



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
WYDZIAŁ GÓRNICZWA I GEOINŻYNIERII

ROZPRAWA DOKTORSKA

Mgr inż. AGNIESZKA SUROWIAK

**WPŁYW ROZKŁADU WŁAŚCIWOŚCI FIZYCZNYCH
I GEOMETRYCZNYCH ZIAREN NA DOKŁADNOŚĆ
ROZDZIAŁU W OSADZARCE NA PRZYKŁADZIE WĘGLA**

PROMOTOR

PROF. DR HAB. MARIAN BROŻEK

KRAKÓW - 2006

*Składam serdeczne podziękowania
Profesorowi Marianowi Brożkowi
za opiekę merytoryczną oraz
cenne rady i wskazówki udzielone
w trakcie powstawania niniejszej pracy*

SPIS TREŚCI

SPIS OZNACZEŃ	5
I. STUDIUM LITERATUROWE.....	9
1. WSTĘP	9
2. TEORIE ROZDZIAŁU W OSADZARCE.....	15
2.1. Podejście deterministyczne.....	16
2.1.1. Teoria Rittingera	17
2.2. Podejścia statystyczno – probabilistyczne.....	18
2.2.1. Teoria suspenzyjna	18
2.2.2. Równanie transportu masy.....	19
2.2.3. Energetyczna teoria Mayera	21
3. KINETYKA ROZDZIAŁU	27
3.1. Kinetyka tworzenia się warstw równowagi.....	27
3.2. Ruch centrów grupowania ziaren	29
3.3. Probabilistyczne podejście do kinetyki rozdziału	34
4. RUCH PULSACYJNY I ROZLUZOWANIE ZIAREN.....	36
4.1. Stopień rozluźniania i koncentracja objętościowa ziaren	36
4.2. Analiza ruchu ziaren pod wpływem ruchu pulsacyjnego	38
4.3. Wybrane poglądy na rozluźnianie ziaren.....	42
4.4. Zależność stopnia rozluźniania od rodzaju cyklu ruchu pulsacyjnego	44
5. ARGUMENT ROZDZIAŁU PRZY WZBOGACANIU W OSADZARCE....	50
5.1. Równanie ruchu ziarna opadającego w cieczy pod wpływem siły ciężkości i graniczna prędkość opadania.....	53
5.2. Współczynnik oporu dla kuli.....	55
5.2.1. Współczynnik oporu według metodyki Rittingera i Finkeya	55
5.2.2. Współczynnik oporu z uwzględnieniem warstwy przyściennej	58
5.2.3. Empiryczne zależności współczynnika oporu kuli od liczby Reynoldsa.....	60
5.3. Współczynniki kształtu ziarna i współczynnik oporu dla ziarna niesferycznego	62
6. KRZYWA ROZDZIAŁU I JEJ OPIS FUNKCJAMI ZMIENNEJ LOSOWEJ.....	65
6.1. Empiryczne modele funkcji rozdziału	65
6.2. Modelowe ujęcia postaci funkcji rozdziału	67
6.3. Krzywa rozdziału jako transformata całkowita	69
6.4. Ocena dokładności rozdziału	70
7. CEL I ZAKRES PRACY	78
II. BADANIA WŁASNE.....	80
8. FIZYCZNY MODEL FUNKCJI ROZDZIAŁU	80
8.1. Mechanizm rozdziału i rozproszenia.....	80
8.2. Oddziaływanie rozpraszające i wariancja rozkładu prędkości ziaren w stanie stacjonarnym.....	82

8.3. Wariancja uwarunkowana ruchem centrów grupowania ziaren.....	84
8.4. Funkcja rozproszenia	85
8.5. Funkcja rozdziału i rozproszenie prawdopodobne	86
9. OPIS EKSPERYMENTU	90
9.1. Opróbowanie osadzarki przemysłowej.....	90
9.2. Pomiar średnicy projekcyjnej i współczynników kształtu ziarna.....	93
10. FUNKCJA ROZKŁADU ARGUMENTU ROZDZIAŁU	
(PRĘDKOŚCI OPADANIA)	107
10.1. Rozkład prędkości opadania w próbce monodispersyjnych ziaren sferycznych.....	108
10.2. Rozkład prędkości opadania w próbce monodispersyjnych ziaren nieregularnych	109
10.3. Rozkład prędkości opadania w próbce polidispersyjnych ziaren nieregularnych	110
10.4. Rozkład prędkości opadania w próbce polidispersyjnych ziaren sferycznych	111
10.5. Analiza wpływu rozkładu własności fizycznych i geometrycznych ziaren na rozkład prędkości opadania	
10.5.1. Wpływ rozkładu gęstości ziarna na rozkład prędkości opadania	112
10.5.2. Wpływ rozkładu kształtu ziarna na rozkład prędkości opadania.....	121
10.5.3. Wpływ rozkładu własności fizycznych i geometrycznych na rozkład prędkości opadania ziaren nieregularnych	127
10.5.3.1. Rozkład prędkości opadania w nadawie ziaren nieregularnych	127
10.5.3.2. Rozkład prędkości opadania w odpadach ziaren nieregularnych ..	132
10.5.3.3. Rozkład prędkości opadania w nadawie ziaren sferycznych.....	135
11. WPŁYW ROZKŁADU WŁASNOŚCI FIZYCZNYCH I GEOMETRYCZNYCH ZIAREN NA DOKŁADNOŚĆ ROZDZIAŁU	137
11.1. Wpływ rozkładu współczynników kształtu na dokładność rozdziału	137
11.2. Wpływ rozkładu wielkości ziarna na dokładność rozdziału	140
11.3. Rozproszenie prawdopodobne wrodzone i dokładność rozdziału.....	142
III. WNIOSKI.....	144
IV. SPIS LITERATURY.....	147
V. SPIS RYSUNKÓW.....	157
VI. SPIS TABEL	160

SPIS OZNACZEŃ

- a_{max} – maksymalne przyspieszenie ruchu pulsacyjnego cieczy,
 A - powierzchnia ziarna,
 A_s – powierzchnia kuli o objętości równej objętości ziarna,
 b – szerokość łoża osadzarki, współczynnik proporcjonalności,
 c – współczynnik niestacjonarności,
 c_o – koncentracja objętościowa ziaren w komorze wzbogacalnika,
 C – obwód koła o polu powierzchni równym polu powierzchni rzutowej ziarna, koncentracja objętościowa ziaren w łożu osadzarki,
 C^* - koncentracja objętościowa ziaren w stanie rozluzowanym,
 C_o – koncentracja objętościowa ziaren w stanie nierozluzowanym,
 C_z – obwód powierzchni rzutowej ziarna,
 d – średnica ziarna,
 d_k – średnica kuli o powierzchni równej powierzchni ziarna,
 d_o – średnica ziaren próbki,
 d_{op} – średnica charakterystyczna,
 d_p - średnica projekcyjna ziarna,
 d_r – średnica podziałowa,
 d_s - średnica sitowa ziarna,
 d_z – średnica zastępcza ziarna,
 D – współczynnik dyfuzji,
 E_I – energia układu przed rozwarstwieniem,
 E_{II} – energia układu po rozwarstwieniu,
 E_{min} – minimalna wartość energii potencjalnej mieszaniny,
 E_p - rozproszenie prawdopodobne,
 $E(t)$ – wartość energii potencjalnej w chwili t ,
 f – częstość ruchu pulsacyjnego,
 $f_p(\rho)$ – funkcja gęstości rozkładu gęstości w nadawie,
 $f_o(\rho)$ – funkcja gęstości rozkładu gęstości ziaren w odpadach,
 F_w – siła wyporu,
 g – przyspieszenie ziemskie,
 G_1 – masa lekkiego materiału w powietrzu,
 G_2 – masa ciężkiego materiału w powietrzu,

h – wysokość łoża,
 h_o – wysokość łoża w stanie nierozluzowanym,
 h_r – parametr funkcji prawdopodobieństwa będący miarą dokładności rozdziału,
 h_s – wysokość łoża w stanie stacjonarnym,
 h_n – wysokość łoża w stanie niestacjonarnym,
 h_1, h_2 – wysokość warstw idealnie rozwarstwowanego materiału,
 k – stała prędkości rozdziału,
 k_n – współczynnik niejednorodności,
 k_1 – objętościowy współczynnik kształtu ziarna,
 k_2 – dynamiczny lub newtonowski współczynnik kształtu ziarna,
 l – długość łoża osadzarki,
 L_y – liczba Laszczenki,
 m – masa ziarna,
 m_i – masa ziaren danej gęstości w i – tej warstwie,
 n – liczba warstw, liczba ziaren w jednostce objętości,
 n_f – liczba ziaren o tej gęstości w nadawie,
 n_o – liczba ziaren o gęstości ρ trafiająca do odpadów,
 p – prawdopodobieństwo przejścia grupy ziaren z warstwy do warstwy,
 P – siła oporu dynamicznego ośrodka,
 Q – siła ciężkości,
 Re – liczba Reynoldsa,
 R_{xM} i R_{yM} – składowa pozioma i pionowa siły mechanicznego oddziaływania między ziarnami,
 s – skok tłoka,
 S – powierzchnia rzutowa ziarna na płaszczyznę prostopadłą do kierunku ruchu, pole przekroju poprzecznego łoża osadzarki,
 S_d – dolna warstwa łoża,
 S_g – górna warstwa łoża,
 t – czas,
 $t(\rho)$ – funkcja rozproszenia,
 T – okres,
 T_ρ – liczba rozdziału dla ziaren o gęstości ρ ,
 $T(\rho)$ – funkcja rozdziału,

- u_p - prędkość wody podsitowej,
- u_s - prędkość ruchu ziarna poddana działaniu ruchu wznoszącego cieczy,
- u_x i u_y – składowa pozioma i pionowa prędkości strumienia cieczy,
- v – graniczna prędkość opadania swobodnego,
- v_f – prędkość średnia kwadratowa ruchu cieczy, uwarunkowana niejednorodnością pola prędkości cieczy,
- v_k – graniczna prędkość klasyfikacji,
- v_p – prędkość średnia kwadratowa turbulentnego ruchu ziarna, prędkość średnia kwadratowa ziarna uwarunkowana niejednorodnością pola prędkości cieczy,
- v_{max} – maksymalna wartość prędkości przemieszczania się centrum równowagi, maksymalna prędkość ruchu pulsacyjnego cieczy,
- v_r - wartość najbardziej prawdopodobna prędkości ziarna,
- v_s - prędkość opadania w warunkach skrępowanych,
- $v_{s\ max}$ - maksymalna prędkość ruchu ziarna w warunkach skrępowanych,
- v_t – prędkość chwilowa ruchu ziarna,
- v_x - prędkość opadania w warunkach swobodnych,
- v_x i v_y – składowa pozioma i pionowa prędkości ziarna,
- V_1 – objętość warstwy łoża osadzarki,
- V_2 – objętość ziaren znajdujących się w tej warstwie,
- V – objętość ziarna,
- w – wypadkowa prędkość ziarna,
- W_L - praca siły rozpraszającej na odcinku równym średniej drodze swobodnej ziarna,
- W_1 - zmienna losowa prędkości ziarna uwarunkowana niejednorodnością pola prędkości cieczy, niezależna od czasu,
- W_2 - składowa losowa prędkości ziarna uwarunkowana ruchem centrów grupowania ziaren, zależna od czasu,
- x – gęstość zredukowana ziarna, wychylenie tłoka,
- z_i – położenie i -tej warstwy,
- z_r – poziom rozdziału na produkt dolny i górny,
- $\bar{z}$ - położenie centrum grupowania,
- $2z_m$ – wysokość łoża osadzarki,
- α_1 - okres ruchu wznoszącego (wschodzącego) wody, koncentracja objętościowa składnika 1 w nadawie,

- α_2 - okres ruchu opadającego (schodzącego) wody, koncentracja objętościowa składnika 2 w nadawie
- β_1 – współczynnik stały uwzględniający różnicę wielkości komór oraz szczelinę pomiędzy tłokiem i ścianą komory,
- β_2 – współczynnik uwzględniający różnicę pól przekrojów poprzecznych komory podsiatowej i kanałów międzyziarnowych,
- γ – wychód objętościowy produktu dolnego,
- γ_n - zawartość analizowanych ziaren w nadawie,
- γ_o - wychód odpadów,
- γ_r – zawartość rozpatrywanych ziaren w strefie rozdziału w chwili t ,
- Γ - funkcja gamma Eulera,
- η – współczynnik lepkości dynamicznej cieczy,
- θ – stopień rozluźnienia,
- ρ – gęstość ziarna,
- ρ_c - gęstość charakterystyczna,
- ρ_o – gęstość cieczy,
- ρ_r – gęstość rozdziału,
- ρ_w – gęstość warstwy wzbogacanego materiału,
- $\bar{\rho}$ - średnia gęstość wzbogaczanych ziaren,
- λ - średnia droga przebyta przez ziarno między zderzeniami (średnia droga swobodna),
- ϕ - funkcja Laplacea, współczynnik sferyczności,
- Φ - całka prawdopodobieństwa,
- ψ_x i ψ_y – współczynniki oporu odpowiednio dla poziomej i pionowej składowej siły oporu,
- σ - odchylenie standardowe,
- σ_1 - odchylenie standardowe rozkładu zmiennej losowej W_1 , niezależne od czasu,
- σ_2 - odchylenie standardowe rozkładu zmiennej losowej W_2 zależne od czasu,
- ψ_k – współczynnik oporu dla kuli,
- ψ_z – współczynnik oporu dla ziarna,
- ω – częstość kołowa ruchu pulsacyjnego,

I. STUDIUM LITERATUROWE

1. WSTĘP

Koncentracja ciężkiego i lekkiego produktu będąca skutkiem rozdziału przy udziale pulsującego w górę i w dół strumienia zawieszonych ziaren mineralnych w medium rozdzielczym jest spowodowana różnicami we właściwościach fizycznych i geometrycznych tj. gęstości poszczególnych ziaren rozdzielanego materiału, ich wielkości oraz kształtów geometrycznych. Już w czasach starożytnych znana i stosowana była ta metoda oddzielania sfermentowanego chlebowego zacieru piwnego, przy wykorzystaniu wiklinowych koszy lub perforowanej kamionki, pełniącej rolę sita. Pierwsze opisy procesu wzbogacania ziaren w pulsującym strumieniu wody pochodzą z 1556 roku, gdzie w książce „De Re Metallica” Georg Agricola opisał sposób, w jaki wzbogacano rudę w płucze wodnej, którą to położono na sicie i podrzucano do góry w beczce wypełnionej wodą. W wyniku takiego działania odpady o niższym ciężarze właściwym gromadziły się nad cięższą rudą. Po każdym procesie rozwarstwienia sito było opróżniane ręcznie i uzupełniane nowym materiałem (Marx i inni, 1999). Ruch do góry i na dół rozdzielanego materiału został szybko zmechanizowany. Doprowadziło to do rozwoju pierwszych osadzarek w XVI wieku, które początkowo znalazły zastosowanie w kopalniach rud w Niemczech oraz na szeroką skalę do wzbogacania węgla. Rozwój wzbogacania w osadzarkach, począwszy od ręcznego sterowania ruchem pulsacyjnym, do współczesnego zautomatyzowanego systemu doprowadził do powszechnego zastosowania tej metody rozdziału do wzbogacania wielu surowców, a w szczególności węgla w osadzarkach beztłokowych (Fellensiek i Erdmann, 1991).

Metoda grawitacyjnego wzbogacania w osadzarkach nieustannie się rozwija, szczególnie w ostatnich latach. Ze względu na wyczerpywalność surowców, wzrastające koszty pozyskania surowego materiału oraz wzrastające wymagania jakościowe w stosunku do produktów rozdziału ze względu na ochronę środowiska, gdzie w coraz większym stopniu kładzie się nacisk na odzysk składników użytecznych i ponowne ich wykorzystanie, wzbogacanie w osadzarkach staje się coraz bardziej ekonomiczną i perspektywiczną metodą rozdziału (Marx i inni 1999, Kellerwessel, 1998).

Osadzarki znalazły szerokie zastosowanie do przeróbki wielu surowców mineralnych. W przeszłości, ze względu na małą efektywność separacji, osadzarki były zamieniane na separatory z cieczą ciężką, które były idealne do surowego materiału jednorodnego. Współczesny stan technologii wzbogacania węgla pozwala na separację grubych i śred-

nich klas ziarnowych tj. 10 – 120 mm zarówno w osadzarkach jak i w separatorach zawieszinowych (Henning, 2000). Jednakże osadzarki służą głównie do wzbogacania miałow węglowych o uziarnieniu 20 – 2 mm, a nawet drobniejszych klas ziarnowych tzn. $> 0,5$ mm w osadzarkach odśrodkowych, jak to ma miejsce w przypadku bardzo trudno-wzbogacalnych miałow węgla koksującego w Indiach. W pracującej w tamtejszych zakładach osadzarce odśrodkowej Kelsey wzbogaca się bardzo drobne ziarna z większą skutecznością niż we wzbogacalnikach zwojowych. Z surowca o równomiernie rozproszonej substancji mineralnej usuwa się 43,6 % popiołu przy uzysku części palnych i lotnych w koncentracie równym 96,9 %. Następnie koncentrat jest poddawany procesowi flotacji (Yerriswamy i inni, 2003).

Osadzarki odśrodkowe stosuje się do usuwania popiołu i siarki z bardzo drobno uziarnionych mułów węglowych. Ze względu na relatywnie duże koszty flotacji pianowej ziaren poniżej 1 mm, opracowano grawitacyjną metodę wzbogacania mułów węglowych dla ziaren poniżej 0,25 mm (Mohanty i inni, 2002).

Przeprowadzono także próby odzysku wolframu z odpadów wolframowych w skali laboratoryjnej w odśrodkowej osadzarce firmy Kelsey. Analizy wykazały zadowalające efekty, jednakże należy proces zweryfikować w warunkach przemysłowych (Tucker, 1995).

Generalnie rzecz biorąc osadzarki odśrodkowe cechuje wyższa selektywność separacji i wyższy uzysk składnika użytecznego w koncentracie w porównaniu z osadzarkami klasycznymi (Nio i van Muijen, 1988).

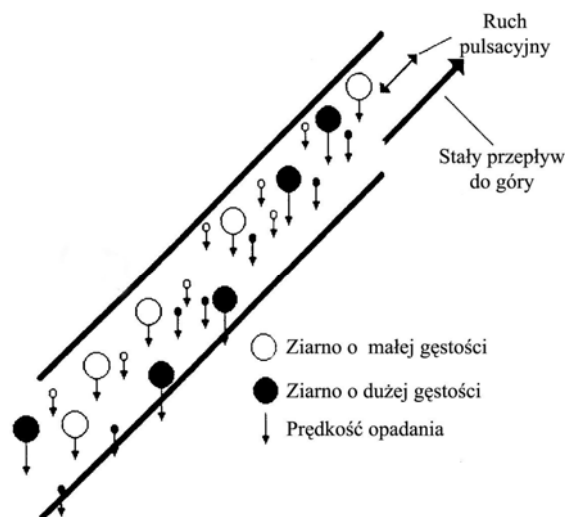
Im większa różnica gęstości pomiędzy składnikami użytecznymi i odpadowymi tym efektywniej przebiega proces.

Wykorzystanie pumeksu do produkcji lekkich cegieł termoizolacyjnych wymaga eliminacji ciężkich zanieczyszczeń tj. bazaltu, łupku, lawy i innych ciężkich ziaren obecnych w złożu. Można to zrealizować w wyniku separacji w osadzarce (Neumann i Grotjohann, 1998).

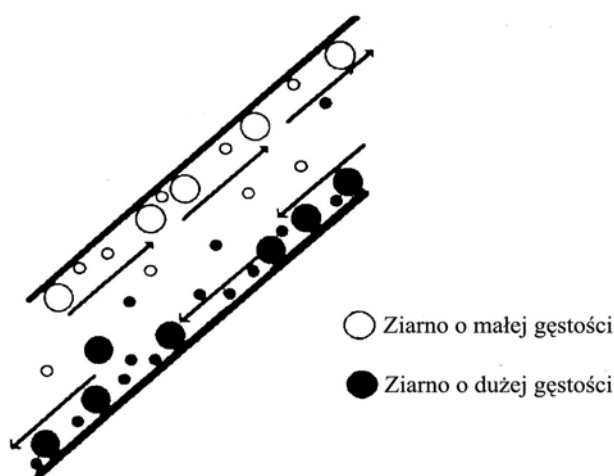
Efektywnie w osadzarce można wzbogacać rudy kasyterytowe. Nadawa na osadzarkę powinna być jednak wcześniej odmulona w hydrocyklonie, w celu usunięcia substancji ilastej (Michell, 1963).

Podobnie separacja uwolnionego złota w osadzarce połączona z czyszczeniem koncentratu na stole koncentracyjnym umożliwia osiągnięcie uzysku złota w końcowym koncentracie grawitacyjnym do 33 %. Najlepsze efekty uzyskuje się przy zastosowaniu sztucznej pościeli o wielkości ziaren 3,2 mm (Stepura i inni, 1999).

Wysoką efektywność wzbogacania drobnych ziaren, nawet poniżej 25 μm można osiągnąć w nowego typu osadzarce. Jest to jedna z metod testowanych w skali laboratoryjnej, a jednocześnie przyjazna dla środowiska, gdyż medium rozdzielcze tj. woda nie zawiera żadnych środków chemicznych. W komorze nachylonej pod pewnym kątem do poziomu obok ruchu pulsacyjnego wzdłuż komory zastosowano ustalony, wznoszący strumień cieczy (rys. 1.1a). Efektem takiego złożonego ruchu cieczy jest migracja ziaren cięższych w dół komory tworzących wylew, natomiast ziaren lżejszych w górę komory tworzących przelew (rys. 1.1b). Bardzo dobre rezultaty osiągnięto przy separacji rudy żelaza. Koncentrat zawierał niskie zawartości krzemionki, siarki i fosforanów (Meloy i Yang, 1997).



Rys. 1.1a. Model rozdziału w osadzarce Yangy (Meloy i Yang, 1997)



Rys.1.1b. Migracja ziaren w komorze roboczej osadzarki Yangy (Meloy i Yang, 1997)

Rosnące wymagania, co do jakości surowców mineralnych, możliwie największy stopień odzysku (w przypadku żwiru i piasku), ponowne ich wykorzystanie oraz konieczność utylizacji zanieczyszczeń, spowodowało poszukiwanie nowych i udoskonalanie istniejących już metod separacji. Niepożądane frakcje są lżejsze lub cięższe od produktu handlowego, dlatego też można je łatwo rozdzielić metodami grawitacyjnymi w osadzarce (Jungmann i Neumann, 1991).

Zastosowanie technologii wzbogacania w osadzarce pozwala na usunięcie zanieczyszczeń organicznych (lignit, drewno) i alkalicznych (krzemiany, rogowce) z kruszyw mineralnych.

Z piasku i drobnego żwiru można usunąć substancje niepożądane za pomocą separacji w osadzarce. Również zanieczyszczenia o pośredniej gęstości można wydzielić z piasku i żwiru w osadzarce dzięki płaskiemu kształtowi ziaren substancji niepożądanej, który to powoduje, że ziarna tej frakcji gromadzą się w górnej warstwie łoża osadzarki (Neumann i inni, 1995).

Dużą rolę odgrywają osadzarki w odzysku materiałów budowlanych tj. gruzu z wyburzeń i kruszenia nawierzchni drogowych, które później można zastosować jako kruszywo do betonu, w konstrukcjach drogowych lub materiał gorszej jakości do zasypywania wykopów. Po separacji w osadzarce materiałów niejednorodnych uzyskuje się frakcje o większej jednorodności pod względem gęstości, a przez to i wyższej wartości handlowej.

Separacja gruzu budowlanego w ośrodku wodnym pozwala uzyskać wysoką jakość produktów rozdziału, której nie można osiągnąć w wyniku separacji na sucho. Po odpowiednim przygotowaniu nadawy tj. kruszeniu, przesiewaniu (poniżej 32 mm), separacji magnetycznej, wzbogacanie w osadzarce na mokro minimalizuje zanieczyszczenia pyłowe, powoduje lepszą separację i klasyfikację, a także całkowicie pozbywa materii organicznej. Gruboziarnisty produkt wzbogacania traktowany jest jako kruszywo odzyskane, a połączone z naturalnym kruszywem stanowi podstawowy składnik betonu. Materiał taki znajduje zastosowanie do podziemnego zbrojenia, drenażu gruntu, kamienia dekoracyjnego, kruszywa do betonów, lecz z wyłączeniem mostów i wysoko wznoszonych budynków (Mesters i inni, 1997, Jungmann 1997, Derks i inni. 1997).

Osadzarka była również testowana na szeroką skalę do separacji złomu samochodowego. Jednakże zdemontowane kawałki złomu zaczepiały o przesiewacz w łożu osadzarki, co utrudniało proces rozdziału. Niemniej jednak z nowoczesnego rozdrabniacza złomu można otrzymać odpady samochodowe w formie zbitej, co pozwala na zastosowanie

osadzarki do separacji niemagnetycznych frakcji złomu o wysokiej gęstości (Kellerwessel, 1993).

Do wzbogacania węgla brunatnego stosuje się osadzarki powietrzne. Głównymi zanieczyszczeniami w tym surowcu są utwory skalne o większej gęstości pozornej niż węgiel brunatny, pochodzące z warstw przyległych do złoża, wydobywane wraz z nim w sposób niekontrolowany. Sam węgiel również zawiera zanieczyszczenia w postaci różnego rodzaju minerałów powstałych podczas formowania się pokładu oraz w wyniku zachodzących później procesów geologicznych. Medium rozdzielcze, jakim jest woda stosowana w osadzarkach, dla węgla brunatnego stanowi czynnik niepożądany, ponieważ obniża wartość energetyczną paliwa. Dlatego w przypadku węgla brunatnego nie stosuje się wzbogacania na mokro, pomimo że proces taki daje wyższą wydajność, lecz obniża kaloryczność węgla brunatnego (Weinstein, 2005). Osadzarki powietrzne stosowane były również do wzbogacania drobnych ziaren węglowych poniżej 8 mm (Szinkorenko, 1958).

Przez ostatnie lata kładzie się nacisk na powiązanie podstawowych zasad prowadzenia procesu, którymi są wzrost dokładności wzbogacania w celu polepszenia jakości produktu, rozszerzenie zakresu rozmiaru rozdzielanych ziaren do bardzo drobnych poniżej 1 mm, redukcja kosztów inwestycji i operacji poprzez wzrost wydajności i obniżenie zużycia energii. Podwojona częstość pulsacji przy wzbogacaniu drobnych i bardzo drobnych ziaren węglowych spowodowała wzrost dokładności separacji, mierzonej imperfekcją, przy tej samej gęstości rozdziału. Ziarna węglowe poniżej 0,5 mm należy jednak wzbogacać flotacyjnie ze względu na dużą zawartość popiołu, której nie można usunąć poprzez separację w osadzarkach (Breuer i Jungmann, 1986).

Przyszłościowym wydaje się być zastosowanie nowego typu osadzarek membranowych, w których można zmieniać w dużym zakresie amplitudę oraz częstość ruchu pulsacyjnego. Uzyskana wydajność w takich urządzeniach jest od 60 – 70 % większa od wydajności osadzarek powszechnie stosowanych (Eichholz i inni, 1998).

Szeroka gama możliwości wykorzystania osadzarek do separacji różnego rodzaju surowców spowodowała, że interesująca wydaje się być istota samego procesu wzbogacania. Wnikliwy przegląd dostępnej literatury na ten temat pozwolił na opracowanie podstawowych zagadnień, w skróconej jednak formie, dotyczących meritum procesu. I tak w rozdziale 2 przedstawiono podstawowe teorie wzbogacania w osadzarkach, a więc podejście deterministyczne jako hipotezę początkowych prędkości i po-

czątkowych przyspieszeń czy też teorię Rittingera oraz podejście statystyczno-probabilistyczne charakteryzowane przez teorię suspensyjną i energetyczną – Mayera. Zmiany energii w rozwarstwanym materiale tzn. kinetykę procesu, tworzenie się centrów grupowania ziaren i poszczególnych warstw równowagi oraz podejście probabilistyczne do kinetyki rozdziału podaje rozdział 3.

Niezbędnym czynnikiem w procesie rozwarstwiania jest dostateczne rozluźnianie materiału. Na rozluźnianie materiału w łożu osadzarki ma decydujący wpływ cykl pulsacji. Wpływ rodzajów cykli pulsacji, zużycia powietrza, koncentracji objętościowej ziaren na stopień rozluźniania materiału opisano w rozdziale 4.

Natomiast wpływ poszczególnych składników na argument rozdziału, którym jest prędkość opadania ziaren zawiera rozdział 5. Przedstawiono również zależność współczynnika oporu dla modelu kuli z warstwą przyścienną w relacji z liczbą Reynoldsa oraz dla ziaren niesferycznych. Wyprowadzono wzór, który posłużył do wyznaczenia rozkładów prędkości opadania ziaren sferycznych i nieregularnych.

W rozdziale 6 podano charakterystykę krzywej rozdziału i jej opis funkcjami zmiennej losowej oraz wskaźniki rozdziału, będące miarą dokładności rozdziału.

W rozdziale 7, na podstawie analizy przedstawionego w rozdziałach 1 - 6 przeglądu literatury, sprecyzowano cel i zakres pracy.

Część druga pracy zawiera wyniki badań własnych. W rozdziale 8 opracowano fizyczny model funkcji rozdziału, natomiast w rozdziale 9 zawiera opis wykonanego eksperymentu przemysłowego oraz zasadę pomiaru własności geometrycznych ziaren.

Rozdział 10 przedstawia opis algorytmu wyznaczania rozkładów prędkości opadania ziaren oraz wyniki obliczeń tych rozkładów dla zbiorów ziaren sferycznych i nieregularnych. Modelowa funkcja rozdziału oraz rozkłady prędkości opadania ziaren posłużyły do analizy wpływu rozkładu własności fizycznych i geometrycznych na dokładność rozdziału, przedstawionej w rozdziale 11.

2. TEORIE ROZDZIAŁU W OSADZARCE

Rozdział w osadzarce jest metodą wzbogacania kopalin używaną z powodzeniem od kilku wieków, lecz nie ma teorii, która w sposób dokładny i jednoznaczny wyjaśniałaby mechanizm procesu. Komora robocza osadzarki z łóżem zawsze traktowana była jako „czarna skrzynka”, przez którą przechodziła warstwa nadawy, a po jej przejściu otrzymywano dwa lub więcej produktów separacji. Wizualnie niemożliwa jest obserwacja ruchu ziaren w przestrzeni roboczej osadzarki za wyjątkiem górnej warstwy oraz ziaren znajdujących się w pobliżu ścian komory.

Podstawowym celem pracy osadzarki jest wprawianie ziaren w ruch, aby te o gęstości mniejszej mogły zająć miejsce w górnych warstwach łóża, natomiast ziarna o większej gęstości opadły na dno. Proces wzbogacania w osadzarce traktuje zachowanie się ziaren jako całej masy, a nie poszczególnych ziaren. Nie stwarza, więc warunków swobodnego ruchu ziaren w wodzie, lecz rozwarstwienie ziaren według gęstości następuje zgodnie z kryteriami ruchu skrzepowanego (Lill i Smith, 1960).

Samylin (1976) w badaniach teoretycznych wyróżnia dwa kierunki teorii wzbogacania w osadzarce: deterministyczny i statystyczno-probabilistyczny. W podejściu deterministycznym określa się ruch pojedynczego ziarna w warunkach ruchu skrzepowanego pod wpływem sił zewnętrznych uwarunkowanych obecnością ziaren sąsiednich. W teorii tej można uwzględnić wpływ gęstości, wielkości i kształtu ziarna. W teoriach statystycznych określa się ruch grupy ziaren jako całości i losowy rozrzut pojedynczych ziaren wokół centrum grupowania ziaren o danych właściwościach w zależności od rozkładu własności fizycznych w mieszaniu. Wyróżnia się tutaj teorie suspenzyjną, energetyczną i probabilistyczną. W teorii suspenzyjnej rozdział zachodzi w pseudozawiesinowej cieczy, którą tworzy mieszanina pozostałych ziaren mineralnych. W teorii energetycznej energia potencjalna nadawy przechodzi w trakcie rozdziału w energię kinetyczną ziaren, która razem z energią dostarczoną z zewnątrz jest zużywana na pracę sił oporu mechanicznego ziaren przy ich ruchu do swoich warstw równowagi. Jest to energia rozproszona. W efekcie rozdziału następuje obniżenie środka ciężkości mieszaniny, związane ze zmniejszeniem się energii potencjalnej. W teoriach statystycznych w odróżnieniu od teorii deterministycznej nie uwzględnia się własności geometrycznych ziaren.

2.1. Podejście deterministyczne

W teorii deterministycznej wyróżnia się dwie hipotezy rozwarstwienia materiału: hipotezę początkowych prędkości i hipotezę początkowych przyspieszeń.

Hipoteza początkowej prędkości wychodzi z założenia że w początkowym momencie ruchu ziarna kiedy prędkość strumienia wschodzącego jest nieduża a przyspieszenia w cieczy osiągają stosunkowo duże wartości ziarna przemieszczają się w rozluzowanej pościeli zgodnie z prawami opadania skrzepowanego. Na podstawie tej hipotezy można było wyjaśnić rozwarstwienie drobno uziarnionego materiału przy wysokich częstościach ruchu pulsacyjnego. Hipoteza oparta na początkowych przyspieszeniach zakłada, że rozwarstwienie ziaren zachodzi w początkowych momentach dzięki różnej bezwładności ziaren uwarunkowanej ich gęstością i własnościami geometrycznymi. Ta hipoteza daje możliwość wyjaśnienia rozwarstwienia materiału nierozkasyfikowanego. Na podstawie tej hipotezy został opracowany przez Zapałę (1987, 1994) model krzywej rozdziału.

Równania ruchu ziarna w kierunku osi x i y (rys.2.1) są następujące:

$$\rho \frac{\pi d_z^3}{6} \frac{d^2 x}{dt^2} = \psi_x \frac{\pi d_z^2}{4} \frac{1}{2} \rho_o \left(\frac{u_x}{g} - v_x \right)^2 + \frac{\pi d_z^3 \rho_o}{6} \frac{du_x}{dt} - \frac{\pi d_z^2 R_{xM}}{4} \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\pi d_z^3}{6} \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\pi d_z^3 (\rho - \rho_o)}{6} g - \frac{\pi d_z^3 \rho_o}{6} \frac{du_y}{dt} - \frac{\psi_y \pi d_z^2 \rho_o \left(\frac{u_y}{g} - v_y \right)^2}{8} - \frac{\pi d_z^2 R_{yM}}{4} \quad (2.2)$$

Po podzieleniu przez $\rho \frac{\pi d_z^3}{6}$ uzyskuje się układ równań różniczkowych opisujących ruch pojedynczego ziarna w osadzarce (Verhovskij i inni, 1959) :

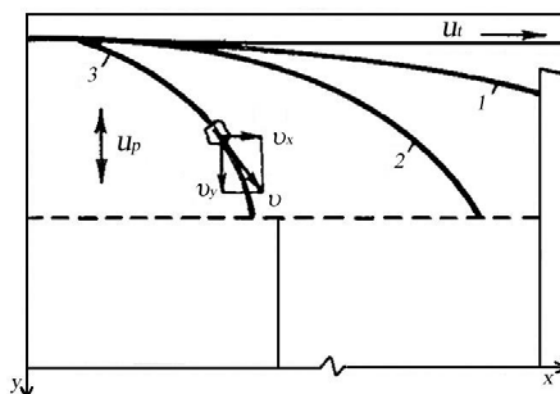
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{3\psi_x \rho_o}{4\rho d_z} \left(\frac{u_x}{g} - v_x \right)^2 + \frac{\rho_o}{\rho} \frac{du_x}{dt} - \frac{3R_{xM}}{2\rho d_z} \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\rho - \rho_o}{\rho_o} g - \frac{3\psi_y \rho_o}{4\rho d_z} \left(\frac{u_y}{g} - v_y \right)^2 - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{du_y}{dt} - \frac{3R_{yM}}{2\rho d_z} \quad (2.4)$$

gdzie: g – przyspieszenie ziemskie, ρ – gęstość ziarna, ρ_o – gęstość cieczy, d_z – średnica zastępcza ziarna (zdefiniowana w rozdziale 7), ψ_x i ψ_y – współczynniki oporu odpo-

wiednio dla poziomej i pionowej składowej siły oporu, u_x i u_y – składowa pozioma i pionowa prędkości strumienia cieczy, v_x i v_y – składowa pozioma i pionowa prędkości ziarna, R_{xM} i R_{yM} – składowa pozioma i pionowa siły mechanicznego oddziaływania między ziarnami przypadająca na jednostkę powierzchni rzutowej ziarna, $\mathcal{G}$ – współczynnik zmiany prędkości cieczy w szczelinach pomiędzy ziarnami.

Po rozwiązaniu powyższego układu równań można uzyskać równanie toru ruchu ziarna. Poglądowe tory ruchu ziaren dla trzech różnych gęstości przedstawiono na rys.2.1.



Rys.2.1. Poglądowe tory ruchu ziaren w osadzarce: 1- 3 tory odpowiednio dla ziaren o gęstościach - 1300, 1600 i 2000 kg/m³ (Samylin, 1976)

Przy większej wydajności osadzarki czas trwania rozdziału (czas ruchu w kierunku osi x) jest mniejszy i rozwarstwienie torów ruchu ziaren o różnych gęstościach jest mniejsze. Skutkuje to mniejszą dokładnością rozdziału.

Deterministyczny model w sposób bardzo przybliżony opisuje mechanizm rozdziału materiału według gęstości.

2.1.1. Teoria Rittingera

„Działanie cieczy w stosunku do opadającego w niej ciała objawia się jako opór skierowany przeciwnie niż siły ciężkości ciała i zmniejszający te siły tak, że spadek ciała odbywa się przy mniejszym przyspieszeniu aniżeli w próżni bądź w powietrzu. Takie samo działanie zachodzi w odwrotnym przypadku, kiedy ciecz wznosi się pionowo...” (Rittinger, 1867, za Dietrych, 1953). Jest to prawo sformułowane przez Rittingera w 1867 roku jako punkt wyjścia jego teorii wzbogacania w osadzarkach. Wielkość oporu określa korzystając z prawa Newtona o oporze cieczy. Dlatego prawo to nosi nazwę Newtona-Rittingera i rozpatrywanie ruchu ziaren w cieczy uwzględnia graniczną

prędkość opadania w ruchu jednostajnym, czyli sytuację, w której suma geometryczna sił działających na ziarno, a więc siły ciężkości, siły wyporu hydrostatycznego oraz siły oporu ośrodka, będzie równa zero. Zakłada zatem, że w momencie rozluźnienia warstwy materiału w osadzarce tzn. gdy wszystkie ziarna znajdują się w stanie zawieszenia, każde ziarno porusza się ruchem swobodnym, niezależnie od obecności otaczających go ziaren. Sytuacja taka powtarza się w każdym cyklu ruchu pulsacyjnego. Rozdział ziaren według gęstości możliwy jest tylko wtedy, kiedy stosunek ich wielkości zawarty jest w określonym przedziale wyliczanym na podstawie zdefiniowanego przez Rittingera współczynnika równoopadania:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\rho_2 - \rho_o}{\rho_1 - \rho_o} \quad (2.5)$$

przy czym indeks 1 odnosi się do ziaren o mniejszej gęstości, natomiast indeks 2 dla ziaren o większej gęstości, d – średnica ziarna. Jest to podejście przybliżone, gdyż nie uwzględnia ono w ruchu ziaren oddziaływań z innymi ziarnami.

2.2. Podejścia statystyczno – probabilistyczne

2.2.1. Teoria suspenzyjna

W modelu suspenzyjnym zasady rozdziału są analogiczne do rozdziału w cieczy ciężkiej, przy czym tę specyficzną ciecz zawiesinową tworzą ziarna rozdzielanego materiału zawieszone w wodzie (Tichonov, 1968, 1973). Dla scharakteryzowania tej cieczy jak również dla opisu zjawisk zachodzących w przestrzeni roboczej osadzarki definiuje się tzw. funkcję stanu $f(\rho, z, t)$. Jest to funkcja określająca rozkład gęstości ziaren w każdym punkcie przestrzeni w dowolnej chwili czasu. Iloczyn $f(\rho, z, t)d\rho$ jest procentowym udziałem ziaren z przedziału gęstości $(\rho, \rho + d\rho)$ w otoczeniu punktu z w chwili t lub jest to prawdopodobieństwo znalezienia ziarna o gęstości z z przedziału $(\rho, \rho + d\rho)$ w otoczeniu punktu z w chwili t . Z zastosowaniem funkcji stanu średnia gęstość ziaren w otoczeniu punktu z w chwili t jest równa:

$$\bar{\rho}(z, t) = \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \rho \cdot f(\rho, z, t) d\rho \quad (2.6)$$

gdzie: $\rho_{\min}$ – minimalna gęstość ziaren, $\rho_{\max}$ – maksymalna gęstość ziaren.

Jeżeli oprócz ziaren uwzględni się ciecz (wodę), w której zanurzone są ziarna mineralne wówczas uzyskuje się zawiesinę, której gęstość wyraża się wzorem:

$$\rho_s(z, t) = (1 - C)\rho_o + C\bar{\rho}(z, t) = \rho_o + C[\bar{\rho}(z, t) - \rho_o] \quad (2.7)$$

gdzie: C – objętościowa koncentracja ziaren w komorze osadzarki w stanie upakowanym.

Ze wzoru (2.7) wynika, że gęstość tej specyficznej cieczy zawiesinowej zależy od zmiennej z oraz czasu. Wynika to ze zmiany rozkładu własności fizycznych ziaren wzdłuż wysokości łoża z czasem. Rozkład ten uzyskuje się z równania różniczkowego transportu masy. Uwzględniając zależność (2.7) wzór na prędkość opadania sferycznego ziarna w takiej cieczy zawiesinowej jest następujący:

$$v_s = \psi_s \sqrt{d \frac{\rho - \rho_s(z, t)}{\rho_s(z, t)}} = \psi_s \sqrt{d \frac{\rho - [(1 - C)\rho_o + C\bar{\rho}(z, t)]}{(1 - C)\rho_o + C\bar{\rho}(z, t)}} \quad (2.8)$$

Z modeli statystyczno-probabilistycznych wyprowadza się równania kinetyki procesu rozdziału w osadzarce.

2.2.2. Równanie transportu masy

Aby uzyskać jawną postać funkcji stanu $f(\rho, z, t)$ należy znaleźć równanie różniczkowe, które spełnia ta funkcja. Równaniem tym jest równanie ciągłości lub równanie zachowania masy, które w postaci wektorowej przyjmuje następujący kształt:

$$\frac{\partial f(\rho, \vec{r}, t)}{\partial t} = -\text{div}(f\vec{v}) \quad (2.9)$$

przy założeniu, że $C = \text{const}$.

Dla przypadku jednowymiarowego ($\vec{v} \parallel z$):

$$\frac{\partial f(\rho, z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial(fv)}{\partial z} \quad (2.10)$$

W równaniu ciągłości występują dwie niewiadome: f i v . należy znaleźć drugie równanie wiążące obie funkcje. Tym równaniem jest równanie bilansu sił działających na ziarno. Są to następujące siły:

- Siła ciężkości ziarna:

$$F_g = \rho g V \quad (2.11)$$

gdzie: V – objętość ziarna.

- Siła wyporu w ośrodku o gęstości ρ_s :

$$F_w = \rho_s gV = [(1-C)\rho_o + C\bar{\rho}(z,t)]gV = \left[(1-C)\rho_o + C \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \rho f(\rho, z, t) d\rho \right] gV \quad (2.12)$$

- Siła dyfuzyjna (Olajossy, 1995):

$$F_d = Vk_M \frac{1}{f} \text{grad } f \quad (2.13)$$

gdzie: $k_M = \frac{1}{3} \rho \bar{v}_{ch}^2$, $\bar{v}_{ch}$ - prędkość średnia kwadratowa chaotycznego ruchu ziaren

wynikającego ze zderzeń pomiędzy ziarnami.

- Siła oporu tarcia:

$$F_o = \psi_o vV \quad (2.14)$$

gdzie: ψ_o - współczynnik oporu równy (Olajossy, 1995) $\psi_o = \frac{\rho C \bar{v}_{ch}}{d}$, v – deterministyczna składowa prędkości ruchu ziarna.

Siły ciężkości ziarna oraz siła wyporu są siłami separującymi, natomiast siła dyfuzyjna oraz siła oporu tarcia są siłami burzącymi uporządkowanie ziaren na poszczególne warstwy różniące się właściwościami fizycznymi.

Pomijając siłę bezwładności dla warunków równowagi uzyskuje się:

$$\begin{aligned} & \rho gV - \left[(1-C)\rho_o + C \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \rho f(\rho, z, t) d\rho \right] gV - \\ & - Vk_M \frac{1}{f(\rho, z, t)} \text{grad } f(\rho, z, t) - \psi_o vV = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Z równania (2.15) prędkość ruchu ziarna jest równa:

$$v = \frac{g}{\psi_o} (\rho - \rho_s) - \frac{k_M}{\psi_o} \frac{1}{f(\rho, z, t)} \text{grad } f(\rho, z, t) \quad (2.16)$$

Wstawiając za v do wzoru (2.10) dla przypadku jednowymiarowego otrzymuje się:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{g}{\psi_o} (\rho - \rho_s) \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{g}{\psi_o} f \frac{d\rho_s}{dz} \quad (2.17)$$

gdzie: $D = \frac{k_M}{\psi_o}$ - współczynnik dyfuzji.

Wzór (2.17) przedstawia poszukiwane równanie różniczkowe dla funkcji stanu $f(\rho, z, t)$. Jest to równanie nieliniowe.

Jeżeli koncentracja objętościowa C jest mała, wówczas $\rho_s \cong \rho_o$ i równanie dla funkcji stanu jest następujące:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{g}{\psi_o} (\rho - \rho_o) \frac{\partial f}{\partial z} \quad (2.18)$$

Jest to równanie liniowe typu Fokkera-Plancka. Równanie to jest analogiczne do równania (3.8) opisującego kinetykę procesu rozdziału w osadzarce, przy czym $D = \sigma^2$ oraz $v = \frac{g}{\psi_o} (\rho - \rho_o)$.

2.2.3. Energetyczna teoria Mayera

Potencjalna teoria rozwarstwiania opracowana przez Mayera postrzegana jest jako pierwsze najprostsze wyobrażenie o procesie rozdziału. Interpretuje ona proces rozdzielczy zachodzący w osadzarce jako różnicę energii potencjalnej pomiędzy nadawą i produktami wzbogacania. Nie rozwarstwiona mieszanina ziaren mineralnych jako układ niestabilny zajmuje wyższy poziom energetyczny i dąży do ustalenia stanu o niższym poziomie energetycznym. Jest to możliwe poprzez rozdział materiału w wyniku oddziaływującego pionowego prądu wody w następstwie, którego mieszanina ziaren ulega rozwarstwieniu. W czasie formowania się warstw złożonych z ziaren od największej gęstości do najmniejszej w górnych warstwach następuje przesuwanie się środka ciężkości mieszaniny w dół. Obniżenie to po zakończeniu procesu rozwarstwiania można uznać za wskaźnik wyzwolonej energii potencjalnej. Na rys. 2.2 przedstawiono położenie środka ciężkości przed i po rozwarstwieniu mieszaniny dwuskładnikowej. Energie potencjalną przed rozwarstwieniem zapisać można jako E_I :

$$E_I = (G_1 + G_2) g \frac{h}{2} \quad (2.19)$$

gdzie: G_1 – masa składnika o mniejszej gęstości w powietrzu, G_2 – masa składnika o większej gęstości w powietrzu, h – wysokość łoża.

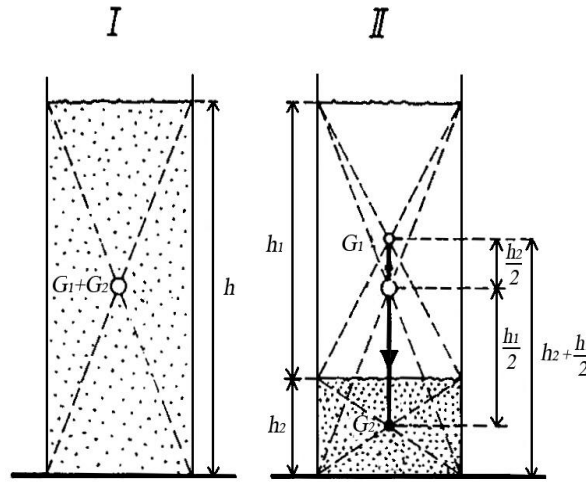
Sytuację po rozwarstwieniu opisuje równanie:

$$E_{II} = G_1 g \left(\frac{h_1}{2} + h_2 \right) + G_2 g \frac{h_2}{2} \quad (2.20)$$

gdzie: E_{II} – energia układu po rozwarstwieniu, h_1 , h_2 – wysokość warstw idealnie rozwarstwionych składników, odpowiednio o mniejszej i większej gęstości.

Zmiana energii potencjalnej jako różnica stanów przed rozwarstwieniem i po utworzeniu się warstw definiuje równanie (2.21):

$$\Delta_E = E_I - E_{II} = \frac{1}{2} g (G_2 h_1 - G_1 h_2) \quad (2.21)$$



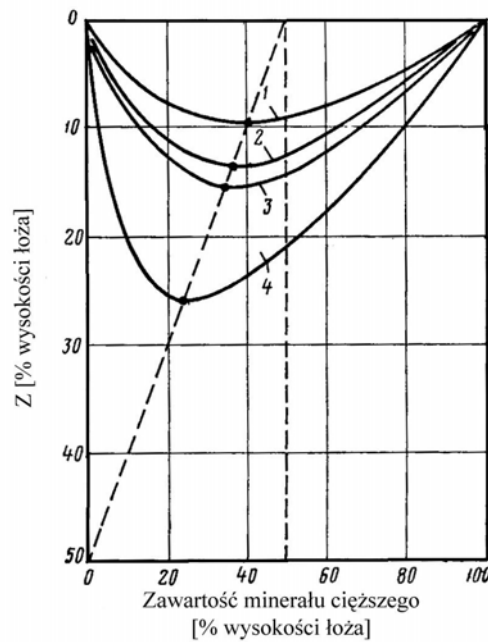
Rys. 2.2. Przemieszczenie środka ciężkości przed i po rozwarstwieniu (Mayer, 1964)

Na rys. 2.3 podane jest obniżenie środka ciężkości dla kilku mieszanin dwuskładnikowych w zależności od różnicy gęstości składników i składu mieszaniny. Im większe jest obniżenie środka ciężkości, tym efektywniej przebiega proces.

Zależność odległości środka ciężkości od dna sita od zawartości składnika o większej gęstości wyraża się wzorem:

$$z(\lambda) = \frac{h}{2} \frac{\rho_1 + \lambda^2 (\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \lambda (\rho_2 - \rho_1)} \quad (2.22)$$

gdzie: $\lambda = \frac{h_2}{h}$ - zawartość objętościowa składnika o większej gęstości wyrażona ułamkiem wysokości łoża.



