Górnictwo i Geoinżynieria • Rok 29 • Zeszyt 2 • 2005

*Ryszard Snopkowski**

FUNKCJE ZMIENNYCH LOSOWYCH – MOŻLIWOŚCI REDUKCJI MODELI STOCHASTYCZNYCH. CZĘŚĆ I

1. Wprowadzenie

Metoda symulacji stochastycznej wykorzystywana jest do komputerowego modelowania dowolnych procesów (fizycznych, ekonomicznych, technologicznych itp.) lub ich fragmentów, których cechą charakterystyczną jest występowanie w ich opisie co najmniej jednej zmiennej losowej.

Metodę po raz pierwszy zastosowano w trakcie badań w ramach projektu Manhattan, mających na celu budowę amerykańskiej bomby atomowej. Opracowany wówczas model stochastyczny dotyczył analizy propagacji neutronów w reaktorze jądrowym. Opracowali go wspólnie John von Neumann oraz polski matematyk Adam Ulman.

Metoda symulacji stochastycznej jest wykorzystywana z powodzeniem także współcześnie. Możliwości tworzenia złożonych modeli stochastycznych, ich zapis w postaci programu komputerowego w języku zorientowanym na rozwiązywanie tego typu zagadnień, a także wciąż szybsze komputery – to wszystko decyduje o częstym wyborze symulacji stochastycznej jako metody rozwiązywania zagadnień opisywanych modelami o charakterze niezdeterminowanym.

Biorąc pod uwagę charakter procesów górniczych, a także udział wielu czynników niezdeterminowanych w ich przebiegu, jest uzasadnione stosowanie tej metody także w górnictwie. W pracy [11] opisano model stochastyczny procesu produkcyjnego realizowanego w przodku ścianowym kopalni węgla kamiennego. Występujące w modelu zmienne losowe są charakteryzowane odpowiednimi funkcjami gęstości prawdopodobieństwa.

Niejednokrotnie występujące zależności funkcyjne między zmiennymi losowymi mogą być zastąpione jedną funkcją gęstości prawdopodobieństwa (tzw. rozkładem wynikowym), co powoduje, iż opracowany model stochastyczny analizowanego procesu ulega uproszczeniu.

* Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

W dalszej części artykułu przedstawiono funkcje zmiennych losowych, których wykorzystanie umożliwia uzyskanie rozkładów wynikowych, wśród których znalazł się rozkład beta, chi-kwadrat, Cauchy'ego, *F*-Snedecora, gamma oraz jednostajny. Charakterystyka każdego rozkładu wynikowego zawiera wzór funkcji gęstości prawdopodobieństwa, przykładowy wykres rozkładu, a także przykłady zmiennych losowych opisywanych danym rozkładem. Niektóre rozkłady są wykorzystywane przede wszystkim w statystyce matematycznej (np. rozkład chi-kwadrat, *F*-Snedecora). Rozkłady te mogą być jednak stosowane w procesie redukcji modeli stochastycznych, jeśli w modelach tych występują funkcje zmiennych losowych opisane w pracy.

2. Rozkłady wynikowe, funkcje zmiennych losowych

2.1. Rozkład wynikowy beta

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu beta jest określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{B(p,q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1} & \text{dla} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{dla} \quad x<0 \text{ i } x>1 \end{cases} \tag{1}$$

gdzie

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)+\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{2}$$

Rys. 1. Przykładowy wykres rozkładu beta

Źródło: opracowanie własne

Jeśli zakres zmiennej losowej obejmuje inny przedział niż (0, 1), na przykład (a, b) ze zbioru liczb rzeczywistych dodatnich, wówczas uogólniony rozkład beta ma następującą funkcję gęstości prawdopodobieństwa

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{B(p,q)}\dfrac{(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}}{(b-a)^{p+q-1}} & \text{dla} \quad a \le x \le b \\ 0 & \text{dla} \quad x < a \text{ i } x > b \end{cases} \tag{3}$$

W zależności od wartości parametrów, a także ich wzajemnych relacji, rozkład beta może przyjmować zróżnicowaną postać graficzną (rys. 1).

Przykłady zmiennych losowych o rozkładzie beta

W teorii niezawodności, rozkładem beta jest modelowany czas znajdowania się obiektu w stanie zdatności, czas naprawy obiektu, a także czas diagnozy obiektu.

W modelach stochastycznych procesów górniczych rozkład beta może być wykorzystywany w modelowaniu czasów realizacji czynności i operacji cyklu produkcyjnego, realizowanego w przodku ścianowym kopalń węgla kamiennego [10, 12, 13].

