Górnictwo i Geoinżynieria • Rok 29 • Zeszyt 2 • 2005

Władysław Mikołajczyk, Krzysztof Filek**

ZASTOSOWANIE RÓWNANIA BILANSU DO WYBRANYCH ZJAWISK FIZYCZNYCH ZACHODZĄCYCH W WYROBISKACH GÓRNICZYCH**

1. Równanie bilansu

Jak wiadomo, pewne wielkości fizyczne można bilansować, stąd też takie procesy, jak przewodzenie ciepła, filtracja gazów w ośrodku porowatym czy dyfuzja, opisać można jednym równaniem. W tym celu prowadzi się rozumowanie takie jak przy wyprowadzaniu równania ciągłości – zakłada się ośrodek ciągły, w którym wyodrębnia się dowolną objętość Ω ograniczoną powierzchnią F, którą orientuje się wektorem normalnym na zewnątrz analizowanego obszaru.

Przyjmuje się następujace oznaczenia:

$\overline{G}$ — natężenie strumienia wielkości fizycznej, czyli ilość transportowanej wielkości fizycznej przypadająca na jednostkową powierzchnię w jednostce czasu;

Γ — gęstość (koncentracja) analizowanej wielkości fizycznej, czyli jej ilość zawarta w jednostce objętości;

f — funkcja źródła, czyli funkcja określająca dopływ (lub odpływ) rozważanych jednostek fizycznych odniesiona do wyodrębnionej objętości; przedstawia ona ilość jednostek fizycznych dopływających (lub odpływających) do jednostki objętości w jednostce czasu.

W celu dokonania bilansu danych jednostek fizycznych określa się następujące wielkości:

— Ilość analizowanej wielkości fizycznej Γ zgromadzonej w objętości Ω wynosi

$$\iiint_{\Omega} \Gamma\, \Omega \tag{1}$$

* Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

** Publikacja wykonana w ramach prac statutowych nr 11.11.100.850

natomiast jej zmiana w czasie dt w całej objętości Ω jest następująca

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \, d\Omega \, dt \tag{2}$$

— Ilość wielkości fizycznych $\overline{G}$ przepływających przez powierzchnię F w czasie dt; po skorzystaniu z twierdzenia Greena zapisać można następująco

$$\iint_{F} \overline{G} \, dF \, dt = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \overline{G} \, d\Omega \, dt \tag{3}$$

— Wydajność źródeł jednostek fizycznych f w objętości Ω w czasie dt wynosi

$$\iiint_{\Omega} f \, d\Omega \, dt \tag{4}$$

Korzystając z fizycznej zasady zachowania, można napisać

$$-\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \overline{G} \, d\Omega \, dt + \iiint_{\Omega} f \, d\Omega \, dt = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \, d\Omega \, dt \tag{5}$$

Na obszar Ω nie nałożono żadnych ograniczeń, a zatem z twierdzenia o sumie całek otrzymuje się następujące równanie

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \operatorname{div} \overline{G} - f = 0 \tag{6}$$

Jeśli wielkością ekstensywną w równaniu (6) jest masa płynu, a wielkością intensywną jego gęstość, to przedstawia ono klasyczne równanie ciągłości. Jeśli natomiast przez $\overline{G}$, Γ i f oznaczy się inne wielkości fizyczne, które można bilansować, to równaniem (6) opisać można wymienione wcześniej procesy fizyczne:

— przewodzenie ciepła,
— przepływ gazów przez ośrodek porowaty,
— dyfuzję gazów.

2. Przewodzenie ciepła

Jak wiadomo z termodynamiki, przewodzenie ciepła jest zjawiskiem polegającym na przenoszeniu energii wewnątrz ośrodka materialnego lub z jednego ośrodka do drugiego przy ich bezpośrednim zetknięciu. Ten sposób wymiany ciepła jest charakterystyczny przede wszystkim dla ciał stałych. W cieczach i gazach przewodzenie ciepła w czystej postaci, bez równoczesnego udziału innych sposobów wymiany ciepła, występuje rzadziej [3–5, 8].

Niech $\overline{G}$ w równaniu (6) oznacza natężenie strumienia ciepła, które zgodnie z prawem Fouriera wynosi

$$\overline{G} = -\lambda \operatorname{grad} T \tag{7}$$

gdzie:

- λ — współczynnik przewodzenia ciepła, którego wartość w zależności od rodzaju materiału zmienia się w bardzo szerokich granicach; należy pamiętać, że przewodność cieplna gazów na ogół w miarę wzrostu temperatury rośnie i jest mniejsza od przewodności cieplnej cieczy, natomiast przewodność cieplna cieczy w miarę wzrostu temperatury maleje;
- T — temperatura.

