AUTOMATYKA • 2008 • Tom 12 • Zeszyt 3

Edyta Kucharska*, Lidia Dutkiewicz*

Heurystyczne przeszukiwanie drzewa rozwiązań dla problemu szeregowania na maszynach równoległych

1. Wprowadzenie

Celem artykułu jest przedstawienie algorytmu wykorzystującego heurystyczne przeszukiwanie drzewa rozwiązań. Został on opracowany do rozwiązywania problemów szeregowania zadań na wielu maszynach. Można go zastosować do rozwiązywania problemów, dla których kryterium jakości jest addytywnie separowalne i monotonicznie rosnące. Prezentowany algorytm wykorzystuje model przestrzeni stanów, w szczególności graf przejść i oparty jest na ogólnym schemacie modelu algebraiczno-logicznego. Stanowi on rozwinięcie algorytmu konstruującego pojedynczą trajektorię, przedstawionego w [5].

Zastosowany model algebraiczno-logiczny odpowiada pewnej formalnej postaci wieloetapowego procesu decyzyjnego połączonego z symulacją dyskretnego procesu produkcyjnego. Aby przedstawić dany problem w postaci modelu algebraiczno-logicznego, należy określić postać stanu systemu, zbiory stanów docelowych oraz stanów niedopuszczalnych, a także zdefiniować postać decyzji, zbiór decyzji możliwych do podjęcia w poszczególnych stanach oraz zbiór decyzji dopuszczalnych, a także podać elementy składające się na funkcję przejścia. W każdym nowo wyznaczonym stanie symulowanego procesu podejmowana jest decyzja, wybierana spośród decyzji możliwych (sensownych) w tym stanie. Dla danego stanu i wybranej decyzji wyznaczany jest, za pomocą funkcji przejścia, następny stan procesu oraz odpowiadający mu moment czasu. Jeśli wyznaczony stan należy do zbioru stanów docelowych procesu, przebieg symulacji jest zakończony pomyślnie i można dokonać jego oceny. Jeśli natomiast stan i związany z nim czas nie spełniają warunków ograniczających, to znajduje się on w zbiorze tzw. stanów niedopuszczalnych i symulacja procesu jest przerywana.

Ogólny schemat modelu algebraiczno-logicznego zaproponowany został w [2]. Schemat ten powstał na podstawie metody logiczno-algebraicznej, wprowadzonej przez Z. Bubnickiego [1].

* Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Jeśli przyjmiemy oznaczenia: X – zbiór stanów właściwych, $T \subset \boldsymbol{R+}$ – podzbiór nieujemnych liczb rzeczywistych reprezentujących chwile czasowe, $S = X \times T$ – zbiór stanów uogólnionych, U – zbiór decyzji, to model można zdefiniować jako czwórkę:

$$P = (s_0, f, S_N, S_G) \tag{1}$$

gdzie:

$s_0 = (x_0, t_0)$, $s_0 \in S$ – uogólniony stan początkowy,
$f: U \times S \to S$ – funkcja częściowa (a więc określona tylko dla pewnych par $(u, s) \in U \times S$), zwana funkcją przejścia,
$S_N \subset S$ – zbiór uogólnionych stanów niedopuszczalnych,
$S_G \subset S$ – niepusty zbiór uogólnionych stanów docelowych.

Funkcja przejścia jest zdefiniowana za pomocą dwóch funkcji

$$f = (f_x, f_t),$$

gdzie:

$f_x: U \times X \times T \to X$ – określa następny stan właściwy,
$f_t: U \times X \times T \to T$ – określa następny moment czasu i spełnia następujący warunek: $\Delta t = f_t(u, x, t) - t$ ma wartość dodatnią i skończoną.

Oparty na tym modelu proponowany algorytm został zastosowany dla specyficznego problemu szeregowania zadań na maszynach równoległych. Problem ten należy do klasy problemów trudnych, dla których metody dokładne są bardzo kosztowne obliczeniowo, zarówno w zakresie czasu działania, jak i wymaganej pamięci. Koszt poszukiwania rozwiązania optymalnego dla problemów tej klasy zwykle jest zbyt duży [6], stąd stosuje się metody przybliżone, wykorzystujące różnego rodzaju heurystyki. Dodatkową trudność sprawia jeszcze fakt, że w takich problemach często nie można z góry określić ciągu czynności prowadzących do rozwiązania, w związku z tym konstrukcja rozwiązania musi opierać się na symulacji procesu. Wyznaczanie rozwiązania może polegać w takim przypadku na skonstruowaniu jednej trajektorii lub wielu trajektorii i wyborze najlepszej z nich.