Funkcje zmiennych losowych, których rozkładem wynikowym jest rozkład beta [4, 5]

— Jeśli X_1, X_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie gamma z parametrami odpowiednio λ, α_1 oraz λ, α_2, to zmienna losowa

$$Z=\frac{X_1}{X_1+X_2} \tag{4}$$

ma rozkład beta dla $0 \le z \le 1$ z parametrami $p = \alpha_1$, $q = \alpha_2$.

— Jeśli F jest zmienną losową o rozkładzie F-Snedecora z parametrami (stopniami swobody) k_1 oraz k_2, to zmienna losowa

$$X=\frac{1}{1+\dfrac{k_1}{k_2}F} \tag{5}$$

ma rozkład beta dla $0 \le x \le 1$ z parametrami $p = \frac{1}{2}k_2$, $q = \frac{1}{2}k_1$.

— Jeśli F jest zmienną losową o rozkładzie F-Snedecora z parametrami (stopniami swobody) k_1 oraz k_2, to zmienna losowa

$$Y=\frac{k_1}{k_2+k_1F} \tag{6}$$

ma rozkład beta dla $0 \le y \le 1$ z parametrami $p = \frac{1}{2}k_1$, $q = \frac{1}{2}k_2$.

— Jeśli X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach chi-kwadrat z parametrami (stopniami swobody) odpowiednio $2b$ oraz $2a$, to zmienna losowa

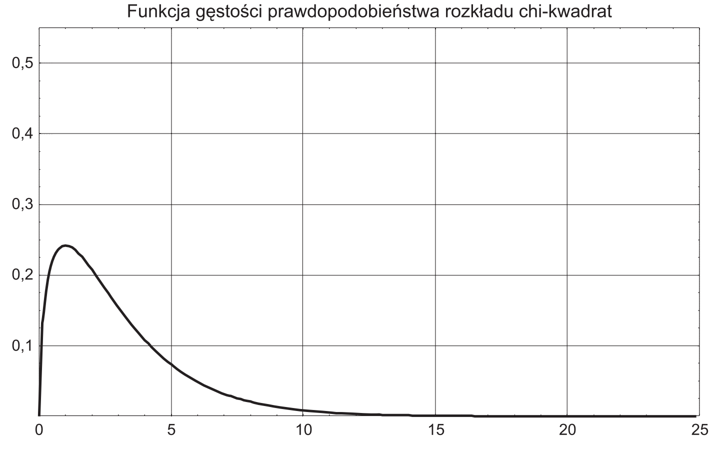
$$Z = \frac{Y}{X + Y} \tag{7}$$

ma rozkład beta dla $0 \leq z \leq 1$ z parametrami $p = a$, $q = b$.

Jeśli zmienna losowa X ma rozkład beta z parametrami (p, q), to zmienna losowa $Y = 1–X$ ma rozkład beta z parametrami (q, p).

2.2. Rozkład wynikowy chi-kwadrat (χ^2)

Rozkład chi-kwadrat (rys. 2) po raz pierwszy został zastosowany w 1876 roku przez niemieckiego geodetę i geofizyka Roberta Helmerta (1843–1917). W 1900 roku został rozpowszechniony przez K. Pearsona (wprowadził symbol χ^2 – wykładnik ma jedynie wskazać, że pochodzi z sumy kwadratów).



Rys. 2. Przykładowy wykres rozkładu chi-kwardat

Źródło: opracowanie własne

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu chi-kwadrat (χ^2) jest określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{dla} \quad x > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x \leq 0 \end{cases} \tag{8}$$

gdzie n – liczba stopni swobody (termin wprowadzony przez Ronalda Fishera).

Kształt funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu chi-kwadrat zależy od liczby stopni swobody n. Jeśli $n \leq 2$, to funkcja gęstości jest funkcją malejącą (dla $x > 0$), natomiast w przypadku, gdy $n > 2$, funkcja ma jedno maksimum w punkcie $(n–2)$.

Gdy liczba stopni swobody jest większa od 30, wówczas rozkład normalny daje dostatecznie dobre przybliżenie rozkładu chi-kwadrat.

