \dots, x_{k-1}$ ze zbioru $\{1, 2\}$ dla odpowiednio $X_0, \dots, X_{k-1}$ takie, że $P(x_0, \dots, x_{k-1}) \neq 0$, to możemy uzyskać poprawne rozszerzenie ℓ na krawędzie C . Twierdzenie 47 zapewnia nam warunki, w postaci współczynników jednomianów maksymalnego stopnia w rozwinięciu wielomianu, dla istnienia takich wartości. Zgodnie z lematem 2.3 w [17] możemy poetykietować krawędzie cyklu C jak potrzebujemy za pomocą następujących argumentów:

- Jeśli $k \neq 4$, to najpierw przypisujemy niebieską etykietę dwa do krawędzi u_0u_1 i odpowiednio aktualizujemy n_0 oraz n_1 . Z poprzednich argumentów, przypomnijmy, że skoro krawędź $u_0u'_0$ ma przypisaną niebieską etykietę dwa, podczas gdy wierzchołek u'_1 nie istnieje, to nie możemy mieć konfliktu ze względu na niebieskie sumy pomiędzy wierzchołkami u_0 oraz u_1 , niezależnie od tego jak są poetykietowane pozostałe krawędzie C (za pomocą niebieskich etykiet). Reszta krawędzi cyklu C tworzy więc ścieżkę o długości różnej od trzech i z lematu 2.3 w [17] możemy zastosować metodę wielomianu aby zakończyć to etykietowanie.
- Jeśli $k = 4$, to C jest cyklem o długości będącej wielokrotnością czterech, drugi przypadek został zawarty w lemacie 2.3 w [17]. Ponownie, tamten lemat mówi, że można osiągnąć żądane rozszerzenie ℓ na krawędzie C .

Zatem we wszystkich przypadkach możemy rozszerzyć ℓ do krawędzi cyklu C z niebieskimi etykietami w taki sposób, że sąsiednie wierzchołki cyklu C mają różne niebieskie sumy. Z poprzednich argumentów otrzymane etykietowanie ℓ grafu G jest więc silnym $(2, 2)$ -kolorowaniem, co kończy dowód. $\square$

3.5 Grafy planarne o talii co najmniej 16

Przypomnijmy, że *talią* grafu nazywamy długość najkrótszego cyklu w grafie. Klasyczny rezultat (por. na przykład [19]) mówi, że jeśli G jest grafem planarnym o talii co najmniej g , to $\text{mad}(G) < \frac{2g}{g-2}$. A więc jeśli $g \geq 18$, to $\text{mad}(G) < \frac{9}{4}$ i możemy zastosować twierdzenie 44. Tak więc, aby wyjść poza to twierdzenie, warto zastanowić się nad grafami planarnymi o mniejszej talii, które mają większy maksymalny średni stopień. W kolejnym twierdzeniu udowodnimy silną hipotezę $(2, 2)$ dla stosownych grafów planarnych o talii co najmniej 16.

Twierdzenie 49 ([13]). *Jeśli G jest stosownym grafem planarnym o talii co najmniej 16, to G jest silnie $(2, 2)$ -kolorowalny.*

Dowód. Dowód jest przez indukcję ze względu na $|V(G)| + |E(G)|$. Skoro twierdzenie może być łatwo zweryfikowane dla bazowych przypadków, to skupimy się na udowodnieniu ogólnego przypadku. Poniżej przedstawimy ważny lemat, z którego będziemy korzystać.

Lemat 50 ([27]). *Dla każdej liczby całkowitej $k \geq 1$, każdy graf planarny G o minimalnym stopniu co najmniej dwa i talii co najmniej $5k + 1$ zawiera ścieżkę długości $k+2$ mającą k kolejnych wewnętrznych wierzchołków stopnia dwa w G .* $\square$

Teraz rozważamy graf G . Z indukcji możemy założyć, że G jest spójny. Po pierwsze, jeśli G jest drzewem, to teza zachodzi na przykład z twierdzenia 42. Załóżmy, że G ma cykle, wszystkie o długości co najmniej 16. Rozważamy G^- , graf otrzymany z G przez wielokrotne ściąganie wierzchołków stopnia jeden (czyli, po prostu z G wielokrotnie usuwamy wierzchołki stopnia jeden, do póki takie istnieją). Skoro G ma cykle, to możemy zauważyć, że gdy ten proces się skończy, to graf G^- będzie niepusty. Ponadto w przypadku gdy $\delta(G) \geq 2$ widzimy, że $G^- = G$.

Teraz, skoro G^- jest grafem planarnym o minimalnym stopniu co najmniej dwa i talii co najmniej 16, to z lematu 50 G^- musi zawierać ścieżkę $P = xuvw$ mającą trzy kolejne wewnętrzne wierzchołki stopnia dwa w G^- . Rozważmy ścieżkę P z powrotem w G . Z konstrukcji G^- każdy z wierzchołków u , v oraz w jest korzeniem wiszącego drzewa, odpowiednio S_u , S_v oraz S_w w grafie G . W szczególności każde z tych drzew może być zredukowane do tylko jednego wierzchołka (zatem o stopniu dwa w G) w przypadku gdy nie ma krawędzi. Faktycznie, jeśli dowolne z drzew S_u , S_v lub S_w ma co najmniej dwie krawędzie, to możemy usunąć pewne z jego krawędzi, zastosować indukcję (zauważmy, że z powodu cykli o długości co najmniej 16 w G , usunięcie z G wiszących drzew rzeczywiście skutkuje stosownym grafem) i rozszerzyć uzyskane z indukcji silne $(2, 2)$ -kolorowanie do całego G korzystając albo z argumentów użytych do rozwiązania konfiguracji jeden w dowodzie twierdzenia 42 (przypadek wiszącego drzewa o wysokości co najmniej dwa), albo z argumentów użytych do rozwiązania konfiguracji dwa w dowodzie twierdzenia 44 (przypadek gwiazdy o co najmniej dwóch krawędziach). Zatem drzewa S_u , S_v oraz S_w mają co najwyżej po jednej krawędzi i można zastosować te same argumenty co dla konfiguracji cztery w dowodzie twierdzenia 42. $\square$

3.6 Potęgi cykli

Dla każdego $k \geq 1$, przez k -tą potęgę G^k , grafu G będziemy rozumieć graf uzyskany z G przez dodanie krawędzi pomiędzy każdą parą wierzchołków, które są w odległości co najwyżej k w wyjściowym grafie G . Oczywiście, k -te potęgi grafów posiadają coraz większe kliki, gdy k rośnie, a więc ich liczba chromatyczna rośnie wraz z k . Korzystając z kilku wcześniejszych rezultatów dotyczących silnej hipotezy $(2, 2)$ i lokalnej nieregularności potęg cykli, które zostały przedstawione w rozdziale 4, udowodnimy, że silna hipoteza $(2, 2)$ zachodzi dla k -tych potęg stosownych cykli ($k \geq 1$).

Twierdzenie 51 ([13]). *Jeśli graf G rzędu $n \geq 4$ jest cyklem, to G^k jest silne $(2, 2)$ -kolorowany dla każdego $k \geq 1$.*

Dowód. Będziemy korzystać głównie z twierdzenia 71, które mówi, że każda k -ta potęga cyklu o długości n ma standardowe $(2, 1)$ -kolorowanie dla każdego $k \geq 2$ oraz $n \geq 2k + 2$, i obserwacji z [5], mówiącej, że w dowolnym grafie regularnym słabe, standardowe i silne $(2, 1)$ -kolorowania są pojęciami równoważnymi.

Niech G będzie dowolnym stosownym cyklem (a więc o długości n co najmniej cztery). Rozważamy pewne $k \geq 1$. Jeśli $k = 1$, to G^k jest cyklem i w szczególności G^k jest stosownym kutasem, a więc otrzymujemy tezę z twierdzenia 42. Podobnie możemy założyć, że G^k nie jest grafem pełnym (co ma miejsce, gdy $k \geq \lfloor n/2 \rfloor$), ponieważ silna hipoteza $(2, 2)$ została uwodniona dla stosownych grafów pełnych w [5]. Zatem możemy założyć, że $k \geq 2$ oraz $k < \lfloor n/2 \rfloor$, a więc z wyżej wspomnianego twierdzenia 71 istnieje standardowe $(2, 1)$ -kolorowanie G^k . Teraz, skoro G^k jest regularny, to z obserwacji z [5] każde takie $(2, 1)$ -kolorowanie jest również silne, czyli otrzymujemy naszą tezę. $\square$

3.7 Grafy k -dzielne pełne

W tym podrozdziale udowodnimy silną hipotezę $(2, 2)$ dla stosownych grafów k -dzielnych pełnych wykorzystując podobną metodę jak w dowodzie twierdzenia 8, gdzie skonstruowaliśmy lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami multigrafu 2G , gdzie G jest grafem k -dzielnym pełnym dla $k \geq 2$.

Twierdzenie 52 ([13]). *Jeśli G jest grafem k -dzielnym pełnym o rzędzie większym od trzech i różnym od K_k , to G jest silnie $(2, 2)$ -kolorowalny.*

Dowód. Niech $G = K_{n_1, \dots, n_k}$, gdzie $n_1 \geq \dots \geq n_k$ oraz niech $A_1, \dots, A_k$ będzie podziałem zbioru wierzchołków G na k zbiorów niezależnych o licznosciach $n_1, \dots, n_k$. Oczywiście rząd grafu G , który oznaczamy przez n , wynosi $n = n_1 + \dots + n_k$.

Zauważmy, że jeśli $n \leq 3$ oraz $k = n$, to $K_{n_1, \dots, n_k}$ nie jest stosowny i otrzymujemy tezę. Jeśli $k \leq 2$, to $K_{n_1, \dots, n_k}$ jest dwudzielny i rezultat jest już znany (dzięki wcześniejszym twierdzeniom z [5]). Zatem możemy założyć, że $k \geq 3$.

Najpierw zajmiemy się przypadkiem $k = 3$ przedstawiając bezpośrednio takie silne $(2, 2)$ -kolorowanie, aby wszystkie wierzchołki miały niezerową niebieską sumę i żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie miały czerwonej sumy równej zero.

- Najpierw założymy, że $n_1 > n_2 \geq n_3$. Przypisujemy czerwoną etykietę dwa do wszystkich krawędzi łączących wierzchołki ze zbiorów A_1 oraz

A_2 , niebieską etykietę dwa do wszystkich krawędzi łączących wierzchołki ze zbiorów A_1 oraz A_3 , a na koniec przypisujemy niebieską etykietę jeden do wszystkich krawędzi łączących wierzchołki ze zbiorów A_2 oraz A_3 . Powinno być jasne, że w otrzymanym kolorowaniu żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie mają tej samej czerwonej sumy. Ponadto dla każdego wierzchołka $u_1 \in A_1$ mamy $\sigma^b(u_1) = 2n_3$, dla każdego $u_2 \in A_2$ mamy $\sigma^b(u_2) = n_3$ i dla każdego $u_3 \in A_3$ mamy $\sigma^b(u_3) = 2n_1 + n_2$. A więc, skoro $n_3 < n_2 < n_1$, to rzeczywiście wszystkie te trzy wartości są parami różne.

- Teraz założmy, że $n_1 = n_2$ oraz $n_2 > n_3$. Przypisujemy czerwoną etykietę dwa do wszystkich krawędzi łączących wierzchołki ze zbiorów A_1 oraz A_3 , niebieską etykietę dwa do wszystkich krawędzi łączących wierzchołki ze zbiorów A_1 oraz A_2 , a na koniec przypisujemy niebieską etykietę jeden do wszystkich krawędzi łączących wierzchołki ze zbiorów A_2 oraz A_3 . Skoro $n_1 > n_3$, to żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie mają takiej samej czerwonej sumy. Ponadto dla każdego wierzchołka $u_1 \in A_1$ mamy $\sigma^b(u_1) = 2n_2$, dla każdego $u_2 \in A_2$ mamy $\sigma^b(u_2) = 2n_1 + n_3 = 2n_2 + n_3$ i dla każdego $u_3 \in A_3$ mamy $\sigma^b(u_3) = n_2$. Zatem, skoro $n_3 < n_2 = n_1$, to ponownie wszystkie te trzy wartości są parami różne.
- Na koniec założmy, że $n_1 = n_2 = n_3$. Skoro $n_1 = n_3$, to możemy rozważyć skojarzenie pełne M pomiędzy zbiorami niezależnymi A_1 oraz A_3 . Przypisujemy czerwoną etykietę dwa do wszystkich krawędzi pomiędzy zbiorami A_2 oraz A_3 , czerwoną etykietę dwa do krawędzi z M oraz niebieską etykietę dwa do wszystkich pozostałych krawędzi. W ten sposób dla każdego wierzchołka $u_1 \in A_1$ mamy $\sigma^b(u_1) = 4n_1 - 2$, dla każdego $u_2 \in A_2$ mamy $\sigma^b(u_2) = 2n_1$ i dla każdego $u_3 \in A_3$ mamy $\sigma^b(u_3) = 2n_1 - 2$. Podobnie dla każdego wierzchołka $u_1 \in A_1$ mamy $\sigma^r(u_1) = 2$, dla każdego $u_2 \in A_2$ mamy $\sigma^r(u_2) = 2n_1$ i dla każdego $u_3 \in A_3$ mamy $\sigma^r(u_3) = 2n_1 + 2$. O ile nie zachodzi $n_1 = 1$ (bo wówczas graf G byłby cyklem C_3 , a zatem nie byłby stosowny), to uzyskujemy silne $(2, 2)$ -kolorowanie.

Teraz możemy założyć, że $k \geq 4$. Dowodzimy indukcyjnie ze względu na k . Poniżej udowodnimy mocniejsze twierdzenie, a mianowicie, że jeśli k jest nieparzyste (odpowiednio parzyste), to istnieje silne $(2, 2)$ -kolorowanie G takie, iż

- wszystkie wierzchołki mają niezerowe niebieskie (odpowiednio czerwone) sumy,

- żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie mają czerwonej (odpowiednio niebieskiej) sumy zero.

Udowodniliśmy już, że jest to prawdą dla $k = 3$. Zatem założmy, że $k \geq 4$ jest parzyste (odpowiednio nieparzyste) i rozważmy silne $(2, 2)$ -kolorowanie $K_{n_1, \dots, n_{k-1}}$ spełniające hipotezę indukcyjną. Rozszerzamy je do kolorowania G przypisując czerwoną (odpowiednio niebieską) etykietę dwa do wszystkich krawędzi incydentnych do wierzchołków ze zbioru A_k . Otrzymane $(2, 2)$ -kolorowanie ma nadal własność, że jeśli k jest nieparzyste (odpowiednio parzyste), to wszystkie wierzchołki mają niezerowe niebieskie (odpowiednio czerwone) sumy, jak również własność, że żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie mają sumy zero w żadnym z dwóch kolorów. Skoro żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie miały czerwonej lub niebieskiej sumy zero i wszystkie sumy zostały zwiększone o tą samą wartość, to konflikty mogą powstać jedynie pomiędzy wierzchołkami z $A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}$ oraz A_k .

Założmy, że k jest parzyste (przypadek nieparzysty jest analogiczny). Rozważmy $u_k \in A_k$ oraz $v \in A_j$ dla pewnego $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Skoro wszystkie krawędzie incydentne z u_k mają przypisaną niebieską etykietę dwa, to mamy $\sigma^b(u_k) = 2(n_1 + \dots + n_{k-1})$. Jednakże, skoro wszystkie wierzchołki z $A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}$ mają niezerowe czerwone sumy, to mamy $\sigma^b(v) < 2n_k + 2(n_1 + \dots + n_{k-1} - n_i)$. Zatem otrzymane $(2, 2)$ -kolorowanie G jest silne. $\square$

3.8 Uwagi

W tym rozdziale zapewniliśmy dalsze wsparcie dla silnej hipotezy $(2, 2)$, udowodniając ją dla większej liczby klas grafów. Zgodnie z głównym kierunkiem badań dla tego typu problemów skupiliśmy się głównie na grafach o niskiej liczbie chromatycznej. Z uwagi na fakt, że przed pokazaniem wyników zawartych w tym rozdziale silna hipoteza $(2, 2)$ była udowodniona głównie dla grafów dwudzielnych, rozważyliśmy kilka klas grafów 2-zdegenerowanych. W rezultacie udowodniliśmy silną hipotezę $(2, 2)$ dla kaktusów, grafów subkubicznych zewnętrznie planarnych, grafów o niskim maksymalnym średnim stopniu oraz grafów Halina (które w większości są trójdzielne).

Jako pierwszym ogólnym kierunkiem dalszych badań nad tym problemem, bylibyśmy zainteresowani mniej lub bardziej silnymi uogólnieniami niektórych z tych wyników. Celem byłoby oczywiście udowodnienie silnej hipotezy $(2, 2)$ dla wszystkich grafów trójdzielnych lub przynajmniej wszystkich grafów 2-zdegenerowanych. Być może pośrednim krokiem byłoby uogólnienie niektórych z przedstawionych w tym rozdziale wyników. Warto byłoby na przykład zastanowić się nad dowodami dla wszystkich grafów subkubicznych, czy

też zewnętrznie planarnych oraz dla grafów o większym maksymalnym średnim stopniu. Można również rozważyć inne klasy grafów 2-zdegenerowanych, takie jak na przykład grafy szeregowo-równoległe, czyli grafy o dwóch wyróżnionych wierzchołkach źródle s oraz ujściu t , które definiujemy rekurencyjnie w następujący sposób. Krawędź st jest grafem szeregowo-równoległym. Grafem szeregowo równoległym jest również graf uzyskany przez połączenie dwóch takich grafów szeregowo, czyli utożsamiamy ujście jednego grafu ze źródłem drugiego lub równoległe, czyli utożsamiamy źródło pierwszego takiego grafu ze źródłem drugiego oraz ujście pierwszego z ujściem drugiego.

W tym rozdziale rozważaliśmy również odwrotne podejście, polegające na udowodnieniu silnej hipotezy $(2, 2)$ dla grafów o dużej liczbie chromatycznej. Jednym z powodów takiego podejścia jest fakt, że przed udowodnieniem wyników zawartych w tym rozdziale wiadomo było, że ta hipoteza jest prawdziwa dla grafów pełnych. Udowodniliśmy, w dużej mierze adaptując i wykorzystując wcześniejsze wyniki, że silna hipoteza $(2, 2)$ jest prawdziwa dla potęg cykli i grafów k -dzielnych pełnych. W związku z tym warto zastanowić się nad innymi klasami grafów z dowolnie dużą liczbą chromatyczną, takimi jak na przykład grafy rozdzielne.

Z bardziej ogólnej perspektywy, silna hipoteza $(2, 2)$ pozostaje do tej pory w większości otwarta, a zatem interesujące byłoby dostarczenie bardziej ogólnych wyników potwierdzających jej prawdziwość. Interesującym krokiem byłoby również udowodnienie, że dla pewnego $k \geq 2$ wszystkie stosowne grafy mają silne $(k, 2)$ -kolorowanie. Przypomnijmy, z drugiej strony, że niedawny dowód hipotezy 1-2-3 implikuje, iż wszystkie stosowne grafy mają standardowe $(1, 3)$ -kolorowanie, które jest jednocześnie silnym $(1, 3)$ -kolorowaniem.

Rozdział 4

Nowy problem dotyczący lokalnej nieregularności grafów

Wszystkie wyniki tego rozdziału pochodzą z pracy [I. Grzelec, T. Madaras, A. Onderko, R. Soták, *On a new problem about the local irregularity of graphs*, arXiv [30]].

W tym rozdziale przedstawimy nowy problem dotyczący lokalnej nieregularności grafów, który jest inspirowany przez rozważane w poprzednich rozdziałach problemy. Jest on blisko związany z hipotezą o lokalnej nieregularności grafów i standardową hipotezą (2,2).

Problem 53 (Grzelec, Madaras, Onderko, Soták [30]). Niech G będzie grafem spójnym, który nie jest izomorficzny z K_2 lub K_3 . Jaka jest minimalna liczba krawędzi G , których podwojenie daje multigraf mający lokalnie nieregularne kolorowanie za pomocą co najwyżej dwóch kolorów, przy czym nie dopuszczamy multikrawędzi pokolorowanych dwoma kolorami?

Powyższy problem wprowadza parametr, który będziemy oznaczać przez $\mathcal{D}_{\text{lr}}(G)$, określony jako minimalna liczba podwojonych krawędzi wymagana w multigrafie M uzyskanym z grafu G takim, że M ma lokalnie nieregularne kolorowanie za pomocą co najwyżej dwóch kolorów i bez multikrawędzi w obu kolorach.

W tym rozdziale będziemy się zajmować głównie problemem 53, ale również możemy sformułować poniższą wersję tego problemu.

Problem 54 (Grzelec, Madaras, Onderko, Soták [30]). Niech G będzie grafem spójnym, który nie jest izomorficzny z K_2 . Jaka jest minimalna liczba krawędzi $\mathcal{D}'_{\text{lr}}(G)$ grafu G , których podwojenie daje multigraf mający lokalnie nieregularne kolorowanie za pomocą co najwyżej dwóch kolorów?

Więcej szczegółów i uwag na temat problemu 54, w tym motywację i związek z problemem 53, przedstawimy w podrozdziale 4.4.

Zacznijmy od wprowadzenia niezbędnej notacji. Jeśli G jest grafem, a E_d podzbiorem jego krawędzi, to przez $G + E_d$ będziemy oznaczać multigraf uzyskany z G przez zastąpienie każdej krawędzi ze zbioru E_d dwoma równoległymi krawędziami. W większości przypadków będziemy chcieli skonstruować lokalnie nieregularne kolorowanie za pomocą dwóch kolorów. Zatem dla wygody przyjmijmy, że są to kolory czerwony i niebieski. Liczbę krawędzi incydentnych z wierzchołkiem v , które są pokolorowane na czerwono w kolorowaniu multigrafu $G + E_d$ uzyskanego z grafu G nazywamy czerwonym stopniem v i oznaczmy przez $\hat{d}_r(v)$. Używamy analogicznej definicji dla niebieskiego stopnia $\hat{d}_b(v)$ wierzchołka v .

Zauważmy, że problem 53 ma rozwiązanie dla spójnego grafu G , który nie jest izomorficzny z K_2 lub K_3 wtedy i tylko wtedy, gdy standardowa hipoteza (2,2) zachodzi dla G . Ponadto, jeśli graf G spełnia $\text{lir}(G) \leq 2$, to $\mathcal{D}_{\text{lir}}(G) = 0$.

W dalszej części rozdziału przedstawimy rozwiązanie problemu 53 dla ścieżek, cykli, drzew, grafów pełnych, grafów rozdzielnych i specjalnych kaktusów podobnych do tych z rodziny $\mathfrak{T}$. Ponadto pokażemy, że $\text{lir}(G) = 2$ gdy G jest grafem k -dzielny pełnym, dla $k > 1$, lub potęgą cyklu nie będącą grafem pełnym, co daje $\mathcal{D}_{\text{lir}}(G) = 0$ w tych przypadkach.

4.1 Ścieżki, cykle, drzewa i specjalne kaktusy

W [9] Baudon, Bensmail, Przybyło i Woźniak pokazali, że śnieżka o n wierzchołkach P_n posiada lokalnie nieregularne kolorowanie wtedy i tylko wtedy, gdy n jest nieparzyste, i wówczas wystarczą dwa kolory. Sytuacja jest podobna dla cykli. Gdy cykl jest nieparzystej długości, to nie posiada lokalnie nieregularnego kolorowania za pomocą żadnej liczby kolorów. Cykle długości podzielnej przez cztery posiadają lokalnie nieregularne kolorowanie za pomocą dwóch kolorów, a cykle o długości przystającej do dwóch modulo cztery wymagają trzech kolorów w lokalnie nieregularnym kolorowaniu. Nie jest zaskoczeniem, że decydującym czynnikiem o istnieniu lokalnie nieregularnego kolorowania ścieżek i cykli jest kwestia, czy mogą być rozłożone na krawędziowo rozłączne ścieżki długości dwa, ponieważ spośród wszystkich ścieżek i cykli tylko ścieżka P_3 jest lokalnie nieregularna.

W rezultacie aby rozwiązać problem wyznaczenia wartości parametru $\mathcal{D}_{\text{lir}}(G)$ dla grafu G , który jest ścieżką lub cyklem wystarczy rozważyć ścieżki nieparzystej długości i cykle o długości niepodzielnej przez cztery, ponieważ w pozostałych przypadkach to, iż $\mathcal{D}_{\text{lir}}(G) = 0$ wynika z faktu, że $\text{lir}(G) \leq 2$. Jak zostało wspomniane wcześniej, w przypadku grafów, spośród wszystkich

ścieżek i cykli tylko jedna ścieżka, a mianowicie P_3 jest lokalnie nieregularna. Gdy rozważamy multigrafy (dzięki możliwości podwojenia pewnych krawędzi uzyskujemy multigraf mający lokalnie nieregularne kolorowanie za pomocą co najwyżej dwóch kolorów) następująca obserwacja jest przydatna.

Obserwacja 55. *Musimy podwoić jedną krawędź ścieżki P_4 , aby uzyskać lokalnie nieregularny multigraf, a ponadto musimy podwoić dwie krawędzie ścieżki P_k , dla $k \in \{5, 6, 7\}$, aby uzyskać lokalnie nieregularny multigraf (w przypadku P_4 podwajamy wiszącą krawędź, w przypadku P_5 oraz P_7 podwajamy obydwie centralne krawędzie, a w przypadku P_6 podwajamy centralną krawędź i krawędź z nią incydującą).*

Dodatkowo korzystając z faktu, że P_3 jest lokalnie nieregularna i podwojenie krawędzi P_2 tworzy regularny multigraf możemy udowodnić poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 56 ([30]). *Jeśli $n \geq 3$, to*

$$\mathcal{D}_{\text{lir}}(P_n) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n \equiv 1 \pmod{2}, \\ 1 & \text{gdy } n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Dowód. $\mathcal{D}_{\text{lir}}(P_n) = 0$ wynika z $\text{lir}(P_n) = 2$ w przypadku gdy n jest nieparzyste. Jeśli n jest parzyste, to rozkładamy ścieżkę P_n na $\frac{n-4}{2}$ krawędziowo rozłącznych ścieżek długości dwa i ścieżkę długości trzy, na której końcu używamy podojonej krawędzi. Kolorujemy ścieżki z otrzymanego rozkładu w taki sposób, aby dwie ścieżki o wspólnym wierzchołku otrzymały różne kolory, a dodatkowo dwie wierzchołkowo-rozłączne ścieżki miały ten sam kolor. $\square$

Możemy wykorzystać obserwację 55 oraz fakt, że P_3 jest lokalnie nieregularna do określenia wartości parametru $\mathcal{D}_{\text{lir}}(C_n)$.

Twierdzenie 57 ([30]). *Jeśli C_n jest cyklem o długości $n \geq 4$, to*

$$\mathcal{D}_{\text{lir}}(C_n) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 1 & \text{gdy } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ 2 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Dowód. Jeśli $n \equiv 0 \pmod{4}$, to $\text{lir}(C_n) = 2$, a w konsekwencji $\mathcal{D}_{\text{lir}}(C_n) = 0$.

Jeśli $n \equiv 1 \pmod{4}$, to możemy rozłożyć C_n na krawędziowo rozłączną ścieżkę P_4 oraz $\frac{n-3}{2}$ ścieżek P_3 . Podwajamy wiszącą krawędź na ścieżce P_4 i kolorujemy tę ścieżkę na czerwono. Następnie kolorujemy pozostałe ścieżki na zmianę na niebiesko i czerwono (każdą ścieżkę jednym kolorem). A zatem, w tym przypadku $\mathcal{D}_{\text{lir}}(C_n) = 1$, ponieważ cykl ma nieparzystą długość i jedno podwojenie krawędzi jest konieczne.

Jeśli $n \equiv 2 \pmod{4}$, to możemy rozłożyć C_n na krawędziowo rozłączną ścieżkę P_5 oraz $\frac{n-4}{2}$ ścieżek P_3 . Podwajamy pierwsze dwie krawędzie na ścieżce P_5 i kolorujemy tę ścieżkę na czerwono. Następnie kolorujemy pozostałe ścieżki na zmianę na niebiesko i czerwono. W rezultacie w tym przypadku $\mathcal{D}_{\text{lir}}(C_n) = 2$, ponieważ $\text{lir}(C_n) = 3$ i podwojenie jednej krawędzi nie wystarczy z obserwacji 55.

Jeśli $n \equiv 3 \pmod{4}$, to możemy rozłożyć C_n na krawędziowo rozłączną ścieżkę P_6 oraz $\frac{n-5}{2}$ ścieżek P_3 . Podwajamy drugą i trzecią krawędź na ścieżce P_6 i kolorujemy tę ścieżkę na czerwono. Następnie kolorujemy pozostałe ścieżki na zmianę na niebiesko i czerwono. A zatem w tym przypadku $\mathcal{D}_{\text{lir}}(C_n) = 2$, ponieważ cykl ma nieparzystą długość i podwojenie jednej krawędzi nie wystarczy z obserwacji 55. $\square$

W [7] autorzy udowodnili, że istnieje liniowy algorytm pozwalający stwierdzić, czy $\text{lir}(T) \leq 2$ dla danego drzewa T . Ten rezultat uzupełnił dotychczas znane rezultaty, że każde drzewo T niebędące ścieżką nieparzystej długości spełnia $\text{lir}(T) \leq 3$ (zobacz [9]) i, że $\text{lir}(T) \leq 2$ jeśli maksymalny stopień drzewa T jest co najmniej pięć (zobacz [8]). W trakcie dowodu istnienia liniowego algorytmu pozwalającego stwierdzić, czy istnieje lokalnie nieregularne kolorowanie danego drzewa za pomocą dwóch kolorów Baudon, Bensmail i Sopena udowodnili, że każdy *krzew* (drzewo ukorzenione w liściu) ma *prawie lokalnie nieregularne kolorowanie* (czyli takie kolorowanie, w którym każda monochromatyczna składowa spójna jest lokalnie nieregularna z wyjątkiem co najwyżej jednej, która jest krawędzią incydentną z korzeniem) za pomocą dwóch kolorów.