Rys.2.3. Zmiana położenia środka ciężkości mieszanin dwuskładnikowych (Samylin, 1976): 1 - węgiel – produkt pośredni, 2 – kalcyt – galena, 3 – węgiel – skała płonna, 4 - węgiel - galena

Obniżenie środka ciężkości mieszaniny dwuskładnikowej po rozwarstwieniu jest równe:

$$\Delta z(\lambda) = \frac{h}{2} - z(\lambda) = \frac{\lambda(\lambda - 1)(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \lambda(\rho_2 - \rho_1)} \quad (2.23)$$

Po oznaczeniu przez $p = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ wzór (2.23) przyjmuje postać:

$$\Delta z(\lambda) = \frac{\lambda(\lambda - 1)(p - 1)}{1 + \lambda(p - 1)} \quad (2.24)$$

Zależność wyrażona wzorem (2.24) posiada maksimum. Obniżenie środka ciężkości jest maksymalne gdy:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{p} + 1} \quad (2.25)$$

Zatem obniżenie środka ciężkości jest zależne od stosunku gęstości składników mieszaniny oraz zawartości składnika cięższego. Wniosek ten można przenieść na mieszaniny wieloskładnikowe. Obniżenie środka ciężkości będzie zależne od typu rozkładu gęstości mieszaniny (nadawy).

Minimalne położenie środka ciężkości mieszaniny odpowiada sytuacji idealnego rozwarstwienia ziaren według gęstości. Znając rozkład gęstości ziaren w nadawie można wyliczyć minimalne położenie środka ciężkości mierzone ułamkiem wysokości łoża osadzarki:

$$z_{\min} = \frac{h \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} f(\rho) \rho \frac{df}{d\rho} d\rho}{\int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \rho \frac{df}{d\rho} d\rho} \quad (2.26)$$

Wszystkie powyższe rozważania odnoszą się do nadawy monodispersyjnej.

Przedstawiony powyżej model dotyczy rozdziału idealnego, w którym układ ziaren osiąga teoretycznie możliwą, minimalną wartość energii potencjalnej. W rzeczywistych warunkach rozdziału taki stan nie zostanie nigdy osiągnięty z powodu losowych przemieszczeń ziaren uwarunkowanych istnieniem siły dyfuzyjnej, proporcjonalnej do gradientu koncentracji i zmierzającej do wyrównania koncentracji ziaren o danych własnościach w sąsiadujących ze sobą warstwach. Strumień ziaren, indukowany przez siłę dyfuzyjną, zgodnie z I prawem Ficka jest równy:

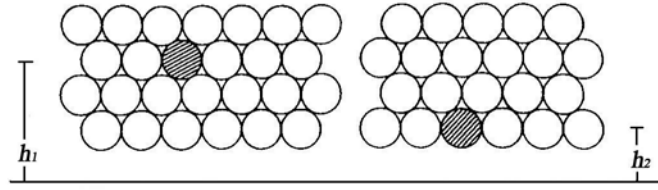
$$\phi_D = -D \frac{dC}{dz} \quad (2.27)$$

gdzie: D – współczynnik dyfuzji zależny od własności geometrycznych ziarna oraz mechanizmu rozluźnienia warstwy materiału w osadzarce, C – objętościowa koncentracja rozpatrywanych ziaren na poziomie z .

Siłą porządkującą i rozdzielającą mieszaninę ziaren na poszczególne składniki (warstwy) jest siła związana ze zmianą energii potencjalnej wybranego ziarna przy dochodzeniu do swojej warstwy równowagi. Na rys. 2.4 pokazane jest ziarno o gęstości ρ_2 poruszające się w warstwie ziaren o gęstości ρ_1 ($\rho_2 > \rho_1$) w kierunku spadku jego energii potencjalnej (King, 1987). Zmiana energii potencjalnej ziarna jest równa:

$$\Delta U = (\rho_2 - \rho_1) V_p g (h_2 - h_1) = (\rho_2 - \rho_1) V_p g \Delta z \quad (2.28)$$

gdzie: V_p – objętość ziarna, $\Delta z = h_2 - h_1$.



Rys. 2.4. Ruch ziarna o gęstości ρ_2 w warstwie o gęstości ρ_1 (King, 1987)

Wobec tego siła działająca na ziarna, pod wpływem, której następuje rozwarstwienie mieszaniny ziaren na dwa podzbiory jest równa:

$$F = -\frac{dU}{dz} = -(\rho_2 - \rho_1)V_p g \quad (2.29)$$

Strumień ziaren związany z siłą rozdzielającą wyraża się następującym wzorem (King, 1987):

$$\phi_F = -Cu \frac{dU}{dz} \quad (2.30)$$

gdzie: u – ruchliwość rozpatrywanych ziaren lub prędkość przenikania przez łożę w nieobecności siły dyfuzyjnej.

Prędkość przenikania jest zależna od różnicy gęstości, wielkości i kształtu ziaren oraz charakterystyki ruchu pulsacyjnego (amplitudy i częstości) (Lill i Smith, 1960).

W stanie równowagi:

$$D \frac{dC}{dz} = -Cu \frac{dU}{dz} \quad (2.31)$$

Po rozwiązaniu powyższego równania otrzymuje się:

$$C = C_o \exp\left(-\frac{u}{D}U\right) \quad (2.32)$$

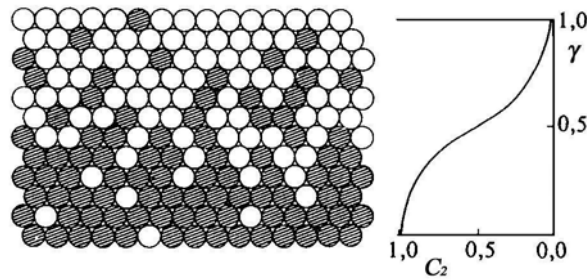
przy czym C_o jest koncentracją ziaren na poziomie gdzie $U = 0$.

Zatem koncentracja analizowanych ziaren zależy eksponencjalnie od energii potencjalnej ziaren na określonym poziomie.

Posługując się wzorem (2.32) wyprowadza się wyrażenie na zależność koncentracji składnika 2 (o większej gęstości) w produkcie dolnym, po rozdziale mieszaniny dwuskładnikowej, od wychodu objętościowego produktu (King, 1987):

$$C_2(\gamma) = \frac{1}{1 + \frac{C_{o1}}{C_{o2}} \exp[-\sigma(\rho_2 - \rho_1)\gamma]} \quad (2.33)$$

gdzie: $\frac{C_{o1}}{C_{o2}} = \frac{1 - \exp[-\sigma(\rho_1 - \rho_2)\alpha_1]}{\exp[-\sigma(\rho_2 - \rho_1)\alpha_2]}$, $\sigma = \frac{ughV_p}{D}$, γ – wychód objętościowy produktu dolnego, α_1 i α_2 – odpowiednio koncentracje objętościowe składników 1 i 2 w nadawie.



Rys.2.5. Zależność pogładowa koncentracji składnika o większej gęstości od wychodu produktu dolnego (King, 1987)

Na rys. 2.5 pokazana jest pogładowa zależność $C_2(\gamma)$ wyrażona wzorem (2.33). dokładność rozdziału jest tym większa (większe nachylenie krzywej) im większa jest różnica gęstości pomiędzy składnikami mieszaniny oraz im mniejsza jest wartość współczynnika dyfuzji.

3. KINETYKA ROZDZIAŁU

3.1. Kinetika tworzenia się warstw równowagi

Z fizycznego punktu widzenia kinetyka procesu rozdziału w osadzarce jest to proces zmian energii potencjalnej układu w czasie. Zakłada się, że prędkość zmian energii potencjalnej w czasie jest proporcjonalna do różnicy energii w chwili t i energii minimalnej (w stanie równowagi trwałej):

$$\frac{dE(t)}{dt} = -k(E - E_{\min}) \quad (3.1)$$

gdzie: $E_{\min}$ – minimalna wartość energii potencjalnej mieszaniny, $E(t)$ – wartość energii potencjalnej w chwili t , k – współczynnik proporcjonalności charakteryzujący prędkość przebiegu procesu rozdziału (stała prędkości rozdziału). Stała prędkości rozdziału jest zależna od rozkładu gęstości ziaren w nadawie.

Przy następującym założeniu: $E(t = 0) = E_o$, równanie (3.1) ma następujące rozwiązanie:

$$E(t) = (E_o - E_{\min})e^{-kt} + E_{\min} \quad (3.2)$$

Ponieważ energia potencjalna układu jest proporcjonalna do aktualnego położenia środka ciężkości w związku z tym według analogicznego do wzoru (3.2) prawa zmienia się położenie środka ciężkości mieszaniny:

$$z(t) = (z_o - z_{\min})e^{-kt} + z_{\min} \quad (3.3)$$

Zmiana energii potencjalnej i położenia środka ciężkości mieszaniny wieloskładnikowej jest związana z przechodzeniem ziaren o określonych gęstościach do swoich warstw równowagi. Na rys. 3.1 przedstawiono schematycznie położenie wybranej warstwy równowagi ziaren o określonej gęstości oraz strefy rozdziału. Ziarna o rozpatrywanej gęstości przechodzą ze stref rozdziału do strefy równowagi (Verchovskij i inni, 1959, Rajvitsch, 1973). Zakłada się, że ilość ziaren $d\gamma_r$ przechodzących do warstwy równowagi jest proporcjonalna do ilości tych ziaren znajdujących się w strefie rozdziału i czasu trwania rozdziału dt :

$$d\gamma_r = -k \gamma_r dt \quad (3.4)$$

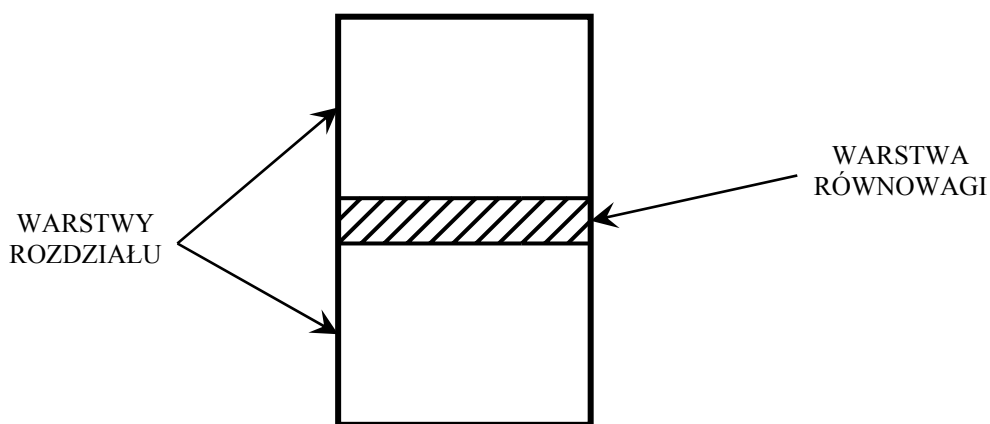
gdzie: γ_r – zawartość rozpatrywanych ziaren w strefie rozdziału w chwili t , k – stała mająca interpretację stałej prędkości rozdziału.

Zakładając, że w chwili początkowej $\gamma_r(t = 0) = \gamma_n$, gdzie γ_n - jest zawartością analizowanych ziaren w nadawie, rozwiązanie równania różniczkowego (3.3) jest następujące:

$$\gamma_r(t) = \gamma_n e^{-kt} \quad (3.5)$$

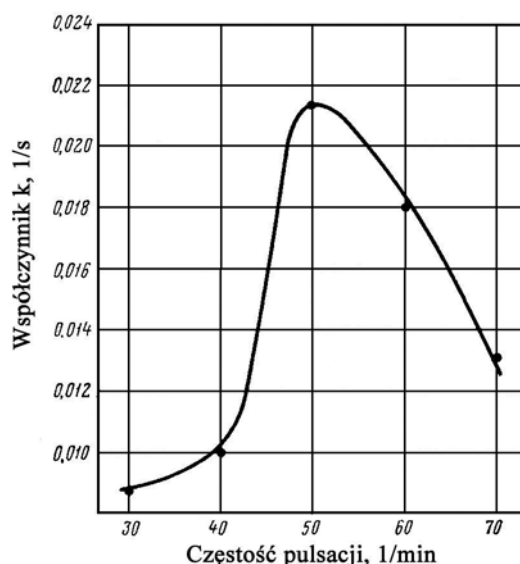
Wobec tego ilość ziaren, które przeszły do swojej warstwy równowagi jest równa:

$$\gamma(t) = \gamma_n - \gamma_r(t) = \gamma_n (1 - e^{-kt}) \quad (3.6)$$



Rys.3.1. Schematyczne położenie warstw rozdziału i warstwy równowagi w osadzarce

Wyrażenie (3.6) przedstawia równanie kinetyki rozdziału, czyli prędkości tworzenia się warstwy równowagi o określonej gęstości. Prędkość ta zależy od zawartości danej frakcji w nadawie oraz stałej prędkości rozdziału, której wartość jest między innymi funkcją częstości ruchu pulsacyjnego. Na rys. 3.2 podana jest zależność stałej k od częstości ruchu pulsacyjnego w procesie wzbogacania węgla w warunkach przemysłowych (Samylin, 1976). Jak widać z tego rysunku dla każdego typu osadzarki i wzbogacanego surowca istnieje optymalny przedział częstości ruchu pulsacyjnego, w którym wartość stałej prędkości rozdziału jest maksymalna.



Rys.3.2. Zależność stałej k od częstości pulsacji (Samylin, 1976)

3.2. Ruch centrów grupowania ziaren

W przedstawionym powyżej podejściu położenie warstwy równowagi ziaren wynika z rozkładu gęstości wzdłuż wysokości łoża osadzarki w stanie stacjonarnym. Jej położenie nie ulega zmianie w czasie, zmienia się natomiast skład densymetryczny tej warstwy. W trakcie trwania procesu przemieszczeniu ulegają całe grupy ziaren o określonej gęstości zwane centrami grupowania.

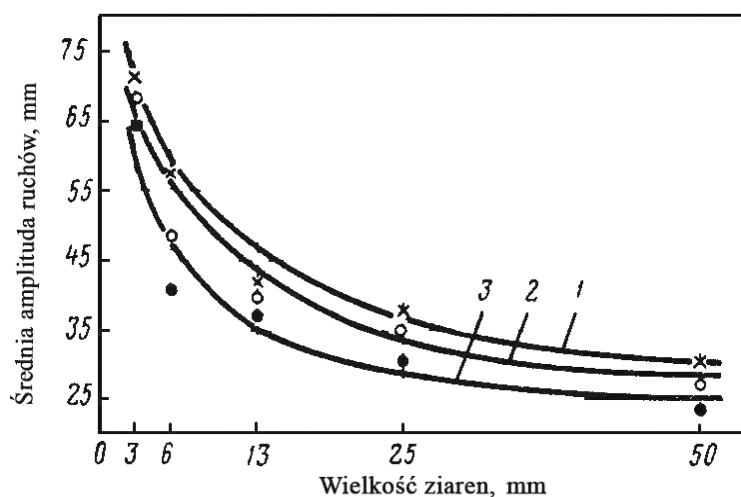
Jak wiadomo, każdy rozkład bez względu na typ rozkładu, charakteryzuje się średnią oraz odchyleniem standardowym, będącym miarą rozrzutu wokół średniej. Centrum grupowania jest takim poziomem, w otoczeniu którego, jest największe prawdopodobieństwo znalezienia ziaren o danych własnościach. Położenie centrum grupowania ziaren o określonej gęstości oraz odchylenie standardowe wyrażają się następującymi wzorami (Rajvitsch, 1977):

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (3.7)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}} \quad (3.8)$$

gdzie: $\bar{z}$ – położenie centrum grupowania, z_i – położenie i -tej warstwy, σ – odchylenie standardowe, m_i – masa ziaren danej gęstości w i -tej warstwie, n – liczba warstw.

W czasie trwania rozdziału położenie centrum ulega zmianie. Zmienia się również wartość odchylenia standardowego. Przy przesuwaniu się ziaren w kierunku swojej warstwy równowagi nie zajmują one określonego położenia względem osi pionowej lecz dzięki zderzeniom z sąsiednimi ziarnami i turbulentnemu ruchowi cieczy wykonują nieuporządkowane ruchy w określonej objętości. Na rys. 3.3 pokazana jest zależność średniej statystycznej amplitudy tych ruchów. Jak widać z tego rysunku ze zmniejszeniem się wielkości ziaren amplituda tych ruchów zwiększa się. W niektórych przypadkach może wiele razy przewyższać amplitudę wahań ziaren w swojej warstwie równowagi. Oznacza to, że przy wzbogacaniu niesklasyfikowanego materiału drobne ziarna o dużej gęstości są intensywnie wyrzucane do górnych warstw obniżając ogólną efektywność rozdziału.



Rys. 3.3. Średnia statystyczna amplituda ruchu w funkcji wielkości ziaren: 1 – gęstość 1350 kg/m^3 , 2 – zależność teoretyczna, 3 – gęstość 1860 kg/m^3 (Samylin, 1976)

Z matematycznego punktu widzenia proces rozdziału w osadzarce jest stochastycznym procesem Markowa opisywanym przez równanie Kołmogorowa (Nepomniaszczij, 1963, 1964, 1967, Branspiz i Zagirnyak, 1994). Przy wzbogacaniu w osadzarce w obecności dodatkowego strumienia wody podsitowej składowa losowa przemieszczania się ziaren nie jest symetryczna tzn. że istnieją różne prawdopodobieństwa przemieszczania się ziaren ku górze i ku dołowi. Przy założeniu, że prawdopodobieństwo przejścia ziarna o dużej gęstości w dolne warstwy jest większe niż przejście w warstwy górne oraz, że jest ono stałe w całej objętości łoża równanie Kołmogorowa przechodzi w równanie typu Fokkera-Plancka:

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -p \frac{\Delta z}{\Delta t} \frac{\partial f(z)}{\partial z} + \frac{1}{2} p \frac{(\Delta z)^2}{\Delta t} \frac{\partial^2 f(z,t)}{\partial z^2} \quad (3.9)$$

gdzie: $f(z,t)\Delta z$ – prawdopodobieństwo znalezienia się ziarna o danej gęstości w warstwie o grubości Δz w chwili t lub ułamek ziaren, które w chwili t znajdują się w warstwie Δz o współrzędnej z , p – prawdopodobieństwo przejścia grupy ziaren z warstwy do warstwy.

Następujące wyrażenia:

$$p \frac{\Delta z}{\Delta t} = v \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{2} p \frac{(\Delta z)^2}{\Delta t} = \frac{1}{2} v \Delta z = \sigma^2 \quad (3.11)$$

przedstawiają odpowiednio prędkość przemieszczania się centrum grupowania oraz odchylenie standardowe. Zarówno prędkość przemieszczania się jak i odchylenie standardowe są proporcjonalne do prawdopodobieństwa przejścia. Prawdopodobieństwo to zmniejsza się w miarę zbliżania się do warstwy równowagi i wyraża się wzorem:

$$p = 1 - \frac{i}{n} = 1 - \frac{z_i}{z_{\max}} \quad (3.12)$$

gdzie: $z_{\max}$ – odległość od początku układu do warstwy równowagi (rys. 3.4).

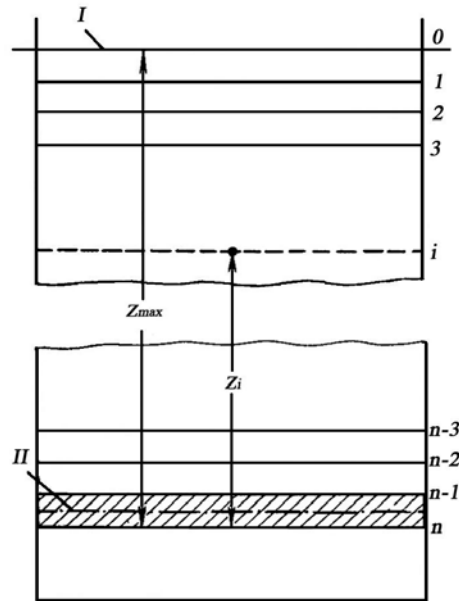
Uwzględniając wzór (3.12) wyrażenia (3.10) i (3.11) przyjmują kształt:

$$v = v_{\max} \left(1 - \frac{z}{z_{\max}} \right) = \frac{dz}{dt} \quad (3.13)$$

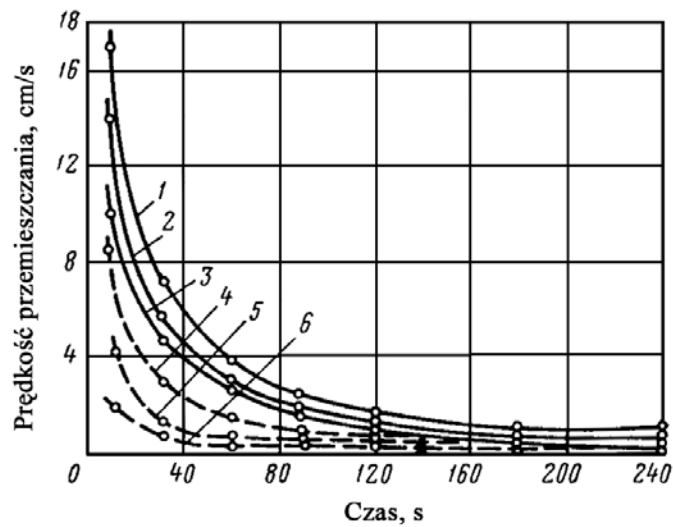
$$\sigma^2 = \frac{1}{2} v_{\max} \left(1 - \frac{z}{z_{\max}} \right) z_{\max} \quad (3.14)$$

gdzie: $v_{\max}$ – maksymalna wartość prędkości przemieszczania się centrum równowagi.

Na rys. 3.5 przedstawione są zależności prędkości przemieszczania się centrum równowagi od czasu dla kilku frakcji densymetrycznych. Jak wynika z tego rysunku prędkość ruchu ziaren do sita osadzarki jest większa niż w kierunku przeciwnym.



Rys. 3.4. Układ warstw elementarnych w osadzarce I – poziom odniesienia, II – warstwa równowagi (Nawrocki, 1972)



Rys. 3.5. Zależności przemieszczania się centrów równowagi od czasu:
a) przy ruchu w dół 1- 3: gęstości odpowiednio 1,4 – 1,5; 1,6 – 1,7; 1,9 – 2,0 Mg/m³
b) przy ruchu w górę 4 – 6 gęstości odpowiednio 1,4 – 1,5; 1,6 – 1,7; 1,9 – 2,0 Mg/m³
(Samylin, 1976)

Rozwiązując równania (3.13) i (3.14) otrzymuje się następujące zależności:

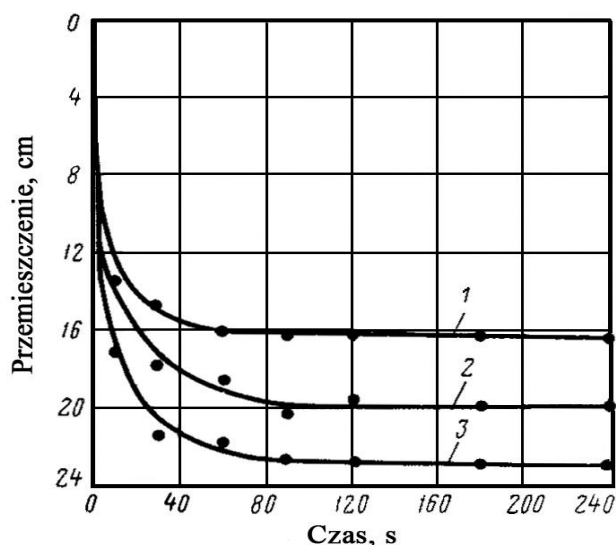
$$z = z_{\max} (1 - e^{-kt}) \quad (3.15)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} z_{\max}^2 k e^{-kt} \quad (3.16)$$

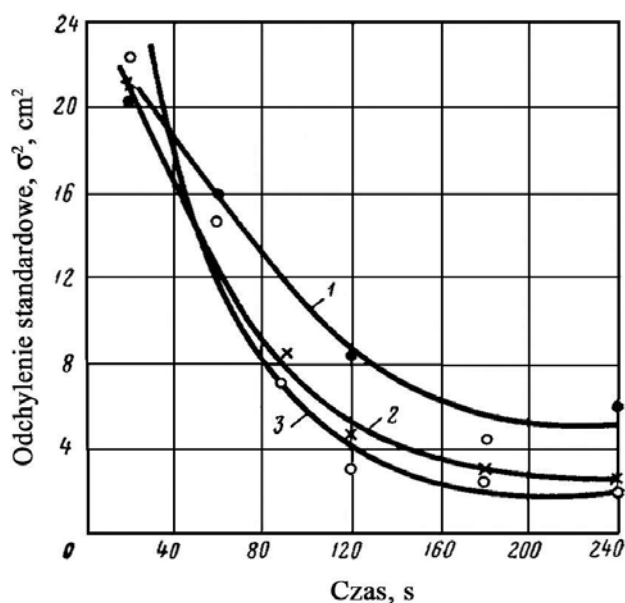
gdzie: $k = \frac{v_{\max}}{z_{\max}}$ - współczynnik charakteryzujący właściwą prędkość przemieszczania

centrum równowagi, zależny od właściwości wzbogacanego materiału oraz warunków pracy osadzarki.

Na rysunkach 3.6 i 3.7 przedstawione są zależności przemieszczenia centrów grupowania ziaren oraz odchylenia standardowego od czasu dla kilku frakcji densymetrycznych.



Rys. 3.6. Przemieszczenie centrów grupowania ziaren dla frakcji densymetrycznych: 1 – 3 gęstości odpowiednio 1,4 – 1,5; 1,6 – 1,7; 1,9 – 2,0 Mg/m³ (Samylin, 1976)



Rys. 3.7. Zależność odchylenia standardowego od czasu: 1 – 3 gęstości odpowiednio 1,4 – 1,5; 1,6 – 1,7; 1,9 – 2,0 Mg/m³ (Samylin, 1976)

Jak wskazują powyższe rysunki centra grupowania ziaren o mniejszej gęstości są położone wyżej niż analogiczne centra dla frakcji o większej gęstości, natomiast odchylenie standardowe frakcji lżejszych jest większe niż frakcji cięższych. Wynika to z faktu, że średnia amplituda ruchów nieuporządkowanych jest większa dla frakcji lżejszych (rys. 3.3).

3.3. Probabilistyczne podejście do kinetyki rozdziału

Inne podejście do zagadnienia kinetyki rozdziału w osadzarce zaprezentowali Siwiec i Tumidajski (1985). Założyli oni, że długość pojedynczego skoku ziarna jest zmienną losową Z . Ze względu na opory ruchu ziarna w łożu osadzarki prawdopodobieństwo zaistnienia mniejszego skoku jest większe niż prawdopodobieństwo skoku większego. Z tego względu rozkład tej zmiennej losowej powinien mieć dodatnią asymetrię. Przyjęli, więc założenie, że rozkładem tym jest rozkład gamma:

$$f(z) = \frac{z^{p-1}}{b^p \Gamma(p)} e^{-\frac{z}{b}} \quad (3.17)$$

gdzie: $b > 0$ i $p > 0$ – parametry rozkładu, Γ - funkcja gamma Eulera.

Położenie ziarna po n skokach jest sumą n niezależnych zmiennych losowych mających te same rozkłady (gamma), czyli:

$$Z = \sum_{i=1}^n Z_i \quad (3.18)$$

Suma niezależnych zmiennych losowych mających rozkłady gamma z parametrami b i $p_1, p_2, \dots, p_n$ jest rozkładem gamma o parametrach b i $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$. W przypadku gdy $p_1 = p_2 = \dots = p_n$ rozkład położenia ziarna po n skokach pulsacyjnych wyraża się wzorem:

$$f(z) = \frac{z^{np-1}}{b^{np} \Gamma(np)} e^{-\frac{z}{b}} \quad (3.19)$$

Wobec tego uzysk ziaren danej frakcji w produkcie dolnym jest następujący:

$$\varepsilon_n(z_r, t) = 1 - \int_0^{z_r} \frac{z^{\omega t p - 1}}{b^{\omega t p} \Gamma(\omega t p)} e^{-\frac{z}{b}} dz \quad (3.20)$$

gdzie: z_r – poziom rozdziału na produkt dolny i górny, ω – częstość ruchu pulsacyjnego.

Średni czas po upływie którego ziarno osiągnie poziom z_r jest równy $\bar{t} = \frac{z_r}{\omega pb}$ (Siwiec,

Tumidajski, 1985).

4. RUCH PULSACYJNY I ROZLUZOWANIE ZIAREN

4.1. Stopień rozluźniania i koncentracja objętościowa ziaren

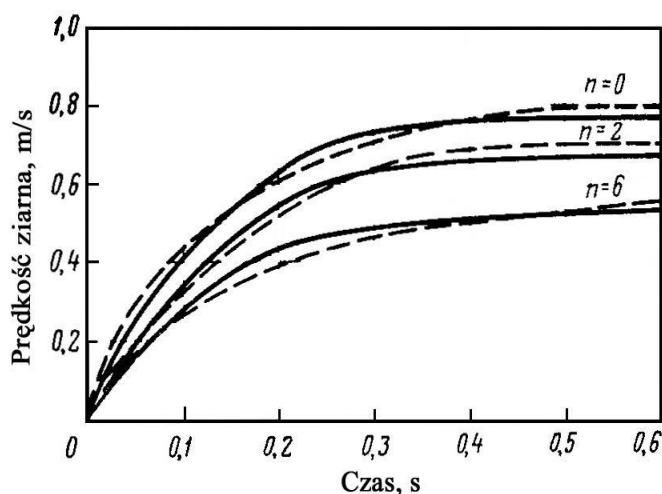
Aby mogło nastąpić rozwarstwienie materiału w osadzarce na frakcje różniące się prędkością opadania, ziarna muszą mieć swobodę ruchu względem siebie. W związku z tym należy tak dobrać warunki ruchu pulsacyjnego, aby zapewnić odpowiednie rozluźnianie warstwy materiału na sicie osadzarki. Mierzy się to stopniem rozluźniania (porowatością warstwy) zdefiniowanym następująco:

$$\theta = \frac{V_1 - V_2}{V_1} \quad (4.1)$$

gdzie: V_1 – objętość warstwy łoża osadzarki, V_2 – objętość ziaren znajdujących się w tej warstwie.

Różnica $1 - \theta = C^*$ jest koncentracją objętościową ziaren w rozpatrywanej warstwie.

Od stopnia rozluźniania jest więc zależna koncentracja objętościowa ziaren w przestrzeni roboczej osadzarki w fazie rozluźniania, a więc wielkość oddziaływań między ziarnami. Ma to wpływ na prędkość ruchu ziaren względem siebie. Na rys. 4.1 przedstawiona jest zmiana prędkości w czasie dla ruchu skrópowanego kulistego ziarna w zależności od liczby otaczających go ziaren. Zależność teoretyczna została uzyskana przy założeniu, że stosunek współczynnika oporu ruchu w warunkach skrópowanych do współczynnika oporu w warunkach swobodnych jest stała. Jak widać z tego rysunku, ze wzrostem liczby otaczających ziaren, a więc zmniejszającego się stopnia rozluźniania, prędkość ruchu ziarna maleje.



Rys.4.1. Prędkość ziarna w zależności od liczby otaczających go ziaren (Samylin, 1976)

Następstwem tego jest wydłużenie czasu rozdziału, bądź przy ustalonym czasie obniżenie dokładności rozdziału. Przy ruchu pulsacyjnym stan, w którym znajduje się układ ziaren jest stanem niestacjonarnym. W tym stanie wysokość warstwy łoża jest mniejsza niż w stanie stacjonarnym przy tej samej prędkości ruchu wznoszącego cieczy równej maksymalnej prędkości ruchu pulsacyjnego. Stan niestacjonarny charakteryzuje się współczynnikiem niestacjonarności zdefiniowanym następująco (Vinogradov 1965, za Samylin 1976):

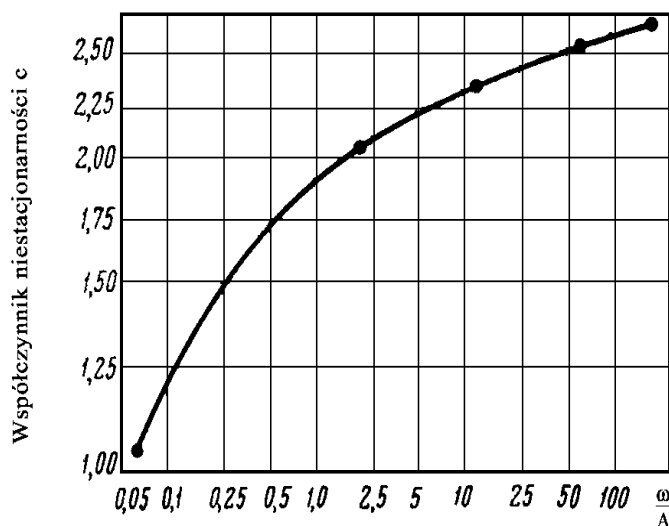
$$c = \frac{h_s}{h_n} > 1 \quad (4.2)$$

gdzie: c – współczynnik niestacjonarności, h_s – wysokość łoża w stanie stacjonarnym, h_n – wysokość łoża w stanie niestacjonarnym.

Współczynnik niestacjonarności jest zależny od reżimu ruchu pulsacyjnego. Na rys. 4.2 podana jest zależność współczynnika niestacjonarności od stosunku częstości kołowej ω do amplitudy ruchu pulsacyjnego A . Dla sinusoidalnego ruchu cieczy stosunek ten jest równy:

$$\frac{\omega}{A} = \frac{a_{\max}}{v_{\max} A} \quad (4.3)$$

gdzie: $v_{\max}$, $a_{\max}$ – odpowiednio maksymalna prędkość oraz przyspieszenie ruchu pulsacyjnego cieczy.



Rys. 4.2. Zależność współczynnika niestacjonarności od stosunku $\frac{\omega}{A}$ (Samylin, 1976)

Jak widać z powyższego rysunku 4.2 współczynnik niestacjonarności jest zależny zarówno od maksymalnej prędkości jak i maksymalnego przyspieszenia.

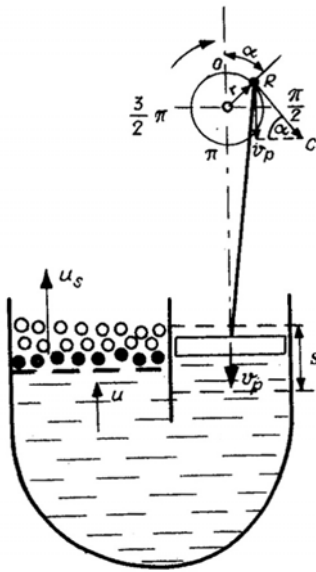
Gęstość pozorna specyficznej cieczy zawiesinowej tworzonej przez ziarna rozdzielanego materiału jest równa:

$$\rho_s = \rho_o + C^* [\bar{\rho}(z,t) - \rho_o] c \quad (4.4)$$

przy czym, C^* jest koncentracją ziaren w stanie rozluźowanym. Gęstość pozorna zawiesiny w stanie niestacjonarnym jest więc większa niż w stanie stacjonarnym przy tej samej koncentracji objętościowej ziaren, gdyż $c > 1$.

4.2. Analiza ruchu ziaren pod wpływem ruchu pulsacyjnego

Stępiński (1964) dla określenia zależności amplitudy i częstości ruchu pulsacyjnego od wielkości ziarna i gęstości rozpatruje ruch harmoniczny tłoka w osadzarce tłokowej, napędzanego mimośrodowo o promieniu r (rys. 4.3):



$$x(t) = r \cos \omega t = r \cos 2\pi f t \quad (4.5)$$

gdzie: x – wychylenie tłoka, f – częstość ruchu pulsacyjnego, $\omega = 2\pi f$.

Prędkość ruchu tłoka v_p jest równa:

$$v_p = -2r\pi f \sin 2\pi f t \quad (4.6)$$

Prędkość wody pod sitem u w przedziale sitowym jest mniejsza niż prędkość tłoka, ponieważ pole przekroju poziomego przedziału sitowego jest większe niż przedziału tłokowego. W związku z tym:

$$u = -\beta_1 v_p = -\beta_1 2r\pi f \sin 2\pi f t \quad (4.7)$$

Rys.4.3. Mechanizm ruchu ziaren w osadzarce (Stępiński, 1964)

gdzie: $\beta_1 < 1$ – współczynnik stały uwzględniający różnicę wielkości komór oraz szczelinę pomiędzy tłokiem i ścianą komory.

Woda przenika pomiędzy ziarnami w warstwie łoża na sicie osadzarki z prędkością u_s znacznie większą niż prędkość u pod sitem gdyż pole przekroju całkowitego kanałków między ziarnami jest znacznie mniejsze niż pole przekroju poziomego komory sitowej:

$$u_s = -\beta_1\beta_2\pi s f \sin 2\pi f t = -A\pi f \sin 2\pi f t \quad (4.8)$$

gdzie: $s = 2r$ jest skokiem tłoka, który jest proporcjonalny do amplitudy ruchu pulsacyjnego, $\beta_2 > 1$ – współczynnik uwzględniający wspomnianą wyżej różnicę pól przekrojów poprzecznych komory podsitowej i kanałów międzyziarnowych, $A = \beta_1\beta_2s$ – amplituda ruchu pulsacyjnego.

Prędkość opadania ziarna w warunkach jakie panują w osadzarce wyraża się wzorem (7.49):

$$v = 5,33 \sqrt{d_p \frac{\rho - \rho_o}{\rho_o} \frac{k_1}{k_2}} \quad (4.9)$$

gdzie: d_p – średnica projekcyjna ziarna, ρ – gęstość ziarna, ρ_o – gęstość cieczy, k_1 – objętościowy współczynnik kształtu ziarna, k_2 – dynamiczny lub newtonowski współczynnik kształtu ziarna.

Wypadkowa prędkość ruchu ziarna w poddanego działaniu ruchu wznoszącego cieczy o prędkości u_s jest równa:

$$w = u_s + v = -\beta_1\beta_2\pi s f \sin 2\pi f t + 5,33 \sqrt{d_p \frac{\rho - \rho_o}{\rho_o} \frac{k_1}{k_2}} \quad (4.10)$$

Optymalną wielkość skoku tłoka (amplitudy) dla ziarna o gęstości ρ i średnicy d_p oraz częstotliwości ruchu pulsacyjnego f określa się z założenia, że ziarna powinny być doprowadzone do stanu zawieszenia. Nastąpi to wtedy, gdy $w > 0$ tzn. gdy $u_{smax} > v$, czyli:

$$\beta_1\beta_2\pi f s \geq 5,33 \sqrt{d_p \frac{\rho - \rho_o}{\rho_o} \frac{k_1}{k_2}} \quad (4.11)$$

Ze wzoru (4.11):

$$s \geq \frac{5,33 \sqrt{d_p \frac{\rho - \rho_o}{\rho_o} \frac{k_1}{k_2}}}{\beta_1\beta_2\pi f} \quad (4.12)$$

Ze wzoru (4.12) wynika, że skok tłoka (a zarazem amplituda ruchu pulsacyjnego) powinien być tym większy im większe są wielkość i gęstość ziarna i im mniejsza jest częstotliwość ruchu pulsacyjnego. Wzór na minimalną częstotliwość ruchu pulsacyjnego uzyskuje się

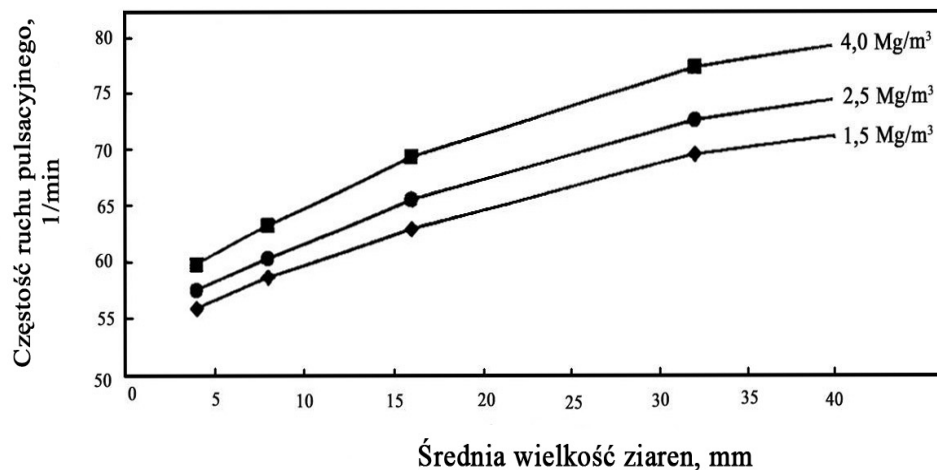
analogicznie. Ze wzoru (4.11) wprowadzając oznaczenie: $Z = \frac{s}{d_p}$ otrzymuje się:

$$f \geq \frac{5,33}{\beta_1 \beta_2 \pi Z} \sqrt{\frac{\rho - \rho_o}{\rho_o} \frac{k_1}{k_2} \frac{1}{d_p}} \quad (4.13)$$

Zatem częstość ruchu pulsacyjnego powinna być tym większa im większa jest gęstość ziarna i im mniejsza jest wielkość ziarna. Wprowadzając do wzoru 4.13 wyrażenie na Z uzyskuje się:

$$f \geq \frac{5,33}{\beta_1 \beta_2 \pi s} \sqrt{d_p \frac{\rho - \rho_o}{\rho_o} \frac{k_1}{k_2}} \quad (4.14)$$

Ze wzoru 4.14 wynika, że iloczyn częstości i skoku (amplitudy) ruchu pulsacyjnego jest stały przy ustalonych właściwościach fizycznych i geometrycznych ziaren. Ponadto, przy ustalonym skoku tłoka częstość ruchu pulsacyjnego rośnie ze wzrostem wielkości ziarna.

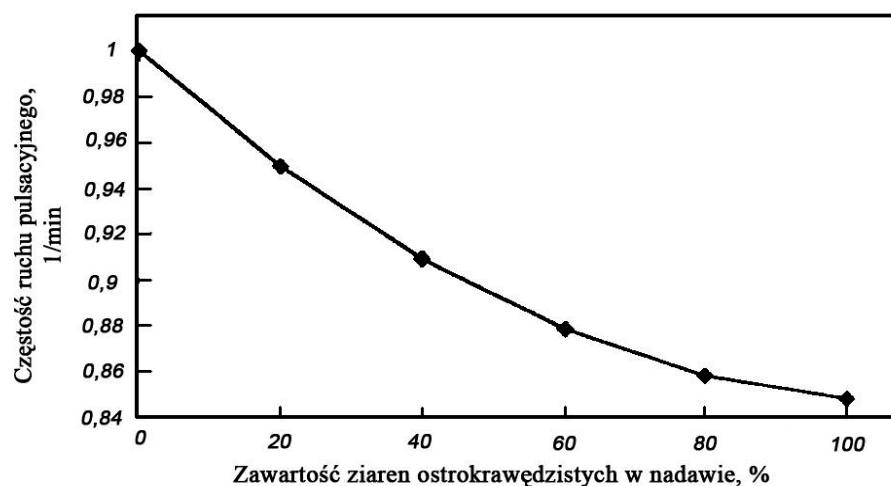


Rys. 4.4. Zależność częstości ruchu pulsacyjnego od wielkości i gęstości ziaren (Marx i inni, 1999)

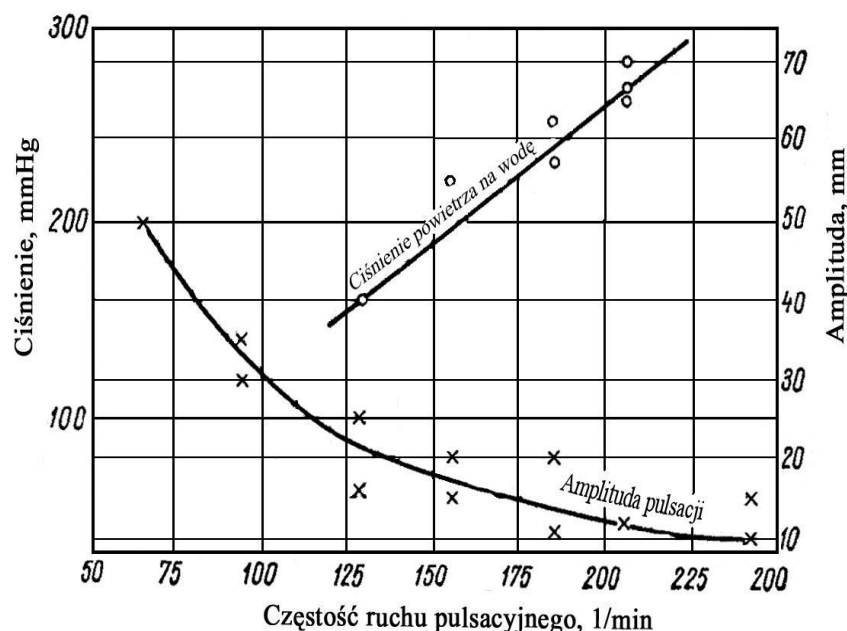
Na rys. 4.4 podana jest zależność optymalnej częstości ruchu pulsacyjnego od wielkości i gęstości ziarna dla ziaren gładkich (Marx i inni, 1999). Zależność ta została uzyskana dla ziaren ciężkich przy założeniu, że czas opadania warstwy nadawy jest równy czasowi ruchu schodzącego cieczy. Jakościowo jest ona zgodna z zależnością (4.14). Jeżeli ziarna są nieregularne i ostrokrawędziste wówczas czas opadania ziaren wydłuża się. Na rys. 4.5 podana jest zależność optymalnej częstości ruchu pulsacyjnego od procentowej zawartości ziaren ostrokrawędzistych w nadawie. Ta zależność jest

również jakościowo zgodna ze wzorem (4.14), w którym f jest zależne od współczynnika kształtu ziarna k_2 .

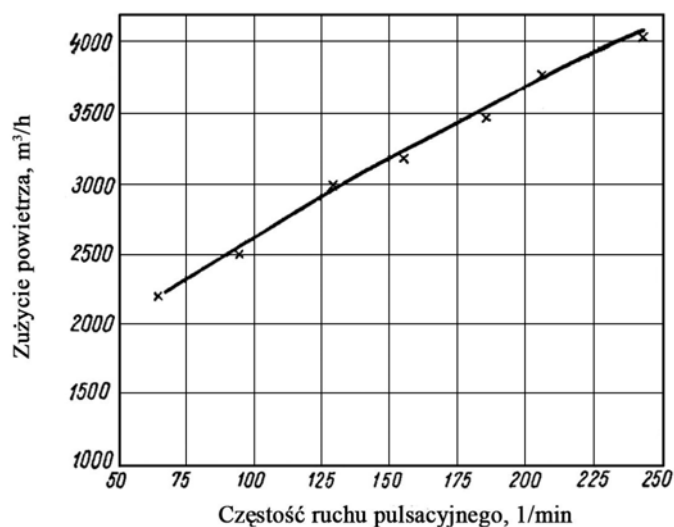
W większości stosowanych osadzarek ruch pulsacyjny generowany jest przez sprężone powietrze. Na rys. 4.6 podana jest zależność amplitudy ruchu pulsacyjnego i ciśnienia powietrza na wodę od częstości pulsacji, natomiast na rys. 4.7 zużycie powietrza od częstości ruchu pulsacyjnego (Povarov i inni, 1966).



Rys. 4.5. Zależność częstości ruchu pulsacyjnego od zawartości ziaren ostrokrawędzistych w nadawie (Marx i inni, 1999)



Rys. 4.6. Wpływ częstości ruchu pulsacyjnego na amplitudę pulsacji i ciśnienia powietrza na wodę (Povarov, 1966)



Rys. 4.7. Zależność zużycia powietrza od częstości ruchu pulsacyjnego (Povarov, 1966)

W osadzarkach zazwyczaj doprowadza się pod tłok dodatkową wodę podsitową dla wzmocnienia wschodzącego strumienia wody. Wówczas prędkość strumienia wody podsitowej i prędkość ruchu pulsacyjnego sumuje się. Otrzymuje się lepsze rozluźnienie warstwy łoża szybszą stratyfikację, a co za tym idzie krótszy czas trwania rozdziału. Jednakże sama woda podsitowa bez ruchu pulsacyjnego może efektywnie rozluźwiać tylko drobne ziarna, gdyż jej prędkość w większości przypadków nie przekracza 0,007 [m/s].

4.3. Wybrane poglądy na rozluźowanie ziaren

Problematyką rozluźowania łoża osadzarki pod wpływem ruchów pulsacyjnych oraz modelowaniem tego zagadnienia zajmowało się wielu autorów (Thomson i inni, 1985, Innuchi i Kavashima, 1979, Nesbitt i inni, 2005, Tanaka i inni, 1990, Breuer i Jungmann, 1986, Kizevalter, 1957, 1963, Witteveen i inni, 1991, 1993, Williams i inni, 1997, Araki i inni, 1994, De Jong i Dalmijn, 1997, Sun Ch. i Sun Y., 1992, 1993, Ji, 1994, Jonkers i inni, 1998, Mishra i Mehrotra, 1998, Mishra i Adhikari, 1999, Mishra, 2001).

Według Mayera główną rolę w cyklu pulsacji odgrywa ruch wstępujący, gdyż w tym okresie cyklu następuje rozluźnienie łoża niezbędne dla procesu rozwarstwienia. Rozluźnienie to nie może być jednak zbyt duże, gdyż w przeciwnym wypadku ziarna utraciłyby kontakt między sobą. W takiej sytuacji cięższe ziarna nie mogłyby wycisnąć lżejszych ziaren z dolnych warstw łoża (Mayer 1964, Nawrocki 1972).

W początkowej fazie ruchu wznoszącego łoża jako całość na skutek siły bezwładności unosi się do góry po czym z dolnej warstwy zaczynają odpadać pojedyncze ziarna, przez co rozluźowanie tej warstwy rośnie. Efekt odrywania się ziaren od całości łoża przesuwają się do coraz wyższych warstw, co jest równoznaczne z tym, że proces rozluźowania rozprzestrzenia się od dolnych warstw łoża w górę (Kirchberg i Hentzschel, 1958, Witteveen i inni, 1991, 1993).