Niech ponadto Γ określa wielkość zdefiniowaną następująco

$$\Gamma = \frac{c\rho\Omega T}{\Omega} = c\rho T \tag{8}$$

gdzie c i ρ to odpowiednio ciepło właściwe i gęstość ośrodka przewodzącego ciepło.

Równanie (6), po uwzględnieniu (7) i (8), przyjmie postać

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + f = \frac{\partial}{\partial t}(c\rho T) \tag{9}$$

Jest to ogólne równanie przewodzenia ciepła; prawa strona tej zależności wyraża przyrost entalpii ośrodka w analizowanym obszarze. Jeśli ponadto założymy, że λ, c i ρ są stałe, to równanie (9) przyjmie postać

$$a\Delta T + \frac{f}{c\rho} = \frac{\partial T}{\partial t} \tag{10}$$

gdzie:

$$\Delta T = \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

$a = \dfrac{\lambda}{c\rho}$ — współczynnik wyrównywania temperatury zwany również współczynnikiem przewodnictwa temperaturowego.

Jeżeli ponadto w analizowanym obszarze nie ma źródeł energii ($f = 0$), to równanie (10) przyjmuje postać

$$a\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \tag{11}$$

Jest to równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu typu parabolicznego, nazywane równaniem Fouriera.

W przypadku ustalonego procesu przewodzenia ciepła otrzymamy równanie Laplace'a

$$\Delta T = 0 \tag{12}$$

a w przypadku ustalonego przewodzenia ciepła przy istnieniu wewnętrznych źródeł ciepła – znane w literaturze technicznej równanie Poissona

$$\Delta T + \frac{f}{\lambda} = 0 \tag{13}$$

Powyższe równania wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi są matematycznym opisem problemów przewodnictwa cieplnego.

Przykład obliczeniowy

Obliczyć wpływ grubości (δ_2) warstwy pianki poliuretanowej nałożonej na zewnętrzną stronę tamy pożarowej wykonanej z cegły o grubości δ_1 = 0,5 m na wielkość przewodzonego przez nią strumienia ciepła oraz określić temperaturę (T_z) zewnętrznej ścianki pianki poliuretanowej przy ustalonym przewodzeniu ciepła. Do obliczeń przyjąć następujące dane:

— pole powierzchni tamy pożarowej:

$$S = 14\ \mathrm{m}^2,$$

— stała temperatura wewnętrznej ścianki tamy, równa temperaturze gazów pożarowych:

$$T_p = 403\ \mathrm{K},$$

— współczynnik przewodzenia ciepła przez mur tamy pożarowej:

$$\lambda_1 = 0{,}8\ \mathrm{W/(m{\cdot}K)},$$

— stała temperatura powietrza w wyrobisku od zewnętrznej strony tamy (czyli od strony pianki poliuretanowej):

$$T_w = 300\ \mathrm{K},$$

— współczynnik przejmowania ciepła od strony zewnętrznej (wartość współczynnika α_z określono według zależności podanych w pracach [4, 5, 8, 9]):

$$\alpha_z = 6{,}23\ \mathrm{W/(m^2{\cdot}K)},$$

— współczynnik przewodzenia ciepła przez piankę poliuretanową, którą pokryto tamę pożarową:

$$\lambda_2 = 0{,}03\ \mathrm{W/(m{\cdot}K)}.$$

Wielkość strumienia ciepła Q oblicza się ze znanego wzoru Pecleta [4]:

