



AKADEMIA GÓRNICZO - HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

WYDZIAŁ FIZYKI I INFORMATYKI STOSOWANEJ

Siła Lorentza w transporcie ładunku przez pierścienie kwantowe

Autor:

mgr inż.

Maciej PONIEDZIAŁEK

Promotor:

Dr hab. inż.

Bartłomiej SZAFRAN

28 stycznia 2012

Badania, których wyniki przedstawione są w tej rozprawie były częściowo finansowane z grantu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego "*Symulacje magnetotransportu w nanostrukturach półprzewodnikowych*" N202 103938, na lata 2010-2013.

Spis treści

O niniejszej rozprawie	4
1 Motywacja i kontekst pracy	5
2 Streszczenie artykułów tworzących rozprawę i wnioski	7
2.1 Praca A.1, <i>Electron transfer through a multiterminal quantum ring: magnetic forces and elastic scattering effects</i>	7
2.2 Praca A.2, <i>Magnetic forces and stationary electron flow in a three-terminal semiconductor quantum ring</i>	8
2.3 Praca A.3, <i>Tuning Fano resonances by magnetic forces for electron transport through a quantum wire side coupled to a quantum ring</i>	9
2.4 Praca A.4, <i>Magnetic forces and localized resonances in electron transfer through quantum rings</i>	9
2.5 Praca A.5, <i>Multisubband transport and magnetic deflection of Fermi electron trajectories in three terminal junctions and rings</i>	10
2.6 Praca A.6 <i>Violation of Onsager symmetry for a ballistic channel Coulomb coupled to a quantum ring</i> i A.7 <i>Carrier-carrier inelastic scattering events for spatially separated electrons: magnetic asymmetry and turnstile electron transfer</i>	10
3 Electron transfer through a multiterminal quantum ring: magnetic forces and elastic scattering effects	13
4 Magnetic forces and stationary electron flow in a three-terminal semiconductor quantum ring	19
5 Tuning Fano resonances by magnetic forces for electron transport through a quantum wire side coupled to a quantum ring	32
6 Magnetic forces and localized resonances in electron transfer through quantum rings	39
7 Multisubband transport and magnetic deflection of Fermi electron trajectories in three terminal junctions and rings	48

8 Violation of Onsager symmetry for a ballistic channel Coulomb coupled to a quantum ring	64
9 Carrier-carrier inelastic scattering events for spatially separated electrons: magnetic asymmetry and turnstile electron transfer	70
10 Uzupełnienia	79
10.1 Dwuwymiarowy gaz elektronowy	79
10.2 Przybliżenie masy efektywnej	79
10.3 Gęstość stanów elektronowych w 2DEG	81
10.4 Długości charakterystyczne półprzewodnika	83
10.5 Formalizm Landuera-Büttikera	86
10.5.1 Kwantyzacja przewodności	86
10.5.2 Przewodność w transporcie liniowym	91
10.5.3 Uogólnienie Büttikera	92
10.6 Relacja Onsagera	94
10.7 Ogniskowanie magnetyczne	96
10.8 Efekt Aharonowa-Bohma	99
10.9 Metoda obliczeniowa	101
10.9.1 Opis metody	101
10.9.2 Dyskretyzacja hamiltonianu	101
10.9.3 Funkcja falowa w doprowadzeniach	102
10.9.4 Prawdopodobieństwa transmisji elektronu	106
10.9.5 Mody zanikające	106

O niniejszej rozprawie

Zgodnie z wprowadzoną 18.03.2011 nowelizacją Prawa o szkolnictwie wyższym rozprawę doktorską może stanowić spójny tematycznie zbiór artykułów opublikowanych lub przyjętych do druku w czasopiśmie naukowych (Art. 13.2). Prezentowana rozprawa ma taką właśnie formę. Składa się na nią siedem artykułów, które omawiają rolę sił magnetycznych w transporcie kwantowym w układach z półprzewodnikowymi pierścieniami kwantowymi. Cykl tworzą prace:

- A.1 B. Szafran, M.R. Poniedzialek *Electron transfer through a multiterminal quantum ring: magnetic forces and elastic scattering effects*,
Physical Review B 80, 155334 (2009)
- A.2 M. R. Poniedzialek, B. Szafran *Magnetic forces and stationary electron flow in a three-terminal semiconductor quantum ring*,
J. Phys.: Condens. Matter 22, 215801 (2010)
- A.3 B. Szafran, M. R. Poniedzialek, *Tuning Fano resonances by magnetic forces for electron transport through a quantum wire side coupled to a quantum ring*,
Physical Review B 82, 075320 (2010)
- A.4 M. R. Poniedzialek, B. Szafran, *Magnetic forces and localized resonances in electron transfer through quantum rings*,
J. Phys.: Condens. Matter 22, 465801 (2010)
- A.5 M. R. Poniedzialek, B. Szafran, *Multisubband transport and magnetic deflection of Fermi electron trajectories in three terminal junctions and rings*,
J. Phys.: Condens. Matter 24, 085801 (2012)
- A.6 B. Szafran, M. R. Poniedzialek, F. M. Peeters, *Violation of Onsager symmetry for a ballistic channel Coulomb coupled to a quantum ring*,
Europhysics Letters 87, 47002 (2009)
- A.7 M. R. Poniedzialek i B. Szafran, *Carrier-carrier inelastic scattering events for spatially separated electrons: magnetic asymmetry and turnstile electron transfer*,
Physical Review B 85, 035312 (2012)

Cykl publikacji stanowiących rozprawę poprzedza wstęp i streszczenia artykułów z opisem ich wkładu w rozwój teorii transportu kwantowego w nanostrukturach półprze-

wodnikowych. Za artykułami umieściłem w formie dodatków podstawowe informacje na temat struktur, stosowanego formalizmu oraz metody rachunkowej.

1 Motywacja i kontekst pracy

Prąd elektryczny w domieszkowanych donorami półprzewodnikach niesiony jest przez elektrony z powierzchni Fermiego [1]. Dla układów makroskopowych do opisu zjawisk związanych z przepływem prądu stosowana jest klasyczna teoria oporu omowego [2]. O stosowalności teorii klasycznej decydują rozmiary układu w porównaniu z długością koherencji fazy funkcji falowej elektronu z powierzchni Fermiego (patrz 10.4 poniżej). W latach 80 ubiegłego stulecia postęp technologii miniaturyzacji doprowadził do powstania układów o rozmiarach porównywalnych z długością koherencji [2, 3]. Jako test częściowo koherentnego transportu wykorzystany został efekt Aharonowa-Bohma (patrz 10.8), to jest interferencja kwantowa elektronu przechodzącego przez przewodnik tworzący pętlę (pierścień). Gdy pierścień, lub tylko jego rdzeń, umieścić w zewnętrznym polu magnetycznym, części fali przechodzącej przez obydwie ramiona nabierają różnicy fazy akumulowanej od potencjału wektorowego. W efekcie pojawia się oscylacja przewodności w funkcji strumienia pola magnetycznego przenikającego przez pierścień o okresie równym kwantowi strumienia pola magnetycznego $\Phi_0 = \frac{h}{e}$, (e to ładunek elementarny, a h stała Plancka). Oscylacje te zaobserwowano w pierścieniach metalowych (średnica 784 nm) [4] a następnie w pierścieniach półprzewodnikowych (średnica $1\mu\text{m}$) [5] wykonanych na drodze litografii heterostruktury n-AlGaAs/GaAs, na której złączu powstaje dwuwymiarowy gaz elektronowy (patrz 10.1 poniżej). Układy z dwuwymiarowym gazem elektronowym dzięki redukcji wymiarowości i odseparowaniu domieszek od elektronów charakteryzuje wysoka mobilność nośników i bardzo długa droga swobodna. Te, dobrze znane od odkrycia ułamkowego kwantowego efektu Halla [6], układy są wciąż intensywnie badane w związku z transportem kwantowym. Niniejsza praca poświęcona jest pierścieniom wytworzonym w układach z dwuwymiarowym gazem elektronowym.

Doświadczenia nad pierścieniami półprzewodnikowymi dostarczają ciekawych informacji dotyczących fizyki transportu ładunku w nanoskali. W ciągu ostatniej dekady wykonano doświadczenia nad: i) współistnieniem blokady kulombowskiej i oscylacji Aharonowa-Bohma [7] ii) ich ułamkową formą w układach z uwięzioną w pierścieniu niewielką liczbą elektronów [8] iii) interferencją pojedynczych elektronów wstrzykiwanych do kanału [9] iv) łamaniem relacji Onsagera [10] v) mapowaniem funkcji falowej elektronu z powierzchni

Fermiego techniką mikroskopii przewodności [11] vi) odchyleniem trajektorii elektronów w polu magnetycznym [12]. Ostatnie zagadnienie jest głównym tematem tej rozprawy.

W warunkach koherentnego transportu o prawdopodobieństwie przejścia elektronu przez układ decydują własności jego funkcji falowej. Stosowana w pracy teoria Landauera-Büttikera (patrz niżej 10.5) wyprowadza z prawdopodobieństwa przejścia mierzalną doświadczalnie przewodność. Celem niniejszej pracy jest teoretyczne zbadanie wpływu siły Lorentza na transport ładunku w układach z pierścieniami kwantowymi, a więc zbadanie efektów *klasycznej* siły w transporcie *kwantowym*.

Wpływ siły Lorentza na transport kwantowy przewidziany został teoretycznie dla kwantowych kontaktów punktowych [13] oraz zaobserwowany doświadczalnie w odchyleniu orbit cyklotronowych [14]. Przeprowadzono następnie spektakularny eksperyment ogniskowania magnetycznego elektronów we wnęce rezonansowej (bilardzie kwantowym) [15].

W niniejszej pracy zajmiemy się siłą Lorentza dla pierścieni kwantowych i dla efektu Aharonowa-Bohma w szczególności. W oryginalnej pracy Aharonowa-Bohma rozważano przypadek, gdy pole magnetyczne pojawia się wyłącznie wewnątrz pierścienia, tak że siła Lorentza na elektron nie działa. Jednakże, w doświadczeniach przeprowadzanych na pierścieniach o promieniach rzędu mikrometra lub ułamka mikrometra takich warunków wprowadzić na razie się nie udało. Stosowane jest jednorodne pole magnetyczne, które może odchylić trajektorię elektronu.

Współautorem pierwszej pracy teoretycznej [16] nad wpływem siły Lorentza na przewodność półprzewodnikowych pierścieni kwantowych jest promotor tej rozprawy. W pracy [16] wykazano, że siła Lorentza powoduje preferencyjne wstrzykiwanie elektronu do jednego z ramion pierścienia. Klasyczny efekt zakrzywienia trajektorii konkuruje z oscylacjami Aharonowa-Bohma (AB). Wprowadzona przez siły magnetyczne nierównowaga w amplitudach fal przechodzących przez dwa ramiona pierścienia prowadzi do redukcji amplitudy oscylacji AB w wysokim polu magnetycznym. Zanik oscylacji AB jest zazwyczaj uznawany za efekt dekoherencji. Doświadczalne stwierdzenie zaniku oscylacji mogłoby zostać uznane za wynik aktywacji procesów dekoherencji w wysokim polu. Aby odizolować efekty dekoherencji od magnetycznego odchylenia trajektorii zaproponowano pomiar w układzie z trzema końcówkami [17]. Wyniki modelowania [17] wskazały, że zanik oscylacji AB w wysokim polu stowarzyszony jest z nierównowagą w prawdopodobieństwie przejścia elektronu do lewego i prawego kontaktu. Przewidywania teoretyczne potwierdził przeprowadzony 4 lata później eksperyment [12], stanowiący punkt wyjściowy dla badań, których

wyniki są przedstawione w tej rozprawie.

2 Streszczenie artykułów tworzących rozprawę i wnioski

2.1 Praca A.1, *Electron transfer through a multiterminal quantum ring: magnetic forces and elastic scattering effects*

Praca doświadczalna [12] wskazała zanik oscylacji AB w wysokim polu oraz nierównowagę w prawdopodobieństwach przejścia do lewego i prawego wyjścia, zgodnie z wcześniejszymi przewidywaniami teoretycznymi [17]. Wyniki doświadczalne [12] różniły się jednak w szczegółach od teoretycznych [17]: i) dla $B = 0$ znaleziono wyraźną asymetrię w przewodności (konduktancji) lewego i prawego wyjścia ii) już w niskim polu amplituda oscylacji AB była bardzo niewielka. Autorzy doświadczenia [12] jako przyczynę niskiej amplitudy oscylacji wskazali dekoherencję. Jednak, dopasowana przez autorów długość koherencji (320 nm) jest o rząd wielkości niższa, niż wcześniej szacowana dla dwuwymiarowego gazu elektronowego w temperaturze 350 mK [12]. Poza tym, istniała różnica w promieniach pierścienia rozważanych w teorii [17], a elektrody wyjściowe podpięte były w doświadczeniu [12] pod innym kątem niż w modelu teoretycznym [17]. Wyjaśnienie tych różnic stanowiło punkt wyjściowy do badań przeprowadzonych w ramach doktoratu. Ich wyniki opublikowano w artykule [A.1].

Artykuł [A.1] oparty był na rozwiązaniu problemu zależnego od czasu dla oszacowania prawdopodobieństwa transmisji, według wcześniejszego modelu [17]. Dla uwzględnienia asymetrii przewodności dla nominalnie symetrycznej struktury wprowadzono zaburzenie potencjału w jednym z ramion pierścienia. Znaleziono, że zaburzenie potencjału – poza wprowadzeniem asymetrii w transmisji do kontaktów wyjściowych – prowadzi do zmniejszenia amplitudy oscylacji AB w niskim polu. Powodem tego zjawiska jest utrudniona przez zaburzenie cyrkulacja elektronów wokół pierścienia. Warunkiem zaobserwowania oscylacji AB jest spotkanie i interferencja funkcji falowych przechodzących przez obydwa ramiona pierścienia. Dla zablokowanej transmisji przez jedno z ramion amplituda oscylacji maleje. Wyniki pracy [A.1] świetnie zgadzają się jakościowo z wynikami eksperymentu [12] (patrz rysunek 9 z pracy [A.1] i 1 z pracy [12]). Praca [A.1] wskazała, że odpowiedzialność za niską amplitudę oscylacji może leżeć po stronie rozpraszania elastycznego zachodzącego z zachowaniem całkowitej spójności fazy. Silnych efektów rozpraszania można się w tym

doświadczeniu spodziewać dlatego, że przeprowadzone ono zostało w warunkach transmisji w najniższym podpaśmie kwantyzacji poprzecznej. Innymi słowy, energia kinetyczna elektronów Fermiego była niewielka tak, że każda nierówność potencjału (nawet rzędu ułamków meV) skutkować mogła silnym rozpraszaniem.