2. Proponowany algorytm

Proponowany algorytm jest algorytmem heurystycznym, polegającym na generowaniu wielu trajektorii. Najpierw algorytm konstruuje początkową trajektorię, a następnie poprawia końcowe odcinki znalezionej trajektorii. W szczególności może generować całe trajektorie. Algorytm kończy działanie, gdy wygenerowana zostanie z góry zadania liczbę stanów końcowych lub gdy uzyskana zostanie trajektoria dopuszczalna o zadawalającej wartość funkcji celu. Jako rozwiązanie zwracana zostaje trajektoria o najlepszej wartości funkcji celu.

W przypadku prezentowanego algorytmu, podobnie jak w innych algorytmach konstruujących ograniczoną liczbę trajektorii, niezwykle istotnym jest, aby uzyskiwać trajektorie o wysokiej jakości kryterium.

O skuteczności działania rozważanego algorytmu decydują dwa istotne elementy. Pierwszym jest wybór decyzji w trakcie generowania pojedynczej trajektorii lub poprawy końcowej części trajektorii. Drugi istotny element to wybór w grafie stanów takiego stanu, od którego będzie poprawiana trajektoria.

Prezentowany algorytm do wyboru decyzji w kolejnych stanach wykorzystuje optymalizację lokalną. Funkcje optymalizacji lokalnej (inaczej funkcje preferencji lub heurezy) dobierane są w sposób intuicyjny. Może być wiele różnych funkcji optymalizacji lokalnej dla tego samego problemu, a ich jakość sprawdzana jest za pomocą eksperymentów komputerowych lub na podstawie oszacowań błędów. Odpowiednie skonstruowanie funkcji optymalizacji lokalnej znacznie wpływa na możliwość szybkiego wygenerowania rozwiązania dopuszczalnego. Opisany w artykule algorytm wybiera w bieżącym stanie najlepszą decyzję na podstawie specjalnie skonstruowanej funkcji. Funkcja ta analizuje aktualny stan sytemu i szacuje przyrost kryterium globalnego na końcowym odcinku trajektorii. Ma ona następującą postać:

$$\begin{aligned} q(u,x,t) = {} & \delta Q(u,x,t) + \vec{Q}(u,x,t) + \\ & +\alpha_1 \cdot \vec{\varphi}_1(u,x,t) + \ldots + \alpha_i \cdot \vec{\varphi}_i(u,x,t) + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{\varphi}_n(u,x,t) + \\ & +\beta_1 \cdot \vec{\rho}_1(u,x,t) + \ldots + \beta_k \cdot \vec{\rho}_k(u,x,t) + \ldots + \beta_m \cdot \vec{\rho}_m(u,x,t) \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie:

- $\delta Q(u,x,t)$ – oszacowanie przyrostu kosztu globalnego w wyniku podjęcia decyzji u w stanie $s = (x, t)$,
- $\vec{Q}(u,x,t)$ – oszacowanie wartości wskaźnika jakości końcowego odcinka trajektorii w stanie $s = (x, t)$,
- $\vec{\varphi}_i(u,x,t)$ – składniki szacujące wpływ dodatkowych ograniczeń lub dodatkowych wymagań w przestrzeni stanów, $i = 1, 2, \ldots n$,
- α_i – współczynniki, które określają wagi składników $\vec{\varphi}_i(u,x,t)$,
- $\vec{\rho}_k(u,x,t)$ – składniki określające preferowanie pewnego typu decyzji, $k = 1, 2, \ldots m$,
- β_k – współczynniki, które określają wagi składników $\vec{\rho}_k(u,x,t)$.

Szczegółowo funkcja $q(u, x, t)$ została przedstawiona w [5] i [7].

W przypadku konstruowania trajektorii w oparciu o wcześniej wygenerowaną trajektorię, istotny jest sposób wyboru stanu, od którego rozpoczynane jest poprawianie końcowego odcinka trajektorii. Skonstruowanie końcowego odcinka trajektorii jest jednoznaczne z utworzeniem kolejnej, nowej trajektorii.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że graf stanów uogólnionych ma strukturę bliską struktury drzewa. Wynika to stąd, że nawet jeżeli dla dwóch stanów uogólnionych $s_1 = (x, t_1)$ i $s_2 = (x, t_2)$ stan właściwy x jest taki sam, to stan uogólniony będzie różny, gdy istnieje różnica pomiędzy t_1 i t_2. Przy założeniu, że graf stanów ma strukturę drzewa, wybór stanu jest równocześnie wyborem trajektorii, której końcowy odcinek będzie modyfikowany.