Twierdzenie 58 ([7]). *Każdy krzew ma prawie lokalnie nieregularne kolorowanie za pomocą dwóch kolorów.* $\square$

Dowód następującego twierdzenia wykorzystuje powyższe rezultaty i w szczególności zajmuje się pozostałymi przypadkami, gdy nie istnieje lokalnie nieregularne kolorowanie drzewa dwoma kolorami.

Twierdzenie 59 ([30]). *Jeśli T jest drzewem rzędu co najmniej trzy, to $\mathcal{D}_{\text{lir}}(G) \leq 1$.*

Dowód. Niech T będzie drzewem o rzędzie co najmniej trzy spełniającym $\text{lir}(T) = 3$, ponieważ w przeciwnym przypadku $\mathcal{D}_{\text{lir}}(T) = 0$. Możemy przypuścić, że T jest krzewem o korzeniu w wierzchołku x . Wówczas $\Delta(T) \leq 4$ (zobacz twierdzenie 3 w [8]). Niech u będzie sąsiadem x w drzewie T . Z twierdzenia 58 wiemy, że istnieje prawie lokalnie nieregularne kolorowanie T za pomocą dwóch kolorów, w którym krawędź ux jest pokolorowana na

czerwono i wszystkie inne krawędzie incydentne z u są niebieskie. Będziemy rozróżniać kilka przypadków w zależności od $d_T(u)$.

Przypadek 1. Niech $d_T(u) = 2$. Oznaczmy przez v sąsiada u różnego od wierzchołka x . Oczywiście $\hat{d}_b(v) = 2$ w tym przypadku, ponieważ w przeciwnym razie można by przekolorować krawędź ux na niebiesko i otrzymane kolorowanie za pomocą dwóch kolorów byłoby lokalnie nieregularne. Jednakże, jeśli $\hat{d}_b(v) = 2$, to możemy przekolorować krawędź ux na niebiesko i ją podwoić. W rezultacie otrzymane kolorowanie za pomocą dwóch kolorów będzie lokalnie nieregularnym kolorowaniem $T + ux$.

Przypadek 2. Niech $d_T(u) = 3$. Oznaczmy przez v_1 oraz v_2 sąsiadów u różnych od wierzchołka x . Podobnie jak w przypadku 1, co najmniej jeden z sąsiadów u , bez straty ogólności v_1 , ma niebieski stopień równy trzy, czyli $\hat{d}_b(v_1) = 3$, ponieważ w przeciwnym razie moglibyśmy przekolorować ux na niebiesko i uzyskać lokalnie nieregularne kolorowanie T za pomocą dwóch kolorów. Jeśli $\hat{d}_b(v_2) \neq 4$, to przekolorowujemy krawędź ux na niebiesko i podwajamy ją, co daje nam lokalnie nieregularne kolorowanie $T + ux$ za pomocą dwóch kolorów. Jeśli $\hat{d}_b(v_2) = 4$ to przekolorowujemy krawędź ux na niebiesko, ale podwajamy krawędź uv_2 . W tym przypadku $\hat{d}_b(x) = 1$, $\hat{d}_b(u) = 4$, $\hat{d}_b(v_1) = 3$, $\hat{d}_b(v_2) = 5$ i niebieski stopień każdego innego wierzchołka jest co najwyżej cztery bo $\Delta(T) \leq 4$. Zatem otrzymujemy lokalnie nieregularne kolorowanie $T + uv_2$ za pomocą dwóch kolorów.

Przypadek 3. Niech $\hat{d}_b(u) = 4$. W tym przypadku przekolorowujemy krawędź ux na niebiesko i podwajamy ją. Otrzymane kolorowanie $T + ux$ za pomocą dwóch kolorów jest lokalnie nieregularne, ponieważ niebieski stopień u wynosi pięć i niebieski stopień każdego innego wierzchołka jest ograniczony przez $\Delta(T) = 4$. $\square$

Twierdzenie 56 i twierdzenie 57 przedstawiają wartość parametru $\mathcal{D}_{\text{lir}}(G)$ w przypadku, gdy graf G jest ścieżką lub cyklem. Aby w pełni zbadać wszystkie grafy nie posiadające lokalnie nieregularnego kolorowania musimy jeszcze rozważyć grafy z rekurencyjnie zdefiniowanej rodziny $\mathfrak{T}$. Pokażemy, że dla grafu G z rodziny $\mathfrak{T}$ istnieje zbiór krawędzi wymagających podwojenia, aby otrzymany multigraf miał lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami, w którym multikrawędzie są monochromatyczne, a także udowodnimy, że moc takiego zbioru jest ograniczona z góry przez liczbę cykli w G . Jednakże, podejście przedstawione aby to udowodnić może być uogólnione dla kaktusów zdefiniowanych podobnie do tych z rodziny $\mathfrak{T}$.

Niech $\mathfrak{T}^*$ będzie rodziną grafów zdefiniowanych rekurencyjnie w następujący sposób:

- cykl C_n należy do $\mathfrak{T}^*$,

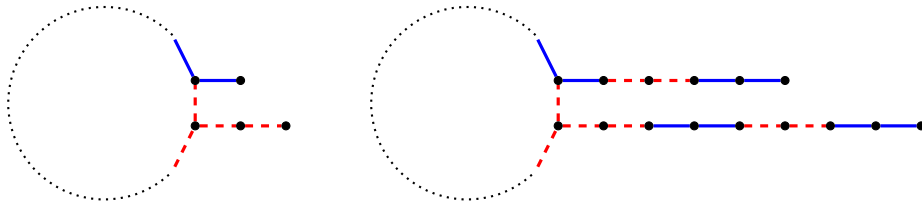
- jeżeli G jest grafem z rodziny $\mathfrak{T}^*$, to dowolny graf G' uzyskany z G przez utożsamienie wierzchołka $v \in V(G)$ o stopniu dwa, który leży na cyklu w G , z końcowym wierzchołkiem ścieżki o długości co najmniej jeden lub z końcowym wierzchołkiem takiej ścieżki, że drugi końcowy jej wierzchołek jest utożsamiony z wierzchołkiem nowego cyklu, należy do $\mathfrak{T}^*$.

Jako, że rodzina $\mathfrak{T}^*$ zawiera cykle, w szczególności te wymagające podwojenia dwóch krawędzi, w następującym twierdzeniu wykluczamy wszystkie cykle (wartość parametru $\mathcal{D}_{\text{lr}}(C_n)$ dla cykli została scharakteryzowana w twierdzeniu 57).

Twierdzenie 60 ([30]). *Niech graf $G \in \mathfrak{T}^*$ będzie różny od cyklu. Jeśli k jest liczbą cykli w G , to istnieje zbiór niezależny E_d co najwyżej k niewiszących krawędzi taki, że multigraf $G + E_d$ ma lokalnie nieregularne kolorowanie za pomocą co najwyżej dwóch kolorów.*

Dowód. Przypuśćmy najpierw, że graf G jest unicykliczny. Przedstawimy ogólny sposób kolorowania G . Własności takiego kolorowania będą później wykorzystywane w kroku indukcyjnym.

Niech $C = v_1, \dots, v_n$ będzie cyklem w G . Z faktu, że G jest różny od cyklu, bez straty ogólności możemy założyć, że wierzchołek v_1 ma stopień trzy w G . Oznaczmy przez P_i wiszącą ścieżkę dołączoną do wierzchołka v_i dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$, oraz przez ℓ_i długość ścieżki P_i . W dalszej części przypuśćmy, że $\ell_i \in \{0, 1, 2\}$ dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$, bo łatwo widać, że lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami multigrafu M z wiszącą ścieżką długości $\ell \in \{1, 2\}$, kończącą się wierzchołkiem wiszącym v można rozszerzyć do lokalnie nieregularnego kolorowania multigrafu uzyskanego z M przez dodanie wierzchołkowo-rozłącznej ścieżki parzystej długości do M i identyfikację jednego z jej końcowych wierzchołków z v (używamy na przemiannie niebieskiego i czerwonego koloru na parach sąsiednich krawędzi dodanej ścieżki), zobacz rysunek 4.1.



Rysunek 4.1: Przykład rozszerzenia lokalnie nieregularnego kolorowania wiszących ścieżek rozważanych w dowodzie twierdzenia 60.

Rozpoczynamy od pokolorowania v_nv_1 , v_1v_2 i krawędzi ścieżki P_1 na niebiesko. Dalej kontynuujemy kolorując v_iv_{i+1} i krawędzie ścieżki P_i dla każdego $i \in \{2, \dots, n-1\}$ w następujący sposób:

- Jeśli $v_{i-1}v_i$ jest niebieska (czerwona) i $\hat{d}_b(v_{i-1}) = 1$ ($\hat{d}_r(v_{i-1}) = 1$), to kolorujemy v_iv_{i+1} oraz P_i na niebiesko (czerwono).
- Jeśli $v_{i-1}v_i$ jest niebieska (czerwona), $\hat{d}_b(v_{i-1}) \in \{2, 3\}$ ($\hat{d}_r(v_{i-1}) \in \{2, 3\}$) oraz $\ell_i \in \{0, 1\}$, to kolorujemy v_iv_{i+1} oraz P_i na czerwono (niebiesko).
- Jeśli $v_{i-1}v_i$ jest niebieska (czerwona), $\hat{d}_b(v_{i-1}) = 2$ ($\hat{d}_r(v_{i-1}) = 2$) oraz $\ell_i = 2$, to kolorujemy v_iv_{i+1} oraz P_i na niebiesko (czerwono).
- Jeśli $v_{i-1}v_i$ jest niebieska (czerwona), $\hat{d}_b(v_{i-1}) = 3$ ($\hat{d}_r(v_{i-1}) = 3$) oraz $\ell_i = 2$, to kolorujemy v_iv_{i+1} na niebiesko (czerwono) i kolorujemy P_i na czerwono (niebiesko).

Po tym jak krawędź $v_{n-1}v_n$ została pokolorowana, to jedyną niepokolorowaną częścią G jest P_n (jeśli $\ell_n \neq 0$). Ponadto można łatwo zauważyć, że warunek lokalnej nieregularności zachodzi dla prawie wszystkich krawędzi, z możliwym wyjątkiem w postaci krawędzi $v_{n-1}v_n$ lub v_nv_1 . A więc, aby przekształcić otrzymane częściowe kolorowanie w lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami będziemy rozważać tylko część G , która jest blisko krawędzi $v_{n-1}v_n$ oraz v_nv_1 . Zauważmy, że mamy na początku 18 możliwości do rozważenia. Różnią się one kolorem $v_{n-1}v_n$, stopniem wierzchołka v_{n-1} w kolorze użytym na krawędzi $v_{n-1}v_n$ oraz ℓ_n . Jednakże dużo z tych przypadków można rozwiązać dość prosto, tylko przez pokolorowanie ścieżki P_n na niebiesko lub czerwono (na przykład jeśli $v_{n-1}v_n$ jest czerwona, $\hat{d}_r(v_{n-1}) \neq 1$ i $\ell_n = 0$, to nic nie musimy robić, lub jeśli $v_{n-1}v_n$ jest niebieska, $\hat{d}_b(v_{n-1}) = 1$ i $\ell_n = 2$, to kolorujemy P_n na czerwono itd.). Zostawimy te sytuacje dla czytelnika i omówimy jedynie problematyczne przypadki, gdy musimy przekolorować lub podwoić pewne krawędzie.

Przypadek 1. Przypuśćmy, że krawędź $v_{n-1}v_n$ jest czerwona, $\hat{d}_r(v_{n-1}) = 1$ i $\ell_n = 0$. W tym przypadku przekolorujemy v_nv_1 na czerwono. Jeśli jednak $\ell_1 = 2$, to podwajamy krawędź v_1v_2 . Zauważmy, że jeśli $\ell_1 = 1$, żadne podwojenie nie zostało użyte i $\hat{d}_b(v_1) = 2$, to można podwoić krawędź v_1v_2 , aby utworzyć lokalnie nieregularne kolorowanie z $\hat{d}_b(v_1) = 3$.

Przypadek 2. Przypuśćmy, że krawędź $v_{n-1}v_n$ jest niebieska, $\hat{d}_b(v_{n-1}) = 2$ i $\ell_n = 0$. W tym przypadku podwajamy krawędź v_nv_{n-1} . Zauważmy, że $\hat{d}_b(v_1) = 4$. Jednakże dla ogólnego kroku indukcyjnego potrzebujemy także inny sposób na uzyskanie lokalnie nieregularnego kolorowania dwoma kolorami w tym przypadku, gdy $\ell_1 = 1$, gdzie niebieski stopień wierzchołka v_1

wynosi trzy. W związku z tym wyróżniamy kilka podprzypadków. W każdym z nich przypuścmy, że $\ell_1 = 1$.

Podprzypadek 2.1. Przypuścmy, że $v_{n-2}v_{n-1}$ jest niebieska i $\hat{d}_b(v_{n-2}) = 1$. W tej sytuacji $\ell_{n-1} = 0$ (w przeciwnym przypadku, z konstrukcji kolorowania mielibyśmy $\hat{d}_b(n-1) = 3$), $v_{n-3}v_{n-2}$ jest czerwona i $\hat{d}_r(v_{n-3}) \in \{2, 3\}$. Przekolorowujemy krawędź $v_{n-2}v_{n-1}$ na czerwono i podwajamy ją, jeśli $\hat{d}_r(v_{n-3}) = 2$. Otrzymane kolorowanie za pomocą dwóch kolorów jest lokalnie nieregularne i $\hat{d}_b(v_1) = 3$.

Podprzypadek 2.2. Przypuścmy, że $v_{n-2}v_{n-1}$ jest niebieska i $\hat{d}_b(v_{n-2}) = 3$. W tej sytuacji mamy $\ell_{n-1} = 2$ i P_{n-1} jest czerwona. Przekolorowujemy krawędź $v_{n-1}v_n$ na czerwono i podwajamy ją. W otrzymanym kolorowaniu $\hat{d}_b(v_1) = 3$.

Podprzypadek 2.3. Przypuścmy, że $v_{n-2}v_{n-1}$ jest czerwona. Wówczas $\hat{d}_r(v_{n-2}) \in \{2, 3\}$, $\ell_{n-1} = 1$ i P_{n-1} jest niebieska. W tej sytuacji przekolorowujemy $v_{n-1}v_n$ i P_{n-1} na czerwono oraz podwajamy krawędź $v_{n-1}v_n$, jeśli $\hat{d}_r(v_{n-2}) = 3$. W otrzymanym kolorowaniu $\hat{d}_b(v_1) = 3$.

Przypadek 3. Przypuścmy, że $v_{n-1}v_n$ jest niebieska, $\ell_n = 1$ oraz $\hat{d}_b(v_{n-1}) = 1$. W tym przypadku kolorujemy P_n na niebiesko, a następnie podwajamy krawędź v_1v_2 aby utworzyć lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami, w którym $\hat{d}_b(v_1) = 4$. Aby utworzyć lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami, w którym $\hat{d}_b(v_1) = 3$ kolorujemy P_n na niebiesko i podwajamy krawędź $v_{n-1}v_n$.

Przypadek 4. Przypuścmy, że $v_{n-1}v_n$ jest niebieska, $\ell_n = 1$ oraz $\hat{d}_b(v_{n-1}) \in \{2, 3\}$. W tym przypadku kolorujemy P_n na czerwono i przekolorowujemy v_nv_1 na czerwono. Jeśli $\ell_1 = 2$, to podwajamy krawędź v_1v_2 . Jeśli $\ell_1 = 1$, $\hat{d}_b(v_1) = 2$ i żadna krawędź nie jest podwojona, to aby skonstruować lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami z $\hat{d}_b(v_1) = 3$ w tym przypadku podwajamy krawędź v_1v_2 .

Przypadek 5. Przypuścmy, że $v_{n-1}v_n$ jest niebieska, $\ell_n = 2$ oraz $\hat{d}_b(v_{n-1}) = 2$. Jeśli $\ell_1 = 2$, to kolorujemy P_n na niebiesko i podwajamy krawędź v_1v_2 . W tym przypadku $\hat{d}_b(v_1) = 4$. Jednakże, jeśli $\ell_1 = 1$, to kolorujemy P_n na czerwono, przekolorowujemy v_nv_1 na czerwono i podwajamy v_nv_1 aby uzyskać lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami, w którym $\hat{d}_b(v_1) = 2$ lub kolorujemy P_n na niebiesko i podwajamy v_1v_2 aby utworzyć lokalnie nieregularne kolorowanie, gdzie $\hat{d}_b(v_1) = 4$.

Przypadek 6. Przypuścmy, że $v_{n-1}v_n$ jest czerwona, $\ell_n = 2$ oraz $\hat{d}_r(v_{n-1}) \in \{1, 2\}$. W tym przypadku kolorujemy P_n na czerwono i przekolorowujemy v_nv_1 na czerwono. Jeśli $\ell_1 = 2$, to podwajamy krawędź v_1v_2 . Jednakże, jeśli $\ell_1 = 1$, $\hat{d}_b(v_1) = 2$ i żadna krawędź nie jest podwojona, to aby skonstruować lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami z $\hat{d}_b(v_1) = 3$ w tym przypadku podwajamy krawędź v_1v_2 .

Przypadek 7. Przypuśćmy, że $v_{n-1}v_n$ jest czerwona, $\ell_n = 2$ oraz $\hat{d}_r(v_{n-1}) = 3$. W tym przypadku kolorujemy P_n na niebiesko i przekolorowujemy v_nv_1 na czerwono. Jeśli $\ell_1 = 2$, to podwajamy krawędź v_1v_2 . Jednakże, jeśli $\ell_1 = 1$, $\hat{d}_b(v_1) = 2$ i żadna krawędź nie jest podwojona, to aby skonstruować lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami z $\hat{d}_b(v_1) = 3$ w tym przypadku podwajamy krawędź v_1v_2 .

Przypadki 1 – 7 opisują wszystkie nietrywialne sytuacje jak dokończyć utworzone kolorowanie G w taki sposób, aby otrzymane kolorowanie dwoma kolorami było lokalnie nieregularne i nie było więcej niż jednej podwojonej krawędzi. Ponadto łatwo widać, że podwojona krawędź nie jest krawędzią wiszącą w żadnym z przypadków. Co więcej warto wspomnieć, że jeśli $\ell_1 = 1$, to istnieje lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami G z co najwyżej jedną podwojoną krawędzią, w którym $\hat{d}_b(v_1) = 3$ i istnieje lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami G z co najwyżej jedną podwojoną krawędzią, w którym $\hat{d}_b(v_1) \neq 3$ (w sytuacjach, które nie zostały opisane w Przypadkach 1 – 7, aby utworzyć lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami, w którym $\hat{d}_b(v_1) = 4$, podwajamy krawędź v_1v_2 , ponieważ dotychczas nie było żadnej podwojonej krawędzi i $\hat{d}_b(v_2)$ wynosił jeden).

Rozważamy teraz przypadek gdy $k \geq 2$. Zakładamy, że dla każdego grafu $G' \in \mathfrak{T}^*$ o $k' < k$ cyklach istnieje zbiór niezależnych niewiszących krawędzi E'_d o mocy co najwyżej k' taki, że multigraf $G' + E'_d$ ma lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami lub G' jest cyklem.

Niech C będzie wiszącym cyklem w G , czyli takim, który jest połączony z tylko jednym innym cyklem w G ścieżką P o wierzchołkach wewnętrznych stopnia dwa w G (istnienie takiego cyklu wynika bezpośrednio z definicji grafów należących do rodziny $\mathfrak{T}^*$). Oznaczmy przez v_C oraz v_R końcowe wierzchołki P takie, że $v_C \in V(C)$ i v_R jest wierzchołkiem innego cyklu G . Oznaczmy przez ℓ długość ścieżki P .

Najpierw, rozważamy przypadek, gdy $\ell \geq 2$. Niech u będzie sąsiadem v_C na ścieżce P . Rozdzielamy graf G na dwa spójne podgrafy G_1 oraz G_2 tak, że $G = G_1 \cup G_2$, $\{u\} = V(G_1) \cap V(G_2)$ oraz $C \subseteq G_1$. Oczywiście podgraf G_1 jest unicykliczny, a G_2 ma $k - 1$ cykli i obydwa te podgrafy G_1 oraz G_2 są różne od cykli, ponieważ mają wiszące ścieżki o niezerowych długościach. Z założenia indukcyjnego wiemy, że istnieją zbiory odpowiednio E_1 oraz E_2 , o co najwyżej jednej i co najwyżej $k - 1$ niezależnych, niewiszących krawędziach G_1 oraz G_2 takie, że multigrafy $G_1 + E_1$ oraz $G_2 + E_2$ mają lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami. Bierzemy lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami $G_1 + E_1$, w którym uv_C jest niebieska i bierzemy lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami $G_2 + E_2$, w którym krawędź incydentna z u jest czerwona oraz łączymy te dwa kolorowania w lokalnie nieregularne kolorowanie $G + (E_1 \cup E_2)$. Oczywiście żadna krawędź

w $E_1 \cup E_2$ nie jest wisząca, ponieważ krawędzie niebyły wiszące w G_1 oraz G_2 (stąd żadna z krawędzi incydentnych z u nie znajduje się w E_1 lub E_2) i $E_1 \cup E_2$ jest zbiorem niezależnym.

W dalszej części dowodu przypuścimy, że $\ell = 1$. Niech G_1 oraz G_2 będą spójnymi podgrafami G takimi, że $G = G_1 \cup G_2$, $V(G_1) \cap V(G_2) = \{v_C, v_R\}$ oraz $C \subseteq G_1$. Z założenia indukcyjnego wiemy, że istnieje zbiór niezależny co najwyżej $k - 1$ niewiszących krawędzi E_2 podgrafu G_2 taki, że multigraf $G_2 + E_2$ ma lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami φ . Bez straty ogólności założmy, że krawędź $v_C v_R$ jest niebieska w φ i oznaczmy przez q niebieski stopień v_R w kolorowaniu φ . Oczywiście $q \in \{2, 3, 4\}$.

Najpierw rozważmy sytuację, gdy $q = 2$. Niech G'_1 będzie grafem utworzonym z G' przez dodanie nowego wierzchołka x oraz krawędzi $v_R x$. Niech ψ będzie lokalnie nieregularnym kolorowaniem dwoma kolorami G'_1 uzyskanym w ten sam sposób jak opisano powyżej, zaczynając od wierzchołka v_C . Stąd $\hat{d}_b(v_R) = 2$ w φ i można łatwo połączyć φ oraz ψ , aby uzyskać lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami G : dla każdej krawędzi $e \in E(G)$ niech $\xi(e) = \varphi(e)$, jeśli $e \in E(G_2)$ oraz niech $\xi(e) = \psi(e)$, jeśli $e \in E(G_1)$.

Jeśli $q = 3$, to bierzemy lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami G_1 (z podwojoną krawędzią jeśli to konieczne), w którym $v_C v_R$ jest niebieska i $\hat{d}_b(v_C) \neq 3$ oraz jeśli $q = 4$ to bierzemy lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami G_1 , w którym $v_C v_R$ jest niebieska i $\hat{d}_b(v_C) \neq 4$ (istnienie takich kolorowań pokazaliśmy już wcześniej) i łączymy takie kolorowanie G_1 z kolorowaniem G_2 . $\square$

Dla grafu G z rodziny $\mathfrak{T}$ niech G_Δ oznacza drzewo, którego wierzchołki są trójkątami w G i dwa wierzchołki są sąsiednie w G_Δ wtedy i tylko wtedy, gdy ścieżka nieparzystej długości w G łączy odpowiadające trójkąty. Trójkąty w G , które odpowiadają wiszącym wierzchołkom w G_Δ będziemy nazywać *wiszącymi trójkątami* w G . Pokażemy, że liczba wiszących trójkątów w G daje ograniczenie z dołu dla parametru $\mathcal{D}_{\text{lir}}(G)$, które powoduje, że $\mathcal{D}_{\text{lir}}$ nie posiada górnego ograniczenia przez stałą w ogólnym przypadku.

Lemat 61 ([30]). *Dla grafu $G \in \mathfrak{T}$ i mającego co najmniej trzy trójkąty $\mathcal{D}_{\text{lir}}(G)$ jest równa co najmniej liczbie wiszących trójkątów bez wierzchołków stopnia dwa w G .*

Dowód. Niech H_0 będzie wiszącym trójkątem w G , którego wszystkie wierzchołki są stopnia trzy. Oznaczmy przez x_0, y_0, z_0 wierzchołki H w taki sposób, że y_0 oraz z_0 są końcowymi wierzchołkami wiszących ścieżek w G , oraz niech $y_0, y_1, \dots, y_{2p}$ oraz $z_0, z_1, \dots, z_{2q}$ będą wierzchołkami tych ścieżek. Niech x_1 będzie sąsiadem wierzchołka x_0 różnym od y_0 oraz z_0 .

Niech H_1 będzie podgrafem G indukowanym przez wierzchołki $x_0, x_1, y_0, y_1, \dots, y_{2p}, z_0, z_1, \dots, z_{2q}$, czyli $H_1 = G[x_0, x_1, y_0, y_1, \dots, y_{2p}, z_0, z_1, \dots, z_{2q}]$. Przez E_d będziemy oznaczać dowolny zbiór $\mathcal{D}_{\text{lr}}(G)$ krawędzi taki, że multigraf $G + E_d$ ma lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami, w którym multikrawędzie są monochromatyczne. Pokażemy, że $E_d \cap E(H_1) \neq \emptyset$. W dalszej części dowodu rozważamy następujące lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami multigrafu $G + E_d$.

Przypuśćmy, nie wprost, że $E_d \cap E(H_1) = \emptyset$. Z faktu, że lokalnie nieregularne kolorowanie ścieżki parzystej długości dwoma kolorami jest unikalne (z dokładnością do zamiany kolorów) wystarczy rozważyć graf $H_2 = G[x_0, x_1, y_0, y_1, y_2, z_0, z_1, z_2]$ i rozróżnić dwa przypadki w zależności od tego, czy kolor użyty na krawędziach y_0y_1 oraz y_1y_2 jest taki sam jak kolor użyty na krawędziach z_0z_1 oraz z_1z_2 , czy nie.

Przypuśćmy najpierw, że krawędzie $y_0y_1, y_1y_2, z_0z_1, z_1z_2$ są czerwone. Wówczas albo żadna, albo obie krawędzie x_0y_0, y_0z_0 są czerwone, ponieważ w przeciwnym razie $\hat{d}_r(y_0) = \hat{d}_r(y_1)$. Podobnie, albo żadna, albo obie krawędzie x_0z_0, y_0z_0 są pokolorowane na czerwono. Łącząc te dwie obserwacje otrzymujemy, że trójkąt H_0 jest monochromatyczny. To jednak prowadzi do sprzeczności, ponieważ albo $\hat{d}_r(y_0) = 3 = \hat{d}_r(z_0)$ (jeśli y_0z_0 jest czerwona), albo $\hat{d}_b(y_0) = 2 = \hat{d}_b(z_0)$ (jeśli y_0z_0 jest niebieska).

Następnie przypuśćmy, że krawędzie y_0y_1, y_1y_2 są czerwone oraz z_0z_1, z_1z_2 są niebieskie. Jeśli dokładnie jedna z krawędzi x_0y_0, y_0z_0 była czerwona, to $\hat{d}_r(y_0) = \hat{d}_r(y_1)$ i podobnie, jeśli dokładnie jedna z krawędzi x_0z_0, y_0z_0 była niebieska, to $\hat{d}_b(z_0) = \hat{d}_b(z_1)$. Z tych obserwacji wynika, że H_0 jest również monochromatyczny w tym przypadku. Z jednej strony, jeśli krawędzie x_0y_0, x_0z_0, y_0z_0 są czerwone, to albo $\hat{d}_r(x_0) = \hat{d}_r(y_0) = 3$ (jeśli x_0x_1 jest czerwona), albo $\hat{d}_r(x_0) = \hat{d}_r(z_0) = 2$ (jeśli x_0x_1 jest niebieska). Z drugiej strony, jeśli krawędzie x_0y_0, x_0z_0, y_0z_0 są niebieskie, to albo $\hat{d}_b(x_0) = \hat{d}_b(y_0) = 2$ (jeśli x_0x_1 jest czerwona), albo $\hat{d}_b(x_0) = \hat{d}_b(z_0) = 2$ (jeśli x_0x_1 jest niebieska).