Przykłady zmiennych losowych o rozkładzie chi-kwadrat

Rozkład chi-kwadrat ma zastosowanie przede wszystkim w statystyce matematycznej. Autor nie znalazł w literaturze przykładu zastosowania rozkładu chi-kwadrat jako stochastycznego modelu procesu rzeczywistego lub jego fragmentu. W przypadku jednak, gdy w modelowanym procesie mamy do czynienia z sumą niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie normalnym standaryzowanym, wówczas charakterystyką wynikową takiej sumy jest zmienna losowa o rozkładzie chi-kwadrat.

Funkcje zmiennych losowych, których rozkładem wynikowym jest rozkład chi-kwadrat [1, 4]

— Jeśli zmienne losowe $X_1, X_2, ..., X_n$ są niezależne i mają rozkład normalny $N(0,1)$, to zmienna

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \tag{9}$$

ma rozkład chi-kwadrat χ^2 (w funkcji gęstości prawdopodobieństwa symbol χ^2 zastąpiono przez x).

— W przypadku ogólnym, jeśli zmienne losowe $X_1, X_2, ..., X_n$ nie mają rozkładu $N(0,1)$, lecz $N(\mu_i, \delta_i)$ dla $i = 1, 2, ..., n$, to zmienna χ^2 jest obliczana według wzoru

$$\chi^2 = \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\delta_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\delta_2}\right)^2 + ... + \left(\frac{x_n - \mu_n}{\delta_n}\right)^2 \tag{10}$$

gdzie:

$\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ — wartości oczekiwane zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$,
$\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$ — odchylenia standardowe zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Zmienna χ^2 przedstawiona powyższym wzorem podlega rozkładowi chi-kwadrat (χ^2) z parametrem n (w funkcji gęstości prawdopodobieństwa symbol χ^2 zastąpiono przez x).

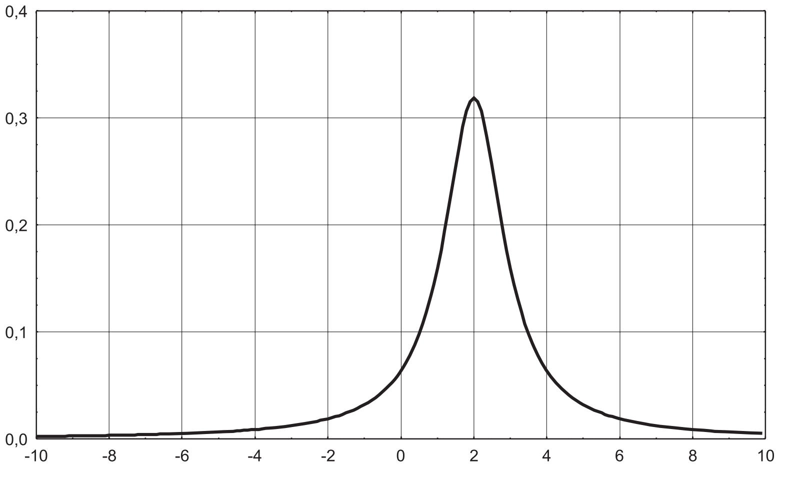
2.3. Rozkład wynikowy Cauchy'ego

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu Cauchy'ego (rys. 3) jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x - \mu)^2} \tag{11}$$

gdzie:

λ — parametr skali,
μ — parametr przesunięcia.



Rys. 3. Przykładowy wykres rozkładu Cauchy'ego
Źródło: opracowanie własne

W szczególnym przypadku, jeśli $\lambda = 1$ oraz $\mu = 0$, funkcja gęstości prawdopodobieństwa przyjmuje postać

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2} \tag{12}$$

Rozkład Cauchy'ego jest szczególnym przypadkiem rozkładu Studenta dla $k = 1$ stopni swobody.

Przykłady zmiennych losowych o rozkładzie Cauchy'ego

Autor nie znalazł w analizowanej literaturze zastosowania rozkładu Cauchy'ego jako modelu stochastycznego procesu rzeczywistego lub jego fragmentu. Nie wyklucza to jednak możliwości otrzymania charakterystyki zgodnej z tym rozkładem, choćby w przypadku zmiennej losowej, która jest ilorazem dwóch innych o rozkładach normalnych standaryzowanych.

Funkcje zmiennych losowych, których rozkładem wynikowym jest rozkład Cauchy'ego [5, 6]

— Jeśli N_1 oraz N_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych standaryzowanych $N(0,1)$, to zmienna losowa Y będąca ilorazem tych zmiennych

$$Y = \frac{N_1}{N_2} \tag{13}$$

ma rozkład Cauchy'ego dla parametrów $\lambda = 1$, $\mu = 0$.