2.2 Praca A.2, *Magnetic forces and stationary electron flow in a three-terminal semiconductor quantum ring*

Wyniki modelowania poprzedzającego tę rozprawę [17] oraz pierwsza praca [A.1] oparte były na dynamice pakietów falowych. W rozwiązaniu zależnym od czasu pakiet reprezentuje pewną superpozycję stanów własnych hamiltonianu i odpowiada skończonemu przedziałowi na skali energii. W zerowej temperaturze prąd niosą elektrony o ściśle określonej energii. Aby znaleźć przewodność dla 0K opracowano numeryczną procedurę rozwiązywania stacjonarnego problemu rozproszeniowego opartą na metodzie różnic skończonych. Metoda (opis patrz niżej 10.9) z iteracyjnym wyznaczeniem amplitud rozpraszania została po raz pierwszy zastosowana w pracy [A.2] dla wyznaczenia przewodności pierścienia z trzema końcówkami.

Wyniki uzyskane dla 0K potwierdziły uzyskane wcześniej konkluzje [A.1] modelowania zależnego od czasu, w zakresie zaniku oscylacji AB i nierównowagi w prawdopodobieństwie przejścia. Jednakże, stwierdzono, że w wysokim polu magnetycznym pojawiają się wąskie przedziały B oraz wektora Fermiego k_F , przy których przepływ prądu jest anormalny – nieklasyczny. Cyrkulacja prądu wokół pierścienia jest w nich przeciwna do tej indukowanej magnetyczną iniekcją zgodnie z orientacją siły Lorentza. Ze względu na to, że przedziały te są bardzo wąskie ulegają one zatarciu gdy poziom Fermiego jest poszerzony termicznie (patrz 10.5.2). W doświadczeniu [12] przedziały anomalnej cyrkulacji nie były obserwowane. Podobnie trudno jest je odtworzyć w rozwiązaniu pakietów falowych ze względu na skończony przedział energii obecnej w pakiecie. Wyjaśnienie pochodzenia tych anormalnych warunków transmisji pojawiło się przy rozważaniu prostszego układu w następnej pracy [A.3].

2.3 Praca A.3, *Tuning Fano resonances by magnetic forces for electron transport through a quantum wire side coupled to a quantum ring*

W pracy [A.3] zbadano drut kwantowy, do którego bocznie podpięto pierścień kwantowy. Obliczono przewodność układu w funkcji pola magnetycznego. Znaleziono, że prawdopodobieństwo przejścia elektronu przez obszar z wpiętym bocznie pierścieniem jest zazwyczaj bliskie 1. Dla pewnych pól magnetycznych znaleziono jednak niesymetryczne piki prawdopodobieństwa rozpraszania wstecznego R . Zauważono, że piki te pojawiają się parami cyklicznie na skali pola magnetycznego. Jeden z pików pary poszerza się, a drugi zwęża z polem magnetycznym. Ustalono, że piki pochodzą z interferencji elektronu poruszającego się wzdłuż kanału ze stanami zlokalizowanymi w pierścieniu. Położenie stanów zlokalizowanych na skali energii i pola magnetycznego wyznaczono metodą stabilizacji Mandelstama [18]. Piki rozpraszania wstecz zgadzają się doskonale ze względu na położenie i szerokość ze stanami zlokalizowanymi. Ustalono, że w każdej parze pików R jeden odpowiada stanowi zlokalizowanemu z cyrkulacją prądu w pierścieniu produkującą moment magnetyczny równoległy do zewnętrznego pola, a drugi - z cyrkulacją przeciwną. Stany z cyrkulacją przeciwną zostają przesunięte do rdzenia pierścienia przez siłę Lorentza. W ten sposób zależnie od orientacji przepływu prądu sprzężenie stanów zlokalizowanych w pierścieniu z kanałem ulega wzmocnieniu lub osłabieniu wraz ze wzrostem pola magnetycznego. Zmiana czasu życia tych zlokalizowanych rezonansów odbija się na szerokości pików R w wysokim polu magnetycznym.

2.4 Praca A.4, *Magnetic forces and localized resonances in electron transfer through quantum rings*

Analizę wyników pracy [A.3] zastosowano do wyjaśnienia przedziałów anomalnej cyrkulacji prądu w pierścieniu z trzema końcówkami [A.2]. Znaleziono, że warunki anomalnej cyrkulacji prądu występują wraz z pojawieniem się rezonansów Fano ze stanami zlokalizowanymi, w których siła Lorentza utrzymuje gęstość elektronową bardzo blisko rdzenia, co radykalnie zwiększa ich czas życia. W ten sposób wykazano, że – warunki anomalnej transmisji w pierścieniu z trzema końcówkami znalezione w pracy [A.2] – również mają podłoże klasyczne.

2.5 Praca A.5, *Multisubband transport and magnetic deflection of Fermi electron trajectories in three terminal junctions and rings*

Poprzednie prace [A.1-4] dotyczyły modelowania przepływu prądu w warunkach, gdy poziom Fermiego pojawia się tylko w najniższym podpaśmie kwantyzacji poprzecznej (patrz 10.5). Takie warunki istotnie wytworzono w doświadczeniu [12]. Zazwyczaj jednak poziom Fermiego pojawia się w kilku najniższych podpasmach. Mamy wtedy do czynienia z wieloma wektorami Fermiego i z możliwością rozpraszania międzypasmowego. W pracy [A.5] zastosowano uogólnienie metody rachunkowej z [A.2], które uwzględnia rozpraszanie międzypasmowe (10.9) i zbadano związek między periodycznością oscylacji przewodności a odchyleniem magnetycznym. Wyniki wskazują, że te dwa efekty są konkurencyjne: Dla wąskich kanałów – znacznie węższych od promienia Larmora – efekt siła Lorentza jest zaniedbywalny, a wyniki periodyczne z okresem Φ_0 . Dla szerszych kanałów – wpływ siły Lorentza jest bardzo wyraźny, lecz efekty rozpraszania międzypasmowego zaburzają prostą periodyczność oscylacji. Główny wniosek z pracy [A.5] wskazuje, że wyraźny efekt odchylenia magnetycznego oraz periodyczność oscylacji AB współistnieją wyłącznie w zakresie transportu w najniższym podpaśmie.

2.6 Praca A.6 *Violation of Onsager symmetry for a ballistic channel Coulomb coupled to a quantum ring* i A.7 *Carrier-carrier inelastic scattering events for spatially separated electrons: magnetic asymmetry and turnstile electron transfer*

W pracy [A.3] badany jest silnie niesymetryczny układ: drut kwantowy z bocznie wpiętym pierścieniem. Zależnie od znaku pola magnetycznego siła Lorentza albo kieruje elektron z kanału do pierścienia albo powstrzymuje elektron przed wejściem do pierścienia. Istotnie taki efekt siły Lorentza jest bardzo wyraźny w gęstości prawdopodobieństwa rozwiązania problemu rozproszeniowego. Mimo, że kinetyka transferu elektronu przez układ silnie zależy od zwrotu pola magnetycznego okazuje się, że $T(B) = T(-B)$. Związek ten, zgodnie z teorią Landauera oznacza, że dla przewodności mamy również symetrię $G(B) = G(-B)$. Związek ten, został podany w formie zbliżonej do $G_{ji}(B) = G_{ij}(-B)$, (G_{ji} to przewodność od końcówki i do końcówki j) przez Onsagera [19] na gruncie mechaniki statystycznej i oznacza, że samo przyłożenie pola magnetycznego w półprzewodniku

nie jest wystarczające do wywołania przepływu prądu w układzie (bez różnicy napięć). Związek $T(B) = T(-B)$ dla problemów transmisji opisanej równaniem kwantowo mechanicznym tłumaczy się niezmienniczością rozpraszania wstecznego od kierunku pola (patrz 10.6 niżej).

Relacja Onsagera $G(B) = G(-B)$ obowiązuje dla transportu liniowego (patrz niżej 10.5.2), czyli dla niewielkiej różnicy w potencjałach źródło-dren. W doświadczeniach stosuje się napięcia rzędu mikroelektronowoltów i temperatury rzędu milikelwinów. W takich warunkach prąd niesiony jest dokładnie na poziomie Fermiego, wspólnym dla obydwu elektrod, a rozpraszanie nieelastyczne elektronów niosących prąd jest zabronione przez zakaz Pauliego: elektron z poziomu Fermiego w temperaturze 0K nie może stracić energii bo stany z wnętrza powierzchni Fermiego są zajęte. Łamanie relacji Onsagera możliwe jest w transporcie nieliniowym [20] i zostały wykryte w wielu różnych układach [10, 21, 22, 23, 24, 25, 26].

Postanowiliśmy zbadać ewentualne łamanie symetrii w układzie z pojedynczym elektronem w kanale – zamiast gazu elektronowego. W ciągu ostatnich dwóch dekad nastąpił wielki postęp w manipulacji pojedynczymi elektronami w nanostrukturach. W 1997 udało się uwięzić pojedynczy elektron w kropce kwantowej [27]. W 2006 udało się zaobserwować przepływ pojedynczych elektronów w nanostrukturze [28]. W roku 2008 udało się przeprowadzić doświadczenie [9] interferencji AB w urządzeniu do którego elektrony były wstrzykiwane pojedynczo przez zawór utworzony z kropki kwantowej doprowadzonej do warunków blokady kulombowskiej, przez którą transport możliwy jest tylko za pośrednictwem nisko wydajnego współtunelowania (co-tunneling). Wreszcie w roku 2011 udało się w sposób kontrolowany wielokrotnie przerzucać elektron między dwoma kropkami kwantowymi na łączną odległość rzędu milimetrów [29].

Zakaz (Pauliego) rozpraszania nieelastycznego nie obowiązuje dla pojedynczego elektronu poruszającego się w kanale. Zbadaliśmy przepływ elektronu przez kanał sprzężony z pierścieniem kwantowym umieszczonym obok kanału z jednym uwięzionym elektronem [A.6,A.7]. W pracy [A.6] wprowadziliśmy dokładną – choć numeryczną metodę rozwiązywania problemu zależnego od czasu rozpraszania elektronu w kanale na potencjale elektronu z pierścienia. Pokazaliśmy, że gdy elektron w pierścieniu przejmuje moment pędu elektronu w kanale, prawdopodobieństwo rozproszenia wstecz tego ostatniego rośnie. Ze względu, na charakter widma energii elektronu w pierścieniu absorpcja momentu pędu przez pierścień jest bardziej prawdopodobna dla $B < 0$ niż dla $B > 0$ co prowadzi do złamania relacji Onsagera.

W pracy [A.7] podaliśmy niezależną od czasu metodę rozwiązywania problemu. Pozwoliło nam to na opis sytuacji, gdy energia elektronu w kanale jest przed procesem rozpraszania ściśle określona. Wykorzystaliśmy ten fakt do konstrukcji układu, w którym rozpraszania wsteczne lub transfer elektronu mogą zachodzić tylko z wyłączeniem rozpraszania nieelastycznego. Układ wykorzystuje filtr energii oparty na układzie z podwójną barierą, przez którą transmisja możliwa jest tylko dla elektronu o energii stanu rezonansowego. Pokazaliśmy, że tylko wyłączenie nieelastycznego rozpraszania wstecz – a nie transferu ze wzbudzeniem pierścienia – przywraca symetrię $T_{21}(B) = T_{21}(-B)$. Układ z jednym filtrem nie przywraca natomiast symetrii względem kierunku przepływu prądu, to jest $T_{21}(B) \neq T_{12}(B)$. Dopiero po wyłączeniu rozpraszania nieelastycznego w amplitudach zarówno rozproszonej jak i transmitowanej mamy zarówno $T_{21}(B) = T_{21}(-B)$ oraz $T_{21}(B) = T_{12}(B)$, jak w warunkach transportu liniowego.

10 Uzupełnienia

10.1 Dwuwymiarowy gaz elektronowy

Dwuwymiarowy gaz elektronowy (2DEG) powstaje w heterostrukturze n -AlGaAs/GaAs przedstawionej na rysunku 1(a). Heterostruktura składa się z dwóch różnych półprzewodników o zbliżonej wartości stałej sieci krystalicznej oraz o podobnym współczynniku rozszerzalności cieplnej, co eliminuje efekty naprężeń. Pasma przewodnictwa GaAs leży poniżej pasma przewodnictwa n -AlGaAs, co produkuje efektywny skok potencjału dla elektronów z pasma przewodnictwa. Skutkiem tego elektrony z domieszek donorowych przechodzą do GaAs zostawiając zjonizowane centra donorowe. Ładunek zjonizowanych domieszek utrzymuje elektrony dociśnięte do złącza w formie dwuwymiarowego gazu elektronowego. Obniżenie wymiarowości związane jest z faktem, że dla typowych koncentracji domieszek wszystkie elektrony obsadzają stan podstawowy trójkątnej studni potencjału, która powstaje przy barierze (rys. 1(c)). Swoboda ruchu w kierunku wzrostu zostaje usunięta. W wyniku obniżenia wymiarowości i odseparowania elektronów od domieszek powstaje układ z dużą mobilnością nośników, długą drogą swobodną i drogą koherencji (patrz 10.4).