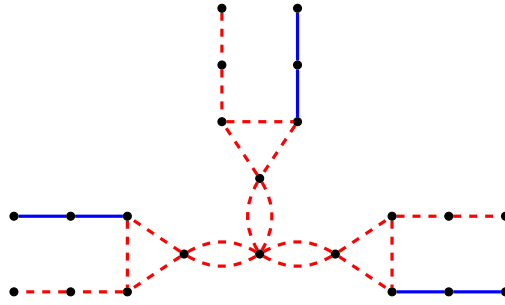
Stąd, w obu przypadkach, rozważane kolorowanie nie jest lokalnie nieregularne, dowodząc faktu, że $E_d \cap E(H_1) \neq \emptyset$. $\square$

Jako natychmiastową konsekwencję lematu 61 otrzymujemy:

Wniosek 62. *Dla dowolnej stałej k istnieje graf G taki, że $\mathcal{D}_{\text{lr}}(G) \geq k$.*

Dla podgrafu H_2 grafu G w dowodzie lematu 61 pokazaliśmy, że co najmniej jedno podwojenie krawędzi H_2 jest zawsze potrzebne. To pozwala nam konstruować grafy (w większości przypadków nie należące do rodziny $\mathfrak{T}$), które potrzebują relatywnie dużo podwojonych krawędzi, a mianowicie potrzebują $\frac{1}{8}|E(G)|$ podwojonych krawędzi. Aby skonstruować takie grafy roz-

ważmy kilka rozłącznych kopii H_2 i łączymy wszystkie te kopie za pomocą wierzchołka x_1 (zobacz rysunek 4.2). Z tych samych powodów, co w dowodzie lematu 61, w każdej kopii H_2 jest co najmniej jedna krawędź, która musi zostać podwojona. Z drugiej strony podwajając krawędzie incydentne z x_1 możemy uzyskać lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami otrzymanego multigrafu, gdzie równoległe krawędzie tworzące multikrawędź są pokolorowane tym samym kolorem, zobacz rysunek 4.2.



Rysunek 4.2: Przykład grafu G , który potrzebuje $\frac{1}{8}|E(G)|$ podwojonych krawędzi.

Zauważmy, że w konstrukcjach grafów, które potrzebują relatywnie dużo podwojonych krawędzi, na przykład grafy rozważane w lemacie 61 i konstrukcji przedstawionej na rysunku 4.2, wiszące ścieżki długości dwa mogą być zamienione na krzewy takie, że w każdym ich lokalnie nieregularnym kolorowaniu dwoma kolorami krawędź do korzenia jest częścią monochromatycznej składowej spójnej, w której sąsiad korzenia ma stopień dwa (podobnie jak sąsiad końcowego wierzchołka ścieżki o parzystej długości w przypadku grafów z rodziny $\mathfrak{T}$). Taka obserwacja daje nam więcej możliwości, gdy konstruujemy grafy G , dla których wartość parametru $\mathcal{D}_{\text{lr}}(G)$ jest większa od zadanej stałej. Jednakże zastąpienie wiszących ścieżek o długości dwa takimi krzewami obniża stosunek liczby podwojonych krawędzi do liczby wszystkich krawędzi grafu. Stąd powstaje następujące pytanie: "Czy istnieje stała $k > \frac{1}{8}$ taka, że istnieje nieskończenie wiele grafów spójnych G gdzie $\mathcal{D}_{\text{lr}}(G) \geq k|E(G)|$?"

4.2 Grafy pełne, grafy k -dzielne pełne i grafy rozdzielne

W rozdziale 2 przedstawiliśmy dość prostą konstrukcję lokalnie nieregularnego kolorowania dwoma kolorami multigrafu 2G , gdzie G jest grafem k -dzielnym pełnym dla $k \geq 2$. Pomimo tego, że konstrukcja korzysta z multikrawędzi pokolorowanych na czerwono-niebiesko ich użycie jest ograniczone

do kolorowania trójdzielnego podgrafu G . To pozwala nam na poprawienie tej konstrukcji. Rozważając inne lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami grafu trójdzielnego pełnego możemy udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 63 ([30]). *Jeśli G jest grafem k -dzielnym pełnym różnym od K_k , to $\text{lir}(G) \leq 2$.*

Dowód. Niech $G = K_{n_1, \dots, n_k}$, gdzie $n_1 \geq \dots \geq n_k$ oraz niech $A_1, \dots, A_k$ będzie podziałem zbioru wierzchołków G na k zbiorów niezależnych o licznosciach $n_1, \dots, n_k$. Przypadek gdy $k = 2$, czyli gdy G jest grafem dwudzielnym został udowodniony przez Baudona, Bensmaila, Przybyłę i Woźniaka w [9].

Rozważmy teraz przypadek, gdy G jest grafem trójdzielnym pełnym. Jeśli $n_1 > n_2 > n_3$, to G jest lokalnie nieregularnym grafem, a więc $\text{lir}(G) = 1$ oraz przypuśćmy, że wszystkie jego krawędzie są pokolorowane na czerwono.

Jeśli $n_1 = n_2 > n_3$, to kolorujemy krawędzie pomiędzy A_1 oraz A_3 na niebiesko, a pozostałe krawędzie na czerwono. Łatwo widzieć, że w tym przypadku mamy

$$d_b(v) = \begin{cases} n_3 & \text{gdy } v \in A_1, \\ 0 & \text{gdy } v \in A_2, \\ n_1 & \text{gdy } v \in A_3, \end{cases} \quad \text{oraz} \quad d_r(v) = \begin{cases} n_1 & \text{gdy } v \in A_1, \\ n_1 + n_3 & \text{gdy } v \in A_2, \\ n_1 & \text{gdy } v \in A_3. \end{cases}$$

Jedyną sytuacją, gdy dwa sąsiednie wierzchołki u oraz v w grafie G mają takie same czerwone lub niebieskie stopnie jest przypadek gdy $u \in A_1$ oraz $v \in A_3$. Jednakże wówczas krawędź uv jest niebieska i $d_b(u) \neq d_b(v)$. Stąd to kolorowanie G dwoma kolorami jest lokalnie nieregularne.

Następnie, rozważamy przypadek gdy $n_1 > n_2 = n_3$. Kolorujemy krawędzie pomiędzy A_1 oraz A_2 na niebiesko i pozostałe krawędzie na czerwono. Podobnie do poprzedniego przypadku mamy

$$d_b(v) = \begin{cases} n_2 & \text{gdy } v \in A_1, \\ n_1 & \text{gdy } v \in A_2, \\ 0 & \text{gdy } v \in A_3, \end{cases} \quad \text{oraz} \quad d_r(v) = \begin{cases} n_2 & \text{gdy } v \in A_1, \\ n_2 & \text{gdy } v \in A_2, \\ n_1 + n_2 & \text{gdy } v \in A_3. \end{cases}$$

Pomimo to $d_r(u) = d_r(v)$ dla każdego $u \in A_1$ oraz $v \in A_2$, a z konstrukcji wiemy, że krawędź uv jest niebieska. Stąd to kolorowanie jest lokalnie nieregularnym kolorowaniem G .

Rozważmy teraz przypadek gdy $n_1 = n_2 = n_3$. Zauważmy, że $n_1 \geq 2$, ponieważ G nie jest grafem pełnym. Niech M będzie skojarzeniem pełnym podgrafu G indukowanym przez $A_1 \cup A_3$. Kolorujemy każdą krawędź pomiędzy A_1 oraz A_2 i każdą krawędź M na niebiesko, a pozostałe krawędzie na

czerwono. Mamy

$$d_b(v) = \begin{cases} n_1 + 1 & \text{gdy } v \in A_1, \\ n_1 & \text{gdy } v \in A_2, \\ 1 & \text{gdy } v \in A_3, \end{cases} \quad \text{oraz} \quad d_r(v) = \begin{cases} n_1 - 1 & \text{gdy } v \in A_1, \\ n_1 & \text{gdy } v \in A_2, \\ 2n_1 - 1 & \text{gdy } v \in A_3. \end{cases}$$

To kolorowanie dwoma kolorami G jest lokalnie nieregularne, ponieważ $n_1 \geq 2$.

Jak dotąd pokazaliśmy, że jeśli $k \leq 3$, to G ma lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami. Warto również zauważyć, że w każdym przedstawionym kolorowaniu grafu trójdzielnego pełnego każdy wierzchołek ma niezerowy czerwony stopień, stąd niebieski stopień każdego wierzchołka jest ograniczony z góry przez $n_1 + n_2 - 1$. Dla $k \geq 4$ będziemy używać indukcyjnej konstrukcji opartej na konstrukcji dla 2-multigrafów przedstawionej w rozdziale 2:

- jeśli k jest parzyste, to znajdujemy lokalnie nieregularne kolorowanie $K_{n_1, \dots, n_{k-1}}$, w którym czerwony stopień każdego wierzchołka jest niezerowy i kolorujemy każdą krawędź incydentną do wierzchołka ze zbioru A_k na niebiesko,
- jeśli k jest nieparzyste, to znajdujemy lokalnie nieregularne kolorowanie $K_{n_1, \dots, n_{k-1}}$, w którym niebieski stopień każdego wierzchołka jest niezerowy i kolorujemy każdą krawędź incydentną do wierzchołka ze zbioru A_k na czerwono.

Zauważmy, iż otrzymane kolorowanie $K_{n_1, \dots, n_k}$ zachowuje własność, że jeśli k jest parzyste, to niebieski stopień każdego wierzchołka jest niezerowy i, jeśli k jest nieparzyste, to czerwony stopień każdego wierzchołka jest niezerowy. Co więcej niebieskie i czerwone stopnie wierzchołków $K_{n_1, \dots, n_{k-1}}$ są zwiększane o takie same stałe, gdy tworzymy kolorowanie $K_{n_1, \dots, n_k}$, stąd jeśli kolorowanie $K_{n_1, \dots, n_k}$ nie jest lokalnie nieregularne, to konflikt jest na krawędzi incydentnej do wierzchołka należącego do zbioru A_k . Jednakże, jeśli k jest parzyste, to każda krawędź incydentna do wierzchołka należącego do zbioru A_k jest pokolorowana na niebiesko, stąd $d_b(v) = \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ dla każdego $v \in A_k$, a z drugiej strony $d_b(v) \leq n_k + \sum_{i=1}^{k-2} n_i$ dla każdego $v \in \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$, ponieważ $d_r(v) \geq 1$ dla każdego takiego wierzchołka. Korzystając z faktu, że $n_k \leq n_{k-1}$ łatwo widać, że kolorowanie $K_{n_1, \dots, n_k}$ jest lokalnie nieregularne. Zasadniczo to samo można pokazać w przypadku gdy k jest nieparzyste. Wystarczy zamienić rolami kolory czerwony i niebieski w powyższym argumentie. $\square$

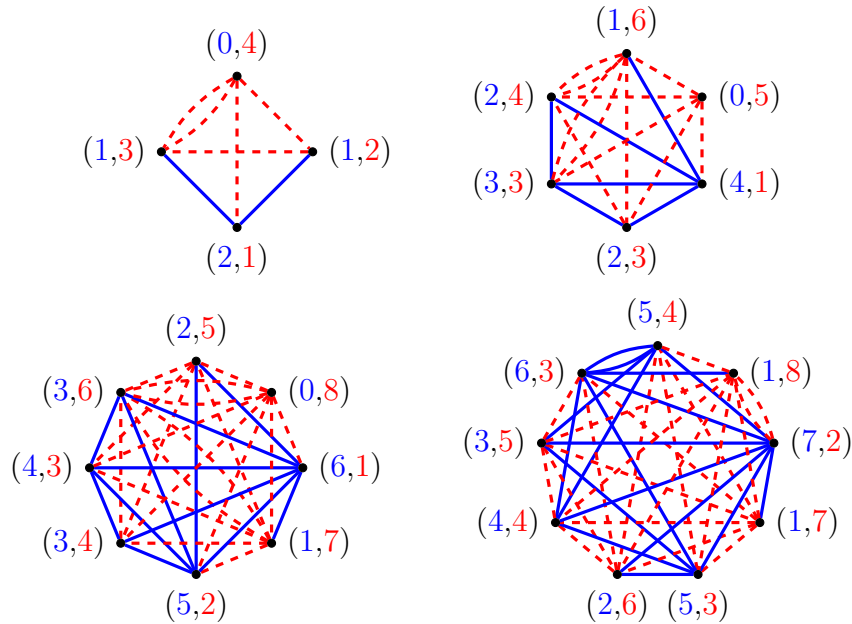
Poprzednie twierdzenie wyklucza grafy pełne, czego można było się spodziewać, ponieważ $\text{lir}(K_n) = 3$ dla każdego $n \geq 4$ (zobacz [9]). Dlatego dla

grafów pełnych potrzeba użyć co najmniej jednej podwojonej krawędzi, aby uzyskać multigraf mający lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami. Pokażemy, że dwie podwojone krawędzie wystarczą, ale z wyjątkiem skończonej liczby przypadków nawet jedna podwojona krawędź jest wystarczająca.

Twierdzenie 64 ([30]). *Dla każdego grafu pełnego K_n , rzędu $n \geq 4$, mamy*

$$\mathcal{D}_{\text{lir}}(K_n) = \begin{cases} 2 & \text{gdy } 6 \leq n \leq 10, \\ 1 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

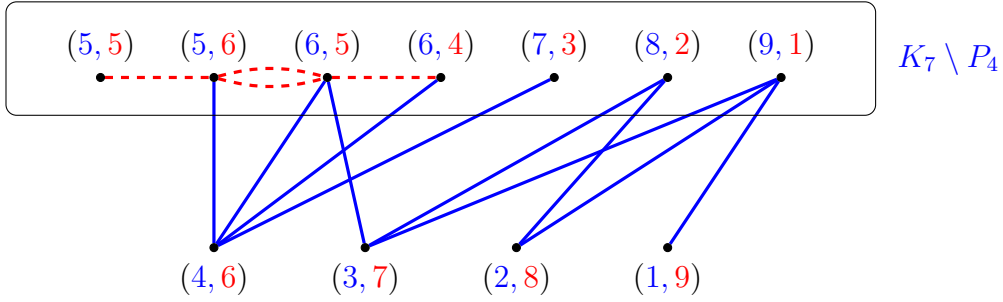
Dowód. Lokalnie nieregularne kolorowanie K_n dla $n \in \{4, 6, 8, 9\}$ z jedną lub dwoma podwojonymi krawędziami zostało przedstawione na rysunku 4.3. Kolorowania K_5 , K_7 oraz K_{10} z jedną lub dwoma podwojonymi krawędziami mogą być uzyskane z kolorowań K_4 , K_6 oraz K_9 pokazanych na rysunku 4.3 przez dodanie nowego wierzchołka i pokolorowanie wszystkich incydentnych z nim krawędzi na niebiesko. Korzystając z programu komputerowego, aby sprawdzić każdy możliwy rozkład K_n ($n \leq 10$) na dwa grafy: jeden, który jest lokalnie nieregularny i drugi, który może być lokalnie nieregularny dzięki podwojeniu co najwyżej jednej krawędzi pokazaliśmy, że nie wystarczy podwoić jednej krawędzi gdy $6 \leq n \leq 10$. Zatem w tych przypadkach konieczne jest podwojenie dwóch krawędzi.



Rysunek 4.3: Lokalnie nieregularne kolorowania K_n z co najwyżej dwoma podwojonymi krawędziami dla $n \in \{4, 6, 8, 9\}$.

Oznaczmy przez $v_1, \dots, v_n$ wierzchołki grafu pełnego K_n . Niech $e = v_1v_2$. W dalszej części będziemy rozważać multigraf $K_n + e$.

Rozważmy teraz kolorowanie $K_{11} + e$ przedstawione na rysunku 4.4. Jeśli $n \geq 12$, to kolorowanie $K_n + e$ jest uzyskiwane z kolorowania $K_{n-1} + e$ przez pokolorowanie każdej krawędzi incydentnej z v_n na czerwono, jeśli $n \equiv 0 \pmod{2}$, lub na niebiesko, jeśli $n \equiv 1 \pmod{2}$.



Rysunek 4.4: Lokalnie nieregularne kolorowanie multigrafu uzyskanego z K_{11} : wszystkie krawędzie, które nie zostały przedstawione, a należą do $K_7 \setminus P_4$, są pojedyncze i w kolorze niebieskim, a reszta pominiętych krawędzi jest pojedyncza i w kolorze czerwonym.

Jeśli n jest parzyste, to dla każdego wierzchołka $v \in V(K_n + e) \setminus \{v_n\}$ mamy $\hat{d}_r(v) \geq 1$ oraz $\hat{d}_b(v) \leq n - 2$, ponieważ każda krawędź incydentna z v_n jest pokolorowana na czerwono i nie ma żadnej podwójnej niebieskiej krawędzi. Jeśli n jest nieparzyste to, podobnie jak w poprzednim przypadku, dla każdego wierzchołka $v \in V(K_n + e) \setminus \{v_n\}$ mamy $\hat{d}_b(v) \geq 1$ oraz $\hat{d}_r(v) \leq n - 2$ (jeśli $n \geq 13$, to wszystkie krawędzie incydentne z v_n są niebieskie oraz końcowe wierzchołki podwójnej czerwonej krawędzi są incydentne z co najmniej pięcioma niebieskimi krawędziami, dla $n = 11$ zobacz rysunek 4.4).

Stąd, jeśli istnieją pewne wierzchołki v_i oraz v_j takie, że $\hat{d}_H(v_i) = \hat{d}_H(v_j)$ dla $H \in \{r, b\}$, to $i, j \leq n - 1$ i z konstrukcji kolorowania również łatwo widać, że $\hat{d}_H(v_i) = \hat{d}_H(v_j)$ w $K_{n-1} + e$. Jednakże kolorowanie $K_{11} + e$ z rysunku 4.4 jest lokalnie nieregularne, a więc również kolorowania $K_n + e$ dla $n \geq 12$ są lokalnie nieregularne. $\square$

Przypomnijmy teraz definicję grafu rozdzielnego. Mówimy, że graf $G(X, Y)$ jest rozdzielny, jeśli istnieje podział $V(G) = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$ zbioru wierzchołków G taki, że $G[X]$ jest grafem pełnym, a Y zbiorem niezależnym. Grafy rozdzielne z definicji są dość bliskie grafom pełnym. Stąd nie jest zaskoczeniem, że $\mathcal{D}_{\text{lr}}(G)$ dla dowolnego grafu rozdzielnego G jest nie większa niż jeden jak w przypadku grafów pełnych (ze skończoną liczbą wyjątków). Aby to udowodnić będziemy istotnie korzystać z rezultatów

Lintzmayera, Moty i Sambinello z [42]. Zostały one szczegółowo zaprezentowane w rozdziale 2 (zobacz twierdzenie 19 i twierdzenie 20) wraz z notacją dotyczącą grafów rozdzielnych. Te dwa twierdzenia pokazują, że aby w pełni rozwiązać problem wyznaczenia wartości parametru $\mathcal{D}_{\text{lir}}$ dla grafów rozdzielnych wystarczy rozważyć jedynie niewiele szczególnych, małych grafów rozdzielnych i jedną bardzo specyficzną, nieskończoną rodzinę.

Twierdzenie 65 ([30]). *Jeśli G jest grafem rozdzielnym, niebędącym grafem pełnym, to $\mathcal{D}_{\text{lir}}(G) \leq 1$.*

Dowód. Z twierdzenia 56 wiemy, że $\mathcal{D}_{\text{lir}}(P_4) = 1$. Niech G będzie grafem rozdzielnym z $\text{lir}(G) > 2$. Oznaczmy przez $v_1, \dots, v_n$ wierzchołki największej kliky w G o rzędzie co najmniej trzy. Wyróżniamy kilka przypadków pokrywających wszystkie sytuacje wymienione w twierdzeniu 19 i twierdzeniu 20. Będziemy istotnie wykorzystywać kolorowania uzyskane w dowodzie twierdzenia 64 (zobacz rysunek 4.3).

Przypuśćmy najpierw, że $\mathcal{D}_{\text{lir}}(K_n) = 1$. Bierzemy dowolne lokalnie nieregularne kolorowanie φ , w którym czerwony stopień wierzchołka v_1 jest maksymalny możliwy. Dołączamy d_1 wiszących czerwonych krawędzi do v_1 . Takie kolorowanie uzyskanego grafu rozdzielnego jest lokalnie nieregularne, co kończy dowód, że $\mathcal{D}_{\text{lir}}(G) \leq 1$, gdy $n \in \{4, 5\}$ lub $n \geq 11$ (zobacz twierdzenie 19, twierdzenie 20 i twierdzenie 64).

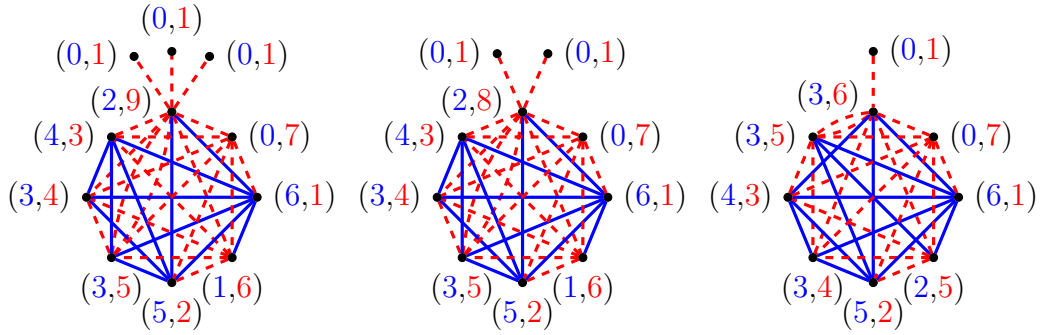
Teraz przypuśćmy, że $n \in \{6, 7, 8\}$, $d_1 = d_2 = 1$ oraz $d_3 = 0$. Rozważamy kolorowanie K_n uzyskane w dowodzie twierdzenia 64, gdzie krawędź v_1v_2 jest jedną z podwojonych czerwonych krawędzi. Zamieniamy dwie równoległe krawędzie v_1v_2 na pojedynczą czerwoną krawędź i dodajemy dwie wiszące czerwone krawędzie incydentne z wierzchołkiem v_1 oraz v_2 . Oczywiście kolorowanie otrzymanego multigrafu jest lokalnie nieregularne. W drugiej sytuacji w tym przypadku, gdy jest wspólny sąsiad v_1 oraz v_2 poza kliką w G , wystarczy po prostu podpodzielić jedną z równoległych krawędzi v_1v_2 w kolorowaniu uzyskanym w dowodzie twierdzenia 64. To kończy dowód w tym przypadku.

Gdy $n \in \{6, 7\}$, $d_1 \in \{1, 2\}$ oraz $d_2 = 0$, to rozważamy kolorowanie multigrafu $K_n + v_1v_2 + v_2v_3$ z dowodu twierdzenia 64, w którym $\hat{d}_b(v_1) = 1$ oraz $\hat{d}_b(v_2) = 3$, jeśli $n = 6$, lub $\hat{d}_b(v_1) = 2$ oraz $\hat{d}_b(v_2) = 4$, jeśli $n = 7$, czyli v_1v_2 jest jedną z podwojonych czerwonych krawędzi. Zamieniamy dwie czerwone równoległe krawędzie v_1v_2 na pojedynczą czerwoną krawędź i dodajemy d_1 wiszących czerwonych krawędzi incydentnych z wierzchołkiem v_1 . Otrzymane kolorowanie jest lokalnie nieregularnym kolorowaniem multigrafu $G + v_1v_2 + v_2v_3$.

Jeśli $n \in \{9, 10\}$, to rozważamy kolorowanie $K_n + v_1v_2 + v_3v_4$ zdefiniowane w dowodzie twierdzenia 64, w którym równoległe krawędzie v_1v_2 są

pokolorowane na czerwono i $\hat{d}_r(v_1) = 8$. Jeśli równoległe krawędzie v_1v_2 są zamienione na pojedynczą czerwoną krawędź i d_1 czerwonych wiszących krawędzi incydentnych z wierzchołkiem v_1 zostało dodanych, otrzymujemy lokalnie nieregularne kolorowanie multigrafu $G + v_1v_2 + v_3v_4$. To kończy dowód przypadków, gdy $n \in \{9, 10\}$, $d_1 \in \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $d_2 = 0$.

Pozostałe przypadki, a mianowicie gdy $n = 8$, $d_1 \in \{1, 2, 3\}$ oraz $d_2 = 0$ są rozpatrywane niezależnie od kolorowania multigrafu $K_8 + e_1 + e_2$ z dowodu twierdzenia 64. Lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami G z jedną podwojoną krawędzią w tych przypadkach zostało przedstawione na rysunku 4.5. To kończy dowód twierdzenia.



Rysunek 4.5: Lokalnie nieregularne kolorowania dwoma kolorami grafu rozdzielnego G gdy $n = 8$, $d_1 \in \{1, 2, 3\}$ oraz $d_2 = 0$ z dowodu twierdzenia 65.

□

4.3 Potęgi cykli

W tym podrozdziale na początku przedstawimy notację dotyczącą potęg cykli i inne niezbędne pojęcia potrzebne do dowodu głównego rezultatu dla tej klasy grafów. Następnie zaprezentujemy ogólną ideę dowodu głównego rezultatu w tym podrozdziale – twierdzenia 71. Dowód jest oparty o kilka lematów, których dowody przedstawimy w oddzielnych częściach tego podrozdziału.

4.3.1 Terminologia i ogólna idea

Zacniemy od zdefiniowania antyregularnych grafów, które są w pewnym sensie przeciwieństwem grafów regularnych (zobacz [11] oraz [28]). Podczas gdy grafy regularne mają wszystkie wierzchołki o tych samych stopniach grafy antyregularne są bliskie posiadania wszystkich wierzchołków różnych stop-

ni. Oczywiście dla $n \geq 2$ nie istnieje graf rzędu n mający ciąg wierzchołków o stopniach $0, 1, \dots, n-1$. Jednakże dla każdego $n \geq 2$ istnieje graf, którego wierzchołki mają różne stopnie z wyjątkiem pary wierzchołków, która ma te same stopnie. Istnieje kilka podstawowych właściwości grafów antyregularnych, które są dość proste do udowodnienia. Wypiszemy niektóre z nich w poniższej obserwacji.

Obserwacja 66 ([11, 28]). *Niech G będzie grafem antyregularnym rzędu $n \geq 2$.*

1. *Jeśli G jest spójny, to G zawiera dwa wierzchołki stopnia $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ i po jednym wierzchołku mającym każdy ze stopni ze zbioru $[1, n-1] \setminus \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$.*
2. *Jeśli G jest niespójny, to G zawiera dwa wierzchołki stopnia $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ i po jednym wierzchołku mającym każdy ze stopni ze zbioru $[0, n-2] \setminus \{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$.*
3. *Dopełnienie G jest antyregularnym grafem rzędu n .*
4. *Istnieją dokładnie dwa nieizomorficzne grafy antyregularne rzędu $n \geq 2$, z których jeden jest spójny, a drugi niespójny.*
5. *Jeśli G jest spójny, to dwa wierzchołki u, v grafu G są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $d(u) + d(v) \geq n$.*
6. *Jeśli G jest niespójny, to dwa wierzchołki u, v grafu G są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $d(u) + d(v) \geq n-1$.*

Będziemy wykorzystywać grafy antyregularne w odpowiednich dowodach w tym podrozdziale jako bazę do konstrukcji większych grafów. Aby udowodnić główne twierdzenie w tym podrozdziale ważne jest, aby móc uporządkować wierzchołki grafu, w szczególności wierzchołki grafu antyregularnego. Stąd w pewnych miejscach, głównie w konstrukcyjnych fragmentach dowodów używamy *uporządkowanych grafów*, czyli grafów z zadaniem porządkiem wierzchołków. Takie uporządkowanie wierzchołków może być podane jawnie lub częściej niejawnie za pomocą indeksów wierzchołków.

Z punktu 5 i 6 obserwacji 66 mamy na przykład.

Uwaga 67. *Uporządkowanie wierzchołków uporządkowanego grafu antyregularnego G jest zadane jednoznacznie (z dokładnością do dwóch wierzchołków tego samego stopnia) przez porządek elementów w multizbiorze stopni wierzchołków grafu G .*

Gdy rozważamy uporządkowania wierzchołków antyregularnych grafów, to wystarczy zgodnie z uwagą 67 rozważyć tylko uporządkowania stopni ich wierzchołków (dwa wierzchołki o równych stopniach sąsiadują z tymi samymi wierzchołkami o różnych od siebie stopniach, czyli możemy je dowolnie zamieniać ze sobą), co będziemy czynić używając list. Przypomnijmy notację związaną z listami. Przez *długość* listy L rozumiemy liczbę, niekoniecznie takich samych, elementów L . Lista L' jest *podlistą* L jeśli składa się z pewnych elementów L i ich kolejność jest zachowana, czyli jeśli $L = l_1, \dots, l_n$ oraz $1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k \leq n$, to $L' = l_{n_1}, \dots, l_{n_k}$ jest podlistą L . Jeśli $L_1 = l_1, \dots, l_k$ oraz $L_2 = l_{k+1}, \dots, l_m$ są dwoma listami to lista $L_1 L_2 = l_1, \dots, l_m$ jest *konkatenacją* L_1 oraz L_2 .

Co więcej, dla skrócenia notacji, używamy zapisu $[r, s]$, aby oznaczyć przedział liczb całkowitych o końcach r oraz s , czyli $[r, s] = \{r, \dots, s\}$, jeśli $r \leq s$ oraz $[r, s] = \emptyset$, jeśli $r > s$.

Jak częściowo wspominaliśmy wcześniej, używamy antyregularnych grafów jako bazy do tworzenia bloków, z których budujemy lokalnie nieregularny podgraf G k -tej potęgi cyklu C_n taki, że $C_n^k - G$ jest również lokalnie nieregularny. Aby precyzyjnie określić jeden z takich bloków używamy poniższej definicji „grafu” $A(t, k)$. Zauważmy, że w tej definicji są używane *pół-krawędzie*, czyli krawędzie incydentne z tylko jednym wierzchołkiem. W związku z tym będziemy korzystać z określenia „graf”, gdy dopuszczamy pół-krawędzie.