Sposób wyboru tego stanu może być jeden, z góry określony dla wszystkich generowanych końcowych odcinków trajektorii. Bardziej efektywną metodą jest jednak opracowanie i wykorzystanie takich algorytmów, w których sposób wyboru stanu zmienia się w zależności od jakości dotychczas wygenerowanych trajektorii.

W pracy proponowane jest, aby z każdym stanem związany był pewien zestaw atrybutów, które ściśle zależą od rozpatrywanego problemu. Postaci atrybutów określane są na podstawie wiedzy uzyskanej w trakcie analizy tego problemu oraz pewnych obserwacji i intuicji projektanta.

W prezentowanym algorytmie generowanie końcowego odcinka trajektorii rozpoczynane jest od takiego z dotychczas wygenerowanych stanów, dla którego wartość wybranego atrybutu jest najlepsza (minimalna lub maksymalna). Ponadto od momentu uzyskania pierwszej trajektorii dopuszczalnej możliwość wyboru zostaje zawężona do dotychczas wygenerowanych tak zwanych stanów „rozwojowych".

Definicja *stanu rozwojowego* jest następująca:

Definicja 1

Stanem rozwojowym nazywany jest taki spośród dotychczas wygenerowanych stanów dopuszczalnych, dla którego:

– wartość wskaźnika jakości dla początkowej części trajektorii (od stanu początkowego do tego stanu) wraz z oszacowaniem wartości wskaźnika jakości dla końcowego odcinka jest mniejsza od najlepszej wartości wskaźnika jakości dla dotychczas wygenerowanych trajektorii dopuszczalnych;
– podzbiór zbioru decyzji możliwych do podjęcia w danym stanie, zawierający tylko nierozpatrzone decyzje, nie jest zbiorem pustym.

Jako *nierozpatrzone decyzje* w danym stanie, rozumie się tutaj te spośród decyzji możliwych w tym stanie, dla których nie były wcześniej generowane końcowe odcinki trajektorii.

Generowanie końcowego odcinka trajektorii może się rozpocząć od:

– losowego stanu rozwojowego,
– najwcześniej wygenerowanego stanu rozwojowego,
– stanu rozwojowego o najniższej dotychczasowej wartości wskaźnika jakości (analogia do strategii *cheapest-first*),
– najlepszego stanu rozwojowego, przy czym przez najlepszy stan rozwojowy należy rozumieć stan, dla którego wartość specjalnie zdefiniowanego atrybutu jest najlepsza (najmniejsza lub największa).

W pracy proponuje się zastosowanie ostatniego sposobu wyboru węzła rozwojowego.

3. Opis problemu

Prezentowany w pracy algorytm może między innymi posłużyć do znajdowania rozwiązania problemów należących do klasy problemów szeregowania zadań na wielu maszynach z czasami przezbrojeń zależnymi od stanu. Przykładem takiego problemu jest problem drążenia wyrobisk korytarzowych (problem DWK).

Problem ten związany jest z wykonaniem prac przygotowawczych, jakie mają miejsce w procesie pozyskiwania kopalin użytecznych i polega na wydrążeniu sieci wyrobisk korytarzowych przy wykorzystaniu odpowiednich technologii, tak, aby całkowity koszt realizacji sieci był jak najmniejszy. Ponadto prace muszą być tak realizowane, aby nie zostały przekroczone terminy krytyczne określone dla niektórych wyrobisk.

Należy zatem wydrążyć wyrobiska korytarzowe (chodniki) c należące do zbioru C chodników przeznaczonych do wydrążenia. Ustalony dla chodnika termin krytyczny oznaczany jest jako *deadline*(c). Drążenie wykonywane jest równolegle przez jednorodne maszyny m należące do zbioru M, m = 1, 2, ...$|M|$, przy czym $M = M_I \cup M_{II}$. Poszczególne maszyny różnią się parametrami pracy. Maszyny należące do pierwszego typu M_I charakteryzują się większą prędkością drążenia, a więc są bardziej efektywne niż maszyny drugiego typu M_{II}. Jednocześnie jednak koszt ich wykorzystania jest znacznie wyższy niż koszt takiej samej pracy wykonanej przez maszynę z drugiego podzbioru. Ponadto konieczny jest transport tych maszyn, a jego koszt jest stosunkowo wysoki. Transport maszyn może odbywać się drogami, na które składają się wyłącznie wcześniej wykonane wyrobiska. Tak więc droga, a zarazem czas transportu maszyny zależy od aktualnego stanu realizacji prac.

Problem DWK można sformułować jako problem szeregowania zadań na maszynach równoległych. Wydrążenie danego chodnika c jest wtedy równoznaczne z wykonaniem zadania. Transport maszyny odpowiada natomiast przezbrojeniu maszyny.