$$Q = S\,k\,(T_p - T_w),$$

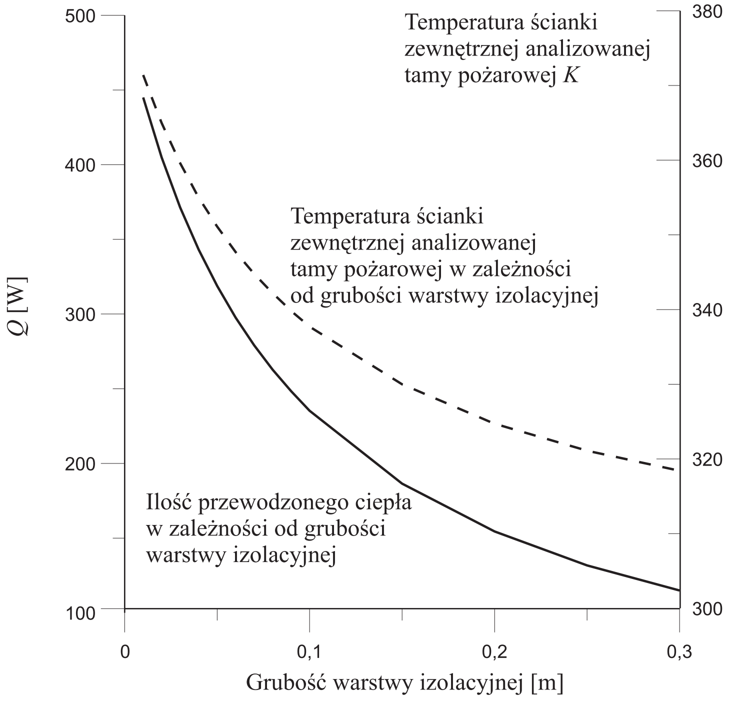
gdzie k – współczynnik przenikania ciepła dla dwuwarstwowej przegrody płaskiej przy znanej temperaturze ścianki wewnętrznej:

$$k = \frac{1}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_z}}.$$

Po wyliczeniu wartości strumienia Q temperaturę ścianki zewnętrznej T_z pianki poliuretanowej oblicza się z zależności:

$$T_z = T_p - \frac{Q}{S}\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}\right).$$

Na rysunku 1 przedstawiono otrzymane wyniki obliczeń strumienia ciepła (Q) przewodzonego przez analizowaną tamę oraz temperaturę jej ścianki zewnętrznej (T_z) w zależności od grubości warstwy izolacyjnej (δ_2).



Rys. 1. Ilość ciepła Q przewodzonego przez analizowaną tamę pożarową oraz temperatura jej ścianki zewnętrznej w zależności od grubości warstwy izolacyjnej

3. Przepływ gazu w ośrodku porowatym

Niech w zależności (6) poszczególne wielkości oznaczają:

$\overline{G} = \rho \overline{w}$ — strumień gazu przepływającego przez ośrodek porowaty,

$\Gamma = m\rho$ — masa gazu zawarta w jednostce objętości ośrodka o porowatości m,

$f = -\dfrac{\partial \rho_s}{\partial t}$ — zmiana gęstości sorpcji ρ_s gazu w czasie t.

Wobec tego równanie (6) zapisać można w następującej postaci

$$-\mathrm{div}\,(\rho \overline{w}) = \frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \frac{\partial}{\partial t}\rho_z \tag{14}$$

Jeśli założymy izotermiczny przepływ gazu, czyli

$$\rho = c_o p \tag{15}$$

oraz przyjmiemy, że izotermę sorpcji ρ_s zgodnie z prawem Henry'ego wyraża zależność

$$\rho_s = \Theta\, p \tag{16}$$

a prędkość przepływu gazu w ośrodku porowatym określa prawo Darcy'ego

$$\overline{w} = -\frac{k}{\mu}\,\mathrm{grad}\; p \tag{17}$$

gdzie:

$\overline{w}$ — prędkość filtracji gazu w ośrodku porowatym,

μ — współczynnik lepkości dynamicznej gazu,

k — współczynnik przepuszczalności ośrodka,

p — ciśnienie gazu,

c_o, Θ — stałe,

to równanie (14) można napisać w następującej postaci

$$div\left[c_o\, p\frac{1}{\mu}\, grad\; p\right] = \frac{\partial}{\partial t}(m c_o p) + \frac{\partial}{\partial t}(\Theta\, p) \tag{18}$$

Jeśli ponadto założymy, że μ, m = const, to po prostych przekształceniach równanie (18) przyjmie następującą postać [3, 8]

$$\Delta p^2 = \left(\frac{2\mu}{k}(m+\theta)\frac{\partial p}{\partial t}\right) \tag{19}$$

gdzie:

$$\Delta p^2 = \frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial z^2}.$$

Natomiast jeśli zaniedbamy zmianę sorpcji, to z równania (19) otrzymamy [3, 8]

$$\Delta p^2 = \frac{2\mu m}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \tag{20}$$

W przypadku osiowosymetrycznego procesu filtracji równanie (19) przyjmie znaną w literaturze technicznej postać [2, 3, 8, 9]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial p^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \left(\frac{2\mu}{k}(m+\theta)\right)\frac{\partial p}{\partial t} \tag{21}$$