Niech t oraz k będą liczbami całkowitymi takimi, że $t \geq k \geq 2$. Przez $A(t, k)$ oznaczamy „graf” o wierzchołkach $a_0, \dots, a_{t+1}$, który spełnia następujące warunki (a1)–(a6):

- (a1) $d_{A(t,k)}(a_0) + d_{A(t,k)}(a_{t+1}) \geq t + 1$.
- (a2) $\{d_{A(t,k)}(a_i) : i \in [1, t]\} = [1, t]$.
- (a3) a_0 oraz a_{t+1} nie są incydentne z żadną z pół-krawędzi i każdy inny wierzchołek jest incydentny z co najwyżej jedną pół-krawędzią.
- (a4) Istnieje $\ell \in [0, \lfloor \frac{t}{2} \rfloor]$ takie, że $\{a_i : i \in [1, \ell] \cup [t - \ell + 1, t]\}$ jest zbiorem wszystkich wierzchołków $A(t, k)$ incydentnych z pół-krawędziami.
- (a5) Jeśli $a_i a_j \in E(A(t, k))$, to $|i - j| \leq k$.
- (a6) Jeśli $a_i a_j \in E(A(t, k))$ oraz $i < t - \ell + 1 \leq j$, to $j - i \leq k - 1$.

Zauważmy, że „grafy” spełniające (a1)–(a6) nie muszą być unikalne dla ustalonego k oraz t i my będziemy zainteresowani tylko istnieniem takich „grafów”. Jeśli istnieje „graf” $A(t, k)$ dla pewnych parametrów t oraz k , to możemy użyć kilku jego kopii, aby udowodnić następujący lemat.

Lemat 68 ([30]). *Niech k oraz t będą liczbami całkowitymi takimi, że $\frac{8k-5}{5} \geq t \geq k \geq 2$. Jeśli istnieje „graf” $A(t, k)$, to $\text{lir}(C_{p(t+1)+q(t+2)}^k) = 2$ dla dowolnych nieujemnych liczb całkowitych p oraz q takich, że $p + q \geq 2$.*

W dowodach następujących dwóch lematów opiszemy konstrukcje $A(t, k)$ dla szczególnych wartości t oraz k , a tym samym pokażemy ich istnienie. Następnie wykorzystamy lemat 68.

Lemat 69 ([30]). *Niech k, t, p, q będą nieujemnymi liczbami całkowitymi takimi, że $t \geq k \geq 2$, $p + q \geq 2$ oraz*

$$t \leq \begin{cases} \frac{4k-2}{3} & \text{jeśli } t \text{ jest parzyste,} \\ \frac{4k-3}{3} & \text{jeśli } t \text{ jest nieparzyste.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Wówczas $\text{lir}(C_{p(t+1)+q(t+2)}^k) = 2$.

Lemat 70 ([30]). *Niech k, t, p, q będą nieujemnymi liczbami całkowitymi takimi, że $k \geq 4$, $\frac{4k-1}{3} \leq t \leq \frac{8k-5}{5}$ oraz $p + q \geq 2$. Wówczas $\text{lir}(C_{p(t+1)+q(t+2)}) = 2$.*

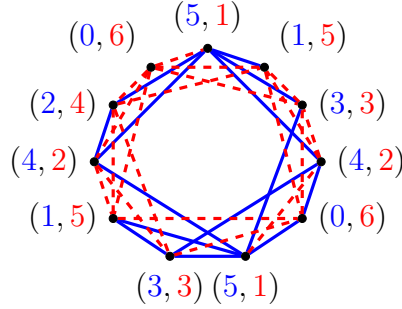
Korzystając z lematu 69, lematu 70 oraz rozwiązując niewielką liczbę szczególnych przypadków udowodnimy główne twierdzenie w tym podrozdziale.

Twierdzenie 71 ([30]). *Dla każdego $k \geq 2$ oraz $n \geq 2k + 2$ mamy $\text{lir}(C_n^k) = 2$.*

Dowód. W dalszej części będziemy istotnie korzystać z faktu, że dla dwóch względnie pierwszy liczb a oraz b każda liczba całkowita $n \geq (a-1)(b-1)$ może być zapisana jako $n = pa + qb$, gdzie p oraz q są nieujemnymi liczbami całkowitymi (zobacz problem monet [53]). W szczególności, dla $k = 2$, z lematu 69 wiemy, że $\text{lir}(C_{3p+4q}^2) = 2$ (dla $t = 2$). Z faktu, że każda liczba całkowita $n \geq 6$ może być zapisana w postaci $n = 3p + 4q$ dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych p oraz q , gdzie $p + q \geq 2$ otrzymujemy, że $\text{lir}(C_n^2) = 2$ dla $n \geq 6$.

W przypadku kiedy $k = 3$ lemat 69 implikuje, że $\text{lir}(C_{4p+5q}^3) = 2$ (dla $t = 3$) dla każdej pary nieujemnych liczb całkowitych p oraz q takich, że $p + q \geq 2$. Każda liczba całkowita $n \geq 12$ może być wyrażona w formie $n = 4p + 5q$ dla odpowiednich liczb całkowitych p oraz q . Co więcej, łatwo sprawdzić, że również każda liczba $n \in \{8, 9, 10\}$ może być wyrażona w tej samej formie. Dla $n = 11$ rozkład grafu C_{11}^3 jest bezpośrednio przedstawiony na rysunku 4.6, co kończy dowód twierdzenia w przypadku gdy $k = 3$.

Stąd w dalszej części zakładamy, że $k \geq 4$. W tym przypadku możemy użyć lematu 70 jako uzupełnienia lematu 69.



Rysunek 4.6: Lokalnie nieregularne kolorowanie C_{11}^3 .

Niech t będzie liczbą całkowitą, $k \leq t \leq \frac{8k-5}{5}$. Jeśli t jest parzyste, to t spełnia $t \leq \frac{4k-2}{3}$ lub $t \geq \frac{4k-1}{3}$. Jeśli t jest nieparzyste, to t spełnia $t \leq \frac{4k-3}{3}$ lub $t \geq \frac{4k-2}{3}$. Jednakże, jeśli t jest nieparzyste, to oczywiście $t \neq \frac{4k-2}{3}$ (ponieważ $3t$ jest nieparzyste oraz $4k-2$ jest parzyste). Stąd $t \geq \frac{4k-2}{3}$ implikuje $t \geq \frac{4k-1}{3}$ w przypadku gdy t jest nieparzyste. Z tych prostych obserwacji, lematu 69 i lematu 70 wynika, że $\text{lir}(C_{p(t+1)+q(t+2)}) = 2$ dla każdych nieujemnych liczb całkowitych t, p oraz q takich, że $k \leq t \leq \frac{8k-5}{5}$ oraz $p+q \geq 2$.

Stąd w dalszej części skupimy się na pokazaniu, że każda liczba całkowita $n \geq 2k+2$ może być zapisana w formie $n = p(t+1) + q(t+2)$ dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych p oraz q , gdzie $p+q \geq 2$ i pewnego t spełniającego $k \leq t \leq \frac{8k-5}{5}$.

Niech $I(r, t) = \{p(t+1) + q(t+2) : p+q = r\}$. Zauważmy, że $p(t+1) + q(t+2)$ oraz $(p-1)(t+1) + (q+1)(t+2)$ są kolejnymi liczbami całkowitymi. Zatem $I(r, t)$ jest przedziałem liczb całkowitych dla każdego r oraz t .

Co więcej $r(t+2) \in I(r, t) \cap I(r, t+1)$ i zatem $\bigcup_{t=k}^{\lfloor \frac{8k-5}{5} \rfloor} I(r, t)$ jest przedziałem liczb całkowitych dla ustalonego r . Aby udowodnić twierdzenie pokażemy, że dla każdego $k \geq 4$ zbiór $U(k) = \bigcup_{r \geq 2} \bigcup_{t=k}^{\lfloor \frac{8k-5}{5} \rfloor} I(r, t)$ zawiera wszystkie liczby całkowite większe lub równe $2k+2$.

Widzimy, że $\min I(2, k) = 2(k+1)$, a stąd $2k+2 \in U(k)$. Korzystając z faktu, że $\bigcup_{t=k}^{\lfloor \frac{8k-5}{5} \rfloor} I(r, t)$ jest przedziałem liczb całkowitych dla ustalonego r otrzymujemy, że $U(k)$ nie zawiera wszystkich liczb całkowitych większych lub równych $2k+2$ tylko w przypadku gdy istnieje liczba całkowita pomiędzy maksimum z $I(r, \lfloor \frac{8k-5}{5} \rfloor)$ i minimum z $I(r+1, k)$. Równoważnie, jeśli

$$1 + \max I(r, \lfloor \frac{8k-5}{5} \rfloor) \geq \min I(r+1, k), \quad (4.2)$$

to $I(r, \lfloor \frac{8k-5}{5} \rfloor) \cup I(r+1, k)$ jest przedziałem liczb całkowitych. Mamy, że $1 + \max I(r, \lfloor \frac{8k-5}{5} \rfloor) \geq 1 + r \frac{8k-9}{5}$ oraz $\min I(r+1, k) = (r+1)(k+1)$. Stąd, jeśli

$$8kr - 9r \geq 5rk + 5r + 5k, \quad (4.3)$$

to (4.2) zachodzi. Co więcej, (4.3) jest równoważne z nierównością

$$r(3k-4) - 5k \geq 0,$$

która jest prawdziwa dla każdego $r \geq 3$, każdego $k \geq 4$, dla $r = 2$ oraz $k \geq 8$. W związku z tym, dla $k \geq 8$ zbiór $U(k)$ zawiera wszystkie liczby całkowite większe lub równe $2k+2$ i dla $k \in \{4, 5, 6, 7\}$ $U(k)$ zawiera wszystkie liczby całkowite większe lub równe $2k+2$ z możliwym wyjątkiem w postaci liczb całkowitych leżących pomiędzy $\max I(2, \lfloor \frac{8k-5}{5} \rfloor)$ a $\min I(3, k)$.

Dla $k = 4$ mamy $\max I(2, \lfloor \frac{8k-5}{5} \rfloor) = 2 \cdot (5+2) = 14$ oraz $\min I(3, k) = 3 \cdot (4+1) = 15$, stąd $U(4)$ zawiera wszystkie liczby całkowite większe lub równe od 10. Dla $k = 5$ mamy $\max I(2, \lfloor \frac{8k-5}{5} \rfloor) = 2 \cdot (7+2) = 18$ oraz $\min I(3, k) = 3 \cdot (5+1) = 18$, stąd $U(5)$ zawiera wszystkie liczby całkowite większe lub równe od 12. Dla $k = 6$ mamy $\max I(2, \lfloor \frac{8k-5}{5} \rfloor) = 2 \cdot (8+2) = 20$ oraz $\min I(3, k) = 3 \cdot (6+1) = 21$, stąd $U(6)$ zawiera wszystkie liczby całkowite większe lub równe od 14. Dla $k = 7$ mamy $\max I(2, \lfloor \frac{8k-5}{5} \rfloor) = 2 \cdot (10+2) = 24$ oraz $\min I(3, k) = 3 \cdot (7+1) = 24$, stąd $U(7)$ zawiera wszystkie liczby całkowite większe lub równe od 16. To kończy dowód twierdzenia. $\square$

Zauważmy, że ograniczenie na n w twierdzeniu 71 jest ostre, ponieważ C_n^k dla $n < 2k+2$ jest grafem pełnym i nie istnieje lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami żadnego grafu pełnego o rzędzie co najmniej cztery [9].

4.3.2 Dowód lematu 68

W całym dowodzie tego lematu zakładamy, że $A(t, k)$ jest ustalony. Niech $B(t, k)$ będzie uporządkowanym „grafem” o wierzchołkach $b_0, \dots, b_{t+2}$, który jest uzyskany z $A(t, k)$ przez dodanie nowego wierzchołka a_{t+2} o stopniu zero po przeetykietowaniu wierzchołków w taki sposób, że $b_i = a_i$ dla $i \in [0, t-\ell]$, $b_{t-\ell+1} = a_{t+2}$ oraz $b_{i+1} = a_i$ dla $i \in [t-\ell+1, t+1]$. Z własności (a1) – (a6) „grafu” $A(t, k)$ i konstrukcji $B(t, k)$ wynikają następujące własności (b1)–(b5) uporządkowanego „grafu” $B(t, k)$:

- (b1) $d_{B(t,k)}(b_0) + d_{B(t,k)}(b_{t+2}) \geq t + 1$.
- (b2) $\{d_{B(t,k)}(b_i) : i \in [1, t + 1]\} = [0, t]$.
- (b3) b_0 oraz b_{t+2} nie są incydentne z żadną pół-krawędzią i każdy inny wierzchołek jest incydentny z co najwyżej jedną pół-krawędzią.
- (b4) $\{b_i : i \in [1, \ell] \cup [t - \ell + 2, t + 1]\}$ jest zbiorem wszystkich wierzchołków $B(t, k)$ incydentnych z pół-krawędziami.
- (b5) Jeśli $b_i b_j \in E(B(t, k))$, to $|i - j| \leq k$.

Zauważmy, że własność (b5) wynika bezpośrednio z własności (a5), (a6) oraz faktu, że nowy wierzchołek o stopniu zero został dodany tuż przed ostatnimi $\ell + 1$ wierzchołkami.

Teraz rozważmy p kopii $A(t, k)$, oznaczonych przez $A_1, \dots, A_p$, oraz q kopii $B(t, k)$, oznaczonych przez $B_1, \dots, B_q$. Przez a_i^j będziemy oznaczać wierzchołek a_i z kopii A_j oraz przez b_i^j będziemy oznaczać wierzchołek b_i z kopii B_j .

Jeśli $p = 0$, to niech G będzie grafem uzyskanym z $B_1, \dots, B_q$ przez utożsamienie b_{t+2}^j z b_0^{j+1} i zamianę pół-krawędzi incydentnych z $b_{t-\ell+2}^j, \dots, b_{t+1}^j$ oraz $b_1^{j+1}, \dots, b_\ell^{j+1}$ na krawędzie $b_{t-\ell+1+i}^j b_i^{j+1}$, dla każdego $j \in \mathbb{Z}_q$ i każdego $i \in [1, \ell]$.

Jeśli $q = 0$, to niech G będzie grafem uzyskanym z $A_1, \dots, A_p$ przez utożsamienie a_{t+1}^j z a_0^{j+1} i zamianę pół-krawędzi incydentnych z $a_{t-\ell+1}^j, \dots, a_t^j$ oraz $a_1^{j+1}, \dots, a_\ell^{j+1}$ na krawędzie $a_{t-\ell+i}^j a_i^{j+1}$, dla każdego $j \in \mathbb{Z}_p$ i każdego $i \in [1, \ell]$.

Jeśli $p \neq 0$ oraz $q \neq 0$, to niech G będzie grafem, który jest uzyskany z $A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_q$ po:

- utożsamieniu a_{t+1}^j z a_0^{j+1} i zamianie pół-krawędzi incydentnych z $a_{t-\ell+i}^j$ oraz a_i^{j+1} na krawędź $a_{t-\ell+i}^j a_i^{j+1}$ dla każdego $i \in [1, \ell]$ oraz $j \in [1, p - 1]$,
- utożsamieniu a_{t+1}^p z b_0^1 i zamianie pół-krawędzi incydentnych z $a_{t-\ell+i}^p$ oraz b_i^1 na krawędź $a_{t-\ell+i}^p b_i^1$ dla każdego $i \in [1, \ell]$,
- utożsamieniu b_{t+2}^j z b_0^{j+1} i zamianie pół-krawędzi incydentnych z $b_{t+1-\ell+i}^j$ oraz b_i^{j+1} na krawędź $b_{t+1-\ell+i}^j b_i^{j+1}$ dla każdego $i \in [1, \ell]$ oraz $j \in [1, q - 1]$,
- utożsamieniu b_{t+2}^q z a_0^1 i zamianie pół-krawędzi incydentnych z $b_{t+1-\ell+i}^q$ oraz a_i^1 na krawędź $b_{t+1-\ell+i}^q a_i^1$ dla każdego $i \in [1, \ell]$.

Niech uporządkowanie wierzchołków G będzie dane za pomocą listy

$$L = a_1^1, \dots, a_{t+1}^1, a_1^2, \dots, a_{t+1}^2, \dots, a_{t+1}^p, b_1^1, \dots, b_{t+2}^1, b_1^2, \dots, b_{t+2}^2, \dots, b_{t+2}^q.$$

Oczywiście G ma $p(t+1) + q(t+2)$ wierzchołków.

Niech C będzie cyklem o długości $p(t+1) + q(t+2)$ z $V(C) = V(G)$ oraz $uv \in E(C)$ ilekroć u oraz v są kolejnymi wierzchołkami w uporządkowaniu $V(G)$ lub u oraz v są odpowiednio pierwszym i ostatnim wierzchołkiem w tym uporządkowaniu. Chcemy pokazać, że G jest podgrafem C^k i obydwa grafy G oraz $C^k - G$ są lokalnie nieregularne. Zauważmy, że aby to pokazać wystarczy wykazać, że dwa sąsiednie wierzchołki w G są w odległości co najwyżej k w C (stąd G jest podgrafem C^k), jak również, że dwa wierzchołki G o tych samych stopniach są w odległości co najmniej $k+1$ w C . Aby oznaczyć odległość dwóch wierzchołków u oraz v w C będziemy używać notacji $\text{dist}_C(u, v)$.

Najpierw pokażemy, że $uv \in E(G)$ implikuje $\text{dist}_C(u, v) \leq k$. To jest oczywiście prawdą, jeśli obydwa wierzchołki u oraz v są wierzchołkami tej samej kopii $A(t, k)$ lub $B(t, k)$, zobacz (a5), (a6) oraz (b5). Co więcej, jeśli krawędź łącząca dwa wierzchołki z różnych kopii $A(t, k)$ i/lub $B(t, k)$ jest dodana w procesie tworzenia G , to taka krawędź zamienia dwie pół-krawędzie incydentne z wierzchołkami, których odległość w C jest co najwyżej ℓ (jest to łatwo widoczne z konstrukcji G dzięki indeksom wierzchołków). Z faktu, że $\ell \leq \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$ oraz $t \leq \frac{8k-5}{5}$ otrzymujemy, że odległość dwóch takich wierzchołków w C jest co najwyżej k . Stąd G jest podgrafem C^k .

Teraz, niech u oraz v będą dwoma wierzchołkami G takimi, że $d_G(u) = d_G(v)$. Następująca obserwacja implikuje fakt, że $\text{dist}_C(u, v) \geq k+1$: jeśli $q = 0$, to oczywiście $u = a_i^{j_1}$ oraz $v = a_i^{j_2}$ dla pewnego $i \in [1, t+1]$ oraz $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}_p$, $j_1 \neq j_2$. Z faktu, że każdy „graf” A_j ma dokładnie $t+1$ wierzchołków otrzymujemy, że $\text{dist}_C(u, v) \geq t+1$. Jeśli $q \neq 0$, to $\text{dist}_C(u, v) \geq t+1$, ponieważ istnieje potencjalnie więcej wierzchołków (mianowicie tych o stopniu zero w G), które znajdują się na najkrótszej ścieżce pomiędzy u oraz v w C , w porównaniu do przypadku, gdy $q = 0$. Jest oczywiste z konstrukcji $B(t, k)$ oraz G , że jedynymi wierzchołkami stopnia zero w G są wierzchołki $b_{t-\ell}^j$ dla każdego $j \in [1, q]$. Stąd, jeśli $d_G(u) = d_G(v) = 0$, to $\text{dist}_C(u, v) \geq t+2$.

Zatem, w każdym przypadku, $\text{dist}_C(u, v) \geq t+1 \geq k+1$, gdy $d_G(u) = d_G(v)$. To kończy dowód, że G oraz $C^k - G$ są lokalnie nieregularnymi podgrafami C^k . Aby uzyskać lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami C^k wystarczy pokolorować G na niebiesko i $C^k - G$ na czerwono.

4.3.3 Dowód lematu 69

Pokażemy, że istnieje „graf” $A(t, k)$ o wierzchołkach $a_0, \dots, a_{t+1}$ spełniający własności (a1) – (a6). Wówczas rezultat wynika z lematu 68.

Niech H_t będzie niespójnym grafem antyregularnym rzędu t . Niech M_t będzie multizbiorem stopni wierzchołków H_t , czyli $M_t = \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor, \dots, t-2\}$. Niech L będzie listą wszystkich t elementów M_t , w której liczby nieparzyste są na początku w niemalejącym porządku, a dalej są liczby parzyste w nierosnącym porządku. Oznaczmy przez l_i i -ty element L , gdzie $i \in [1, |L|]$.

Fakt 72. *Jeśli $l_i + l_j \geq t-1$, to $|i-j| \leq k$.*

Dowód. Rozważmy zbiór $S = \{0, \dots, t-2\}$ i listę L^* wszystkich elementów S , w której liczby nieparzyste są na początku w rosnącym porządku, a następnie są liczby parzyste w malejącym porządku. Oczywiście L^* jest podlistą L . Oznaczmy przez l_i^* i -ty element L^* . Zauważmy, że aby udowodnić Fakt 72 wystarczy pokazać, że $l_i^* + l_j^* \geq t-1$ implikuje $|i-j| \leq k-1$, ponieważ jest co najwyżej jeden dodatkowy element pomiędzy dwoma elementami L^* w L (a mianowicie drugie wystąpienie $\lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor$).

Zauważmy, że jeśli $l_i^* \equiv l_j^* \pmod{2}$ dla pewnych $i, j \in \{0, \dots, t-2\}$, to $|i-j| \leq \frac{t}{2}-1$. Jeśli t jest parzyste, to mamy $\frac{t}{2}-1 \leq \frac{2}{3}k - \frac{4}{3} \leq k-1$ dla $k \geq 2$. Jeśli z drugiej strony t jest nieparzyste, to mamy $\frac{t}{2}-1 \leq \frac{2}{3}k - \frac{3}{2} \leq k-1$ dla $k \geq 2$. Stąd w obu przypadkach uzyskujemy $|i-j| \leq k-1$.

Teraz niech i będzie dane tak, że l_i^* jest nieparzyste. Obliczamy maksymalne j takie, że $l_i^* + l_j^* \geq t-1$. Z faktu, że $l_i^* = 2i-1$ mamy $l_j^* \geq t-2i$. Przypadek gdy l_j^* jest nieparzyste jest rozwiązany w poprzednim akapicie, stąd założmy, że l_j^* jest parzyste. Z faktu, że l_j^* jest $(t-j)$ -tą najmniejszą parzystą liczbą całkowitą otrzymujemy $2(t-j-1) = l_j^* \geq t-2i$ i stąd $j-i \leq \frac{t-2}{2} \leq k-1$. $\square$

Fakt 73. *Istnieją listy L_1, L_2 oraz L_3 takie, że lista L jest ich konkatencją, czyli $L = L_1 L_2 L_3$, taką, że $|L_1| + |L_3| = \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$ i każdy element zbioru $\{0, \dots, \lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor\}$ jest obecny w liście L_1 lub L_3 . Co więcej, jeśli $t \equiv 0 \pmod{4}$ lub $t \equiv 3 \pmod{4}$, to $|L_1| + |L_2| \leq k$ oraz $|L_2| + |L_3| \leq k-1$, i jeśli $t \equiv 1 \pmod{4}$ lub $t \equiv 2 \pmod{4}$, to $|L_1| + |L_2| \leq k-1$ oraz $|L_2| + |L_3| \leq k$.*

Dowód. Niech $t = 4x + y$ dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych x oraz y , gdzie $y \leq 3$. Niech L_1 będzie listą pierwszych x elementów L , jeśli $y \in \{0, 1, 2\}$, i listą pierwszych $x+1$ elementów L jeśli $y = 3$. Niech L_3 będzie listą ostatnich x elementów L , jeśli $y = 0$, i listą ostatnich $x+1$ elementów L jeśli $y \in \{1, 2, 3\}$. Niech L_2 będzie podlistą L taką, że $L = L_1 L_2 L_3$. Dla przeglądu długości podlist zobacz tabelę 4.1.

Teraz pokażemy, że każdy element zbioru $\{0, \dots, \lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor\}$ jest obecny na liście L_1 lub L_3 . Należy rozróżnić cztery przypadki w zależności od wartości y .

Dla każdego z tych przypadków prosta obserwacja jest potrzebna. Stąd przedstawimy ją w przypadku gdy $y = 0$, czyli $t = 4x$, dla pozostałych przypadków można dokonać podobnych obserwacji, więc pozostawimy je dla czytelnika. Przypuśćmy, że $t = 4x$. Wówczas L_1 składa się z x najmniejszych nieparzystych liczb całkowitych z M_t uporządkowanych niemalejąco. Z faktu, że elementem $\left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor$, który jest dwa razy w M_t jest $2x-1$ mamy $L_1 = 1, \dots, (2x-1)$. Podobnie, lista L_3 składa się z x najmniejszych parzystych liczb całkowitych z M_t uporządkowanych nierosnąco. Stąd $L_3 = (2x-2), \dots, 0$. Oczywiście każda liczba całkowita z przedziału $[0, \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor]$ jest na liście L_1 lub L_3 .

Fakt, że $|L_1| + |L_3| = \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$ można łatwo sprawdzić korzystając z tabeli 4.1.

Zauważmy, że w tabeli 4.1 zostały przedstawione również wartości k oraz $k-1$. Te wartości wynikają z (4.1) i faktu, że k oraz $k-1$ są liczbami całkowitymi. W przypadku gdy t jest parzyste otrzymujemy z (4.1), iż $k \geq \frac{3t+2}{4}$. W przypadku gdy $t = 4x$ mamy $k \geq 3x + \frac{1}{2}$ i, ponieważ k jest liczbą całkowitą, to $k \geq 3x + 1$. Dla $t = 4x + 2$ mamy $k \geq 3x + 2$. W przypadku gdy t jest nieparzyste, to otrzymujemy z (4.1), że $k \geq \frac{3t+3}{4}$. Jeśli $t = 4x + 1$, to otrzymujemy $k \geq 3x + \frac{3}{2}$ i, ponieważ k jest liczbą całkowitą to $k \geq 3x + 2$. Jeśli $t = 4x + 3$, to mamy $k \geq 3x + 3$.

Z tabeli 4.1 łatwo widać, że jeśli $t \equiv 0 \pmod{4}$ lub $t \equiv 3 \pmod{4}$, to $|L_1| + |L_2| \leq k$ oraz $|L_2| + |L_3| \leq k-1$, a jeśli $t \equiv 1 \pmod{4}$ lub $t \equiv 2 \pmod{4}$, to $|L_1| + |L_2| \leq k-1$ oraz $|L_2| + |L_3| \leq k$.

t	$ L_1 $	$ L_2 $	$ L_3 $	k	$k-1$	$\lfloor (t-1)/2 \rfloor$
$4x$	x	$2x$	x	$\geq 3x+1$	$\geq 3x$	$2x-1$
$4x+1$	x	$2x$	$x+1$	$\geq 3x+2$	$\geq 3x+1$	$2x$
$4x+2$	x	$2x+1$	$x+1$	$\geq 3x+2$	$\geq 3x+1$	$2x$
$4x+3$	$x+1$	$2x+1$	$x+1$	$\geq 3x+3$	$\geq 3x+2$	$2x+1$

Tabela 4.1: Wartości rozważane w dowodzie faktu 73.

□

W dalszej części, niech $L = L_1 L_2 L_3$, gdzie L_1 , L_2 oraz L_3 są podlistami L o własnościach podanych w fakcie 73. Zauważmy, że skoro $|L_1| + |L_3| = \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$, to mamy $|L_2| = \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$. Co więcej, ponieważ każdy element $[0, \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor]$ jest na liście L_1 lub L_3 , to otrzymujemy, że lista L_2 składa się z elementów $\left[\left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor, t-2 \right]$. Teraz pokażemy konstrukcję $A(t, k)$. Rozróżniamy dwa przypadki.

Przypadek 1. Przypuśćmy, że $t \equiv 0 \pmod{4}$ lub $t \equiv 3 \pmod{4}$. W tym przypadku zgodnie z faktem 73,

$$|L_1| + |L_2| \leq k \quad \text{oraz} \quad |L_2| + |L_3| \leq k-1. \quad (4.4)$$

Oznaczmy przez $a_1, \dots, a_t$ wierzchołki H_t w taki sposób, że $d_{H_t}(a_i) = l_i$. Niech $A(t, k)$ będzie uporządkowanym grafem uzyskanym z H_t przez dodanie nowych wierzchołków a_0 oraz a_{t+1} , krawędzi $a_0 a_i$ dla każdego $i \in [1, |L_1| + |L_2|]$ oraz krawędzi $a_j a_{t+1}$ dla każdego $j \in [|L_1| + 1, |L|]$. Oczywiście, $d_{A(t,k)}(a_0) + d_{A(t,k)}(a_{t+1}) = |L_1| + 2|L_2| + |L_3| = \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil + 2 \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor \geq t + 1$. Stąd (a1) jest spełniony.

Jeśli $1 \leq i \leq |L_1|$ lub $|L_1| + |L_2| + 1 \leq i \leq |L|$, to $d_{A(t,k)}(a_i) = d_{H_t}(a_i) + 1 = l_i + 1$. Skoro lista $L_1 L_3$ składa się z elementów $[0, \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor]$, to otrzymujemy

$$\{d_{A(t,k)}(a_i) : i \in [1, |L_1|] \cup [|L_1| + |L_2| + 1, |L|]\} = [1, \dots, \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor + 1]. \quad (4.5)$$

Dla $i \in [|L_1| + 1, |L_1| + |L_2|]$ mamy $d_{A(t,k)}(a_i) = d_{H_t}(a_i) + 2 = l_i + 2$. Skoro lista L_2 składa się z elementów $\left[\left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor, t-2\right]$, to mamy

$$\{d_{A(t,k)}(a_i) : i \in [|L_1| + 1, |L_1| + |L_2|]\} = \left[\left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor + 2, t\right]. \quad (4.6)$$

Z (4.5) oraz (4.6) mamy, że warunek (a2) jest spełniony.