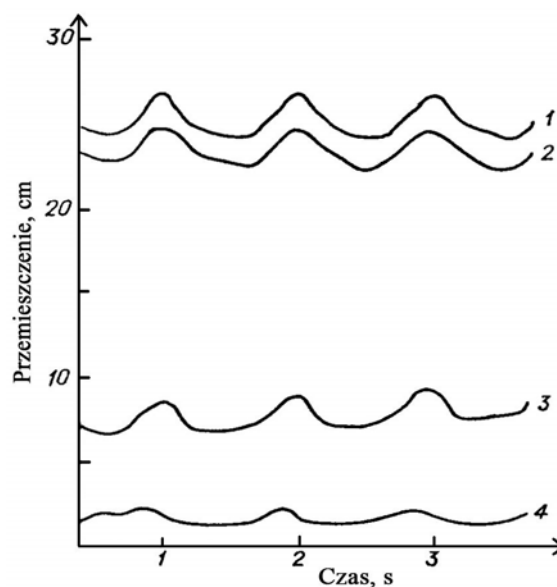
Richardson i Zaki (1954) uzależnili stopień rozluźowania jednorodnej pod względem własności geometrycznych warstwy ziaren od stosunku prędkości opadania w warunkach skrzepowanych v_s do prędkości opadania w warunkach swobodnych v_x , który jest zależny od wartości liczby Reynoldsa i dla $Re > 500$ jest równy:

$$\theta = \left(\frac{v_s}{v_x} \right)^{0,42} \quad (4.15)$$

Goroszko ze współpracownikami (1958) przedstawili wyrażenie, w którym stopień rozluźowania jest zależny zarówno od własności ziaren jak i cieczy poprzez liczbę Reynoldsa i liczbę Archimedesesa Ar :

$$\theta = \left(\frac{18 Re + 0,36 Re^2}{Ar} \right)^{0,21} \quad (4.16)$$

gdzie: $Ar = \frac{gd^3 \rho_o (\rho - \rho_o)}{\eta^2}$



Rys.4.8. Oscylacja ziaren: koncentratu, produktu pośredniego i odpadów (Szpetl i inni, 1968)

W praktyce przemysłowej wzbogacaniu w osadzarce poddaje się materiał niejednorodny pod względem własności geometrycznych ziaren. Z tego względu argumentem rozdziału jest prędkość opadania. Efektem tego jest niejednorodność rozluźniania ziaren wzdłuż wysokości łóża (Fomienko i Sorokin, 1960). Na rys. 4.8 podane są oscylacje ziaren koncentratu (krzywa 2), produktu pośredniego (krzywa 3) i odpadów (krzywa 4) wokół położenia równowagi przy ruchu pulsacyjnym wody (krzywa 1) o amplitudzie 27 mm (Szpetl i inni, 1968). Amplituda ruchu ziaren odpadów była równa 8 mm, produktu pośredniego 18 mm, a koncentratu 24 mm. Przy rozluźnianiu warstwy łóża odstęp między ziarnami odpadów wzrosły o 6 %, ziarnami produktu pośredniego o 12 %, a ziarnami koncentratu o 11 %. Wynika stąd, że rozluźnianie ziaren nie jest jednakowe we wszystkich warstwach.

4.4. Zależność stopnia rozluźniania od rodzaju cyklu ruchu pulsacyjnego

Ze względu na to, że rozluźnianie ziaren jest wynikiem ruchu pulsacyjnego, stopień rozluźniania jest zależny od czasu oraz położenia warstwy i zmienia się w określonym przedziale wartości. Maksymalna wartość stopnia rozluźniania wynika z tego, że ziarna w górnej warstwie łóża nie mogą wznieść się wyżej niż amplituda ruchu pulsacyjnego.

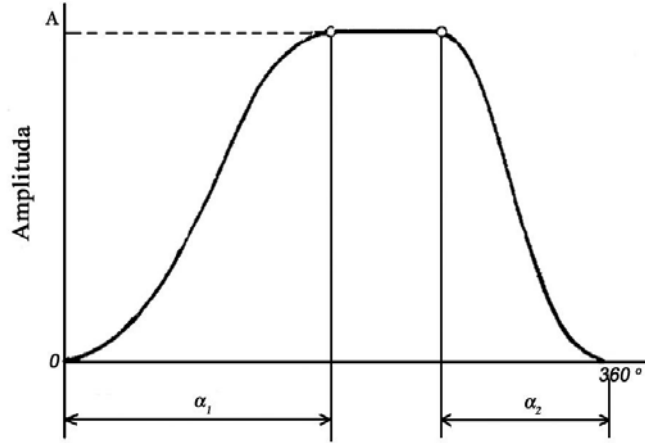
Z definicji stopnia rozluźniania wyrażonej wzorem (4.1):

$$\begin{aligned}\theta_{\max} &= \frac{V_1 - V_2}{V_1} = \frac{(h_o + A)S - h_o S C_o}{(h_o + A)S} = \frac{h_o + A - h_o C_o}{h_o + A} = \\ &= \frac{h_o(1 - C_o) + A}{h_o + A} = \frac{\theta_o h_o + A}{h_o + A} = \frac{\theta_o h_o + \theta_o A - \theta_o + A}{h_o + A} = \\ &= \frac{\theta_o(h_o + A) + A(1 - \theta_o)}{h_o + A} = \theta_o + \frac{A(1 - \theta_o)}{h_o + A} = \theta_o + \frac{1 - \theta_o}{1 + \frac{h_o}{A}} = \theta_{\max}\end{aligned}\quad (4.17)$$

gdzie: h_o – wysokość łóża w stanie nierozluźnianym, S – pole przekroju poprzecznego łóża, C_o – koncentracja objętościowa ziaren w stanie nierozluźnianym.

Rodzaj cyklu charakteryzuje się zależnością przemieszczenia wody od fazy w ciągu jednego okresu ruchu pulsacyjnego. Dla wyliczenia zależności stopnia rozluźniania od rodzaju cyklu założono, że ruch wschodzący i schodzący cieczy w przestrzeni międzyziarnowej ma charakter sinusoidalny, przy czym okresy tych ruchów są w ogólnym

przypadku różne (Kizevalter, 1957, 1963). Na rys. 4.9 podano zależność przemieszczenia wody w przestrzeni międzyziarnowej od fazy ruchu w ciągu jednego cyklu. Różnica faz α_1 jest okresem ruchu wznoszącego (wschodzącego), różnica faz α_2 okresem ruchu opadającego (schodzącego), natomiast $(2\pi - \alpha_1 - \alpha_2)$ jest okresem przerwy.



Rys. 4.9. Przesunięcie wody w ciągu jednego cyklu (Kizevalter, 1963)

Na podstawie równania (4.8) droga przebyta przez wodę w czasie trwania ruchu wznoszącego, czyli dla $0 \leq \omega t \leq \alpha_1$ jest równa:

$$z = \int_0^t u_s^2 dt = \frac{1}{2} A \left(1 - \cos \frac{\pi}{\alpha_1} \omega t \right) \quad (4.18)$$

Droga przebyta w czasie ruchu schodzącego, czyli dla $2\pi - \alpha_2 \leq \omega t \leq 2\pi$ wyraża się analogicznym wzorem:

$$z = \frac{1}{2} A \left\{ 1 - \cos \frac{\pi}{2} [\omega t + 2(\alpha_2 - \pi)] \right\} \quad (4.19)$$

Kąty α_1 i α_2 mogą mieć dowolne wartości, przy czym $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$. Od wzajemnych relacji pomiędzy kątami α_1 i α_2 zależy rodzaj cyklu. Gdy $\alpha_1 \neq \alpha_2$ uzyskuje się cykl asymetryczny, natomiast dla $\alpha_1 = \alpha_2$ cykl symetryczny. Jeżeli $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$ to cykl nie ma przerwy. Jeżeli przy tym $\alpha_1 = \alpha_2$ to cykl ma charakter cyklu sinusoidalnego bez przerwy.

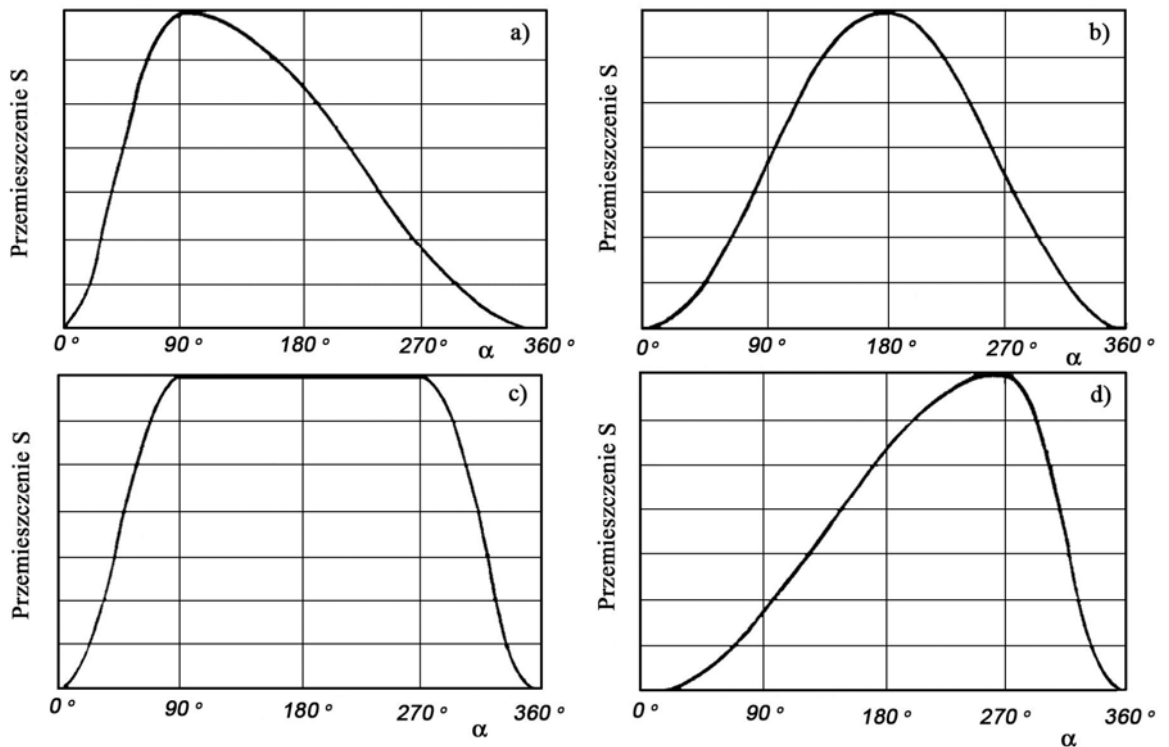
Na rys. 4.10 podane są charakterystyki czterech cykli. Cykl charakteryzuje się względ-
nym czasem działania w stosunku do pełnego okresu strumienia wznoszącego – prze-
rwy – strumienia opadającego. Na rys. 4.10a jest to cykl Berda o charakterystyce

25–00–75 $\left(\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \alpha_2 = 1,5\pi\right)$, na rys. **4.10b** cykl sinusoidalny o charakterystyce 50–00–50 ($\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$), na rys. **4.10c** cykl Mayera (trapezoidalny) o charakterystyce 25–50–25 $\left(\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}\right)$ i na rys. **4.10d** cykl Thomasa o charakterystyce 75–00–25 ($\alpha_1 = 1,5\pi, \alpha_2 = 0,5\pi$).

Stopień rozluźnienia dla dowolnego cyklu ruchu pulsacyjnego wyraża się wzorem analogicznym do wzoru (4.17):

$$\theta = \theta_o + \frac{1 - \theta_o}{1 + \frac{h_o}{S_g - S_d}} \quad (4.20)$$

przy czym, w miejscu amplitudy ruchu pulsacyjnego jest różnica pomiędzy drogą przebytą w czasie t przez górną warstwę łoża S_g i drogą przebytą przez dolną warstwę łoża S_d . Do wyliczenia drogi S_g zakłada się, że warstwa górna porusza się z prędkością równą różnicy prędkości w chwili t i w chwili t_o , w której zaczyna się ruch ziaren górnej warstwy.



Rys. **4.10**. Poglądowe charakterystyki cykli pulsacji $\alpha = \omega t$ – kąt fazy okresu (Kizevalter, 1963)

Z uwzględnieniem prędkości wody podsitowej u_p prędkość ruchu cieczy, zgodnie ze wzorem (4.18) jest równa:

$$v = \frac{\pi \omega A}{2\alpha_1} \sin \frac{\pi}{\alpha_1} \omega t + u_p \quad (4.21)$$

Natomiast różnica prędkości w chwili t i t_o wyraża się wzorem:

$$\Delta v = \frac{\pi \omega A}{2\alpha_1} \left(\sin \frac{\pi}{\alpha_1} \omega t - \sin \frac{\pi}{\alpha_1} \omega t_o \right) \quad (4.22)$$

Wobec tego:

$$S_g = \frac{A}{z} \left[\cos \varphi_o - \cos \varphi - \frac{\pi \omega}{\alpha_1} (t - t_o) \sin \varphi_o \right] \quad (4.23)$$

gdzie: $\varphi_o = \frac{\pi \omega t_o}{\alpha_1}$

$$\varphi = \frac{\pi \omega t}{\alpha_1} \quad \text{dla} \quad 0 \leq \omega t \leq \alpha_1$$

$$\varphi = \pi \quad \text{dla} \quad \alpha_1 \leq \omega t \leq 2\pi - \alpha_2$$

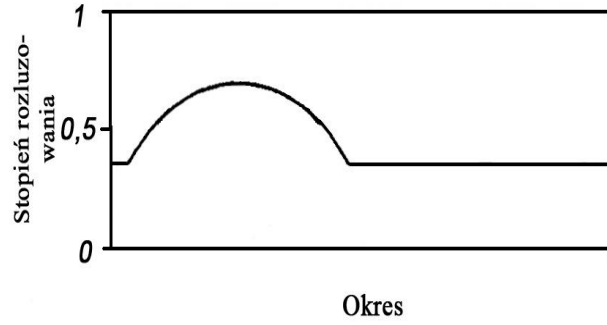
$$\varphi = \frac{\pi}{\alpha_2} [\omega t + 2(\alpha_2 - \pi)] \quad \text{dla} \quad (2\pi - \alpha_2) \leq \omega t \leq 2\pi$$

Dla wyliczenia drogi S_d zakłada się, że dolna warstwa porusza się względem cieczy z prędkością λv (v – graniczna prędkość opadania ziarna, $\lambda \leq 1$ - współczynnik). Przy tym założeniu:

$$S_d = \frac{A}{2} \left[\cos \varphi_1 - \cos \varphi - \frac{\pi \omega}{\alpha_1} (t - t_1) \sin \varphi_1 \right] \quad (4.24)$$

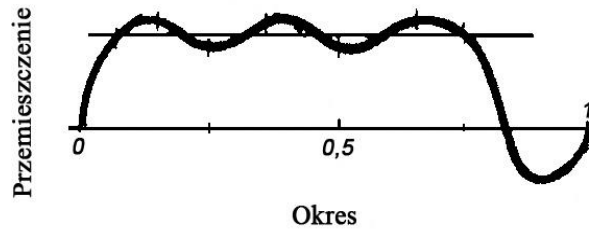
gdzie: $\varphi_1 = \frac{2\pi \omega t_1}{\alpha_1}$, t_1 – chwila, w której dolna warstwa zaczyna się poruszać do góry.

Stopień rozluźniania jest zależny od amplitudy, częstości i rodzaju cyklu poprzez fazy α_1 i α_2 . Na rys. 4.11 podana jest zmiana stopnia rozluźniania dolnej warstwy łoża w ciągu jednego okresu dla cyklu sinusoidalnego (Witteveen i inni, 1993).



Rys. 4.11. Zmiana stopnia rozluźniania materiału w ciągu jednego cyklu (Witteveen i inni, 1993)

W miejsce normalnego sinusoidalnego cyklu stosuje się coraz częściej cykl o podwójnej częstotliwości, którego schemat przedstawiony jest na rys. 4.12. W trakcie trwania strumienia wznoszącego wykonywane są ruchy pulsacyjne o większej częstotliwości i mniejszej amplitudzie (Breuer i Jungmann, 1986).



Rys. 4.12. Cykl o podwójnej częstotliwości (Breuer i Jungmann, 1986)

Dzięki temu czas trwania stanu rozluźniania jest około czterokrotnie większy, poprawia się efekt stratyfikacji, co umożliwia obniżenie dolnej granicy wielkości ziaren, które można efektywnie rozdzielać.

Wartość średnia współczynnika rozluźniania w czasie jednego cyklu jest równa:

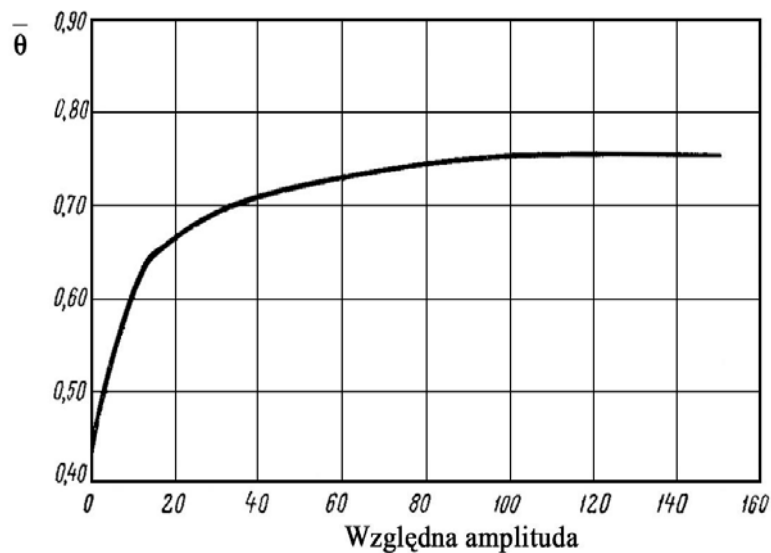
$$\bar{\theta} = \frac{1}{T} \int_0^T \theta(t) dt = \theta_o - \frac{1 - \theta_o}{T} \int_{t_o}^{t_2} \frac{dt}{1 - \frac{h_o}{S_g - S_d}} \quad (4.25)$$

gdzie: T – okres, t_2 – chwila, w której górna warstwa zajmie położenie początkowe.

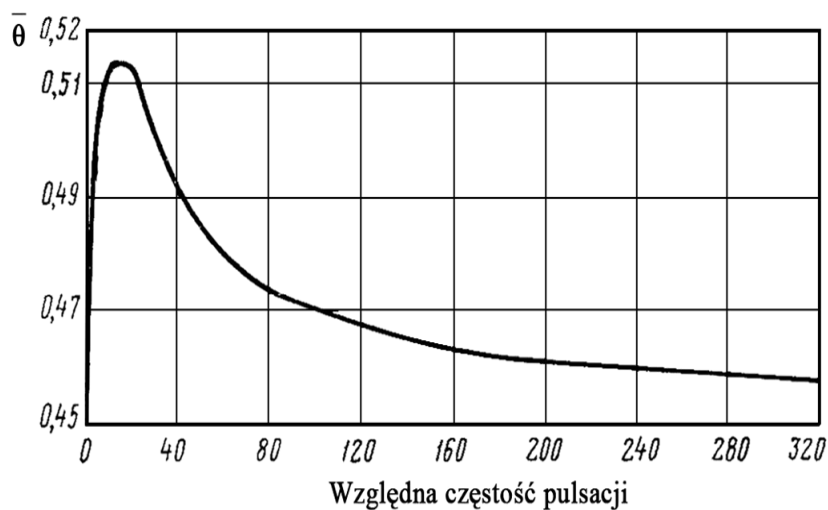
Dla wyliczenia wartości średniej współczynnika rozluźniania można posłużyć się uproszczoną formułą, korzystając ze wzoru (4.20):

$$\bar{\theta} = \frac{\theta + \theta_o}{2} = \theta_o + \frac{1 - \theta_o}{2 \left(1 + \frac{h_o}{S_g - S_d} \right)} \quad (4.26)$$

Z przytoczonych wzorów wynika, że średnie rozluzowanie rośnie ze wzrostem amplitudy ruchu pulsacyjnego. Dla wpływu częstości ruchu pulsacyjnego istnieje optymalna wartość częstości, przy której stopień rozluzowania uzyskuje wartość maksymalną.



Rys. 4.13. Poglądowa zależność średniej wartości współczynnika rozluzowania od względnej amplitudy (Samylin, 1976)



Rys. 4.14. Poglądowa zależność średniej wartości współczynnika rozluzowania od względnej częstości pulsacji (Samylin, 1976)

Na rysunkach 4.13 i 4.14 podane są poglądowe zależności wartości średniej współczynnika rozluzowania od względnej amplitudy i względnej częstości ruchu pulsacyjnego. Przy zbyt dużym wzroście częstości stopień rozluzowania maleje.

5. ARGUMENT ROZDZIAŁU PRZY WZBOGACANIU W OSADZARCE

Jak zostało powiedziane w rozdziale 4 na stopień rozluźniania ziaren w łozu osadzarki ma wpływ między innymi prędkość opadania swobodnego ziarna. Odcinek drogi, jaki przebędzie ziarno w czasie trwania jednego cyklu jest zależny od prędkości opadania swobodnego. Z tego względu po pewnym czasie trwania ruchu pulsacyjnego nastąpi rozsegregowanie ziaren wzdłuż osi pionowej według prędkości opadania. Można, więc powiedzieć, że prędkość opadania swobodnego ziaren stanowi argument rozdziału nadawy niejednorodnej pod względem właściwości fizycznych i geometrycznych w procesie rozdziału w osadzarce.

Problemowi i metodyce obliczania prędkości opadania swobodnego ziaren poświęconych zostało wiele prac (Finkey 1924, Laszczenko 1940, Olevskij 1953, Heiss i Coull 1952, Akkerman 1966, Chrisiansen i Barker 1965, Bedran i inni 1976, Concha i Almendra 1979, Heider i Levenspiel 1989, Briens 1991, Saha i inni 1992, Madhav i Chhabra 1994, 1995, Nguyen i inni 1994, 1997, Tsakalakis i Stamboltzis 2001, Merinov 2001, Sztaba, 2004). W większości przytoczonych prac są to generalnie rzecz biorąc metody aproksymacyjno-obliczeniowe, w których dla wyliczenia prędkości opadania wykorzystuje się empiryczne lub półempiryczne związki liczby Laszczenki $L_y = Re^2 \psi$ z liczbą Reynoldsa i liczbą Archimedesesa lub związki współczynnika oporu ψ z liczbą Laszczenki i liczbą Reynoldsa. Zastosowanie tych metod do wyliczania prędkości opadania swobodnego dla całego zakresu liczb Reynoldsa w funkcji własności geometrycznych i fizycznych ziarna, a następnie określenia rozkładu tej prędkości w próbce jest utrudnione ze względu na to, że prędkość opadania jest wyrażona przez liczbę Reynoldsa, której wartość jest zależna od prędkości ruchu ziarna. Ponadto, większość prac dotyczy ziaren sferycznych. Tymczasem współczynnik oporu ruchu ziarna ψ_z jest zależny zarówno od liczby Reynoldsa Re jak i kształtu ziarna: $\psi_z = f(Re, \text{kształt ziarna})$, co między innymi skutkuje zależnością prędkości opadania od kształtu ziarna. Akkerman (1996) przedstawił półempiryczny wzór na zależność prędkości opadania ziarna sferycznego od jego wielkości, którą później zastosował do aproksymacji analogicznej zależności prędkości opadania dla ziaren nieregularnych. W swoim wywodzie posłużył się następującymi formułami:

$$\frac{\pi d^3}{6}(\rho - \rho_0)g = \psi_k v^2 d^2 \rho_0 \quad (5.1)$$

$$\psi_k = \frac{88,74}{\text{Re}^2 \psi_k} + \frac{13,30}{\sqrt{\text{Re}^2 \psi_k}} + 0,157 \quad (5.2)$$

$$\text{Re}^2 \psi_k = \frac{\pi d^3}{6} g (\rho - \rho_0) \frac{\rho_0}{\eta^2} \quad (5.3)$$

gdzie: $\text{Re} = \frac{v d \rho_0}{\eta}$ - liczba Reynoldsa, ρ - gęstość ziarna, ρ_0 - gęstość cieczy, d - śred-

nica ziarna, v - graniczna prędkość opadania swobodnego, η - współczynnik lepkości dynamicznej cieczy, g - przyspieszenie ziemskie, ψ_k - współczynnik oporu dla kuli.

Po podstawieniu wyrażeń (5.2) i (5.3) do wzoru (5.1) i przekształceniu uzyskuje się na zależność prędkości opadania od wielkości ziarna następujący wzór:

$$v = \frac{A d^2}{\sqrt{B + C \sqrt{d^3} + d^3}} \quad (5.4)$$

gdzie:

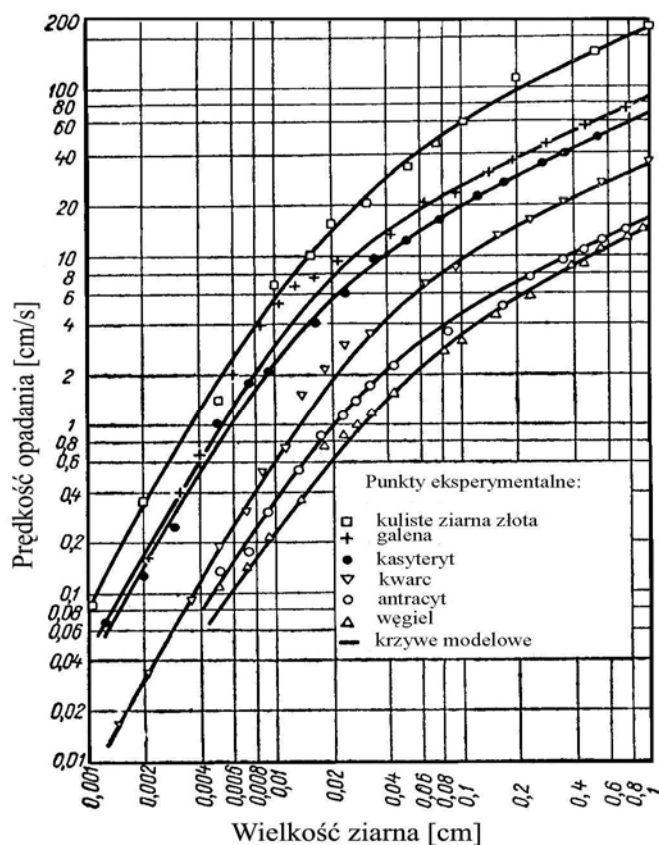
$$A = \sqrt{\frac{\pi}{6 \cdot 0,157} \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} g} \quad (5.5)$$

$$B = \frac{88,74 \eta^2}{\frac{0,157 \pi}{6} (\rho - \rho_0) g \rho_0} \quad (5.6)$$

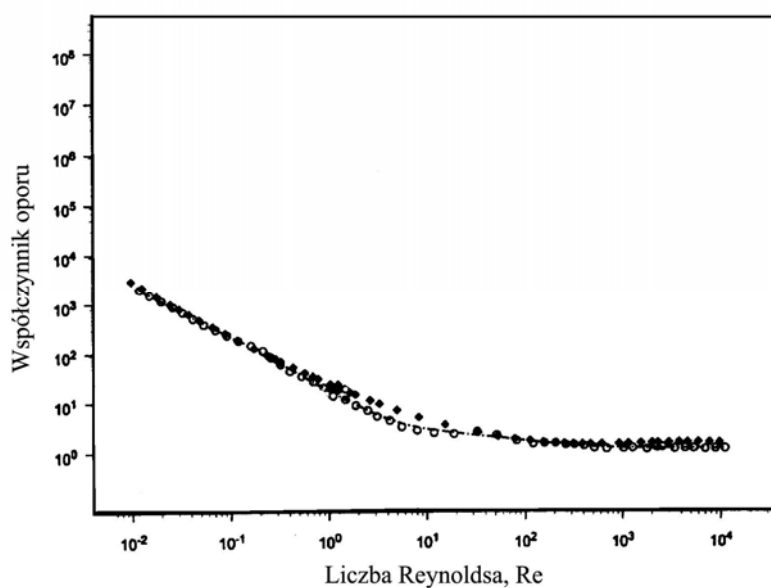
$$C = \frac{13,30 \eta}{0,157 \sqrt{\frac{\pi}{6} (\rho - \rho_0) g \rho_0}} \quad (5.7)$$

Współczynniki A , B i C wyrażone wzorami (5.5) – (5.7) są wyliczone dla ziaren kulistych. Akkerman zastosował wzór (5.4) do określenia zależności prędkości opadania ziaren nieregularnych od średnicy sitowej ziarna przy czym współczynniki A , B i C wyliczane są na podstawie danych empirycznych. Na rys. **5.1** przedstawione są zależności prędkości opadania od średnicy sitowej ziarna dla kilku minerałów o ziarnach nieregularnych oraz kulisto kształtnych ziaren złota, z których wynika, że przedstawiony model (5.4) dość dobrze opisuje zależności empiryczne. W modelu wartości współczynników A , B i C są zależne od kształtu ziaren. Nie ma w nich jednakże jawnej zależności od współczynników kształtu ziarna.

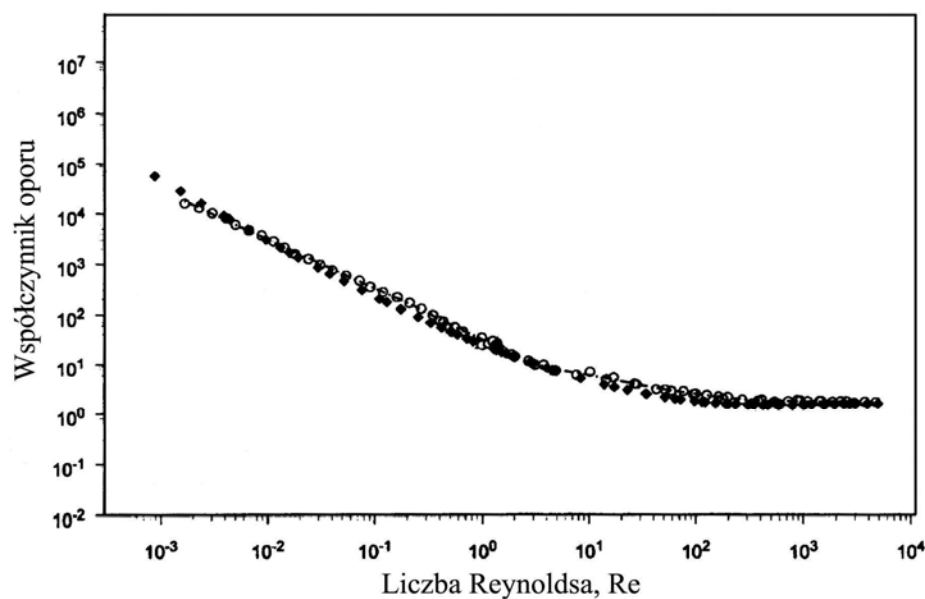
Jak pokazuje doświadczenie dla liczb Reynoldsa, z którymi mamy do czynienia w przypadku ruchu ziaren w osadzarce, wartości współczynnika oporu są stałe i niezależne od liczby Reynoldsa (Tsakalakis i Stamboltzis, 2001).



Rys. 5.1. Zależność prędkości opadania od średnicy sitowej ziaren mineralnych (Akkerman, 1966)



Rys. 5.2. Zależność współczynnika oporu od liczby Reynoldsa dla ziaren galeny (Tsakalakis i Stamboltzis, 2001)



Rys. 5.3. Zależność współczynnika oporu od liczby Reynoldsa dla ziaren kwarcu
(Tsakalakis i Stamboltzis, 2001)

Na rys. 5.2 i 5.3 podane są zależności współczynnika oporu od liczby Reynoldsa odpowiednio dla ziaren galeny i kwarcu. Jak wynika z tych rysunków dla liczb Reynoldsa większych od około $5 \cdot 10^2$ wartość współczynnika oporu jest stała. W tej sytuacji najwłaściwszą metodą określenia prędkości opadania swobodnego jest metoda wynikająca z rozwiązania równania ruchu ziarna, w którym można w sposób jawny uwzględnić wpływ kształtu ziarna na prędkość opadania.

5.1. Równanie ruchu ziarna opadającego w cieczy pod wpływem siły ciężkości i graniczna prędkość opadania

Na ziarna nieregularne poruszające się w wodzie pod wpływem siły ciężkości w zakresie liczb Reynoldsa $Re > 5 \cdot 10^2$ działają następujące siły:

1) Siła ciężkości: $Q = \rho Vg$ (5.8)

2) siła wyporu: $F_w = \rho_o Vg$ (5.9)

3) siła oporu dynamicznego ośrodka określona wzorem Newtona:

$$P = -\psi_z \frac{1}{2} \rho_0 v_t^2 S \quad (5.10)$$

gdzie: V – objętość ziarna, v_t – prędkość chwilowa ruchu ziarna, ψ_z – współczynnik oporu dla ziarna, S – powierzchnia rzutowa ziarna na płaszczyznę prostopadłą do kierunku ruchu, (pozostałe oznaczenia jak wyżej). Wyrażenie $\frac{1}{2}\rho_0 v^2$ - przedstawia ciśnienie hydrodynamiczne cieczy.

W związku z tym równanie ruchu ziarna w kierunku pionowym będzie następujące:

$$\rho V \frac{dv}{dt} = (\rho - \rho_0) V g - \psi_z \frac{1}{2} \rho_0 v_t^2 S \quad (5.11)$$

Równanie (5.11) po przekształceniu przyjmuje postać:

$$\frac{dv}{dt} = a - b v_t^2 \quad (5.12)$$

gdzie: $a = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} g$, $b = \frac{\psi_z \rho_0 S}{2 \rho V}$.

Równanie (5.12) jest znane jako równanie Riccatiego (Leja, 1971). Równanie to można rozwiązać przez kwadratury i jego rozwiązanie jest następujące (Ponomarev, 1973):

$$v_t = \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tgh}(\sqrt{ab} t) = \sqrt{\frac{2(\rho - \rho_0) V g}{\psi_z \rho_0 S}} \operatorname{tgh}\left(\sqrt{\frac{\psi_z \rho_0 (\rho - \rho_0) g S}{2 \rho^2 V}} t\right) \quad (5.13)$$

Następująca granica:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_t = \sqrt{\frac{2(\rho - \rho_0) V g}{\psi_z \rho_0 S}} = v \quad (5.14)$$

przedstawia ogólny wzór na graniczną prędkość opadania swobodnego ziarna. Jego szczegółowa postać w odniesieniu do ziaren nieregularnych musi uwzględniać kształt ziarna, charakteryzowany współczynnikami kształtu oraz wartość współczynnika oporu. O tym będzie mowa w następnym podrozdziale.

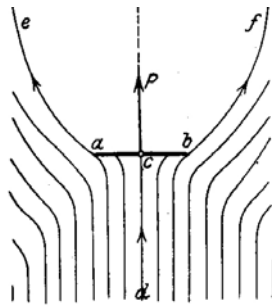
5.2. Współczynnik oporu dla kuli

5.2.1. Współczynnik oporu według metodyki Rittingera i Finkeya

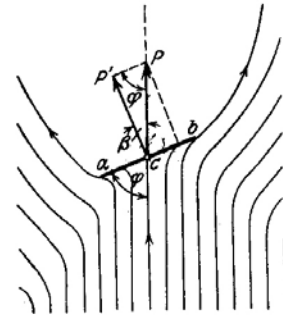
Dla wyliczenia współczynnika oporu Rittinger, a później Finkey (Finkey, 1924) wyliczył siłę działającą na nieruchomą kulę ze strony jednorodnego strumienia cieczy poruszającego się z prędkością v . Siłę tę Finkey policzył etapami. W pierwszym etapie wyliczył siłę działającą na płaski krążek usytuowany w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku strumienia cieczy (rys. 5.4). Wartość tej siły jest równa:

$$P = S \frac{1}{2} \rho_0 v^2 = \alpha S v^2 \quad (5.15)$$

gdzie: $\alpha = \frac{1}{2} \rho_0$, S – powierzchnia płaszczyzny krążka.



Rys. 5.4. Siła działająca na płaski krążek prostopadły do strumienia cieczy (Finkey, 1924)



Rys. 5.5. Siła działająca na płaski krążek nachylony pod kątem φ (Finkey, 1924)

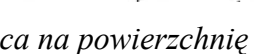
Z kolei wartość składowej siły prostopadłej do powierzchni krążka, którego płaszczyzna tworzy z kierunkiem strumienia kąt φ (rys.5.5) jest równa:

$$P' = \alpha S v^2 \sin \varphi \quad (5.16)$$

W następnym etapie liczy się wartość siły działającej na powierzchnię boczną stożka o kącie rozwartości 2φ , którego oś jest równoległa do kierunku strumienia cieczy n (rys.5.6). Zgodnie ze wzorem (5.16) wartość składowej prostopadłej siły, działającej na elementarny fragment powierzchni bocznej w kształcie trójkąta a_1a_2O (rys.5.6) jest równa:

$$dP' = \alpha v^2 \sin \varphi dS_1 = \alpha v^2 \sin \varphi \frac{hr}{2} d\beta \quad (5.17)$$

Składowa równoległa do kierunku strumienia cieczy jest równa (rys. 5.6):



podstawy $\rho + d\rho$. Odległość pomiędzy płaszczyznami podstawy obu stożków jest wielkością nieskończenie małą. Można, więc z dobrym przybliżeniem założyć, że siła działająca na wycinek powierzchni kuli $a'a_1b_1b'$ jest równa sile działającej na wycinek powierzchni bocznej stożka aa_1b_1b . Siła ta z dokładnością do nieskończenie małej wyższego rzędu jest równa różnicy sił działających na powierzchnię boczną stożka abO_2 oraz stożka $a_1b_1O_2$ (rys.5.7) i zgodnie ze wzorem (5.20) wyraża się następującym wzorem:

$$dP = \alpha v^2 \pi (\rho + d\rho)^2 \sin \varphi - \alpha v^2 \pi \rho^2 \sin \varphi = 2 \alpha v^2 \pi \sin \varphi \rho d\rho \quad (5.21)$$

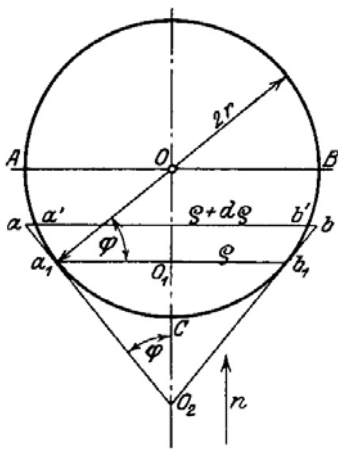
Uwzględniając, że $\cos \varphi = \frac{\rho}{r}$ (rys.5.7) oraz $\sin \varphi = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - \rho^2}$ wzór (5.21) przekształci się do postaci:

$$dP = \frac{2\pi\alpha v^2}{r} \sqrt{r^2 - \rho^2} \rho d\rho \quad (5.22)$$

Promień podstawy stożka ρ zmienia się w przedziale $(0, r)$. Wobec tego siła całkowita działająca na powierzchnię półkuli ABC (rys.5.7) jest równa:

$$P = \frac{2\pi\alpha v^2}{r} \int_0^r \sqrt{r^2 - \rho^2} \rho d\rho \quad (5.23)$$

Wartość powyższej całki jest równa $\frac{1}{3} r^3$. Po uwzględnieniu, że $\pi r^2 = S$ (powierzchnia rzutowa kuli), oraz $\alpha = 0,5 \rho_0$ wartość siły oporu hydrodynamicznego dla kuli jest równa:



Rys. 5.7. Siła działająca na powierzchnię kuli (Finkey, 1924)

$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \rho_0 v^2 S \quad (5.24)$$

Z porównania powyższego wzoru ze wzorem (5.10) wynika, że współczynnik oporu dla kuli według obliczeń Finkeya jest równy $\psi_k = \frac{2}{3}$.

Rittinger w swoich obliczeniach przeprowadzonych według analogicznego schematu uzyskał wartość $\psi_k = 0,5$. Zdaniem Finkeya, Rittinger popełnił błąd w swoich obliczeniach (Finkey, 1924).

5.2.2. Współczynnik oporu z uwzględnieniem warstwy przyściennej

Dla ruchu kuli przy dużych liczbach Reynoldsa pole ruchu cieczy można podzielić na dwa obszary: zewnętrzny, w którym można założyć, że siły tarcia są pomijalnie małe ($\eta = 0$) oraz wewnętrzny blisko powierzchni, w którym siły tarcia muszą być uwzględnione (Batchelor, 1967). Blisko powierzchni kuli, na skutek sił tarcia będzie miało miejsce przylepianie się cieczy do powierzchni kuli. Efektem tego będzie powstawanie warstwy granicznej (przyściennej), w której prędkość cieczy zmienia się od wartości odpowiadającej warunkowi przylegania do powierzchni kuli do wartości odpowiadającej ruchowi bez tarcia (Prandtl, 1956). Grubość warstwy granicznej jest tym mniejsza im mniejsza jest lepkość cieczy. Jeżeli grubość warstwy granicznej jest równa δ to siła tarcia f_t przypadająca na jednostkę objętości warstwy będzie rzędu:

$$f_t = \frac{F_t}{V} \sim \frac{\eta v S}{\delta} : \delta S = \frac{\eta v}{\delta^2} \quad (5.25)$$

gdzie: v – prędkość cieczy w warstwie granicznej, F_t - całkowita siła tarcia, $V = \delta \cdot S$ – objętość warstwy granicznej, S – powierzchnia warstwy granicznej.

Z kolei wartość siły bezwładności przypadająca na jednostkę objętości jest rzędu:

$$f_b = \rho_0 \frac{dv}{dt} \sim \rho_0 \frac{v}{t} \sim \frac{\rho_0 v}{\frac{\theta r}{v}} \sim \frac{\rho_0 v^2}{r} \quad (5.26)$$

gdzie: $\frac{dv}{dt}$ - przyspieszenie cieczy w kierunku opływu kuli, r – promień kuli, θ – kąt mierzony od punktu wejścia na przedniej powierzchni kuli do punktu oderwania warstwy przyściennej (rys.5.8). Wewnątrz warstwy granicznej siły tarcia są porównywalne z siłami bezwładności. Czyli:

$$\frac{\rho_0 v^2}{r} \sim \frac{\eta v}{\delta^2} \quad (5.27)$$

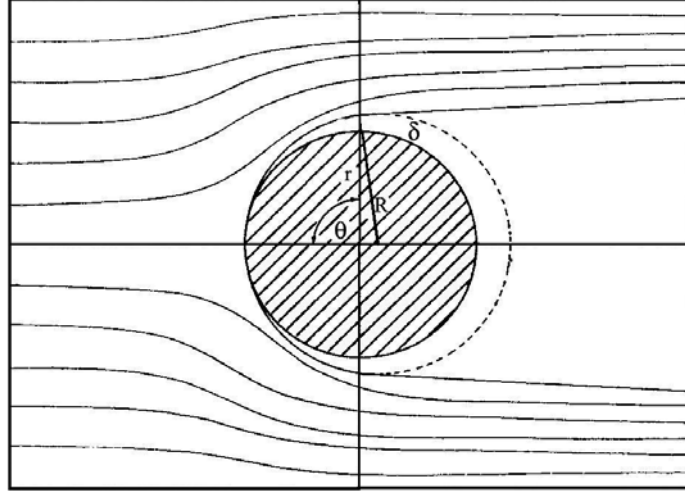
skąd:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\eta r}{\rho_0 v}} \quad \text{oraz} \quad \frac{\delta}{r} \sim \sqrt{\frac{\eta}{\rho_0 v r}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (5.28)$$

Można więc napisać, że:

$$\frac{\delta}{r} = \frac{\delta_0}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (5.29)$$

gdzie: $\text{Re} = \frac{\rho_0 v r}{\eta}$ - liczba Reynoldsa, δ_0 – stała.



Rys. 5.8. Model kuli z warstwą przyścienną (Concha i Almendra, 1979)

Kulę wraz z warstwą przyścienną można potraktować jako nowy obiekt o promieniu $a = R + \delta$ poruszający się ze stałą prędkością w nielepkiej cieczy (Abraham, 1970). Wówczas zgodnie ze wzorem Newtona siła oporu działająca na kulę o promieniu R jest równa:

$$P = C \pi R^2 \frac{1}{2} \rho_0 v^2 = C \pi (r + \delta)^2 \frac{1}{2} \rho_0 v^2 = C \left(1 + \frac{\delta}{r}\right)^2 \cdot \left(\pi r^2 \frac{1}{2} \rho_0 v^2 \right) \quad (5.30)$$

Zgodnie z definicją współczynnik oporu jest równy (Concha i Almendra, 1979):

$$\psi_k = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho_0 v^2 \pi r^2} = C \left(1 + \frac{\delta}{r}\right)^2 \quad (5.31)$$

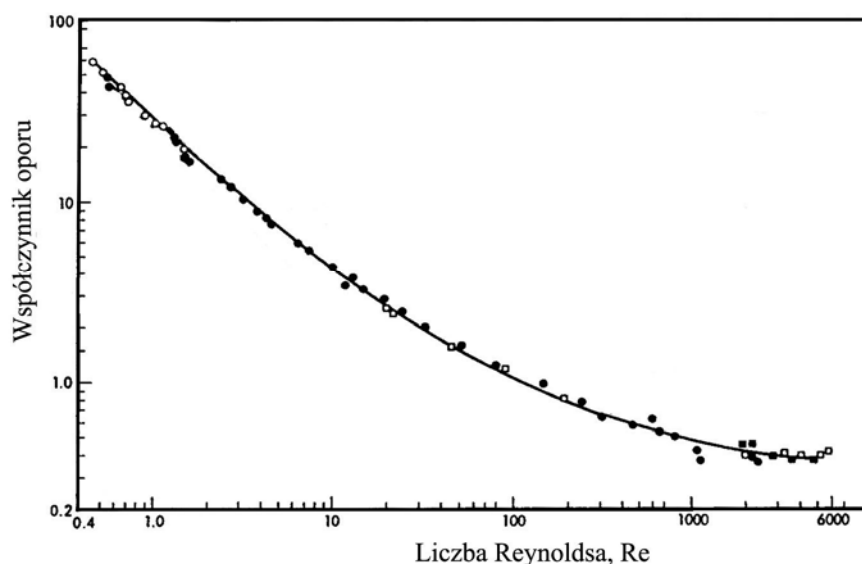
Po uwzględnieniu (5.29) na współczynnik oporu dla kuli otrzymuje się wyrażenie:

$$\psi_k = C \left(1 + \frac{\delta_0}{\sqrt{\text{Re}}}\right)^2 \quad (5.32)$$

Stała C wyliczona przez Conchę i Almendrę (1979) jest równa $C = 0,284$, natomiast $\delta_0 = 9,06$ (Mc Donald 1954, za Concha i Almendra, 1979). W związku z tym zależność współczynnika oporu dla kuli od liczby Reynoldsa wyraża się wzorem:

$$\psi_k = 0,284 \left(1 + \frac{9,06}{\sqrt{Re}} \right)^2 \quad (5.33)$$

Na rys. 5.9 przedstawiona jest zależność $\psi_k(Re)$ wykreślona według zależności (5.33) wraz z punktami empirycznymi (Abraham, 1970). Wyliczona według tej zależności wartość $\psi_k(Re=1000) = 0,46$. Jest to więc wartość bliska wartości podanej przez Rittin-gera i znacznie odbiega od wartości podanej przez Finkeya.



Rys.5.9. Zależność współczynnika oporu od liczby Reynoldsa dla kuli (Abraham, 1970)

5.2.3. Empiryczne zależności współczynnika oporu kuli od liczby Reynoldsa

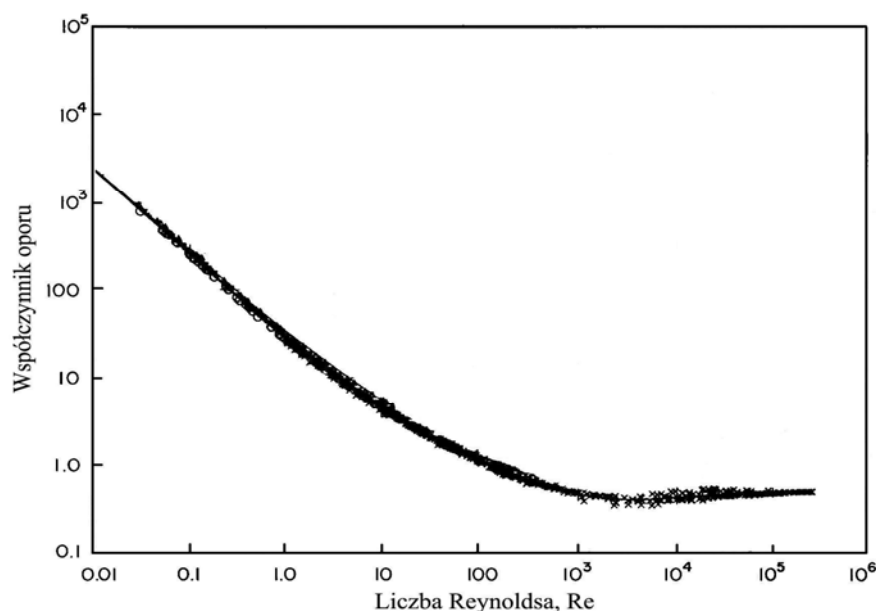
Flemmer i Banks (1986) zaproponowali następującą zależność empiryczną współczynnika oporu dla kuli od liczby Reynoldsa (dla $Re < 3 \cdot 10^5$):

$$\psi_k = \frac{24}{Re} \cdot 10^E \quad (5.34)$$

przy czym:

$$E = 0,261 \text{Re}^{0,369} - 0,105 \text{Re}^{0,431} - \frac{0,124}{1 + (\lg \text{Re})^2} \quad (5.35)$$

Wartość współczynnika oporu dla $Re = 1000$ wyliczona według wzorów (5.34) i (5.35) jest równa: $\psi_k(Re = 1000) = 0,442$.



Rys. 5.10. Empiryczna zależność współczynnika oporu od liczby Reynoldsa (Haider i Levenspiel, 1989)

Haider i Levenspiel (1989) po analizie uzyskanych dotychczas zależności współczynnika oporu od liczby Reynoldsa dla ziaren sferycznych i niesferycznych zaproponowali ogólną zależność, która dla ziaren sferycznych ma postać:

$$\psi_k = \frac{24}{\text{Re}} (1 + A \text{Re}^B) + \frac{C}{1 + \frac{D}{\text{Re}}} \quad (5.36)$$

przy czym parametry tej zależności A, B, C i D są wyliczone metodą najmniejszych kwadratów na podstawie danych empirycznych. Wykorzystując próbkę o liczności 408 punktów doświadczalnych uzyskali dla kuli w zakresie liczb Reynoldsa $Re < 2,6 \cdot 10^5$ następującą zależność (Haider i Levenspiel, 1989):

$$\psi_k = \frac{24}{\text{Re}} (1 + 0,1806 \text{Re}^{0,6459}) + \frac{0,4251}{1 + \frac{6880,95}{\text{Re}}} \quad (5.37)$$

Zależność (5.36) wraz z weryfikacją empiryczną podana jest na rys. 5.10. Wyliczona według zależności (5.36) wartość współczynnika oporu $\psi_k(Re = 1000) = 0,453$.

Perry i Chilton (1973 za Flemmer i Banks, 1986) dla liczb Reynoldsa z przedziału $1000 < Re < 2 \cdot 10^5$ podają stałą wartość współczynnika oporu dla kuli $\psi_k = 0,44$.

Analiza wartości współczynników oporu uzyskanych na podstawie wzorów analitycznych i empirycznych skłania do przyjęcia jako wartości najbardziej wiarygodnej: $\psi_k = 0,46$.

Ta wartość będzie używana w dalszej części pracy.