Rozważany problem DWK należy do klasy problemów NP-trudnych [7]. Model algebraiczno-logiczny problemu został przedstawiony w [4, 7], gdzie podana została struktura stanu systemu, postać decyzji i funkcja przejścia oraz określone zostały zbiory stanów niedopuszczalnych S_N i stanów docelowych S_G, zbiór decyzji możliwych w danym stanie $U_p(s)$ i zbiór decyzji dopuszczalnych $U_d(s)$.

4. Algorytm dla problemu DWK

Poniżej opisana zostanie realizacja proponowanego algorytmu dla problemu DWK. Najpierw podana zostanie postać specjalnie określonej funkcji kryterialnej będącej podstawą optymalizacji lokalnej. Następnie omówiony zostanie sposób wyboru stanu, od którego generowane są końcowe odcinki trajektorii. Wybór ten dokonywany jest za pomocą atrybutu charakterystycznego dla tego problemu.

4.1. Optymalizacja lokalna

W proponowanym algorytmie, dla problemu DWK, w trakcie generowania trajektorii w każdym stanie procesu rozwiązywane jest zadanie optymalizacji lokalnej postaci takiej, jaki to przedstawia wzór (3).

$$q(u,x,t) = \delta Q(u,x,t) + \ddot{Q}(u,x,t) + \\ + \alpha \cdot \ddot{\varphi}_1(u,x,t) + \beta_1 \cdot \ddot{\rho}_1(u,x,t) + \beta_2 \cdot \ddot{\rho}_2(u,x,t) \tag{3}$$

gdzie α, β_1 oraz β_2 oznaczają współczynniki, określające wagę odpowiedniego składnika kryterium lokalnego.

Funkcja lokalna q składa się więc z trzech podstawowych części. Pierwsza dotyczy szacowania $\delta Q(u,x,t)$ kosztów wynikających z ewentualnego podjęcia rozważanej decyzji: kosztu realizacji rozważanej decyzji oraz oszacowania $\ddot{Q}(u,x,t)$ – kosztu dokończenia prac. Wartości tych kosztów nie są dokładnie wyliczane, a jedynie szacowane. Druga część $\ddot{\varphi}_1(u,x,t)$ uwzględnia oszacowanie odległości od ograniczeń czasowych i wpływa na wybór decyzji przybliżającej wykonanie chodników z określonym terminem krytycznym. Trzecia część zawiera składniki kryterium $\ddot{\rho}_1(u,x,t)$ i $\ddot{\rho}_2(u,x,t)$, związane z preferowaniem pewnych typów decyzji.

Sposób wyznaczania składników kryterium lokalnego przedstawiony został poniżej.

Oszacowanie $\delta Q(u,x,t)$ przyrostu kryterium globalnego w wyniku podjęcia decyzji u w stanie (x_k, t_k) równe jest sumie kosztów wykonania (drążenia) całych chodników, rozważanych do przydzielenia maszynom w danej decyzji. Niewliczane są tu koszty postoju maszyn oraz koszt transportu maszyn. Pomijany jest też koszt związany z dokończeniem wcześniej rozpoczętego drążenia (gdyż dla każdej rozważanej decyzji wartość ta jest taka sama).

Określając dolne oszacowanie kosztu zakończenia prac $\ddot{Q}(u,x,t)$, wzięto pod uwagę postać funkcji celu oraz przyjęty sposób pracy maszyny, w szczególności uwzględniono to, iż możliwy jest postój maszyn. W takim przypadku, koszt dokończenia prac będzie najmniejszy, gdy pozostałe do wydrążenia chodniki będą wykonywane tylko przez najtańszą maszynę i uwzględniony zostanie koszt postoju pozostałych maszyn. Wartość $\ddot{Q}(u,x,t)$ wyznaczana jest następująco. Liczona jest długość pozostała do wydrążenia, czyli sumowana jest długość wszystkich niewydrążonych i jednocześnie nieprzydzielonych chodników, z wyłączeniem tych chodników, które są w rozważanej decyzji. Następnie obliczane jest, ile kosztuje wydrążenie tej długości przez maszyny najtańsze oraz dodawany jest koszt postoju pozostałych maszyn przez czas drążenia wyznaczonej długości najtańszymi maszynami.