Skoro $A(t, k)$ w naszym przypadku nie ma pół-krawędzi, to (a3) oraz (a4) są spełnione i $\ell = 0$. Warunki (a5) oraz (a6) są spełnione z powodu faktu 72 oraz (4.4).

Stąd $A(t, k)$ spełnia warunki (a1)–(a6) oraz z lematu 68 mamy, że $\text{lir}(C_{p(t+1)+q(t+2)}^k) = 2$ dla każdych nieujemnych liczb całkowitych p oraz q takich, że $p + q \geq 2$.

Przypadek 2. Przypuśćmy, że $t \equiv 1 \pmod{4}$ lub $t \equiv 2 \pmod{4}$. Wówczas

$$|L_1| + |L_2| \leq k - 1 \quad \text{oraz} \quad |L_2| + |L_3| \leq k. \quad (4.7)$$

Oznaczmy przez $a_1, \dots, a_t$ wierzchołki H_t w taki sposób, że $d_{H_t}(a_i) = l_{t-i+1}$. Niech $A(t, k)$ będzie uporządkowanym grafem uzyskanym z H_t przez dodanie nowych wierzchołków a_0 oraz a_{t+1} , krawędzi $a_0 a_i$ dla każdego $i \in [1, |L_2| + |L_3|]$ oraz krawędzi $a_j a_{t+1}$ dla każdego $j \in [|L_3| + 1, |L|]$. Oczywiście $d_{A(t,k)}(a_0) + d_{A(t,k)}(a_{t+1}) = |L_3| + 2|L_2| + |L_1| = \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil + 2 \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor \geq t + 1$. Stąd warunek (a1) jest spełniony.

Korzystając z faktów, że $t = |L|$ oraz każdy element $[1, \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor]$ jest obecny na liście L_1 lub L_3 otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \{d_{A(t,k)}(a_i) : i \in [1, |L_3|] \cup [|L_2| + |L_3| + 1, |L|]\} \\ &= \{d_{H_t}(a_i) + 1 : i \in [1, |L_3|] \cup [|L_2| + |L_3| + 1, |L|]\} \\ &= \{l_j + 1 : j \in [1, |L_1|] \cup [|L_1| + |L_2| + 1, |L|]\} \\ &= [1, \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor + 1]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

i podobnie

$$\begin{aligned}
& \{d_{A(t,k)}(a_i) : i \in [|L_3| + 1, |L_2| + |L_3|]\} \\
&= \{d_{H_t}(a_i) + 2 : i \in [|L_3| + 1, |L_2| + |L_3|]\} \\
&= \{l_{t-i+1} + 2 : i \in [|L_3| + 1, |L_2| + |L_3|]\} \\
&= \left[\left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor + 2, t\right].
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Z (4.8) oraz (4.9) wiemy, że warunek (a2) jest spełniony.

Skoro $A(t, k)$ w tym przypadku nie ma pół-krawędzi, to (a3) oraz (a4) są spełnione i $\ell = 0$. Warunki (a5) oraz (a6) są spełnione z powodu faktu 72 i (4.7).

Stąd, $A(t, k)$ spełnia warunki (a1)–(a6) oraz z lematu 68 mamy, że $\text{lir}(C_{p(t+1)+q(t+2)}^k) = 2$ dla każdych nieujemnych liczb całkowitych p oraz q takich, że $p + q \geq 2$.

4.3.4 Dowód lematu 70

Niech H_t będzie niespójnym antyregularnym grafem rzędu t oraz niech M_t będzie multizbiorem stopni wierzchołków H_t , czyli $M_t = \{0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor, \dots, t-2\}$. Ponadto, niech

$$\begin{aligned}
s_1 &= t + \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor - 2k + 1, \\
s_2 &= k - \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor, \\
s_3 &= 2k - 1 - t, \\
s_4 &= k - 1 - \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że s_1 jest nieujemną, a s_2, s_3 oraz s_4 są dodatnimi liczbami całkowitymi, ponieważ $\frac{4k-1}{3} \leq t \leq \frac{8k-5}{5}$. Stąd, $s_4 - 1$ jest nieujemna i może reprezentować długość listy w dalszej części dowodu.

Niech lista L i jej podlisty L_1, L_2, L_3, L_4 oraz L_5 będą zdefiniowane w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
L = & \underbrace{\left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor + s_1 - 1}_{L_1}, \underbrace{\left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor - (s_2 - 1)}_{L_2}, \underbrace{\left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor + s_1, \dots, t - 2}_{L_3}, \\
& \underbrace{\left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor - s_2, \dots, \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor - s_2 - (s_4 - 2), 0}_{L_4}, \underbrace{\left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor - s_2 - (s_4 - 1), \dots, 1}_{L_5}.
\end{aligned}$$

Stąd $L = L_1 L_2 L_3 L_4 0 L_5$, $L_1 L_3$ jest listą wszystkich liczb całkowitych z przedziału $\left[\left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor, t-2\right]$ wymienionych w porządku rosnącym i $L_2 L_4 L_5$ jest listą wszystkich liczb całkowitych z przedziału $\left[1, \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor\right]$ wymienionych w porządku malejącym. Co więcej, $|L_1| = |L_5| = s_1$, $|L_2| = s_2$, $|L_3| = s_3$, $|L_4| = s_4 - 1$ oraz $|L| = 2s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = t$.

Przez l_i oznaczamy i -ty element listy L dla $i \in [1, |L|]$.

Fakt 74. $|i - j| \leq k$ gdy $l_i + l_j \geq t - 1$. Co więcej, jeśli $l_i \notin L_5$ oraz $L_j \in L_5$, to $j - i \leq k - 1$.

Dowód. Zauważmy, że suma każdych dwóch elementów z listy $L_2 L_4 L_5$ jest mniejsza niż $t - 1$. Stąd, wystarczy udowodnić fakt w przypadku gdy $l_i \in L_1 L_3$.

Najpierw przypuśćmy, że $l_i \in L_3$, czyli $i \in [s_1 + s_2 + 1, s_1 + s_2 + s_3]$. Niech $j \in [1, |L|] \setminus \{i\}$. Oczywiście, jeśli $j < i$, to $|i - j| \leq s_1 + s_2 + s_3 - 1 = k - 1$. Podobnie, jeśli $j > i$, to $|i - j| \leq |L| - (s_1 + s_2 + 1) = s_1 + s_3 + s_4 - 1 = k - 2$. Stąd w obu przypadkach $|i - j| \leq k - 1$.

Przypuśćmy zatem, że $l_i \in L_1$, czyli $i \in [1, s_1]$. Niech $j \in [1, |L|] \setminus \{i\}$ będzie takie, że $l_i + l_j \geq t - 1$. Jeśli $l_j \geq \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor$, to oczywiście $|i - j| \leq s_1 + s_2 + s_3 - 1 = k - 1$. Zatem w dalszej części założmy, że $l_j < \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor$.

Skoro $l_i \in L_1$, to mamy $l_i = \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor + i - 1$. Rozważmy teraz największe j takie, że $l_j < \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor$ oraz $l_i + l_j \geq t - 1$. Oczywiście, ponieważ $L_2 L_4 L_5$ jest listą elementów z $\left[1, \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor\right]$ ułożonych w porządku malejącym, to mamy $l_j = t - 1 - l_i = \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor - i + 1$. Z początkowego założenia $t \leq \frac{8k-5}{5}$ wynika, że suma ostatniego elementu listy L_1 , $\left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor + s_1 - 1$, i pierwszego elementu listy L_5 , $\left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor - s_2 - s_4 + 1$, jest mniejsza niż $t - 1$. Stąd $j \leq t - s_1 - 1$, czyli $l_j \in L_2 L_4$.

Zauważmy, że po elemencie l_j wszystkie nieujemne liczby całkowite mniejsze niż l_j znajdują się na liście L , ponadto mogą, ale nie muszą, być liczby całkowite większe od l_j , mianowicie jeśli $l_j \in L_2$. W każdym przypadku dla j mamy $j \leq t - l_j = \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor + i$, a w konsekwencji $|i - j| = j - i \leq \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor \leq k$. To kończy dowód faktu. $\square$

Teraz rozważmy uporządkowanie wierzchołków $a_1, \dots, a_t$ grafu H_t zadane przez listę jego stopni L . Dwa wierzchołki H_t są sąsiednie jeśli suma ich stopni jest co najmniej $t - 1$. Niech $A(t, k)$ będzie uporządkowanym „grafem” uzyskanym z H_t przez:

- dodanie wierzchołków a_0 oraz a_{t+1} ,

- dodanie krawędzi a_0a_i dla każdego $i \in [1, s_1 + s_2 + s_3]$,
- dodanie krawędzi a_ia_{t+1} dla każdego $i \in [s_1 + s_2 + 1, s_1 + s_2 + s_3 + s_4]$,
- dodanie pół-krawędzi incydentnych z a_i dla każdego $i \in [1, s_1] \cup [s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + 1, t]$.

Twierdzimy, że $A(t, k)$ spełnia warunki (a1)–(a6).

Oczywiście, $d_{A(t, k)}(a_0) + d_{A(t, k)}(a_{t+1}) = (s_1 + s_2 + s_3) + (s_3 + s_4) \geq t + 1$, a więc (a1) zachodzi.

Zauważmy, że $a_{s_1+s_2+s_3+s_4}$ jest wierzchołkiem stopnia zero w H_t , a zatem jest wierzchołkiem stopnia jeden w $A(t, k)$, ponieważ żadna pół-krawędź i tylko jedna krawędź, a mianowicie $a_{s_1+s_2+s_3+s_4}a_{t+1}$, jest incydentna z $a_{s_1+s_2+s_3+s_4}$ w $A(t, k)$.

Niech L' będzie listą stopni wierzchołków $A(t, k)$ w kolejności zadanej przez uporządkowanie wierzchołków $A(t, k)$. Co więcej, niech $L'_0, L'_1, L'_2, L'_3, L'_4, L'_5$ oraz L'_6 będą podlistami L' o długościach odpowiednio 1, s_1 , s_2 , s_3 , $s_4 - 1$, s_1 oraz 1 takimi, że

$$L' = L'_0L'_1L'_2L'_3L'_4L'_5L'_6.$$

Aby pokazać, że warunek (a2) zachodzi dla $A(t, k)$, to wystarczy pokazać, że $L'_1L'_2L'_3L'_4L'_5$ składa się ze wszystkich liczb całkowitych z przedziału $[1, t]$. Oczywiście $|L'_1L'_2L'_3L'_4L'_5| = |L| = t$. Oznaczamy przez l'_i i -ty element listy L' . Z konstrukcji $A(t, k)$ wynika następująca obserwacja:

$$l'_i = \begin{cases} l_i + 2 & \text{jeśli } i \in [1, s_1] \cup [s_1 + s_2 + 1, s_1 + s_2 + s_3], \\ l_i + 1 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (4.10)$$

Korzystając z (4.10) oraz faktu, że L_1L_3 składa się ze wszystkich elementów $[\lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor, t-2]$ otrzymujemy, że $L'_1L'_3$ składa się ze wszystkich elementów $[\lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor + 2, t]$. Podobnie $L'_2L'_4L'_5$ składa się ze wszystkich elementów $[2, \lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor + 1]$, a w konsekwencji $L'_1L'_2L'_3L'_4L'_5$ składa się ze wszystkich elementów $[1, t]$. Skoro $|L'| = t$, każdy element $[1, t]$ występuje dokładnie raz na liście L' , to zatem (a2) zachodzi dla $A(t, k)$.

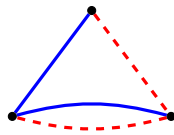
Jest jasne z definicji $A(t, k)$, że warunek (a3) zachodzi. Co więcej warunek (a4) zachodzi, ponieważ pół-krawędzie są incydentne tylko z wierzchołkami ze zbioru $\{a_i : i \in [1, s_1] \cup [s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + 1, t]\}$, i $t - (s_1 + s_2 + s_3 + s_4) = s_1 \leq \frac{3}{2}t - 2k + 1 \leq \frac{t-1}{4} \leq \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$ dla $t \leq \frac{8k-5}{5}$.

Z faktu 74 i faktu, że jeśli a_0a_i oraz a_ia_{t+1} są krawędziami $A(t, k)$, to $i \leq s_1 + s_2 + s_3 = k$ oraz $j \geq s_1 + s_2 + 1 = t - k + 2$ wynika, że zachodzą warunki (a5) oraz (a6). Zatem $A(t, k)$ spełnia wszystkie warunki (a1)–(a6). Następnie rezultat wynika bezpośrednio z lematu 68.

4.4 Dalsze uwagi

Hipoteza o lokalnej nieregularności grafów mówi, że lokalnie nieregularny indeks chromatyczny dowolnego grafu spójnego jest co najwyżej trzy z wyjątkiem grafów z rodziny $\mathfrak{T}'$, które nie mają lokalnie nieregularnego kolorowania i pojedynczego kaktusa, który ma lokalnie nieregularne kolorowanie czterema kolorami, ale nie ma takiego kolorowania za pomocą mniejszej liczby kolorów. Zainspirowani rezultatami dotyczącymi różnych klas grafów, dla których została wyznaczona dokładna wartość lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego i standardową hipotezą $(2, 2)$ sformułowaliśmy problem wyznaczania $\mathcal{D}_{\text{lir}}(G)$ (zobacz problem 53). Ten nowy parametr jest w pewnym sensie miarą „jak daleko są grafy od posiadania lokalnie nieregularnego kolorowania dwoma kolorami”. W naszym problemie 53 zapytaliśmy jaka jest minimalna liczba krawędzi jaką musimy podwoić, aby otrzymany multigraf miał lokalnie nieregularne kolorowanie dwoma kolorami, bez multikrawędzi w obu kolorach. Taka definicja sprawia, że ten nowy problem jest blisko związany ze standardową hipotezą $(2, 2)$.

Jednakże, gdy rozważamy lokalnie nieregularne kolorowania multigrafów wydaje się dość naturalnym pomijać warunek zabraniający multikrawędzi w obu kolorach, jak to czyniliśmy w rozdziale 2. Takie podejście prowadzi do sformułowania problemu 54. Wówczas możemy pokolorować multikrawędź jednym lub dwoma kolorami. Stąd $\mathcal{D}'_{\text{lir}}(G) \leq \mathcal{D}_{\text{lir}}(G)$ i jak w przypadku $\mathcal{D}_{\text{lir}}(G)$ parametr $\mathcal{D}'_{\text{lir}}(G) \geq 1$ gdy $\text{lir}(G) > 2$ lub G nie ma lokalnie nieregularnego kolorowania. Zauważmy, że w sformułowaniu problemu 53, oprócz K_2 , również K_3 musiał zostać wykluczony, ponieważ nie jest możliwe podwojenie pewnych krawędzi K_3 i znalezienie lokalnie nieregulowanego kolorowania dwoma kolorami otrzymanego multigrafu, w którym multikrawędzie mają ten sam kolor. Jednakże w przypadku problemu 54 taki wyjątek dla K_3 nie jest potrzebny, zobacz rysunek 4.7. Co więcej, jeśli hipoteza o lokalnej niere-



Rysunek 4.7: $\mathcal{D}'_{\text{lir}}(K_3) = 1$.

gularności 2-multigrafów jest prawdziwa to problem 54 ma rozwiązanie dla każdego grafu spójnego oprócz K_2 .

Jeśli $\mathcal{D}_{\text{lir}}(G) = 1$ to mamy, że $\mathcal{D}'_{\text{lir}}(G) = 1$. Podobnie, jeśli $\text{lir}(G) \leq 2$ to $\mathcal{D}_{\text{lir}}(G) = 0$. Stąd problem 54 jest w pełni rozwiązany (lub $\mathcal{D}'_{\text{lir}}(G)$ jest ograniczony z góry przez jeden) dla każdego grafu, dla którego pokazaliśmy,

że ma lokalnie nieregularny indeks chromatyczny co najwyżej dwa, większości grafów pełnych, ścieżek, pewnych cykli, drzew i grafów rozdzielnych, które nie są grafami pełnymi. Reszta klas grafów pozostaje wciąż otwarta.

W szczególności dla grafów pełnych istnieje jedynie pięć otwartych przypadków, stąd prawdopodobnie rozwiązanie dla nich można uzyskać stosując podobną metodę (wykorzystując program komputerowy), jak to miało miejsce aby pokazać, że $\mathcal{D}_{\text{lir}}(K_n) \geq 2$ dla $n \in \{6, \dots, 10\}$.

Zauważmy również, że dowód wniosku 62 pozostałby prawie niezmieniony w przypadku $\mathcal{D}'_{\text{lir}}(G)$, ponieważ podwojona krawędź jest potrzebna na rozwiązywanie trójkątów w grafach z rodziny $\mathfrak{T}$ niezależnie od tego, którą z wersji problemu rozważamy. Daje to nam również pogląd na zapewnienie ograniczenia $\mathcal{D}'_{\text{lir}}(G)$ dla grafu $G \in \mathfrak{T}^*$ podobnego do twierdzenia 60.

Rozdział 5

Lokalna nieregularność digrafów

Wszystkie wyniki tego rozdziału pochodzą z pracy [I. Grzelec, A. Onderko, M. Woźniak, *Weak and strong local irregularity of digraphs*, arXiv [33]].

W tym rozdziale rozważymy analogie pojęć lokalnej nieregularności grafów i rozkładów na podgrafy lokalnie nieregularne dla digrafów. Zaczniemy od przedstawienia podstawowych definicji związanych z digrafami.

Digrafem (*grafem skierowanym*) nazywamy parę $D = (V, E)$, gdzie V jest niepustym zbiorem skończonym, a E jest zbiorem uporządkowanych par $(u, v) \in V \times V$, który jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $V \times V$. Elementy zbioru V nazywamy *wierzchołkami*, a elementy zbioru E *łukami*. Często dla podkreślenia jaki digraf opisujemy, będziemy używać oznaczenia $V(D)$ oraz $E(D)$ odpowiednio dla zbiorów wierzchołków i łuków digrafu D . Zauważymy, że w digrafie D pomiędzy dwoma wierzchołkami u, v możemy mieć dwa łuki w przeciwnych kierunkach, czyli uv (łuk *wychodzący* z wierzchołka u) oraz vu (łuk *wchodzący* do wierzchołka u). Przez *orientację* grafu G rozumiemy rozumiemy digraf D uzyskany z G przez nadanie każdej krawędzi $uv \in E(G)$ jednej z dwóch możliwych orientacji czyli uv lub vu . Taki digraf D bywa też nazywany *grafem zorientowanym*. W digrafie D dla dowolnego wierzchołka $v \in V(D)$ będziemy oznaczać przez $d^+(v)$ *stopień wychodzący*, czyli liczbę wychodzących łuków z v , a przez $d^-(v)$ *stopień wchodzący*, czyli liczbę wchodzących łuków do wierzchołka v .

Problem lokalnej nieregularności grafów i rozkładu grafu na podgrafy lokalnie nieregularne został dokładnie omówiony w rozdziale 1, dlatego od razu przejdziemy do analogii dla digrafów. Istnieje kilka sposobów na uogólnienie koncepcji lokalnie nieregularnych rozkładów w odniesieniu do grafów zorientowanych i digrafów.

Na początku wprowadzimy notację, której będziemy używać aby rozróż-

nić dotychczas rozważane koncepcje lokalnej nieregularności dla digrafów. Dla $a, b \in \{+, -\}$ mówimy, że digraf D jest (a, b) -lokalnie nieregularny, jeśli dla każdego łuku $uv \in E(D)$ mamy $d^a(u) \neq d^b(v)$. Na przykład dla $a = +$ oraz $b = -$ mówimy, że digraf D jest $(+, -)$ -lokalnie nieregularny, jeśli stopień wychodzący wierzchołka u jest różny od stopnia wchodzącego wierzchołka v dla każdego łuku uv w D . Definicja (a, b) -lokalnie nieregularnego digrafu, dla $a, b \in \{+, -\}$, pozwala nam w naturalny sposób zdefiniować (a, b) -lokalnie nieregularne kolorowanie jako kolorowanie łuków, w którym każdy kolor indukuje (a, b) -lokalnie nieregularny digraf. Przez (a, b) -lokalnie nieregularny indeks chromatyczny digrafu D , oznaczany przez $\text{lir}^{(a,b)}(D)$, rozumiemy minimalną liczbę kolorów w (a, b) -lokalnie nieregularnym kolorowaniu D .

Łatwo zauważyć, że $(-, -)$ -lokalnie nieregularne kolorowanie i $(+, +)$ -lokalnie nieregularne kolorowanie digrafu D są analogicznymi pojęciami, ponieważ $(-, -)$ -lokalnie nieregularny rozkład D daje nam $(+, +)$ -lokalnie nieregularny rozkład digrafu uzyskanego z D przez odwrócenie orientacji każdego łuku, i odwrotnie. Stąd wszystkie wspomniane wyniki dotyczące $(+, +)$ -lokalnie nieregularnego kolorowania mogą być również postrzegane jako wyniki dotyczące $(-, -)$ -lokalnie nieregularnego kolorowania.

$(+, +)$ -lokalnie nieregularne kolorowanie digrafów zostało zainspirowane przez kolorowanie łuków rozróżniające sąsiednie wierzchołki sumami wprowadzone przez Baudona, Bensmaila i Sopenę w [6]. Mówimy, że kolorowanie łuków jest *rozróżniające sąsiednie wierzchołki sumami*, jeśli każde dwa sąsiednie wierzchołki mają różne sumy kolorów wychodzących łuków. Autorzy w [6] udowodnili, że każdy zorientowany graf D ma kolorowanie łuków rozróżniające sąsiednie wierzchołki za pomocą co najwyżej trzech kolorów.

Bensmail i Renault w [20] zaobserwowali, że nie ma digrafów, które nie są $(+, +)$ -lokalnie nieregularnie kolorowalne i postawili następującą hipotezę.

Hipoteza 75 (Bensmail, Renault, [20]). *Każdy zorientowany graf D spełnia $\text{lir}^{(+,+)}(D) \leq 3$.*

Ponadto udowodnili, że zdecydowanie, czy dla danego grafu zorientowanego D zachodzi $\text{lir}^{(+,+)}(D) \leq 2$ jest problemem NP-zupełnym i pokazali, iż $\text{lir}^{(+,+)}(D) \leq 6$ dla każdego zorientowanego grafu D . W [10] ograniczenie górne dla $\text{lir}^{(+,+)}(D)$ zostało obniżone do pięciu dla dowolnego digrafu D .

Ostatnio $(+, -)$ -lokalnie nieregularne kolorowanie digrafów zostało wprowadzone przez Bensmaila, Filasto, Hocquarda i Marcille w [15]. Inspiracją tego lokalnie nieregularnego kolorowania digrafów był rezultat Barne, Bensmaila, Przybyły i Woźniak z [4], który mówi, że każdy digraf D bez łuku uv spełniającego $d^+(u) = d^-(v) = 1$ ma kolorowanie łuków za pomocą kolorów ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ takie, że dla każdego łuku uv w D suma kolorów wychodzących łuków z u jest różna od sumy kolorów wchodzących łuków

do v (rozdzielanie wierzchołków à la Łuczak). Bensmail, Filasto, Hocquard i Marcille zaobserwowali, że tylko digrafy, które zawierają (zorientowaną) ścieżkę ze źródła (wierzchołka, incydentnego jedynie z wychodzącymi łukami) do ujścia (wierzchołka, incydentnego tylko z wchodzącymi łukami) nie mają $(+, -)$ -lokalnie nieregularnego kolorowania i postawili następującą hipotezę.

Hipoteza 76 (Bensmail, Filasto, Hocquard, Marcille, [15]). *Każdy digraf D bez ścieżki ze źródła do ujścia spełnia $\text{lir}^{(+,-)}(D) \leq 3$.*

Autorzy udowodnili również ograniczenie górne przez stałą równą siedem dla $(+, -)$ -lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego dowolnego digrafu, który nie zawiera ścieżki źródło-ujście. Dodatkowo poczynili kilka uwag odnośnie $(-, +)$ -lokalnie nieregularnego kolorowania digrafów.

W tym rozdziale przedstawimy dwie nowe koncepcje lokalnej nieregularności digrafów i odpowiednich problemów kolorowania. Pierwsza z nich jest oparta na rozróżnianiu sąsiadów przez pary złożone ze stopnia wychodzącego i stopnia wchodzącego. Taki warunek jest osłabieniem warunku, że stopnie wychodzące (lub stopnie wchodzące) dwóch sąsiednich wierzchołków są różne (występującego w definicji $(+, +)$ -lokalnie nieregularnego rozkładu i kolorowania). W związku z tym używamy pojęć *słabe lokalnie nieregularne kolorowanie*, czy *słaby lokalnie nieregularny rozkład*. Stawiamy hipotezę, że dwa kolory są wystarczające do słabego lokalnie nieregularnego kolorowania dowolnego digrafu, co sugeruje, że takie osłabienie $(+, +)$ -lokalnej nieregularności skutkuje potrzebą użycia mniejszej liczby kolorów w ogólnym przypadku (zobacz hipoteza 3.1 w [10], która mówi, że $\text{lir}^{(+,+)}(D) \leq 3$ dla każdego digrafu D). W podrozdziale 1 poprzemy hipotezę odnośnie słabego lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego kilkoma nowymi wynikami.

W przypadku drugiego typu lokalnej nieregularności, który jest badany w tym rozdziale, używamy zbalansowanych stopni jako czynnika rozróżniającego sąsiednie wierzchołki. *Zbalansowany stopień* wierzchołka x w digrafie D , oznaczany przez $\sigma(x)$, jest różnicą pomiędzy stopniem wychodzącym wierzchołka x , a jego stopniem wchodzącym, czyli $\sigma(x) = d^+(x) - d^-(x)$. Inspiracją do użycia zbalansowanych stopni jako czynnika rozróżniającego sąsiednie wierzchołki był wynik Borowieckiego, Pilśniak i Grytczuka z [24], który mówi, że każdy digraf D ma kolorowanie łuków za pomocą kolorów ze zbioru $\{1, 2\}$ takie, że każde dwa sąsiednie wierzchołki w D mają różne wartości parametru zdefiniowanego dla każdego wierzchołka jako suma kolorów wychodzących łuków minus suma kolorów wchodzących łuków. Zauważmy, że dla łuku xy warunek $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ jest bardziej restrykcyjny, niż warunek $(d^+(x), d^-(x)) \neq (d^+(y), d^-(y))$. Oczywiście pierwszy z tych

warunków implikuje drugi, ale implikacja w odwrotną stronę nie jest prawdziwa. Jednak nie jest prawdą, że warunek $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ dla każdego łuku xy w digrafie D wzmacnia warunek $(+, +)$ -lokalnej nieregularności. Zatem odpowiadające koncepcje kolorowania, silnie lokalnie nieregularne kolorowanie i $(+, +)$ -lokalnie nieregularne kolorowanie, są ogólnie nieporównywalne. Zbadamy silnie lokalnie nieregularne kolorowania w podrozdziale 2, podamy hipotezę odnośnie silnie lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego digrafu i poprzemy ją nowymi rezultatami.

5.1 Słaba lokalna nieregularność

W tym podrozdziale omówimy lokalną nieregularność w tym sensie, że pary złożone ze stopnia wychodzącego i stopnia wchodzącego dla sąsiednich wierzchołków są różne, czyli jeśli $xy \in E(D)$, to $(d^+(x), d^-(x)) \neq (d^+(y), d^-(y))$. Lokalnie nieregularne kolorowanie i lokalnie nieregularny indeks chromatyczny dowolnego digrafu D , oznaczany przez $\text{lir}(D)$, są zdefiniowane w naturalny sposób. Podobnie jak w przypadku $(+, +)$ -lokalnie nieregularnych rozkładów i kolorowań pojedynczy łuk jest lokalnie nieregularny. Zatem przypisanie unikalnego koloru do każdego łuku w digrafie daje wykonalne kolorowanie. Stąd każdy digraf posiada lokalnie nieregularne kolorowanie w tym sensie. Ogólnie rzecz biorąc ograniczenie górne dane przez $|E(D)|$ może być dalekie od optymalnego. Stawiamy następującą hipotezę popartą kilkoma rezultatami w tym podrozdziale (twierdzenia 79, 80, 85 i 94).

Hipoteza 77 (Grzelec, Onderko, Woźniak, [33]). *Każdy digraf D spełnia $\text{lir}(D) \leq 2$.*

Zauważmy, że dowolna orientacja grafu lokalnie nieregularnego daje nam słabo lokalnie nieregularny graf zorientowany, ponieważ jeśli stopnie dwóch sąsiednich wierzchołków grafu są różne, to w orientacji tego grafu albo stopnie wychodzące albo stopnie wchodzące są różne. To, w szczególności, oznacza, że jeśli hipoteza o lokalnej nieregularności grafów jest prawdziwa, to orientacja każdego grafu spójnego (oprócz specjalnego kaktusa) ma słabe lokalnie nieregularne kolorowanie za pomocą co najwyżej trzech kolorów.

Szkieletem digrafu D jest graf uzyskany z D przez zamianę każdego jego łuku na pojedynczą krawędź i dodatkowo zamianę multikrawędzi na pojedyncze krawędzie. Stąd obserwacja z poprzedniego akapitu może być sformułowana: jeśli szkielet grafu zorientowanego jest lokalnie nieregularny to graf zorientowany jest słabo lokalnie nieregularny. Jednakże lokalna nieregularność szkieletu dowolnego digrafu nie implikuje, że ten digraf jest słabo

lokalnie nieregularny. Wystarczy na przykład rozważyć digraf D o pięciu wierzchołkach i zbiorze łuków $E(D) = \{v_2v_1, v_2v_3, v_4v_2, v_4v_5, v_5v_4\}$ wraz z jego szkieletem G . Podczas gdy szkielec G jest lokalnie nieregularnym drzewem digraf D nie jest słabo lokalnie nieregularny (wierzchołki v_2 oraz v_4 są sąsiednie i mają takie same pary stopni wychodzących i wchodzących).