5.3. Współczynniki kształtu ziarna i współczynnik oporu dla ziarna niesferycznego

W wyrażeniu (5.14) na graniczną prędkość opadania ziarna nieregularnego zawarte są: współczynnik oporu ziarna ψ_z , objętość ziarna V oraz powierzchnia rzutowa ziarna S . Dla scharakteryzowania tych wielkości stosuje się następujące miary wielkości ziarna:

- średnicę zastępczą d_z , która jest średnicą kuli o objętości równej objętości ziarna V według zależności:

$$d_z = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} \quad (5.38)$$

- średnicę projekcyjną d_p , która jest równa średnicy koła o powierzchni równej powierzchni rzutowej ziarna S , czyli:

$$d_p = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} \quad (5.39)$$

- średnicę sitową ziarna d_s , która jest średnią arytmetyczną dolnej i górnej granicy klasy ziarnowej.

Współczynnik oporu ziarna jest związany ze współczynnikiem oporu kuli w newtonowskim zakresie liczb Reynoldsa następującą zależnością (Thompson i Clark 1991, Ganser, 1993):

$$\psi_z = k_2 \psi_k \quad (5.40)$$

gdzie: k_2 jest dynamicznym lub newtonowskim współczynnikiem kształtu ziarna. Ponieważ dla kuli $\psi_k = 0,46$, w związku z czym:

$$\psi_z = 0,46 k_2 \quad (5.41)$$

Zatem współczynnik oporu ziarna jest zależny od kształtu ziarna. Im bardziej nieregularne jest ziarno tym większa jest siła oporu.

Ganser (1993) podał następującą statystyczną zależność dynamicznego współczynnika kształtu od współczynnika sferyczności ziarna ϕ :

$$k_2 = 10^{1,8148(-\log \phi)^{0,5743}} \quad (5.42)$$

Wyrażenie (5.42) według Gansera można stosować dla ziaren o dowolnym kształcie, przy czym współczynnik sferyczności jako miarę kształtu ziarna definiuje się następująco (Wadell, 1934, za Heiss i Coull, 1952):

$$\phi = \left(\frac{d_z^2}{d_k^2} \right) = \left(\frac{A_s}{A} \right)_v \quad (5.43)$$

gdzie: d_k – średnica kuli o powierzchni równej powierzchni ziarna, A – powierzchnia ziarna, A_s – powierzchnia kuli o objętości równej objętości ziarna.

Ze względu na trudność pomiaru powierzchni ziarna Wadell proponuje aproksymację współczynnika sferyczności przez współczynnik kolistości albo cyrkularności, wyliczany z pomiarów na płaszczyźnie i zdefiniowany następująco:

$$\phi \cong k_c = \left(\frac{C}{C_z} \right)_s \quad (5.44)$$

gdzie: C_z – obwód powierzchni rzutowej ziarna, C – obwód koła o polu powierzchni równym polu powierzchni rzutowej ziarna.

Jeżeli do wzoru (5.14) podstawią się za ψ_z , V i S odpowiednie wyrażenia ze wzorów (5.41), (5.38) i (5.39) na prędkość opadania ziarna niesferycznego uzyska się następujące wyrażenie:

$$v = 5,33\sqrt{x} \frac{\sqrt{d_z^3}}{d_p \sqrt{k_2}} \quad (5.45)$$

gdzie: $x = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ - zredukowana gęstość ziarna.

Dla ziarna sferycznego $d_z = d_p = d$ oraz $k_2 = 1$ w związku z czym prędkość opadania wyraża się wzorem:

$$v = 5,33\sqrt{x}\sqrt{d} \quad (5.46)$$

Heywood (1937, za Heiss i Coull, 1952) proponuje określenie objętości ziarna poprzez objętościowy współczynnik kształtu k_{IH} według wzoru:

$$V = k_{IH}d_p^3 \quad (5.47)$$

W tej pracy objętościowy współczynnik kształtu k_I określono z analogicznego wyrażenia:

$$V = k_1 \frac{\pi d_p^3}{6} \quad (5.48)$$

Po podstawieniu do wzoru (5.14) za ψ_z , S i V wyrażeń ze wzorów (5.41), (5.39) i (5.48) na prędkość opadania ziarna nieregularnego uzyskuje się wzór:

$$v = 5,33\sqrt{x}\sqrt{d_p}\sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)} \quad (5.49)$$

Wzory (5.46) i (5.49) zostaną zastosowane w rozdziale 10 do wyznaczenia rozkładów prędkości opadania ziaren sferycznych i nieregularnych.

6. KRZYWA ROZDZIAŁU I JEJ OPIS FUNKCJAMI ZMIENNEJ LOSOWEJ

6.1. Empiryczne modele funkcji rozdziału

Wzbogacanie w osadzarce jak każdy proces masowy jest procesem losowym, w którym można mówić jedynie o prawdopodobnym zachowaniu się ziarna o określonych własnościach fizycznych i geometrycznych w komorze roboczej osadzarki. Losowość procesu wynika z faktu, że obok oddziaływań sprzyjających rozdziałowi (uporządkowaniu) na warstwy o różnych własnościach istnieją oddziaływania burzące ten porządek, których wielkość może się zmieniać od punktu do punktu. Tak jak w rachunku prawdopodobieństwa definiuje się liczbę rozdziału, czyli prawdopodobieństwo trafienia ziaren do określonego produktu rozdziału. Dla odpadów liczba rozdziału wyraża się wzorem:

$$T_{\rho} = \frac{n_o}{n_f} \quad (6.1)$$

gdzie: T_{ρ} - liczba rozdziału dla ziaren o gęstości ρ , n_o - liczba ziaren o gęstości ρ trafiająca do odpadów, n_f - liczba ziaren o tej gęstości w nadawie.

Wzór (6.1) przedstawia więc prawdopodobieństwo trafienia ziarna o gęstości ρ do odpadów. Zależność liczby rozdziału od gęstości ziarna przedstawia funkcję rozdziału, a jej graficznym obrazem jest krzywa rozdziału. Pierwszy Tromp (1937) zastosował tę formę do analizy procesów rozdziału. Empirycznie liczby rozdziału wyznacza się poprzez analizę densymetryczną nadawy oraz produktów rozdziału. Znane są również metody znacznikowe dla określania liczb rozdziału (Napier-Munn, 1985, Ciok i inni, 1978 a,b).

Dla ciągłego rozkładu gęstości funkcję rozdziału dla odpadów przedstawia następujące wyrażenie (Sztaba, 1956 a,b):

$$T(\rho) = \gamma_o \frac{f_o(\rho)}{f(\rho)} \quad (6.2)$$

gdzie: γ_o - wychód odpadów, $f_o(\rho)$ - funkcja gęstości rozkładu gęstości ziaren w odpadach, $f(\rho)$ - funkcja gęstości rozkładu gęstości w nadawie.

Jest to zatem funkcja uzysku ziaren o gęstości ρ w odpadach.

Na przestrzeni kilkudziesięciu lat funkcję rozdziału przybliżano rozmaitymi funkcjami zmiennych losowych. Przez analogię z prawem rozkładu losowych błędów pomiaru rozproszenie ziaren o danej gęstości ρ wokół wartości najbardziej prawdopodobnej przyjęło się za Trompem (1937) i Terrą (1938) przybliżać funkcją gęstości rozkładu normalnego:

$$t(\rho) = \frac{h_r}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-h_r^2(\rho - \rho_r)^2\right] \quad (6.3)$$

gdzie: $t(\rho)$ – funkcja rozproszenia, ρ_r – gęstość rozdziału, h_r – parametr funkcji prawdopodobieństwa będący miarą dokładności rozdziału.

Funkcja rozdziału wyraża się przez funkcję rozproszenia według następującej zależności (Budryk, 1949 a,b, Krzywda, 1961, Hughes, 1967):

$$T(\rho) = \int_{-\infty}^{\rho} t(\rho) d\rho = \frac{h_r}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\rho} \exp\left[-h_r^2(\rho - \rho_r)^2\right] d\rho \quad (6.4)$$

Według wzorów (6.3) i (6.4) wielkość ρ_r interpretuje się jako gęstość ziaren, które statystycznie w połowie trafiają do odpadów, a w połowie do koncentratu. Wielkość ta stanowi jeden z parametrów oceny wyników rozdziału na podstawie krzywej rozdziału.

Przedstawiony powyżej model funkcji rozdziału jest jednym z wielu modeli empirycznych najczęściej stosowanych w analizie wyników rozdziału we wzbogacalnikach grawitacyjnych. Asymetria funkcji rozdziału wyrażonej wzorem (6.4) jest równa 0. Jest to więc rozkład symetryczny. W praktyce analizy wyników rozdziału stosowano również asymetryczne funkcje rozkładu zmiennych losowych. Do najczęściej stosowanych należą funkcje rozkładów: Weibulla, Gatesa-Gaudina-Schuhmanna, log-normalnego (Tarjan, 1974) oraz funkcje arctg, tgh oraz funkcja logistyczna (Reid i inni, 1985, Paul i inni, 1998) i dystrybuanta rozkładu beta (Paszowska, 1985). Argumentem rozdziału w powyższych modelach jest gęstość ziarna. Znane są modele z zastosowaniem funkcji rozkładu Weibulla oraz rozkładu dwumianowego, w których argumentem rozdziału jest stosunek gęstości ziarna do gęstości rozdziału $\frac{\rho}{\rho_r}$ (Gottfried i Jacobsen, 1977, Gottfried, 1978, 1981, Fallon i Gottfried, 1985, Jowett, 1986).

Po takiej transformacji krzywe rozdziału wykreślone dla różnych wartości gęstości rozdziału można sprowadzić do jednej krzywej. Wszystkie wymienione powyżej modele funkcji rozdziału są modelami dwuparametrowymi. Znane są również modele o trzech, czterech i pięciu parametrach

(Tamilmani i Kapur, 1986, Mohanty i inni, 2002). Każdy model procesu czy zjawiska jest tym lepszy, im mniej zawiera parametrów przy tej samej dokładności dopasowania do zależności empirycznej. W związku z tym można powiedzieć, że modele dwuparametrowe są z zasady lepsze od modeli zawierających więcej niż dwa parametry.

Pierwszą próbą unifikacji modeli funkcji rozdziału dla procesu klasyfikacji były badania teoretyczne Trawinskiego (1976 a,b). Na podstawie założonych własności funkcji rozdziału dla klasyfikacji doszedł on do wniosku, że ogólna postać tej funkcji dla wylewu wyraża się wzorem:

$$T(x) = 1 - \frac{1}{Q(x)} \quad (6.5)$$

gdzie: $x = \frac{d}{d_r}$, d – średnica ziarna, d_r – średnica podziałowa, natomiast funkcja $Q(x)$

$$\text{powinna spełniać następujące warunki: } Q(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0 \\ 2 & \text{dla } x = 1 \\ \infty & \text{dla } x \rightarrow \infty \end{cases}$$

Przyjmując dla $Q(x)$ funkcje wykładnicze, stożkowe i trygonometryczne uzyskuje dla funkcji rozdziału różne postacie funkcji wykładniczych, potęgowych i arctg.

6.2. Modelowe ujęcia postaci funkcji rozdziału

Dotychczas rozpatrywane podejścia nie mają uzasadnienia teoretycznego. Tichonov (1968, 1973) na gruncie równań transportu dowiódł zasadność stosowania dystrybuanty rozkładu normalnego dla funkcji rozdziału przy założeniu, że rozkład gęstości ziaren w nadawie jest rozkładem jednorodnym. Funkcja rozdziału dla odpadów przy powyższym założeniu ma następującą postać:

$$T(\rho) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi \left[\sqrt{\frac{2gz_m f(\rho)}{D\psi_o}} (\rho - \rho_r) \right] \quad (6.6)$$

gdzie: Φ - całka prawdopodobieństwa, g – przyspieszenie ziemskie, $2z_m$ – wysokość łoża osadzarki, D – współczynnik dyfuzji, ψ_o - współczynnik oporu.

Podejście Tichonova pozwoliło na uzależnienie funkcji rozdziału, jak również wskaźników dokładności rozdziału (o których będzie mowa w dalszej części rozdziału) od wy-

sokości łoża osadzarki, rozkładu gęstości ziaren w nadawie, współczynnika oporu oraz współczynnika dyfuzji turbulentnej. Nie ma w równaniu (6.6) parametrów, które nie mają interpretacji.

Drugim znanym fizykalnym podejściem do konstrukcji funkcji rozdziału jest model fizyczno-probabilistyczny Zapały (1987, 1994). Oparł się on na hipotezie Gaudina o wpływie przyspieszenia ruchu ziaren na proces rozdziału w osadzarce. Ponieważ zależność prędkości opadania ziarna od czasu w ruchu turbulentnym wyraża się przez funkcję tgh (wzór 5.13) przyjął dla funkcji rozproszenia pochodną funkcji tgh (przyspieszenie jako pochodna prędkości), czyli funkcję:

$$t(\rho) = \frac{V(\rho)}{M(\rho)} \cdot \frac{1}{\cosh^2 \left[\frac{2V(\rho)}{M(\rho)} (\rho - \rho_w) \right]} \quad (6.7)$$

gdzie: ρ_w – gęstość warstwy wzbogacanego materiału, $\frac{V(\rho)}{M(\rho)}$ – objętość zajmowana przez jednostkę masy frakcji elementarnej o gęstości ρ w łożu osadzarki.

Wielkość $\frac{V(\rho)}{M(\rho)}$ określa rozluźowanie ziaren w trakcie procesu wzbogacania.

Na podstawie wzorów (6.4) i (6.7) funkcja rozdziału po przekształceniach ma następującą postać:

$$T(\rho) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} tgh \left[\frac{\ln 3}{2E_p} (\rho - \rho_r) \right] \quad (6.8)$$

gdzie: E_p - rozproszenie prawdopodobne.

Parametrami funkcji rozdziału wyrażonej wzorem (6.8) są: gęstość rozdziału oraz rozproszenie prawdopodobne stosowane jako wskaźniki rozdziału w procesach wzbogacania.

Kolejnym fizycznym modelem funkcji rozdziału stosowanym w procesie wzbogacania w cieczy ciężkiej jest model termodynamiczny oparty na rozkładzie Boltzmanna (Brożek i Turno, 2004, 2005). Analityczna postać funkcji rozdziału wyraża się wzorem:

$$T(\rho) = \frac{1}{1 + \exp \left[-\frac{k_1(\rho - \rho_r)gd}{k_2(\rho_o v_c^2 + c_o \bar{\rho} v_p^2)} \right]} = \frac{1}{1 + \exp \left[-\frac{\ln 3(\rho - \rho_r)gd}{E_p} \right]} \quad (6.9)$$

gdzie: k_1 i k_2 – odpowiednio objętościowy i dynamiczny współczynnik kształtu ziarna, v_c i v_p – odpowiednio prędkość średnia kwadratowa turbulentnego ruchu cieczy oraz ziarna, ρ_o – gęstość cieczy, $\bar{\rho}$ – średnia gęstość wzbogacanych ziaren, c_o – koncentracja objętościowa ziaren w komorze wzbogacalnika.

W modelu tym rozproszenie prawdopodobne jest funkcyjnie uzależnione od własności geometrycznych ziaren oraz warunków pracy wzbogacalnika.

Jedynym jak dotychczas modelem funkcji rozdziału, której argumentem jest graniczna prędkość opadania ziarna jest model podany przez Sztabę (1956 a,b). Dla wylewu ma ona postać:

$$T(v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^v \exp\left[-\frac{(v-v_k)^2}{2\sigma^2}\right] dv \quad (6.10)$$

gdzie: v – graniczna prędkość opadania ziarna, v_k – graniczna prędkość klasyfikacji, σ – odchylenie standardowe zmiennej v będącej miarą rozproszenia ziaren.

6.3. Krzywa rozdziału jako transformata całkowa

Różniczkową postać funkcji rozdziału lub funkcji rozproszenia ziaren przy podziale na koncentrat i odpady na poziomie z można zapisać wzorem ogólnym:

$$t(\rho|z) = \frac{dT(\rho|z)}{d\rho} \quad (6.11)$$

gdzie: $T(\rho|z)$ – warunkowe prawdopodobieństwo trafienia ziarna o gęstości ρ do odpadów pod warunkiem, że próg rozdzielczy znajduje się na poziomie z .

Iloczyn $t(\rho|z)$ przedstawia prawdopodobieństwo, że ziarno o gęstości ρ znajdzie się w warstwie $(z, z + dz)$ łoża osadzarki lub jest to ułamek całkowitej ilości ziaren o gęstości ρ , które trafiły do warstwy $(z, z + dz)$.

Znajomość funkcji $t(\rho|z)$ ma istotne znaczenie praktyczne, gdyż z jednej strony charakteryzuje urządzenie rozdzielcze, a z drugiej strony stwarza możliwość prognozowania wyników rozdziału przy znanej charakterystyce nadawy.

Jeżeli funkcja $f(\rho)$ przedstawia częstość rozkładu gęstości ziaren nadawy, wówczas iloczyn $t(\rho|z)dz \cdot f(\rho)d\rho = g(\rho, z)d\rho dz$ przedstawia wychód ziaren frakcji

$(\rho, \rho + d\rho)$ (mierzony w stosunku do całej nadawy) znajdujących się w warstwie $(z, z + dz)$. Następujące wyrażenie:

$$g(z)dz = dz \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} t(\rho|z)f(\rho)d\rho \quad (6.12)$$

przedstawia wychód produktu rozdziału zawartego w warstwie $(z, z + dz)$. Przy rozdziale na dwa produkty wychód produktu ciężkiego (odpadów w przypadku węgla) będzie równy:

$$\gamma_c(z_r) = \int_0^{z_r} g(z)dz = \int_0^{z_r} dz \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} t(\rho|z)f(\rho)d\rho \quad (6.13)$$

gdzie: z_r – położenie progu rozdzielczego.

Powyższa zależność pozwala prognozować wyniki rozdziału i stwarza możliwość sterowania procesem w zależności o żądanej jakości produktów.

6.4. Ocena dokładności rozdziału

W przypadku idealnego wzbogacania kopalin rozdział na produkty dokonuje się według ściśle określonej granicy rozdziału, którą jest np. gęstość ziaren surowca. Wówczas ziarna o gęstości mniejszej trafiają do koncentratu, a ziarna o gęstości większej do odpadów (w przypadku węgla). Jednakże w warunkach przemysłowych jest to praktycznie niemożliwe do zrealizowania, gdyż na ostateczny wynik rozdziału, poza różnicami w gęstościach ziaren, wpływają takie parametry jak: zróżnicowana wielkość i kształt ziaren, porowatość, wzajemne oddziaływania mechaniczne między ziarnami, turbulencja, obciążenie nadawą, zbyt duża lub zbyt mała ilość podawanej wody do komory roboczej osadzarki i wiele innych. Wszystkie te czynniki powodują, że ziarna o ściśle określonej gęstości nie są skoncentrowane w odpowiedniej warstwie. W wyniku rozproszenia trafiają do warstw, a w konsekwencji do produktów rozdziału, w których nie powinny się znajdować obniżając w ten sposób dokładność separacji.

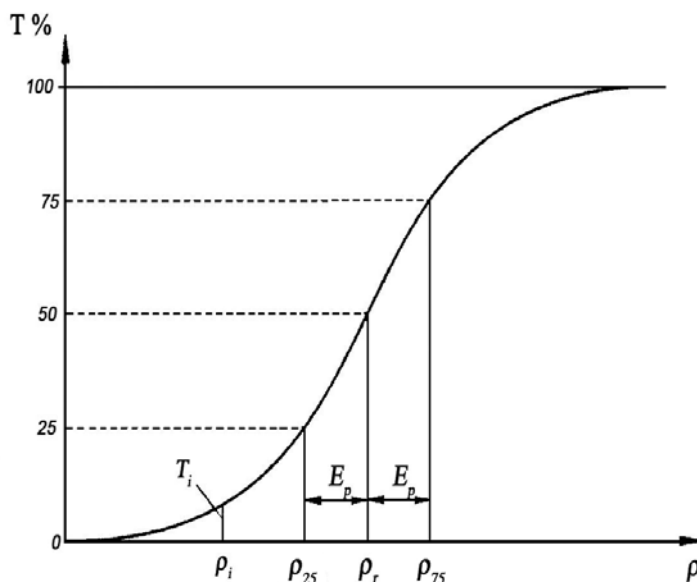
Do analizy efektywności rozdziału służą wskaźniki rozdziału. Najbardziej rozpowszechnionymi i najczęściej stosowanymi wskaźnikami oceny dokładności rozdziału są wskaźniki oparte o krzywe rozdziału. Na rysunkach 6.1 i 6.2 podane są poglądowe krzywe rozdziału dla odpadów odpowiednio dla procesu rzeczywistego i idealnego. Na rys. 6.1 zaznaczono wartości gęstości rozdziału ρ_r (lub ρ_{50}), ρ_{25} i ρ_{75} . Gęstość

rozdziału jest gęstością takich ziaren, które statystycznie w połowie trafiają do odpadów, a w połowie do koncentratu, czyli $\rho_r = \rho(T = 50)$. Analogicznie definiuje się gęstości ρ_{25} i ρ_{75} . Wskaźnikami dokładności rozdziału wyznaczanymi z krzywej rozdziału są:

- **rozproszenie prawdopodobne E_p** - zdefiniowane jako (Stępiński, 1964):

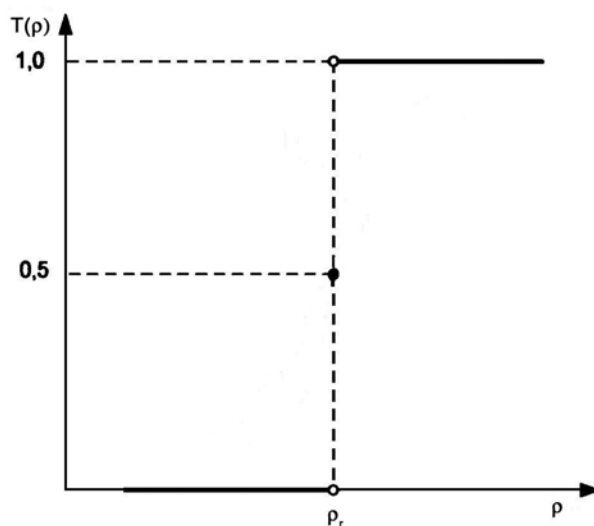
$$E_p = \frac{\rho(T = 75) - \rho(T = 25)}{2} \quad (6.14)$$

gdzie: $\rho(T = 75) = \rho_{75}$ i $\rho(T = 25) = \rho_{25}$ - stanowią odczytane z krzywej rozdziału wartości gęstości dla rzędnych odpowiednio 75% i 25%.



Rys. 6.1. Poglądowa krzywa rozdziału dla wzbogacania grawitacyjnego (Sztaba, 2003)

Rozproszenie prawdopodobne E_p określa granicę gęstości, która może być z takim samym prawdopodobieństwem przekroczona, jak i nie przekroczona przez poszczególne ziarna przy rozproszeniu elementarnej frakcji o określonej gęstości. Im wartość E_p jest mniejsza, tym rozdział jest dokładniejszy. Dla rozdziału idealnego $E_p = 0$ (rys. 6.2),



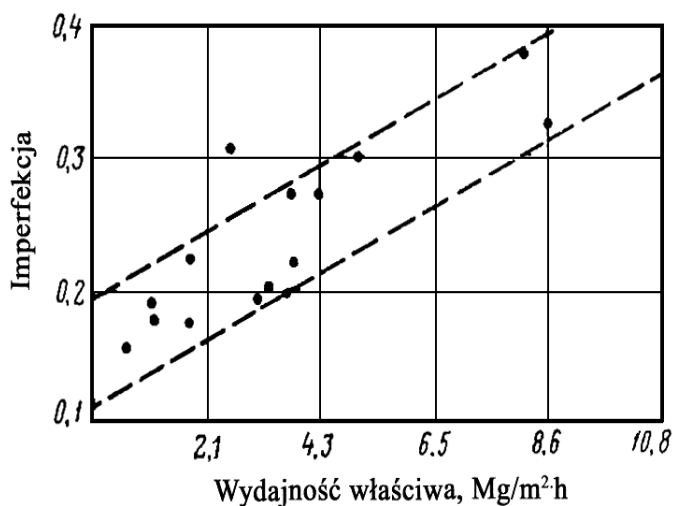
Rys. 6.2. Krzywa rozdziału dla separacji idealnej

- **imperfekcja I** - wskaźnik porównawczy dla różnych gęstości rozdziału, wyrażony w postaci (Mayer, 1967):

$$I = \frac{E_p}{\rho_r - 1} \quad (6.15)$$

lub (Jowett, 1986, Gottfried i Jacobsen, 1977):

$$I = \frac{E_p}{\rho_r} \quad (6.16)$$



Rys. 6.3. Zależność imperfekcji od wydajności właściwej (Samylin, 1976)

Rozproszenie prawdopodobne oraz imperfekcją są zależne od wydajności procesu, rodzaju cyklu pulsacji, zawartości ziaren w nadawie poniżej 1 mm, własności geo-

metrycznych ziaren oraz rozkładu gęstości ziaren w nadawie. Na rys. 6.3 podana jest zależność imperfekcji od wydajności właściwej mierzonej na jednostkę powierzchni łoża osadzarki. Ze wzrostem wydajności, jak wynika z rys. 6.3 imperfekcja rośnie, czyli zmniejsza się dokładność rozdziału. Wynika to z faktu, że ze wzrostem wydajności zmniejsza się czas trwania rozdziału jak również zmniejsza się stopień rozluźniania i przez to rośnie koncentracja objętościowa ziaren w komorze roboczej osadzarki.

Dla oceny wpływu rozkładu gęstości ziarna w nadawie na imperfekcję Beluga i inni (1959, za Samylin, 1976) podał następującą zależność empiryczną:

$$I = I_o + 0,021 \operatorname{tg} \alpha \quad (6.17)$$

gdzie: I_o – charakterystyczna dla danej osadzarki wartość imperfekcji, $\operatorname{tg} \alpha = k_I \frac{\Delta \gamma(\Delta \rho)}{\Delta \rho}$,

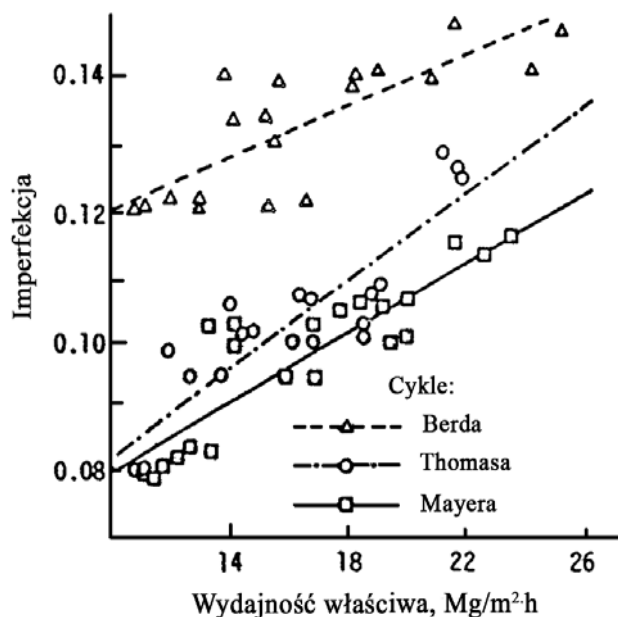
k_I – współczynnik skali, $\Delta \rho = \pm 0,1 \text{ Mg/m}^3$ – przedział gęstości wokół gęstości rozdziału, $\Delta \gamma(\Delta \rho)$ - udział w nadawie ziaren z przedziału gęstości $(\rho_r - \Delta \rho, \rho_r + \Delta \rho)$ w %.

Papee (1994) podaje następującą zależność imperfekcji od zawartości w nadawie ziaren frakcji bliskich gęstości rozdziału:

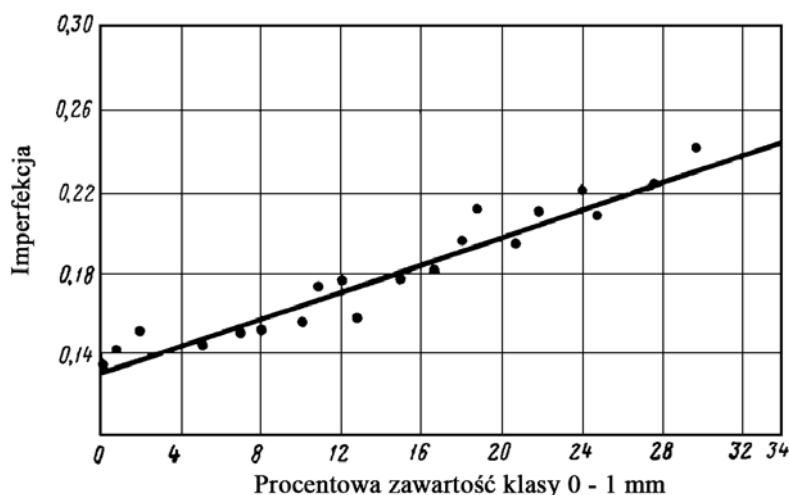
$$I = \frac{0,1x^{0,85}}{1 + 0,51x^{0,85}} \quad (6.18)$$

gdzie: x – zawartość procentowa frakcji o gęstości $\rho_r \pm 0,1$ w nadawie, przy czym ρ_r wyrażone jest w $[\text{Mg/m}^3]$.

Na rys. 6.4 podana jest zależność imperfekcji od wydajności właściwej dla trzech różnych cykli pulsacji. Najmniejszą imperfekcję obserwuje się dla cyklu trapezoidalnego (Mayera). Dla tego cyklu średni stopień rozluźniania jest największy, w związku z tym średnia koncentracja objętościowa ziaren jest najmniejsza.



Rys. 6.4. Zależność imperfekcji od wydajności właściwej dla różnych cykli pulsacji (Tanaka i inni, 1990)



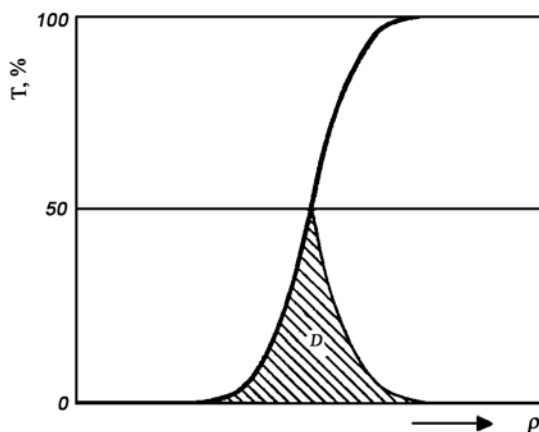
Rys. 6.5. Wpływ zawartości ziaren – 1 mm w nadawie na wartość imperfekcji (Samylin, 1976)

Na rys. 6.5 przedstawiona jest zależność średniej imperfekcji od zawartości ziaren poniżej 1 mm. Jak wynika z rys. 3.3 średnia amplituda ruchu ziaren poniżej 1 mm jest duża, w związku z tym można powiedzieć, że ziarna te są praktycznie rzecz biorąc ziarnami błądzącymi, nie poddającymi się procesowi rozdziału i rozłożonymi równomiernie w przestrzeni roboczej osadzarci. Z tego względu ich obecność obniża dokładność rozdziału.

- **wskaźnik Driessenna** (Driessenn, 1954 za Krzywda, 1961) określony jako pole zawarte między osią odciętych, dolną połową krzywej rozdziału i zwierciadła-

nym odbiciem wokół odciętej $T = 50 \%$ górnej połowy krzywej rozdziału (rys. 6.6). Związek między wskaźnikiem Driessena i rozproszeniem prawdopodobnym został podany przez Budryka i Górskiego (1953):

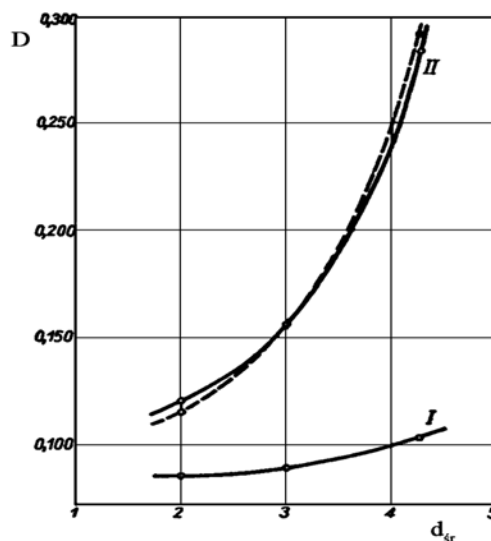
$$D = \frac{E_p}{0,844} \quad (6.19)$$



Rys. 6.6. Wskaźnik Driessena w odniesieniu do teoretycznej krzywej rozdziału (Krzywda, 1961)

Na rys. 6.7 przedstawiona jest zależność wskaźnika Driessena od średniej wielkości wzbogaczanych ziaren dla rud. Ze wzrostem wielkości ziarna rośnie wartość wskaźnika, czyli zmniejsza się dokładność rozdziału.

Spośród innych wskaźników dokładności rozdziału wyróżnić można średni geometryczny uzysk właściwych frakcji w produktach rozdziału oraz sumaryczne zanieczyszczenie produktów rozdziału (Samylin, 1976).



Rys. 6.7. Zależność wskaźnika D od średnich wymiarów wzbogaczanych ziaren: I-pierwszy stopień wzbogacania, II-drugi stopień wzbogacania (Krzywda, 1961)

- **Średni geometryczny uzysk** dla osadzarek trójproduktowych wyraża się wzorem:

$$\varepsilon = \sqrt[3]{\varepsilon_k \varepsilon_{pp} \varepsilon_o} \quad (6.20)$$

gdzie: $\varepsilon_k, \varepsilon_{pp}, \varepsilon_o$ - uzysk frakcji odpowiednich dla koncentratu ($< 1,5 \text{ Mg/m}^3$) w koncentracie, dla produktu pośredniego ($1,5 - 1,8 \text{ Mg/m}^3$) w produkcji pośrednim i dla odpadów ($> 1,8 \text{ Mg/m}^3$) w odpadach.

Im większa wartość uzysku ε tym dokładniejszy rozdział. Wskaźnik ten stosuje się dla porównania wyników wzbogacania w osadzarce z innymi metodami rozdziału.

- **Sumaryczne zanieczyszczenie produktów rozdziału** zdefiniowane następująco:

$$\sum \alpha = \alpha_k + \alpha_{pp} + \alpha_o \quad (6.21)$$

gdzie: $\alpha_k, \alpha_{pp}, \alpha_o$ - ilość obcych frakcji odpowiednio w koncentracie, produkcji pośrednim i odpadach mierzona w stosunku do nadawy w %.

Im mniejsza wartość wskaźnika $\sum \alpha$ tym dokładniejszy jest rozdział. Wskaźnik ten stosuje się dla porównania wyników wzbogacania w różnych osadzarkach.

Następujące wyrażenie $\eta = \ln \frac{100}{\sum \alpha}$ nosi nazwę dokładności rozdziału. Jest ona związana

ze stałą prędkości rozdziału wyrażeniem $\eta = k \cdot t$ (t – czas trwania rozdziału) oraz wydajnością według następującego wzoru:

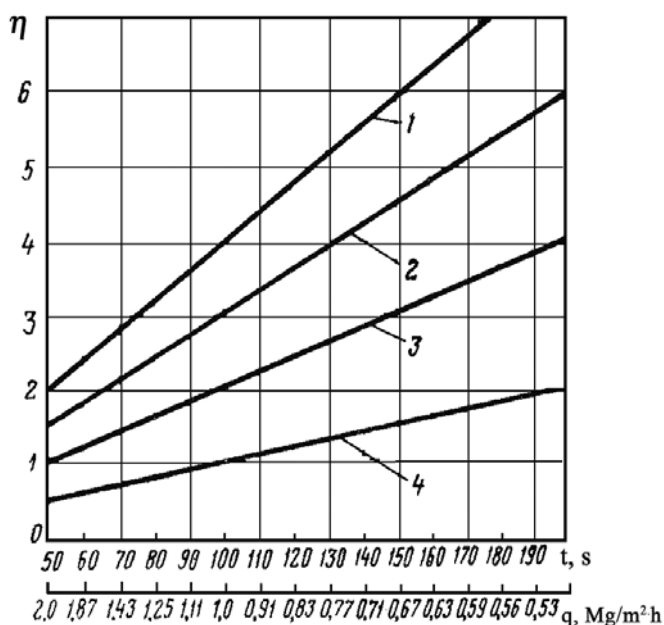
$$Q = \frac{3600 \rho_{sr} b h l k}{\eta} \quad (6.22)$$

gdzie: Q – wydajność osadzarki, ρ_{sr} - średnia gęstość nasypowa warstwy łoża, b, h, l – odpowiednio szerokość, wysokość i długość łoża osadzarki, k – stała prędkości rozdziału.

Jak wynika ze wzoru (6.22), im większa dokładność rozdziału, tym mniejsza musi być wydajność osadzarki. Wydajność właściwa osadzarki zdefiniowana jest następująco:

$$q = \frac{Q}{bl} = \frac{3600 \rho_{sr} h}{t} = \frac{3600 \rho_{sr} h k}{\eta} \quad (6.23)$$

Na rys. 6.8 podana jest zależność dokładności rozdziału od czasu trwania rozdziału oraz wydajności właściwej q dla różnych wartości stałej prędkości rozdziału. Jak wynika z rys. 6.8 im dłuższy czas trwania rozdziału, tym większa wartość η , czyli tym większa dokładność rozdziału.



Rys. 6.8. Zależność dokładności rozdziału od czasu trwania i wydajności procesu: 1 - 4 stała prędkości rozdziału odpowiednio dla 0,04; 0,03; 0,02 i 0,01[1/s] (Samylin, 1976)

7. CEL I ZAKRES PRACY

Podana w poprzednich rozdziałach charakterystyka i specyfika procesu rozdziału w osadzarce obrazuje złożoność tego procesu i jego zależność od wielu czynników. Istnieje wiele teorii rozdziału, z których każda przybliża tylko pewien fragment zjawisk zachodzących w komorze roboczej osadzarki. Jak dotąd brak jest jednej zwartej teorii uwzględniającej wpływ wszystkich istotnych czynników na wyniki rozdziału. Trudność w opracowaniu takiej teorii związana jest z tym, że rozdział zbioru ziaren na podzbiory różniące się właściwościami fizycznymi zachodzi w ośrodku, który tworzą same ziarna niejednorodne pod względem właściwości fizycznych i geometrycznych. Następuje proces rozwarstwienia (stratyfikacji) zbioru niejednorodnego pod wpływem dynamicznego oddziaływania z pulsującym prądem cieczy. Jednocześnie proces przebiega w kierunku minimalizacji energii potencjalnej układu. Konieczność minimalizacji energii potencjalnej niejednorodnego pod względem właściwości fizycznych i geometrycznych układu ziaren w pulsującym prądzie cieczy prowadzi do wniosku, że wielkość różnicująca (dzieląca) zbiór ziaren na podzbiory powinna zawierać w sobie własności fizyczne i geometryczne ziarna oraz własności cieczy i charakter jej ruchu. Wielkością spełniającą powyższe wymagania jest graniczna prędkość opadania swobodnego ziarna. Od stopnia niejednorodności (zróżnicowania) zbioru ziaren ze względu na prędkość opadania będzie zależało tempo przebiegu procesu rozwarstwienia, a przy ustalonym czasie trwania rozdziału i ustalonym reżimie ruchu pulsacyjnego, dokładność rozdziału. Stopień niejednorodności prędkości opadania ziaren w próbce jest zależny od charakteru rozkładu prędkości opadania, na który z kolei mają wpływ rozkłady gęstości oraz rozkłady własności geometrycznych ziarna, czyli średnicy projekcyjnej i współczynników kształtu. **Z tego względu pierwszym celem pracy było opracowanie metodyki wyznaczania rozkładu prędkości opadania ziaren nieregularnych w próbce. Temu problemowi poświęcono w pracy najwięcej uwagi.**

Wyniki badań empirycznych procesów rozdzielczych syntetycznie ujmuje się w postaci krzywej rozdziału. Jej przebieg powinien zależeć od czynników mających wpływ na proces rozdziału. Matematyczna postać krzywej rozdziału powinna zawierać w sobie jako parametry: wskaźnik oceny dokładności rozdziału (rozproszenie prawdopodobne) i jego zależność od czynników wpływających na proces oraz wartość podziałową argumentu rozdziału. Wtedy z dopasowania modelowej krzywej rozdziału do krzywej empi-

rycznej można uzyskać wartość rozproszenia prawdopodobnego oraz wartość podziałową argumentu rozdziału. Te dwie wielkości stanowią podstawę do oceny wpływu rozkładu własności fizycznych i geometrycznych na dokładność rozdziału. **W związku z tym drugim celem pracy było opracowanie fizycznego modelu funkcji rozdziału bazującego na podobieństwie (analogii) zjawisk zachodzących w komorze roboczej osadzarki i fizyce statystycznej cząsteczek gazu oraz weryfikacja empiryczna tej funkcji na podstawie eksperymentu przemysłowego.** Przy takim heurystycznym podejściu można uzyskać funkcyjną postać zależności rozproszenia prawdopodobnego od czynników wpływających na proces. Ułatwia to analizę wpływu tych czynników na dokładność rozdziału.

Trzecim i tytułowym celem pracy jest ocena wpływu rozkładu właściwości fizycznych i geometrycznych na dokładność rozdziału. Na podstawie wyników densymetrycznych i granulometrycznych próbek nadawy i produktów rozdziału z osadzarki przemysłowej oraz pomiarów współczynników kształtu i średnicy projekcyjnej wyznaczono rozkłady gęstości, średnicy projekcyjnej oraz współczynników kształtu, a następnie w oparciu o opracowany algorytm wyliczono rozkłady prędkości opadania dla wybranych klas monodispersyjnych ziaren sferycznych oraz jednej klasy monodispersyjnych ziaren nieregularnych. Posługując się rozkładami prędkości opadania w odpadach i nadawie wyliczono liczby rozdziału, do których dopasowano dystrybucję rozkładu normalnego uzyskując wartości prędkości podziałowej, rozproszenia prawdopodobnego i imperfekcji dla monodispersyjnej próbki ziaren nieregularnych. Korzystając ze wzoru (6.17) wyliczono wartości imperfekcji dla monodispersyjnej próbki ziaren sferycznych. Z porównania wartości imperfekcji uzyskano informację o wpływie rozkładu kształtu ziaren i rozkładu gęstości na dokładność rozdziału. Analogiczne badania przeprowadzono dla próbek polidispersyjnych ziaren nieregularnych i sferycznych, z których określono wpływ rozkładu wielkości ziarna na dokładność rozdziału.

II. BADANIA WŁASNE

8. FIZYCZNY MODEL FUNKCJI ROZDZIAŁU

8.1. Mechanizm rozdziału i rozproszenia

Jak było wyjaśnione w rozdziale 5 argumentem rozdziału w osadzarce jest prędkość opadania. Rozwarstwienie ziaren na frakcje (warstwy) elementarne następuje według prędkości opadania. Mechanizmem generującym taki rozdział jest ruch pulsacyjny cieczy.

Ruch ziaren w łożu osadzarki jest procesem losowym. Wartość zmiennej losowej oznaczającej położenie ziarna wzdłuż osi pionowej w stanie niestacjonarnym jest funkcją czasu. Ziarna przemieszczają się względem siebie pod wpływem sił deterministycznych, wynikających z ruchu pulsacyjnego, doznając zderzeń. Te oddziaływania w momencie zderzeń są źródłem rozproszenia ziaren wokół centrów grupowania, będącego funkcją czasu, gdyż natężenie ruchu deterministycznego ziaren jest funkcją czasu. Gdyby prędkość ruchu pulsacyjnego była jednorodna w całej objętości przestrzeni roboczej osadzarki i nie było żadnych oddziaływań pomiędzy ziarnami, to w stanie stacjonarnym, czyli po dokonanych rozdziale osiągnięty by został stan idealnego rozwarstwienia według prędkości opadania. Tak jednak nie jest. Na skutek niejednorodności pola prędkości cieczy w kierunku pionowym łoża osadzarki występuje przenikanie ziaren do niewłaściwych sobie warstw. Można, więc powiedzieć, że mamy do czynienia z dwoma niezależnymi procesami losowymi. Jeden związany z niejednorodnością pola prędkości cieczy, niezależny od czasu i drugi związany ze zderzeniami ziaren w trakcie deterministycznego ruchu ziaren o różnych właściwościach do swoich warstw równowagi, zależny od czasu. Ten drugi ruch opisuje równanie Fokkera-Plancka przedstawione w rozdziale 3. Ruch ten charakteryzuje się przemieszczaniem się centrów grupowania ziaren o określonych prędkościach opadania do swoich warstw równowagi oraz rozproszeniem tych ziaren do warstw sąsiednich wokół centrów grupowania, zależnym od czasu. Mechanizmy rozproszenia ziaren w obu przypadkach są podobne. Są to oddziaływania ziaren na skutek zderzeń. Jednakże źródła tych zderzeń są odmienne. W pierwszym przypadku źródłem zderzeń jest niejednorodność pola prędkości cieczy, natomiast w drugim przypadku źródłem zderzeń są deterministyczne ruchy ziaren o różnych właściwościach fizycznych i geometrycznych, od których zależy wartość i zwrot składowej pionowej

prędkości. Po rozwarstwieniu ziaren według prędkości opadania ruch ten ustaje i ta składowa rozproszenia ziaren jest równa zero. Zostaje natomiast pierwsza składowa rozproszenia, która jest obecna zawsze, gdy istnieje pulsacyjny ruch cieczy pomiędzy ziarnami. Świadczą o tym fakty doświadczalne przytoczone w rozdziale 3 według których odchylenie standardowe ziaren o określonych właściwościach wokół swoich centrów równowagi maleje z czasem, jednakże nie do zera, lecz po długim czasie separacji osiąga wartość stałą.

Przez stan ustalony (stacjonarny) układu ziaren w komorze osadzarki rozumie się stan, w którym centra grupowania nie zmieniają już swego położenia z upływem czasu. Wtedy energia potencjalna układu byłaby minimalna, gdyby nie było losowych przemieszczeń ziaren związanych z niejednorodnością pola prędkości cieczy.

Każdy z wymienionych wyżej procesów losowych generuje niezależne od siebie rozkłady prędkości ziaren. Można więc założyć, że zmienna losowa oznaczająca prędkość ziarna w komorze osadzarki jest sumą dwóch niezależnych zmiennych losowych:

$$W = W_1 + W_2 \quad (8.1)$$

gdzie: W_1 - zmienna losowa prędkości ziarna uwarunkowana niejednorodnością pola prędkości cieczy, niezależna od czasu, W_2 - składowa losowa prędkości ziarna uwarunkowana ruchem centrów grupowania ziaren, zależna od czasu.

Zmienne losowe W_1 i W_2 mają rozkłady normalne (jako rozkłady składowej pionowej prędkości ziarna). W związku z tym suma (kompozycja) dwóch niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych będzie miała rozkład normalny, którego wariancja jest równa (Gerstenkorn i Śródka, 1972):

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \quad (8.2)$$

gdzie: σ_1 - odchylenie standardowe rozkładu zmiennej losowej W_1 , niezależne od czasu, σ_2 - odchylenie standardowe rozkładu zmiennej losowej W_2 zależne od czasu.

Odchylenie standardowe w ogólnym przypadku jest zależne od własności geometrycznych ziaren, średniej gęstości ziaren, czasu trwania rozdziału i warunków hydrodynamicznych rozdziału (Rafales – Lamarka, 1962).

8.2. Oddziaływanie rozpraszające i wariancja rozkładu prędkości ziaren w stanie stacjonarnym

Siła pod wpływem, której ziarna uzyskują dodatkową energię kinetyczną jest siłą oddziaływania pomiędzy ziarnami. Jest ona równa zmianie pędu ziarna w jednostce czasu:

$$F_T = \rho V \frac{v_p}{t} \quad (8.3)$$

gdzie: ρ - gęstość ziarna, V - objętość ziarna, t - średni czas pomiędzy zderzeniami, v_p - prędkość średnia kwadratowa ziarna uwarunkowana niejednorodnością pola prędkości cieczy.

Średni czas pomiędzy zderzeniami jest równy:

$$t = \frac{\lambda}{v_p} \quad (8.4)$$

gdzie: λ - średnia droga przebyta przez ziarno między zderzeniami (średnia droga swobodna) równa:

$$\lambda = \frac{1}{nS} \quad (8.5)$$

gdzie: n - liczba ziaren w jednostce objętości.

Ponieważ liczba ziaren w jednostce objętości wyraża się wzorem:

$$n = \frac{C}{V} = \frac{6C}{k_1 \pi d_p^3} \quad (8.6)$$

W związku z tym średnia droga swobodna jest równa:

$$\lambda = \frac{2}{3} \frac{k_1 d_p}{k_2 C} \quad (8.7)$$

gdzie: C - koncentracja objętościowa ziaren w łóżu osadzarki, k_1 - objętościowy współczynnik kształtu.

W związku z tym średni czas między zderzeniami po uwzględnieniu wyrażenia (8.7) jest następujący:

$$t = \frac{2k_1 d_p}{3k_2 C v_p} \quad (8.8)$$

Po podstawieniu wyrażenia (8.8) do wzoru (8.4) otrzymuje się:

$$F_T = \frac{\pi}{4} \rho k_2 v_p^2 d_p^2 C = 0,78 \rho k_2 v_p^2 d_p^2 C \quad (8.9)$$

Siła ta jest zależna od gęstości ziaren. Jeżeli przyjmie się, że prędkość średnia kwadratowa ruchu ziarna jest proporcjonalna do dodatkowej, losowej wartości prędkości cieczy v_c uwarunkowanej niejednorodnością pola prędkości lokalnymi turbulencjami, czyli $v_p = b v_f$ (b – współczynnik proporcjonalności) oraz uwzględni, że $C = 1 - \theta$ (θ – współczynnik rozluźnienia) wówczas:

$$F_T = 0,78 k_2 \rho b v_f^2 d_p^2 (1 - \theta) \quad (8.10)$$

Widać ze wzoru (8.10), że im większy stopień rozluźnienia, tym mniejsza siła oddziaływania pomiędzy ziarnami.

Następujący iloczyn:

$$F_T \cdot \lambda = W_L \quad (8.11)$$

przedstawia pracę siły rozpraszającej na odcinku równym średniej drodze swobodnej ziarna.

Wobec tego wariancja σ_1^2 rozkładu prędkości ziaren w stanie stacjonarnym jest równa (Smirnova, 1980):

$$\sigma_1^2 = \frac{F_T \lambda}{m} = \frac{0,78 k_2 \rho b v_f^2 d_p^2 (1 - \theta) \lambda}{m} \quad (8.12)$$

gdzie: $m = k_1 \frac{\pi d_p^3}{6} \rho$ – masa ziarna.