10.2 Przybliżenie masy efektywnej

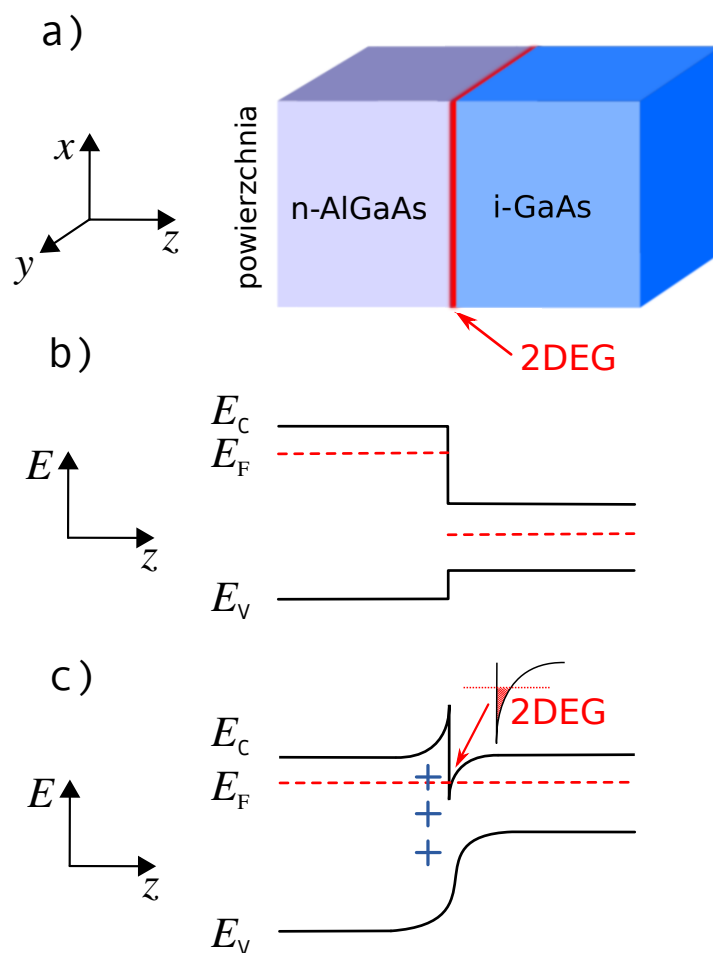
W półprzewodnikach nośnikami ładunku są elektrony w paśmie przewodnictwa lub dziury w paśmie walencyjnym. Artykuły tworzące tę rozprawę dotyczą prądów niesionych przez elektrony w paśmie przewodnictwa. W 2DEG utworzonym w modelowanej strukturze ruch elektronów w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku wzrostu można potraktować jako ruch elektronów swobodnych. Pracujemy w przybliżeniu masy efektywnej:

$$\left[E_c + \frac{(i\hbar\nabla + e\vec{A})^2}{2m^*} + U(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \quad (1)$$

gdzie E_c to energia pasma przewodnictwa, $U(\vec{r})$ to potencjał uwięzienia a m^* to masa efektywna elektronu. W półprzewodnikach masę efektywną definiuje związek:

$$m^* = \frac{1}{\hbar^2} \left[\frac{d^2 E(k)}{dk^2} \right]^{-1} \quad (2)$$

gdzie $E(k)$ jest energią elektronu w funkcji wektora falowego (relacja dyspersji dla pasma przewodnictwa). Dla niskich wartości wektora falowego (bliskich środka strefy Brillouina)



Rysunek 1: (a) Schemat heterozłącza n-AlGaAs/GaAs. Kolejno od lewej domieszkowany AlGaAs oraz GaAs z zaznaczonym obszarem dwuwymiarowego gazu elektronowego. (b) Pasmo przewodnictwa oraz pasmo walencyjne z uwzględnieniem energii Fermiego dla obu materiałów przed osiągnięciem i (c) po osiągnięciu równowagi termodynamicznej. Rysunek wykonany na podstawie rysunku 1.1.1 z książki [2].

$E(k)$ można traktować jako funkcję paraboliczną. Wtedy masa efektywna przyjmuje wartość niezależną od wektora falowego. W GaAs wynosi $m^* = 0.067m_0$ (m_0 - masa elektronu w próżni). Periodyczny potencjał sieci krystalicznej nie pojawia się bezpośrednio w równaniu (1). Jest on uwzględniony w masie efektywnej elektronu. W dwuwymiarowym gazie elektronowym ruch nośników jest silnie ograniczony w kierunku prostopadłym do płaszczyzny złącza (kierunek z - rys. 1(a)). Ograniczenie ruchu skutkuje efektem *kwantowania rozmiarowego*, gdzie część energii kinetycznej związana z ruchem prostopadłym do płaszczyzny złącza, przyjmuje wartości dyskretne. Jednocześnie ruch elektronów w płaszczyźnie złącza pozostaje swobodny. Jeśli do układu nie jest przyłożone zewnętrzne pole magnetyczne ($\vec{A} = 0$) a potencjał uwięzienia $U(\vec{r})$ jest jedynie funkcją z , rozwiązaniem równania (1) są funkcje:

$$\Psi_n(\vec{r}) = \phi_n(z) \exp(ik_x x) \exp(ik_y y) \quad (3)$$

stowarzyszone z relacją dyspersji:

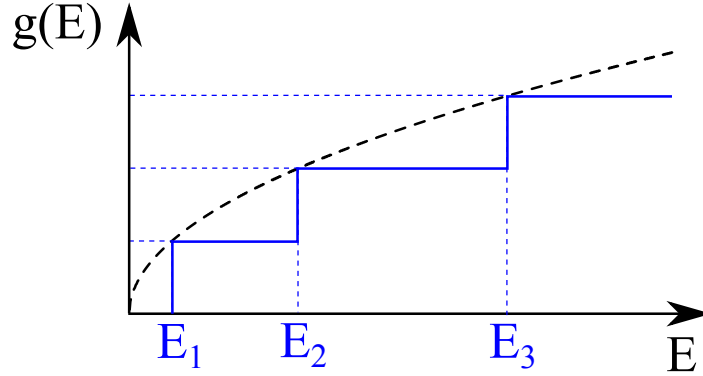
$$E_n = E_c + \epsilon_n + \frac{\hbar^2}{2m^*}(k_x^2 + k_y^2) \quad (4)$$

(1) gdzie ϵ_n to energia ruchu elektronu, znajdującego się w stanie n , w kierunku wzrostu. Wielkość ϵ_n jest energią odcięcia (*threshold*) n -tego podpasma. Dla typowych warunków [2] próg drugiego podpasma znajduje się ≈ 200 meV powyżej pierwszego podpasma. Większość eksperymentów przeprowadza się w temperaturach dużo niższych niż temperatura pokojowa przy energii (kinetycznej) Fermiego rzędu kilku, kilkunastu meV. W temperaturze 4K energia wzbudzeń termicznych jest mniejsza niż 0.5 meV. Pozwala nam to założyć, iż wszystkie efekty transportowe zachodzą przy udziale elektronów w stanie ϵ_1 i zaniedbać wzbudzenie do drugiego podpasma i wyższych.

Należy zwrócić uwagę na to, że mówimy tutaj o podpasmach wynikających z ograniczenia transportu w kierunku prostopadłym do płaszczyzny gazu. W pracy [A.6] zostało omówione rozpraszanie między podpasmami utworzonymi w kanałach w płaszczyźnie złącza. Kolejną własnością jaką posiada dwuwymiarowy gaz elektronowy jest schodkowy charakter gęstości stanów elektronowych.

10.3 Gęstość stanów elektronowych w 2DEG

Zgodnie z równaniem (4) energia ruchu elektronów w kierunku prostopadłym do powierzchni gazu elektronowego przyjmuje wartości dyskretne, natomiast ruch w płaszczyźnie warstwy gazu elektronowego pozostaje swobodny. Jednak każdy układ posiada skoń-



Rysunek 2: Gęstość stanów w funkcji energii dla układu dwuwymiarowego - linia ciągła oraz układu trójwymiarowego - linia przerywana (za [3]). E_n na skali energii to kolejne poziomy kwantyzacji ruchu w kierunku wzrostu.

czony rozmiar, co prowadzi do kwantyzacji ruchu również w płaszczyźnie gazu. Stosując periodyczne warunki brzegowe (warunki Born-Karmana [30]) żądamy periodyczności funkcji falowej elektronu z okresem równym rozmiarom kryształu. Dozwolone wartości wektora falowego elektronu zależą od rozmiarów układu $S = L_x \times L_y$. Wówczas wektor falowy przyjmuje wartości $k_{x/y} = n_{x/y} \frac{2\pi}{L_{x/y}}$, gdzie $n_{x/y}$ to liczba całkowita. Na jeden wektor falowy przypada obszar w przestrzeni odwrotnej równy $\frac{4\pi^2}{S}$. Uwzględniając zakaz Pauliego można zdefiniować liczbę stanów elektronowych, jakie mogą zostać obsadzone przez elektrony posiadające energię nie większą niż $E = \epsilon_n + \hbar^2 k^2 / 2m^*$. W przestrzeni wektora falowego zajęte stany tworzą koło o promieniu k_F , który wyznacza pole powierzchni πk_F^2 . Maksymalna liczba stanów elektronowych znajdująca się w tym polu wynosi więc:

$$n(E) = 2 \frac{\pi k_F^2}{4\pi^2/S} = \frac{m^* S}{\pi \hbar^2} (E - \epsilon_n). \quad (5)$$

Gęstość stanów elektronowych zdefiniujemy jako liczbę stanów na jednostkę energii (rys. 2):

$$g(E) = \frac{dn}{dE} = \frac{m^* S}{\pi \hbar^2} \sum_n \mathcal{H}(E - \epsilon_n) \quad (6)$$

gdzie $\mathcal{H}$ jest funkcją Heaviside'a.

Przy założeniu, że tylko najniższe pasmo kwantyzacji ruchu w kierunku wzrostu jest zajęte i nigdy nie przekraczamy energii E_2 ($\sum_n \mathcal{H}(E - \epsilon_n) = 1$), gęstość stanów w dwuwymiarowym gazie elektronowym nie jest funkcją energii i wynosi $g = \frac{m^* S}{\pi \hbar^2}$.

Liczbę elektronów w układzie możemy wyrazić wzorem $\int_0^{E_F} g(E) dE = N$ co prowadzi do wyrażenia:

$$\frac{m^* S}{\pi \hbar^2} E_F = N$$

gdzie E_F to energia Fermiego i N to liczba elektronów. Gęstość elektronowa możemy przedstawić w formie $n_s = \frac{N}{S}$ co pozwala wyrazić energię i wektor falowy Fermiego z gęstości elektronowej:

$$E_f = \frac{\pi \hbar^2}{m^*} n_s \rightarrow k_f = \sqrt{2\pi n_s}. \quad (7)$$

10.4 Długości charakterystyczne półprzewodnika

Prawo Ohma dla klasycznego przewodnika wyraża się wzorem:

$$G = \sigma \frac{W}{L} \quad (8)$$

gdzie σ to przewodność właściwa, W i L to szerokość i długość przewodnika. Wraz ze zmniejszaniem wymiarów W i L dochodzimy do granicy stosowalności prawa Ohma. Dla większości przewodników taką granicą praw klasycznych wyznaczają trzy charakterystyczne długości:

- Długość fali de Broglie'a

W przybliżeniu masy efektywnej, elektrony w 2DEG poruszają się jak elektrony swobodne o zmienionej masie. Pęd elektronów jest wyznaczany przez wektor falowy stowarzyszonej z elektronem funkcji falowej. Korzystając z zależności de Broglie'a długość takiej fali można wyrazić wzorem:

$$\lambda_f = \frac{2\pi}{k_f}$$

co w przypadku zdegenerowanego (dla temperatury $T \rightarrow 0$) gazu elektronowego, korzystając z (7) można sprowadzić do postaci:

$$\lambda_f = \sqrt{\frac{2\pi}{n_s}}$$

Gęstość elektronowa dla 2DEG opartego na złączu AlGaAs-GaAs wynosi w przybliżeniu $5 \times 10^{11} \text{cm}^{-2}$ co daje długość $\lambda_f = 35 \text{ nm}$.

- Średnia droga swobodna elektronów

Kryształy zawierają pewną liczbę defektów. W skończonej temperaturze obecne są również drgania sieci. Defekty krystaliczne oraz fonony mogą być źródłem rozpraszania i zmiany kierunków pędu elektronów. Jednak nie wszystkie kolizje są przyczyną rozpraszania elektronów. Średni czas rozpraszania (relaksacji pędu) oznacza

się przez τ_s . Średnia droga swobodna to odległość między zderzeniami, w których następuje relaksacja pędu:

$$l_s = v_f \tau_s$$

gdzie v_f to prędkość Fermiego. Transport ładunku w układach o rozmiarach $l < l_s$ nazywamy transportem balistycznym. Średni czas rozpraszania można określić na podstawie mobilności elektronów w półprzewodniku $\mu = \frac{e\tau_s}{m^*}$, Mobilność μ wyznaczana jest doświadczalnie z efektu Halla.

- Średnia droga koherencji (spójności) fazowej.

Średnią drogę swobodną można wyjaśniać na gruncie fizyki klasycznej. Droga koherencji fazy odnosząca się do funkcji falowej elektronu jest wielkością czysto kwantową, bez klasycznego odpowiednika. Faza funkcji falowej ma kluczowe znaczenie przy wszystkich zjawiskach interferencyjnych. Przyczyną dekoherencji fazy mogą być zderzenia z obiektami posiadającymi wewnętrzny stopień swobody, którego wartość zależy od czasu np. zderzenie elektron-elektron, czy elektron - domieszka. Innymi słowy tylko procesy, które nie są niezmiennicze względem odwrócenia kierunku czasu mogą być przyczyną utraty spójności fazy funkcji falowej [2]. Zjawiska związane z rozpraszaniem elastycznym są odpowiedzialne za przesunięcie fazy, ale nie niszczą spójności fazowej.

Średni czas koherencji τ_ϕ opisuje czas w którym funkcja falowa zachowuje spójność fazową. Ruch elektronów w tym czasie nazywamy transportem koherentnym. Czasy relaksacji pędu τ_s oraz koherencji τ_ϕ są wielkościami niezależnymi [2], dlatego, że w zderzeniach elastycznych spójność fazowa funkcji falowej jest zachowana. W gazie elektronowym w GaAs średni czas koherencji fazy jest dużo dłuższy niż średni czas rozpraszania elektronu $\tau_\phi \gg \tau_s$.