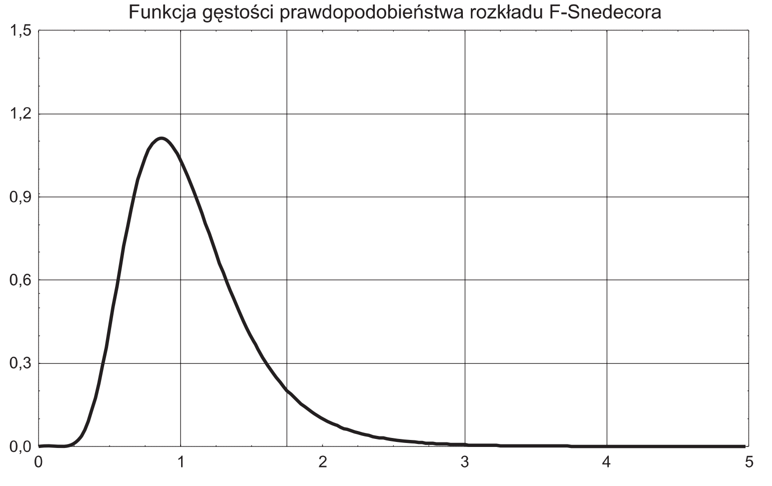
— Jeśli Y jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym w przedziale (0,1), to zmienna X równa

$$X = \mathrm{tg}\,(\pi Y) \tag{14}$$

ma rozkład Cauchy'ego z parametrami $\lambda = 1$, $\mu = 0$.

2.4. Rozkład wynikowy *F*-Snedecora

Rozkład odkryty został przez Ronalda A. Fishera w roku 1924 (określany jest także jako rozkład Snedecora, rozkład F Snedecora–Fishera, rozkład F-Fishera).



Rys. 4. Przykładowy wykres rozkładu F-Snedecora
Źródło: opracowanie własne

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu F-Snedecora (rys. 4) jest określona wzorem

$$h(f) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k_1 + k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{k_2}{2}\right)} \left(\dfrac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}} f^{\frac{k_1 - 2}{2}} \left(1 + \dfrac{k_1}{k_2} f\right)^{-\frac{k_1 + k_2}{2}} & \text{dla} \quad f > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad f \le 0 \end{cases} \tag{15}$$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa wyjątkowo nie jest oznaczona jako $f(x)$, tylko jako $h(f)$, ze względu na tradycje oznaczania zmiennej rozkładu F-Snedecora dużą literą F. Funkcja $h(f)$ nazywa się niekiedy funkcją Fishera–Snedecora.

Przykłady zmiennych losowych o rozkładzie *F*-Snedecora

Autor nie znalazł przykładu procesu rzeczywistego lub jego fragmentu, który w procesie symulacji stochastycznej modelowany byłby rozkładem *F*-Snedecora. Można jednak zauważyć, że rozkład ten może być charakterystyką zmiennej losowej będącej kwadratem innej zmiennej losowej o rozkładzie *t*-Studenta. Pozostałe możliwości wykorzystania rozkładu *F*-Snedecora, jako funkcji zmiennych losowych, zamieszczono poniżej.

Funkcje zmiennych losowych, których rozkładem wynikowym jest rozkład *F*-Snedecora [2, 4, 5, 7]

— Jeśli U jest niezależną zmienną losową o rozkładzie χ^2 (chi-kwadrat) i k_1 stopniach swobody, V jest niezależną zmienną losową o rozkładzie χ^2 i k_2 stopniach swobody, to zmienna losowa F określona wzorem

$$F = \frac{U}{V}\frac{k_2}{k_1} \tag{16}$$

ma rozkład *F*-Snedecora o parze (k_1, k_2) stopni swobody.

— Jeśli $X_1, X_2, ..., X_n$ oraz $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie normalnym $N(\mu, \delta)$, to zmienna losowa

$$F = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2} \tag{17}$$

gdzie:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{18}$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i \tag{19}$$

ma rozkład *F*-Snedecora z parametrami (stopniami swobody) równymi:

$$k_1 = n - 1, \quad k_2 = m - 1.$$

— Jeśli T jest zmienną losową o rozkładzie *t*-Studenta z parametrem (liczbą stopni swobody) równym k, to zmienna losowa $F = t^2$ ma rozkład *F*-Snedecora z parametrami $k_1 = 1$ oraz $k_2 = k$.