Oszacowanie $\ddot{\varphi}_1(u,x,t)$ wpływu ograniczeń czasowych wyznaczone zostało tak, aby w danym stanie (x, t) wybrana została decyzja u_j, należąca do zbioru decyzji możliwych w tym stanie, dla której $\bar{z}$, czyli średnia wartości sumy zapasów czasu pozostałych do wykonania chodników z terminami krytycznymi, jest największa:

$$\ddot{\varphi}_1(u_j,x,t) = \begin{cases} \infty & \text{dla} \quad \min\limits_c z(c) < 0 \\ \dfrac{1}{\bar{z}} & \text{dla} \quad \min\limits_c z(c) \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

gdzie $z(c)$ – zapas czasu dla zadania c.

Zapas czasu $z(c)$ wyznaczany jest dla chodników z określonym terminem krytycznym, z wyjątkiem tych, które są już ukończone, oraz tych, które mają już przydzielone maszyny, a także tych które są chodnikami przydzielanymi maszynom w rozważanej decyzji. Zapas ten uwzględnienia fakt, iż oprócz chodnika z terminem krytycznym (gdy nie jest on jeszcze dostępny) muszą zostać wydrążone chodniki, tworzące najkrótszą drogę do niego. Zapas jest różnicą pomiędzy najpóźniejszym możliwym terminem rozpoczęcia drążenia chodnika c (zakładając, że to drążenie odbywa się przy użyciu najszybszej maszyny) a czasem wydrążenia najkrótszej drogi od chodnika c do *obszaru możliwie dostępnego* (def. poniżej), dla rozważanej decyzji za pomocą najszybszej maszyny.

Wartość zapasów czasu wyznaczany jest następująco:

$$z(c) = LS(c) - \tau(c) \tag{5}$$

gdzie:

$LS(c)$ – najpóźniejszy możliwy termin rozpoczęcia drążenia chodnika c, przy założeniu, że to drążenie odbywa się przy użyciu najszybszej maszyny;

$\tau(c)$ – czas wydrążenia najkrótszej drogi od chodnika c, do obszaru możliwie dostępnego za pomocą najszybszej maszyny.

Definicja 2

Obszar możliwie dostępny dla rozpatrywanej decyzji u w stanie $s = (x, t)$ to obszar określony przez podgraf częściowy $G' = (C', W')$ grafu G reprezentującego strukturę połączeń sieci chodników. Graf G' utworzony jest z krawędzi grafu G, które odpowiadają wydrążonym chodnikom, chodnikom aktualnie przydzielonym maszynom do wykonywania i chodnikom przydzielanym maszynom w rozważanej decyzji, oraz z wierzchołków przyległych do tych krawędzi.

Składnik kryterium lokalnego $\rho_1(u_j, x, t)$ odzwierciedla preferowanie decyzji, które powodują zaangażowanie wszystkich maszyn do drążenia. Aby zmniejszyć prawdopodobieństwo postoju maszyn, gdy są dostępne wyrobiska do drążenia i maszyny mogłyby być je wykonywać naliczana jest kara dla decyzji o postoju maszyny.

Postać $\rho_1(u_j, x, t)$ jest następująca:

$$\rho_1(u_j, x, t) = P \cdot i_{pos} \tag{6}$$

gdzie:

P – kara za postój maszyny,

i_{pos} – liczba maszyn, które mają stać na skutek rozważanej decyzji, a mogłyby drążyć dostępne wyrobiska.

Ostatni składnik kryterium lokalnego $\rho_2(u_j, x, t)$ odzwierciedla preferowanie decyzji o wykonaniu pozostałych wyrobisk tylko najtańszymi maszynami w sytuacji, gdy wydrążone zostaną już wszystkie wyrobiska z terminami krytycznym. Przyjmuje się, iż wtedy wartość kryterium lokalnego dla decyzji zawierającej przydział pozostałych wyrobisk do drążenia innym maszynom niż najtańsze jest równa nieskończoności:

$$\rho_2\left(u_j, x, t\right)=\begin{cases}\infty & \text{dla } C_W\left(x,t\right)\subset C_L \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku}\end{cases} \tag{7}$$

gdzie:

C_L – zbiór wyrobisk z określonymi terminami krytycznymi,

$C_W(x, t)$ – zbiór wyrobisk wydrążonych w danym stanie.

4.2. Kryteria wyboru węzła grafu stanów

Przedstawione zostaną teraz różne sposoby wyboru stanu, od którego generowany jest końcowy odcinek trajektorii dla problemu DWK.

W proponowanym algorytmie stany, od których generowany jest końcowy odcinek trajektorii wybierane są na podstawie kryterium wyboru stanu, oznaczanego przez q_w. Postaci kryterium wyboru stanu opracowane zostały po dokonaniu szczegółowej analizy rozważanego problemu. Dzieje się tak aż do znalezienia pierwszej dopuszczalnej trajektorii. Następnie wybór stanu dokonywany jest ze zbiór stanów rozwojowych. Wybierany jest najlepszy stan rozwojowy w oparciu o kryterium wyboru stanu.