Średnią drogę koherencji można wyrazić wzorem $l_\phi = v_f \tau_\phi$. Jednak wzór ten jest prawdziwy tylko w sytuacji gdy $\tau_\phi \sim \tau_s$. W przypadku gdy $\tau_\phi \gg \tau_s$ w czasie transportu koherentnego dochodzi do zmiany kierunku pędu elektronów, co oznacza że średnie przemieszczenie elektronów będzie mniejsze. W czasie τ_ϕ dochodzi do $\frac{\tau_\phi}{\tau_s}$ zderzeń po których kierunek ruchu ładunku jest losowy. Między zderzeniami ładunek przesuwają się średnio na odległość $l_s = v_f \tau_s$. Możemy zdefiniować średni kwadrat przesunięcia ładunku w wybranym kierunku jako:

Typy transportu	Wymiar	Energia	$\vec{P}$	Faza
Balistyczny	$\lambda_f < l < l_s$	●	●	⊙
Kwazibalistyczny	$l_s < l < l_{in}$	●	○	⊙
Koherentny	$l < l_\phi$	⊙	⊙	●
Elastyczny	$l < l_{in}$	●	⊙	⊙
Nieelastyczny	$l > l_{in}$	○	○	⊙
Dyfuzyjny	$l > l_s$	○	○	○

Tabela 1: Typy i cechy charakterystyczne różnych warunkach transportu. W kolumnach kolejno: wymiar - dopuszczalny wymiar układu w których zachodzi dany typ transportu, energia - czy energia ładunku pozostaje zachowana, $\vec{P}$ - czy kierunek pędu pozostaje zachowany, faza - czy typ transportu zachowuje spójność fazy. ● - Tak, ○ - Nie, ⊙ - Tak lub Nie.

$$l_\phi^2 = \frac{\tau_\phi}{\tau_s} (v_f \tau_s)^2 \langle \cos^2 \theta \rangle$$

gdzie θ jest kątem o jaki odchyli tor ruchu ładunku od wybranego kierunku. Średnia wartość $\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}$ co pozwala przedstawić średnią drogę koherencji w postaci:

$$l_\phi = \sqrt{D\tau_\phi}$$

gdzie $D = v_f^2 \tau_s / 2$ jest współczynnikiem dyfuzji.

Transport na dystansie mniejszym niż l_ϕ nazywamy transportem koherentnym. Wszystkie charakterystyczne długości zależą od materiału, temperatury czy przyłożonego pola magnetycznego. W zależności od rozmiarów badanego układu można oczekiwać że ruch elektronów będzie podlegać wyraźnie odmiennym warunkom transportu. W literaturze można spotkać się z różną nomenklaturą dotyczącą warunków transportu. Z reguły nazwy odnoszą się do jednej z cech transportu, nie określając pozostałych. Prowadzi to do częściowego pokrywania się pojęć. W tabeli 1 przedstawiłem typy transportu z wyszczególnieniem charakterystycznych długości na jakich one występują oraz ich cechy jak zachowanie energii, zachowanie kierunku pędu czy spójności fazowej transportowanego elektronu. Często używanym terminem jest transport *kwazibalistyczny*. Odpowiada on sytuacji w której kierunek ruchu elektronu ulega zmianie pod wpływem rozpraszania elastycznego.

W tabeli 1 wprowadziłem wielkość l_{in} . Jest to średni dystans na którym nie dochodzi do zjawiska rozpraszania nieelastycznego. Przeważnie rozpraszanie nieelastyczne jest

przyczyną utraty spójności fazowej, dlatego często do opisu rozpraszania nieelastycznego wykorzystuje się wielkość l_ϕ . Jednak zachowanie energii elektronu i koherencja fazy mogą być niezależne [2].

W ramach pracy doktorskiej zajmowałem się modelowaniem zjawisk w warunkach transportu kwazibalistycznego z zachowaniem spójności fazowej. Wyjątek stanowiły prace z łamaniem symetrii Onsagera [A.6,A.7], gdzie dla samotnego elektronu w kanale oddziaływanie elektron-elektron było przyczyną rozpraszania nieelastycznego.

10.5 Formalizm Landuera-Büttikera

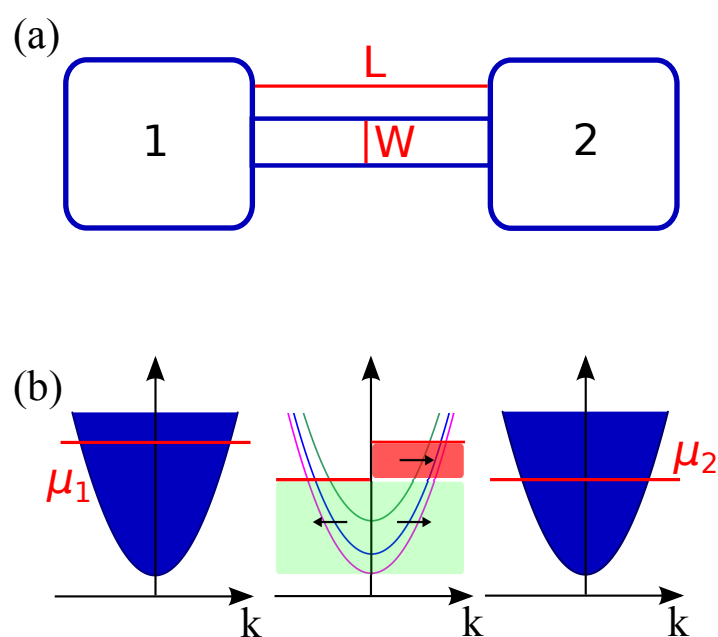
10.5.1 Kwantyzacja przewodności

Na rysunku 3(a) przedstawiono układ zawierający kanał o długości L i szerokości W połączony z rezerwuarami elektronów o potencjałach elektrochemicznych μ_1 i μ_2 takich, że $\mu_1 > \mu_2$. Jeżeli długość spełnia warunek $L \ll l_s$ ruch elektronów w kanale będzie podlegał warunkom transportu balistycznego. Przyłożona różnica potencjałów wymusza ruch elektronów z rezerwuaru 1 do rezerwuaru 2. Jednak przewodność takiego układu nie podlega klasycznemu prawu Ohma co ujawnia się w dwóch charakterystycznych własnościach:

- Rezystancja nie zależy od długości kanału
- Przewodność jest wielkością skwantowaną, proporcjonalną do liczby modów transmisji.

W transporcie balistycznym elektron nie podlega żadnym procesom rozpraszania. Przy braku rozpraszania rezystancja takiego układu powinna wynosić zero. Z drugiej strony różnica potencjałów elektrochemicznych w rezerwuarach (a tym samym różnica poziomów Fermiego) wymaga, aby transportowany elektron z rezerwuaru o wyższym potencjale oddawał nadmiar energii. Elektron może wyemitować nadmiar energii jedynie w wyniku efektów rozpraszania nieelastycznego. Takie procesy mają miejsce w rezerwuarach i, w warunkach transportu balistycznego, tylko tam wydzielane jest ciepło. Porównując relacje dyspersji elektronu w kanale z relacją dyspersji w rezerwuarach obserwujemy ogromną różnicę w liczbie dostępnych podpasów (rys. 3(b)). Źródłem skończonej rezystancji jest natura kontaktu między zbiornikiem elektronów (rezerwuarem) a kanałem (tzw. rezystancja kontaktowa) [2].

Liczba podpasów w rezerwuarach jest nieporównywalnie większa niż w kanale. Na kontakcie elektron ulega procesowi rozpraszania elastycznego związanego z ograniczeniem



Rysunek 3: (a) Kanał balistyczny z rezerwuarami o różnych potencjałach elektrochemicznych $\mu_1 > \mu_2$. (b) Relacja dyspersji w rezerwuarach oraz w kanale. Na rysunku zaznaczono poziomy elektrochemiczne na lewym (1) i prawym (2) kontakcie. W kanale elektrony o energii większej niż μ_2 poruszają się wyłącznie w prawo, a elektrony o energii mniejszej w prawo i lewo.

liczby podpasz. Również kwantyzacja przewodności jest wynikiem ograniczonej liczby podpasz. Podpasza są wynikiem kwantyzacji energii w kierunku poprzecznym kanału. Każde podpasmo wnosi jednakowy wkład do przewodności. Energia odcięcia podpasza n jest funkcją szerokości kanału $E_n \sim (\frac{n}{W})^2$. Zachowując energię elektronu i jednocześnie poszerzając kanał lub zachowując szerokość kanału i zwiększając energię elektronu zaobserwujemy gwałtowne skoki przewodności w momencie aktywacji kolejnych podpasz (modów transmisji). Oznacza to, że w warunkach transportu balistycznego, przewodność układu jest całkowitą wielokrotnością pewnej stałej – kwantu przewodności. W celu wyznaczenia tej stałej, należy określić prąd jaki niesie gaz elektronowy w kanale. Gaz elektronowy składa się z n elektronów na jednostkę długości poruszających się z prędkością v (gdzie prędkość jest proporcjonalna do wektora falowego k). Klasycznie prąd wyraża się wzorem $I = env$. Ze względu na zakaz Pauliego w jednym stanie mogą znajdować się maksymalnie dwa elektrony. Daje to gęstość elektronową $n = \frac{2}{L}$. Prawdopodobieństwo obsadzenia stanu wyraża rozkład Fermiego-Diraca

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B\tau} + 1}, \quad (9)$$

gdzie τ to temperatura, a μ to potencjał elektrochemiczny kontaktu. Sumując po wszystkich stanach k niosących prąd otrzymujemy wyrażenie w postaci:

$$I = \frac{2e}{L} \sum_k v f(E)$$

Sumę po k możemy wyrazić całką podzieloną przez obszar przestrzeni odwrotnej zajmowanej przez każdy stan k równy $\frac{2\pi}{L}$ (patrz 10.3). Stosując przejście $\sum_k \rightarrow \frac{2\pi}{L} \int dk$ oraz zastępując prędkość pochodną $v = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k}$ otrzymujemy wyrażenie na prąd w kanale balistycznym dla pojedynczego modu: $I = \frac{2e}{h} \int f(E) dE$. W transporcie balistycznym ruch elektronów w każdym podpaszcie jest niezależny, co pozwala uogólnić powyższy wzór do postaci:

$$I = \frac{2e}{h} \int f(E) M(E) dE. \quad (10)$$

Funkcja $M(E)$ przyjmuje wartość całkowitą określającą liczbę aktywnych modów transmisji przy energii E . Każdy stan o energii E w kanale jest przynajmniej dwukrotnie zdegenerowany ze względu na kierunek wektora falowego (dodatkowo degeneracja wzrasta M -krotnie ze względu na liczbę podpasz). Wektor falowy danego stanu determinuje kierunek prądu.

Zgodnie z definicją transportu balistycznego elektron w kanale nie 'odczuwa' obecności pozostałych elektronów (inaczej niż przez pole średnie) jak również nic innego nie

zaburza jego ruchu. Dodatkowo możemy założyć, że elektron docierający do końca kanału swobodnie go opuści (transfer: kanał $\rightarrow$ kontakt jest bezodbiciowy). Oznacza to, że wszystkie elektrony z rezerwuaru 1 (rys. 3(a)) w kanale poruszają się w kierunku $1 \rightarrow 2$ (stany $+k$) i analogicznie z rezerwuaru 2 w kierunku $2 \rightarrow 1$ (stany $-k$). Każdy elektron znajduje się w równowadze termodynamicznej z rezerwuarem z którego wyszedł. Poziomy elektrochemiczne (μ_1 i μ_2) w obu rezerwuarach wyznaczają maksymalną energię z jaką elektron może zostać wstrzyknięty do kanału. Liczba stanów $+k$ i $-k$ dla energii $< \mu_2$ jest taka sama i przyczynki do prądu od tych stanów się znoszą (rys. 3(b)). Pozostają nieskompensowane elektrony w stanie $+k$ o energii z zakresu (μ_1, μ_2) . Co pozwala zapisać wyrażenie na prąd w postaci:

$$I = \frac{2e}{h} \int M(E)(f_{\mu_1}(E) - f_{\mu_2}(E))T(E)dE, \quad (11)$$

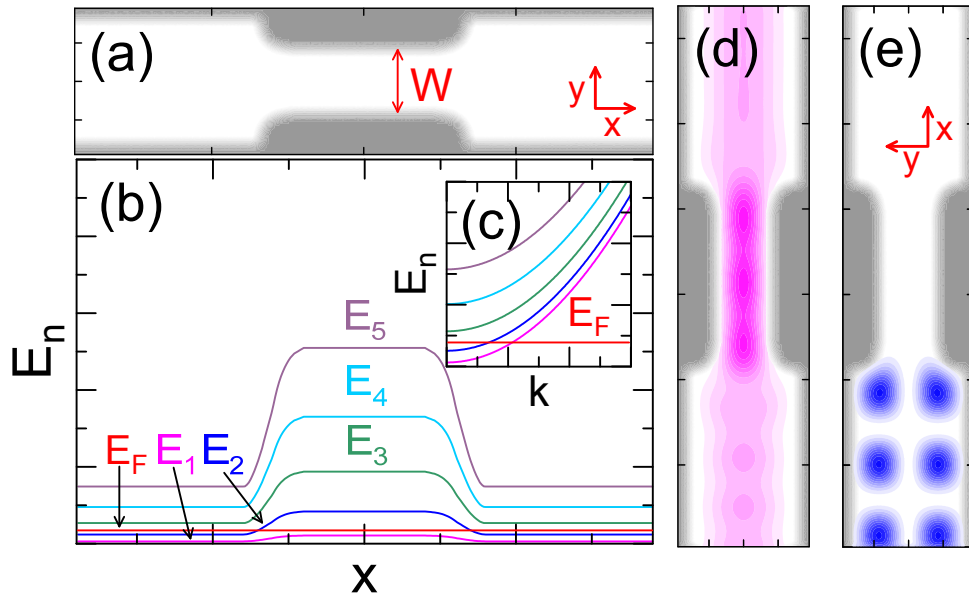
gdzie $T(E)$ to prawdopodobieństwo przejścia elektronu z jednego rezerwuaru do drugiego, które nie zależy od kierunku ruchu (patrz 10.6), i które w warunkach ściśle balistycznych $\rightarrow 1$. Dla zdegenerowanego gazu elektronowego (temperatura $\tau = 0K$) przy różnicy potencjałów $\mu_1 - \mu_2$ dostatecznie małej, aby $M(E) = \text{const}$ - prąd możemy wyrazić wzorem (w warunkach transportu liniowego - patrz 10.5.2):

$$I = \frac{2e^2}{h} M \frac{\mu_1 - \mu_2}{|e|} = G \Delta U \quad (12)$$

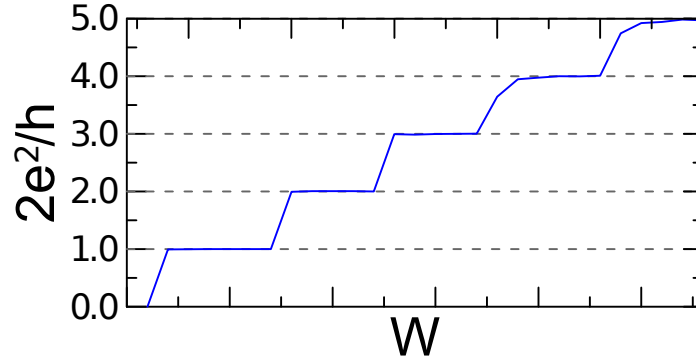
gdzie $\frac{\mu_1 - \mu_2}{|e|} = \Delta U$ jest różnicą napięć przyłożoną do układu. Zatem przewodność kanału balistycznego wynosi: $G = \frac{I}{\Delta U} = \frac{2e^2}{h} M$ Dla jednego modu transmisji przewodność wynosi $G = \frac{2e^2}{h}$ co odpowiada rezystancji $G^{-1} = \frac{h}{2e^2} = 12.9k\Omega$. Wartość $2e^2/h$ nazywamy kwantem przewodności.