Po podstawieniu za m do wzoru (8.12) uzyskuje się:

$$\sigma_1^2 = \frac{1,5 k_2 b v_f^2 (1 - \theta) \lambda}{k_1 d_p} \quad (8.13)$$

8.3. Wariancja uwarunkowana ruchem centrów grupowania ziaren

Jak wiadomo z doświadczenia odchylenie standardowe charakteryzujące rozproszenie ziaren o danych własnościach wokół centrów grupowania maleje z upływem czasu trwania rozdziału (rys. 3.7). Zależność wariancji od czasu wyprowadzona na gruncie procesów stochastycznych jest następująca (zmodyfikowany wzór 3.16):

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{2} z_{\max}^2 k^2 e^{-kt} = \frac{1}{2} z_{\max}^2 k^2 e^{-\eta} \quad (8.14)$$

Występująca we wzorze (8.14) stała k przedstawia właściwą prędkość przemieszczania się centrum grupowania (stałą prędkości rozdziału) ziaren o danych własnościach fizycznych i geometrycznych do swojej warstwy równowagi. Jej wartość powinna być proporcjonalna do prędkości ruchu ziaren w warunkach ruchu skrapowanego $v_{s\max}$, gdyż im większa jest prędkość ruchu tych ziaren, tym szybciej centrum grupowania przemieszcza się do swojej warstwy równowagi oraz powinna być odwrotnie proporcjonalna do odległości położenia warstwy równowagi od poziomu podawania nadawy. Przy ustalonym czasie trwania rozdziału zdeterminowanym wydajnością procesu, dalej oddalone warstwy równowagi będą bardziej rozmyte i granica pomiędzy centrami równowagi ziaren o różnych własnościach mniej ostra.

Uwzględniając powyższe uwagi założono, że analogicznie jak we wzorze (3.16) stała prędkości rozdziału jest równa:

$$k = \frac{v_{s\max}}{z_{\max}} \quad (8.15)$$

gdzie: $v_{s\max}$ - maksymalna prędkość ruchu ziarna w warunkach skrapowanych.

Prędkość ruchu ziarna w warunkach skrapowanych jest związana z prędkością opadania swobodnego v . Dla liczb Reynoldsa $Re > 400$ i stopnia rozluźnienia θ z przedziału (0,5-1,0) jest to następująca zależność (Minc, 1953):

$$v_{s\max} = \left[-0,362(1-\theta) + \sqrt{[0,362(1-\theta)]^2 + \theta^3} \right] v \quad (8.16)$$

Po uwzględnieniu powyższego związku oraz wzoru (5.49) stała prędkości separacji wyraża się wzorem:

$$k = \frac{5,33 \sqrt{x d_p \frac{k_1}{k_2}}}{z_{\max}} \left[-0,362(1-\theta) + \sqrt{[0,362(1-\theta)]^2 + \theta^3} \right] \quad (8.17)$$

Wstawiając do wyrażenia (8.14) za η ze wzoru (6.23) otrzymuje się:

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{2} z_{\max}^2 k^2 \exp \left[-\frac{3600 \rho_{sr} h k}{q} \right] \quad (8.18)$$

8.4. Funkcja rozproszenia

W stanie niestacjonarnym układu ziaren w komorze osadzarki na ruch ziaren uwarunkowany działaniem sił deterministycznych nakłada się ruch o charakterze losowym, wynikający ze zderzeń pomiędzy ziarnami. Lokalne turbulencje powstające w przestrzeniach międzyziarnowych przekazują energię wirów stykającym się z nimi ziarnom (Vinogradov, 1965, za Samylin 1976). Jest to źródłem dodatkowego losowego przemieszczenia się ziaren względem siebie. Efektem tej losowej, dodatkowej energii kinetycznej jest rozkład prędkości ruchu ziaren wokół wartości najbardziej prawdopodobnej.

Założono, że rozkład losowej składowej prędkości ziarna wzdłuż osi pionowej (osi z), czyli funkcja rozproszenia ma rozkład Maxwella składowej prędkości (Smirnova, 1980):

$$t(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left[-\frac{(v - v_r)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (8.19)$$

gdzie: v_r - wartość najbardziej prawdopodobna prędkości ziarna ($v_r = v_{Ir} + v_{2r}$), natomiast $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Jest to, więc rozkład normalny. Uwzględniając zależności (8.13) i (8.18) wariancja jest równa:

$$\sigma^2 = \frac{1,5 k^2 b v_f^2 (1-\theta) \lambda}{k_1 d_p} + \frac{1}{2} z_{\max}^2 k^2 \exp \left[-\frac{3600 \rho_{sr} h k}{q} \right] \quad (8.20)$$

Po długim czasie rozdziału (teoretycznie nieskończenie długim), uwzględniając wzór (8.14):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma^2 = \sigma_1^2 = \frac{1,5k_2bv_f^2(1-\theta)\lambda}{k_1d_p} \quad (8.21)$$

Jest to wariancja w stanie stacjonarnym. Gdy prędkość v_f zmierza do zera, czyli gdy wartość siły rozpraszającej zmierza do zera, wówczas odchylenie standardowe σ_1 zmierza do zera. Funkcja rozproszenia dla takiej sytuacji, czyli następująca granica:

$$\lim_{\sigma_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{(v-v_r)^2}{2\sigma_1^2}\right] = \delta(v-v_r) \quad (8.22)$$

jest równa funkcji δ - Diraca (Byron i Fuller, 1975), czyli:

$$\lim_{v_f \rightarrow 0} t(v) = \delta(v-v_r) \quad (8.23)$$

Oznacza to, że wszystkie ziarna o prędkości opadania v_r znajdują się w swojej warstwie równowagi.

8.5. Funkcja rozdziału i rozproszenie prawdopodobne

Funkcję rozdziału określającą prawdopodobieństwo przedostania się ziarna o prędkości granicznej v do odpadów (w przypadku węgla) przedstawia wzór:

$$T(v) = \int_{-\infty}^v t(v)dv = \int_{-\infty}^v \exp\left[-\frac{(v-v_r)^2}{2\sigma^2}\right]dv = \phi\left(\frac{v-v_r}{\sigma}\right) \quad (8.24)$$

gdzie: ϕ - funkcja Laplacea.

Funkcja rozdziału wyrażona wzorem (8.24) stanowi dystrybuantę rozkładu normalnego. Na rys. 8.1 przedstawiono postacie krzywej rozdziału dla trzech wartości prędkości v_f w stanie stacjonarnym.

Rozproszenie prawdopodobne będące miarą dokładności rozdziału jest zgodnie z definicją równe:

$$E_p = \frac{v(T=0,75) - v(T=0,25)}{2} \quad (8.25)$$

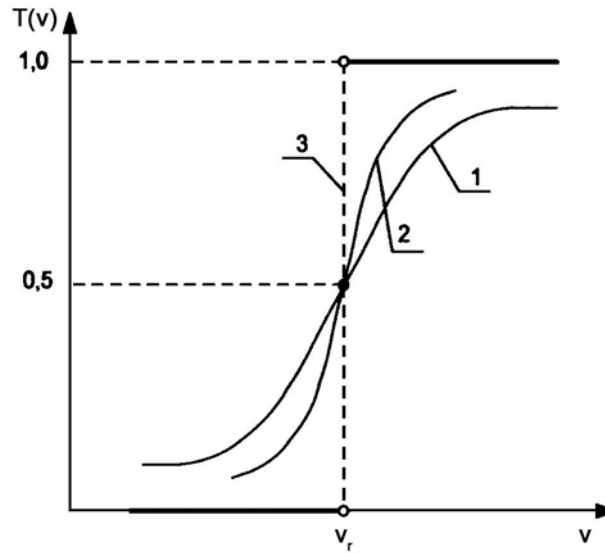
Jest to tzw. odchylenie ćwiartkowe równe połowie różnicy między trzecim i pierwszym kwartylem i dla rozkładu normalnego jest ono równe:

$$E_p = 0,67\sigma \quad (8.26)$$

Uwzględniając (8.20) rozproszenie prawdopodobne wyraża się wzorem:

$$E_p = 0,67 \sqrt{\frac{1,5k_2bv_f^2(1-\theta)\lambda}{k_1d_p} + \frac{1}{2}z_{\max}^2k^2 \exp\left(-\frac{3600\rho_{sr}hk}{q}\right)} \quad (8.27)$$

Jak wynika ze wzorów (8.27) i (8.17) rozproszenie prawdopodobne w ogólnym przypadku zależy od własności fizycznych i geometrycznych ziarna, wysokości łoża, wydajności właściwej, warunków hydrodynamicznych rozdziału (poprzez θ). Maleje ze wzrostem wielkości ziarna, stopnia rozluźniania łoża i stałej prędkości separacji, natomiast rośnie ze wzrostem wysokości łoża i wzrostem wydajności właściwej. Zależy również od kształtu ziaren mieszaniny. Zależność rozproszenia prawdopodobnego od wielkości ziarna jak $\frac{1}{\sqrt{d}}$ w procesach, w których argumentem rozdziału jest prędkość opadania (osadzarki, hydrocyklony) znajduje potwierdzenie doświadczalne (Zarubin i inni, 1978).



Rys. 8.1. Krzywa rozdziału dla trzech wartości prędkości: $v_{1f} > v_{2f}$, $v_{3f} = 0$

Dla stanu stacjonarnego:

$$E_p = 0,82v_f \sqrt{\frac{k_2b(1-\theta)\lambda}{k_1d_p}} \quad (8.28)$$

Gdy prędkość v_f rośnie, wówczas zgodnie ze wzorem (8.21) rośnie odchylenie standardowe σ_1 . W związku z tym przy nieograniczonym wzroście prędkości v_f :

$$\lim_{v_f \rightarrow \infty} T(v) = \frac{1}{2} \quad (8.29)$$

Krzywa rozdziału ma, więc postać linii poziomej, równoległej do osi odciętych. Jest to równoznaczne z brakiem rozdziału. Sytuacja taka może mieć miejsce w przypadku rozdziału drobnych ziaren przy zbyt dużej częstotliwości, dużej amplitudzie ruchu pulsacyjnego i dużym stopniu rozluźnienia.

W stanie stacjonarnym rozproszenie ziaren jest związane z istnieniem oddziaływań pomiędzy ziarnami uwarunkowanych niejednorodnością pola prędkości cieczy w łóżu osadzarki charakteryzowanej wartością v_f . Przy nieobecności oddziaływań, czyli dla rozdziału idealnego funkcja rozdziału z uwzględnieniem zależności (8.23) wyraża się następującym wzorem (Byron i Fuller, 1975):

$$T(v) = \int_{-\infty}^v t(v) dv = \int_{-\infty}^v \delta(v - v_r) dv = H(v - v_r) \quad (8.30)$$

gdzie: $H(v - v_r)$ - funkcja Heaviside'a.

Funkcja Heaviside'a określona jest następująco:

$$H(v - v_r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } v < v_r \\ 1 & \text{dla } v > v_r \end{cases} \quad (8.31)$$

Uwzględniając fakt, że według wzoru (8.24) $T(v = v_r) = \frac{1}{2}$ funkcja rozdziału przy idealnym rozwarstwieniu przedstawia się następująco:

$$T(v) = \begin{cases} 0 & \text{dla } v < v_r \\ \frac{1}{2} & \text{dla } v = v_r \\ 1 & \text{dla } v > v_r \end{cases} \quad (8.32)$$

Na rys. 8.1 przedstawiony jest wykres krzywej rozdziału opisanej wzorem (8.32) (krzywa 3). Jest to, więc krzywa dla rozdziału idealnego. Jej równanie wynika wprost z równania ogólnego funkcji rozproszenia i funkcji rozdziału poprzez przejście graniczne odpowiadające warunkowi rozdziału idealnego. Ziarna o prędkości opadania $v = v_r$ z

jednakowym prawdopodobieństwem równym $\frac{1}{2}$ trafiają do koncentratu i do odpadów.

Rozproszenie prawdopodobne jest równe zero.

Stan, w którym niejednorodny pod względem własności fizycznych i geometrycznych materiałów w łóżu osadzarki jest rozwarstwiony idealnie ze względu na prędkość opadania, jest stanem o najniższej energii potencjalnej. Wynika to z energetycznej teorii Mayera. Gdyby materiał rozdzielił się na frakcje densymetryczne, a oprócz tego każda frakcja na klasy ziarnowe według piramidy uziarnienia od największej do najmniejszej, wówczas porowatość warstwy byłaby największa, a zatem wysokość warstwy byłaby większa niż przed rozdziałem (Kuprin i inni, 1983). W związku z tym, po takim rozdziale energia potencjalna byłaby większa niż przed rozdziałem. Jest to sprzeczne z zasadą najmniejszego działania w myśl, której procesy przebiegają w kierunku minimalnej energii potencjalnej układu. Zmniejszenie porowatości nastąpi wtedy, gdy puste miejsca pomiędzy ziarnami większymi zajmą ziarna mniejsze. Będzie to miało miejsce w sytuacji, gdy w idealnie rozwarstwowanym materiale, jak wyżej, ziarna mniejsze o większej gęstości przejdą do wyższej subwarstwy ziaren większych o mniejszej gęstości lub na odwrót. Pojawi się idealne rozwarstwienie według prędkości opadania, którego skutkiem jest zjawisko rozproszenia ziaren o danej gęstości do innych warstw. Jest to tzw. rozproszenie wrodzone. Można, więc powiedzieć, że z fizycznego punktu widzenia rozproszenie wrodzone wynika z zasady minimalizacji energii potencjalnej układu ziaren niejednorodnych pod względem własności fizycznych i geometrycznych. Jest ono obecne zawsze wtedy, gdy rozdziela się w osadzarce lub w innych urządzeniach rozdzielczych niejednorodne pod względem własności geometrycznych mieszanki ziaren mineralnych, gdzie argumentem rozdziału jest prędkość opadania. Gdyby ziarna nadawcy były ziarnami kulistymi o tych samych średnicach, wówczas przy idealnym rozdziale nie byłoby rozproszenia ziaren do niewłaściwych sobie warstw i wartość rozproszenia wrodzonego byłaby równa zero.

Rozproszenie wrodzone stanowi pierwszy mechanizm rozproszenia ziaren o danej gęstości do innych warstw. Drugim mechanizmem rozproszenia są wzajemne zderzenia ziaren między sobą na skutek niejednorodności pola prędkości cieczy. Jest to tzw. rozproszenie procesowe, które jest obecne zawsze bez względu na to, jaka wielkość fizyczna jest argumentem rozdziału (gęstość czy prędkość rozdziału). Jeżeli rozdziela się materiał niejednorodny pod względem własności fizycznych i geometrycznych wówczas argumentem rozdziału jest prędkość opadania. Analizując wyniki rozdziału na podsta-

wie tego argumentu otrzymuje się mniejszą wartość rozproszenia prawdopodobnego, gdyż nie ma w tym przypadku rozproszenia wrodzonego. Natomiast, przy analizie wyników rozdziału takiego materiału z zastosowaniem w charakterze argumentu rozdziału gęstości ziarna, uzyskuje się większą wartość rozproszenia, gdyż jest ono sumą rozproszenia wrodzonego i rozproszenia procesowego.

9. OPIS EKSPERYMENTU

9.1. Opróbowanie osadzarki przemysłowej

Celem badań eksperymentalnych było określenie rozkładów prędkości opadania ziaren w nadawie i odpadach oraz weryfikacja modelowej funkcji rozdziału. Badania przeprowadzono w dwóch etapach. Pierwszy etap polegał na opróbowaniu osadzarki przemysłowej dwuproduktowej firmy Allmineral, o powierzchni roboczej równej 17 m², pracującej w zakładzie przeróbki mechanicznej jednej z kopalń węgla kamiennego. Wykonano trzy eksperymenty przy założeniu, że nadawy do każdego eksperymentu pochodzące z różnych pokładów eksploatacyjnych kopalni różnią się między sobą składem granulometrycznym i densymetrycznym. Doświadczenia wykonano przy zachowaniu stałej liczby pulsacji, która wynosiła 26 cykli na minutę. Wydajność systemu, czyli natężenie przepływu nadawy wynosiło 500 Mg/h, a dopływ wody dolnej 218 m³/h we wszystkich doświadczeniach. Położenie progu przelewowego dzielącego materiał na koncentrat i odpady ustalono na poziomie 24 % całej wysokości łoża. Przy tak określonych parametrach, po ustabilizowaniu procesu, pobierano próbki nadawy, koncentratu i odpadów w ciągu 3 minut każdą równocześnie w poszczególnych doświadczeniach. Następnie każdy z produktów rozdziału (koncentratu i odpadów) poddano analizie densymetrycznej i granulometrycznej. Analizę densymetryczną wykonano w roztworach chlorku cynku o gęstościach odpowiednio: 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 2,0 Mg/m³. Każdą frakcję densymetryczną rozsiano na sitach o wielkości oczek: 2,0; 3,15; 5,0; 6,3; 8,0; 10,0; 12,5; 16,0; 20,0 mm. W ten sposób uzyskano 160 klaso-frakcji z każdego doświadczenia. W sumie z trzech doświadczeń uzyskano 480 klaso-frakcji. Po wstępnym obrobieniu danych i wyliczeniu rozkładów prędkości opadania ziaren w każdej nadawie stwierdzono, że rozkłady prędkości opadania nie różnią się między sobą w sposób istotny. Dlatego też do dalszych rozważań wzięto pod uwagę skumulowaną nadawę z po-

szczególnych doświadczeń. Wychody masowe klaso-frakcji skumulowanej nadawy zestawiono w tabeli **9.1**.

W próbce nadawy wyznaczono średnią zawartość popiołu, która wynosiła 51,34%. Ponadto z nadawy wydzielono cztery klasy ziarnowe: 16 – 20 mm; 12,5 – 16 mm; 10 – 12,5 mm i 8 – 10 mm, w których wykonano pomiary średnicy projekcyjnej. Poza tym na losowej próbce ziaren nadawy w klasie 8 – 20 mm o liczności 305 ziaren wykonano pomiary objętościowego i dynamicznego współczynnika kształtu.

Tabela 9.1. Wychody masowe poszczególnych klaso-frakcji produktów rozdziału [g]

Klasa [mm]	Fracje densymetryczne [Mg/m ³]															
	-1,3		1,3 – 1,4		1,4 – 1,5		1,5 – 1,6		1,6 – 1,7		1,7 – 1,8		1,8 – 2,0		+2	
	K	O	K	O	K	O	K	O	K	O	K	O	K	O	K	O
-2	1056,1	62,2	455,7	102,8	317,1	107,7	15,9	84,5	9,4	292,4	4,4	430,9	5,7	1227,1	9,8	2710,2
2,0 – 3,15	1471,7	120,0	508,9	81,6	217,2	96,7	14,6	81,5	8,3	269,8	6,3	434,6	8,3	690,4	8,3	1962,3
3,15 – 5,0	3198,7	199,2	1084,1	168,4	445,5	170,0	36,7	162,1	18,6	534,3	15,2	963,5	18,1	1352,2	15,8	4691,5
5,0 – 6,3	1356,5	78,2	444,3	79,7	176,2	59,9	16,6	61,0	8,2	164,5	8,5	291,1	10,1	583,4	5,9	2685,8
6,3 – 8,0	2191,2	102,1	641,8	90,9	362,2	78,4	31,6	77,5	17,1	203,1	14,0	442,1	11,9	1207,8	8,2	4682,2
8,0 – 10,0	1767,0	36,5	787,5	46,7	346,9	39,7	28,8	53,9	12,8	179,9	12,2	263,2	15,8	1094,4	7,4	3211,1
10,0 – 12,5	1843,3	16,2	719,3	34,0	455,3	44,3	37,8	59,0	21,4	197,2	13,4	377,3	14,9	1409,4	7,9	5947,4
12,5 – 16,0	2175,2	23,2	829,7	31,1	607,3	53,5	52,6	94,0	21,2	254,3	20,3	555,7	12,7	1644,8	7,3	7647,7
16,0 – 20,0	1614,7	13,9	597,6	34,5	524,7	80,7	28,9	107,8	28,9	213,4	12,7	393,5	3,4	1380,6	3,4	5722,2
+20	778,7	0,0	316,2	24,3	182,0	75,6	18,6	62,9	4,7	72,3	8,4	279,2	7,3	824,8	1,9	2582,3

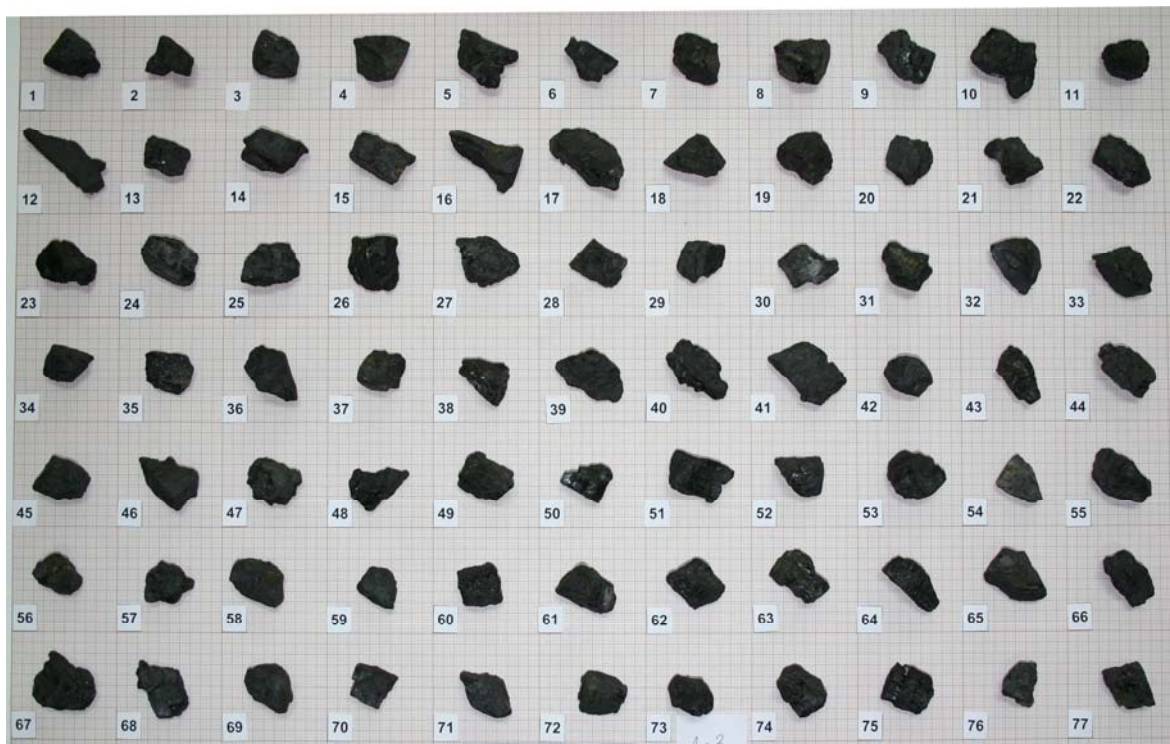
9.2. Pomiar średnicy projekcyjnej i współczynników kształtu ziarna

Objęściowy współczynnik kształtu k_1 wyznaczono w oparciu o metodę wolumetryczną polegającą na pomiarze gęstości poszczególnych ziaren przy pomocy piknometru i wyliczeniu ich objętości. Współczynnik kształtu k_1 obliczono korzystając ze wzoru (5.48).

W celu obliczenia dynamicznego współczynnika kształtu wykonano zdjęcia ziaren aparatem cyfrowym w położeniu najbardziej stabilnym. Na fotografiach 1 i 2 przedstawiono wybrane ziarna z klasy 16 – 20 mm. Następnie, korzystając z programu komputerowego do analizy obrazu wyliczono pola powierzchni i obwody poszczególnych ziaren. Stosując wzór (5.43) wyznaczono współczynniki sferyczności ϕ oraz średnice projekcyjne d_p - wzór (5.39). Stosując zależność (5.42) obliczono dynamiczny współczynnik kształtu k_2 .

Wyniki tych pomiarów zestawiono w tabelach 9.2 – 9.6.

Dane empiryczne przedstawione w tabelach 9.1 – 9.6 stanowią podstawowy materiał do weryfikacji rozkładów prędkości opadania oraz modelu teoretycznego funkcji rozdziału.



Fot. 1.



Fot.2.

Tabela 9.2. Objętościowy (k_1) i dynamiczny (k_2) współczynnik kształtu ziarna

Nr ziarna	Objętość ziarna V_z [m ³] · 10 ⁶	k_1	Współczynnik sferyczności ϕ	k_2
1	2,615	0,398	0,429	10,504
2	2,513	0,642	0,409	11,314
3	3,104	0,518	0,698	4,217
4	2,368	0,318	0,755	3,486
5	2,110	0,259	0,702	4,159
6	1,789	0,437	0,671	4,603
7	2,834	0,427	0,847	2,512
8	3,071	0,390	0,600	5,814
9	2,876	0,419	0,554	6,765
10	3,980	0,312	0,571	6,400
11	2,844	0,565	0,499	8,185
12	3,101	0,307	0,525	7,474
13	2,062	0,469	0,527	7,425
14	3,578	0,461	0,639	5,115
15	3,940	0,517	0,705	4,113
16	2,823	0,316	0,715	3,984
17	4,140	0,305	0,702	4,154
18	2,959	0,525	0,811	2,876

cd. tabeli 9.2

19	3,513	0,447	0,818	2,801
20	1,563	0,266	0,816	2,822
21	2,396	0,416	0,734	3,745
22	3,580	0,499	0,620	5,439
23	2,868	0,367	0,491	8,407
24	3,710	0,462	0,651	4,923
25	3,842	0,505	0,740	3,669
26	2,485	0,251	0,692	4,297
27	2,289	0,254	0,772	3,286
28	1,739	0,311	0,780	3,203
29	1,992	0,408	0,836	2,627
30	2,770	0,441	0,360	13,756
31	3,587	0,626	0,740	3,665
32	2,323	0,316	0,751	3,536
33	3,501	0,434	0,681	4,456
34	2,093	0,495	0,677	4,510
35	1,628	0,284	0,770	3,309
36	3,789	0,525	0,795	3,033
37	2,337	0,459	0,812	2,859
38	2,882	0,569	0,597	5,875
39	2,194	0,229	0,778	3,220
40	3,182	0,373	0,709	4,071
41	2,985	0,232	0,780	3,197
42	2,826	0,608	0,841	2,578
43	1,918	0,369	0,758	3,453
44	3,979	0,549	0,693	4,279
45	3,953	0,627	0,714	4,000
46	2,736	0,345	0,748	3,572
47	2,227	0,318	0,814	2,838
48	1,310	0,236	0,713	4,004
49	3,484	0,510	0,798	3,011
50	2,313	0,645	0,417	10,981
51	3,326	0,379	0,706	4,106
52	2,608	0,559	0,603	5,750
53	3,239	0,399	0,814	2,845
54	1,625	0,380	0,772	3,287
55	3,269	0,384	0,774	3,273
56	2,086	0,476	0,719	3,931
57	2,006	0,415	0,840	2,587
58	2,747	0,385	0,806	2,920
59	1,834	0,528	0,844	2,544
60	2,201	0,415	0,803	2,958
61	3,407	0,479	0,702	4,153
62	3,062	0,475	0,753	3,513
63	3,137	0,473	0,625	5,354
64	2,257	0,415	0,635	5,183
65	3,298	0,387	0,711	4,033

cd. tabeli 9.2

66	2,768	0,443	0,736	3,714
67	2,700	0,246	0,829	2,690
68	1,835	0,252	0,752	3,523
69	2,860	0,492	0,861	2,387
70	2,130	0,513	0,760	3,422
71	2,874	0,539	0,770	3,313
72	2,906	0,519	0,844	2,548
73	2,201	0,530	0,788	3,110
74	2,807	0,469	0,814	2,841
75	2,537	0,395	0,631	5,253
76	1,794	0,559	0,745	3,603
77	2,006	0,356	0,781	3,189
78	3,131	0,395	0,699	4,194
79	3,115	0,376	0,824	2,739
80	3,730	0,431	0,776	3,245
81	3,467	0,498	0,726	3,843
82	4,420	0,462	0,685	4,401
83	2,313	0,499	0,806	2,921
84	1,436	0,255	0,811	2,870
85	2,508	0,486	0,746	3,591
86	2,720	0,479	0,825	2,731
87	3,201	0,347	0,806	2,925
88	1,997	0,404	0,809	2,893
89	1,819	0,339	0,788	3,110
90	1,818	0,395	0,803	2,958
91	2,032	0,445	0,850	2,489
92	1,928	0,431	0,850	2,491
93	2,926	0,535	0,714	3,999
94	2,155	0,301	0,849	2,501
95	2,153	0,498	0,789	3,100
96	2,239	0,405	0,654	4,872
97	2,567	0,390	0,711	4,042
98	2,189	0,504	0,846	2,525
99	1,866	0,350	0,850	2,492
100	3,720	0,491	0,785	3,143
101	4,343	0,375	0,416	11,033
102	2,902	0,298	0,532	7,303
103	2,593	0,432	0,716	3,975
104	1,885	0,350	0,662	4,738
105	1,806	0,401	0,653	4,886
106	3,215	0,615	0,725	3,848
107	2,654	0,323	0,584	6,121
108	2,487	0,509	0,724	3,870
109	1,826	0,347	0,769	3,324
110	2,357	0,359	0,797	3,018
111	3,385	0,352	0,470	9,037
112	3,699	0,369	0,466	9,175

cd. tabeli 9.2

113	2,477	0,389	0,680	4,473
114	2,854	0,504	0,683	4,425
115	3,612	0,459	0,616	5,521
116	2,586	0,422	0,683	4,431
117	2,426	0,434	0,766	3,362
118	3,706	0,459	0,759	3,435
119	2,763	0,445	0,785	3,146
120	3,329	0,341	0,750	3,545
121	2,638	0,329	0,691	4,306
122	3,905	0,337	0,625	5,345
123	3,197	0,508	0,534	7,234
124	3,290	0,416	0,720	3,917
125	2,950	0,479	0,716	3,973
126	2,488	0,348	0,771	3,302
127	3,262	0,343	0,805	2,933
128	3,720	0,321	0,580	6,209
129	3,219	0,452	0,514	7,767
130	3,573	0,499	0,768	3,332
131	2,454	0,368	0,761	3,416
132	1,984	0,492	0,821	2,769
133	2,157	0,454	0,648	4,962
134	2,070	0,411	0,789	3,107
135	2,869	0,515	0,843	2,557
136	2,836	0,374	0,815	2,832
137	2,446	0,348	0,815	2,829
138	4,153	0,632	0,652	4,894
139	4,676	0,377	0,520	7,605
140	4,038	0,428	0,806	2,919
141	3,864	0,431	0,688	4,357
142	3,261	0,362	0,771	3,301
143	2,997	0,392	0,798	3,002
144	2,283	0,319	0,745	3,605
145	2,421	0,341	0,843	2,554
146	3,168	0,489	0,787	3,120
147	2,155	0,317	0,815	2,835
148	1,944	0,454	0,850	2,487
149	3,089	0,435	0,684	4,405
150	2,485	0,381	0,748	3,567
151	2,009	0,493	0,770	3,312
152	3,087	0,364	0,559	6,660
153	1,913	0,339	0,704	4,136
154	1,969	0,346	0,671	4,606
155	2,612	0,472	0,661	4,760
156	2,797	0,302	0,724	3,862
157	2,571	0,359	0,740	3,668
158	2,478	0,384	0,641	5,072
159	2,992	0,431	0,687	4,372

cd. tabeli 9.2

160	3,061	0,514	0,730	3,789
161	1,609	0,322	0,797	3,017
162	0,428	0,083	0,746	3,594
163	2,254	0,376	0,792	3,066
164	2,381	0,256	0,777	3,235
165	3,619	0,316	0,735	3,724
166	1,736	0,382	0,800	2,982
167	3,901	0,347	0,798	3,010
168	1,145	0,417	0,829	2,688
169	1,355	0,228	0,634	5,202
170	1,238	0,216	0,870	2,304
171	3,129	0,410	0,715	3,988
172	1,619	0,172	0,810	2,880
173	2,869	0,452	0,731	3,782
174	2,870	0,506	0,695	4,258
175	5,570	0,493	0,484	8,596
176	2,783	0,472	0,788	3,111
177	2,807	0,595	0,635	5,173
178	3,858	0,431	0,796	3,026
179	1,885	0,157	0,741	3,659
180	2,311	0,329	0,797	3,016
181	2,579	0,517	0,711	4,034
182	2,525	0,589	0,782	3,182
183	2,803	0,274	0,811	2,870
184	2,276	0,238	0,690	4,333
185	1,488	0,253	0,470	9,054
186	1,162	0,141	0,203	29,549
187	2,122	0,491	0,608	5,666
188	0,997	0,125	0,414	11,114
189	1,166	0,196	0,846	2,528
190	2,025	0,442	0,419	10,894
191	2,792	0,364	0,686	4,379
192	1,429	0,224	0,711	4,031
193	3,032	0,481	0,583	6,156
194	2,502	0,494	0,695	4,250
195	3,076	0,409	0,617	5,491
196	2,056	0,265	0,459	9,416
197	3,241	0,369	0,403	11,610
198	1,203	0,237	0,346	14,562
199	3,014	0,353	0,467	9,134
200	3,586	0,419	0,453	9,604
201	2,477	0,457	0,337	15,152
202	2,770	0,505	0,506	7,988
203	2,120	0,239	0,711	4,040
204	2,765	0,382	0,722	3,890
205	3,217	0,239	0,465	9,218
206	5,270	0,577	0,573	6,363

cd. tabeli 9.2

207	5,178	0,679	0,510	7,864
208	4,052	0,576	0,657	4,826
209	2,196	0,368	0,767	3,346
210	2,242	0,416	0,685	4,393
211	2,398	0,564	0,467	9,161
212	2,815	0,549	0,434	10,312
213	3,370	0,477	0,666	4,682
214	2,388	0,382	0,610	5,626
215	1,817	0,283	0,786	3,140
216	1,652	0,278	0,755	3,482
217	2,104	0,252	0,747	3,585
218	2,597	0,572	0,609	5,644
219	4,165	0,586	0,131	49,069
220	2,750	0,381	0,300	17,831
221	3,054	0,481	0,378	12,798
222	2,264	0,378	0,615	5,525
223	3,103	0,499	0,461	9,339
224	3,194	0,545	0,403	11,593
225	2,369	0,487	0,508	7,909
226	1,235	0,175	0,361	13,666
227	3,217	0,351	0,738	3,695
228	2,052	0,257	0,800	2,990
229	3,589	0,471	0,641	5,075
230	2,379	0,234	0,755	3,484
231	4,292	0,506	0,695	4,262
232	4,373	0,431	0,660	4,780
233	1,865	0,183	0,792	3,072
234	3,103	0,311	0,559	6,659
235	2,021	0,529	0,713	4,005
236	2,817	0,531	0,710	4,045
237	4,126	0,547	0,713	4,005
238	2,352	0,307	0,503	8,066
239	1,390	0,386	0,836	2,620
240	3,158	0,365	0,668	4,646
241	2,544	0,541	0,696	4,239
242	2,556	0,303	0,785	3,145
243	5,289	0,444	0,723	3,882
244	5,164	0,203	0,667	4,658
245	5,907	0,426	0,270	20,508
246	3,996	0,249	0,721	3,911
247	3,023	0,255	0,732	3,765
248	2,316	0,335	0,499	8,184
249	1,738	0,218	0,626	5,332
250	2,064	0,272	0,297	18,026
251	2,210	0,409	0,503	8,044
252	1,842	0,349	0,588	6,042
253	2,842	0,508	0,655	4,848

cd. tabeli 9.2

254	2,312	0,511	0,362	13,605
255	3,021	0,431	0,352	14,217
256	3,255	0,475	0,683	4,424
257	1,670	0,221	0,863	2,367
258	2,349	0,357	0,683	4,432
259	2,981	0,303	0,359	13,793
260	4,812	0,597	0,684	4,409
261	3,008	0,625	0,277	19,839
262	2,597	0,578	0,210	28,337
263	2,326	0,454	0,629	5,280
264	2,721	0,423	0,581	6,186
265	1,717	0,360	0,838	2,599
266	2,441	0,424	0,546	6,960
267	2,568	0,341	0,450	9,734
268	2,700	0,323	0,623	5,393
269	2,126	0,405	0,684	4,409
270	1,581	0,338	0,670	4,625
271	1,773	0,385	0,596	5,895
272	1,206	0,273	0,680	4,477
273	1,186	0,178	0,470	9,061
274	1,130	0,342	0,481	8,690
275	1,464	0,251	0,506	7,988
276	2,288	0,308	0,801	2,978
277	1,971	0,360	0,754	3,501
278	1,620	0,334	0,690	4,321
279	1,793	0,236	0,451	9,697
280	1,578	0,271	0,693	4,287
281	1,590	0,383	0,645	5,020
282	1,592	0,214	0,754	3,494
283	2,109	0,247	0,390	12,167
284	2,190	0,452	0,780	3,199
285	2,391	0,376	0,555	6,743
286	4,694	0,460	0,593	5,938
287	4,568	0,315	0,748	3,574
288	2,131	0,224	0,808	2,901
289	3,269	0,514	0,601	5,799
290	3,025	0,343	0,473	8,939
291	2,433	0,264	0,658	4,812
292	2,196	0,200	0,616	5,517
293	2,163	0,258	0,660	4,773
294	2,787	0,280	0,387	12,321
295	1,955	0,252	0,749	3,553
296	2,841	0,501	0,651	4,921
297	2,096	0,321	0,570	6,418
298	2,852	0,273	0,420	10,879
299	2,571	0,252	0,714	3,994
300	2,664	0,328	0,661	4,753

cd. tabeli 9.2

301	2,095	0,293	0,755	3,487
302	2,237	0,331	0,763	3,392
303	2,145	0,562	0,341	14,851
304	2,920	0,391	0,768	3,337
305	4,404	0,430	0,425	10,646

Tabela 9.3. Średnica projekcyjna ziaren klasy 16 – 20 mm

Nr ziarna	Średnica projekcyjna d_p [mm]	Nr ziarna	Średnica projekcyjna d_p [mm]	Nr ziarna	Średnica projekcyjna d_p [mm]
1	23,235	35	22,219	69	22,306
2	19,560	36	23,979	70	19,941
3	22,544	37	21,351	71	21,679
4	24,226	38	21,309	72	22,033
5	24,979	39	26,364	73	19,949
6	19,855	40	25,354	74	22,523
7	23,320	41	29,086	75	23,076
8	24,693	42	20,714	76	18,307
9	23,588	43	21,489	77	22,087
10	28,981	44	24,008	78	24,748
11	21,265	45	22,929	79	25,105
12	26,831	46	24,750	80	25,471
13	20,335	47	23,728	81	23,690
14	24,571	48	21,966	82	26,348
15	24,413	49	23,543	83	20,690
16	25,746	50	18,993	84	22,088
17	29,599	51	25,607	85	21,437
18	22,079	52	20,738	86	22,137
19	24,667	53	24,935	87	26,034
20	22,387	54	20,133	88	21,130
21	22,240	55	25,349	89	21,724
22	23,935	56	20,306	90	20,637
23	24,617	57	20,974	91	20,592
24	24,853	58	23,886	92	20,443
25	24,410	59	18,795	93	21,868
26	26,651	60	21,647	94	23,927
27	25,831	61	23,858	95	20,216
28	22,032	62	23,094	96	21,936
29	21,058	63	23,321	97	23,253
30	22,888	64	21,818	98	20,251
31	22,205	65	25,345	99	21,685
32	24,137	66	22,856	101	28,082
33	24,894	67	27,577	102	26,500
34	20,066	68	24,050	103	22,559

cd. tabeli 9.3

104	21,756
105	20,496
106	21,541
107	25,048
108	21,057
109	21,581
110	23,238
111	26,385
112	26,751
113	23,008
114	22,114
115	24,683
116	22,709
117	22,022
118	24,885
119	22,807
120	26,529
121	24,829
122	28,078
123	22,913
124	24,730
125	22,742
126	23,900
127	26,286
128	28,087
129	23,875
130	23,913
131	23,363
132	19,747
133	20,857
134	21,277
135	22,003
136	24,387
137	23,758
138	23,247
139	28,716
140	26,217
141	25,772
142	25,827
143	24,437
144	23,915
145	23,848
146	23,135
147	23,494
148	20,154
149	23,848
150	23,188

151	19,816
152	25,314
153	22,088
154	22,158
155	21,943
156	26,071
157	23,916
158	23,093
159	23,675
160	22,496
161	21,206
162	21,410
163	22,538
164	26,083
165	27,971
166	20,557
167	27,795
168	17,377
169	22,478
170	22,214
171	24,427
172	26,187
173	22,981
174	22,133
175	27,842
176	22,413
177	20,814
178	25,771
179	28,393
180	23,773
181	21,204
182	20,155
183	26,923
184	26,354
185	22,400
186	25,073
187	20,205
188	24,807
190	20,614
191	24,473
192	23,015
193	22,929
194	21,308
195	24,315
196	24,577
197	25,611
198	21,315

199	25,369
200	25,380
201	21,793
202	21,888
203	25,680
204	24,013
205	29,536
206	25,933
207	24,420
208	23,779
209	22,511
210	21,756
211	20,098
212	21,400
213	23,815
214	22,864
215	23,058
216	22,463
217	25,171
218	20,547
219	23,861
220	23,991
221	22,985
222	22,526
223	22,821
224	22,375
225	21,027
226	23,810
227	25,973
228	24,795
229	24,427
230	26,867
231	25,303
232	26,863
233	26,919
234	26,727
235	19,403
236	21,646
237	24,341
238	24,455
239	19,013
240	25,476
241	20,785
242	25,262
243	28,336
244	36,496
245	29,805

cd. tabeli 9.3

246	31,297
247	28,302
248	23,638
249	24,774
250	24,372
251	21,781
252	21,600
253	22,030
254	20,527
255	23,756
256	23,579
257	24,336
258	23,243
259	26,578
260	24,876
261	20,957
262	20,479
263	21,397
264	23,069
265	20,892

266	22,239
267	24,314
268	25,188
269	21,567
270	20,748
271	20,653
272	20,369
273	23,362
274	18,475
275	22,323
276	24,210
277	21,862
278	21,011
279	24,386
280	22,311
281	19,939
282	24,209
283	25,348
284	21,005
285	22,999

286	26,914
287	30,275
288	26,276
289	22,987
290	25,638
291	26,031
292	27,574
293	25,203
294	26,701
295	24,556
296	22,129
297	23,186
298	27,141
299	26,913
300	24,937
301	23,910
302	23,464
303	19,396
304	24,256
305	26,939

Tabela 9.4. Średnica projekcyjna ziaren klasy 12,5 - 16 mm

Nr ziarna	Średnica projekcyjna d_p [mm]
1	21,852
2	19,070
3	20,734
4	23,015
5	20,220
6	24,020
7	20,341
8	22,641
9	19,978
10	19,086
11	20,561
12	18,562
13	21,300
14	19,938
15	24,196
16	18,782
17	19,229
18	17,974
19	20,486

Nr ziarna	Średnica projekcyjna d_p [mm]
20	18,216
21	20,012
22	15,703
23	18,414
24	15,679
25	15,504
26	16,455
27	16,931
28	15,149
29	21,448
30	19,713
31	19,901
32	19,016
33	20,514
34	20,206
35	17,477
36	20,148
37	20,077
38	20,779

Nr ziarna	Średnica projekcyjna d_p [mm]
39	24,372
40	20,909
41	21,579
42	22,288
43	19,461
44	16,420
45	15,876
46	19,535
47	16,672
48	17,888
49	14,517
50	20,503
51	27,065
52	19,933
53	21,405
54	21,275
55	18,358
56	19,702
57	21,859

cd. tabeli 9.4

58	18,492	76	19,495	94	17,279
59	22,237	77	19,197	95	17,170
60	23,277	78	21,141	96	22,760
61	25,536	79	16,229	97	17,810
62	15,642	80	18,497	98	18,260
63	17,529	81	17,987	99	20,610
64	20,896	82	16,244	100	16,290
65	16,071	83	22,381	101	18,266
66	22,760	84	20,891	102	16,623
67	17,306	85	18,424	103	17,127
68	19,476	86	20,162	104	17,045
69	18,707	87	18,158	105	20,530
70	21,077	88	17,860	106	21,732
71	17,926	89	17,844	107	23,406
72	21,462	90	19,305	108	15,153
73	20,859	91	16,858	109	13,555
74	16,322	92	16,925	110	20,429
75	18,293	93	16,368		

Tabela 9.5. Średnica projekcyjna ziaren klasy 10 – 12,5 mm

Nr ziarna	Średnica projekcyjna d_p [mm]	Nr ziarna	Średnica projekcyjna d_p [mm]	Nr ziarna	Średnica projekcyjna d_p [mm]
1	16,877	22	14,975	43	16,240
2	18,721	23	15,588	44	14,544
3	15,827	24	17,732	45	16,463
4	15,261	25	17,706	46	16,926
5	14,461	26	15,940	47	15,438
6	17,023	27	14,086	48	14,580
7	16,860	28	14,723	49	15,608
8	16,454	29	14,086	50	15,666
9	17,286	30	15,858	51	15,416
10	14,912	31	13,087	52	16,617
11	15,071	32	14,042	53	19,212
12	15,594	33	13,340	54	14,762
13	14,729	34	16,545	55	16,234
14	14,746	35	16,577	56	16,218
15	18,107	36	14,284	57	15,327
16	16,546	37	16,206	58	15,633
17	15,895	38	19,933	59	15,608
18	16,286	39	17,345	60	16,090
19	13,925	40	15,583	61	14,304
20	17,666	41	14,885	62	18,054
21	16,446	42	15,361	63	18,812

cd. tabeli 9.5

64	13,387	90	17,251	116	14,831
65	16,030	91	16,407	117	14,068
66	15,106	92	14,144	118	13,987
67	15,049	93	13,823	119	12,753
68	12,732	94	14,347	120	13,909
69	18,858	95	12,298	121	18,903
70	18,198	96	14,866	122	14,259
71	16,480	97	13,706	123	15,884
72	13,960	98	10,526	124	19,022
73	16,783	99	19,821	125	15,429
74	14,401	100	19,918	126	15,121
75	14,263	101	15,952	127	14,160
76	13,030	102	14,458	128	14,898
77	19,269	103	14,965	129	13,345
78	15,311	104	16,168	130	12,546
79	15,989	105	13,914	131	15,013
80	14,606	106	13,697	132	12,738
81	13,749	107	18,722	133	15,315
82	12,058	108	18,244	134	14,942
83	13,978	109	17,978	135	17,066
84	14,942	110	16,729	136	15,779
85	13,559	111	15,598	137	13,854
86	13,778	112	13,966	138	14,572
87	13,183	113	13,126	139	17,469
88	13,526	114	18,363	140	13,596
89	15,030	115	16,064		

Tabela 9.6. Średnica projekcyjna ziaren klasy 8 - 10 mm

Nr ziarna	Średnica projekcyjna d_p [mm]	Nr ziarna	Średnica projekcyjna d_p [mm]	Nr ziarna	Średnica projekcyjna d_p [mm]
1	12,483	14	13,370	27	13,413
2	11,051	15	12,966	28	12,187
3	16,173	16	11,709	29	12,545
4	13,852	17	12,783	30	9,904
5	15,248	18	12,799	31	13,018
6	11,918	19	10,836	32	14,765
7	10,369	20	11,807	33	13,011
8	10,798	21	10,358	34	11,468
9	12,348	22	12,390	35	13,904
10	13,646	23	12,772	36	10,526
11	15,072	24	10,498	37	11,454
12	17,277	25	13,593	38	11,979
13	10,168	26	11,769	39	10,387

cd. tabeli 9.6

40	10,802
41	14,409
42	10,904
43	11,973
44	11,588
45	11,660
46	12,876
47	11,994
48	13,724
49	15,530
50	12,080
51	11,941
52	13,110
53	12,751
54	13,857
55	11,652
56	12,250
57	10,760
58	10,971
59	12,405
60	12,539
61	12,638
62	9,075
63	12,217
64	13,196
65	12,109
66	12,600
67	12,315
68	12,457
69	13,296
70	13,462
71	17,271
72	13,491
73	14,496

74	15,734
75	14,386
76	14,617
77	12,750
78	9,082
79	10,355
80	13,311
81	14,188
82	13,966
83	13,225
84	12,181
85	12,783
86	10,907
87	14,737
88	11,742
89	11,467
90	12,821
91	11,663
92	11,894
93	10,543
94	11,428
95	10,578
96	12,328
97	13,699
98	12,452
99	13,501
100	14,738
101	10,448
102	13,095
103	11,639
104	11,124
105	16,942
106	11,760
107	11,394

108	13,072
109	13,216
110	12,243
111	13,616
112	12,913
113	14,481
114	17,099
115	12,306
116	11,381
117	13,906
118	13,262
119	14,093
120	13,852
121	11,942
122	12,125
123	11,021
124	12,805
125	13,264
126	12,243
127	13,614
128	15,481
129	15,316
130	12,618
131	11,742
132	11,872
133	14,020
134	12,703
135	13,952
136	12,862
137	12,620
138	11,565
139	11,886
140	12,805

10. FUNKCJA ROZKŁADU ARGUMENTU ROZDZIAŁU (PRĘDKOŚCI OPADANIA)

Jak była o tym mowa w rozdziale 5 prędkość opadania jest argumentem rozdziału w procesie wzbogacania w osadzarce. Zgodnie ze wzorem (5.49) graniczna prędkość opadania ziarna jest funkcją jego gęstości, wielkości i współczynników kształtu ziarna. Kierowana do procesu rozdziału nadawa charakteryzuje się rozkładem właściwości fizycznych i geometrycznych ziarna, a w związku z tym również prędkości opadania. Graniczna prędkość opadania ziarna nieregularnego wyraża się następującym wzorem (patrz rozdział 5):

$$v = 5,33\sqrt{x}\sqrt{d_p}\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \quad (10.1)$$

Przy założeniu, że gęstość zredukowana x , średnica rzutowa d_p oraz współczynniki kształtu k_1 i k_2 są zmiennymi losowymi, prędkość opadania ziarna stanowi również zmienną losową będącą funkcją wymienionych zmiennych losowych. Postać funkcji rozkładu prędkości opadania jest zależna od funkcji gęstości rozkładów zmiennych losowych figurujących we wzorze (10.1). Dla jej wyliczenia korzysta się z twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa odnoszących się do funkcji zmiennych losowych (Gerstenkorn i Śródka, 1972). Metodyka postępowania polega na doprowadzenia wzoru na prędkość opadania ziarna do postaci będącej iloczynem dwóch zmiennych losowych (Brożek i Surowiak, 2004, 2005 a,b). Wówczas funkcja gęstości rozkładu zmiennej losowej będącej iloczynem dwóch niezależnych zmiennych losowych $S = T \cdot U$ wyraża się następującym wzorem (Gerstenkorn i Śródka, 1972):

$$h(s) = \int f(t)g\left(\frac{s}{t}\right)\frac{1}{t}dt \quad (10.2)$$

gdzie: $h(s)$, $f(t)$, i $g(u)$ – funkcje gęstości rozkładu odpowiednio zmiennych losowych S , T i U .

Procedurę doprowadzenia do postaci iloczynu dwóch zmiennych losowych realizuje się etapami.