W opisie kryteriów wyboru stanu przyjęto następujące dodatkowe oznaczenia:

ns – numer stanu, od którego możliwe jest generowanie końcowych odcinków trajektorii,

$\vec{s}_{ns}$ – stan, od którego mogą być generowane końcowe odcinki trajektorii.

Dla problemu DWK zaproponowano następujące kryteria wyboru stanu, od którego poprawiana jest końcówka trajektorii:

1) Kryterium $q\_w_1\left(\vec{s}_{ns}\right)$ wyboru stanu – dla każdego ze stanów $\vec{s}_{ns}=\left(\vec{x}_{ns},\vec{t}_{ns}\right)$, wyznaczany jest stosunek kosztu wykonania prac dla początkowego odcinka trajektorii (od stanu początkowego s_0 do rozważanego stanu $\vec{s}_{ns}$) do całkowitej długości chodników jakie zostały wydrążone do rozważanego stanu $\vec{s}_{ns}$.

   Postać kryterium jest następująca:

$$q\_w_1\left(\vec{s}_{ns}\right)=\begin{cases}\dfrac{Q\left(\vec{s}_{ns}\right)}{DL\left(\vec{s}_{ns}\right)} & \text{dla } DL\left(\vec{s}_{ns}\right)>0 \\ 0 & \text{dla } DL\left(\vec{s}_{ns}\right)=0\end{cases} \tag{8}$$

gdzie:

$Q(\vec{s}_{ns})$ – koszt wykonania wszystkich prac od stanu początkowego s_0 do stanu $\vec{s}_{ns}$, czyli łączne koszty wydrążenia chodników, koszty transportu oraz koszty wynikające z postoju maszyn;

$DL(\vec{s}_{ns})$ – łączna długość wydrążona do stanu $\vec{s}_{ns}$, czyli suma długości chodników całkowicie wydrążonych oraz suma długości odcinków już wykonanych w chodnikach aktualnie drążonych przez maszyny.

Wybierany jest ten stan $\vec{s}_{ns}$, dla którego wyznaczona w ten sposób wartość kryterium $q\_w_1(\vec{s}_{ns})$ jest najmniejsza:

$$\vec{s}_{ns}^{*} = \min_{\vec{s}_{ns}} \left(q\_w_1(\vec{s}_{ns}) \right) \tag{9}$$

2) Kryterium $q\_w_2(\vec{s}_{ns})$ wyboru stanu – dla każdego ze stanów $\vec{s}_{ns} = (\vec{x}_{ns}, \vec{t}_{ns})$, wyznaczany jest stosunek kosztu wykonania prac dla początkowego odcinka trajektorii (od stanu początkowego s_0 do stanu $\vec{s}_{ns}$) do wartości $\vec{t}_{ns}$ (czasu wystąpienia rozważanego stanu).
Postać kryterium jest następująca:

$$q\_w_2(\vec{s}_{ns}) = \begin{cases} \dfrac{Q(\vec{s}_{ns})}{\vec{t}_{ns}} & \text{dla } \vec{t}_{ns} > 0 \\ 0 & \text{dla } \vec{t}_{ns} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Wybierany jest ten stan $\vec{s}_{ns}$, dla którego wyznaczona w ten sposób wartość kryterium $q\_w_2(\vec{s}_{ns})$ jest najmniejsza:

$$\vec{s}_{ns}{}^{*} = \min_{\vec{s}_{ns}} \left(q\_w_2(\vec{s}_{ns}) \right) \tag{11}$$

3) Kryterium $q\_w_3(\vec{s}_{ns})$ wyboru stanu – dla każdego ze stanów $\vec{s}_{ns} = (\vec{x}_{ns}, \vec{t}_{ns})$, wyznaczany jest stosunek łącznej długości wydrążonych chodników (od stanu początkowego s_0 do rozważanego stanu $\vec{s}_{ns}$) do wartości $\vec{t}_{ns}$ (czasu wystąpienia rozważanego stanu).
Postać kryterium jest następująca:

$$q\_w_3(\vec{s}_{ns}) = \begin{cases} \dfrac{DL(\vec{s}_{ns})}{\vec{t}_{ns}} & \text{dla } \vec{t}_{ns} > 0 \\ 0 & \text{dla } \vec{t}_{ns} = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Wybierany jest ten stan $\vec{s}_{ns}$, dla którego wyznaczona w ten sposób wartość kryterium $q\_w_3(\vec{s}_{ns})$ jest największa:

$$\vec{s}_{ns}{}^{*} = \max_{\vec{s}_{ns}} \left(q\_w_3(\vec{s}_{ns}) \right) \tag{13}$$