W celu zaprezentowania efektu kwantowania przewodności (wykorzystując metodę rachunkową opisaną w akapicie: 10.9) zamodelowano układ kwantowego kontaktu punktowego (ang. *Quantum Point Contact* - QPC).

Rysunek 4 przedstawia układ QPC umożliwiający obserwacje schodkowego charakteru przewodności w funkcji szerokości kanału. Zwężenie kanału oznacza podniesienie i rozsuniecie poziomów energetycznych tj. energii odcięcia podpasm transmisji (rys. 4(b)). Podniesienie energii odcięcia podpasma powyżej energii Fermiego układu skutkuje zablokowaniem transportu w tym podpaśmie. W warunkach transportu balistycznego idealny kontakt punktowy przepuszcza funkcje falową elektronu z danego podpasma w całości albo wcale (rys. 4(d),(e)). W konsekwencji otrzymujemy schodkowy wykres przewodności (rys. 5) zgodny ze wzorem (12).



Rysunek 4: (a) Schemat kwantowego kontaktu punktowego (b) Energia odcięcia E_n w funkcji położenia w kierunku x . (c) Relacja dyspersji $E_n(k)$ (energia odcięcia w funkcji wektora falowego). (d) Gęstość prawdopodobieństwa funkcji falowej elektronu o energii Fermiego E_F wchodzącego do układu z podpasma (d) $n = 1$ i (e) $n = 2$.



Rysunek 5: Przewodność kanału z rysunku 4 w funkcji szerokości przegrody W

W rzeczywistych eksperymentach przewodność elektryczna w QPC jest bardzo wrażliwa na zaburzenia i defekty kanału, które mogą być przyczyną rozpraszania wstecznego elektronu. Tego problemu nie ma w transporcie na stanach krawędziowych zachodzących w efekcie całkowitego kwantowego efektu Halla (IQHE). Dzięki temu, w przeciwieństwie do QPC, IQHE może stanowić doskonały wzorzec oporu elektrycznego [31].

10.5.2 Przewodność w transporcie liniowym

W formule Landauera (11) rozkład Fermiego można rozwinąć w szereg Taylor'a: $f_{\mu_1} = f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial E}|_{E=E_F}(\mu_1 - E_F) + \dots$, gdzie f_0 to rozkład Fermiego dla układu w równowadze termodynamicznej przy wspólnej dla całego układu energii Fermiego E_F . Dla niewielkiej różnicy w potencjałach elektrochemicznych obydwu rezerwuarów zaniedbuje się wyrazy powyżej liniowych, a formuła Landauera przyjmuje postać

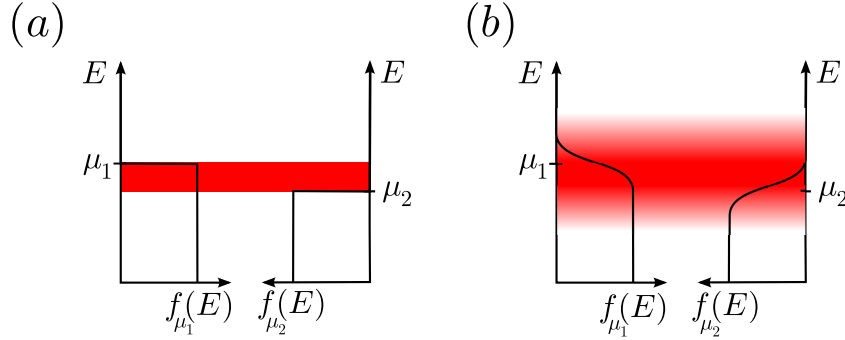
$$I = \frac{2e}{h} \int dE M(E) T(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \Big|_{E=E_F} \right) (\mu_1 - \mu_2) = G \Delta U, \quad (13)$$

gdzie G to liniowa przewodność dana wzorem

$$G = \frac{2e^2}{h} \int dE M(E) T(E) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \Big|_{E=E_F} \right). \quad (14)$$

Dla zerowej temperatury pochodna rozkładu Fermiego przechodzi w deltę Dirac'a. Przy $T(E) = 1$ powyższy wzór daje wyrażenie na kwantyzację przewodności.

W zerowej temperaturze ruch elektronów odbywa się w ściśle określonym przedziale energii między potencjałami elektrochemicznymi kontaktów (rys. 6(a)). W rzeczywistych układach temperatura zera bezwzględnego nie jest możliwa do osiągnięcia, co skutkuje rozmyciem energii elektronów biorących aktywny udział w transporcie (rys. 6(b)). Po-



Rysunek 6: Rozkład energii elektronów biorących udział w transporcie w zerowej (a) i niezerowej (b) temperaturze.

chodną funkcji Fermiego definiuje termiczne poszerzenie okna transportu:

$$-\frac{\partial f}{\partial E} \equiv -\frac{d}{dE} \left(\frac{1}{e^{E/k_B\tau} + 1} \right) = \frac{1}{4k_B T} \text{sech}^2 \left(\frac{E}{2k_B\tau} \right), \quad (15)$$

tak, że w skończonej temperaturze τ prąd opisany równaniem (13) jest niesiony przez elektrony o energii:

$$\sim (\mu_1 + k_B\tau) > E > \sim (\mu_2 - k_B\tau) \quad (16)$$

10.5.3 Uogólnienie Büttikera

W badaniu sił magnetycznych, zakrzywiających trajektorię ruchu elektronów, używane były układy z trzema końcówkami. Teoria Landauera została uogólniona na układy wielo-końcówkowe przez Büttikera. Prąd płynący przez końcówkę p można wyrazić jako sumę:

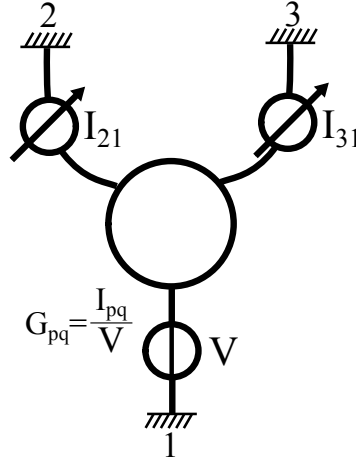
$$I_p = \frac{2e}{h} \sum_q [T_{qp}\mu_p - T_{pq}\mu_q]$$

gdzie $T_{p \leftarrow q} \equiv T_{pq}$ to prawdopodobieństwo transmisji elektronu z końcówki q do końcówki p . Powyższy wzór można przepisać do postaci:

$$I_p = \sum_q [G_{qp}V_p - G_{pq}V_q] \quad (17)$$

gdzie $G_{pq} = \frac{2e^2}{h} T_{pq}$. Niezależnie od fizyki odpowiedzialnej za transport, jeśli ładunek zostaje wprowadzony do układu z wejścia p może go opuścić na q sposobów co daje związek:

$$\sum_q G_{qp} = \frac{2e^2}{h}. \quad (18)$$



Rysunek 7: Schemat konfiguracji pomiarowej wykorzystywanej w pracach [A.1, A.2, A.4, A.5]. Na skutek przyłożonego napięcia na wejściu 1 przez pierścień przepływa prąd. W zależności od: energii Fermiego, geometrii układu czy przyłożonego pola magnetycznego prąd odpływa do wyjść 2 i 3 utrzymywanych na wspólnym potencjale.

Dodatkowo prąd nie płynie jeśli wszystkie potencjały są jednakowe. Aby równanie (17) spełniało ten warunek przewodność musi spełniać reguły sumowania:

$$\sum_q G_{pq} = \sum_q G_{qp}. \quad (19)$$

Łącząc równania (18) i (19) otrzymujemy związek $\sum_q G_{pq} = \frac{2e^2}{h}$ mówiący, że suma konduktancji między wszystkimi potencjalnymi wejściami (q), a ustalonym wyjściem (p) wynosi $\frac{2e^2}{h}$. Obydwa równania (18) i (19) muszą być jednocześnie spełnione aby suma prądów wpływających i wypływających z układu była zachowana.

Dodatkowe więzy na przewodność układu w warunkach transportu liniowego wnoszą relacja mikrodwracalności Onsagera (patrz niżej 10.6).

Na rysunku 7 przedstawiono konfigurację pomiaru prądowo-napięciowego dla pierścienia w którym mierzona jest przewodność dwóch wyjść, zgodna z doświadczeniem Strambiniego i innych [12] i pracami teoretycznymi [A.1, A.2, A.4 i A.5]). W badanej konfiguracji obydwie końcówki wyjściowe utrzymywane są na identycznym potencjale. Prąd do tych końcówek płynie i jest mierzony po podniesieniu potencjału kontaktu wejściowego (1). Wzór (17) redukuje się wtedy do $I_{21} = \frac{2e^2}{h} T_{21} V$ oraz $I_{31} = \frac{2e^2}{h} T_{31} V$.

10.6 Relacja Onsagera

Przewodność wyznacza charakterystykę prądowo-napięciową układu. Jeżeli do układu przyłożono zewnętrzne pole magnetyczne, zależność prądu od napięcia można wyrazić ogólnym wzorem:

$$I(V, B) = G(V, B)V.$$

W warunkach transportu liniowego przewodność $G = G(B)$ przestaje być funkcją napięcia. Liniowe przybliżenie podlega relacji Onsagera-Casimira – jest parzystą funkcją pola magnetycznego $G(B) = G(-B)$. Niezmienniczość konduktancji ze względu na zmianę znaku pola magnetycznego jest zachowana niezależnie od symetrii przestrzennej układu lub jej braku.

Ten niezwykle fakt, z punktu widzenia kinetyki przejścia elektronu przez układ, można wyjaśnić obrazowo. Na rysunkach 8 przedstawiono układ z dwoma doprowadzeniami. Rysunki 8(a) i (b) przedstawiają sytuację, w której elektron przechodzi do wyjścia. Pod wpływem pola magnetycznego kierunek ruchu elektronu jest zakrzywiany. Jeśli elektron przechodzi przez układ z wejścia 1 do wyjścia 2 jego trajektorie są różne dla przeciwnych orientacji pola magnetycznego. Jednak dla pewnych wartości pola, w wyniku odbić, elektron powraca do wejścia układu. Utworzona w ten sposób, zamknięta trajektoria elektronu będzie identyczna dla obu orientacji pola magnetycznego (rys. 8(c)). Zmianie ulegnie jedynie kierunek obiegu. Zatem wyznaczone prawdopodobieństwo odbicia elektronu (T_{11}) musi być symetryczną funkcją pola magnetycznego:

$$T_{11}(B) = T_{11}(-B).$$

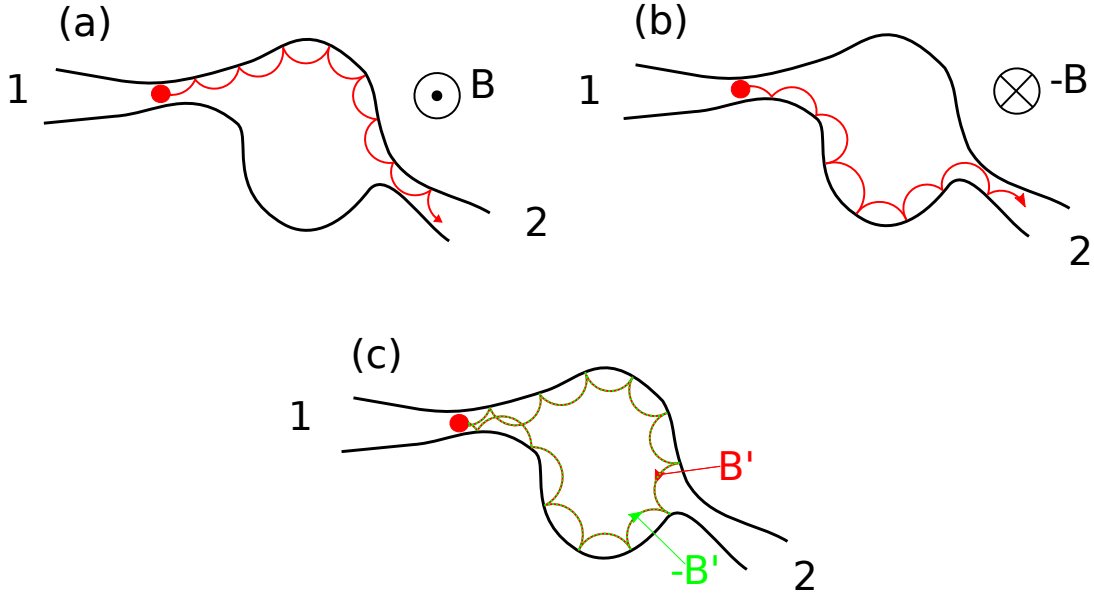
W układzie z dwiema końcówkami elektron może tylko zostać przetransportowany do wyjścia, albo zostać odbity i wrócić do wejścia. Zatem musi zachodzić związek $T_{21} + T_{11} = 1$, gdzie T_{21} to prawdopodobieństwo transmisji elektronu z kanału 1 do kanału 2 co w konsekwencji prowadzi do wyrażenia:

$$T_{21}(B) = T_{21}(-B).$$

Zgodnie z teorią Landauera ($G(B) = \frac{e^2}{h}T(B)$) jest to równoznaczne z:

$$G_{21}(B) = G_{21}(-B). \quad (20)$$

Jest to dodatkowa cecha przewodności w układzie kwazibalistycznym. Powyższą regułę