10.1. Rozkład prędkości opadania w próbce monodispersyjnych ziaren sferycznych

Niech R , X , D_p , k_1 i k_2 oznaczają zmienne losowe odpowiednio gęstości ziaren, gęstości zredukowanej, średnicy rzutowej ziarna, objętościowego współczynnika kształtu oraz dynamicznego współczynnika kształtu ziarna. Dla ziaren sferycznych $k_1 = k_2 = 1$, $d_p = d_o$, gdzie d_o – wielkość ziaren nadawy. W tej sytuacji prędkość opadania ziarna v_{ms} wyraża się wzorem:

$$v_{ms} = 5,33\sqrt{x}\sqrt{d_o} \quad (10.3)$$

Gęstość zredukowana x jest związana z gęstością ziarna zależnością:

$$x = \frac{\rho - \rho_o}{\rho_o} \quad (10.4)$$

skąd:

$$\rho = \rho_o x + \rho_o = \rho(x) \quad (10.5)$$

Niech zmienna losowa R posiada rozkład określony przez funkcję gęstości rozkładu $f_\rho(\rho)$. Wtedy zmienna losowa X posiada rozkład o gęstości (Gerstenkorn i Śródka, 1972):

$$f(x) = f_\rho[\rho(x)] \left| \frac{d\rho(x)}{dx} \right| \quad (10.6a)$$

$$f(x) = \rho_o f_\rho(\rho = \rho_o x + \rho_o) \quad (10.6b)$$

Po wprowadzeniu nowej zmiennej losowej:

$$Y_1 = X^{1/2} \quad (10.7)$$

skąd $x = y_1^2 = x(y_1)$.

Prędkość opadania jest równa:

$$v_m = 5,33\sqrt{d_o} y_1 \quad (10.8)$$

Rozkład zmiennej losowej Y_1 analogicznie jak wyżej jest następujący:

$$f_1(y_1) = f[x(y_1)] \left| \frac{dx(y_1)}{dy_1} \right| \quad (10.9a)$$

$$f_1(y_1) = 2y_1 f(x = y_1^2) \quad (10.9b)$$

Następująca zmienna losowa: $Y_2 = 5,33 Y_1$ ($y_1 = \frac{y_2}{5,33} = y_1(y_2)$) posiada funkcję gęstości rozkładu:

$$f_2(y_2) = f_1[y_1(y_2)] \left| \frac{dy_1(y_2)}{dy_2} \right| \quad (10.10a)$$

$$f_2(y_2) = f_1\left(y_1 = \frac{y_2}{5,33}\right) \cdot \frac{1}{5,33} \quad (10.10b)$$

Po tych przekształceniach prędkość opadania jako zmienna losowa wyraża się następującym wzorem:

$$V_{ms} = \sqrt{d_o} Y_2 \quad (10.11)$$

W związku z tym prędkość opadania zbioru monodispersyjnych ziaren sferycznych ma rozkład o gęstości:

$$h(v_{ms}) = f_2[y_2(v_{ms})] \left| \frac{dy_2(v_{ms})}{dv_{ms}} \right| \quad (10.12a)$$

$$h(v_{ms}) = f_2\left(y_2 = \frac{v_{ms}}{\sqrt{d_o}}\right) \frac{1}{\sqrt{d_o}} \quad (10.12b)$$

10.2. Rozkład prędkości opadania w próbce monodispersyjnych ziaren nieregularnych

Jak wykazują badania (Sztaba, 1992) kształt ziarna ma wpływ na prędkość opadania. Założono, że ziarna próbki mają tę samą wartość średnicy projekcyjnej $d_p = d_o$, natomiast współczynniki kształtu ziarna stanowią zmienne losowe K_1 i K_2 o funkcjach gęstości rozkładów $w_1(k_1)$ i $w_2(k_2)$. Wówczas funkcja gęstości rozkładu zmiennej losowej $Z = \frac{K_1}{K_2}$ jest wyrażona następującym wzorem (Gerstenkorn i Śródka, 1972):

$$p_1(z) = \int k_2 w_2(k_2) w_1(zk_2) dk_2 \quad (10.13)$$

Następująca zmienna losowa $A = Z^{1/2}$ ($z = a^2 = z(a)$) ma funkcje gęstości rozkładu określoną następującym wzorem:

$$p_2(a) = p_1[z(a)] \left| \frac{dz(a)}{da} \right| \quad (10.14a)$$

$$p_2(a) = 2ap_1(z = a^2) \quad (10.14b)$$

Zmienna losowa prędkości opadania monodispersyjnych ziaren nieregularnych po powyższych przekształceniach jest równa:

$$V_{mn} = V_{ms} \cdot A \quad (10.15)$$

Jak widać ze wzoru (12.15) zmienna losowa prędkości opadania ziaren nieregularnych jest iloczynem zmiennej losowej prędkości opadania monodispersyjnych ziaren sferycznych i zmiennej losowej będącej funkcją współczynników kształtu ziarna.

W związku z tym funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania monodispersyjnych ziaren nieregularnych, zgodnie ze wzorem (10.2) jest równa:

$$h(v_{mn}) = \int_{v_{s \min}}^{v_{s \max}} h(v_{ms}) p_2 \left(a = \frac{v_{mn}}{v_{ms}} \right) \frac{1}{v_{ms}} dv_{ms} \quad (10.16)$$

10.3. Rozkład prędkości opadania w próbce polidispersyjnych ziaren nieregularnych

Niech rozkład zmiennej losowej D_p będzie zadany funkcją gęstości rozkładu $g(d_p)$. Nowa zmienna losowa $U_1 = \sqrt{D_p}$ ($d_p = u_1^2 = d_p(u_1)$) ma rozkład o gęstości:

$$g_1(u_1) = g[d_p(u_1)] \left| \frac{dd_p(u_1)}{du_1} \right| \quad (10.17a)$$

$$g_1(u_1) = 2u_1 g(d_p = u_1^2) \quad (10.17b)$$

Wówczas zmienna losowa prędkości opadania zgodnie ze wzorem (10.1) będzie iloczynem trzech zmiennych losowych:

$$V = Y_2 \cdot U_1 \cdot A \quad (10.18)$$

Następująca zmienna losowa: $U_2 = U_1 \cdot A$ będąca iloczynem dwóch zmiennych losowych charakteryzujących własności geometryczne ziaren stanowi syntetyczną zmienną losową własności geometrycznych. Jej rozkład zgodnie ze wzorem (10.2) jest następujący:

$$g_2(u_2) = \int_{u_{1\min}}^{u_{1\max}} g_1(u_1) p_2\left(\frac{u_2}{u_1}\right) \frac{1}{u_1} du_1 \quad (10.19)$$

W tej sytuacji prędkość opadania jest iloczynem zmiennej losowej Y_2 zależnej od rozkładu gęstości ziaren w próbce oraz zmiennej U_2 zależnej od rozkładu własności geometrycznych:

$$V = Y_2 \cdot U_2 \quad (10.20)$$

Rozkład prędkości opadania ziaren w próbce polidispersyjnych ziaren nieregularnych wyraża się wzorem:

$$h(v) = \int_{y_{2\min}}^{y_{2\max}} f_2(y_2) g_2\left(\frac{v}{y_2}\right) \frac{1}{y_2} dy_2 \quad (10.21)$$

10.4. Rozkład prędkości opadania w próbce polidispersyjnych ziaren sferycznych

Prędkość opadania ziarna sferycznego v_{ps} w sytuacji, gdy zarówno gęstość ziarna jak i jego średnica są zmiennymi losowymi wyraża się wzorem:

$$v_{ps} = 5,33\sqrt{x}\sqrt{d} \quad (10.22)$$

W związku z tym zmienna losowa prędkości opadania dla tego przypadku będzie równa:

$$V_{ps} = Y_2 \cdot U_1 \quad (10.23)$$

Funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania v_{ps} jest następująca:

$$h(v_{ps}) = \int_{y_{2\min}}^{y_{2\max}} f_2(y_2) g_1\left(\frac{v_{ps}}{y_2}\right) \frac{1}{y_2} dy_2 \quad (10.24)$$

10.5. Analiza wpływu rozkładu własności fizycznych i geometrycznych ziaren na rozkład prędkości opadania

Analiza sprowadza się do wyznaczenia rozkładów prędkości opadania określonych wzorami (10.12), (10.16), (10.21) i (10.24). Funkcje gęstości rozkładów gęstości $f_\rho(\rho)$, wielkości ziarna $g(d_p)$ oraz współczynników kształtu $w_1(k_1)$ i $w_2(k_2)$ wyznaczono na podstawie wyników analizy densymetrycznej i granulometrycznej zamieszczonych w rozdziale 9 w tabeli 9.1 oraz pomiarów współczynników kształtu podanych w tabeli 9.2 i ich rozkładów.

10.5.1. Wpływ rozkładu gęstości ziarna na rozkład prędkości opadania

Dla oceny wpływu rozkładu gęstości na rozkład prędkości opadania wyliczono funkcję gęstości rozkładu prędkości wyrażoną wzorem (10.12), gdyż w tym przypadku pozostałe dwie zmienne (wielkość ziarna i jego kształt) mające wpływ na rozkład prędkości opadania mają wartości ustalone.

Funkcja gęstości rozkładu gęstości ziarna, zgodnie z dyspersyjnym modelem ziarna (Brożek, 1995) jest wyrażona przez dwuparametrową funkcję z rodziny rozkładów gamma. Jak będzie pokazane dalej jest to funkcja rozkładu Weibulla, którego dystrybuanta i funkcja gęstości są następujące:

$$F_\rho(\rho) = 100 \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{k_n} \right] \right\} \quad (10.25)$$

$$f_\rho(\rho) = \frac{100k}{\rho_c^{k_n}} \rho^{k_n-1} \exp \left[- \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{k_n} \right] \quad (10.26)$$

gdzie: ρ_c - gęstość charakterystyczna ($F_\rho(\rho = \rho_c) = 63,21\%$), k_n – współczynnik niejednorodności.

Zgodnie ze wzorem (10.6) funkcja gęstości i dystrybuanta rozkładu gęstości zredukowanej wyrażają się wzorami:

$$f(x) = \frac{100k_n}{(x_c + 1)^{k_n}} (x + 1)^{k_n-1} \exp \left[- \left(\frac{x + 1}{x_c + 1} \right)^{k_n} \right] \quad (10.27)$$

$$F(x) = 100 \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{x+1}{x_c+1} \right)^{k_n} \right] \right\} \quad (10.28)$$

gdzie: $x_c = \frac{\rho_c - \rho_o}{\rho_o}$.

Rozkład zmiennej losowej $Y_1 = \sqrt{X}$ według wzorów (10.9) jest następujący:

$$f_1(y_1) = \frac{200k_n}{(y_{1c}^2 + 1)^{k_n}} y_1 (y_1^2 + 1)^{k_n-1} \exp \left[- \left(\frac{y_1^2 + 1}{y_{1c}^2 + 1} \right)^{k_n} \right] \quad (10.29)$$

$$F_1(y_1) = 100 \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{y_1^2 + 1}{y_{1c}^2 + 1} \right)^{k_n} \right] \right\} \quad (10.30)$$

gdzie: $y_{1c} = \sqrt{x_c}$.

Rozkład zmiennej losowej $Y_2 = 5,33Y_1$, na podstawie wzorów (10.10), charakteryzuje się następującymi funkcjami:

$$f_2(y_2) = \frac{200k_n}{(y_{2c}^2 + 28,41)^{k_n}} y_2 (y_2^2 + 28,41)^{k_n-1} \exp \left[- \left(\frac{y_2^2 + 28,41}{y_{2c}^2 + 28,41} \right)^{k_n} \right] \quad (10.31)$$

$$F_2(y_2) = 100 \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{y_2^2 + 28,41}{y_{2c}^2 + 28,41} \right)^{k_n} \right] \right\} \quad (10.32)$$

gdzie: $y_{2c} = 5,33y_{1c}$.

Po przytoczonych wyżej kolejnych przekształceniach rozkład prędkości opadania w próbce monodispersyjnych ziaren sferycznych zgodnie ze wzorami (10.11) i (10.12) jest następujący:

$$h(v_{ms}) = \frac{200k_n}{(v_{msc}^2 + 28,41d_o)^{k_n}} v_{ms} (v_{ms}^2 + 28,41d_o)^{k_n-1} \times \exp \left[- \left(\frac{v_{ms}^2 + 28,41d_o}{v_{msc}^2 + 28,41d_o} \right)^{k_n} \right] \quad (10.33)$$

$$H(v_{ms}) = 100 \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{v_{ms}^2 + 28,41d_o}{v_{msc}^2 + 28,41d_o} \right)^{k_n} \right] \right\} \quad (10.34)$$

gdzie: d_o – średnica ziaren próbki, natomiast v_{msc} jest równe:

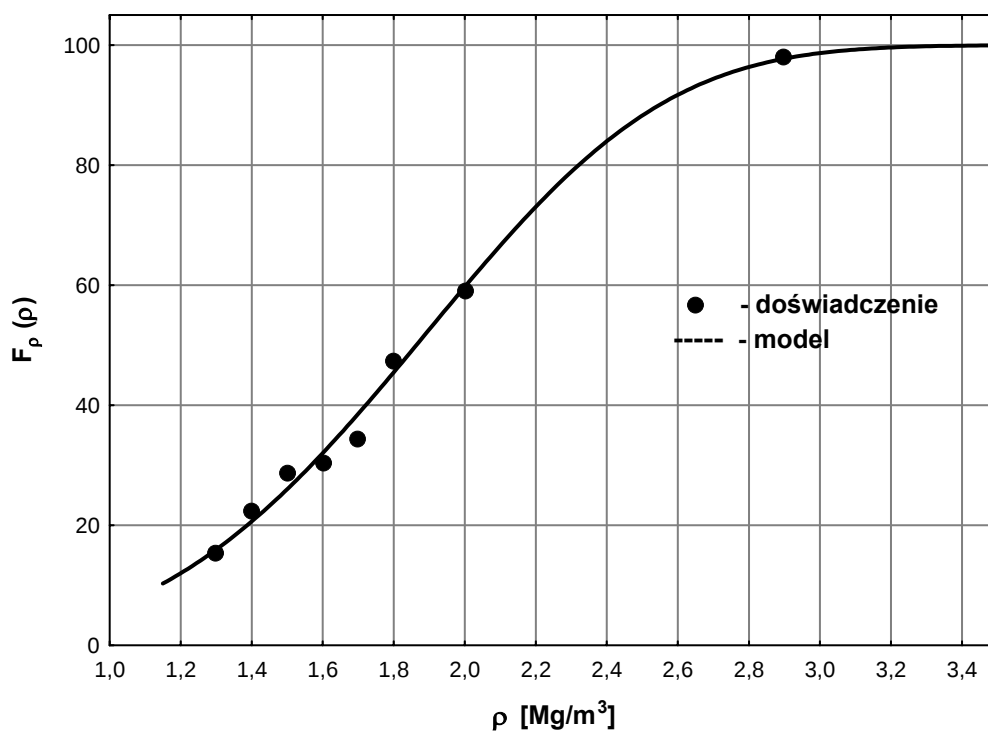
$$v_{msc} = \sqrt{d_o} y_{2c} = 5,33 \sqrt{d_o \frac{\rho_c - \rho_o}{\rho_o}} \quad (10.35)$$

Jak widać ze wzorów (10.34) i (10.35) funkcja rozkładu prędkości opadania w tym przypadku jest wyrażona przez parametry rozkładu gęstości ziaren i ich średnicę. Analogicznie jak dla rozkładu gęstości jest to również rozkład Weibulla.

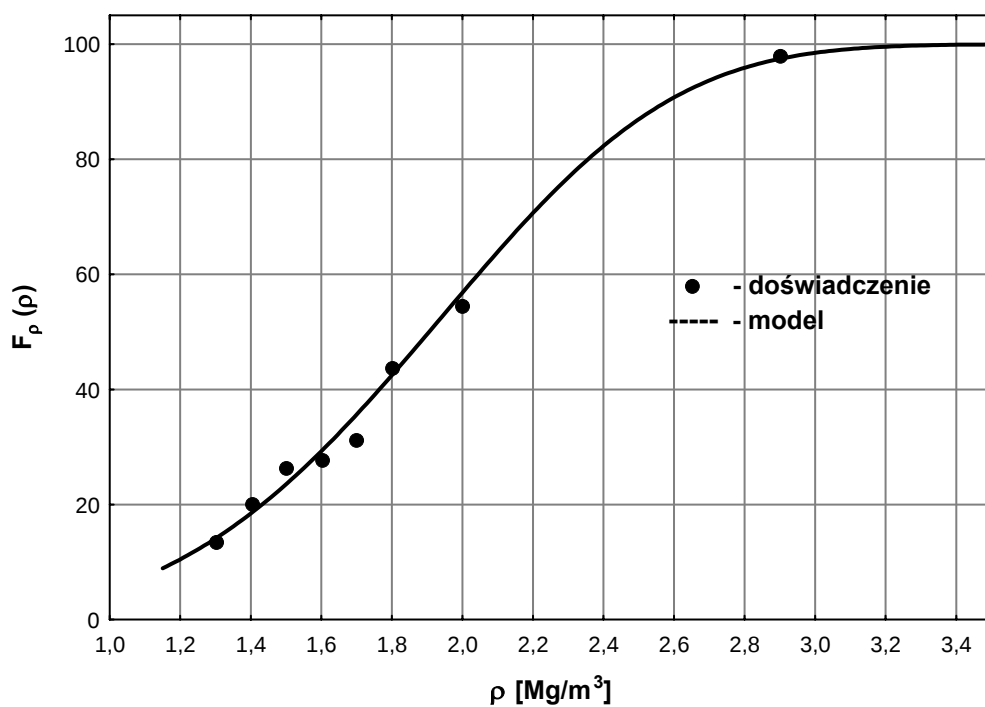
Dla zilustrowania wpływu rozkładu gęstości na rozkład prędkości opadania na podstawie wyników zamieszczonych w rozdziale 9 w tabeli **9.1** wyliczono współrzędne dystrybuant rozkładu gęstości dla kilku wąskich klas ziarnowych, a następnie do dystrybuant empirycznych dopasowano rozkłady Weibulla. Ponadto dla klasy 8 – 10 mm wyznaczono dystrybuantę rozkładu gęstości w odpadach. Z dopasowania uzyskano dla każdego rozkładu parę parametrów ρ_c i k_n . Na rysunkach **10.1 – 10.5** podane są zależności modelowe z zaznaczonymi wartościami empirycznymi. Przy każdym rysunku podane są wartości parametrów rozkładu ρ_c i k_n . Zgodność modelu z doświadczeniem oszacowano wyliczając indeks korelacji krzywoliniowej. Wysokie wartości tego indeksu ($R > 0,99$) świadczą o dobrej zgodności dystrybuanty modelowej w postaci rozkładu Weibulla z dystrybuantą empiryczną. Różnice w rozkładach gęstości poszczególnych klas ziarnowych są minimalne, co jest empirycznym potwierdzeniem założenia, że zmienne losowe wielkości ziarna i gęstości są zmiennymi niezależnymi.

Parametrami rozkładu prędkości opadania są współczynnik niejednorodności k_n i prędkość charakterystyczna v_{msc} wyliczana według wzoru (10.35). Występująca w tym wzorze gęstość cieczy ρ_o podawanej do komory osadzarki jest wyższa od gęstości wody i wynosi $\rho_o = 1,093 \text{ Mg/m}^3$ gdyż zwracana jest ona do obiegu z osadnika Dorra.

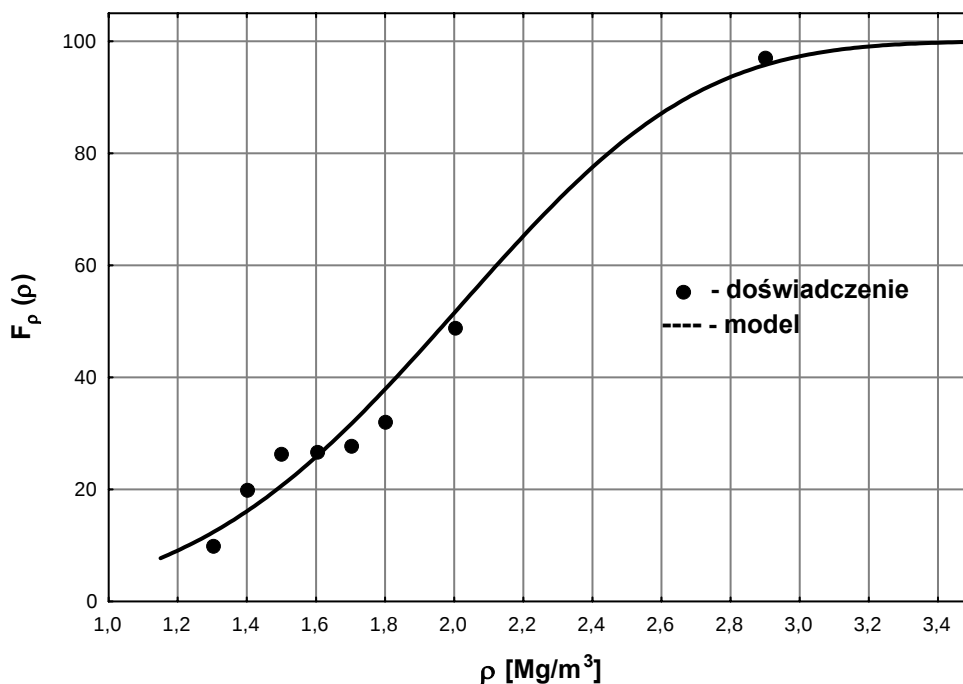
Za wielkość ziarna sferycznego przyjęto średnią wartość średnicy projekcyjnej ziarna w danej klasie ziarnowej. Metoda pomiaru średnicy projekcyjnej została opisana w rozdziale 9. Na podstawie wyników przedstawionych w tabelach **9.3 – 9.6** w rozdziale 9 wykreślono histogramy rozkładu średnicy projekcyjnej w czterech klasach ziarnowych. Przedstawiono je na rysunkach **10.6– 10.9**.



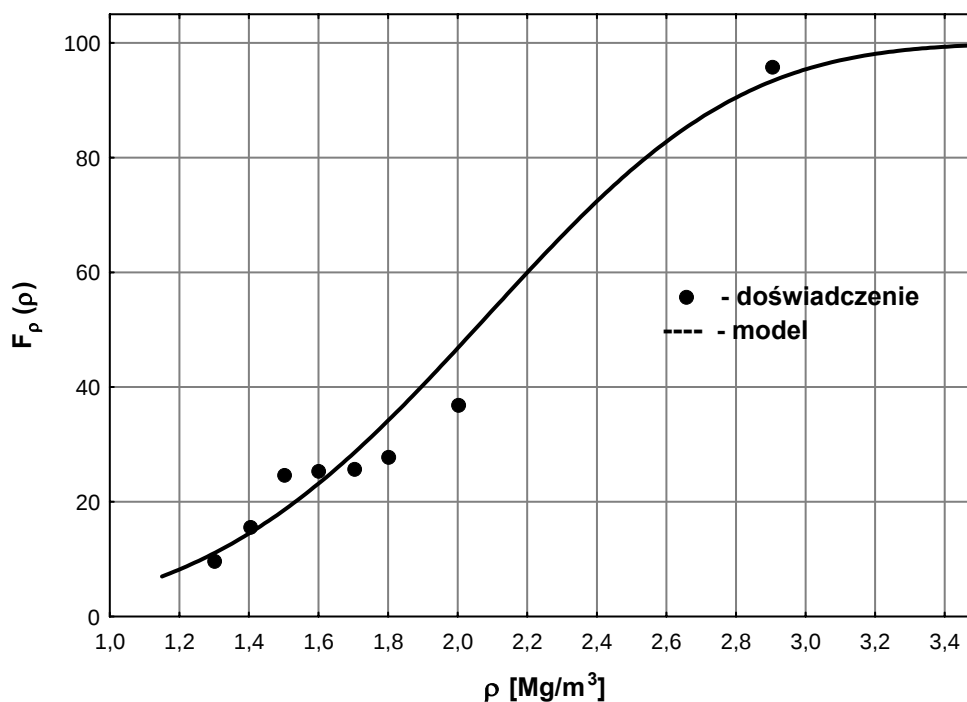
Rys. 10.1. Rozkład gęstości ziaren w klasie 2 – 3,15 mm, $\rho_c = 2,05 \text{ Mg/m}^3$; $k_n = 3,84$



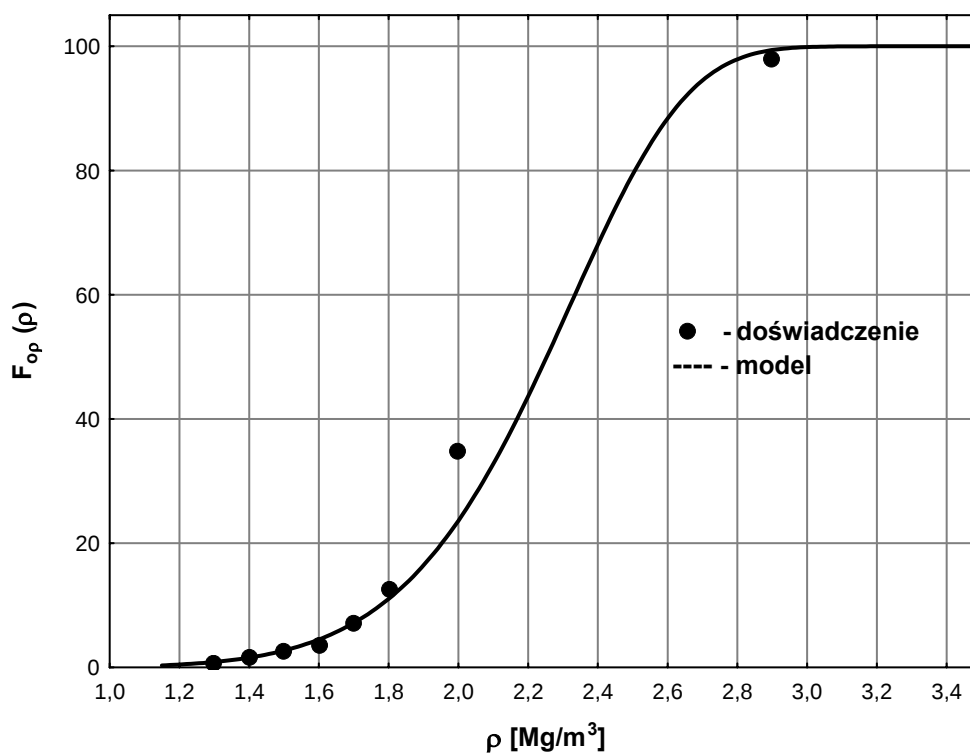
Rys. 10.2. Rozkład gęstości ziaren w klasie 3,15 – 5 mm, $\rho_c = 2,09 \text{ Mg/m}^3$; $k_n = 3,97$



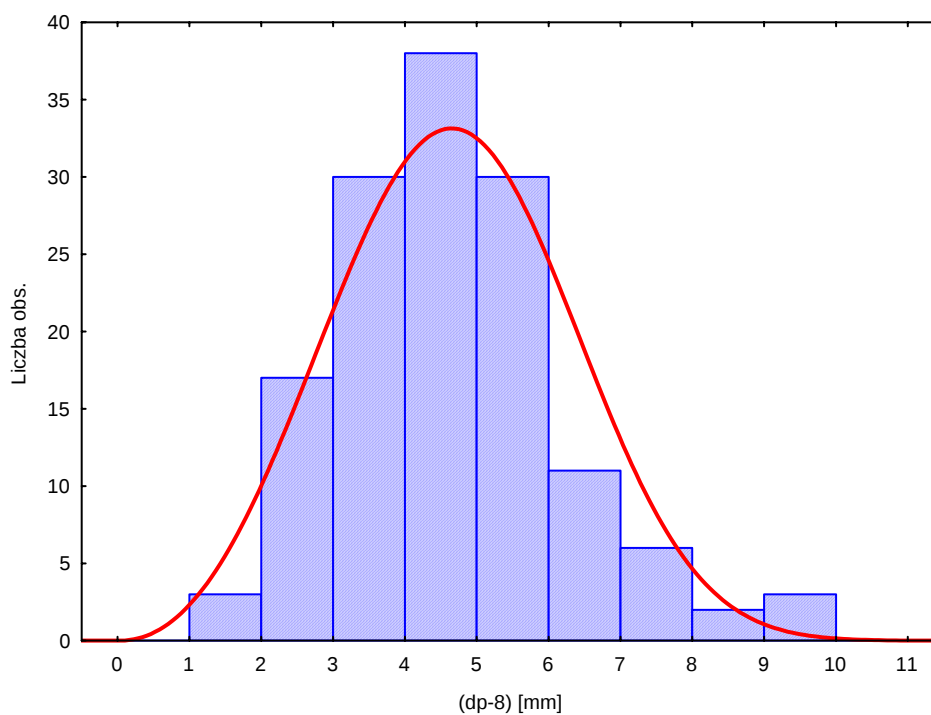
Rys. 10.3. Rozkład gęstości ziaren w klasie 8 – 10 mm, $\rho_c = 2,17 \text{ Mg/m}^3$; $k_n = 3,97$



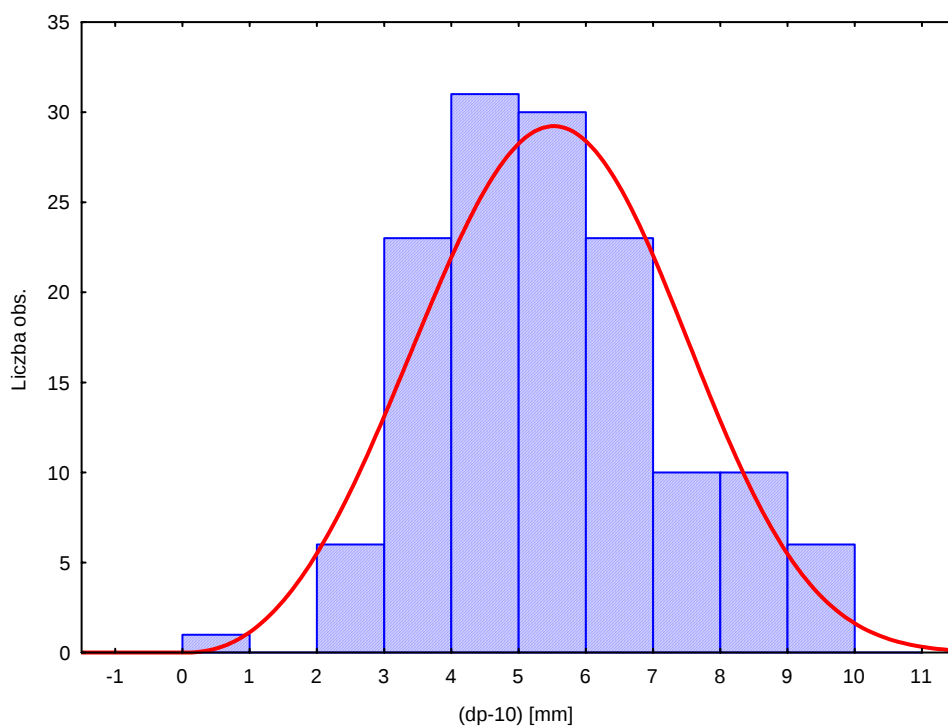
Rys. 10.4. Rozkład gęstości ziaren w klasie 16- 20 mm, $\rho_c = 2,25 \text{ Mg/m}^3$; $k_n = 3,91$



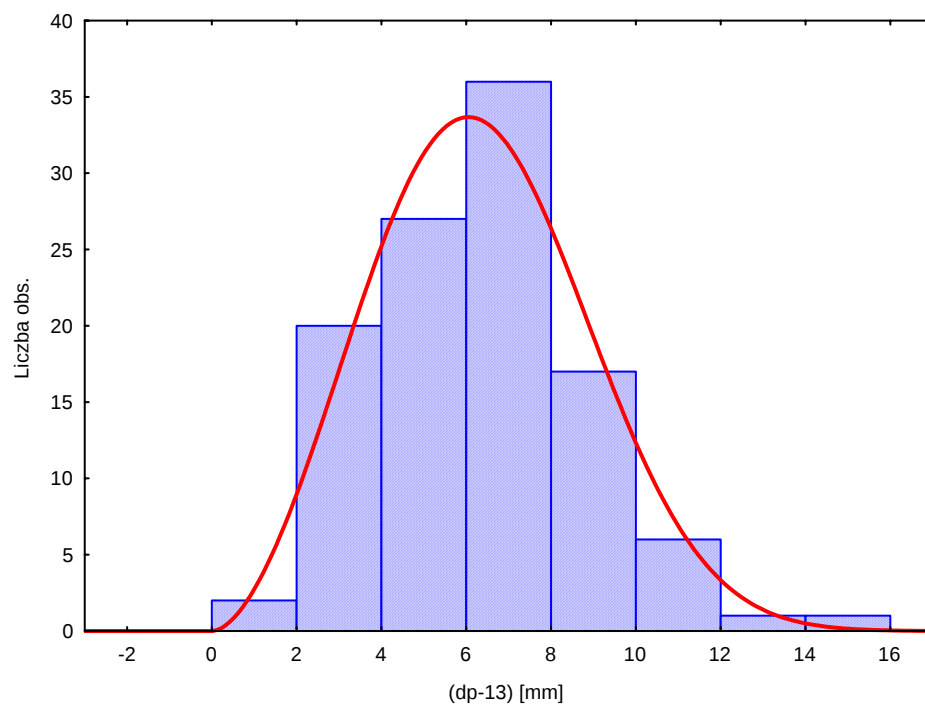
Rys. 10.5. Rozkład gęstości ziaren w odpadach klasy 8 - 10 mm, $\rho_c = 2,36 \text{ Mg/m}^3$;
 $k_n = 7,92$



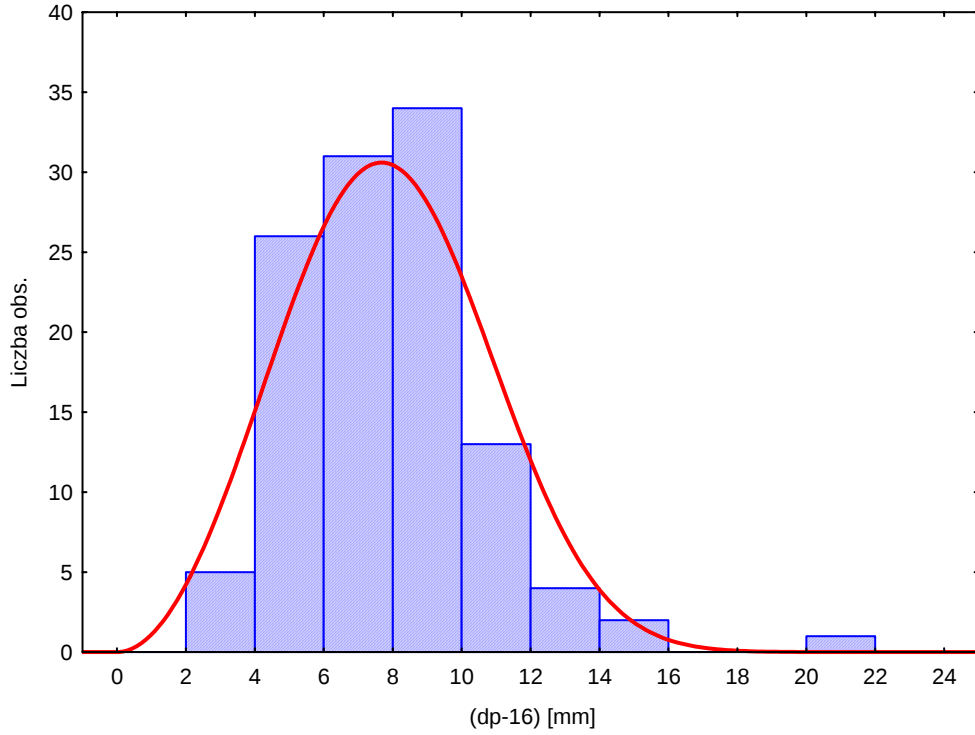
Rys. 10.6. Histogram rozkładu średnicy projekcyjnej d_p w klasie 8 - 10 mm:
 $d_{cp} = 13,2 \text{ mm}$; $k_p = 3,17$; $b_p = 8 \text{ mm}$; $\bar{d}_p = 12,8 \text{ mm}$



Rys. 10.7. Histogram rozkładu średnicy projekcyjnej w klasie 10 – 12,5 mm: d_p , $d_{cp} = 16,12$ mm; $k_p = 3,3$; $b_p = 10$ mm; $\bar{d}_p = 15,5$ mm



Rys. 10.8. Histogram rozkładu średnicy projekcyjnej d_p w klasie 12,5 – 16 mm: $d_{cp} = 20,1$ mm; $k_p = 2,73$; $b_p = 13$ mm; $\bar{d}_p = 19,3$ mm



Rys. 10.9. Histogram rozkładu średnicy projekcyjnej d_p w klasie 16 – 20 mm:
 $d_{cp} = 24,79 \text{ mm}$; $k_p = 2,95$; $b_p = 16 \text{ mm}$; $\bar{d}_p = 23,9 \text{ mm}$

Przy pomocy programu Statistica do każdego histogramu dopasowano funkcję gęstości rozkładu średnicy projekcyjnej w danej klasie ziarnowej. Najlepsze dopasowanie uzyskano dla rozkładu Weibulla w postaci:

$$g_p(d_p) = \frac{100k_p}{d_{cp}^{k_p}} d_p^{k_p-1} \exp \left[- \left(\frac{d_p - b_p}{d_{cp} - b_p} \right)^{k_p} \right] \quad (10.36)$$

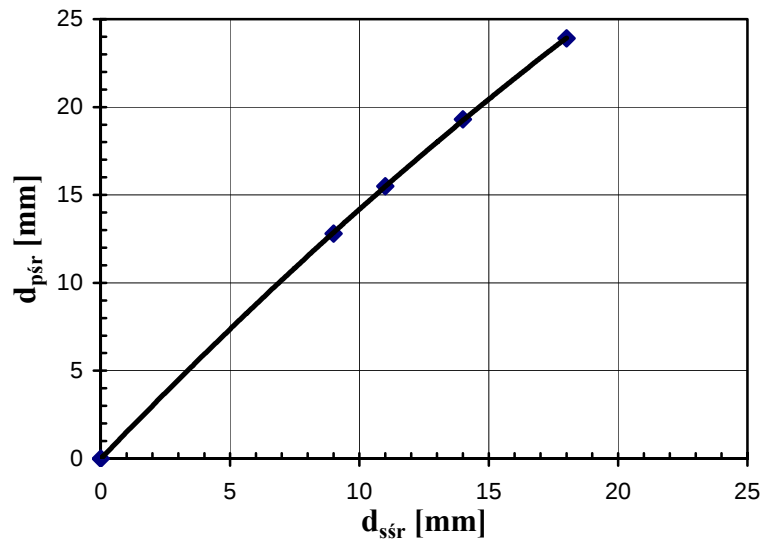
gdzie: d_{cp} – wartość charakterystyczna średnicy projekcyjnej, k_p – współczynnik niejednorodności, b_p – wartość przesunięcia zmiennej losowej.

Jak wykazują pomiary innych autorów analogiczny typ rozkładu Weibulla istnieje dla średnicy sitowej ziaren w wąskiej klasie ziarnowej (Kordek, 1999).

Na rysunkach 10.6 – 10.9. podano parametry rozkładu Weibulla średnicy projekcyjnej wraz z wartością przesunięcia zmiennej losowej b_p . Wartość średnią średnicy projekcyjnej wylicza się z następującego wzoru (Gerstenkorn i Śródka, 1972):

$$\bar{d}_p = d_{op} \Gamma \left(\frac{1}{k_p} + 1 \right) + b_p \quad (10.37)$$

gdzie: Γ - funkcja gamma Eulera.



Rys.10.10. Zależność średniej wartości średnicy projekcyjnej od średniej wartości średnicy sitowej

Wartości średnie średnicy projekcyjnej podano przy każdym z rysunków 10.6 – 10.9.

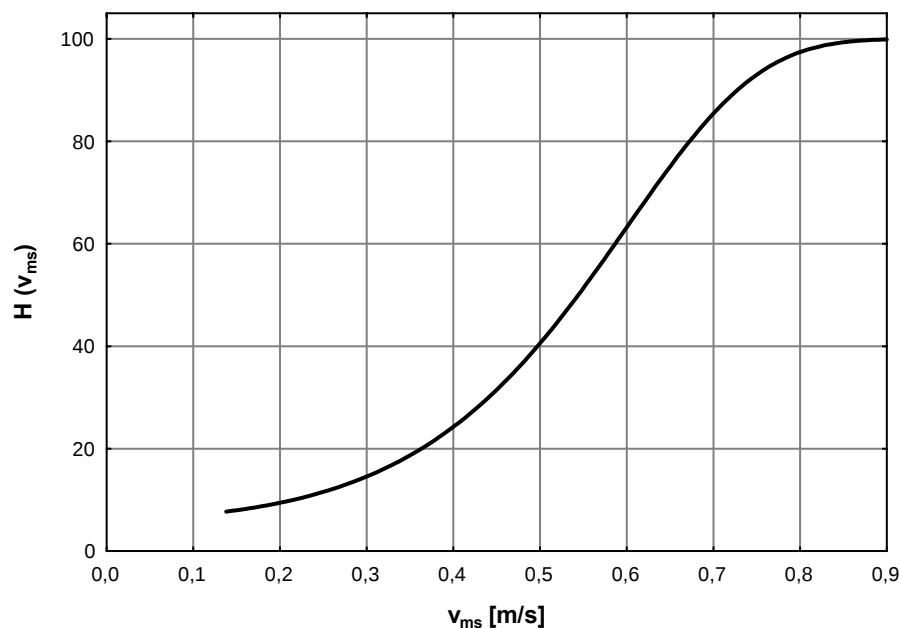
Na rys. 10.10 podano zależność średniej wartości średnicy projekcyjnej od średniej wartości średnicy sitowej $\bar{d}_s$. Dla wartości średniej średnicy sitowej przyjęto średnią arytmetyczną dolnej i górnej granicy klasy. Wyliczona zależność empiryczna $\bar{d}_p(\bar{d}_s)$ jest następująca:

$$\bar{d}_p = -0,0112\bar{d}_s^2 + 1,5308\bar{d}_s - 0,0097 \quad (10.38)$$

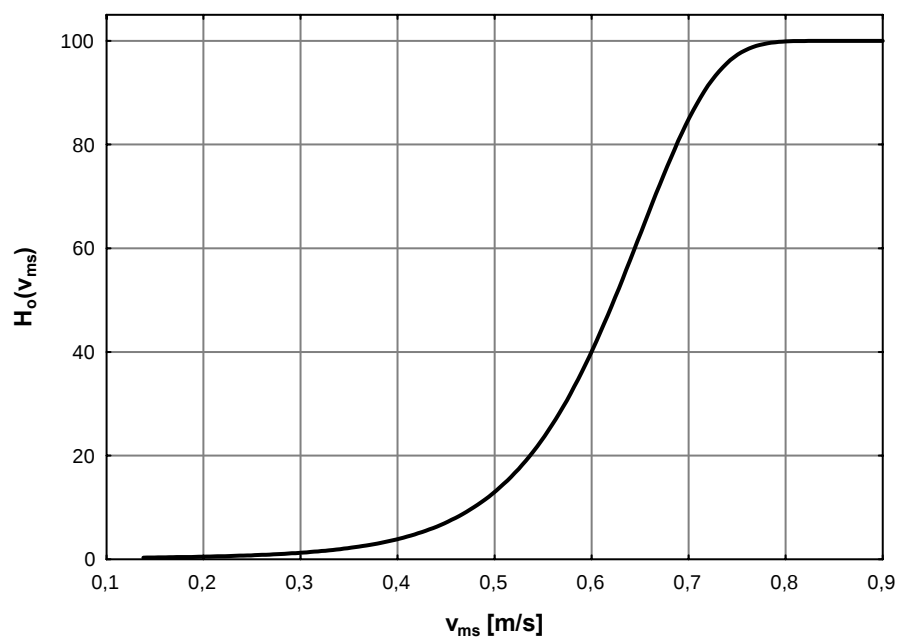
przy czym d_p i d_s są wyrażone w milimetrach.

Według tej zależności dokonywano przejścia od średnicy sitowej do średnicy projekcyjnej ziarna w dalszej części pracy.

Jak powiedziano wcześniej jako wielkość ziarna kulistego d_o przyjęto we wzorach (10.34) i (10.35) średnią wartość średnicy projekcyjnej. Ze względu na to, że różnice w rozkładach gęstości w poszczególnych klasach ziarnowych są nieznaczne wyliczono rozkład prędkości opadania w jednej klasie ziarnowej 8 – 10 mm i w odpadach tej klasy. Na rysunkach 10.11 i 10.12 przedstawiono dystrybuantę rozkładu prędkości opadania w nadawie i odpadach monodispersyjnych ziaren sferycznych odpowiednio dla rozkładów gęstości zaprezentowanych na rysunkach 10.3 i 10.5.



Rys.10.11. Dystrybuanta rozkładu prędkości opadania ziaren w monodyspersyjnej próbce ziaren: klasa 8 - 10 mm, $v_{msc} = 0,599$ [m/s], $k_n = 3,97$



Rys.10.12. Dystrybuanta rozkładu prędkości opadania ziaren w odpadach monodyspersyjnych: klasa 8 - 10 mm, $v_{msc} = 0,789$ [m/s], $k_n = 7,92$

10.5.2. Wpływ rozkładu kształtu ziarna na rozkład prędkości opadania

Wyniki pomiarów współczynników kształtu k_1 i k_2 przedstawione są w tabeli 9.2. Na ich podstawie wykreślono histogramy rozkładów zmiennych losowych K_1 i K_2 , które przedstawiono na rysunkach 10.13 i 10.14. Badania innych autorów wskazują,

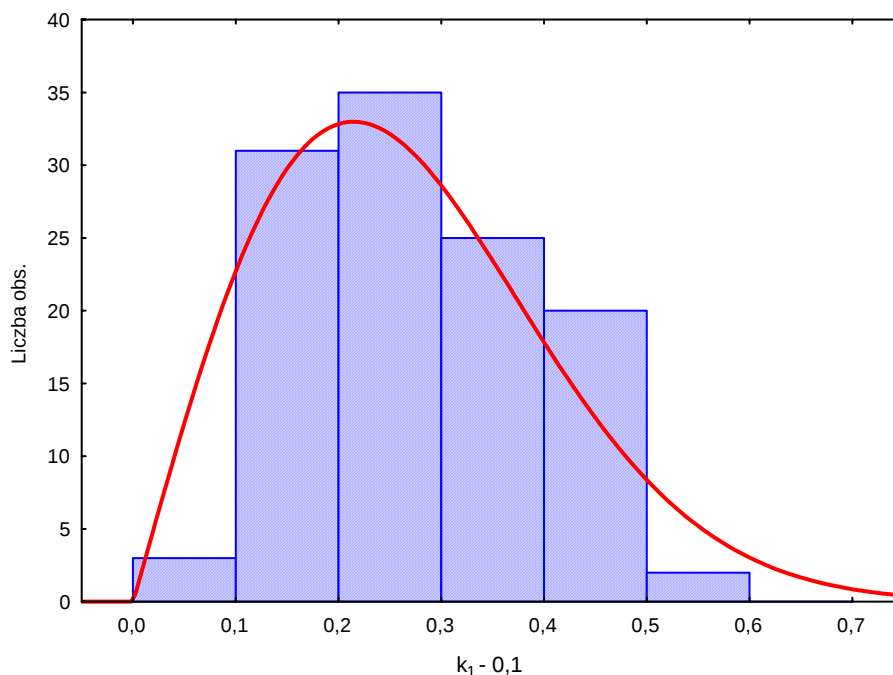
że rozkłady współczynników kształtu są rozkładami typu gamma (Hodenberg, 1998, Stark i Muller, 2005). Z tego względu do histogramów tych dopasowywano rozkłady Rayleigha i rozkłady Weibulla. Ocena statystyczna zgodności rozkładów modelowych z rozkładami empirycznymi była jednakowa dla obu typów rozkładów, w związku z czym do dalszych rozważań przyjęto rozkłady Rayleigha współczynników kształtu, których ogólne równania są następujące:

$$w_1(k_1) = 2\lambda_1 k_1 \exp(-\lambda_1 k_1^2) \quad (10.39)$$

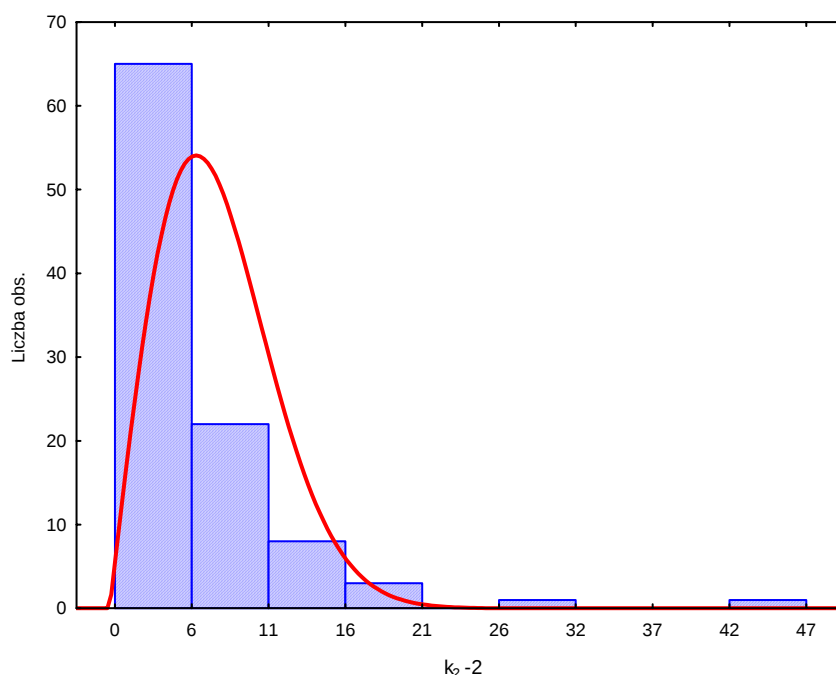
$$w_2(k_2) = 2\lambda_2 k_2 \exp(-\lambda_2 k_2^2) \quad (10.40)$$

gdzie: λ_1 i λ_2 – parametry rozkładów.

Z dopasowania do rozkładów empirycznych programem Statistica uzyskano dla parametrów rozkładów następujące wartości: $\lambda_1 = 11$ oraz $\lambda_2 = 0,015$.