4) Kryterium $q\_w_4(s_{ns})$ wyboru stanu – dla każdego ze stanów $\vec{s}_{ns} = (\vec{x}_{ns}, \vec{t}_{ns})$, dla niewydrążonych chodników z określonym terminem krytycznym wyznaczana jest minimalna wartość różnicy czasu wynikającego z terminu krytycznego oraz czasu w rozważanym stanie.
   Postać kryterium jest następująca:

$$q\_w_4(\vec{s}_{ns}) = \min_c \left(deadline(c) - t_{ns} \right) \tag{14}$$

   Wybierany jest ten stan $\vec{s}_{ns}$, dla którego wyznaczona w ten sposób wartość kryterium $q\_w_4(s_{ns})$ jest największa:

$$\vec{s}_{ns}^{\,*} = \max_{\vec{s}_{ns}} \left(q\_w_4(\vec{s}_{ns}) \right) \tag{15}$$

5) Kryterium $q\_w_5(s_{ns})$ wyboru stanu – dla każdego ze stanów $\vec{s}_{ns} = (\vec{x}_{ns}, \vec{t}_{ns})$, wyznaczany jest stosunek minimalnej wartości zapasu czasu dla niewydrążonych chodników z określonym terminem krytycznym do łącznej długości wydrążonych chodników do tej pory.
   Postać kryterium jest następująca:

$$q\_w_5(\vec{s}_{ns}) = \begin{cases} \dfrac{\min_c \left(deadline(c) - t_{ns} \right)}{DL(\vec{s}_{ns})} & \text{dla } DL(\vec{s}_{ns}) > 0 \\ 0 & \text{dla } DL(\vec{s}_{ns}) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

   Wybierany jest ten stan $\vec{s}_{ns}$, dla którego wyznaczona w ten sposób wartość kryterium $q\_w_5(s_{ns})$ jest największa:

$$\vec{s}_{ns}{}^{*} = \max_{\vec{s}_{ns}} \left(q\_w_5(\vec{s}_{ns}) \right) \tag{17}$$

5. Eksperymenty

Dla sprawdzenia skuteczności zaproponowanego algorytmu przeprowadzone zostały eksperymenty komputerowe. W szczególności badano zastosowanie różnych sposobów wyboru stanu, od którego generowany jest końcowy odcinek trajektorii. Obliczenia prowadzone były na komputerach klasy Pentium IV.

Badania wykonano na zestawie kilkunastu sieci wyrobisk korytarzowych. Każda sieć wyrobisk reprezentowana jest przez graf płaski, w którym stopień wierzchołków wynosi od 1 do 4. Liczba wyrobisk z określonymi terminami krytycznymi stanowi około 25% liczby wszystkich wyrobisk. Sieci oznaczone jako GI oznaczają sieci o regularnej topologii, z dużą ilością chodników o podobnej długości. Z kolei GII oznacza sieci o nieregularnej topologii.

Aby ocenić efektywność zaproponowanego algorytmu przeprowadzone zostały badania porównawcze uzyskanych wyników z rozwiązaniem optymalnym. W tym celu dla wszystkich sieci zastosowano przegląd zupełny (w porządku leksykograficznym).

Rozwiązanie optymalne udało się uzyskać dla jednej sieci (oznaczonej jako GI-2). W pozostałych przypadkach obliczenia były przerywane po przeszło 2 dobach. Tylko dla pięciu sieci uzyskano w tym czasie rozwiązania dopuszczalne. Wśród rozwiązań dopuszczalnych dla każdej z tych sieci wyróżniono rozwiązanie suboptymalne, dla którego otrzymano najniższy koszt całkowity. Natomiast dla pozostałych sieci zastosowaną metodą przeglądu nie uzyskano żadnego rozwiązania dopuszczalnego.