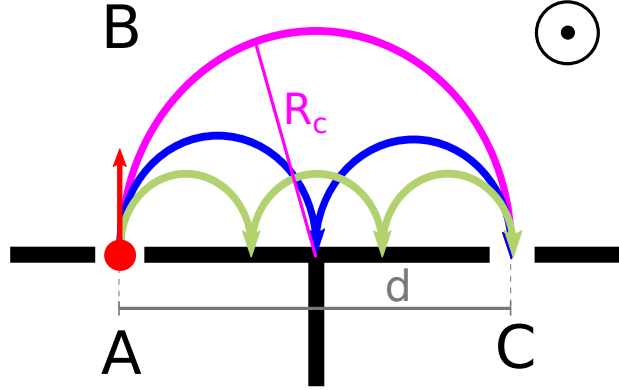
Rysunek 8: Schematyczny obraz trajektorii ruchu elektronu przez układ w polu magnetycznym. Ruch w polu (a) B i (b) $-B$ oraz. (c) Ruch w polu B' i $-B'$ gdzie elektron wraca do wejścia. Trajektorie w B' i $-B'$ pokrywają się.

można przedstawić ogólniej. Odwrócenie znaku pola magnetycznego jest równoznaczne odwróceniu kierunku strzałki czasu:

$$G_{21}(B) = G_{12}(-B). \quad (21)$$

Z (20) oraz (21) wynika więc: $G_{21}(B) = G_{12}(B)$. Analogiczną symetrię wyprowadza się w układzie w transporcie wielopasmowym. Każde podpasmo stanowi niezależny kanał transportu gdzie niezależnie od przestrzennej symetrii układu efekty rozpraszania międzypasmowego muszą zachowywać symetrię (20) i (21).

Z punktu widzenia klasycznego równość $G_{12}(B) = G_{21}(B)$ jest prostą konsekwencją prawa Ohma, gdzie spadek napięcia, a więc i rezystancja przewodnika nie zależy od kierunku przepływu prądu. Powyższa relacja jest w ogólności spełniona w układach bliskich równowagi termodynamicznej w transporcie liniowym. Jednak w eksperymentach na układach mezoskopowych w warunkach transportu nieliniowego przewodność niekiedy nie jest parzystą funkcją pola magnetycznego. Możliwość tą pokazali całkiem niedawno Sanchez i Buttiker w pracy [32], po której pojawiło się wiele prac doświadczalnych w których relacja Onsagera jest łamana [10, 21, 22, 23, 24, 25, 26]. Obecnie nie ma eksperymentalnych dowodów na to, żeby relacja Onsagera mogła być złamana w warunkach transportu liniowego, bez względu na naturę transportu.



Rysunek 9: Schemat układu z wyróżnionymi trzema obszarami: A , B , C . Elektron z obszaru A jest w stanie przejść do obszaru C tylko w przypadku określonej wartości pola magnetycznego i prędkości wyznaczonej przez promień cyklotronowy R_c .

10.7 Ogniskowanie magnetyczne

Na klasyczną naładowaną cząstkę poruszającą się w polu magnetycznym działa siła Lorentza

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (22)$$

Wyraźny wpływ siły Lorentza na trajektorie elektronu uwidacznia się w zjawisku ogniskowania magnetycznego [15]. Zgodnie z twierdzeniem Ehrenfesta średnie położenie i pęd cząstki zmieniają się w układzie w sposób analogiczny do ruchu cząstek w mechanice klasycznej. Funkcja falowa elektronu w polu magnetycznym preferuje trajektorie zgodne z działaniem siły Lorentza [33].

Schemat układu do ogniskowania magnetycznego przedstawiono na rysunku 9. Elektron przechodzi z obszaru A do obszaru B z pewną prędkością v . Pole magnetyczne zakrzywia trajektorię elektronu. Jeśli całkowita wielokrotność promienia krzywizny (promienia cyklotronowego) jest równa odległości między otworami $d = nR_c$, elektron przechodzi z obszaru A do obszaru C .

W przypadku pola przyłożonego prostopadle do płaszczyzny rysunku promień cyklotronowy można wrazić wzorem:

$$R_c = \frac{mv}{eB}. \quad (23)$$

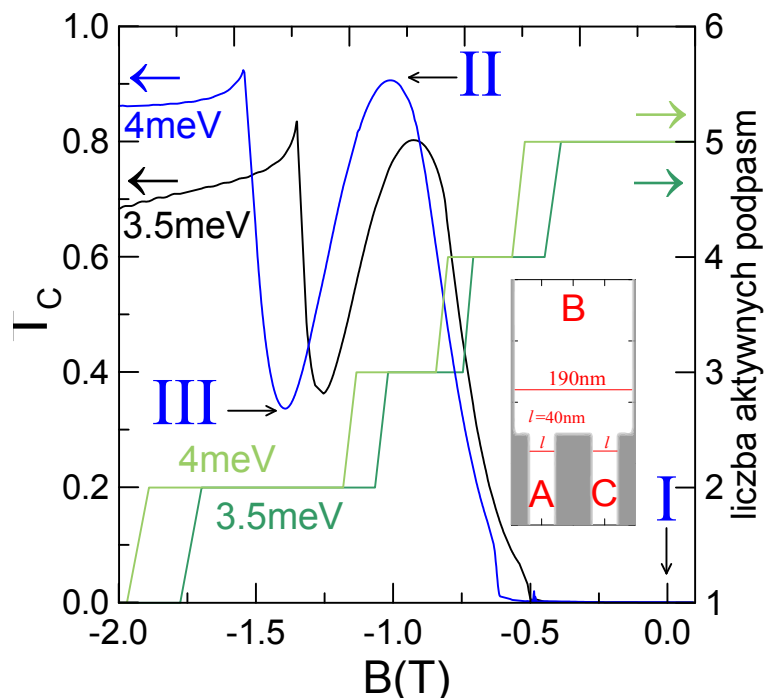
Korzystając z metody opisanej w części 10.9 udało się zamodelować efekt soczewkowania magnetycznego w otwartym układzie. Układ składa się z dwóch stosunkowo wąskich kanałów A i C między którymi interesuje nas przepływ ładunku oraz szeroki kanał B w którym zachodzi zakrzywienie trajektorii.

Na rysunku 10(a) przedstawiono prawdopodobieństwo transmisji elektronu z wejścia A do wyjścia C w funkcji pola magnetycznego dla energii $E = 3.5$ meV i $E = 4.0$ meV. Na rysunku 10(b) obserwujemy rozkład gęstości prawdopodobieństwa oraz kierunek prądów dla trzech (I,II,III) charakterystycznych pól magnetycznych. Maksimum transmisji odpowiada promieniowi:

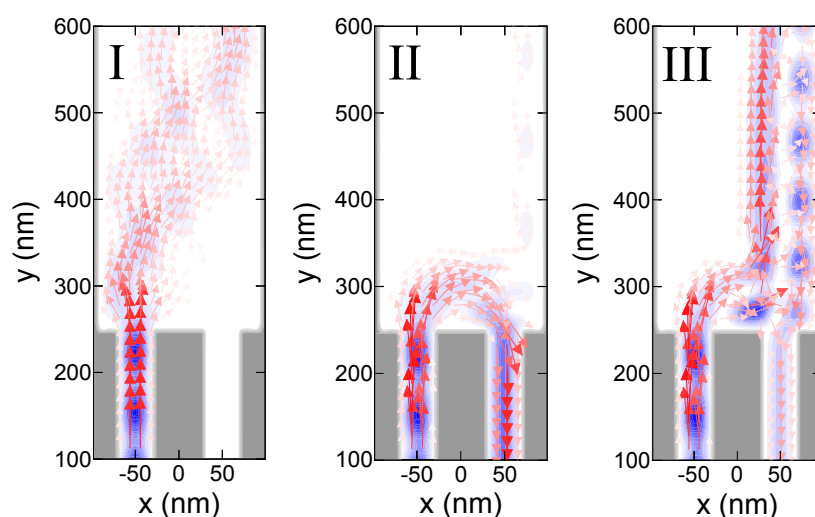
$$R_c = \frac{m^*|v|}{e|B|} = \frac{\hbar|k|}{e|B|} = \frac{\sqrt{2m^*(E - E_s)}}{e|B|} \quad (24)$$

E_s to energia odcięcia w szerokim kanale B . Na rysunku 10(a) maksimum prawdopodobieństwa przejścia do wyjścia C występuje dla pola $B = -1.1$ T i energii $E = 4.0$ meV co odpowiada promieniowi $R_c \simeq 50$ nm.

(a)



(b)



Rysunek 10: Modelowanie zjawiska ogniskowania magnetycznego. (a) Prawdopodobieństwo transmisji do kanału C w funkcji pola magnetycznego - lewa oś. Liczba aktywnych podpasm na wyjściu (kanał B) - prawa oś. Potencjał uwięzienia z zaznaczonymi kanałami - jako inset. (b) Gęstość prawdopodobieństwa funkcji falowej (niebieski kolor) oraz rozkład prądu prawdopodobieństwa (czerwone strzałki) w układzie dla trzech pól magnetycznych I - $B = 0$ T, II - $B = -1.1$ T, III - $B = -1.39$ T

10.8 Efekt Aharonowa-Bohma

Aharonow i Bohm [34] zauważyli, że faza funkcji falowej jest modyfikowana przez potencjał wektorowy pola magnetycznego lub potencjał elektrostatyczny nawet wówczas, gdy prawdopodobieństwo wystąpienia elektronu w obszarze działania pola magnetycznego i / lub elektrycznego jest zerowe.

Wyobraźmy sobie kanał z pierścieniem kwantowym i propagujący się w nim pakiet falowy elektronu (rys. 11(a)). Część pakietu przejdzie do górnego ramienia pierścienia, gdzie umieszczono puszkę Faradaya o zmiennym potencjale elektrycznym $V(t)$. Dopóki pakiet falowy w całości nie znajdzie się wewnątrz puszkii różnica potencjałów elektrycznych (puszki i ramienia) wynosi zero. Kiedy pakiet znajdzie się wewnątrz przesuwamy potencjał elektryczny, po czym wracamy do wartości początkowej zanim elektron zacznie opuszczać urządzenie. Kiedy na granicy puszkii i ramienia wstępuje różnica potencjałów powstaje pole elektryczne $\vec{E} = -\nabla V$ którego elektron nie odczuje. Dzieje się tak na skutek zerowania się funkcji falowej elektronu w miejscu działania pola elektrycznego. Pomimo braku wpływu pola elektrycznego na funkcje falową, jej faza ulegnie przesunięciu na skutek chwilowej zmiany potencjału elektrycznego wewnątrz puszkii. Funkcja falowa elektronu przyjmuje postać [34]:

$$\Psi = \Psi_0 e^{-iP/\hbar}, \quad (25)$$

gdzie Ψ_0 to rozwiązanie dla czystego pierścienia i P to przesunięcie fazy: $P = e \int V(t) dt$. Na wyjściu z pierścienia funkcja falowa ma postać:

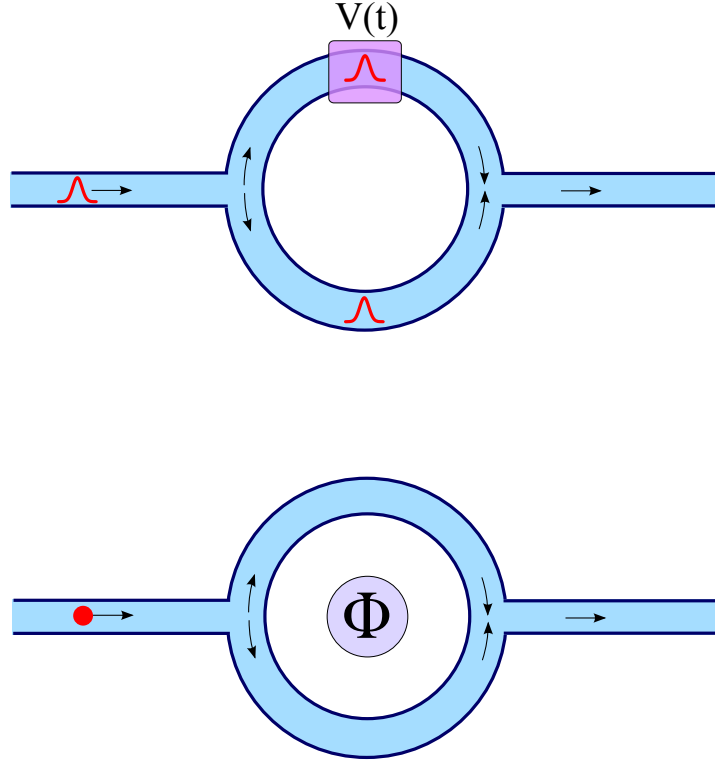
$$\psi = \psi_0^1 e^{-iP_1/\hbar} + \psi_0^2 e^{-iP_2/\hbar} \quad (26)$$

gdzie ψ_0^1 to funkcja falowa w górnym a ψ_0^2 w dolnym ramieniu pierścienia. Otrzymujemy różnicę faz na wyjściu równą $\Delta\phi = (P_1 - P_2)/\hbar$, która jest źródłem interferencji funkcji falowej. Elektryczny efekt AB został zaobserwowany w pracy [35].