Rys. 10.13. Histogram rozkładu objętościowego współczynnika kształtu k_1 , $\lambda_1 = 11$



Rys. 10.14. Histogram rozkładu objętościowego współczynnika kształtu k_2 , $\lambda_2 = 0,015$

Funkcja gęstości rozkładu zmiennej losowej $Z = \frac{K_1}{K_2}$, zgodnie ze wzorem (10.13) jest równa:

$$p_1(z) = 4\lambda_1\lambda_2z \int_0^{\infty} k_2^3 \exp[-(\lambda_2 + \lambda_1 z^2)k_2^2] dk_2 \quad (10.41)$$

Po wyliczeniu całki otrzymuje się (Brożek i Turno, 2004):

$$p_1(z) = \frac{2\lambda_1\lambda_2z}{(\lambda_2 + \lambda_1 z^2)^2} \quad (10.42)$$

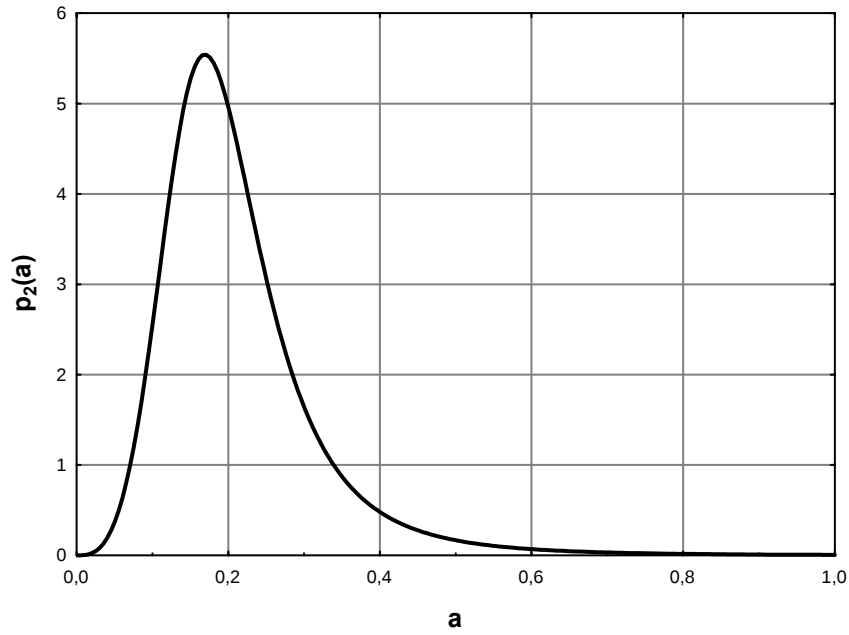
Rozkład zmiennej losowej $A = \sqrt{Z}$ ma według wzoru (10.14) następującą funkcję gęstości rozkładu $p_2(a)$:

$$p_2(a) = \frac{4\lambda_1\lambda_2a^3}{(\lambda_2 + \lambda_1a^4)^2} \quad (10.43)$$

Szczegółowa postać funkcji $p_2(a)$ dla podanych wyżej parametrów λ_1 i λ_2 jest wyrażona wzorem:

$$p_2(a) = \frac{0,66a^3}{(0,015 + 11a^4)^2} \quad (10.44)$$

Wykres tej funkcji podany jest na rys. 10.15.



Rys.10.15. Rozkład gęstości funkcji zmiennej losowej A

Wartość najbardziej prawdopodobna zmiennej a jest równa:

$$a = \sqrt[4]{\frac{3\lambda_2}{5\lambda_1}} = 0,169 \quad (10.45)$$

Na podstawie wzoru (10.16) funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania monodispersyjnych ziaren nieregularnych po przekształceniach jest równa:

$$h(v_{mn}) = C \int_{v_{ms \min}}^{v_{ms \max}} (v_{ms}^2 + 28,41d_o)^{k_n-1} \exp \left[- \left(\frac{v_{ms}^2 + 28,41d_o}{v_{msc}^2 + 28,41d_o} \right)^{k_n} \right] \frac{v_{mn}^3 \cdot v_{ms}^5}{(\lambda_2 v_{ms}^4 + \lambda_1 v_{mn}^4)^2} dv_{ms} \quad (10.46)$$

gdzie:

$$C = \frac{800k_n\lambda_1\lambda_2}{(v_{msc}^2 + 28,41d_o)^{k_n}} \quad (10.47)$$

- stała, której wartość jest zależna od parametrów rozkładu gęstości i współczynników kształtu oraz wielkości ziarna.

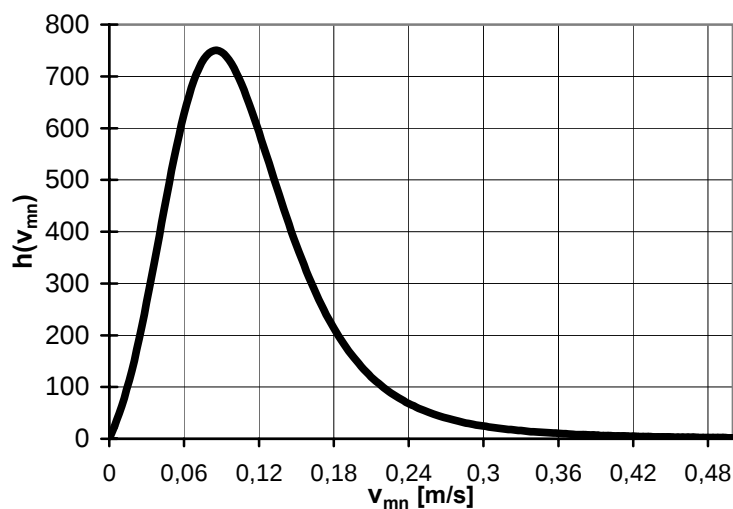
Jak wynika ze wzoru (10.46) rozkład prędkości opadania jest w sposób jawny zależny od rozkładu współczynników kształtu ziarna.

Rozkład prędkości opadania według wzoru (10.46) wyliczono dla klasy ziarnowej 8 – 10 mm. Średnia wartość średnicy projekcyjnej wyliczona według wzoru (10.38) jest równa: $\bar{d}_p = d_o = 12,78 \text{ mm}$.

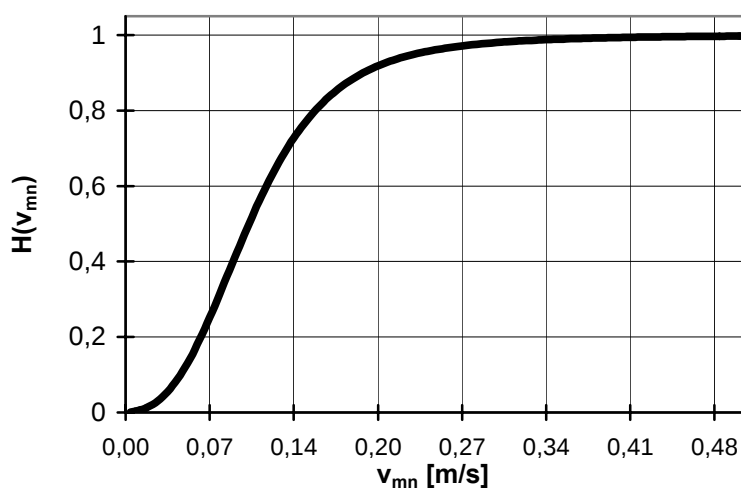
Po podstawieniu do wzoru (10.46) wartości parametrów: $k_n = 3,97$, $\lambda_1 = 11$, $\lambda_2 = 0,015$, $v_{msc} = 0,6$ m/s, $d_o = 0,0128$ m, granic całkowania: $v_{msmin} = 0$ m/s, $v_{msmax} = 0,88$ m/s oraz stałej $C = 1941$ wzór (10.46) przyjmuje postać:

$$h(v_{mn}) = 1941 \int_0^{0,88} (v_{ms}^2 + 0,36)^{2,97} \exp \left[- \left(\frac{v_{ms}^2 + 0,36}{0,72} \right)^{3,97} \right] \frac{v_{mn}^3 \cdot v_{ms}^5}{(0,015v_{ms}^4 + 11v_{mn}^4)^2} dv_{ms} \quad (10.48)$$

Ze względu na złożoność funkcji podcałkowej w powyższym wyrażeniu całkowanie wykonano metodą numeryczną.

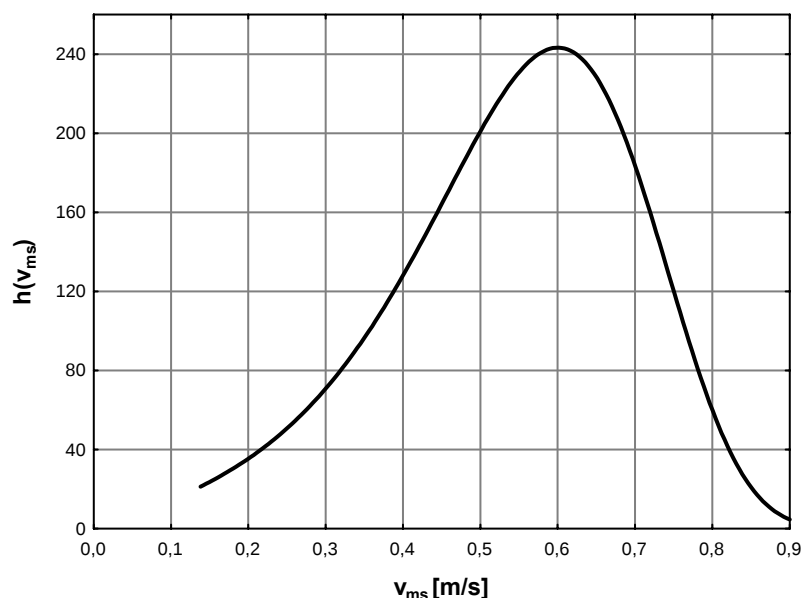


Rys. 10.16. Funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania ziaren nieregularnych w klasie 8 – 10 mm



Rys. 10.17. Dystrybuanta rozkładu prędkości opadania ziaren nieregularnych w klasie 8 – 10 mm

Wykres funkcji $h(v_{mn})$ oraz dystrybuanty $H(v_{mn})$ przedstawione są odpowiednio na rysunkach **10.16** i **10.17**. Na kolejnym rysunku **10.18** przedstawiono wykres funkcji $h(v_{ms})$ wyliczonej z równania dystrybuanty rozkładu $H(v_{ms})$ przedstawionej na rys. **10.11**. Porównanie obu rysunków wskazuje, że po uwzględnieniu rozkładu współczynników kształtu zmienia się kształt funkcji gęstości rozkładu (zmienia się asymetria rozkładu z ujemnej na dodatnią), obniża się wartość prędkości najbardziej prawdopodobnej z 0,6 [m/s] do 0,084 [m/s], jak również obniża się maksymalna wartość prędkości opadania z 0,88 [m/s] do 0,4 [m/s]. Skutkiem tego ziarna płaskie o większej gęstości niż analogiczne ziarna o mniejszej gęstości i mniejszej asymetrii będą się gromadziły w produkcie lekkim. Wniosek ten jest zgodny z obserwowanymi faktami doświadczalnymi (Ferrara i inni, 2000, Ociepa i Mączka, 2000).



Rys. **10.18**. Funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania ziaren sferycznych w klasie 8 – 10 mm

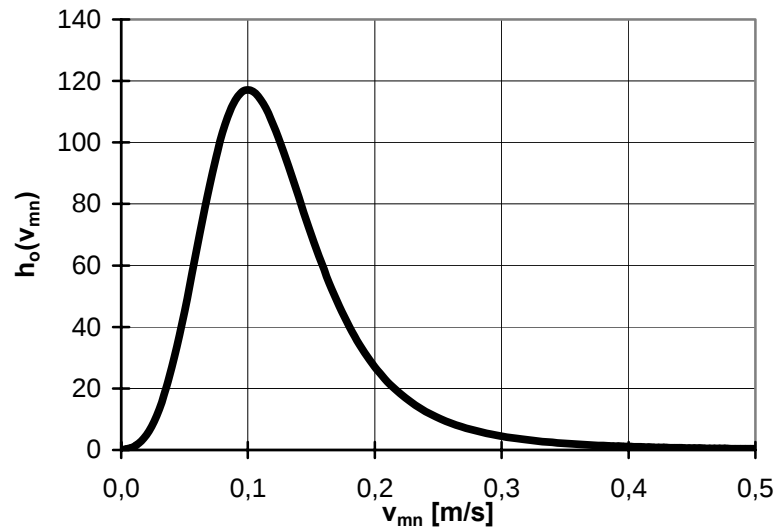
Analogicznie jak w przypadku nadawy monodispersyjnych ziaren nieregularnych klasy 8 – 10 mm wyznaczono funkcję gęstości rozkładu prędkości opadania w odpadach tej klasy. Wyliczona uprzednio dystrybuanta rozkładu gęstości w odpadach przedstawiona jest na rysunku **10.5**. Stosownie do tego rozkładu gęstości funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania w odpadach klasy 8 – 10 mm wyraża się wzorem:

$$h(v_{mn}) = 1045,44 \int_0^{0,88} (v_{ms}^2 + 0,36)^{6,92} \exp \left[- \left(\frac{v_{ms}^2 + 0,36}{0,78} \right)^{7,92} \right] \times$$

$$\times \frac{v_{mn}^3 v_{ms}^5}{(0,015 v_{ms}^4 + 11 v_{mn}^4)^2} dv_{ms} \quad (10.49)$$

Całkę (10.49) wyliczono metodą numeryczną.

Na rys. **10.19** przedstawiono funkcję gęstości rozkładu prędkości opadania ziaren nieregularnych w odpadach klasy 8 – 10 mm. Analogicznie jak w nadawie tej klasy nastąpiło zmniejszenie prędkości opadania i obniżenie różnicy prędkości opadania w tym produkcie w stosunku do ziaren sferycznych.



Rys. **10.19.** Funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania ziaren nieregularnych w odpadach klasy 8 – 10 mm

10.5.3. Wpływ rozkładu własności fizycznych i geometrycznych na rozkład prędkości opadania ziaren nieregularnych

10.5.3.1. Rozkład prędkości opadania w nadawie ziaren nieregularnych

Skład granulometryczny miałów węglowych dobrze aproksymuje się rozkładem Weibulla (R-R-B). Innymi słowy rozkład zmiennej losowej D_p jest rozkładem Weibulla, którego funkcja gęstości rozkładu i dystrybuanta są równe:

$$g(d_p) = \frac{100k}{d_o^p} d_p^{k-1} \exp \left[- \left(\frac{d_p}{d_{op}} \right)^{k_p} \right] \quad (10.50)$$

$$G(d_p) = 100 \left[1 - \exp \left(- \frac{d_p}{d_{op}} \right)^{k_p} \right] \quad (10.51)$$

gdzie: d_{op} – średnica charakterystyczna, k_p – współczynnik niejednorodności.

Zmienna losowa $U_1 = \sqrt{D_p}$ zgodnie ze wzorem (10.17) będzie miała rozkład, którego gęstość i dystrybuanta wyrażają się wzorami:

$$g_1(u_1) = \frac{200k_p}{u_{o1}^{2k_p}} u_1^{2k_p-1} \exp \left[- \left(\frac{u_1^2}{u_{o1}^2} \right)^{k_p} \right] \quad (10.52)$$

$$G_1(u_1) = 100 \left[1 - \exp \left(- \left(\frac{u_1^2}{u_{o1}^2} \right)^{k_p} \right) \right] \quad (10.53)$$

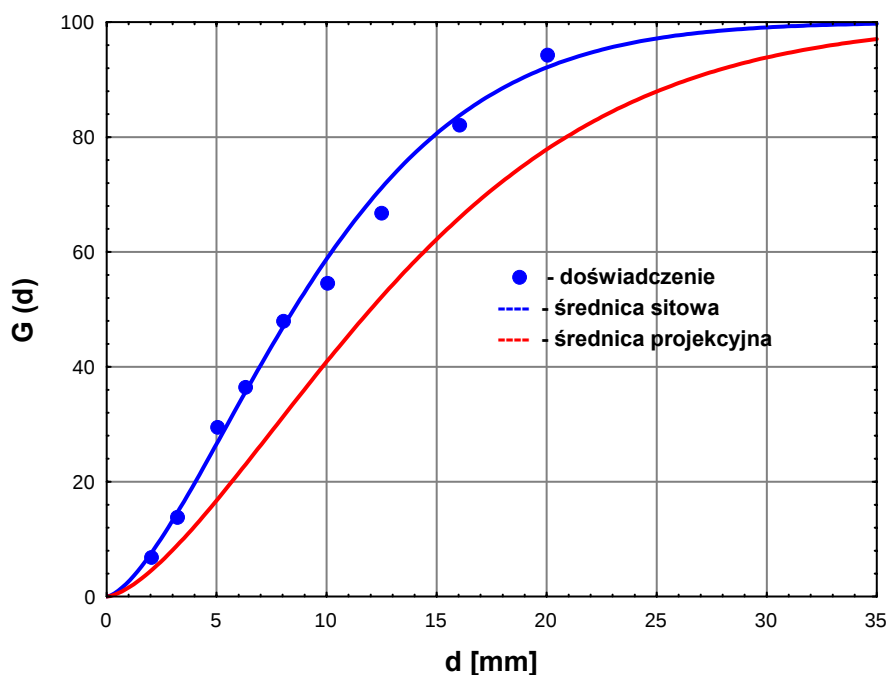
gdzie: $u_{o1} = \sqrt{d_{op}}$

Syntetyczna zmienna losowa własności geometrycznych ziarna $U_2 = U_1 \cdot A$ według wzorów (10.19) z uwzględnieniem (10.43) i (10.53) ma następującą funkcję gęstości rozkładu:

$$g_2(u_2) = \frac{800k_p \lambda_1 \lambda_2}{d_{op}^{k_p}} \int_{u_{1\min}}^{u_{1\max}} u_1^{2k_p} \exp \left[- \left(\frac{u_1^2}{d_{op}} \right)^{k_p} \right] \frac{u_2^3 u_1^5}{(\lambda_2 u_1^4 + \lambda_1 u_2^4)^2} du_1 \quad (10.54)$$

Jak wynika ze wzoru (10.54) funkcja gęstości rozkładu syntetycznej zmiennej losowej własności geometrycznych jest zależna od parametrów rozkładu średnicy projekcyjnej ziarna (k_p , d_{op}) oraz rozkładu zmiennej A (λ_1 ; λ_2).

Wyniki analizy granulometrycznej podane są w tabeli 9.1. Na ich podstawie wyliczono dystrybuantę empiryczną dla rozkładu średnicy sitowej, do której dopasowano dystrybuantę rozkładu Weibulla. Następnie wykorzystując zależność $d_s(d_p)$ wyznaczono ze wzoru (10.38) parametr d_{op} dla rozkładu średnicy projekcyjnej. Na rys. 10.20 podana jest dystrybuanta rozkładu średnicy sitowej (krzywa niebieska) oraz średnicy projekcyjnej (krzywa czerwona). Pod rysunkiem podane są parametry rozkładu średnicy sitowej d_{os} i k_p oraz średnicy projekcyjnej d_{op} i k_p . Wartość parametru k_p nie ulega zmianie przy przejściu od średnicy sitowej do średnicy projekcyjnej.

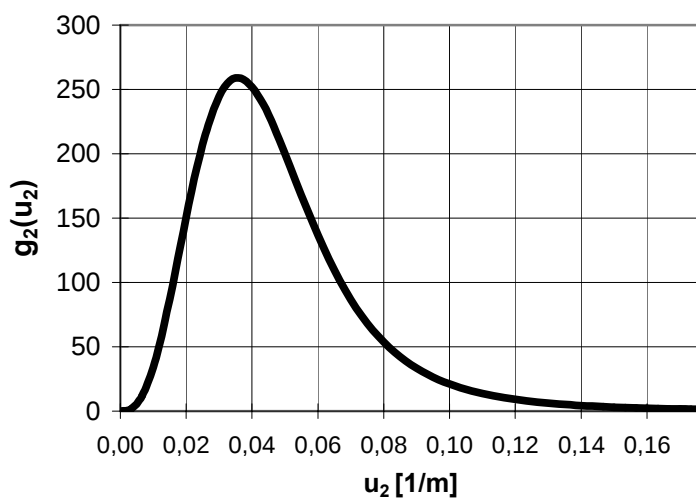


Rys. 10.20. Dystrybuanty rozkładu średnicy sitowej i projekcyjnej ziaren w nadawie:
 $d_{os} = 10,83 \text{ mm}$, $d_{op} = 15,27 \text{ mm}$, $k_p = 1,52$

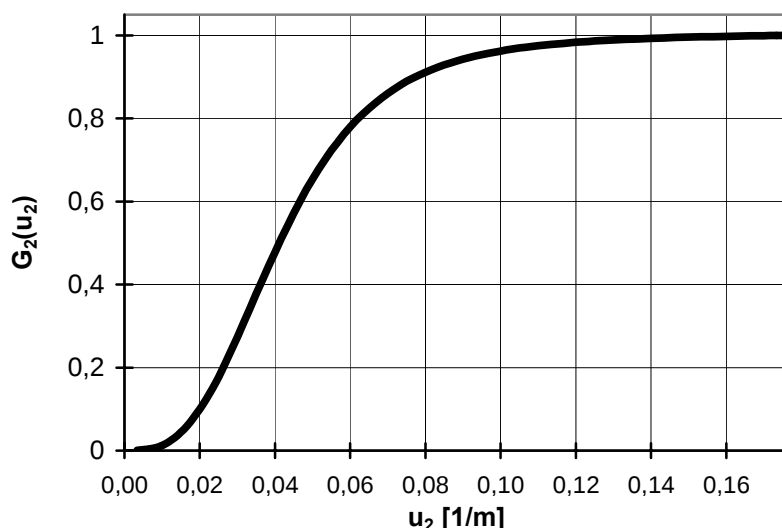
Szczegółowa postać rozkładu $g_2(u_2)$ jest następująca:

$$g_2(u_2) = 115565,1 \int_0^{0,18} u_1^{3,04} \exp \left[- \left(\frac{u_1^2}{0,015} \right)^{1,52} \right] \frac{u_2^3 u_1^5}{(0,015 u_1^4 + 11 u_2^4)^2} du_1 \quad (10.55)$$

Rozkład $g_2(u_2)$ wyliczono metodą numeryczną. Na rysunkach 10.21 i 10.22 przedstawione są odpowiednio funkcja gęstości rozkładu i dystrybuanta rozkładu syntetycznej zmiennej losowej U_2 .

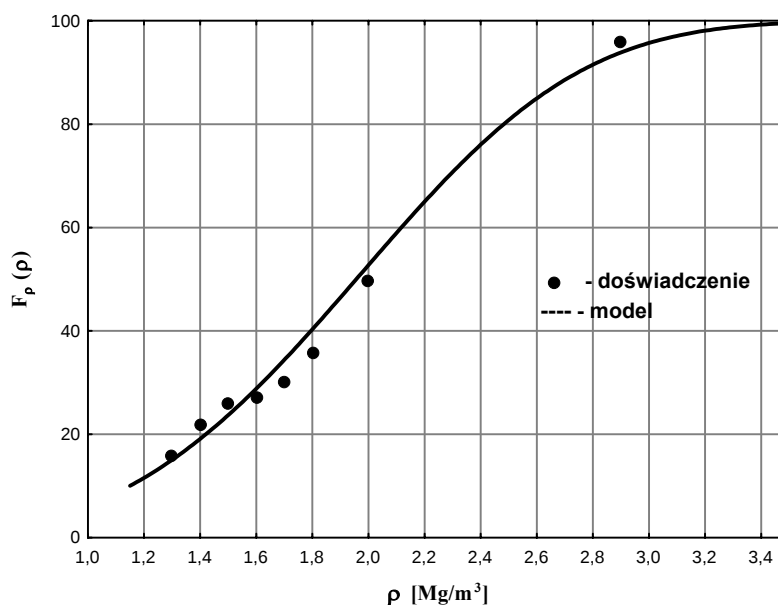


Rys.10.21. Funkcja gęstości rozkładu syntetycznej zmiennej losowej własności geometrycznych



Rys. 10.22. Dystrybuanta rozkładu syntetycznej zmiennej losowej własności geometrycznych

Funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania jest określona wzorem (10.21), w którym występuje funkcja gęstości rozkładu zmiennej Y_2 . Funkcja ta określona jest wzorem (10.31) przez parametry rozkładu gęstości w próbce ρ_c i k_n $\left(y_{2c} = 5,33 \sqrt{\frac{\rho_c - \rho_o}{\rho_o}} \right)$. Na podstawie wyników analizy densymetrycznej podanej w tabeli 9.1 wyliczono dystrybuantę empiryczną rozkładu gęstości, do której dopasowano rozkład Weibulla. Na rysunku 10.23 przedstawiona jest dystrybuanta rozkładu gęstości wraz z parametrami rozkładu ρ_c i k_n .



Rys. 10.23. Dystrybuanta rozkładu gęstości ziaren w nadawie: $\rho_c = 2,17 \text{ [Mg/m}^3\text{]}$; $k_n = 3,54$

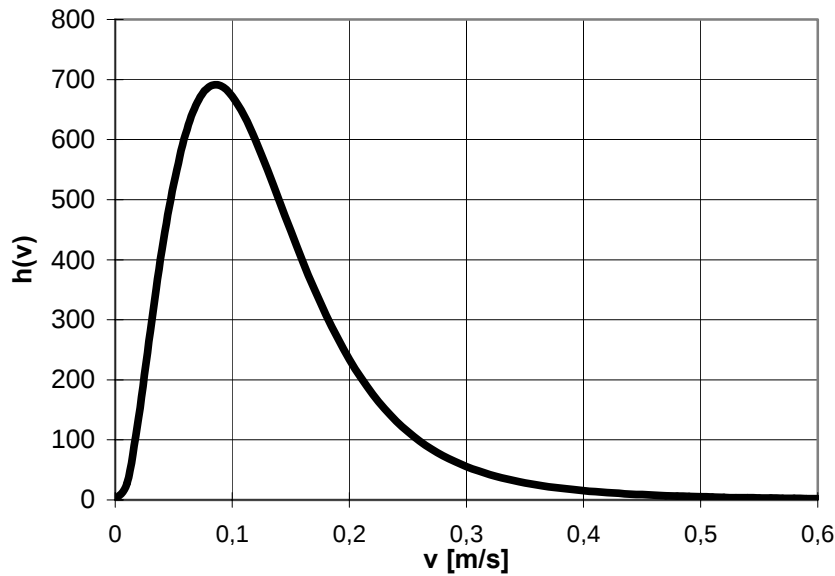
Na tej podstawie wyliczono szczegółową postać funkcji gęstości rozkładu zmiennej Y_2 :

$$f_2(y_2) = 2,43 \cdot 10^{-4} y_2 (y_2^2 + 28,41)^{2,68} \exp \left[- \left(\frac{y_2^2 + 28,41}{57,68} \right)^{3,54} \right] \quad (10.56)$$

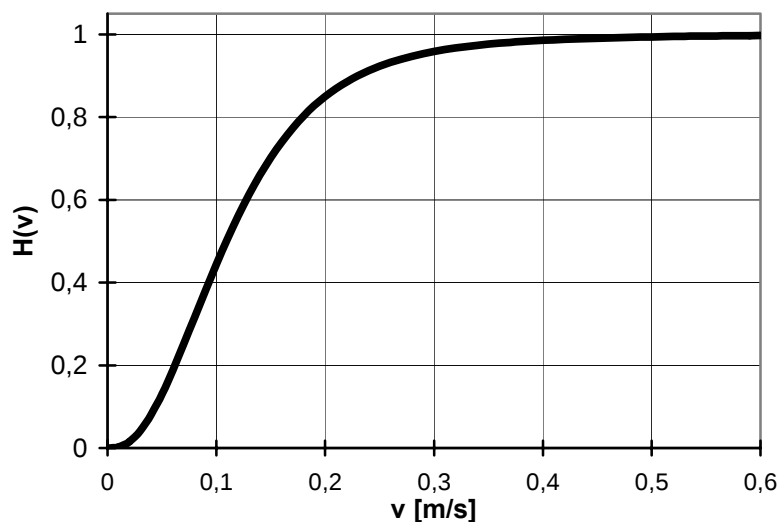
Wobec tego funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania ziaren w próbce nadawy polidispersyjnych ziaren nieregularnych na podstawie wzoru (10.21) jest następująca:

$$h(v) = 28,08 \int_{1,22}^{7,9} \left\{ (y_2^2 + 28,41)^{2,54} \exp \left[- \left(\frac{y_2^2 + 28,41}{57,68} \right)^{3,54} \right] \times \right. \\ \left. \int_0^{0,18} u_1^{3,04} \exp \left[- \left(\frac{u_1^2}{0,015} \right)^{1,52} \right] \frac{v^3 y_2^5 u_1^5}{(0,015 y_2^4 u_1^4 + 11 v^4)^2} du_1 \right\} dy_2 \quad (10.57)$$

Rozkład $h(v)$ wyliczono metodą numeryczną. Na rysunkach **10.24** i **10.25** wykreślono odpowiednio funkcję gęstości i dystrybuantę rozkładu prędkości opadania w próbce polidispersyjnej nadawy ziaren nieregularnych.



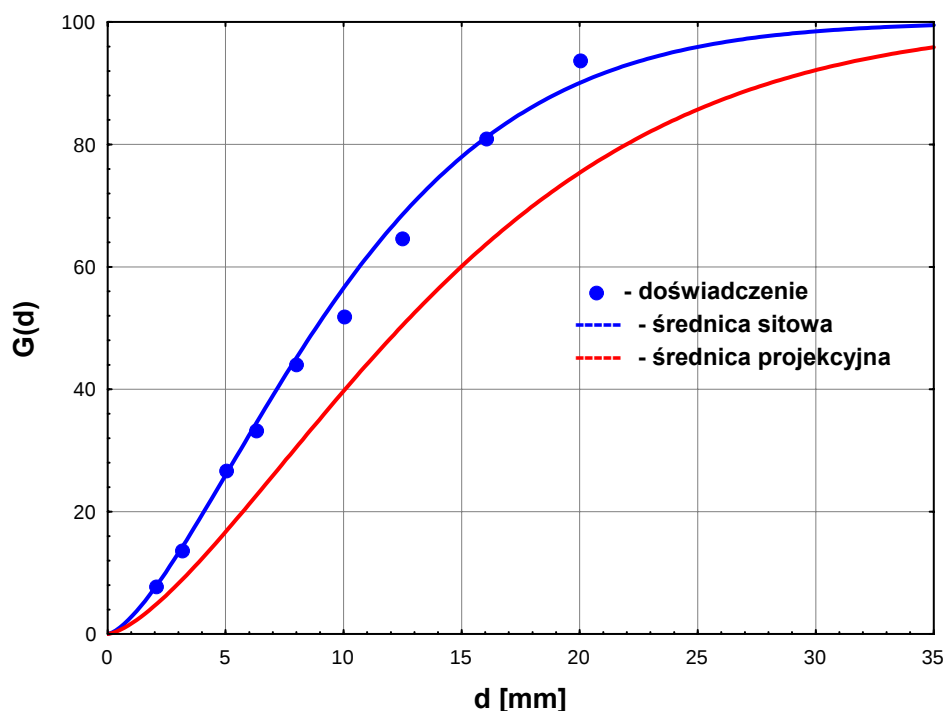
Rys.10.24. Funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania ziaren nieregularnych w nadawie



Rys. 10.25. Dystrybuanta rozkładu prędkości opadania ziaren nieregularnych w nadawie

10.5.3.2. Rozkład prędkości opadania w odpadach ziaren nieregularnych

Sposób postępowania przy wyliczaniu rozkładu prędkości opadania w odpadach jest analogiczny jak w przypadku nadawy. Dla wyliczenia rozkładu prędkości zgodnie ze wzorem (10.21) konieczne są rozkłady średnicy projekcyjnej i współczynników kształtu, czyli syntetycznej zmiennej losowej własności geometrycznych oraz rozkładu gęstości w odpadach. Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli 9.1 wykreślono dystrybuantę rozkładu średnicy sitowej i średnicy projekcyjnej, do których dopasowano rozkład Weibulla. Dystrybuanty tych rozkładów przedstawione są na rys. 10.26 wraz z parametrami rozkładów.

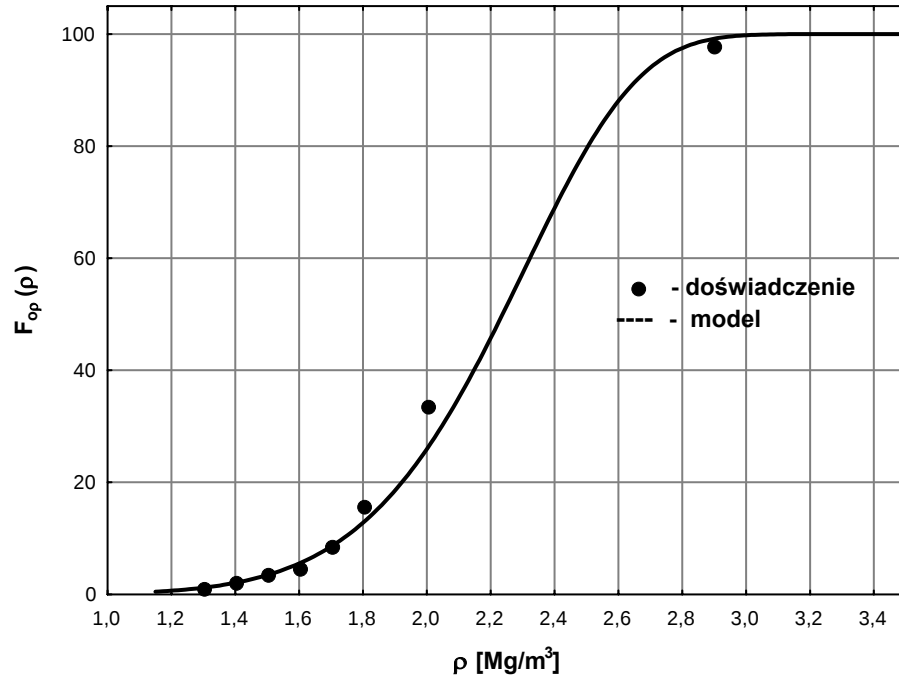


Rys. 10.26. Dystrybuanty rozkładu średnicy sitowej i projekcyjnej ziaren w odpadach:
 $d_{os} = 11,32 \text{ mm}$, $d_{op} = 15,9 \text{ mm}$, $k_p = 1,47$

Na tej podstawie zgodnie ze wzorem (10.54) funkcję gęstości rozkładu syntetycznej zmiennej losowej w odpadach przedstawia wzór:

$$g_{o2}(u_2) = 85474,68 \int_0^{0,18} u_1^{2,94} \exp \left[- \left(\frac{u_1^2}{0,0159} \right)^{1,47} \right] \frac{u_2^3 u_1^5}{(0,0159 u_1^4 + 11 u_2^4)^2} du_1 \quad (10.58)$$

Korzystając z wyników analizy densymetrycznej odpadów wykreślono dystrybuantę rozkładu gęstości, do której dopasowano rozkład Weibulla. Rozkład ten jest przedstawiony na rys. 10.27 wraz z parametrami rozkładu ρ_c i k_n .



Rys. 10.27. Dystrybuanta rozkładu gęstości ziaren w odpadach: $\rho_c = 2,35 \text{ Mg/m}^3$, $k_n = 7,46$

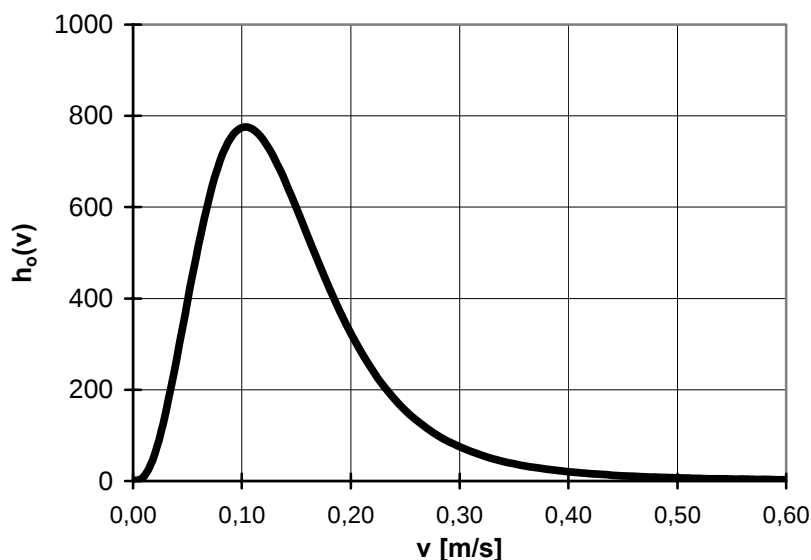
W związku z tym rozkład zmiennej losowej Y_2 zgodnie ze wzorem (10.31) jest następujący:

$$f_{o2}(y_2) = 7,05 \cdot 10^{-11} y_2 (y_2^2 + 28,41)^{6,46} \exp \left[- \left(\frac{y_2^2 + 28,41}{61,13} \right)^{7,46} \right] \quad (10.59)$$

Funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania ziaren nieregularnych na podstawie wzoru (10.21) wyraża się następującym wzorem:

$$h_o(v) = \left\{ 6,02 \cdot 10^{-6} \int_{1,2}^{7,9} (y_2^2 + 28,41)^{6,46} \exp \left[- \left(\frac{y_2^2 + 28,41}{61,13} \right)^{7,46} \right] \times \right. \\ \left. \times \int_0^{0,18} u_1^{2,94} \exp \left[- \left(\frac{u_1^2}{0,0159} \right)^{1,47} \right] \frac{v^3 y_2^5 u_1^5}{(0,015 u_1^4 y_2^4 + 11 v^4)^2} du_1 \right\} dy_2 \quad (10.60)$$

Na rys. 10.28 wykreślono funkcję gęstości rozkładu prędkości opadania w odpadach. Funkcja ta wyraz z analogiczną funkcją dla nadawy posłuży do wyliczenia współrzędnych krzywej rozdziału.



Rys.10.28. Funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania ziaren nieregularnych w odpadach

10.5.3.3. Rozkład prędkości opadania w nadawie ziaren sferycznych

Przy wyliczaniu rozkładu prędkości opadania w tym przypadku założono, że ziarna są kulami o średnicy równej średnicy projekcyjnej, a rozkład tej średnicy jest przedstawiony na rys. 10.20. Innymi słowy wyznaczenie tego rozkładu stanowi symulację jaki byłby rozkład prędkości opadania ziaren w analizowanej próbce nadawy, gdyby ziarna miały kształt kulisty. Rozkład gęstości ziaren w nadawie podany jest na rys. 10.23. Prędkość opadania jest iloczynem dwóch zmiennych losowych Y_2 i U_1 . Funkcja gęstości rozkładu zmiennej Y_2 jest wyrażona wzorem (10.56), natomiast funkcja gęstości rozkładu zmiennej U_1 według wzoru (10.52) jest następująca:

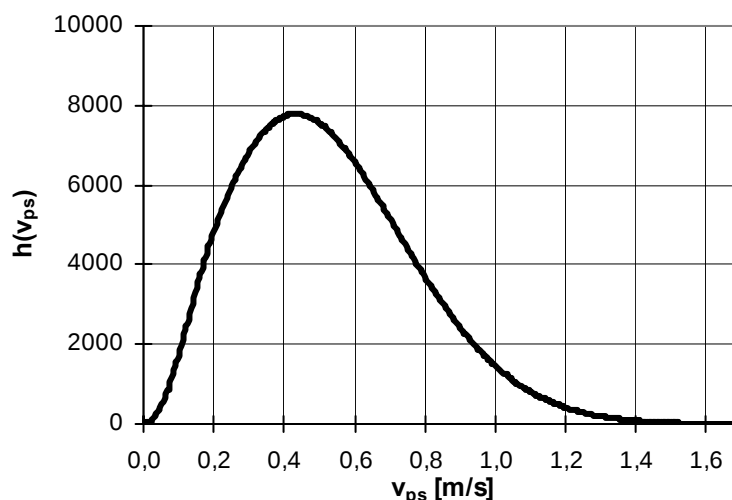
$$g_1(u_1) = 175161,5 u_1^{2,04} \exp \left[- \left(\frac{u_1^2}{0,015} \right)^{1,52} \right] \quad (10.61)$$

W związku z tym zgodnie ze wzorem (10.24) funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania w nadawie ziaren sferycznych jest wyrażona następującym wzorem:

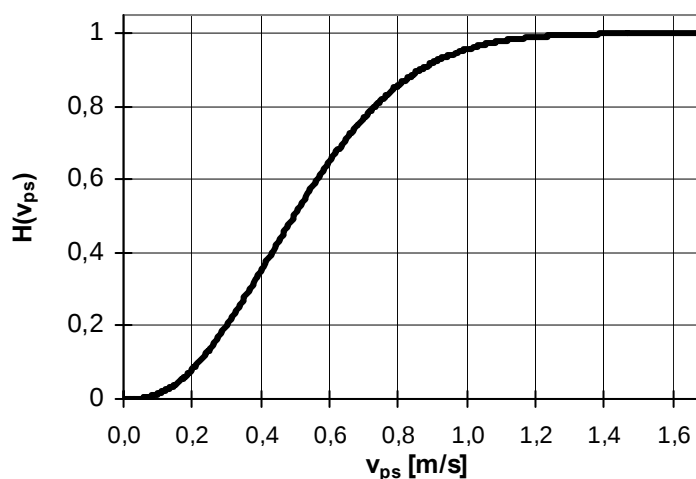
$$h(v_{ps}) = 42,56 \int_{1,2}^{7,7} (y_2^2 + 28,41)^{2,54} \exp \left[- \left(\frac{y_2^2 + 28,41}{56,39} \right)^{3,54} \right] \left(\frac{v_{ps}}{y_2} \right)^{2,02} \times$$

$$\times \exp \left[- \left(\frac{v_{ps}^2}{0,015 y_2^2} \right)^{1,51} \right] dy_2 \quad (10.62)$$

Rozkład (10.62) wyznaczono numerycznie.



Rys.10.29. Funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania ziaren sferycznych w nadawie



Rys. 10.30. Dystrybuanta rozkładu prędkości opadania ziaren sferycznych w nadawie

Na rysunkach 10.29 i 10.30 wykreślono odpowiednio funkcję gęstości rozkładu oraz dystrybuantę rozkładu prędkości opadania ziaren sferycznych w nadawie.

Porównując rozkłady prędkości opadania w nadawie ziaren nieregularnych (rys. 10.24) oraz w nadawie ziaren sferycznych można stwierdzić, że w tym przypadku nieregularny kształt ziaren w większym stopniu zmniejsza różnicę prędkości opadania ziaren niż w przypadkach monodispersyjnych ziaren sferycznych i ziaren nieregularnych.

11. WPŁYW ROZKŁADU WŁASNOŚCI FIZYCZNYCH I GEOMETRYCZNYCH ZIAREN NA DOKŁADNOŚĆ ROZDZIAŁU

Uzyskane w rozdziale 8 równanie krzywej rozdziału i zależność rozproszenia prawdopodobnego od wielkości ziarna oraz współczynników kształtu, jak również rozkłady prędkości opadania wyliczone dla ziaren nieregularnych i sferycznych w rozdziale 10, posłużą do analizy wpływu rozkładu właściwości fizycznych i geometrycznych na wielkość imperfekcji i rozproszenia prawdopodobnego będących miarą dokładności rozdziału.

11.1. Wpływ rozkładu współczynników kształtu na dokładność rozdziału

Dysponując funkcjami gęstości rozkładów prędkości opadania w odpadach i nadawie monodispersyjnych ziaren nieregularnych (klasa 8 – 10 mm) wyliczono liczby rozdziału dla odpadów i danej wartości prędkości opadania korzystając ze wzoru:

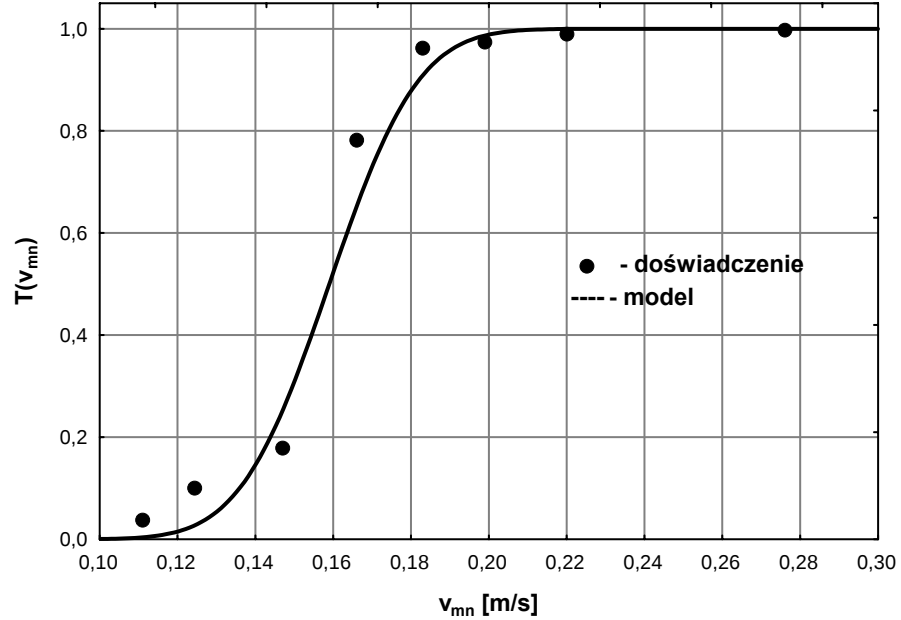
$$T_v = \gamma_o \frac{h_o(v_{mn})}{h(v_{mn})} \quad (11.1)$$

gdzie: T_v – liczba rozdziału dla prędkości v , γ_o – wychód odpadów, $h_o(v_{mn})$ – funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania w odpadach klasy 8 – 10 mm (wzór 10.49 i rys. 10.19), $h(v_{mn})$ – funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania w nadawie klasy 8 – 10 mm (wzór 10.48 i rys. 10.14).

Do uzyskanej w ten sposób empirycznej krzywej rozdziału dopasowano zależność modelową, która jest wyrażona przez dystrybucję rozkładu normalnego. Z dopasowania uzyskano wartość rozproszenia prawdopodobnego oraz wartość prędkości podziałowej. Na rys. 11.1 przedstawiono krzywą rozdziału uzyskaną z dopasowania. Jej równanie wyraża się następującym wzorem (wzór 8.24):

$$T(v) = \phi \left(\frac{v - 0,159}{0,018} \right) \quad (11.2)$$

Indeks korelacji krzywoliniowej jest większy od 0,99. Wartość prędkości podziałowej jest równa $v_r = 0,159$ m/s, natomiast rozproszenie prawdopodobne, na podstawie wzoru (8.26) $E_p = 0,012$ m/s. Imperfekcja zgodnie z definicją wyrażoną wzorem (6.16) jest równa $I_{mn} = \frac{E_p}{v_r} = 0,076$.



Rys. 11.1. Krzywa rozdziału próbki monodispersyjnych ziaren nieregularnych

Dla oceny wpływu rozkładu współczynników kształtu na dokładność rozdziału posłużono się zależnością analogiczną do zależności (6.17) w odniesieniu do prędkości opadania jako argumentu rozdziału:

$$\Delta I_{mn} = I_{mn} - I_o = a \operatorname{tg} \alpha_{mn} \quad (11.3)$$

gdzie: ΔI_{mn} – zmiana imperfekcji, I_o i a – stałe, $\operatorname{tg} \alpha_{mn} = \frac{\Delta \gamma_{mn}(\Delta v)}{\Delta v}$, $\Delta \gamma_{mn}(\Delta v)$ – udział w nadawie ziaren z przedziału prędkości opadania $(v_r - \Delta v, v_r + \Delta v)$, $\Delta v = \pm 0,04$ m/s – przedział prędkości opadania wokół prędkości podziałowej.

Wyboru szerokości przedziału Δv dokonano przez analogię z szerokością przedziału gęstości $\Delta \rho = \pm 0,1 \text{ Mg/m}^3 \cong \frac{1}{8}(2,0 - 1,25) \text{ Mg/m}^3$, który Belugu zaproponował we wzorze (6.17). Na podstawie rysunku 10.14 $\Delta v = \frac{1}{8} \cdot 0,32$.

W drugim wariancie wielkość $\operatorname{tg} \alpha_{mn}$ można traktować jako nachylenie stycznej do funkcji dystrybuanty $H(v_{mn})$ w punkcie $v_{mn} = v_r$.

Analogiczne do (11.3) równanie można zapisać dla rozdziału ziaren sferycznych:

$$\Delta I_{ms} = I_{ms} - I_o = a \operatorname{tg} \alpha_{ms} \quad (11.4)$$

przy czym występujące w tym równaniu wielkości mają podobną interpretację jak w równaniu (11.3) tylko w odniesieniu do ziaren sferycznych.

Dzieląc stronami równanie (11.3) przez równanie (11.4) otrzymuje się:

$$\frac{\Delta I_{mn}}{\Delta I_{ms}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{mn}}{\operatorname{tg} \alpha_{ms}} = \frac{\Delta \gamma_{mn}(\Delta v)}{\Delta \gamma_{ms}(\Delta v)} \quad (11.5)$$

Z równania (11.5) mając rozkłady prędkości opadania ziaren nieregularnych i sferycznych w nadawie można wyliczyć stosunek procesowych zmian imperfekcji przy rozdziale ziaren nieregularnych i sferycznych w tych samych warunkach. Z rys. **10.15** dla $v_r = 0,159$ m/s $H(0,159) \cong 82\%$ oraz $\Delta \gamma_{mn}(\Delta v) \cong 28\%$. Z kolei dla ziaren sferycznych na podstawie rysunku **10.10** dla $H = 82\%$ prędkość $v_{ms} = 0,68$ m/s. Udział w nadawie ziaren sferycznych z przedziału prędkości $(0,68 - \Delta v; 0,68 + \Delta v)$ jest równy $\Delta \gamma_{ms}(\Delta v) \cong 16\%$. W związku z tym ze wzoru (11.5):

$$\frac{\Delta I_{mn}}{\Delta I_{ms}} = \frac{28}{16} = 1,75 \quad (11.6)$$

Dla wariantu drugiego, biorąc pod uwagę stosunek nachyleń stycznej do funkcji obu dystrybuant odpowiednio w punktach $0,159$ m/s i $0,68$ m/s otrzymuje się:

$$\frac{\Delta I_{mn}}{\Delta I_{ms}} = \frac{310}{185} = 1,68 \quad (11.7)$$

W związku z tym na podstawie uzyskanych wyników można powiedzieć, że w przypadku badanej próbki węgla nieregularny kształt ziaren pociąga za sobą średnio o około 70% większą zmianę imperfekcji procesowej niż w przypadku rozdziału w tych samych warunkach próbki monodispersyjnych ziaren sferycznych. Wzrost ten jest skutkiem zmniejszenia się różnicy prędkości opadania ziaren nieregularnych w stosunku do różnicy prędkości opadania ziaren sferycznych.