Tabela 1

Porównanie kosztu uzyskanego przez zaproponowany algorytmy (różne wersje kryterium wyboru węzła) z kosztem wyznaczonym przez algorytm przeglądu zupełnego

Sieć / Koszt/czas	GI-1a	GI-1b	GI-2	GI-3	GII-4	GII-6
Koszt optymalny	–	–	16524,40	–	–	–
Czas wyznaczenia rozw. optymalnego	–	–	43 h 3 min 59 s	–	–	–
Koszt suboptymalny	16480,00	16538,30	–	17448,90	23132,40	31142,54
Czas wyznaczenia rozw. suboptymalnego	43 h 48 min	42 h 12 min	–	43 h 41 min	44 h 3 min	43 h 38 min
Koszt dla kryterium $q\_w_1(\vec{s}_{ns})$	16613,80	16835,80	16653,70	15037,80	22204,96	30924,39
Koszt dla kryterium $q\_w_2(\vec{s}_{ns})$	16710,30	16835,80	16748,20	15251,90	22204,96	30924,39
Koszt dla kryterium $q\_w_3(\vec{s}_{ns})$	16873,70	17046,80	16748,20	15660,70	22204,96	30924,39
Koszt dla kryterium $q\_w_4(\vec{s}_{ns})$	16710,30	16982,90	16748,20	15514,20	22204,96	30924,39
Koszt dla kryterium $q\_w_5(\vec{s}_{ns})$	16710,30	16835,80	16748,20	15251,90	22204,96	30924,39

W tabeli 1 przedstawiono porównanie kosztu uzyskanego przez zaproponowany algorytm (przy różnych kryteriach wyboru węzła) z kosztem wyznaczonym przez algorytm przeglądu, czyli kosztem optymalnym dla sieci GI-2 oraz kosztem suboptymalnym dla pozostałych pięciu sieci. Ponadto podano czas uzyskania rozwiązania optymalnego dla sieci GI-2, a dla pozostałych sieci czas po którym przerwano obliczenia algorytmu przeglądu zupełnego.

Z zestawienia tego wynika, że zaproponowany algorytm znajduje rozwiązanie z dość dobrym przybliżeniem. Mianowicie, w przypadku sieci GI-2, dla której udało się wyznaczyć rozwiązanie optymalne, błąd wynosi tylko około 1%. Natomiast dla sieci, dla których nie udało się w rozsądnym czasie wyznaczyć rozwiązania optymalnego, koszt znaleziony przez zaproponowany algorytm jest w większości przypadków niższy od kosztu suboptymalnego uzyskanego przez przerwany algorytm przeglądu zupełnego.

Należy dodatkowo podkreślić, że dla badanych sieci czas uzyskania rozwiązania przez zaproponowany algorytm jest co najmniej kilka rzędów wielkości mniejszy, nie przekraczał on bowiem 10 s.

6. Podsumowanie

W artykule zaproponowano algorytm konstruujący wiele trajektorii procesu w oparciu o optymalizację lokalną oraz poprawę końcowych odcinków trajektorii. Przedstawiona została realizacja tego algorytmu dla problemu drążenia wyrobisk korytarzowych DWK. Przeprowadzone zostały eksperymenty symulacyjne dla przykładowych instancji problemu DWK. Uzyskane wyniki potwierdziły efektywność przedstawionego algorytmu.

Na podstawie zaproponowanego podejścia można stworzyć inne algorytmu poprzez zmianę postaci kryterium lokalnego wyboru decyzji, a także zastosowanie nowych heurystyk do wyboru stanu, od którego poprawiane są końcowe odcinki trajektorii. Podejście takie może być również z powodzeniem zastosowane do rozwiązywania innych problemów, szczególnie należących do szerokiej klasy problemów szeregowania na wielu maszynach z przezbrojeniami.

Literatura

[1] Bubnicki Z., *Wstęp do systemów ekspertowych*. Warszawa, PWN 1990.

[2] Dudek-Dyduch E., *Formalizacja i analiza problematyki dyskretnych procesów produkcyjnych*. Zeszyty Naukowe AGH Automatyka, z. 54, 1990 (praca habilitacyjna).

[3] Dudek-Dyduch E., *Learning based algorithm in scheduling.* Cluver Academic Publishers, Journal of Intelligent Manufacturing (JIM), vol. 11, no 2, 2000, 135–143.

[4] Dudek-Dyduch E., Dutkiewicz L., Kucharska E., *Model algebraiczno-logiczny szeregowania zadań z uwzględnieniem transportu maszyn.* Automatyka (półrocznik AGH), t. 8, z. 3, 2004, 553–562.

[5] Dudek-Dyduch E., Dutkiewicz L., Kucharska E., *Algorytmy z szacowaniem kosztów w kryterium lokalnym dla problemu szeregowania zadań.* Automatyka (półrocznik AGH), t. 11 z. 3, 2007, 383–395.

[6] Janiak A., *Wybrane problemy i algorytmy szeregowania zadań i rozdziału zasobów.* Warszawa, Akademicka Oficyna Wydawawnicza PLJ 1999.

[7] Kucharska E., *Wykorzystanie modelu algebraiczno-logicznego do optymalizacji problemów szeregowania z czasem przezbrojeń zależnym od stanu.* Rozprawa doktorska 2006.