Drugim rodzajem efektu AB – ważniejszego dla tej rozprawy – pochodzi od potencjału wektorowego pola magnetycznego. Wewnątrz pierścienia umieszczamy solenoid (rys. 11(b)) tak, aby pole magnetyczne było niezerowe tylko wewnątrz niego. Wówczas Hamiltonian układu będzie miał postać:

$$H = \frac{1}{2m} (i\hbar\nabla + e\vec{A})^2$$

gdzie A to potencjał wektorowy pola magnetycznego ($\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$). Należy zwrócić uwagę na to, że pomimo braku pola magnetycznego potencjał wektorowy pozostaje niezerowy.



Rysunek 11: (a) Elektryczny i b) magnetyczny efekt Aharonowa-Bohma.

Funkcja falowa w obszarze jednopójnym przyjmuje postać:

$$\Psi = \Psi_0 e^{-iP/\hbar}, P = e \int \vec{A} dx$$

Funkcja falowa na wyjściu układu przyjmuje analogiczną postać jak dla przypadku z potencjałem elektrycznym, w konsekwencji otrzymujemy przesunięcie fazowe:

$$\Delta\phi = (P_1 - P_2)/\hbar = \frac{e}{\hbar} \left(\int_1 \vec{A} dx - \int_2 \vec{A} dx \right) = \frac{e}{\hbar} \oint \vec{A} dx = \frac{e}{\hbar} \int \vec{B} dS = \frac{e}{\hbar} \Phi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (27)$$

gdzie $\Phi_0 = h/|e|$ jest kwantem strumienia magnetycznego. Zjawisko interferencji na wyjściu układu można obserwować w postaci oscylacji przewodności (co w formalizmie Landauera-Büttikera oznacza oscylacje prawdopodobieństwa transmisji elektronu). Udało się również zaobserwować efekt AB przez pomiar momentu magnetycznego indukowanego przez pierścień kwantowy [36].

Magnetyczny efekt Aharonowa-Bohma wykryty w ciele stałym w latach 80 ubiegłego wieku [4, 5]. Szczególne realizacje interferometru AB w nanostrukturach półprzewodnikowych opartych na heterozłączu AlGaAs/GaAs było obiektem naszych badań. Warunkiem koniecznym obserwacji oscylacji AB jest zachowanie spójności fazowej funkcji falowej,

przez co rozmiary układu ograniczone są do rozmiarów transportu koherentnego. Małe rozmiary układu uniemożliwiają wytworzenie dostatecznie silnego pola magnetycznego, które nie pokrywałoby całej powierzchni badanej próbki (ramion i wnętrza pierścienia). Elektron odczuwając pole magnetyczne ulega działaniu klasycznych sił magnetycznych. Dzięki stosunkowo niskiej masie efektywnej elektronu w półprzewodniku, siła Lorentza wyraźnie zakrzywia trajektorię elektronu, co skutkuje osłabieniem efektu AB [A.1].

10.9 Metoda obliczeniowa

Poniższa metoda wyznacza rozwiązywanie problemu rozproszeniowego dla elektronu z powierzchni Fermiego. Została ona wykorzystana w pracach [A.2, A.3, A.4, A.5]. Wynikiem metody jest niezależna od czasu funkcja falowa elektronu z poziomu Fermiego. Otrzymana funkcja falowa pozwala wyznaczyć prawdopodobieństwo przejścia elektronu między końcówkami układu. Opis metody przedstawiono dla układu dwu-końcówkowego.

10.9.1 Opis metody

Zaniedbując oddziaływanie elektron-elektron inne niż przekazywane przez uśrednione pole, zagadnienie sprowadza się do rozwiązania dwuwymiarowego, jednoelektronowego równania Schrödingera. Zakładamy, że wektor pola magnetycznego jest skierowany zawsze prostopadle do płaszczyzny uwięzienia. Hamiltonian elektronu można zapisać w postaci:

$$H = (-i\hbar\nabla + e\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 / 2m^* + V(x, y), \quad (28)$$

gdzie $V(x, y)$ to potencjał uwięzienia i $\mathbf{A}$ to potencjał wektorowy pola magnetycznego. Metoda opiera się na wykorzystaniu jawnego schematu różnicowego opartego o dyskretyzację równania Schrödingera na dwuwymiarowej siatce obliczeniowej o kroku siatki $\Delta x = \Delta y$.

10.9.2 Dyskretyzacja hamiltonianu

W pracy wykorzystujemy dyskretyzację różnicową typu Wilsona [37] dla operatora energii kinetycznej. Dyskretyzacja zapewnia wyniki niezależne od wyboru cechowania. Wzór zdyskretyzowany dąży do dokładnego operatora różniczkowego w granicy $\Delta x \rightarrow 0$. Dyskretyzacja ma postać:

$$\frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 \Psi_{\mu,\nu} = \frac{\hbar^2}{2m^* \Delta x^2} \left(4\Psi_{\mu,\nu} - C_y \Psi_{\mu,\nu-1} - C_y^* \Psi_{\mu,\nu+1} - C_x \Psi_{\mu-1,\nu} - C_x^* \Psi_{\mu+1,\nu} \right),$$

gdzie $\Psi_{\mu,\nu} = \Psi(x_\mu, y_\nu)$, $C_y = \exp\left[-i\frac{e}{\hbar}\Delta x A_y\right]$ i $C_x = \exp\left[-i\frac{e}{\hbar}\Delta x A_x\right]$. Potencjał wektorowy wybieramy w formie: $\mathbf{A} = (A_x, A_y, 0) = (0, Bx, 0)$, dla którego Hamiltonian można przedstawić jako:

$$\begin{aligned} H\Psi_{\mu,\nu} &= \frac{\hbar^2}{2m^*\Delta x^2}(4\Psi_{\mu,\nu} - C_y\Psi_{\mu,\nu-1} - C_y^*\Psi_{\mu,\nu+1} - \Psi_{\mu-1,\nu} - \Psi_{\mu+1,\nu}) \\ &= E\Psi_{\mu,\nu} - V_{\mu,\nu}\Psi_{\mu,\nu}, \end{aligned} \quad (29)$$

Równanie (29) ma rozwiązanie dla dowolnej energii E większej niż energia odcięcia najniższego podpasma. Zadając energię E problem wyznaczenia funkcji falowej sprowadza się do rozwiązywania układu równań liniowych.

10.9.3 Funkcja falowa w doprowadzeniach

Modelowane układy mają doprowadzenia (kanały) równoległe do osi y . Wybrany potencjał umożliwia separację zmiennych w funkcjach własnych hamiltonianu dla elektronu w kanałach:

$$\Psi(x, y) = \exp(iky)\psi^k(x), \quad (30)$$

czyli:

$$\Psi_{\mu,\nu\pm 1} = \exp(\pm ik\Delta x)\psi_\mu^k. \quad (31)$$

Wstawiając podstawienie (31) do równania (29) otrzymujemy jednowymiarowe równanie własne w postaci:

$$\begin{aligned} &\frac{\hbar^2}{2m^*\Delta x^2}(2\psi_\mu^k - \psi_{\mu-1}^k - \psi_{\mu+1}^k) \\ &+ \frac{\hbar^2}{m^*\Delta x^2}\left(1 - \cos(k\Delta x + \frac{e}{\hbar}Bx\Delta x)\right)\psi_\mu^k \\ &+ V_\mu\psi_\mu^k = E\psi_\mu^k. \end{aligned} \quad (32)$$

Jeśli zadana energia $E = E_F$ przecina kilka podpasm, należy wyznaczyć wszystkie funkcje i wektory falowe Fermiego odpowiadające tej energii. Na rysunku 12(a) przedstawiono część rzeczywistą funkcji falowych kolejnych trzech podpasm.

W dużej odległości od obiektu rozpraszania rozwiązanie równania (29) przyjmuje postać superpozycji funkcji własnych kanału (rys. 12(a)). Każdą funkcję falową elektronu przy danej energii można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= \sum_{j=1}^n A_j \exp(ik_j y) \psi_j^{k_j}(x) \\ &+ \sum_{j=1}^n B_j \exp(-ik_j y) \psi_j^{-k_j}(x) \end{aligned} \quad (33)$$

gdzie A_i , B_i to amplitudy fali poruszających się w obydwu kierunkach w kanale. Funkcja $\psi_j^{k_j}$ to funkcja j -tego podpasma odpowiadająca wektorowi falowemu k_j . Znak k_j określa kierunek ruchu elektronu wzdłuż kanału. W celu uzyskania rozwiązania problemu rozproszeniowego należy wyznaczyć powyższe amplitudy osobno dla kanału wejściowego i wyjściowego.

W kanale wyjściowym (daleko od obiektu rozpraszania) oczekujemy znaleźć tylko fale oddalające się od obiektu rozpraszania ($\forall_j B_j = 0$), czyli funkcja falowa na wyjściu przyjmuje postać:

$$\Psi(x, y) = \sum_{j=1}^n D_j \exp(ik_j y) \psi_j^{k_j}(x). \quad (34)$$

W kanale balistycznym transport w każdym podpaśmie jest niezależny. Pozwala to rozpatrywać problem rozproszeniowy dla funkcji falowej wchodzącej do układu z każdego podpasma z osobna. W kanale wejściowym funkcja falowa wchodzi do układu z jednego podpasma m i w wyniku rozpraszania międzypasmowego może wrócić do wejścia w dowolnym podpaśmie (rys. 12(b)). Zatem funkcja falowa na wejściu przyjmuje postać:

$$\Psi(x, y) = A_m \exp(ik_m y) \psi_m^{k_m}(x) + \sum_{j=1}^n B_j \exp(-ik_j y) \psi_j^{-k_j}(x). \quad (35)$$

Według wzoru (35) na wejściu układu elektron wchodzący ze stanu k_m może zostać odbity i wrócić do kanału w każdym z możliwych podpasem. Ten sam elektron może przejść do wyjścia tak samo zmieniając podpasmo (34). W konsekwencji daje to $1+2n$ nieznanymi amplitud, które znajdziemy rozwiązując równanie (29). Amplitudy określamy w sposób samouzgadniony. W pierwszej iteracji warunek brzegowy na wejściu przyjmuje postać (35), gdzie $A_m = 1, \forall_j B_j = 0$. Na górnym brzegu obszaru całkowania do równania (29) zamiast $\Psi_{\mu, \nu+1}$ wstawiamy wartość uzyskaną z równania (36):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} - ik_z \Psi = \sum_{j=1}^n i(k_j - k_z) D_j \exp(ik_j y) \psi_j^{k_j}(x). \quad (36)$$

Co po dyskretyzacji przyjmuje postać:

$$\Psi_{\mu, \nu+1} = \Psi_{\mu, \nu-1} + 2\Delta y (ik_z \Psi_{\mu, \nu} + \sum_{j=1}^n i(k_j - k_z) D_j \exp(ik_j y) \psi_j^{k_j}(x)). \quad (37)$$

które umieszczamy w równaniu (29) na górnym brzegu pudła obliczeniowego. W rachunkach przyjmujemy za k_z jeden ze znalezionych wektorów Fermiego, np. k_1 . Podobną pro-

cedurę wykonujemy na wejściu układu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + ik_z \Psi = & A_m i(k_m + k_z) \exp(ik_m y) \psi_m^{k_m}(x) \\ & + \sum_{j=1}^n i(k_z - k_j) B_j \exp(-ik_j y) \psi_j^{-k_j}(x). \end{aligned} \quad (38)$$

i w konsekwencji:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu, \nu-1} = & \Psi_{\mu, \nu+1} + 2\Delta y (k_m \Psi_{\mu, \nu} - A_m i(k_m + k_z) \exp(ik_m y) \psi_m^{k_m}(x) \\ & - \sum_{j=1}^n i(k_z - k_j) B_j \exp(-ik_j y) \psi_j^{-k_j}(x)). \end{aligned} \quad (39)$$

Po rozwiązaniu układu równań (29) kanały wejściowe i wyjściowe zawierają wszystkie szukane amplitudy funkcji falowych odpowiadających energii E . Aby wyznaczyć funkcję falową przedstawić w formie równania (33), należy wyznaczyć współczynniki A_i i B_i .