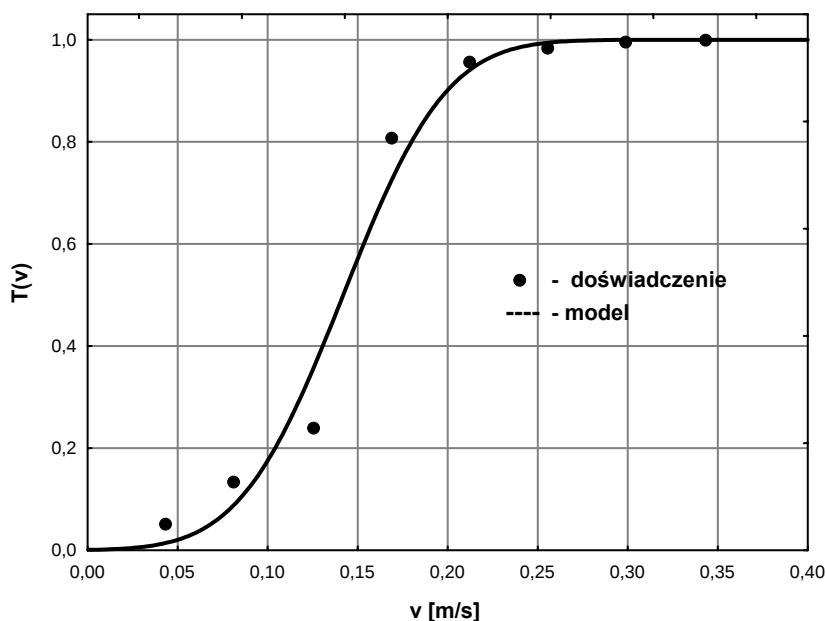
Przy zmniejszających się wielkościach ziaren, dla tych samych rozkładów gęstości i współczynników kształtu, rozproszenie będzie rosło, bo zmniejsza się różnica w prędkościach opadania i zmniejszać się będzie średnia droga swobodna większej liczby ziaren. W związku z tym dochodzić będzie do częstszych zderzeń pomiędzy ziarnami, co prowadzi do wzrostu oddziaływań pomiędzy nimi.

11.2. Wpływ rozkładu wielkości ziarna na dokładność rozdziału

Ocenę dokładności rozdziału dla przypadku polidispersyjnej nadawy ziaren nieregularnych należy odnosić do dokładności rozdziału nadawy ziaren sferycznych. Na podstawie rozkładów prędkości opadania w odpadach i nadawie polidispersyjnych ziaren nieregularnych wyrażonych przez odpowiednie funkcje gęstości rozkładów: dla nadawy (wzór 10.57 i rys. 10.24) oraz odpadów (wzór 10.60 i rys. 10.28) wyliczono współrzędne krzywej rozdziału według prędkości opadania. Do krzywej empirycznej dopasowano dystrybuantę rozkładu normalnego. Równanie krzywej rozdziału wyraża się następującym wzorem:

$$T(v) = \Phi\left(\frac{v - 0,142}{0,045}\right) \quad (11.8)$$

Na rys. 11.2 przedstawiona jest modelowa krzywa rozdziału wraz z punktami doświadczalnymi. Indeks korelacji krzywoliniowej jest większy od 0,99.



Rys. 11.2. Krzywa rozdziału nadawy ziaren nieregularnych

Jak wynika z równania (11.8) prędkość podziałowa jest równa $v_r = 0,142$ m/s, natomiast rozproszenie prawdopodobne $E_p = 0,670,045 = 0,03$ m/s oraz imperfekcja $I_{pn} = 0,212$.

Porównując funkcję gęstości rozkładu prędkości opadania w próbce monodispersyjnych ziaren sferycznych (rys. 10.18) oraz w próbce polidispersyjnych ziaren sferycznych (rys. 10.29) można powiedzieć, że analiza dokładności rozdziału według prędkości

opadania doprowadzi do wniosku iż imperfekcja przy rozdziale próbki polidispersyjnej będzie niższa niż przy rozdziale próbki monodispersyjnej. Wynika to z większej różnicy prędkości opadania ziaren w próbce polidispersyjnych ziaren sferycznych. Te większe różnice prędkości opadania są efektem szerszego przedziału zmienności wielkości ziarna, gdyż różnica w rozkładach gęstości jest nieznaczna.

Analogicznie jak w poprzednim paragrafie dla oceny wpływu rozkładu własności geometrycznych na dokładność rozdziału porównano zmiany imperfekcji procesowej dla przypadku rozdziału próbki ziaren nieregularnych i ziaren sferycznych korzystając ze wzoru:

$$\frac{\Delta I_{pn}}{\Delta I_{ps}} = \frac{\Delta \gamma_{pn}(\Delta v)}{\Delta \gamma_{ps}(\Delta v)} \quad (11.9)$$

gdzie: ΔI_{pn} i ΔI_{ps} – odpowiednio zmiany imperfekcji przy rozdziale próbek nadawy ziaren nieregularnych i sferycznych, $\Delta \gamma_{pn}(\Delta v)$ i $\Delta \gamma_{ps}(\Delta v)$ - odpowiednie udziały w nadawach ziaren z przedziału prędkości opadania $(v_r - \Delta v, v_r + \Delta v)$.

Na podstawie rysunku **10.25** $H(v_r = 0,142) = 66,87\%$ oraz $\Delta \gamma_{pn}(\Delta v) = 35,08\%$. Z rys. **10.30** dla $H(v_{ps}) = 0,6687$, $v_{ps} = 0,614$ m/s natomiast $\Delta \gamma_{ps}(\Delta v) = 10,30\%$. Wobec czego

$$\frac{\Delta I_{pn}}{\Delta I_{ps}} = \frac{35,08}{10,30} = 3,4 \quad (11.10)$$

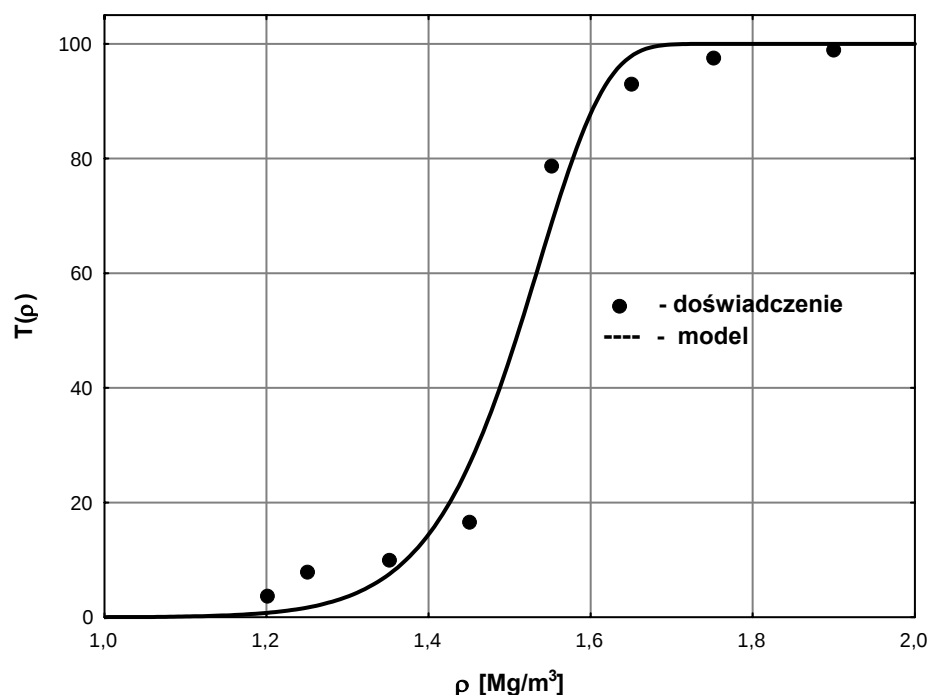
Tak znaczna różnica pomiędzy zmianami imperfekcji dla ziaren nieregularnych i sferycznych wynika z blisko trzykrotnego zawężenia przedziału zmienności prędkości opadania ziaren nieregularnych w stosunku do ziaren sferycznych. Ujawnia się tutaj wpływ rozkładu syntetycznej zmiennej losowej własności geometrycznych U_2 (rys. **10.21**) o dużej asymetrii dodatniej znacznie większej niż asymetria dodatnia zmiennej A (rys. **10.15**) w przypadku próbki monodispersyjnych ziaren nieregularnych. Duża asymetria zmiennej A jest wynikiem nałożenia się dwóch rozkładów o dodatnich asymetriach: rozkładu współczynników kształtu (zmiennej A) oraz rozkładu wielkości ziarna (zmiennej D_p). Można więc powiedzieć, że na dokładność rozdziału próbki polidispersyjnych ziaren nieregularnych ma wpływ charakter (asymetria) rozkładów współczynników kształtu i wielkości ziarna.

11.3. Rozproszenie prawdopodobne wrodzone i dokładność rozdziału

W poprzednich podrozdziałach efektywność (dokładność) rozdziału określano na podstawie krzywych rozdziału, gdy argumentem rozdziału była prędkość opadania ziarna. Rozkład tej cechy w próbce jest zależny od rozkładu własności fizycznych (gęstości) i geometrycznych ziarna. Przy tym samym rozkładzie gęstości rozkład prędkości opadania może się zmieniać w zależności od rozkładu własności geometrycznych. A ponieważ dokładność rozdziału, jak było to pokazane w poprzednich podrozdziałach, jest zależna od rozkładu lub od różnicy prędkości opadania, w związku z czym na dokładność rozdziału ma wpływ rozkład własności geometrycznych.

W praktyce wzbogacania i oceny wyników rozdziału w osadzarce przyjęło się stosować krzywe rozdziału, gdy argumentem rozdziału jest gęstość ziarna. Gęstość jest argumentem rozdziału w przypadku wzbogacania próbki monodispersyjnych ziaren sferycznych. Wówczas własności geometryczne mają ustalone wartości identyczne dla wszystkich ziaren, a rozkład prędkości opadania jest zależny jedynie od rozkładu gęstości ziarna. Chociaż rozkład gęstości ziaren w próbce jest niezależny od rozkładu własności geometrycznych, to ocena dokładności rozdziału urządzenia na podstawie gęstości, w którym zachodzi rozwarstwienie ziaren według prędkości opadania jest obarczone pewnym błędem, ze względu na istnienie rozproszenia prawdopodobnego wrodzonego, niezależnego od warunków przebiegu procesu, a zależnego od rozkładu własności geometrycznych.

Na rys. **11.3** wykreślono krzywą rozdziału na podstawie wyników analiz densymetrycznych zamieszczonych w tabeli **9.1** dla klasy 8 – 10 mm.



Rys. 11.3. Krzywa rozdziału dla klasy ziarnowej 8 – 10 mm

Jak wykazały badania innych autorów (Paul i inni, 1998, Gottfried, 1978) krzywe rozdziału dla osadzarek z gęstością jako argumentem rozdziału są krzywymi asymetrycznymi i są dobrze aproksymowane przez rozkład Weibulla. Z tego względu do empirycznej krzywej rozdziału dopasowano rozkład Weibulla. Jej równanie oraz wartości gęstości rozdziału, rozproszenia prawdopodobnego i imperfekcji są następujące:

$$T(\rho) = 100 \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{\rho}{1,54} \right)^{19,5} \right] \right\} \quad (11.11)$$

$$\rho_r = 1,505 \text{ Mg/m}^3, \quad E_p = 0,0605 \text{ Mg/m}^3, \quad I = 0,12$$

Na rys. 11.3 krzywa ciągła przedstawia zależność modelową. Indeks korelacji krzywoliniowej jest większy od 0,95. Wartość imperfekcji w tym przypadku jest większa, niż w sytuacji gdy analizuje się wyniki rozdziału na podstawie prędkości opadania ziarna. Ta różnica jest wynikiem tego faktu, że rozproszenie prawdopodobne w przypadku analizy wyników według gęstości jest sumą rozproszenia prawdopodobnego wrodzonego i procesowego. Natomiast, gdy analizuje się wyniki rozdziału według prędkości opadania, istnieje tylko rozproszenie procesowe. Można, więc powiedzieć, że różnica imperfekcji jest przyczynkiem pochodzącym od rozproszenia wrodzonego.

III. WNIOSKI

1. Graniczna prędkość opadania swobodnego ziarna jest złożonym argumentem rozdziału w procesie wzbogacania surowców w osadzarce. Rozkład tego argumentu w próbce jest funkcją rozkładów argumentów prostych tj. własności fizycznych i geometrycznych ziarna, którymi są gęstość, średnica projekcyjna oraz objętościowy i dynamiczny współczynnik kształtu ziarna.
2. Rozkłady argumentów prostych w badanych próbkach węgla są rozkładami typu gamma, przy czym w przypadku gęstości i średnicy projekcyjnej są to rozkłady Weibulla, natomiast w przypadku współczynników kształtu rozkłady Rayleigha.
3. Zakładając, że prędkość opadania jest zmienną losową będącą funkcją zmiennych losowych własności fizycznych i geometrycznych ziarna i wykorzystując twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa odnoszące się do funkcji zmiennych losowych, można wyprowadzić ogólne wzory na funkcję gęstości rozkładu prędkości opadania swobodnego ziarna dla warunków ruchu turbulentnego istniejącego w procesie wzbogacania w osadzarce.
4. Funkcja gęstości rozkładu granicznej prędkości opadania swobodnego jest w sposób jawny zależna od parametrów funkcji gęstości rozkładów: gęstości, średnicy projekcyjnej oraz współczynników kształtu ziarna. Dysponując rozkładami argumentów prostych można na podstawie algorytmu przedstawionego w pracy wyznaczyć rozkład granicznej prędkości opadania ziarna.
5. Funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania w próbce monodispersyjnych ziaren sferycznych jest rozkładem Weibulla o ujemnej asymetrii, natomiast w przypadku monodispersyjnych ziaren nieregularnych (ziaren o tej samej średnicy projekcyjnej i rozkładzie współczynników kształtu) rozkładem o asymetrii dodatniej. Nieregularny kształt ziarna obniża wartości prędkości opadania i przesuną prędkość najbardziej prawdopodobną w kierunku wartości mniejszych. Spowoduje to obniżenie wartości prędkości rozdzielczej przy ustalonym położeniu progu przelewowego i wzrost rozproszenia prawdopodobnego na skutek obniżenia stopnia niejednorodności rozkładu prędkości w próbce.
6. Matematyczna postać funkcji rozdziału, której argumentem jest prędkość opadania, uzyskana przy założeniu, że funkcja rozproszenia ziaren wokół wartości najbardziej prawdopodobnej stanowi rozkład Maxwella składowej pionowej prędkości ziarna, jest wyrażona przez dystrybuantę rozkładu normalnego. Jest to

jak do tej pory jedyne fizykalne uzasadnienie poprawności zastosowania dystrybuanty rozkładu normalnego jako równania krzywej rozdziału.

7. Opierając się na znanych faktach doświadczalnych przyjęto założenie, że zmienna losowa oznaczająca prędkość ziarna w komorze osadzarki jest sumą dwóch niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych, z których pierwsza uwarunkowana niejednorodnością pola prędkości cieczy jest niezależna od czasu, natomiast druga uwarunkowana ruchem centrów grupowania ziaren jest zależna od czasu. Pozwoliło to na uzyskanie ogólnego wyrażenia, w którym rozproszenie prawdopodobne jest zależne od własności geometrycznych ziarna, stopnia rozluzowania łoża, a przez to od amplitudy i częstości ruchu pulsacyjnego, stałej prędkości rozdziału i wydajności właściwej.
8. Skutkiem nieregularnego kształtu ziaren jest obniżenie dokładności rozdziału mierzonej wartością imperfekcji i rozproszenia prawdopodobnego. Ze wzrostem stopnia nieregularności ziaren (wzrostem dynamicznego współczynnika kształtu i zmniejszaniem się współczynnika objętościowego) zmniejsza się różnica prędkości opadania ziaren. Zawęża się przez to przedział zmienności prędkości opadania ziaren nieregularnych w stosunku do analogicznego przedziału dla ziaren sferycznych powodując wzrost nachylenia stycznej do funkcji dystrybuanty rozkładu prędkości opadania ziaren nieregularnych dla prędkości równej prędkości podziałowej, a przez to również wzrost imperfekcji i rozproszenia prawdopodobnego zgodnie ze wzorem (8.28).
9. Na dokładność rozdziału próbki polidispersyjnej ziaren nieregularnych ma wpływ charakter rozkładu współczynników kształtu i wielkości ziarna. Dodatnia asymetria tych rozkładów zawęża przedział zmienności prędkości opadania ziaren nieregularnych zmniejszając różnicę w prędkościach opadania w stosunku do ziaren sferycznych. Wynikiem tego jest obniżenie dokładności rozdziału wyrażające się wzrostem imperfekcji.
10. Ocena wyników rozdziału na podstawie gęstości daje wyższą wartość imperfekcji, niż analiza na podstawie prędkości opadania. Jest to związane z tym, że rozproszenie prawdopodobne w przypadku analizy wyników według gęstości jest sumą rozproszenia wrodzonego i procesowego, podczas, gdy przy analizie według prędkości opadania istnieje tylko rozproszenie procesowe. Różnica imperfekcji jest przyczynkiem pochodzącym od rozproszenia wrodzonego, którego wartość jest zależna od rozkładu własności geometrycznych.

11. Uzyskane w tej pracy wyniki skłaniają do zaproponowania kierunku dalszych badań podstaw procesu rozdziału w osadzarce. Do problemów, które należałoby rozwiązać można zaliczyć:

- opracowanie algorytmu wyliczania rozproszenia prawdopodobnego wrodzonego,
- wyznaczenie związku pomiędzy funkcjami rozdziału dla różnych argumentów rozdziału (gęstości i prędkości opadania),
- określenie związku funkcyjnego pomiędzy wskaźnikami rozdziału otrzymywanymi z analizy wyników z zastosowaniem różnych argumentów rozdziału.
- pełną weryfikację modelu rozproszenia prawdopodobnego uzyskanego z heurystycznego modelu funkcji rozdziału.

IV. SPIS LITERATURY

1. Abraham F.F., 1970. Functional dependence of drag coefficient of a sphere on Reynoldsnumber. *Phys. Fluids*, **13**, 2194-2195.
2. Akkerman J.E., 1966. Skorost svobodnogo padenija mineralnych zeren v židkostiach. *Obogaszczenie rud*, **no 6**, 22-25.
3. Araki Y., Jinnouchi Y., Tanaka M., Sawata Y., Kawashima S., Inoue J., 1994. Fuzzy control of the wave pattern of pulsation in air-pulsated jig. *Proc. XII ICPC*, **vol. 1**, Cracow, Poland, pp. 273-282.
4. Batchelor G.K., 1967. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, London.
5. Bedran N.G., Denisenko A.I., Pilov P.I., 1976. Rasczet skorosti svobodnogo dviženija mineralnych zeren v srede. *Izv. VUZ Gornyj Žurnal*, **no 9**, 141-144.
6. Belugu P., Danniei G., Pozetto L., 1959. Obogaszczenie ugolnoj mieloczi w ot-sadocznychmaszynach. *Materiały III Międzynarodnego Kongresa po Obogaszczeniu Ugla*. S 19-34.
7. Branspiz Y.A., Zagirnyak M.V., 1994. Refinement of stochastic model of gravitational coal preparation based on Einstein – Fokker – Planck equation. *Proc. 12 ICPC*, **vol. 1**, Cracov Poland, pp.231-242.
8. Breuer H., Jungmann A., 1986. New potentials in jigging separation for fine and ultra-fine fractions. *Aufbereitungs Technik*, **27**, 380-386.
9. Briens C.L., 1991. Correlation for the direct calculation of the terminal velocity of spherical particles in newtonian and pseudoplastic (power-law) fluids. *Powder Technology*, **67**, 87-91.
10. Brożek M., 1995. The distribution of selected physical properties in the crushed material. *Arch. Min. Sci.*, **40**, 83-100.
11. Brożek M., Surowiak A., 2004. Rozkład prędkości opadania ziaren w próbkach surowców mineralnych. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi*, **20**, 67-84.
12. Brożek M., Turno A., 2004. Wpływ własności geometrycznych ziarn na dokładność rozdziału w cieczach ciężkich zawiesinowych. *Gosp. Sur. Mineralnymi*, **20**, 85-99.
13. Brożek M., Surowiak A., 2005a. The dependence of distribution of settling velocity of spherical particles on the distribution of particle size and density. *Physicochem. Problems of Mineral Processing*, **39**, 199-210.

14. Brożek M., Surowiak A., 2005b. The distribution of settling velocity of non-spherical particles. *Acta Montanistica Slovaca*, **10**, 27-32.
15. Brożek M., Turno A., 2005. The physical model of partition of the enrichment process in a heavy liquid. *Arch. Min. Sci.*, **50**, 289-305.
16. Budryk W., 1949a. Wyniki działania płuczek i wialni w świetle teorii. Cz.1. *Przegląd Górniczy*, **5**, 1016-1031.
17. Budryk W., 1949b. Wyniki działania płuczek i wialni w świetle teorii. Cz.2. *Przegląd Górniczy*, **5**, 871-887.
18. Budryk W., Górski J., 1953. Określenie wskaźników dokładności pracy płuczek. *Archiwum Górnictwa i Hutnictwa*.
19. Byron F. W., Fuller R. W., 1975. *Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej*. PWN, Warszawa.
20. Chrisiansen E.B., Barker D.E., 1965. The effect of shape and density on the free settling of particles at high Reynolds numbers. *AIChE Journal*, **11**, 145-151.
21. Ciok K., Korbel K., Petryka L., Plechta J., Tokarz M., 1978a. Radioznacznikowe badanie przepływu materiału przez osadzarkę w przeróbce węgla kamiennego. *Mechanizacja i Automatyzacja Górnictwa*, **XVI**, nr 3, 32-36.
22. Ciok K., Korbel K., Petryka L., Śliwka I., Tokarz M., 1978b. Radiometryczne badanie rozkładu ziarn węgla i kamienia w łóżu osadzarki. *Mechanizacja i Automatyzacja Górnictwa*, **XVI**, nr 4, 27-30.
23. Concha F., Almendra E.R., 1979. Settling velocities of particulate systems, 1. Settling velocities of individual spherical particles. *Int. J. Mineral Processing*, **5**, 349-367.
24. De Jong T.P.R., Dalmijn W.L., 1997. The motion of particles in a homogeneous jig bed. *Proc. XX IMPC, Aachen*, **vol.2**, 569-578.
25. Derks W., Moskala R., Schneider-Kühn U., 1997. Wet Processing of Demolition Rubble with Pulsator Jigs. *Aufbereitungs – Technik*, **38**, 139 – 143.
26. Dietrych J., 1953. *Osadzarki*. PWT.
27. Driessenn M. G., 1954, The use of centrifugal force for cleaning fine coal. *Journal Inst. Fuel*.
28. Eicholz G., Moskala R., Schneider-Kühn U., Klefisch D., 1998. The Compensator Pulsator Jig – A Further Development of the Membrane Pulsator Jig. *Aufbereitungs – Technik*, **39**, 124 – 129.

29. Fallon N.E., Gottfried B.S., 1985. Statistical representation of generalized distribution data for float-sink coal cleaning devices: Baum jigs, Batac jigs, dynawhirlpools. *Int. J. Mineral Processing*, **15**, 231-236.
30. Fellensiek E., Erdmann W., 1991. Jigging - Historical and Technical Development. *Aufbereitungs-Technik*, **32**, 599-607.
31. Ferrara G., Bevilacqua P., Lorenzi L.D., Zanin M., 2000. Influence of particle shape on dynamic DMS processes. *Proc. XXI IMPC, Rome*, **P.A7**, pp. 95-104.
32. Finkey J., 1924. *Die wissenschaftlichen Grundlagen der nassen Erzaufbereitung*. Verlag Springer, Berlin.
33. Flemmer R.L.C., Banks L.C., 1986. On the drag coefficient of a sphere. *Powder Technology*, **48**, 217-221.
34. Fomienko T.G., Soroki I.P., 1960. Razrychlenije materiala v processie otsadki. *Izv. VUZ Cvetnaja Metalurgia*, **nr 3**, 45-48.
35. Ganser G.H., 1993. A rational approach to drag prediction of spherical and non-spherical particles. *Powder Technology*, **77**, 143-152.
36. Gerstenkorn T., Śródka T. 1972. *Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa.
37. Goroszko V.D., Rozenbaum R.D., Todes O.M., 1958. Pribliżennyje zakonomier-nosti gidravliki vzveszennogo słoja i stiepiennogo padienija. *Izv. VUZ Neft i Gaz*, **no 1**, 125-131.
38. Gottfried B.S., Jacobsen P.S., 1977. Generalized distribution curve for characterizing the performance of coal-cleaning equipment. *Bureau of Mines RI no 8238*, pp.1-21.
39. Gottfried B.S., 1978. A generalization of distribution data for characterizing the performance of float-sink coal cleaning devices. *Int. J. Mineral Processing*, **5**, 1-20.
40. Gottfried B.S., 1981. Statistical representation of generalized distribution data for float-sink coal cleaning devices: sand cones. *Int. J. Mineral Processing*, **8**, 89-91.
41. Haider A., Levenspiel O., 1989. Drag coefficient and terminal velocity of spherical and non-spherical particles. *Powder Technology*, **58**, 63-70.
42. Heiss J.F., Coull J., 1952. On the settling velocity of non-isometric particles in a viscous medium. *Chemical Engineering Progress*, **48**, 133-140.
43. Henning L., 2000. The State of the Art and Development of Coal Separation at Deutsche Steinkohle AG. *Aufbereitungs Technik*, **41**, 151-159.

44. Heywood H., 1937. Chemistry and Industry, **56**, Part.2, 149.
45. Hodenberg M., 1998. Gravimetric and optical particle analysis of mixed particle samples. Aufbereitungs Technik, **39**, 461-466.
46. Hughes F.S., 1967. The partition curve. Coal Preparation, **67**, 63-67.
47. Innuchi A., Kavashima S., 1979. Opređenje i optimizacija režima pulsacije v vozdušno-pulsacionnih maszinah. Proc. ICPC, Doneck, pp.165-177.
48. Ji C., 1994. Regular group mechanism of stratification of materials in jigging process. Proc. 12 ICPC, **vol. 1**, Cracow – Poland, pp. 253-262.
49. Jonkers A., Lyman G.J., Loveday G.K., 1998. Advances in modeling of stratification in jigs. Proc. XIII ICPC, **vol.I**, Brisbane – Australia, pp.266-276.
50. Jowett A., 1986. An appraisal of partition curves for coal-cleaning processes. Int. J. Mineral Processing, **16**, 75-95.
51. Jungmann A., Neumann T., 1991. alljigs for the separation of impurities out of gravel, sand and recycling material. Aufbereitungs Technik, **32**, 18-25.
52. Jungmann A., 1997. Building Rubble Treatment Using the alljig in Europe and USA. Aufbereitungs Technik, **38**, 543-549.
53. Kellerwessel H., 1993. Jigs and Their Particular Application for Recycling – Possibilities, Limits, Types. Aufbereitungs Technik, **34**, 521-530.
54. Kellerwessel, 1998. Concentration by Jigging – Current Investigations, Concepts and Models. Aufbereitungs Technik, **39**, 9-15.
55. King R.P., 1987. A quantitative model for gravity separation unit operations that rely on stratification. Proc. XII Int. Symp. On the application of computers and mathematics in the mineral industries. **vol.2**: Metallurgy, Johannesburg, pp.141-151.
56. Kirchberg H., Hentzschel W.A., 1958. A study of the behavior of particles in jigging. Proc. IV IMPC, Stockholm, pp.193-215.
57. Kizevalter B.V., 1957. Razrychlenije słoja czastic w processe otsadki. Gornyj Žurnal, **no3**, 61-67.
58. Kizevalter B.V., 1963. Razrychlenije słoja odnorodnych czastic pri razlicznych cikłach otcadki. Obogaszczenie Rud, **no 5**, 21-25.
59. Kordek J., 1999. Analiza granulometryczna wąskich klas ziarnowych materiału przygotowanego na sitach analitycznych. Gospodarka Surowców Mineralnych, **15**, 309-315.

60. Krzywda H., 1961. Krzywe rozdziału w procesie wzbogacania rud w osadzarkach. *Rudy i Metale*, **6**, 296-299.
61. Kuprin A.I., Klesznin A.A., Fedorenko G.I., 1983. Vlijanie poroznosti na effektivnost gidravliczeskoj otsadki. *Izv. VUZ Gornyj Žurnal*, no **4**, 129-132.
62. Laszczenko P.V., 1940. Gravitacionnyje metody obogaszczenija. Gostoptechizdat, Moskva.
63. Leja F., 1971. Rachunek różniczkowy i całkowity. PWN, Warszawa.
64. Lill G.D., Smith H.G., 1960. A study of the motion in a jig bed. *Proc. V IMPC*, London, pp. 515-535.
65. Madhav G.V., Chhabra R.P., 1994. Settling velocities of non-spherical particles in non-Newtonian polymer solutions. *Powder Technology*, **78**, 77-83.
66. Madhav G.V., Chhabra R.P., 1995. Drag on non-spherical particles in viscous fluids. *Int. J. Mineral Processing*, **43**, 15-29.
67. Marx G., Moskala R., Schneider-Kühn U., 1999. Gravity Separation with Wet Jigs. *Aufbereitungs Technik*, **40**, 215 - 224.
68. Mayer F.W., 1964. Fundamentals of a potential theory of the jigging process. *Proc. VII IMPC*, New York, pp. 75-86.
69. Mayer F.W., 1967. Allgemeine Grundlagen der T-Kurven. 2.Teil: Kritik der Kennwerte der T-Kurven. *Aufbereitungs Technik*, **8**, 673-678.
70. McDonald J.E., 1954. *J. Meteorol.*, **11**, 478.
71. Meloy T. P., Yang D. C., 1997. Packed jigs and minus 500 mesh particles. *Proc. XX IMPC*, Aachen, pp. 589-597.
72. Merinov N.F., 2001. Teoreticzkije osnovy gravitacionnych metodov obogaszczenija. *Izv. VUZ Gornyj Žurnal*, no **4-5**, 33-46.
73. Mesters K., Kurkowski H., 1997. Density Separation of Recycling Building Materials by Means of Jig Technology. *Aufbereitungs Technik*, **38**, 536-542.
74. Michell F.B., Suvarnapradip P., 1963. A study of jigging as applied to the concentration of alluvial material with particular reference to the possibility of automatic control of dilation. *Proc. VI IMPC*, Cannes, pp.283-301.
75. Minc D.M., 1953. O skorosti stesnennogo padienia tverdyh czastic w židkosti. *Gidrotechniczeskoe stroitelstvo*, no **5**, 24-28.
76. Mishra B. K., Adhikari B., 1999. Analysis of fluid motion during jigging. *Minerals Engineering*, **12**, 1469-1477.

77. Mishra B.K., S.P., 2001. A jig model based on the discrete element method and its experimental validation. *Int. J. Mineral Processing*, **63**, 177-189.
78. Mishra B.K., Mehrotra S.P., 1998. Modeling of particle stratification in jigs by the discrete element method. *Minerals Engineering*, **11**, 511-522.
78. Mohanty M.K., Honaker R.Q., Patwardhan A., 2002. Altair jig: an in-plant evaluation for fine coal cleaning. *Minerals Engineering*, **15**, 157-166.
79. Napier-Munn T.J., 1985. Use of density tracers for determination of the Tromp curve for gravity separation processes. *Trans. IMM, sec.C*, 47-53.
80. Nawrocki J., 1972. Budowa i eksploatacja osadzarek. *Skrypt uczelniany nr 408*.
81. Nepomniaszczij E.A., 1963. Rasczet pokazatelej processa grochoczenia i otsadki. *Obogaszczenie rud*, nr **6**, 20-23.
82. Nepomniaszczij E.A., 1964. K teorii otsadki tjażelych zeren v słoje koniecznoj tołszcziny. *Obogaszczenie rud*, nr **6**, 24-26.
83. Nepomniaszczij E.A., 1967. Nekotoryje rezultaty izuczenia kinetiki separirovania i smieszivania dispersnyh materialov. *Inżenerno – Fiziczeskij Žurnał*, **12**, 583-591.
84. Nesbitt A.B., Breytenbach W., van der Plas P.J., 2005. Characterisation of the pulse wave of an InLine Pressure Jig in a near density application. *Minerals Engineering*, **18**, 1-7.
85. Neumann Th., Snoby R.J., Strangalies W., 1995. The Fractionized separation of Impurities out of Sand and small Gravel with alljig-fine Grain Jigs. *Aufbereitungs Technik*, **36**, 562 – 567.
86. Neumann Th., Grotjohann P., 1998. Pumice Processing in the Neuwied Basin with alljig Air Pulsed Jigs. *Aufbereitungs Technik*, **39**, 234-238.
87. Nguyen-van A., Schulze H.J., Kmet S., 1994. A simple algorithm for the calculation of the terminal velocity of a single solid sphere in water. *Int. J. Mineral Processing*, **41**, 305-310.
88. Nguyen-van A., Stechemasser H., Zobel G., Schulze H.J., 1997. An improved formula for terminal velocity of rigid spheres. *Int. J. Mineral Processing*, **50**, 53-61.
89. Nio T.H., van Muijen H., 1988. Notes on IHC – Jigs in gravity concentration. *Proc. XVI IMPC, Stockholm*, **P.A**, pp.951-963.

90. Ociepa Z., Mączka W., 2000. Badanie wpływu kształtu ziarn na wyniki rozdziału w procesach wzbogacania grawitacyjnego. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi*, **16**, 59-75.
91. Olajossy A., 1995. Nature and meaning of forces occuring in the problems of gravitational enrichment. *Archives of Mining Sciences*, **40**, 247-265.
92. Olewskij V.A., 1953. O svobodnom padenii czastic v židkoj srede. *Trudy Instituta Mechanobr*, s.88-96.
93. Papee J.R., 1994. Relationship between the density composition of the feed and the jigging imperfetion. *Proc. 12 ICPC, Cracow – Poland*, **vol. 2**, pp.223-230.
94. Paszkowska E., 1985. Stochastyczna analiza procesu rozdziału węgla w osadarkach. Praca doktorska, Biblioteka Główna AGH, Kraków.
95. Paul A.D., Maronde C.P., Killmeyer R.P., 1998. Evaluation of mathematical functions for representing partition data: a case study. *Proc. XIII ICPC, Brisbane*, **vol.II**, pp.861-869.
96. Perry R.H., Chilton C.H., 1973. *Chemical Engineers Handbook*, International Student edn., McGraw – Hill - Kogakusha, Tokyo, 5th edn.
97. Ponomarev K.K., 1973. *Sostavlenie differencjalnych uravnień*. Izd. Vyszejszaja Szkoła, Minsk.
98. Povarov A.I., Rapolov K.I., Malova N.N., Movszovicz S.A., 1966. *Promyszlenyje ispytanija obrazcov vysokoproizvoditielnych otsadocznych maszin*. Obogaszczenie Rud, **no 6**, 44-50.
99. Prandtl L., 1956. *Dynamika przepływów*. PWN, Warszawa.
100. Rajvitsch I.D., 1973. O kinetike processa otsadki. *Izv. VUZ Cvetnaja Metallurgia*, **no 2**. 19-24.
101. Rajvitsch I. D., 1977. Statisticeskij analiz razpredielenia mineralnych zieren w rabocziej zonie obogatitielnych aparatow. *Izv. VUZ Cwietnaja Metallurgia*, **no 3**, 3-9.
102. Rafales-Lamarka E.E., 1962. K teorii otsadki. *Izv. VUZ Gornyj Žurnal*, 171-177.
103. Reid K.J., Lu Maixi, Zhang Shenggui, 1985. Coal-cleaning distribution curve simulation: fitting six different models by microcomputer. *Int. J. Min. Process.*, **14**, 291-299.
104. Richardson J.F., Zaki W.N., 1954. Sedimentation and fluidization. *Trans. Inst. Chem. Engrs.*, **32**, 35-53.

105. Rittinger P., 1867. Lehrbuch der Aufbereitungskunde. Berlin.
106. Saha G., Purohit N.K., Mitra A.K., 1992. Spherical particle terminal settling velocity and drag in Bingham liquids. *Int. J. Mineral Processing*, **36**, 273-281.
107. Samylin N.A., Zołotko A.A., Poczinok V.V., 1976. Otsadka. Izd. Nedra, Moskva.
108. Siwiec A., Tumidajski T., 1985. Mathematical model of ore processing in a jig based on the analysis of grain movements. *Archiwum Górnictwa*, **30**, 311-318.
109. Smirnova N.A., 1980. Metody termodynamiki statystycznej w chemii fizycznej. PWN, Warszawa.
110. Stark U., Muller A., 2005. Effective methods for measurement of particle size and shape. *Aufbereitungs Technik*, **45**, 6-16.
111. Stepura W. N., Kudriaszowa N. A., Demidoczkin W. L., 1999. Powyszenie efektywności raboty otsadocznych maszin pri obogaszczении zolotosoderzaszczich rud. *Cvetnyje metally*, **no 7**, 40-42.
112. Stępiński W., 1964. Wzbogacanie grawitacyjne, PWN, Warszawa.
113. Sun Ch., Sun Y., 1992. Study on jig cycle of movable-screen jig. . Proc. I Int. Conf. „Modern Process Mineralogy and Mineral Processing”, Beijing, China, pp. 334-339.
114. Sun Ch., Sun Y., 1993. A study on the cycle of movable screen jigs. Proc. XVIII IMPC, Sydney, **vol.2**, pp.357-360.
115. Szinkorenko S.F., 1958. K Issledovaniju processa pnevmaticzeskoj otsadki ygolnoj meloczi. Moskovskij Gornyj Institut, Moskva.
116. Szpetl F., Puncmanova I., Prohazka V., 1968. K voprosu o gravitacionnom razdelenii melkozernistogo ugla. Proc. VIII IMPC, Leningrad, **vol. I**, pp.325-334.
117. Sztaba K., 1956 a. Metoda statystyczna badania procesu klasyfikacji mokrej. *Archiwum Górnictwa*, **1**, 33-54.
118. Sztaba K., 1956 b. Krzywe rozdziału w procesie klasyfikacji mokrej. *Archiwum Górnictwa*, **1**, 167-197.
119. Sztaba K., 1992. Problems of taking into account shapes of mineral grains in flow classification. Proc. I Int. Conf. „Modern Process Mineralogy and Mineral Processing”, Beijing, China, p. 322-328.
120. Sztaba K., 2003. Identyfikacja i ocena wybranych właściwości surowców mineralnych oraz procesów ich przeróbki., Wyd. Sigmie PAN, Kraków.

121. Sztaba K., 2004. Influence of grain size upon falling velocity. *Physicochemical Problems of Mineral processing*, **38**, 207-220.
122. Tamilmani M., Kapur P.C., 1986. A heuristic model of the Tromp (distribution) curve. *Int. J. Mineral Processing*, **18**, 47-56.
123. Tanaka M., Jinnouchi Y., Sawata Y., Kawashima S., 1990. Effect of the wave pattern of pulsation on the performance of an air-pulsated jig. *Proc. XI ICPC, Tokyo*, p. 139-144.
124. Tarjan G., 1974. Application of distribution functions to partition curves. *Int. J. Mineral Processing*, **1**, 261-265.
125. Terra A., 1938. Essai d'une théorie de lavage. *Revue de l'Industrie Minérale*.
126. Thompson T.L., Clark N.N., 1991. A holistic approach to particle drag prediction. *Powder Technology*, **67**, 57-66.
127. Thomson R.S., Laros T.J., Aplan F.F., 1985. A study of jig cycles in the fine jigging of pyrite from coal. *Proc. XV IMPC, Cannes*, **vol.1**, pp. 293-306.
128. Tichonov O.N., 1968. Gravitacionnoje razdelenie mnogokomponentnyh mineralnyh smesej. *Obogaszczenie Rud*, **no 1**, 47-49.
128. Tichonov O.N., 1973. Vvedenie w dinamiku massoperenosa processov obogatitelnoj technologii. *Izd. Nedra, Leningrad*.
129. Trawinski H., 1976 a. Die mathematische Formulierung der Tromp-Kurve. P.1. Mathematical formulation of the Tromp curve. *Autbereitung Technik*, **17**, 248-254.
130. Trawinski H., 1976 b. Die mathematische Formulierung der Tromp-Kurve. P.2. Mathematical formulation of the Tromp curve. *Autbereitung Technik*, **17**, 449-459.
131. Tromp K.F., 1937. Neue Wege für Beurteilung der Aufbereitung von Steinkohlen, Glückauf.
132. Tsakalakis K.G., Stamboltzis G.A., 2001. Prediction of the settling velocity of irregularly shaped particles. *Minerals Engineering*, **14**, 349-357.
133. Tucker P., 1995. Modelling the Kelsey centrifugal jig. *Minerals Engineering*, **8**, 333-336.
134. Verhovskij I.M., Vinogradov N.N., Arutinov O.M., 1959. Issledovanie kinetiki procesa otsadki. *Izv. VUZ Gornyj Žurnal*, nr **10**, 141-148.
135. Vinogradov N. N., 1965. Izuczenije mehanizma rasslojenija zieren w processie otsadki. *Obogaszczenie uglej grawitacjonnymi metodami*, Nauka.

136. Vinogradov N. N., Rafales-Lamarka E., Kollodij K.K., Egorov N.S., Melik-Stepanova A.G., Gurvicz G.M., 1968. Novyje napravlenija teorii i technologii processa otsadki poleznych iskopajemych. Proc. VIII IMPC, Leningrad, pp. 279-291.
137. Wadell H., 1934. J. Franklin Inst., **217**, 459.
138. Weinstein R., 2005. Wzbogacanie węgla brunatnego na sucho z zastosowaniem powietrznej osadzarki pulsacyjnej airjig firmy allmineral. Kopaliny, nr 2, 4-8.
139. Williams R.A., Jia X., Clarke A.J., 1997. Verification of distinct element jigging models using positron emission tomography. Proc. XX IMPC, Aachen, **vol.2**, pp.579-588.
140. Witteveen H.J., Dalmijn W.L., Valk H.J.L., 1991. The porosity distribution in a jig. Proc. XVII IMPC, Dresden, **vol.III**, pp.9-20.
141. Witteveen H.J., Dalmijn W.L., Valk H.J.L., 1993. The response of an uniform jig bed in terms of the porosity distribution. Proc. XVIII IMPC, Sydney, **vol.2**, pp.361-367.
142. Yerriswamy P., Majumder A. K., Barnwal J. P., Govindarajan B., Rao T. C., 2003. Study on Kelsey jig treating Indian coal fines. Trans. Inst. Min. Metall.C, **112**, 206 – 210.
143. Zapała W., 1987. Fizyczno-probabilistyczny model krzywej rozdziału osadzarki. Zesz. Naukowe Politechniki Śl., **nr 926**, Górnictwo **z.160**, 85-102.
144. Zapała W., 1994. Theoretical model of the curve concerning separation of the jig. Proc. XII ICPC, Cracow, **vol.1**, 243-252.
145. Zarubin L.S., Jofa M.B., Korovin V.N., Bolotinskij E.M., Pzidaev V.F., Igumnov V.F., 1978. Technologiczeskaja efektivnost procesov gravitacionnogo obogaszczenia. Koks i Chimija. **No 7**, 6-8.

V. SPIS RYSUNKÓW

Rys. 1.1a. Model rozdziału w osadzarce Yanga	11
Rys. 1.1b. Migracja ziaren w komorze roboczej osadzarki Yanga	11
Rys. 2.1. Poglądowe tory ruchu ziaren w osadzarce	17
Rys. 2.2. Przemieszczenie środka ciężkości przed i po rozwarstwieniu	22
Rys. 2.3. Zmiana położenia środka ciężkości mieszanin dwuskładnikowych	23
Rys. 2.4. Ruch ziarna o gęstości ρ_2 w warstwie o gęstości ρ_1	25
Rys. 2.5. Zależność poglądowa koncentracji składnika o większej gęstości od wychodu produktu dolnego	26
Rys. 3.1. Schematyczne położenie warstw rozdziału i warstwy równowagi w osadzarce	28
Rys. 3.2. Zależność stałej k od częstości pulsacji	29
Rys. 3.3. Średnia statystyczna amplituda ruchu w funkcji wielkości ziaren	30
Rys. 3.4. Układ warstw elementarnych w osadzarce	32
Rys. 3.5. Zależności przemieszczania się centrów równowagi od czasu	32
Rys. 3.6. Przemieszczenie centrów grupowania ziaren dla frakcji densymetrycznych	33
Rys. 3.7. Zależność odchylenia standardowego od czasu	33
Rys. 4.1. Prędkość ziarna w zależności od liczby otaczających go ziaren	36
Rys. 4.2. Zależność współczynnika niestacjonarności od stosunku	37
Rys. 4.3. Mechanizm ruchu ziaren w osadzarce	38
Rys. 4.4. Zależność częstości ruchu pulsacyjnego od wielkości i gęstości ziaren	40
Rys. 4.5. Zależność częstości ruchu pulsacyjnego od zawartości ziaren ostrokrawędzistych w nadawie	41
Rys. 4.6. Wpływ częstości ruchu pulsacyjnego na amplitudę pulsacji i ciśnienia powietrza na wodę	41
Rys. 4.7. Zależność zużycia powietrza od częstości ruchu pulsacyjnego	42
Rys. 4.8. Oscylacja ziaren: koncentratu, produktu pośredniego i odpadów	43
Rys. 4.9. Przemieszczenie wody w ciągu jednego cyklu	45
Rys. 4.10. Poglądowe charakterystyki cykli pulsacji	46
Rys. 4.11. Zmiana stopnia rozluźniania materiału w ciągu jednego cyklu	48
Rys. 4.12. Cykl o podwójnej częstości	48
Rys. 4.13. Poglądowa zależność średniej wartości współczynnika rozluźniania od względnej amplitudy	49
Rys. 4.14. Poglądowa zależność średniej wartości współczynnika rozluźniania od względnej częstości pulsacji	49
Rys. 5.1. Zależność prędkości opadania od średnicy sitowej ziaren mineralnych	52
Rys. 5.2. Zależność współczynnika oporu od liczby Reynoldsa dla ziaren galeny	52
Rys. 5.3. Zależność współczynnika oporu od liczby Reynoldsa dla ziaren kwarcu	53
Rys. 5.4. Siła działająca na płaski krążek prostopadły do strumienia cieczy	55
Rys. 5.5. Siła działająca na płaski krążek prostopadły do strumienia cieczy nachylony pod kątem φ	55
Rys. 5.6. Siła oporu działająca na powierzchnię boczną stożka	56
Rys. 5.7. Siła działająca na powierzchnię kuli	57
Rys. 5.8. Model kuli z warstwą przyścienną	59
Rys. 5.9. Zależność współczynnika oporu od liczby Reynoldsa dla kuli	60
Rys. 5.10. Empiryczna zależność współczynnika oporu od liczby Reynoldsa	61
Rys. 6.1. Poglądowa krzywa rozdziału dla wzbogacania grawitacyjnego	71
Rys. 6.2. Krzywa rozdziału dla separacji idealnej	72
Rys. 6.3. Zależność imperfekcji od wydajności właściwej	72

Rys. 6.4. Zależność imperfekcji od wydajności właściwej dla różnych cykli pulsacji....	74
Rys. 6.5. Wpływ zawartości ziaren – 1 mm w nadawie na wartość imperfekcji.....	74
Rys. 6.6. Wskaźnik Driessenna w odniesieniu do teoretycznej krzywej rozdziału.....	75
Rys. 6.7. Zależność wskaźnika D od średnich wymiarów wzbogacanych ziaren	75
Rys. 6.8. Zależność dokładności rozdziału od czasu trwania i wydajności procesu	77
Rys. 8.1. Krzywa rozdziału dla trzech wartości prędkości	87
Rys. 10.1. Rozkład gęstości ziaren w klasie 2 – 3,15 mm	115
Rys. 10.2. Rozkład gęstości ziaren w klasie 3,15 – 5 mm	115
Rys. 10.3. Rozkład gęstości ziaren w klasie 8 – 10 mm	116
Rys. 10.4. Rozkład gęstości ziaren w klasie 16- 20 mm.....	116
Rys. 10.5. Rozkład gęstości ziaren w odpadach klasy 8 - 10 mm	117
Rys. 10.6. Histogram rozkładu średnicy projekcyjnej d_p w klasie 8 -10 mm.....	117
Rys. 10.7. Histogram rozkładu średnicy projekcyjnej w klasie 10 – 12,5 mm	118
Rys. 10.8. Histogram rozkładu średnicy projekcyjnej d_p w klasie 12,5 mm	118
Rys. 10.9. Histogram rozkładu średnicy projekcyjnej d_p w klasie 16 – 20mm	119
Rys.10.10. Zależność średniej wartości średnicy projekcyjnej od średniej wartości średnicy sitowej	120
Rys.10.11. Dystrybuanta rozkładu prędkości opadania ziaren w monodispersyjnej próbce ziaren: klasa 8 -10 mm.....	121
Rys.10.12. Dystrybuanta rozkładu prędkości opadania ziaren w odpadach monodispersyjnych: klasa 8 - 10 mm	121
Rys. 10.13. Histogram rozkładu objętościowego współczynnika kształtu k_1	122
Rys. 10.14. Histogram rozkładu objętościowego współczynnika kształtu k_2	123
Rys.10.15. Rozkład gęstości funkcji zmiennej losowej A	124
Rys. 10.16. Funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania ziaren nieregularnych w klasie 8 – 10 mm	125
Rys. 10.17. Dystrybuanta rozkładu prędkości opadania ziaren nieregularnych w klasie 8 – 10 mm	125
Rys. 10.18. Funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania ziaren sferycznych w klasie 8 – 10 mm	126
Rys. 10.19. Funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania ziaren nieregularnych w odpadach klasy 8 – 10 mm	127
Rys. 10.20. Dystrybuanty rozkładu średnicy sitowej i projekcyjnej ziaren w nadawie..	129
Rys.10.21. Funkcja gęstości rozkładu syntetycznej zmiennej losowej własności geometrycznych.....	129
Rys. 10.22. Dystrybuanta rozkładu syntetycznej zmiennej losowej własności geometrycznych.....	130
Rys. 10.23. Dystrybuanta rozkładu gęstości ziaren w nadawie.....	130
Rys.10.24. Funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania ziaren nieregularnych w nadawie	131
Rys. 10.25. Dystrybuanta rozkładu prędkości opadania ziaren nieregularnych w nadawie.....	132
Rys. 10.26. Dystrybuanty rozkładu średnicy sitowej i projekcyjnej ziaren w odpadach	133
Rys. 10.27. Dystrybuanta rozkładu gęstości ziaren w odpadach.....	134
Rys.10.28. Funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania ziaren nieregularnych w odpadach	135
Rys.10.29. Funkcja gęstości rozkładu prędkości opadania ziaren sferycznych w nadawie	136

<i>Rys. 10.30. Dystrybuanta rozkładu prędkości opadania ziaren sferycznych w nadawie</i>	<i>136</i>
<i>Rys. 11.1. Krzywa rozdziału próbki monodispersyjnych ziaren nieregularnych</i>	<i>138</i>
<i>Rys. 11.2. Krzywa rozdziału nadawy ziaren nieregularnych</i>	<i>140</i>
<i>Rys. 11.3. Krzywa rozdziału dla klasy ziarnowej 8 – 10 mm</i>	<i>143</i>

VI. SPIS TABEL

<i>Tabela 9.1. Wychody masowe poszczególnych klaso-frakcji produktów rozdziału</i>	<i>92</i>
<i>Tabela 9.2. Objętościowy (k_1) i dynamiczny (k_2) współczynnik kształtu ziarna.....</i>	<i>94</i>
<i>Tabela 9.3. Średnica projekcyjna ziaren klasy 16 – 20 mm</i>	<i>101</i>
<i>Tabela 9.4. Średnica projekcyjna ziaren klasy 12,5 - 16 mm.....</i>	<i>103</i>
<i>Tabela 9.5. Średnica projekcyjna ziaren klasy 10 – 12,5 mm</i>	<i>104</i>
<i>Tabela 9.6. Średnica projekcyjna ziaren klasy 8 - 10 mm.....</i>	<i>105</i>