Jeśli założymy przepływ ustalony oraz przyjmiemy symetrię pola ciśnień względem kąta φ, to równanie (21) uprości się do postaci

$$\frac{\partial^2 p}{\partial p^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \tag{22}$$

Przykład obliczeniowy

Obliczyć natężenie przepływu powietrza przez określony pas zrobów ściany zawałowej prowadzonej do granic, przyjmując następujące dane:

— długość pasa zrobów, liczona wzdłuż chodników podścianowych:

$l = 100$ m,

— długość drogi przepływającego przez zroby powietrza (równa długości ściany):

$L = 200$ m,

— wysokość eksploatowanej warstwy (równa wysokości ściany):

$h = 2$ m,

— stała różnica ciśnień na analizowanym odcinku pomiędzy chodnikiem podścianowym i nadścianowym:

$\Delta p = 100$ Pa,

— współczynnik lepkości dynamicznej powietrza:

$\mu = 18{,}1 \cdot 10^{-6}$ kg/(m·s),

— współczynnik przepuszczalności analizowanego odcinka zrobów:

$k = 10^{-8}$ m^2.

Wielkość powierzchni S przepływu powietrza przez zroby zawałowe jest trudna do ścisłego określenia. Wielu autorów zajmujących się tą problematyka zakłada, że zawał skał stropowych sięga do czterokrotnej grubości eksploatowanej warstwy [7]. W oparciu o dostępną literaturę z analizowanej problematyki, uwzględniając osiadanie warstw stropowych oraz przedstawione w pracy [6] pomiary kopalniane, można przyjąć, że wysokość, do jakiej sięga przepływ powietrza w zrobach, wynosi 3,5 grubości eksploatowanej warstwy [7]. Zatem powierzchnia S, przez którą przepływa powietrze, wyniesie $S = 3{,}5 \cdot h \cdot l$.

Przepływ powietrza przez strefę zawału o skończonych wymiarach po upływie dłuższego czasu, przy niezmieniających się wartościach ciśnień w chodnikach przyścianowych, można uważać za ustalony. Jeśli przyjmiemy ponadto przepływ jednowymiarowy, pole bezźródłowe, przemianę izotermiczną oraz stałe wartości ρ, μ, k, po podstawieniu równania (17) do (14) otrzymamy:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = 0.$$

Całka ogólna tego równania wynosi:

$$p = C_1 x + C_2.$$

Dla warunków:

$$x = 0\ ,\ p = p_1 = p_o,$$

$$x = L,\ p = p_2 = p_o - \Delta p,$$

otrzymuje się:

$$p = p_o - \frac{\Delta p}{L} x.$$

Po zróżniczkowaniu powyższej zależności otrzymamy:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{L},$$

a zatem strumień powietrza przepływający przez jednostkę powierzchni jest równy:

$$q = \frac{k}{\mu}\frac{\Delta p}{L},$$

a całkowita ilość powietrza przepływająca przez cały analizowany pas zrobów wynosi:

$$Q = 3{,}5 \cdot h \cdot l \cdot \frac{k}{\mu}\frac{\Delta p}{L} = 3{,}5 \cdot 2{,}0 \cdot 100 \cdot \frac{10^{-8}}{18{,}1 \cdot 10^{-6}}\frac{100}{200}\ \mathrm{m^3/s} = 0{,}19\ \mathrm{m^3/s}.$$

Wyliczone stosunkowo duże natężenie przepływu powietrza przez zroby ściany wynika stąd, że w założeniach do obliczeń nie uwzględniono ułożonych wzdłuż chodników podścianowych pasów podsadzkowych, których współczynnik przepuszczalności jest mniejszy niż zawału przynajmniej o rząd. Ponieważ ilość przepływającego przez ośrodek porowaty powietrza jest wprost proporcjonalna do współczynnika przepuszczalności, wobec tego zmniejszenie wartości *k* o rząd spowoduje również zmniejszenie ilości przepływającego przez zroby powietrza o rząd.

4. Równanie dyfuzji

W płynach, w których istnieje gradient stężeń, przenoszenie masy odbywa się poprzez konwekcję oraz dyfuzję cząsteczkową. Pole stężeń w płynie kształtuje się w wyniku współdziałania obu wymienionych procesów. W takich przypadkach często stosuje się określenie „dyfuzja cząsteczkowa z nałożoną konwekcją” [1– 3, 8, 9].