— Jeśli F jest zmienną losową o rozkładzie *F*-Snedecora ze stopniami swobody (k_1, k_2), to zmienna losowa

$$Z = \frac{1}{F} \tag{20}$$

ma rozkład *F*-Snedecora ze stopniami swobody (k_2, k_1).

2.5. Rozkład wynikowy gamma

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu gamma (nazywanego także rozkładem Pearsona III typu) (rys. 5) jest następująca:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & \text{dla} \quad x > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x \le 0 \end{cases} \tag{21}$$

gdzie $\Gamma(\alpha)$ – funkcja gamma Eulera

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt \tag{22}$$

Jeśli n należy do zbioru liczb naturalnych, to

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{23}$$

Rys. 5. Przykładowy wykres rozkładu gamma

Źródło: opracowanie własne

Przykłady zmiennych losowych o rozkładzie gamma

Zmienna losowa o rozkładzie gamma jest często wykorzystywana do modelowania procesów rzeczywistych lub ich fragmentów. Modele stochastyczne budowane z wykorzystaniem tej zmiennej dotyczą procesów lub zjawisk z zakresu techniki, w szczególności zagadnień niezawodności maszyn i urządzeń. Zjawiska spotykane w przyrodzie mogą także być z powodzeniem modelowane za pomocą rozkładu gamma, o czym świadczą zamieszczone poniżej przykłady.

Zmienne losowe (lub procesy), w których modelowaniu jest wykorzystywany rozkład gamma, to:

- trwałość produktów;
- czas pracy urządzenia między awariami;
- sumaryczny czas pracy urządzenia, gdyż suma zmiennych losowych o rozkładach gamma ma – przy pewnych warunkach – również rozkład gamma (o innych parametrach);
- modelowanie maksymalnego przepływu w rzece [8];
- granica plastyczności elementów żelbetowych;
- poziom miesięcznych opadów atmosferycznych [14];
- czas upływający do chwili przyjazdu określonej liczby pojazdów.

Funkcje zmiennych losowych, których rozkładem wynikowym jest rozkład gamma [2]

- Jeśli $X_1, X_2, ..., X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym standaryzowanym rozkładzie normalnym $N(0,1)$, to zmienna losowa

$$X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2 \tag{24}$$

ma rozkład gamma o parametrach $\alpha = \frac{n}{2}, \lambda = \frac{1}{2}$.

- Jeśli $X_1, X_2, ..., X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach gamma z parametrami odpowiednio $\alpha_1, \lambda; \alpha_2, \lambda; ...; \alpha_n, \lambda$, to zmienna losowa

$$X_1 + X_2 + ... + X_n \tag{25}$$

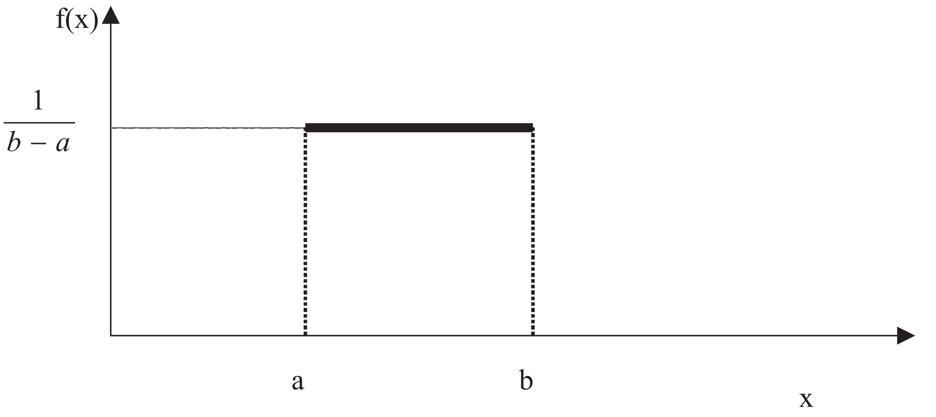
ma rozkład gamma o parametrach $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n, \lambda$.

2.6. Rozkład wynikowy jednostajny

Rozkład jednostajny (rys. 6) występuje w literaturze także jako rozkład równomierny lub prostokątny.