Biorąc pod uwagę obecny stan wiedzy, hipoteza 3 jest daleka od udowodnienia dla dowolnego grafu. Jednakże związek pomiędzy słabą lokalną nieregularnością a $(+, +)$ -lokalną nieregularnością digrafów (ta druga jest szczególnym przypadkiem pierwszej) powoduje, że każde górne ograniczenie na $\text{lir}^{(+,+)}(D)$ jest również ograniczeniem górnym słabego lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego D . Zatem z rezultatu Baudona i in. w [10], który mówi, że $\text{lir}^{(+,+)}(D) \leq 5$ dla każdego digrafu D otrzymujemy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 78 ([33]). *Dla każdego digrafu D mamy $\text{lir}(D) \leq 5$.*

W dalszej części podrozdziału poprawimy to ogólne ograniczenie górne dla wybranych klas digrafów. Rezultaty zostały podzielone na dwie oddzielne części. W pierwszej z nich zajmujemy się klasami digrafów, których szkielec ma liczbę chromatyczną (minimalną liczbę kolorów w kolorowaniu właściwym grafu) ograniczoną z góry przez stałą. W drugiej części przedstawimy rezultaty dotyczące klas digrafów, gdzie liczba chromatyczna szkieletu nie może być ograniczona z góry przez stałą.

5.1.1 Digrafy o k -dzielnym szkielecie

W tej części używamy liczby chromatycznej szkieletu G digrafu D oraz naturalnego podziału $V(G)$ na $\chi(G)$ zbiorów niezależnych jako podstawy schematu kolorowania, zgodnie z którym można pokolorować łuki D w celu uzyskania słabego lokalnie nieregularnego kolorowania D . Zaczynamy od digrafów, których szkielety są dwudzielne lub trójdzielne, czyli których szkielety mają liczbę chromatyczną dwa lub trzy. Dla takich digrafów udowodnimy hipotezę 77.

Twierdzenie 79 ([33]). *Jeśli szkielec digrafu D jest dwudzielny, to $\text{lir}(D) \leq 2$.*

Dowód. Rozważmy podział wierzchołków szkieletu digrafu D na dwa zbiory niezależne X oraz Y . Kolorujemy każdy łuk z X do Y na czerwono i każdy łuk z Y do X na niebiesko. Niech $x \in X$ oraz $y \in Y$. Jeśli $xy \in E(D)$, to jest czerwony, wierzchołek x ma dodatni czerwony stopień wychodzący i wierzchołek y ma czerwony stopień wychodzący równy zero. Jeśli $yx \in E(D)$,

to jest niebieski, wierzchołek x ma dodatni niebieski stopień wchodzący i wierzchołek y ma niebieski stopień wchodzący równy zero. Stąd niebieskie i czerwone poddigrafy są słabo lokalnie nieregularne, a zatem takie kolorowanie jest możliwe. $\square$

Twierdzenie 80 ([33]). *Jeśli szkielet digrafu D jest trójdzielny, to $\text{lir}(D) \leq 2$.*

Dowód. Rozważmy podział wierzchołków szkieletu digrafu D na zbiory niezależne X , Y oraz Z . Kolorujemy każdy łuk z X do Y , z X do Z oraz z Y do Z na czerwono. Następnie kolorujemy pozostałe łuki, czyli z Y do X , z Z do X oraz z Z do Y na niebiesko. Pokażemy, że czerwony poddigraf jest słabo lokalnie nieregularny (analogiczne argumenty działają dla niebieskiego poddigrafu).

Rozważamy krawędź xy z X do Y . Oczywiście w czerwonym poddigrafie D mamy $d^-(x) = 0$ oraz $d^-(y) \geq 1$, a więc warunek lokalnej nieregularności zachodzi dla łuku xy . Przypuśćmy, że xz jest łukiem z X do Z . Podobnie jak w poprzednim przypadku w czerwonym poddigrafie D mamy $d^+(y) \geq 1$ oraz $d^+(z) = 0$. Jeśli yz jest łukiem z Y do Z , to w czerwonym poddigrafie D mamy $d^+(y) \geq 1$ oraz $d^+(z) = 0$. Zatem w czerwony poddigraf D jest słabo lokalnie nieregularny. $\square$

Z twierdzenia 79, twierdzenia 80 i podstawowych faktów odnośnie liczby chromatycznej grafów możemy zaobserwować, że hipoteza 77 zachodzi dla digrafów, których szkielety są ścieżkami, cyklami, drzewami, grafami unicyklicznymi, kaktusami (również tymi, które nie mają lokalnie nieregularnego kolorowania) lub grafami zewnętrźnie planarnymi.

Zauważmy, że wszystkie digrafy, których szkieletem jest K_4 mają słabe lokalnie nieregularne kolorowanie za pomocą dwóch kolorów. Aby udowodnić tę prostą obserwację wystarczy rozważyć dwa przypadki. W pierwszym przypadku digraf jest turniejem o czterech wierzchołkach. Wówczas ta obserwacja będzie bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 85, które udowodnimy później. W drugim przypadku taki digraf o czterech wierzchołkach ma co najmniej jedną parę łuków w obu kierunkach. W tym przypadku tworzymy z digrafu D multigraf M zamieniając wszystkie łuki na krawędzie (łuki idące w obu kierunkach zamieniamy na dwie równoległe krawędzie). Następnie możemy łatwo sprawdzić, że każdy taki multigraf o czterech wierzchołkach ma lokalnie nieregularne kolorowanie za pomocą dwóch kolorów, gdzie multikrawędzie mogą być pokolorowane dwoma kolorami (w sumie musimy sprawdzić 13 multigrafów). Oczywiście takie samo kolorowanie wyjściowego digrafu jest również słabo lokalnie nieregularne. Skoro digraf, którego szkieletem jest K_4 może być łatwo pokolorowany dwoma kolorami tak, że monochromatyczne

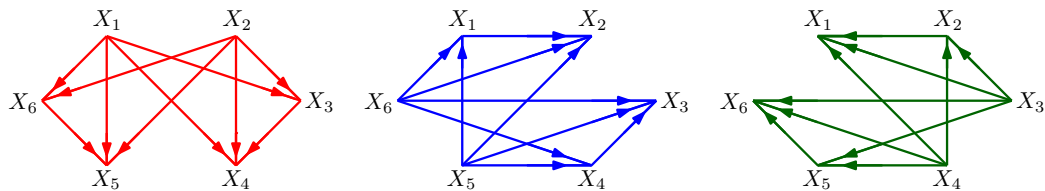
poddigrafy są słabo lokalnie nieregularne i K_4 jest jedynym grafem subkubicznym o liczbie chromatycznej większej niż trzy, to otrzymujemy, że **hipoteza 77 jest również prawdziwa dla digrafów, których szkielety są subkubiczne**.

Teraz uogólnimy metodę z dowodu twierdzenia 79 oraz twierdzenia 80 i udowodnimy, że w przypadku digrafów, których szkielet ma liczbę chromatyczną co najwyżej sześć, trzy kolory są wystarczające do słabego lokalnie nieregularnego kolorowania.

Zauważmy, że ta metoda z większą liczbą kolorów może być użyta do udowodnienia górnego ograniczenia dla digrafu, którego szkielet jest k -dzielny, dla dowolnego k . Jednakże w przypadku większych k górne ograniczenie jest bardziej oddalone od postulowanej wartości dwa i jest większe niż ogólne organicznie górne wynoszące pięć (patrz twierdzenie 78), co czyni tę metodę bezużyteczną do udowodnienia kolejnych nowych rezultatów.

Twierdzenie 81 ([33]). *Niech G będzie szkieletem digrafu D . Jeśli $\chi(G) \leq 6$, to $\text{lir}(D) \leq 3$.*

Dowód. Załóżmy, że $\chi(G) = 6$. Przypadkami gdy $\chi(G) \in \{4, 5\}$ zajmijmy się później. Oznaczmy podział $V(G)$ na zbiry niezależne przez $X_1, \dots, X_6$. Używamy schematu kolorowania przedstawionego na rysunku 5.1, co oznacza na przykład, że każdy łuk z X_1 do X_3 jest czerwony, każdy łuk z X_3 do X_1 jest zielony itd. Pokażemy, że taki schemat kolorowania daje nam trzy monochromatyczne słabo lokalnie nieregularne poddigrafy D .



Rysunek 5.1: Schemat słabego lokalnie nieregularnego rozkładu digrafu, którego szkielet jest 6-dzielny.

W przypadku czerwonego poddigrafu nazywamy wierzchołki z $X_1 \cup X_2$ biednymi, wierzchołki z $X_3 \cup X_6$ średnimi, a wierzchołki z $X_4 \cup X_5$ bogatymi. Oczywiście stopień wchodzący każdego biednego wierzchołka jest zero, podczas gdy stopień wychodzący każdego bogatego wierzchołka jest zero. Jest to niezależne od wyglądu oryginalnego digrafu D . Ponadto żaden łuk w czerwonym poddigrafie nie łączy dwóch biednych, dwóch średnich lub dwóch bogatych wierzchołków. Z tych prostych obserwacji wynika, że warunek lokalnej nieregularności jest spełniony dla każdego łuku xy z czerwonego poddigrafu:

jeśli x jest bogaty, a y średni lub bogaty, to $d^-(x) = 0$ oraz $d^-(y) \geq 1$, a jeśli x jest średni, a y bogaty, to $d^+(x) \geq 1$ oraz $d^+(y) = 0$.

Stąd czerwony poddigraf jest zawsze słabo lokalnie nieregularny. To samo zachodzi również dla niebieskiego i zielonego poddigrafu (wystarczy po prostu odpowiednio zamienić rolami zbiory niezależne $X_1, \dots, X_6$). Tak więc, aby udowodnić, że daje to słaby lokalnie nieregularny rozkład D , pozostaje pokazać, że każdy łuk D jest pokolorowany jednym z trzech możliwych kolorów. Łatwo to zauważyć, ponieważ schemat kolorowania na rysunku 5.1 jest rozkładem digrafu symetrycznego o szkielecie będącym grafem pełnym o sześciu wierzchołkach.

Jeśli $\chi(G) \in \{4, 5\}$, to wystarczy usunąć wierzchołki X_4 oraz X_5 lub tylko wierzchołek X_5 z digrafów przedstawionych na rysunku 5.1. Uzyskane digrafy definiują schemat kolorowania, który daje nam trzy słabo lokalnie nieregularne poddigrafy. $\square$

Z powyższego twierdzenia i znanego twierdzenia o czterech kolorach natychmiast otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 82. *Jeśli szkielet digrafu D jest planarny, to $\text{lir}(D) \leq 3$.*

Następujący lemat jest szczególnie przydatny do udowodnienia górnego ograniczenia dla grafów k -dzielnych, $k \in \{7, 8, 9\}$, korzystając z twierdzenia 80.

Lemat 83 ([33]). *Niech G będzie grafem o $\chi(G) = k$. Wówczas G możemy zapisać jako krawędziowo rozłączną sumę $\lceil \log_p k \rceil$ grafów p -dzielnych.*

Dowód. Niech $l = \lceil \log_p k \rceil$. Wówczas $k \leq p^l$. Korzystając z indukcji ze względu na l pokażemy, że graf G jest sumą l grafów p -dzielnych.

Dla $l = 1$ jest to oczywiste. Dla $l > 1$, bierzemy podział $V_1, \dots, V_k$ wierzchołków ze zbioru $V(G)$ zadany przez właściwe kolorowanie wierzchołków grafu G za pomocą k kolorów. Dzielimy te zbiory niezależne wierzchołków na p grup, każdą mającą co najwyżej $\lceil k/p \rceil$ zbiorów. Formalnie $S_i = V_{(i-1)\lceil k/p \rceil + 1} \cup \dots \cup V_{i\lceil k/p \rceil}$, dla każdego $i \in \{1, \dots, p-1\}$ oraz $S_p = V_{(p-1)\lceil k/p \rceil + 1} \cup \dots \cup V_k$.

Niech G_1 będzie p -dzielnym podgrafem rozpinającym utworzonym przez wzięcie wszystkich krawędzi G pomiędzy wierzchołkami z S_i oraz S_j , dla $i, j \in \{1, \dots, p\}$, $i \neq j$. Wtedy $G \setminus E(G_1)$ ma liczbę chromatyczną co najwyżej $\lceil \frac{k}{p} \rceil \leq p^{l-1}$. Stąd, z indukcji, graf $G \setminus E(G_1)$ możemy zapisać jako krawędziowo rozłączną sumę $l-1$ grafów p -dzielnych, oznaczmy je przez $G_2, \dots, G_l$. Zatem G jest sumą l grafów p -dzielnych, jak żądaliśmy. $\square$

Korzystając z poprzedniego lematu możemy zapisać graf k -dzielny, dla $k \leq 9$, jako krawędziowo rozłączną sumę co najwyżej dwóch grafów trójdzielnych. Z twierdzenia 80 wynika następujący rezultat.

Twierdzenie 84 ([33]). *Jeśli szkielet digrafu D jest k -dzielny dla pewnego $k \in \{7, 8, 9\}$, to $\text{lir}(D) \leq 4$.*

5.1.2 Klasy digrafów bez ograniczenia przez stałą na liczbę chromatyczną szkieletu

W tej części przedstawimy dalsze wyniki dotyczące wartości słabego lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego digrafów ze specjalnych klas, w których liczba chromatyczna szkieletu nie jest ograniczona z góry przez stałą. Jedną z takich klas digrafów są turnieje, czyli orientacje grafów pełnych (łuki idące w obu kierunkach pomiędzy dwoma wierzchołkami nie są dozwolone). Dla turniejów pokażemy, że zachodzi hipoteza 77.

Twierdzenie 85 ([33]). *Dla każdego turnieju T_n na n wierzchołkach mamy $\text{lir}(T_n) \leq 2$.*

Dowód. Niech v_1 będzie wierzchołkiem T_n takim, że $d^+(v_1) \geq d^-(v_1)$ (taki wierzchołek istnieje, ponieważ $\sum_{v \in V(T_n)} d^+(v) = \sum_{v \in V(T)} d^-(v)$). Zatem $d^+(v_1) \geq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$. Pozostałe wierzchołki T_n oznaczamy przez $v_2, \dots, v_n$ tak, że $v_1 v_{2i}$ jest łukiem dla każdego $i \in \{1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$.

Teraz opiszemy kolorowanie szkieletu K_n turnieju T_n . Każda krawędź $v_{2i} v_j$ dla $j < 2i$ jest pokolorowana na czerwono oraz każda krawędź $v_{2i+1} v_j$ dla $j < 2i+1$ jest pokolorowana na niebiesko. Twierdzimy, że takie kolorowanie krawędzi jest prawie lokalnie nieregularnym kolorowaniem K_n , czyli jest tylko jedna krawędź K_n , mianowicie $v_1 v_2$, gdzie własność lokalnej nieregularności jest zaburzona. Aby to zobaczyć, rozważmy procedurę kolorowania, gdzie w i -tym kroku kolorujemy wszystkie łuki pomiędzy v_i i wszystkimi wierzchołkami, v_j gdzie $j < i$. Po i -tym kroku pokolorowane krawędzie indukują K_i . Przypuśćmy, że po pokolorowaniu K_{i-1} tuż przed i -tym krokiem nasze kolorowanie jest prawie lokalnie nieregularne z wyjątkiem krawędzi $v_1 v_2$ (to jest oczywiście prawdą dla $i \leq 4$). Zauważmy, że jeśli i jest parzyste, to czerwony stopień każdego wierzchołka wynosi co najwyżej $i-3$ (wszystkie krawędzie incydentne z v_{i-1} w K_{i-1} są niebieskie). Po dodaniu wierzchołka v_i i pokolorowaniu wszystkich incydentnych krawędzi z v_i na czerwono wierzchołek v_i ma czerwony stopień $i-1$, a pozostałe wierzchołki mają czerwone stopnie co najwyżej $i-2$. Co więcej czerwony stopień wszystkich wierzchołków różnych od v_i jest zwiększony o 1, co oznacza, że jedyną krawędzią, dla której warunek lokalnej nieregularności nie zachodzi jest $v_1 v_2$. Analogiczny argument (dla niebieskich stopni) zachodzi w przypadku gdy i jest nieparzyste.

Zauważmy, że w takim kolorowaniu K_n , krawędź v_1v_j jest czerwona, jeśli j jest parzyste i niebieska jeśli j jest nieparzyste. W T_n przekłada się to na kolorowanie, w którym łuk pomiędzy v_1 oraz v_j jest czerwony wtedy i tylko wtedy, gdy j jest parzyste. Stąd wszystkie czerwone łuki incydentne z v_1 w takim kolorowaniu są wychodzące z v_1 . Zatem czerwony stopień wchodzący wierzchołka v_1 jest równy zero, podczas gdy czerwony stopień wchodzący v_2 jest dodatni dzięki łukowi v_1v_2 . W związku z tym, w kolorowaniu T_n , wierzchołki v_1 oraz v_2 są rozróżniane przez ich czerwone pary stopni wychodzących i wchodzących. Dla innych par wierzchołków warunek słabej lokalnej nieregularności zachodzi, ponieważ warunek lokalnej nieregularności zachodzi dla tych wierzchołków w K_n . Co kończy dowód. $\square$

W [24] zostało udowodnione następujące twierdzenie. Wykorzystamy je do udowodnienia, że dla digrafów, których szkieletem są grafy pełne trzy kolory wystarczą do uzyskania słabego lokalnie nieregularnego kolorowania.

Twierdzenie 86 (Wniosek 1 w [24]). *Każdy graf G może być zorientowany tak, że stopnie wychodzące dowolnych dwóch sąsiednich wierzchołków są różne.*

Lemat 87 ([33]). *Niech G będzie szkieletem digrafu D . Jeśli $\text{lir}(D') \leq k$ dla każdej orientacji D' szkieletu G , to $\text{lir}(D) \leq k + 1$.*

Dowód. Niech D'' będzie poddigrafem D indukowanym przez łuki idące w obu kierunkach (czyli jeśli $xy, yx \in E(D)$, to $x, y \in V(D'')$ oraz $xy, yx \in E(D'')$). Z twierdzenia 86 mamy rozkład D'' na słabo lokalnie nieregularny digraf D''_1 i pozostały digraf D''_2 . Digraf $D' = (D \setminus D'') \cup D''_2$ jest więc orientacją G . Zatem, z założenia, mamy $\text{lir}(D') \leq k$. Używając nowego koloru dla łuków D''_1 otrzymujemy słabe lokalnie nieregularne kolorowanie D za pomocą co najwyżej $k + 1$ kolorów. $\square$

Twierdzenie 88 ([33]). *Jeśli szkielec digrafu D jest grafem pełnym, to $\text{lir}(D) \leq 3$.*

Dowód. Zauważmy, że każda orientacja D' szkieletu D jest turniejem, a więc twierdzenie 85 daje nam $\text{lir}(D') \leq 2$. Następnie rezultat wynika bezpośrednio z lematu 87. $\square$

Dla każdego grafu G o dużym minimalnym stopniu, mianowicie $\delta(G) \geq 10^{10}$, Przybyło udowodnił w [47], że $\text{lir}(G) \leq 3$. Z tego rezultatu (używając lematu 87) otrzymujemy poniższy prosty wniosek.

Wniosek 89. *Niech D będzie digrafem takim, że $d^+(v) + d^-(v) \geq 2 \cdot 10^{10}$ dla każdego wierzchołka $v \in V(D)$. Wówczas $\text{lir}(D) \leq 4$.*

Następnie przedstawimy ograniczenie górne przez stałą dla słabego lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego dowolnej orientacji grafu regularnego. W [10], aby udowodnić, że $\text{lir}^{(+,+)}(D) \leq 5$ dla każdego digrafu D , autorzy pokazali, że możemy zawsze rozłożyć digraf D na dwa acykliczne digrafy w tym jeden, który ma *malejące stopnie wychodzące*, czyli możemy oznaczyć jego wierzchołki tak, że:

1. $i \leq j$ gdy $v_i v_j$ jest łukiem oraz
2. $d^+(v_i) \geq d^+(v_j)$ dla każdego $i < j$.

Następnie udowodnili, że $\text{lir}^{(+,+)}(D) \leq 2$ gdy D jest digrafem acyklicznym o malejących stopniach wychodzących, skąd mamy poniższy wniosek.

Lemat 90 (Wniosek z lematu 3.6 z [10]). *Jeśli D jest digrafem acyklicznym o malejących stopniach wychodzących, to $\text{lir}(D) \leq 2$.*

Zauważmy, że możemy zdefiniować digraf o *rosnących stopniach wchodzących* jako digraf, którego wierzchołki możemy oznaczyć przez $v_1, \dots, v_n$ tak, że:

1. $i \leq j$ gdy $v_j v_i$ jest łukiem oraz
2. $d^-(v_i) \leq d^-(v_j)$ dla każdego $i \leq j$.

Zauważmy, że zmieniając orientację wszystkich łuków w digrafie acyklicznym o rosnących stopniach wchodzących otrzymujemy digraf acykliczny o malejących stopniach wychodzących. Stąd natychmiast otrzymujemy poniższy wniosek z lematu 90.

Wniosek 91. *Jeśli D jest digrafem acyklicznym o rosnących stopniach wchodzących, to $\text{lir}(D) \leq 2$.*

Każdy digraf D , który jest orientacją grafu regularnego możemy rozłożyć na dwa digrafy acykliczne: jeden, który ma malejące stopnie wychodzące i drugi, który ma rosnące stopnie wchodzące. Aby to udowodnić wykorzystamy metodę opisaną w [10].

Zaczynamy od wierzchołka v_1 o największym stopniu wychodzącym, a w i -tym kroku, dla $i \geq 2$, bierzemy wierzchołek z $D \setminus \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ o największym stopniu wychodzącym i oznaczamy go przez v_i . Digraf D_{dec} indukowany przez wszystkie łuki $v_i v_j$ digrafu D takie, że $i \leq j$ jest acykliczny i ma malejące stopnie wychodzące. Rozważmy poddigraf D_{inc} digrafu D indukowany przez pozostałe łuki. Twierdzimy, że D_{inc} jest acykliczny i ma rosnące stopnie wchodzące. Aby pokazać, że D_{inc} jest acykliczny przypuśćmy, że jest cykl

zawarty w D_{inc} i niech v_i będzie pierwszym z pośród wszystkich wierzchołków na tym cyklu. Wszystkie łuki wychodzące z v_i do wierzchołków v_j gdzie $j > i$ są obecne w D_{dec} . W związku z tym żaden z takich łuków nie jest obecny w D_{inc} . Jeśli jednak v_i znajduje się na cyklu w D_{inc} , to powinien istnieć co najmniej jeden łuk wychodzący z v_i w D_{inc} , a więc otrzymujemy sprzeczność. Fakt, że D_{inc} ma rosnące stopnie wchodzące wynika bezpośrednio z założenia, że D jest orientacją grafu regularnego i konstrukcji D_{dec} oraz D_{inc} .

Stąd orientacja grafu regularnego może być rozłożona na dwa acykliczne poddigrafy: jeden o malejących stopniach wychodzących i drugi o rosnących stopniach wchodzących, a z lematu 90 i wniosku 91 otrzymujemy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 92 ([33]). *Dla każdego digrafu D , który jest orientacją grafu regularnego mamy $\text{lir}(D) \leq 4$.*

Digraf D nazywamy *symetrycznym* jeśli dla każdej pary wierzchołków $u, v \in V(D)$, uv jest łukiem D wtedy i tylko wtedy, gdy vu jest łukiem D . Użyjemy następującego twierdzenia, udowodnionego przez Borowieckiego, Grytczuka i Piłśniak w [24], do udowodnienia prawdziwości hipotezy 77 dla digrafów symetrycznych.

Twierdzenie 93 (Wniosek 2 w [24]). *Dowolny graf G ma orientację, w której każde dwa sąsiednie wierzchołki mają różne zbalansowane stopnie.*

Twierdzenie 94 ([33]). *Dla każdego digrafu symetrycznego D mamy $\text{lir}(D) \leq 2$.*

Dowód. Niech G będzie szkieletem D . Z twierdzenia 93 wiemy, że istnieje orientacja D' szkieletu G , w której sąsiednie wierzchołki mają różne zbalansowane stopnie. Zauważmy, że D' jest poddigrafem D oraz jeśli $d^+(u) - d^-(u) \neq d^+(v) - d^-(v)$, to $d^+(u) \neq d^+(v)$ lub $d^-(u) \neq d^-(v)$. Stąd D' jest lokalnie nieregularnym poddigrafem D .

Niech $D'' = D \setminus D'$. Zauważmy, że D'' jest również orientacją G i stopień wychodzący wierzchołka v w D'' równa się jego stopniowi wchodzącemu w D' oraz stopień wchodzący wierzchołka v w D'' równa się jego stopniowi wychodzącemu w D' . Stąd w D'' sąsiednie wierzchołki są rozróżnione za pomocą par stopni wychodzących i wchodzących. Zatem kolorowanie D , w którym wszystkie łuki D' są czerwone oraz wszystkie łuki D'' są niebieskie jest słabo lokalnie nieregularne. $\square$

5.2 Rozkładanie digrafów na silnie lokalnie nieregularne poddigrafy

W tym podrozdziale zbadamy silny wariant lokalnie nieregularnych rozkładów i kolorowań digrafów. Przypomnijmy, że digraf jest silnie lokalnie nieregularny, jeśli dla każdego jego łuku xy zbalansowane stopnie x oraz y są różne, czyli $\sigma(x) = d^+(x) - d^-(x) \neq d^+(y) - d^-(y) = \sigma(y)$. Definicje dotyczące silnie lokalnie nieregularnego kolorowania (lub dekompozycji) są analogiczne do definicji innych wariantów lokalnie nieregularnych kolorowań i rozkładów digrafów. Kolorowanie łuków digrafu jest silnie lokalnie nieregularne, jeśli każda klasa koloru indukuje silnie lokalnie nieregularny digraf. Minimalną liczbę kolorów w silnie lokalnie nieregularnym kolorowaniu digrafu D - silnie lokalnie nieregularny indeks chromatyczny D oznaczamy przez $\text{slir}(D)$.

Podobnie jak w przypadku słabej i $(+, +)$ -lokalnej nieregularności digraf składający się z pojedynczego łuku jest silnie lokalnie nieregularny. Stąd $\text{slir}(D)$ jest dobrze zdefiniowany dla każdego digrafu D i jest trywialnie ograniczony z góry przez $|E(D)|$. Jednakże, w przeciwieństwie do słabego i $(+, +)$ -lokalnie nieregularnego kolorowania nie ma bezpośredniego powiązania pomiędzy lokalnie nieregularnym indeksem chromatycznym grafu i silnie lokalnie nieregularnym indeksem chromatycznym jego orientacji. Aby to zobaczyć rozważmy gwiazdę $K_{1,3}$. Podczas gdy graf $K_{1,3}$ jest lokalnie nieregularny, jego orientacja, w której pojedyncza krawędź e jest zorientowana w kierunku centralnego wierzchołka v , a pozostałe dwie krawędzie są zorientowane od v , zawiera łuk (orientację e), którego oba końce mają zbalansowane stopnie równe jeden. Stąd, nawet udowodnienie hipotezy 3 nie implikuje, że (słabo spójne) grafy zorientowane (z wyjątkiem orientacji szczególnych kaktusów) mają silnie lokalnie nieregularny indeks chromatyczny ograniczony z góry przez trzy. Pomimo to być może następująca hipoteza jest prawdziwa.

Hipoteza 95 (Grzelec, Onderko, Woźniak [33]). *Każdy digraf D spełnia $\text{slir}(D) \leq 2$.*

W następnych dwóch częściach tego podrozdziału przedstawimy rezultaty, które wspierają hipotezę 95.

5.2.1 Proste klasy digrafów i ogólne ograniczenie górne silnie lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego digrafów

Najpierw pokażemy, że hipoteza 95 jest prawdziwa dla digrafów symetrycznych i digrafów, których szkielet jest dwudzielny oraz trójdzielny. Dowody tych rezultatów są podobne do dowodów analogicznych wyników w przypadku słabej lokalnej nieregularności, zobacz twierdzenie 79, twierdzenie 80 i twierdzenie 94.