Jeśli przyjmiemy, że w analizowanym obszarze występuje przenoszenie masy tylko przez konwekcję, to po przyjęciu w równaniu (6) oznaczeń:

$\Gamma = c$ — stężenie analizowanego gazu,
$\overline{G} = \overline{w}\, c$ — strumień danego gazu przenoszonego przez konwekcję,

równanie (6) przyjmie postać:

$$\frac{\partial(w_x c)}{\partial x} + \frac{\partial(w_y c)}{\partial y} + \frac{\partial(w_z c)}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial t} - f = 0 \tag{23}$$

Jeśli ponadto uwzględnimy przenoszenie gazu *A* przez dyfuzję cząsteczkową o strumieniu równym q_A, to równanie (23) przyjmie postać:

$$\frac{\partial(w_x c + q_{Ax})}{\partial x} + \frac{\partial(w_y c + q_{Ay})}{\partial y} + \frac{\partial(w_z c + q_{Az})}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial t} - f = 0.$$

Wobec tego równanie ciągłości dla dyfuzji nieustalonej zapisać można następująco:

$$\frac{\partial(w_x c)}{\partial x} + \frac{\partial(w_y c)}{\partial y} + \frac{\partial(w_z c)}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial q_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial q_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial q_{Az}}{\partial z} - f = 0 \tag{24}$$

gdzie:

f — źródło emisji gazu *A*, np. dopływ metanu z otaczającego górotworu,
c — stężenie analizowanego gazu,
q_A — strumień dyfundującego gazu,
w_x, w_y, w_z — składowe prędkości konwekcyjnej.

Po rozpisaniu trzech pierwszych członów lewej strony równania (24) oraz uwzględnieniu pochodnej substancjonalnej

$$\frac{Dc}{Dt} = w_x \frac{\partial c}{\partial x} + w_y \frac{\partial c}{\partial y} + w_z \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial t} \tag{25}$$

otrzymamy równanie w postaci

$$c\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) + \frac{Dc}{Dt} + \frac{\partial q_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial q_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial q_{Az}}{\partial z} - f = 0 \tag{26}$$

Równanie (26) można traktować jako ogólne równanie dyfuzji cząsteczkowej przebiegającej jednocześnie z konwekcją. Równanie to można łatwo dostosować do innych rodzajów dyfuzji, np. termodyfuzji, wstawiając w miejsce q_A strumień dyfuzji termicznej q_T.

Ponieważ dla każdego z kierunków układu współrzędnych dla danego składnika można napisać

$$q_{Ax} = -D\frac{\partial c}{\partial x}, \quad q_{Ay} = -D\frac{\partial c}{\partial y}, \quad q_{Az} = -D\frac{\partial c}{\partial z} \tag{27}$$

gdzie D – współczynnik dyfuzji, to wprowadzając zależności (27) do równania (26), otrzymamy

$$c\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) + \frac{Dc}{Dt} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial q^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial q^2 c}{\partial z^2}\right) + f \tag{28}$$

Równanie (28) opisuje nieustaloną dyfuzję cząsteczkową z nałożoną konwekcją, zachodzącą w trzech kierunkach w dwuskładnikowym płynie ściśliwym. Równanie to znane jest w literaturze jako drugie prawo Ficka [2].

LITERATURA

[1] *Hobler T.*: Dyfuzyjny ruch masy i absorbery. Warszawa, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne 1976

[2] *Kawala Z., Pająk M., Ziółkowski Z.*: Przenoszenie pędu i masy. Wrocław, Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej 1978

[3] *Pawiński J., Roszkowski J., Strzemiński J.*: Przewietrzanie kopalń. Katowice, Śląskie Wydawnictwo Techniczne 1995

[4] *Skoczylas A.*: Przenoszenie ciepła. Wrocław, 1999

[5] *Michiejew M.*: Zasady wymiany ciepła. Warszawa, PWN 1953

[6] *Szlązak J.*: Przepływ powietrza przez strefę zawału w świetle badań teoretycznych i eksperymentalnych. Rozprawy i Monografie, Kraków, UWND AGH 2000

[7] *Mileticz A.F.*: Utieczki wozducha w szachtach. Moskwa, Niedra 1962

[8] *Wacławik J., Cygankiewicz J., Knechtel J.*: Warunki klimatyczne w kopalniach głębokich. Kraków, 1995

[9] *Szczerbań A.N., Kremniew O.A.*: Naucznyje osnowy rasczota i regulirowanije tiepłowogo reżima głubokich szacht. Kijów, Wyd. UAN 1959–1960