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu jednostajnego określona jest wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{dla} \quad a \le x \le b \\ 0 & \text{dla} \quad x < a, x > b \end{cases} \tag{26}$$



Rys. 6. Przykładowy wykres rozkładu jednostajnego
Źródło: opracowanie własne

Przykłady zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym

Cechą charakterystyczną rozkładu jednostajnego jest to, że prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną losową X wartości z dowolnego przedziału zależy jedynie od długości tego przedziału. W modelach stochastycznych rozkład jednostajny jest wykorzystywany przede wszystkim w celu generowania liczb losowych o innych, bardziej skomplikowanych rozkładach. Przykłady zamieszczone poniżej, z którymi spotkał się autor, świadczą o możliwościach wykorzystania zmiennych losowych mających rozkład jednostajny w modelach stochastycznych procesów techniczno-technologicznych.

Poniżej wymieniono przykłady zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym:
- zmienną losową o rozkładzie jednostajnym w przedziale do 0 do 360 stopni może być kierunek, z którego do projektowanej konstrukcji mogą się zbliżać fale uderzeniowe trzęsienia ziemi;
- średnica wałka wybranego losowo spośród wałków toczonych przy użyciu jednego noża, którego zużycie jest proporcjonalne do liczby wytoczonych wałków;
- różnica faz drgań dwóch źródeł napięcia sinusoidalnego włączanych niezależnie;
- błąd zaokrąglenia liczby uzyskanej z pomiaru lub z obliczeń.

Funkcje zmiennych losowych, których rozkładem wynikowym jest rozkład jednostajny [9]

Jeśli zmienna losowa ma rozkład jednostajny w przedziale x_1, x_2, to zmienna losowa

$$Y = aX + b \tag{27}$$

dla $a \neq 0$ ma rozkład jednostajny w przedziale

$$y_1 = ax_1 + b, \quad y_2 = ax_2 + b.$$

3. Wnioski końcowe

Wykorzystanie zamieszczonych w niniejszej pracy funkcji zmiennych losowych może uprościć tworzony model stochastyczny procesu rzeczywistego.

W ten sposób przeprowadzona redukcja modelu ma korzystny wpływ na dalsze etapy jego wykorzystania, a więc upraszcza zapis w postaci programu komputerowego i skraca sam proces symulacji stochastycznej.

W części drugiej pracy zaprezentowane zostaną pozostałe, wybrane funkcje zmiennych losowych.

LITERATURA

[1] *Aczel Amir D.*: Statystyka w zarządzaniu. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN 2000 (dane oryginału: Complete Business Statistics, Boston Sydney, Richard D. Irwin Inc., 1993)

[2] *Bobrowski D.*: Probabilistyka w zastosowaniach technicznych. Warszawa, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne 1980

[3] *Brandt S.*: Analiza danych. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN 1998 (dane oryginału: Statistical and Computational Methods in Data Analysis, New York, Springer Verlag 1997)

[4] *Gerstenkorn T., Śródka T.*: Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa. Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1967

[5] *Greń J.*: Statystyka matematyczna. Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1987

[6] *Klonecki W.*: Statystyka dla inżynierów. Warszawa – Wrocław, Wydawnictwo Naukowe PWN 1999

[7] *Krysicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowska K., Wasilewski M.*: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach. Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1986

[8] *Markovic R.D.*: Probability Function of Best Fit To Distributions of Annual Precipitation and Runoff. Colorado State Univ., Hydrol. Paper, 8, August 1965

[9] *Pacut A.*: Prawdopodobieństwo, teoria, modelowanie probabilistyczna w technice. Warszawa, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne 1985

[10] *Praca zbiorowa*: Określenie czasów trwania operacji „przesuwanie obudowy zmechanizowanej" dla różnych typów obudowy zmechanizowanej. Katowice, Centralny Ośrodek Informatyki Górnictwa 1981 (praca naukowo-badawcza)

[11] *Snopkowski R.*: Metoda identyfikacji rozkładu prawdopodobieństwa wydobycia uzyskiwanego z przodków ścianowych kopalń węgla kamiennego. Rozprawy i Monografie, Kraków, UWND AGH, nr 85, 2000

[12] *Snopkowski R.*: Boundary Conditions for Elementary Functions of Probability Densities for the Production Process Realised in Longwalls. Archives of Mining Sciences, Polish Academy of Sciences, Warszawa – Kraków, Wydawnictwo Naukowe PWN, vol. 45, Issue 4, 2000

[13] *Snopkowski R.*: Charakterystyka rozkładu beta – przykład wykorzystania w modelowaniu procesów górniczych. Kwartalnik AGH Górnictwo, z. 1, 1993

[14] *Whitcomb M.*: A Statistical Study of Rainfall. Cambridge, Department of Meteorology, Massachusetts Institute of Technology 1940