Twierdzenie 96 ([33]). *Dla każdego digrafu symetrycznego D mamy $\text{slir}(D) \leq 2$.*

Dowód. Niech G będzie szkieletem digrafu D . Z twierdzenia 93 mamy orientację D' szkieletu G , która jest silnie lokalnie nieregularna. Digraf D' jest poddigrafem D , a usuwając wszystkie łuki D' z D otrzymujemy poddigraf D'' , gdzie $uv \in E(D'')$ wtedy i tylko wtedy, gdy $vu \in E(D')$. Stąd zbalansowany stopień wierzchołka v w D'' jest liczbą przeciwną do zbalansowanego stopnia v w D' . Zatem poddigrafy D' oraz D'' tworzą silnie lokalnie nieregularny rozkład digrafu D . $\square$

Twierdzenie 97 ([33]). *Jeśli szkielet digrafu D jest dwudzielny, to $\text{slir}(D) \leq 2$.*

Dowód. Rozważmy podział wierzchołków szkieletu digrafu D na dwa zbiory niezależne X oraz Y . Kolorujemy każdy łuk z X do Y na czerwono i każdy łuk z Y do X na niebiesko. W czerwonym poddigrafie, z wyjątkiem izolowanych wierzchołków, wierzchołki z X mają dodatnie zbalansowane stopnie, podczas gdy wierzchołki z Y mają ujemne zbalansowane stopnie. Podobnie, w niebieskim poddigrafie, nieizolowane wierzchołki z X mają ujemne zbalansowane stopnie, a nieizolowane wierzchołki z Y mają dodatnie zbalansowane stopnie. Zatem to kolorowanie jest silnie lokalnie nieregularne. $\square$

Lemat 98 ([33]). *Jeśli szkielet digrafu D jest trójdzielny, to $\text{slir}(D) \leq 3$.*

Dowód. Rozważmy podział wierzchołków szkieletu digrafu D na zbiory niezależne X , Y oraz Z . Kolorujemy wszystkie łuki wychodzące z wierzchołków X na niebiesko, wszystkie łuki wychodzące z wierzchołków Y na czerwono i wszystkie łuki wychodzące z wierzchołków Z na zielono. A więc, każdy wierzchołek z X ma nieujemny niebieski zbalansowany stopień i niedodatni czerwony oraz zielony zbalansowany stopień. Każdy wierzchołek z Y ma nieujemny czerwony zbalansowany stopień i niedodatni niebieski oraz zielony

zbalansowany stopień. Każdy wierzchołek z Z ma nieujemny zielony zbalansowany stopień i niedodatni niebieski oraz czerwony zbalansowany stopień. Co więcej, tylko wierzchołki nie incydentne do niebieskich, czerwonych lub zielonych łuków mają swoje niebieskie, czerwone lub zielone zbalansowane stopnie równe zero. Zatem to kolorowanie jest silnie lokalnie nieregularne. $\square$

Korzystając z poprzedniego lematu i lematu 83, który mówi, że graf o liczbie chromatycznej k może być zapisany jako krawędziowo-rozłączna suma $\lceil \log_p k \rceil$ grafów p -dzielnych, natychmiast otrzymujemy następujące organicznie górne silnie lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego.

Twierdzenie 99 ([33]). *Dla każdego digrafu D mamy $\text{slir}(D) \leq 3\lceil \log_3 k \rceil$, gdzie k jest liczbą chromatyczną szkieletu D .*

Jedną z klas digrafów, dla których zachodzi hipoteza 95 są *digrafy eulerowskie*, czyli digrafy w których istnieje obchód Eulera (skierowany „cykl”, który przechodzi przez wszystkie łuki). Dla digrafów eulerowskich mamy również równoważną definicję: digrafem eulerowskim jest spójny digraf (w klasie digrafów eulerowskich słaba spójność jest równoważna silnej spójności), w którym mamy $d^+(v) = d^-(v)$ dla każdego wierzchołka v . Aby udowodnić, że $\text{slir}(D) \leq 2$ dla każdego digrafu eulerowskiego D najpierw zmodyfikujemy rezultat Borowieckiego, Grytczuka i Piłśniak z [24].

Lemat 100 (Modyfikacja twierdzenia 3 w [24]). *Niech $k \geq 2$ będzie liczbą całkowitą. Dla każdego digrafu D istnieje odwzorowanie $c: E(D) \rightarrow \{1, k\}$ takie, że $\varphi: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ zdefiniowane jako $\varphi(v) = \sum_{vx \in E(D)} c(vx) - \sum_{yv \in E(D)} c(yv)$ rozróżnia sąsiadów (czyli $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ gdy $uv \in E(D)$).*

Dowód. Zaczynamy od wyjściowego układu ładunków, w którym każdy łuk D ma przypisany jeden czerwony i k niebieskich ładunków. A więc na początku nie mamy żadnych ładunków w wierzchołkach D . Przedstawiamy prostą procedurę, podczas której dodajemy kilka czerwonych ładunków i usuwamy kilka niebieskich ładunków na łukach sąsiadujących z wierzchołkiem, a następnie przesuwamy je z lub do tego wierzchołka. To przesuwanie ładunków odbywa się według dwóch prostych zasad:

- (R1) niebieskie ładunki są zawsze przesuwane zgodnie z kierunkiem łuku na którym są, podczas gdy czerwone ładunki przesuwamy przeciwnie do kierunku łuku na którym są,
- (R2) bezpośrednio przed przesunięciem ładunków z łuku do incydentnych wierzchołków albo dodajemy czerwone ładunki albo usuwamy niebieskie ładunki, tak że liczby czerwonych i niebieskich ładunków na łuku są równe.

Ponadto niech $q_B^-(v)$ będzie liczbą niebieskich ładunków w v oraz ładunków wchodzących do v i niech $q_R^+(v)$ będzie liczbą czerwonych ładunków w v i na łukach wychodzących z v . Potencjał $q(v)$ wierzchołka v jest zdefiniowany przez $q(v) = q_B^-(v) - q_R^+(v)$. Niech $D_0 = D$.

W i -tym kroku procedury dla i od 1 do n pojedynczy wierzchołek v_i jest brany z D_{i-1} tak, że $q(v_i)$ jest maksymalny możliwy. Dodajemy $k - 1$ czerwonych ładunków do każdego łuku wchodzącego do v_i oraz usuwamy $k - 1$ niebieskich ładunków do każdego łuku wychodzącego z v_i . Po tym ładunki na łukach incydentnych z v_i są przesuwane zgodnie z zasadą (R1) i ustawiamy $D_i = D_{i-1} - v_i$.

Niech $v_i v_j$ będzie łukiem D dla pewnego $i < j$. W D_{i-1} mamy $q(v_i) \geq q(v_j)$. W i -tym kroku usuwamy $k - 1$ niebieskich ładunków z $v_i v_j$ i przesuwamy pozostały jeden czerwony ładunek i jeden niebieski ładunek na tym łuku zgodnie z regułą (R1). Po tym potencjał wierzchołka v_i pozostaje niezmienny, podczas gdy potencjał v_j jest obniżony (zamiast dodawania $k - 1$ do niebieskich ładunków na $v_i v_j$ w D_{i-1} dodajemy tylko 1). Podobnie, jeśli $v_j v_i$ jest łukiem D dla pewnego $i < j$, to bezpośrednio przed i -tym krokiem mamy $q(v_i) \geq q(v_j)$. Następnie w i -tym kroku dodajemy $k - 1$ czerwonych ładunków do $v_j v_i$ i stosujemy (R1). To ponownie pozostawia potencjał v_i niezmienny i obniża potencjał v_j .

Stąd, podczas działania procedury, potencjały poszczególnych wierzchołków nie rosną, a po i -tym kroku potencjały wierzchołków z $V(D) \setminus \{v_1, \dots, v_i\}$ sąsiadujących z v_i są mniejsze niż potencjał v_i tuż przed usunięciem v_i . A więc sąsiadujące wierzchołki w D są rozróżnione przez funkcję q' , która przypisuje każdemu wierzchołkowi v_i wartość $q(v_i)$ uzyskaną bezpośrednio przed końcem i -tego kroku.

Aby uzyskać kolorowanie z q' po prostu przesuwamy wszystkie czerwone ładunki z wierzchołków z powrotem do incydentnych łuków wychodzących: dla łuku $v_i v_j$, jeśli $i < j$, to v_i wysyła czerwony ładunek do $v_i v_j$, a jeśli $i > j$, to v_j wysyła k czerwonych ładunków do $v_i v_j$. $\square$

Twierdzenie 101 ([33]). *Jeśli D jest digrafem eulerowskim, to $\text{slir}(D) \leq 2$.*

Dowód. Niech k będzie liczbą całkowitą taką, że $k > \max\{\Delta^+(D), \Delta^-(D)\}$, gdzie $\Delta^+(D)$ oraz $\Delta^-(D)$ oznaczają odpowiednio maksymalny stopień wychodzący i maksymalny stopień wchodzący w D . Dla takiego k , rozważamy odwzorowanie $c: E(D) \rightarrow \{1, k\}$ i odpowiadające mu odwzorowanie rozróżniające sąsiadów $\varphi: V(D) \rightarrow \mathbb{Z}$ z lematu 100. Dla każdego wierzchołka v w

digrafie D definiujemy:

$$\begin{aligned} r^+(v) &= |\{vx \in E(D) : \varphi(vx) = 1\}|, \\ r^-(v) &= |\{yv \in E(D) : \varphi(yv) = 1\}|, \\ b^+(v) &= |\{vx \in E(D) : \varphi(vx) = 2\}|, \\ b^-(v) &= |\{yv \in E(D) : \varphi(yv) = 2\}|. \end{aligned}$$

Ponadto, niech $r(v) = r^+(v) - r^-(v)$ oraz $b(v) = b^+(v) - b^-(v)$. Wówczas $\varphi(v) = r(v) + k \cdot b(v)$ dla każdego v .

Skoro $k > \max\{\Delta^+(D), \Delta^-(D)\}$, to mamy, że $k > |r(v)|$ oraz $k > |b(v)|$. Stąd, jeśli $\varphi(u) \neq \varphi(v)$, to $r(u) \neq r(v)$ lub $b(u) \neq b(v)$. Pokażemy, że skoro D jest eulerowski, to $r(u) \neq r(v)$ implikuje $b(u) \neq b(v)$ i odwrotnie.

Przypuśćmy, że $r(u) \neq r(v)$. Dla każdego wierzchołka x w digrafie D mamy $b(x) = b^+(x) - b^-(x) = (d^+(x) - r^+(x)) - (d^-(x) - r^-(x)) = (d^+(x) - d^-(x)) + (r^-(x) - r^+(x))$. Skoro D jest eulerowski, to $d^+(x) - d^-(x) = 0$ i otrzymujemy $b(x) = r^-(x) - r^+(x) = -r(x)$. W szczególności dla wierzchołków u oraz v otrzymujemy $b(u) = -r(u)$ oraz $b(v) = -r(v)$, co korzystając z faktu, że $r(u) \neq r(v)$ implikuje $b(u) \neq b(v)$. Implikacja $b(u) \neq b(v) \implies r(u) \neq r(v)$ jest analogiczna.

Stąd $r(u) \neq r(v)$ oraz $b(u) \neq b(v)$ dla każdego łuku uv w D . Teraz definiujemy kolorowanie łuków D w następujący sposób: każdy łuk uv jest pokolorowany na czerwono gdy $\varphi(uv) = 1$ i jest pokolorowany na niebiesko gdy $\varphi(uv) = 2$. W takim kolorowaniu zbalansowany czerwony stopień i zbalansowany niebieski stopień wierzchołka v są równe odpowiednio $r(v)$ oraz $b(v)$. Z tego co udowodniliśmy, zbalansowane stopnie w obu kolorach są różne dla każdych dwóch sąsiednich wierzchołków, co oznacza, że takie kolorowanie jest silnie lokalnie nieregularne. $\square$

5.2.2 Orientacje kaktusów

Podczas rozważania różnych wariantów lokalnie nieregularnych kolorowań i rozkładów, dość interesującą klasą grafów (lub digrafów w naszym przypadku) jest klasa kaktusów (odpowiednia klasa digrafów). Wynika to ze szczególnej pozycji kaktusów wśród wszystkich grafów, ponieważ każdy graf, który nie ma lokalnie nieregularnego rozkładu, jest kaktusem (zobacz na przykład obserwację 3.3 w [9], wniosek 26 w [51], czy twierdzenie 4 w [52]).

Zaczynamy od pewnych obserwacji odnośnie orientacji gwiazd. Przypuśćmy, że D jest orientacją gwiazdy $K_{1,k}$. Oznaczamy przez v centralny wierzchołek $K_{1,k}$, a przez a oraz b oznaczamy odpowiednio stopień wychodzący i stopień wchodzący v w D . Jeśli pokolorujemy i łuków wychodzących z v na niebiesko, j łuków wchodzących do v na niebiesko oraz pozostałe łuki na

czerwono, to uzyskamy kolorowanie, w którym niebieski zbalansowany stopień v wynosi $i - j$. Dla różnych wartości $i \in \{0, \dots, a\}$ oraz $j \in \{0, \dots, b\}$ jesteśmy w stanie uzyskać kolorowanie, gdzie niebieski zbalansowany stopień v jest dowolną liczbą całkowitą ze zbioru $\{-b, \dots, a\}$. Zauważmy, że jeśli niebieski zbalansowany stopień v wynosi x , to czerwony zbalansowany stopień v wynosi $a - b - x$. Stąd wyżej wymienione kolorowania dają $k + 1$ par możliwych niebieskich i czerwonych zbalansowanych stopni v , gdzie dowolne dwie pary różnią się zbalansowanymi niebieskimi i czerwonymi stopniami. Otrzymujemy następującą obserwację.

Obserwacja 102. *Jeśli D jest orientacją gwiazdy $K_{1,k}$, to istnieje $k + 1$ kolorowań łuków D dwoma kolorami, które tworzą elementami różne pary zbalansowanych kolorowych stopni w centralnym wierzchołku.*

Na potrzeby drugiej obserwacji rozważmy orientację D gwiazdy $K_{1,k}$. Przypuśćmy, że D nie jest lokalnie nieregularnym digrafem. To oznacza, że istnieje łuk uv taki, że $\sigma(u) = \sigma(v)$. Jednakże, skoro D jest orientacją $K_{1,k}$, to otrzymujemy, że jeden z dwóch wierzchołków u oraz v jest centralnym wierzchołkiem, a drugi wiszącym w $K_{1,k}$. W ten sposób $\sigma(u) = \sigma(v) = 1$ (jeśli u jest wierzchołkiem wiszącym, a v centralnym) lub $\sigma(u) = \sigma(v) = -1$ (jeśli u jest centralnym wierzchołkiem, a v wiszącym). W obu przypadkach otrzymujemy, że stopień wychodzący i stopień wchodzący centralnego wierzchołka $K_{1,k}$ różni się o jeden w D . Korzystając z faktu, że pojedyncza zorientowana krawędź jest lokalnie nieregularna otrzymujemy następującą obserwację:

Obserwacja 103. *Niech v będzie centralnym wierzchołkiem $K_{1,k}$, a D orientacją $K_{1,k}$. Jeśli D nie jest lokalnie nieregularna, to $d^+(v)$ oraz $d^-(v)$ są dodatnie i $d^+(v) - d^-(v) \in \{-1, 1\}$.*

Lemat 104 ([33]). *Niech v będzie wiszącym wierzchołkiem grafu G . Niech D będzie orientacją G , a D' zorientowanym grafem uzyskanym z D przez dołączenie pewnej liczby wiszących łuków wychodzących z v oraz pewnej liczby wiszących łuków wchodzących do v . Jeśli $\text{slir}(D) \leq 2$, to $\text{slir}(D') \leq 2$.*

Dowód. Oznaczmy przez w jedyne sąsiada v w orientacji D . Niech S będzie zorientowaną gwiazdą składającą się ze wszystkich łuków dodanych do D aby utworzyć D' . Rozważmy czerwono-niebieskie silnie lokalnie nieregularne kolorowanie φ digrafu D , w którym łuk pomiędzy wierzchołkami v oraz w jest niebieski. Pokażmy, że istnieje kolorowanie S , które razem z φ daje silnie lokalnie nieregularne kolorowanie D' .

Oznaczmy odpowiednio przez a oraz b stopień wychodzący i stopień wchodzący wierzchołka v w S . Zarówno a jak i b są dodatnie, a ich różnica wynosi

jeden lub minus jeden, zobacz obserwacja 102. Przypuśćmy, że $a - b = 1$ (drugi przypadek jest podobny). Mamy $a \geq 2$.

Jeśli S jest silnie lokalnie nieregularna, to kolorujemy każdy jej łuk na czerwono. Możemy łatwo zauważyć, że uzyskane kolorowanie D' jest silnie lokalnie nieregularne.

Przypuśćmy zatem, że S nie jest silnie lokalnie nieregularna. Rozważamy dwa różne kolorowania φ_1 oraz φ_2 zorientowanej gwiazdy S : w φ_1 kolorujemy pojedynczy łuk vu (łuk wychodzący z v) na niebiesko i pozostałe łuki S na czerwono, a w φ_2 kolorujemy wszystkie łuki wychodzące z v na niebiesko i wszystkie łuki wchodzące do v na czerwono. W obu przypadkach czerwony poddigraf S jest lokalnie nieregularny. Zauważmy również, że w obu przypadkach nie ma konfliktu pomiędzy v i jego sąsiadem wychodzącym (przyjmując u jako reprezentanta) w $V(S)$. Łącząc φ z φ_1 , niebieski zbalansowany stopień u wynosi minus jeden, a niebieski zbalansowany stopień v wynosi zero lub dwa (ponieważ istnieją dwa niebieskie łuki incydentne z v i co najmniej jeden z nich wychodzi z v). Łącząc φ z φ_2 , niebieski zbalansowany stopień u wynosi minus jeden, a niebieski zbalansowany stopień v jest równy co najmniej jeden (mamy co najmniej $a \geq 2$ niebieskich łuków wychodzących z v i co najwyżej jeden niebieski łuk wchodzący do v).

Stąd, jeśli warunek silnie lokalnej nieregularności jest naruszony w kolorowaniu uzyskanym przez połączenie φ z φ_1 lub φ_2 , to konflikt jest pomiędzy wierzchołkami v oraz w . Jednakże, φ_1 oraz φ_2 zmieniają niebieski zbalansowany stopień v na dwa sposoby (φ_1 podnosi go o jeden, a φ_2 podnosi go o co najmniej dwa). Zatem, co najmniej jedno z rozważanych kolorowań S nie tworzy konfliktu pomiędzy v oraz w w D' , a więc możemy rozszerzyć φ do nowego silnie lokalnie nieregularnego kolorowania D' bez wprowadzania nowych kolorów. $\square$

W kaktusie G po usunięciu wszystkich krawędzi, które leżą na cyklach zostajemy z grafem H (podgraf G indukowany przez mosty w G), którego składowe są drzewami. Każde z tych drzew ma co najmniej jeden wierzchołek, który leży na cyklu w G . Jeśli takie drzewo T ma dokładnie jeden wierzchołek, który leży na cyklu w G i ma w sumie co najmniej dwa wierzchołki, to mówimy, że T jest *wiszącym drzewem* w G . Alternatywnie, drzewa wiszące mogą być postrzegane jako drzewa dołączone do pojedynczego wierzchołka na cyklu w G .

W dowodach następujących rezultatów odnośnie silnie lokalnie nieregularnych kolorowań zorientowanych kaktusów główną strategią jest przypuszczenie (nie wprost), że przedstawiane fakty nie są prawdziwe i rozważenie minimalnego kontrprzykładu, czyli najmniejszego kaktusa G , który ma orientację D o $\text{slir}(D) \geq 3$. Rozważamy wiszące drzewo T w kaktusie G dołączone

do wierzchołka v : jeśli T nie jest gwiazdą, to możemy usunąć wszystkie jego krawędzie z wyjątkiem tych incydentnych z v . Z założenia, że G jest minimalnym kontrprzykładem otrzymujemy, iż każda orientacja nowego grafu ma silnie lokalnie nieregularne kolorowanie za pomocą co najwyżej dwóch kolorów. Takie kolorowanie jest następnie rozszerzane do kolorowania D korzystając z lematu 104, ponieważ możemy poziom po poziomie dołączać gwiazdę do wiszącego wierzchołka i zawsze znajdziemy odpowiednie kolorowanie. Stąd otrzymujemy następującą obserwację:

Obserwacja 105. *Jeśli G jest najmniejszym kaktusem, który ma orientację D o $\text{slir}(D) \geq 3$, to każde wiszące drzewo w G jest gwiazdą.*

Teraz pokażemy, że hipoteza 95 jest prawdziwa dla orientacji grafów unicyklicznych.

Twierdzenie 106 ([33]). *Jeśli D jest orientacją grafu unicyklicznego G , to $\text{slir}(D) \leq 2$.*

Dowód. Przypuśćmy, nie wprost, że twierdzenie jest fałszywe. Niech G będzie najmniejszym grafem unicyklicznym, który ma orientację D o $\text{slir}(D) \geq 3$. Stąd, G jest spójny, a z obserwacji 105 mamy, że każde wiszące drzewo w G jest gwiazdą. Długość jedyne go cyklu C jest nieparzysta, ponieważ w przeciwnym przypadku G jest dwudzielny i z twierdzenia 97 dostajemy sprzeczność.

Skoro C jest nieparzysty, to istnieją trzy kolejne wierzchołki u, v, w na C takie, że $uv, vw \in E(D)$. Oznaczmy przez T wiszące drzewo dołączone do v (jeśli stopień v w grafie G wynosi dwa, to niech T będzie grafem składającym się z pojedynczego wierzchołka v). Rozważmy teraz digraf D' uzyskany z D przez usunięcie wszystkich wierzchołków T (wraz z v), dodanie dwóch nowych wierzchołków v_1, v_2 oraz dodanie łuków uv_1 oraz v_2w . Szkielet D' jest drzewem, a więc możemy pokolorować jego łuki w taki sam sposób jak opisano w dowodzie twierdzenia 97. Mamy podział wierzchołków szkieletu D' na dwa zbiory niezależne X oraz Y . Kolorujemy każdy łuk z X do Y na niebiesko i każdy łuk z Y do X na czerwono. Takie kolorowanie D' jest silnie lokalnie nieregularne.

Założmy bez straty ogólności, że $u \in X$. Wówczas $w \in Y$, a zatem oba łuki uv_1 oraz v_2w są niebieskie. Ponadto niebieski zbalansowany stopień u jest dodatni, a w ujemny. Takie kolorowanie D naturalnie indukuje silnie lokalnie nieregularne kolorowanie D'' – digrafu uzyskanego z D przez usunięcie wszystkich wierzchołków T oprócz v . W kolorowaniu D'' łuki uv_1 oraz v_2w są niebieskie, a niebieskie zbalansowane stopnie wierzchołków u, v oraz w są odpowiednio dodatnie, równe zero i ujemne.

Jeśli stopień wierzchołka v w G wynosi dwa, to mamy silnie lokalnie nieregularne kolorowanie G dwoma kolorami, co przeczy, że $\text{slir}(D) \geq 3$.

Stąd, przypuśćmy, że stopień v w grafie G wynosi co najmniej trzy, czyli T ma co najmniej dwa wierzchołki. Przechodzimy do kolorowania łuków, które odpowiadają krawędziom gwiazdy T . Te łuki nazywamy wiszącymi.

Przypomnijmy, że obydwie łuki incydentne z v , które nie są wiszące mają kolor niebieski. Stąd, jeśli orientacja S gwiazdy T jest silnie lokalnie nieregularna, to możemy pokolorować wszystkie jej łuki na czerwono i uzyskać silnie lokalnie nieregularne kolorowanie D za pomocą dwóch kolorów. Założmy zatem, że S nie jest silnie lokalnie nieregularna. Z obserwacji 103 mamy, że jest co najmniej jeden łuk wychodzący z v , co najmniej jeden łuk wchodzący do v w S oraz $d^+(v) - d^-(v) \in \{-1, 1\}$ w S .

Przypuśćmy, że w S mamy $d^+(v) - d^-(v) = 1$ (drugi przypadek jest podobny). Rozważamy dwa różne kolorowania φ_1 oraz φ_2 orientacji S . W φ_1 pojedynczy łuk S , który wychodzi z v jest pokolorowany na niebiesko, a pozostałe łuki S są czerwone. W φ_2 wszystkie łuki wychodzące z v są niebieskie, a wszystkie łuki wchodzące do v czerwone.

Zauważmy, że w obu kolorowaniach φ_1 oraz φ_2 orientacji S czerwony poddigraf jest lokalnie nieregularny. Ponadto, po połączeniu tych kolorowań S z kolorowaniem D'' (w którym v ma niebieski zbalansowany stopień równy zero) otrzymujemy kolorowanie, w którym niebieski zbalansowany stopień v jest dodatni. Stąd, jeśli użycie kolorowania φ_1 lub φ_2 dla S w digrafie D skutkuje naruszeniem warunku silnie lokalnej nieregularności, to konflikt zachodzi między niebieskimi zbalansowanymi stopniami wierzchołków v oraz u . Jednakże, niebieski zbalansowany stopień u jest taki sam jak w kolorowaniu D'' , a kolorowania φ_1 oraz φ_2 zmieniają niebieski zbalansowany stopień v z zera w kolorowaniu D'' na dwie różne dodatnie wartości w kolorowaniu D . Zatem co najmniej jedno z kolorowań φ_1 oraz φ_2 może być zastosowane do łuków S w celu rozszerzenia silnie lokalnie nieregularnego kolorowania D'' do silnie lokalnie nieregularnego kolorowania D , które wykorzystuje dwa kolory, czyli otrzymujemy sprzeczność. $\square$

Poprzednie twierdzenie implikuje, że jeśli istnieje kontrprzykład do hipotezy 95 wśród orientacji kaktusów, to kaktus zawiera co najmniej dwa cykle. Dalej ograniczamy, jak taki minimalny kontrprzykład może wyglądać. Cykl w kaktusie nazywamy wiszącym, jeśli usunięcie jego krawędzi skutkuje grafem, w którym co najwyżej jedna składowa spójna zawiera cykle. Zauważmy, że każdy kaktus zawiera wiszący cykl chyba, że jest to drzewo.

Lemat 107 ([33]). *Niech G będzie minimalny kaktusem (ze względu na liczbę wierzchołków i krawędzi) takim, że istnieje orientacja D kaktusa G o $\text{slir}(D) \geq 3$. Wówczas:*

- (i) *każdy wiszący cykl G ma długość trzy,*

(ii) jeśli G zawiera wiszący cykl C o długości trzy taki, że $G - V(C)$ jest grafem o co najwyżej jednej składowej spójnej zawierającej cykle, to istnieje wierzchołek cyklu C , który leży na wielu cyklach w G .

Dowód. Najpierw zauważmy, że G ma co najmniej dwa cykle (zobacz twierdzenie 106) i wszystkie wiszące drzewa w G są gwiazdami (obserwacja 105).

Niech C będzie wiszącym cyklem o maksymalnej długości w G . Niech x będzie wierzchołkiem na C takim, że pozostałe wierzchołki C należą do acyklicznej składowej spójnej grafu $G - E(C)$. Niech $v_1 \in V(C) \setminus \{x\}$ ma maksymalny stopień. Przypuśćmy, że $d(v_1) = k + 2$, czyli wierzchołek v_1 jest incydentny z k wiszącymi krawędziami w G .

Przez S oznaczamy digraf będący gwiazdą, indukowany przez k wiszących łuków incydentnych z v_1 w orientacji D . Niech D_1 będzie digrafem uzyskanym z D przez usunięcie łuków S i wszystkich nowo uzyskanych wierzchołków izolowanych (wiszących sąsiadów v_1). Z założenia, istnieje silnie lokalnie nieregularne kolorowanie φ_1 digrafu D_1 za pomocą co najwyżej dwóch kolorów. Niech b_1 oraz r_1 będą zbalansowanymi niebieskimi i czerwonymi stopniami v_1 w φ_1 . W dalszej części omówimy jak możemy pokolorować łuki S w taki sposób, że to kolorowanie rozszerzy φ_1 do silnie lokalnie nieregularnego kolorowania D za pomocą co najwyżej dwóch kolorów, biorąc pod uwagę, że k jest wystarczająco duże. Daje to górne ograniczenie dla k .

Twierdzimy, że $k \leq 5$. Przypuśćmy, że tak nie jest, czyli co najmniej sześć wiszących krawędzi jest dołączona do v_1 w grafie G . Zauważmy, że przypisanie kolorów do k wiszących łuków incydentnych z v_1 zmienia zbalansowane kolorowe stopnie wierzchołka v_1 na $b_1 + b'$ oraz $r_1 + r'$, gdzie b' oraz r' są zbalansowanymi niebieskimi i czerwonymi stopniami wierzchołka v_1 w kolorowaniu S . Dla każdej pary ostatecznych zbalansowanych niebieskich i czerwonych stopni $b_1 + b'$ oraz $r_1 + r'$ w wierzchołku v_1 istnieje sześć możliwych konfliktów z warunkiem silnie lokalnej nieregularności: dwa na łukach C , jeden na niebieskim wiszącym łuku wychodzącym z v_1 (jeśli $b_1 + b' = -1$), jeden na czerwonym wiszącym łuku wychodzącym z v_1 (jeśli $r_1 + r' = -1$), jeden na niebieskim wiszącym łuku wchodzącym do v_1 (jeśli $b_1 + b' = 1$) i jeden na czerwonym wiszącym łuku wchodzącym do v_1 (jeśli $r_1 + r' = 1$).

Jeśli $k \geq 6$, to z obserwacji 102 wiemy, że istnieje co najmniej siedem różnych kolorowań S , każde zmieniające obydwa niebieskie i czerwone zbalansowane stopnie v_1 inaczej niż w pozostałych kolorowaniach. Stąd, co najmniej jedno z nich zmienia niebieskie i czerwone zbalansowane stopnie v_1 w taki sposób, że nie występuje żaden z sześciu możliwych konfliktów. Takie kolorowanie wraz z φ_1 skutkuje silnie lokalnie nieregularnym kolorowaniem D za pomocą dwóch kolorów, co przeczy $\text{slir}(D) \geq 3$. Stąd $k \leq 5$.