Najprostszą metodą wyznaczenia współczynników ($2n$ niewiadomych) jest metoda kolokacji. Metoda kolokacji polega na zbudowaniu układu $2n$ równań z $2n$ niewiadomymi. Wybieramy $2n$ punktów (x_i, y_i) w doprowadzeniach i podstawiamy je do równania (33). Wybrane punkty nie powinny znajdować się na osi kanału, ze względu zerowania się nieparzystych funkcji własnych równania (32). Równanie (33) przedstawia funkcję falową Ψ w bazie funkcji własnych kanału. Ze względu na stany zanikające (patrz 10.9.5) baza ta może nie być zupełna a wówczas metoda kolokacja zapewnia właściwe dopasowanie współczynników tylko w wybranych punktach (x_i, y_i) . Korzystniejsze dopasowanie zapewnia metoda rzutowania rozwiązania numerycznego do postaci analitycznej (35) lub (34). Przedstawmy równanie (33) w bardziej zwartej formie:

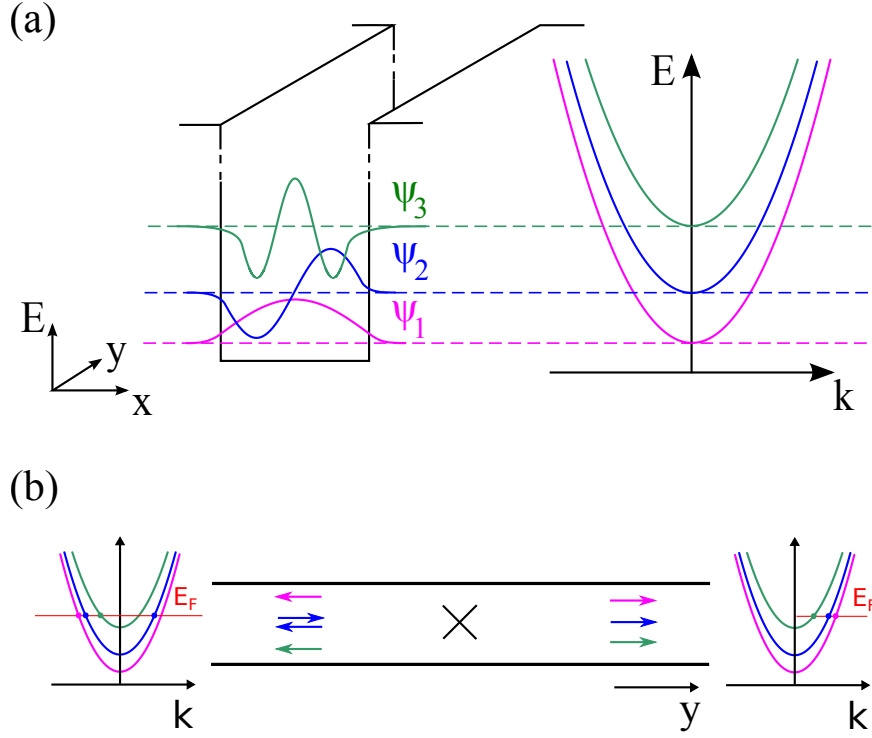
$$\Psi = \sum_{j=1}^{2n} c_j \phi_j$$

gdzie $\phi_j = e^{ik_j y} \psi_j^{k_j}(x)$ a c_j to jedna z szukanych amplitud $\{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n\}$. Metoda Galarkina polega na rozwiązaniu układu równań:

$$\begin{aligned} (\phi_1, \Psi) &= c_1(\phi_1, \phi_1) + \dots + c_n(\phi_1, \phi_{2n}) \\ &\vdots \\ (\phi_{2n}, \Psi) &= c_1(\phi_{2n}, \phi_1) + \dots + c_n(\phi_{2n}, \phi_{2n}) \end{aligned}$$

gdzie (f, g) to całka w postaci:

$$(f, g) = \int_{X_1}^{X_2} \int_{Y_2}^{Y_1} f(x, y) g(x, y) dx dy$$



Rysunek 12: (a) Kanał i funkcje falowe kolejnych podpasm (ψ_n). Po prawej stronie rysunku relacja dyspersji z podpasмами odpowiadającymi kolejnym funkcjom poprzecznym kanału. (b) Układ zawiera jedno wejście i jedno wyjście. Rozpatrujemy sytuację, w której elektron pada na obiekt rozpraszający z jednego dozwolonego podpasma. Dostępne podpasma wyznacza energia Fermiego E_F (czerwona linia). Na rysunku (b) elektron pada z drugiego podpasma oznacza to, że narzucamy warunek brzegowy $A_2 \neq 0$, $A_1 = A_3 = 0$ (patrz wzór (35)). W wyniku rozpraszania elektron może wrócić do wejścia lub przejść do wyjścia w dowolnym podpaśmie dostępnym z poziomu Fermiego.

Granice całkowania X_1 i X_2 obejmują całą szerokość kanału oraz obszar gdzie funkcja falowa wnika do potencjału uwięzienia. Granice całkowania w Y_1 i Y_2 rozpoczynają się na krawędzi pudła obliczeniowego i obejmują końcowy odcinek kanału. Otrzymane współczynniki A_i i B_i wstawiamy do warunków brzegowych i rozwiązujemy ponownie równanie (29). Iterację powtarzamy aż do uzgodnienia wartości A_i i B_i .

Cały rachunek powtarzamy dla każdego dozwolonego podpasma m z jakiego elektron może wejść do układu.

Uzyskany komplet współczynników A_i i B_i dla każdego m wykorzystujemy do określenia prawdopodobieństwa transmisji elektronu między końcówkami i podpasmami.

10.9.4 Prawdopodobieństwa transmisji elektronu

Prawdopodobieństwa transmisji (lub odbicia) elektronu wchodzącego do układu z podpasma m i wychodzącego na wyjściu w stanie n określamy jako:

$$T_{nm} = \left(\frac{D_n}{A_m} \right)^2 \times \left(\frac{j_n}{j_m} \right) \quad (40)$$

gdzie j_n jest strumieniem prądu prawdopodobieństwa przez kanał obliczonego dla stanu własnego kanału (podpasma) n . Przewodność dwukońcówkowego układu jest proporcjonalna do sumy prawdopodobieństw transmisji ze wszystkich podpasma m elektrody wejściowej do wszystkich podpasma elektrody wyjściowej n

$$T = \sum_{m=1, n=1}^N T_{nm} \quad (41)$$

10.9.5 Mody zanikające

Zgodnie z przybliżeniem masy efektywnej (akapit: 10.2) na energię kinetyczną elektronu w podpaśmie n składa się człon związany z ruchem wzdłuż kanału proporcjonalny do $\sim k_n^2$ oraz człon związany z ruchem w poprzek kanału E_n (związana z szerokością kanału). Całkowita energia kinetyczna elektronu w stanie n wyznacza relacja dyspersji:

$$E = E_n + \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m^*}.$$

Kiedy szukamy rozwiązania stacjonarnego przepływu elektronu przez pusty kanał przyczynkiem od każdego podpasma jest stały i nie zmienia się wzdłuż kanału. Sytuacja wygląda inaczej po wstawieniu elementu rozpraszającego (przeszkody) w kanale. W pobliżu przeszkody funkcja falowa elektronu może przyjmować dowolne kształty, nawet takie, które odpowiadają wzbudzeniom do stanów związanych z podpasma o wyższej energii niż całkowita energia kinetyczna elektronu. Takie mody nazywamy modami zanikającymi (*evanescent modes*) [38]. Modom zanikającym odpowiada ujemna energia kinetyczna dla ruchu wzdłuż kanału oraz urojone wektory falowe.

$$\begin{cases} E = E_n + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \\ E_n > E \end{cases} \rightarrow \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} < 0 \rightarrow k = \pm i \sqrt{\frac{2m^*(E_n - E)}{\hbar^2}}.$$

gdzie E_n to energia odcięcia jednego z podpasma będącego powyżej energii elektronu.

Dla urojonych wektorów falowych dostajemy stany które rosną lub zanikają eksponencjalnie w funkcji odległości od przeszkody. Stany, które rosną odrzucamy jako нефизyczne.

Zatem funkcja falowa stanów zanikających przyjmuje postać:

$$\psi \sim e^{iky} \rightarrow \psi \sim e^{-\sqrt{\frac{2m^*(E_n-E)}{\hbar^2}}y}$$

Obszar lokalizacji modu zanikającego zależy od różnicy energii stanu zanikającego i energii elektronu. W naszym rozwiązaniu numerycznym musimy zadbać o to żeby kanały doprowadzające (pozbawione zaburzeń) były dostatecznie długie, aby na końcach kanałów stany zanikające nie występowały. Ponieważ jednak zasięg stanów zanikających rośnie gdy energia elektronu dąży do energii E_n długość kanału może być nie wystarczająca. W przeprowadzonych rachunkach zakres badanej energii, jak również długość doprowadzeń była wystarczająca, aby stany zanikające nie występowały na końcach kanałów.

Literatura

- [1] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics, 8th Edition*. John Wiley & Sons, Inc, 2005.
- [2] *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [3] M. Geoghegan R. W. Kelsall, I. W. Hamley. *Nanotechnologie*. PWN, 2008.
- [4] R. A. Webb S.S. Washburn. Aharonov-Bohm effect in normal metal quantum coherence and transport. *Adv. Phys.*, 35 375, 1986.
- [5] G. Timp A.M. Chang J.E. Cunningham T.Y. Chang P. Mankiewich R. Behringer and R. E. Howard. Observation of the Aharonov-Bohm effect. *Phys. Rev. Lett.*, 58 2814, 1987.
- [6] A.C. Gossard D.C. Tsui, H.L. Stormer. Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. *Phys. Rev. Lett.*, 48 1559, 1982.
- [7] A. Fuhrer S. Luscher T. Ihn T. Heinzel K. Ensslin W. Wegscheider and M. Bichler. Energy spectra and broken symmetry in quantum rings. *Nature*, 413 822, 2001.
- [8] R. J. Haug A. Mühle, W. Wegscheider. Coupling in concentric double quantum rings. *Applied Physics Letters*, 91 133116, 2007.
- [9] S. Gustavsson R. Leturcq R. M. Studer T. Ihn T. K. Ensslin D.C. Driscoll and A.C. Gossard A. C. Time-resolved detection of single-electron interference. *Nano Lett.*, 8 2547, 2008.
- [10] Gotz G Ihn T Ensslin K Driscoll D C Leturcq R, Sanchez D and Gossard A C. Magnetic field symmetry and phase rigidity of the nonlinear conductance in a ring. *Phys. Rev. Lett.*, 96 126801, 2006.
- [11] F. Martins B. Hackens M.G. Pala T. Ouisse H. Sellier X. Wallart S. Bollaert A. Cappy J. Chevrier V. Bayot and S. Huant. Imaging electron wave functions inside open quantum rings. *Phys. Rev. Lett.*, 99 136807, 2007.
- [12] E. Strambini V. Piazza G. Biasiol L. Sorba and F. Beltram. Impact of classical forces and decoherence in multiterminal Aharonov-Bohm networks. *Phys. Rev. B*, 79 195443, 2009.

- [13] M. Takatsu R. A. Kiehl N. Yokoyama T. Usuki, M. Saito. *Phys. Rev. B*, 52 8244, 1995.
- [14] M.Y. Simmons D.A. Ritchie R. Crook, C.G. Smith. Imaging cyclotron orbits and scattering sites in a high-mobility two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. B*, 62 5174, 2000.
- [15] Tobias Kramer E. J. Heller R. M. Westervelt M. P. Hanson A. C. Gossard K E. Aidala, Robert E. Parrott. Imaging magnetic focusing of coherent electron waves. *Nature Physics*, 3 464 - 468, 2007.
- [16] B. Szafran and F.M. Peeters. Time-dependent simulations of electron transport through a quantum ring: Effect of the lorentz force. *Phys. Rev. B*, 72 165301, 2005.
- [17] B. Szafran and F.M. Peeters. Lorentz-force-induced asymmetry in the Aharonov-Bohm effect in a three-terminal semiconductor quantum ring. *Europhys. Lett.*, 70 810, 2005.
- [18] H. S. Taylor V. A. Mandelshtam, T. R. Ravuri. Calculation of the density of resonance states using the stabilization method. *Phys. Rev. Lett.*, 70 1932, 1993.
- [19] Lars Onsager. Reciprocal relations in irreversible processes. i. *Physical Review*, 37 405, 1931.
- [20] M. Büttiker D. Sánchez. Magnetic-field asymmetry of nonlinear mesoscopic transport. *Phys. Rev. Lett.*, 93 106802, 2004.
- [21] P. Wyder G.L.J.A. Rikken. Magnetoelectric anisotropy in diffusive transport. *Phys. Rev. Lett.*, 94 016601, 2005.
- [22] Z. Wang I. Radu R. Dormaier D.H. Cobden J. Wei, M. Shimogawa. Experimental investigation of the breakdown of the onsager-casimir relations. *Phys. Rev. Lett.*, 96 116801, 2006.
- [23] M.P. Hanson A.C. Gossard D.M. Zumbühl, C.M. Marcus. Asymmetry of nonlinear transport and electron interactions in quantum dots. *Phys. Rev. Lett.*, 96 206802, 2006.
- [24] H. Bouchiat A.D. Chepelianskii. Hall detection of time-reversal symmetry breaking under ac electric driving. *Phys. Rev. Lett.*, 102 086810, 2009.

- [25] A. Forchel B. Brandenstein-Köth, L. Worschech. Magnetic-field asymmetry of nonlinear transport in narrow channels with asymmetric hybrid confinement. *Appl. Phys. Lett.*, 95 062106, 2009.
- [26] M. Hashisaka K. Chida K. Kobayashi T. Ono R. Leturcq K. Ensslin K. Saito Y. Utsumi A.C. Gossard S. Nakamura, Y. Yamauchi. Fluctuation theorem and microreversibility in a quantum coherent conductor. *Phys. Rev. B*, 83 155431, 2011.
- [27] T. Honda R.G. van der Hage L.P. Kouwenhoven S. Tarucha, D.G. Austing. *Phys. Rev. Lett.*, 77 3613, 1996.
- [28] B. Simovic R. Schleser T. Ihn P. Studerus K. Ensslin D.C. Driscoll A.C. Gossard S. Gustavsson, R. Leturcq. Counting statistics of single electron transport in a quantum dot. *Phys. Rev. Lett.*, 96 076605, 2006.
- [29] C.J.B. Ford C.H.W. Barnes D. Anderson G.A.C. Jones I. Farrer D.A. Ritchie R.P.G. McNeil, M. Kataoka. On-demand single-electron transfer between distant quantum dots. *Nature*, 477 439, 2011.
- [30] N. David Mermin N. W. Ashcroft. *Solid State Physics*. Cornell University, 1976.
- [31] T. J. Witt. Electrical resistance standards and the quantum hall effect. *Rev. Sci. Instrum.*, 69 2823, 1998.
- [32] M. Büttiker. Four-terminal phase-coherent conductance. *Phys.Rev.Lett.*, 57 1761, 1986.
- [33] M. Shayegan J.J. Heremans, M.B. Santos. Transverse magnetic focusing and the dispersion of GaAs 2d holes at (311)a heterojunctions. *Surface Science*, 305 1-3, 1993.
- [34] Aharonov Y and Bohm D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, 115 485, 1959.
- [35] De Franceschi S Fujisawa T Elzerman J M Huizeling E W G M Tarucha S van der Wiel W G, Nazarov Yu V and Kouwenhoven L P. Electromagnetic Aharonov-Bohm effect in a two-dimensional electron gas ring. *Phys. Rev. B*, 67 033307, 2003.
- [36] A. Benoit D. Mailly, C. Chapelier. Experimental observation of persistent currents in a GaAs-AlGaAs single loop. *Phys. Rev. Lett.*, 70 13, 1993.

- [37] Governale M and Ungarelli C. Gauge-invariant grid discretization of the Schrödinger equation. *Phys. Rev. B*, 58 7816, 1998.
- [38] P. F. Bagwell. Evanescent modes and scattering in quasi-one-dimensional wires. *Phys. Rev. B*, 41 10354, 1990.