Możliwe jest dalsze obniżenie ograniczenia na $d(v_1)$ poprzez rozważenie

możliwości, w jaki sposób krawędzie incydentne z wierzchołkiem v_1 na cyklu C są zorientowane w D , pokolorowane w φ_1 , jakie są czerwone i niebieskie zbalansowane stopnie sąsiadów v_0 oraz v_2 wierzchołka v_1 na C oraz jakie są orientacje łuków w S . Jeśli na przykład łuk pomiędzy wierzchołkami v_0 oraz v_1 jest niebieski, to wartość zbalansowanego czerwonego stopnia v_0 jest nieistotna. Co więcej, jeśli niebieski zbalansowany stopień v_0 jest większy niż osiem lub mniejszy niż minus osiem, to żadne kolorowanie S nie zmienia niebieskiego zbalansowanego stopnia v_1 w sposób, który by zaburzał warunek silnie lokalnej nieregularności na łuku pomiędzy wierzchołkami v_0 oraz v_1 (ponieważ $d(v_1) \leq 7$). To pozostawia nam skończoną liczbę przypadków, które należy rozważyć. Za pomocą prostego programu w Pythonie generujemy te przypadki i dla każdego z nich znajdujemy odpowiednie kolorowanie S (patrz 'S2 Proof of Claim 1' w [32]). W szczególności, w ten sposób udowodnimy, że:

Fakt 108. $d(v_1) \leq 4$.

W dalszej części przypuścimy, że wierzchołek v_2 jest różny od x . Jeśli wierzchołek v_1 nie jest incydentny z x , to dalej założmy, że $d(v_0) \leq d(v_2)$. Skoro $d(v_1) \leq 4$ oraz wierzchołek v_1 ma największy stopień spośród wierzchołków z $V(C) \setminus \{x\}$, to mamy również $d(v_2) \leq 4$. Dla wierzchołków v_1 oraz v_2 mamy $(d(v_1), d(v_2)) \in \{(4, 4), (4, 3), (4, 2), (3, 3), (3, 2)\}$ lub wszystkie wierzchołki C oprócz x mają stopień dwa w G .

Korzystając z programu w Pythonie, zobacz 'S3 Proof of Claim 2' w [32], dowodzimy:

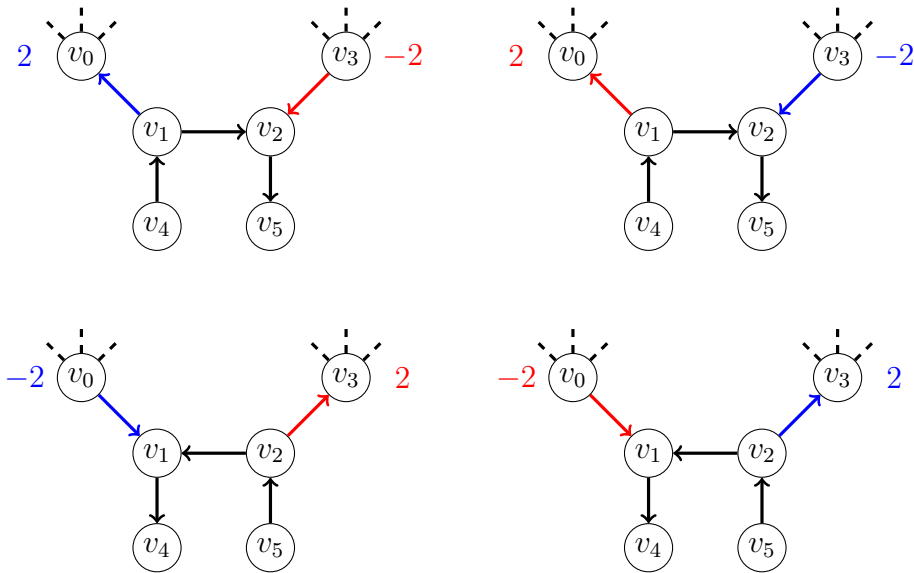
Fakt 109. $(d(v_1), d(v_2)) \notin \{(4, 4), (4, 3), (4, 2)\}$.

Pokażemy, że w tych przypadkach $d(v_1)$ oraz $d(v_2)$ silnie lokalnie nieregularne kolorowanie digrafu D_2 otrzymane z D poprzez usunięcie łuku pomiędzy v_1, v_2 oraz wszystkich wiszących sąsiadów v_1 oraz v_2 , może być rozszerzone do lokalnie nieregularnego kolorowania D dwoma kolorami. Ponownie liczba rozważanych przypadków jest skończona z powodu stopni wierzchołków v_1 oraz v_2 w grafie G .

Dla $(d(v_1), d(v_2)) = (3, 3)$ pokażemy używając programu w Pythonie (zobacz 'S4 Proof of Claim 3' w [32]), że korzystając z takiej samej metody jak do udowodnienia faktu 109 dostaniemy cztery przypadki (pokazane na rysunku 5.2), dla których silnie lokalnie nieregularne kolorowanie D_3 (digrafu uzyskanego z D przez usunięcie łuku pomiędzy v_1, v_2 oraz wiszących sąsiadów wierzchołków v_1 oraz v_2) nie może być rozszerzone do silnie lokalnie nieregularnego kolorowania D za pomocą dwóch kolorów. Jednakże, w tych przypadkach, rozważane kolorowe stopnie wierzchołków v_0 oraz v_3 (sąsiad

wierzchołka v_2 na cyklu C , różny od v_1) i kolory, i orientacje łuków incydentnych z nimi dają $d(v_0) \geq 4$ oraz $d(v_3) \geq 4$, aby to zobaczyć, rozważmy przypadek, gdy niebieski łuk idzie z v_1 do v_0 oraz niebieski zbalansowany stopień v_0 wynosi dwa (pozostałe przypadki są analogiczne) – co najmniej trzy łuki muszą być wychodzące z wierzchołka v_0 w D_3 . Jeśli długość cyklu C jest co najmniej cztery, to $v_0 \neq x$ lub $v_3 \neq x$, co jest sprzeczne z wyborem v_1 jako wierzchołka o maksymalnym stopniu spośród wszystkich wierzchołków z $V(C) \setminus \{x\}$. Otrzymujemy następujący fakt.

Fakt 110. *Jeśli cykl C ma długość co najmniej cztery, to $(d(v_1), d(v_2)) \neq (3, 3)$.*



Rysunek 5.2: Cztery przypadki, dla których nie znaleźliśmy rozwiązania za pomocą programu komputerowego.

Przypuśćmy, że cykl C ma długość cztery lub więcej. Jeśli $d(v) = 2$ dla każdego wierzchołka $v \in V(C) \setminus \{x\}$, to bierzemy digraf D_4 uzyskany z D przez usunięcie wszystkich wierzchołków C oprócz x i jego dwóch sąsiadów. Usunięta część jest orientacją ścieżki o długości co najmniej dwa. Stąd usunięta część D może być rozłożona zarówno na parzystą, jak i nieparzystą liczbę silnie lokalnie nieregularnych digrafów – każdy składający się z jednego lub dwóch kolejnych łuków. Naprzemienne zastosowanie kolorów niebieskiego i czerwonego na incydentnych digrafach z takiego rozkładu skutkuje pokolorowaniem usuniętego digrafu tak, że pierwszy i ostatni łuk są pokolorowane zgodnie z potrzebą – za pomocą innych kolorów niż te użyte na łukach

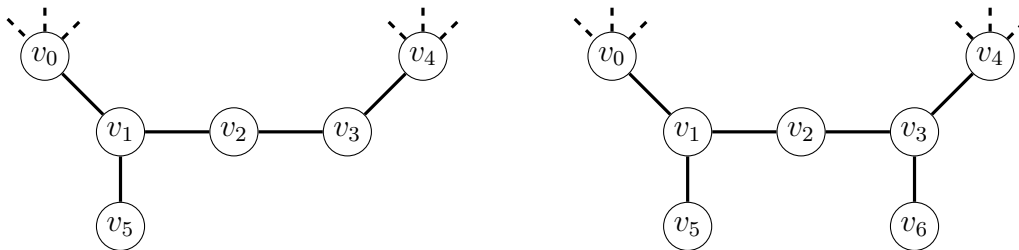
dołączonych do x . Takie kolorowanie połączone z silnie lokalnie nieregularnym kolorowaniem D_4 skutkuje silnie lokalnie nieregularnym kolorowaniem D dwoma kolorami, a więc otrzymujemy sprzeczność. Stąd mamy poniższy fakt.

Fakt 111. *Jeśli długość cyklu C jest co najmniej cztery, to $d(v_1) \geq 3$.*

Jeśli długość cyklu C wynosi co najmniej cztery, to co najmniej jeden z wierzchołków v_0 oraz v_3 jest różny od x . Przypuśćmy, że $v_0 \neq x$. Wybór wierzchołka v_2 (sąsiad v_1 na C o minimalnym stopniu, różny od x) implikuje $d(v_0) = 2$. W tym przypadku oznaczamy przez D_5 digraf uzyskany z D przez usunięcie v_1 oraz jego wiszącego sąsiada. Silnie lokalnie nieregularne kolorowanie D_5 może być rozszerzone do silnie lokalnie nieregularnego kolorowania D dwoma kolorami w następujący sposób. Jeśli łuki pomiędzy v_0 i jego sąsiadem w D_5 oraz pomiędzy v_2 i jego sąsiadem w D_5 są pokolorowane tak samo, bez straty ogólności na niebiesko, to kolorujemy wiszący łuk incydentny z v_1 na niebiesko i pozostałe dwa łuki na czerwono. Jeśli te dwa łuki D_5 są pokolorowane różnymi kolorami, bez straty ogólności łuk incydentny z v_0 jest niebieski oraz łuk incydentny z v_2 jest czerwony, to kolorujemy łuk pomiędzy v_1 oraz v_2 na niebiesko i pozostałe dwa łuki na czerwono. Dla lepszego zobrazowania te przypadki zostały przedstawione na rysunku 5.3. Z drugiej strony, jeśli $v_0 = x$, to $v_3 \neq x$ i z założenia, że v_1 ma maksymalny stopień spośród wszystkich wierzchołków z $V(C) \setminus \{x\}$ otrzymujemy, iż $d(v_2) \in \{2, 3\}$. Rozważając możliwe do uzyskania konfiguracje, korzystając z programu w Pythonie, zobacz 'S5 Proof of Claim 5' w [32], kończymy dowód następującego faktu.

Fakt 112. *Jeśli długość cyklu C jest co najmniej cztery, to $(d(v_1), d(v_2)) \neq (3, 2)$.*

To kończy dowód punktu (i).



Rysunek 5.3: Przypadki rozważane w fakcie 112.

Stąd, każdy wiszący cykl w G ma długość trzy. Bierzemy wiszący cykl C taki, że graf $G - V(C)$ ma co najwyżej jedną składową, która zawiera cykle

(taki cykl zawsze istnieje w kaktusie różnym od drzewa). Oznaczmy wierzchołki na C przez x, v_1, v_2 tak, że wierzchołki v_1 oraz v_2 nie leżą na żadnym innym cyklu w G oraz $d(v_1) \geq d(v_2)$. Fakt 108 oraz fakt 109 (żadne założenie dotyczące długości C nie zostało użyte do udowodnienia tych faktów) implikuje, że $d(v_2) = 2$ oraz albo $d(v_1) = 2$, albo $d(v_1) = 3$.

Aby udowodnić punkt (ii) przypuśćmy, nie wprost, że wierzchołek x nie leży na żadnym innym cyklu w G . To oznacza, w szczególności, że istnieje sąsiad y wierzchołka x , który należy do składowej spójnej $G - x$ z cyklami oraz wierzchołek x jest incydentny z $d(x) - 3$ wiszącymi łukami (ponieważ każde wiszące drzewo w G jest gwiazdą, zobacz obserwacja 105). Zauważmy, że $d(x)$ może być ograniczone z góry w podobny sposób jak pokazaliśmy $d(v_1) \leq 7$ (czyli $k \leq 5$) w dowodzie (i). Jeśli $d(x) \geq 10$, to usuwamy $d(x) - 3$ wiszących sąsiadów x i kolorujemy uzyskany digraf silnie lokalnie nieregularnie za pomocą dwóch kolorów. Każde kolorowanie wiszących łuków incydentnych z x zmienia oba kolorowe stopnie x w sposób różny od pozostałych i istnieje co najwyżej siedem możliwości dla kolorowych zbalansowanych stopni x , które naruszałby warunek silnie lokalnej nieregularności: trzy dla łuków incydentnych z x w digrafie otrzymanym z D poprzez usunięcie wiszących łuków incydentnych z x i cztery na wiszących łukach incydentnych z x (minus jeden lub jeden w kolorze niebieskim lub czerwonym). Stąd, jeśli $d(x) - 3 \geq 7$, to istnieje co najmniej osiem sposobów na pokolorowanie łuków incydentnych z x (zobacz obserwacja 102)) i przynajmniej jeden z nich nie powoduje konfliktu z warunkiem silnie lokalnej nieregularności. Zatem możemy założyć, że $d(x) \leq 9$, czyli wierzchołek x jest incydentny z co najwyżej sześcioma wiszącymi łukami.

Niech D' będzie digrafem uzyskanym z D przez usunięcie v_1 oraz jego wiszącego sąsiada v_2 (jeśli istnieje) oraz wszystkich wiszących sąsiadów x . Korzystając z programu w Pythonie, zobacz 'S6 Proof of (ii)' w [32], pokażemy, że silnie lokalnie nieregularne kolorowanie D' może być rozszerzone do silnie lokalnie nieregularnego kolorowania D dwoma kolorami dla każdej możliwej orientacji krawędzi incydentnych z x, v_1 oraz v_2 . To kończy dowód punktu (ii). $\square$

Jako natychmiastowe konsekwencje lematu 107 otrzymujemy:

Twierdzenie 113 ([33]). *Jeśli D jest orientacją kaktusa G bez cykli o długości trzy, to $\text{slir}(D) \leq 2$.*

Dowód. Teza twierdzenia wynika z punktu 1) w lemacie 107. $\square$

Twierdzenie 114 ([33]). *Jeśli D jest orientacją kaktusa G o wierzchołkowo-rozłącznych cyklach, to $\text{slir}(D) \leq 2$.*

Dowód. Niech G będzie kaktusem o minimalnej liczbie wierzchołków i krawędzi, który ma orientację D o $\text{slir}(D) \geq 3$. Bierzemy wiszący cykl C w kaktusie G taki, że co najwyżej jedna składowa spójna $G - V(C)$ zawiera cykle. Z 1) w lemacie 107 wiemy, że długość cyklu C wynosi trzy. Z 2) w lemacie 107 otrzymujemy, że istnieje wierzchołek z cyklu C , który leży na wielu cyklach w G , co przeczy założeniu, że cykle w G są wierzchołkowo-rozłączne. $\square$

5.3 Uwagi

W tym rozdziale przedstawiliśmy i zbadaliśmy dwa nowe warianty (słaby i silny) lokalnej nieregularności digrafów. Omówiliśmy relację słabo i silnie lokalnie nieregularnych kolorowań z innymi lokalnie nieregularnymi kolorowaniami digrafów, w szczególności z $(+, +)$ -lokalnie nieregularnym kolorowaniem wprowadzonym w [20].

Podczas gdy $(+, +)$ -lokalnie nieregularne kolorowanie jest specjalnym przypadkiem słabego lokalnie nieregularnego kolorowania (stąd, $\text{lir}^{(+,+)}(D) \leq k$ implikuje $\text{lir}(D) \leq k$), to nie jest prawdą, że każde $(+, +)$ -lokalnie nieregularne kolorowanie jest silnie lokalnie nieregularnym kolorowaniem lub odwrotnie. Co więcej, słaba lokalna nieregularność orientacji grafu G jest implikowana przez samą w sobie lokalną nieregularność G . W przypadku silnie lokalnej nieregularności pokazaliśmy jej niezależność od lokalnej nieregularności grafów. Stąd, silnie lokalna nieregularność w porównaniu do słabej lepiej wykorzystuje kluczowe własności digrafów, podczas gdy z drugiej strony rezultaty dotyczące słabego lokalnie nieregularnego kolorowania i rozkładu grafów zorientowanych mogą dostarczyć nam pewnych informacji odnośnie lokalnie nieregularnego kolorowania ich szkieletów.

Z tych uwag w naturalny sposób wyłania się następujący problem.

Problem 115 (Grzelec, Onderko, Woźniak, [33]). Podać ograniczenie górne przez stałą $\text{slir}(D)$ dla dowolnego digrafu D .

Ten problem możemy zredukować do podania ograniczenia górnego przez stałą dla grafów zorientowanych. W digrafie D bierzemy poddigraf D' indukowany przez łuki idące w obie strony pomiędzy parami wierzchołków. Następnie bierzemy poddigraf D'' digrafu D' , który jest silnie lokalnie nieregularny i zawiera dokładnie jeden łuk z każdej pary łuków idących w przeciwnych kierunkach pomiędzy dwoma wierzchołkami (taki digraf zawsze istnieje, zobacz twierdzenie 93). Poddigraf D indukowany przez łuki ze zbioru $E(D) \setminus E(D'')$ jest więc orientacją szkieletu D . Stąd ogólne ograniczenie górne przez stałą silnie lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego daje nam ograniczenie

górne przez stałą dla tego parametru w przypadku dowolnego digrafu. W szczególności mamy analog lematu 87.

Lemat 116 ([33]). *Niech D będzie digrafem o szkielecie G . Jeśli silnie lokalnie nieregularny indeks chromatyczny każdej orientacji G jest co najwyżej k , to $\text{slir}(D) \leq k + 1$.*

W przypadku orientacji kaktusów można by ewentualnie kontynuować przedstawione przez nas podejście, rozważając i rozwiązując możliwe przypadki (po zmniejszeniu ich liczby przypadków do skończonej wartości). Jednakże takie podejście prawdopodobnie nie przyniosłoby niczego nowego, co byłoby interesujące z punktu widzenia kombinatoryki, z wyjątkiem, miejmy nadzieję, udowodnienia hipotezy 95 dla takich digrafów. Stąd warto by spróbować innego podejścia, które mogłoby być oparte na dowodzie twierdzenia 106. W tamtym dowodzie rozdzielamy cykl i bierzemy szczególne silnie lokalnie nieregularne kolorowanie uzyskanego digrafu, którego szkielet jest drzewem. Kluczowy jest fakt, że mamy informację jak są pokolorowane łuki incydentne do każdego wierzchołka. Takie kolorowanie daje nam silnie lokalnie nieregularne kolorowanie oryginalnego zorientowanego grafu, jednakże własność kolorowania nie jest zachowana. Stąd prosta indukcja ze względu na liczbę cykli w kaktusie nie jest możliwa. Być może jednak istnieje sposób na dokładne opisanie kolejności, w jakiej cykle są rozcinane w kaktusie, tak aby w każdym kroku mieć kontrolę nad uzyskanymi kolorowymi stopniami wierzchołków.

Niemniej jednak po udowodnieniu, że hipoteza 95 zachodzi dla wszystkich orientacji kaktusów, naturalnym krokiem byłoby rozważenie orientacji grafów zewnętrznie planarnych, czy w szczególności orientacji grafów subkubicznych zewnętrznie planarnych i digrafów, których szkielety są kaktusami.

W przypadku słabego lokalnie nieregularnego kolorowania głównym celem powinno być obniżenie ogólnego górnego ograniczenia słabego lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego, które jest obecnie uzyskiwane jako bezpośrednia konsekwencja ogólnego górnego ograniczenia udowodnionego dla $(+, +)$ -lokalnie nieregularnego kolorowania. Na przykład, udowodnienie, że hipoteza 77 jest prawdziwa dla każdego acyklicznego digrafu daje nam ograniczenie górne przez cztery (ponieważ każdy digraf możemy rozłożyć na dwa digrafy acykliczne). Z innego punktu widzenia, rezultaty dotyczące lokalnie nieregularnych kolorowań multigrafów, w których krotność każdej krawędzi wynosi co najwyżej dwa mogą być w oczywisty sposób wykorzystane do uzyskania ograniczenia górnego słabego lokalnie nieregularnego indeksu chromatycznego w przypadku odpowiednich digrafów (multikrawędzie zastępujemy łukami idącymi w przeciwnych kierunkach).

Bibliografia

- [1] M. Aigner, E. Triesch, *Irregular assignments of trees and forests*, SIAM J. Discrete Math. **3** (1990), 439–449.
- [2] N. Alon, *Combinatorial nullstellensatz*, Combinatorics, Probability and Computing **8**(1–2) (1999), 7–29.
- [3] M. Bača, S. Jendrol', M. Miller, J. Ryan, *On Irregular Total Labelings*, Discrete Math. **307** (2007), 1378–1388.
- [4] E. Barme, J. Bensmail, J. Przybyło, M. Woźniak, *On a directed variation of the 1-2-3 and 1-2 Conjectures*, Discrete Appl. Math. **217**(2) (2017), 123–131.
- [5] O. Baudon, J. Bensmail, T. Davot, H. Hocquard, J. Przybyło, M. Senhaji, É. Sopena, M. Woźniak, *A general decomposition theory for the 1-2-3 Conjecture and locally irregular decompositions*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science **21** (1) # 2 (2019), 1–14.
- [6] O. Baudon, J. Bensmail, É. Sopena, *An oriented version of the 1-2-3 Conjecture*, Discussiones Mathematicae Graph Theory **35** (2015), 141–156.
- [7] O. Baudon, J. Bensmail, É. Sopena, *On the complexity of determining the irregular chromatic index of a graph*, J. Discret. Algorithms **30** (2015), 113–127.
- [8] O. Baudon, J. Bensmail, É. Sopena, *The irregular chromatic index of trees*, Technical report, dostępny pod adresem <https://hal.science/hal-00805122v1>, 2013.
- [9] O. Baudon, J. Bensmail, J. Przybyło, M. Woźniak, *On decomposing regular graphs into locally irregular subgraphs*, European Journal of Combinatorics **49** (2015), 90–104.

- [10] O. Baudon, J. Bensmail, J. Przybyło, M. Woźniak, *On locally irregular decompositions and the 1-2 Conjecture in digraphs*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science **20(2)** (2018), #7.
- [11] M. Behzad, G. Chartrand, *No graph is perfect*, Am. Math. Mon. **74(8)** (1967), 962–963.
- [12] J. Bensmail, *On a graph labelling conjecture involving coloured labels*, Discussiones Mathematicae Graph Theory **44** (2024), 231–244.
- [13] J. Bensmail, M. Boivin, I. Grzelec, C. Marcille, *The Strong $(2, 2)$ -Conjecture for more classes of graphs*, dostępny pod adresem <https://hal.science/hal-04733122>, 2024.
- [14] J. Bensmail, F. Dross, N. Nisse, *Decomposing degenerate graphs into locally irregular subgraphs*, Graphs Comb. **36** (2020), 1869–1889.
- [15] J. Bensmail, T. Filasto, H. Hocquard, P.M. Marcille, *Irregularity Notions for Digraphs*, dostępny pod adresem <https://hal.science/hal-04210649v2>, 2025.
- [16] J. Bensmail, F. Fioravantes, F. Mc Inerney, *On the role of 3s for the 1-2-3 conjecture*, Theoretical Computer Science **892** (2021), 238–257.
- [17] J. Bensmail, H. Hocquard, C. Marcille, *The Weak $(2, 2)$ -Labelling Problem for graphs with forbidden induced structures*, Research report, Université côte-d’Azur; Université de Bordeaux, LaBRI, UMR 5800, France, 2022.
- [18] J. Bensmail, H. Hocquard, C. Marcille, *The weak $(2, 2)$ -labelling problem for graphs with forbidden induced structures*, In A. Bagchi, R. Muthu, editors, Algorithms and Discrete Applied Mathematics, strony 204–215, Cham, 2023. Springer International Publishing.
- [19] J. Bensmail, H. Hocquard, C. Marcille, *On inducing degenerate sums through 2-labellings*, Graphs and Combinatorics **40(2)** (2024), 23.
- [20] J. Bensmail, G. Renault, *Decomposing oriented graphs into six locally irregular oriented graphs*, Graphs and Combinatorics **32(5)** (2016), 1707–1721.
- [21] J. Bensmail, M. Merker, C. Thomassen, *Decomposing graphs into a constant number of locally irregular subgraphs*, European Journal of Combinatorics **60** (2017), 124–134.

- [22] M. Bonamy, *Global discharging methods for coloring problems in graphs*, Rozprawa doktorska, Université de Montpellier, 2015.
- [23] M. Bonamy, N. Bousquet, H. Hocquard, *Adjacent vertex-distinguishing edge coloring of graphs*, In J. Nešetřil, M. Pellegrini, editors, The Seventh European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, strony 313–318, Pisa, 2013. Scuola Normale Superiore.
- [24] A. Borowiecki, J. Grytczuk, M. Pilśniak, *Coloring chip configurations on graphs and digraphs*, Information Processing Letters **112** (2012), 1–4.
- [25] A. C. Burris, R. H. Schelp, *Vertex-distinguishing proper edgecolorings*, J. Graph Theory **26(2)** (1997), 73–82.
- [26] J. Černý, M. Hornák, R. Soták, *Observability of a graph*, Math. Slovaca **46** (1996), 21–31.
- [27] G. Chang, G.-H. Duh, *On the precise value of the strong chromatic index of a planar graph with a large girth*, Discrete Appl. Math. **247** (2018), 389–397.
- [28] G. Chartrand, P. Erdős, O. R. Oellermann, *How to define an irregular graph*, The College Mathematics Journal **19(1)** (1988), 36–42.
- [29] G. Chartrand, M.S. Jacobson, J. Lehel, O.R. Oellermann, S. Ruiz, F. Saba, *Irregular networks*, Congr. Numer. **64** (1988), 197–210.
- [30] I. Grzelec, T. Madaras, A. Onderko, R. Soták, *On a new problem about the local irregularity of graphs*, dostępny pod adresem <https://arxiv.org/abs/2405.13893>, 2024.
- [31] I. Grzelec, A. Onderko, M. Woźniak, *On Local Irregularity Conjecture for 2-multigraphs*, dostępny pod adresem <https://arxiv.org/abs/2412.04200>, 2024.
- [32] I. Grzelec, A. Onderko, M. Woźniak, *Supplementary material: Weak and strong local irregularity of digraphs* dostępny pod adresem <https://zenodo.org/records/14845334>, 2025.
- [33] I. Grzelec, A. Onderko, M. Woźniak, *Weak and strong local irregularity of digraphs*, dostępny pod adresem <https://arxiv.org/abs/2502.07933>, 2025.
- [34] I. Grzelec, M. Woźniak, *Local Irregularity Conjecture for 2-multigraphs versus cacti*, Opuscula Math. **44(1)** (2024), 49–65.

- [35] I. Grzelec, M. Woźniak, *On decomposing multigraphs into locally irregular submultigraphs*, Appl. Math. Comput. **452** (2023), 128049.
- [36] F. Harary, M. Plantholt, *The point-distinguishing chromatic index*, w: Graphs and Applications (F. Harary i J. S. Maybee, Eds.), Wiley-Interscience, New York 1985, 147–162.
- [37] F. Havet, N. Paramaguru, R. Sampathkumar, *Detection number of bipartite graphs and cubic graphs*, Rapport de Recherche RR-8115, INRIA, 2012, October.
- [38] M. Kalkowski, M. Karoński, F. Pfender, *Vertex-coloring edge-weightings: towards the 1-2-3-conjecture*, J. Combin. Theory Ser. B **100(3)** (2010), 347–349.
- [39] M. Karoński, T. Łuczak, A. Thomason, *Edge weights and vertex colours*, J. Combin. Theory Ser. B **91(1)** (2004), 151–157.
- [40] R. Keusch, *A Solution to the 1-2-3 Conjecture*, J. Combin. Theory Ser. B **166** (2024), 183–202.
- [41] R. Keusch, *Vertex-coloring graphs with 4-edge-weightings*, Combinatorica **43** (2023), 651–658.
- [42] C.N. Lintzmayer, G.O. Mota, M. Sambinelli, *Decomposing split graphs into locally irregular graphs*, Discrete Appl. Math. **292** (2021), 33–44.
- [43] L. Liu, Z. Zhang, J. Wang, *On the adjacent strong edge coloring of outer plane graphs*, J. Math. Research and Exposition **25 (2)** (2005), 255–265.
- [44] H. Lu, Q. Yu, C.-Q. Zhang, *Vertex-coloring 2-edge-weighting of graphs*, European Journal of Combinatorics **32(1)** (2011), 21–27.
- [45] B. Lužar, J. Przybyło, R. Soták, *New bounds for locally irregular chromatic index of bipartite and subcubic graphs*, Journal of Combinatorial Optimization **36(4)** (2018), 1425–1438.
- [46] J. Przybyło, *A note on the weak $(2, 2)$ -conjecture*, Discrete Math. **342(2)** (2019), 498–504.
- [47] J. Przybyło, *On decomposing graphs of large minimum degree into locally irregular subgraphs*, Electron. J. Combin. **23** (2016), 2–31.
- [48] J. Przybyło, *On the standard $(2, 2)$ -conjecture*, European Journal of Combinatorics **94** (2021), 103305.

- [49] J. Przybyło, *The 1-2-3 Conjecture almost holds for regular graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **147** (2021), 183–200.
- [50] B. Seamone, *The 1-2-3 conjecture and related problems: a survey, technical report*, dostępny pod adresem <http://arxiv.org/abs/1211.5122>, 2012.
- [51] J. Sedlar R. Škrekovski, *Local Irregularity Conjecture vs. cacti*, Discrete Appl. Math. **343** (2024), 115–133.
- [52] J. Sedlar R. Škrekovski, *Remarks on the Local Irregularity Conjecture*, Mathematics **9(24)** (2021), 3209.
- [53] J. J. Sylvester, *Question 7382*, Mathematical Questions from the Educational Times **41** (1884), 21.
- [54] B. Vučković, *Multi-set neighbor distinguishing 3-edge coloring*, Discrete Math. **341** (2018), 820–824.
- [55] W.-F. Wang, K.-W. Lih, *List coloring Halin graphs*, Ars Combinatoria **77** (2005), 53–63.