TE[illegible]TU

152716

14356

Dr. KAZIMIERZ ŻORAWSKI
PROFESOR UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO

WYKŁADY GEOMETRJI ANALITYCZNEJ

TOM II

LINJE KRZYWE STOPNIA DRUGIEGO
I PEWNE ZAGADNIENIA
GEOMETRJI DZIEDZINY ZESPOLONEJ

WYDANO Z SUBWENCJI
FUNDUSZU KULTURY NARODOWEJ.

WARSZAWA 1934
SKŁAD GŁÓWNY W KASIE IM. MIANOWSKIEGO, W PAŁACU STASZICA.

C 18/III 4

29

BIBLIOTEKA
K. U. Z. S. P. przy A. G. H.
w KRAKOWIE

18/II

WYKŁADY GEOMETRJI ANALITYCZNEJ

LINJE KRZYWE STOPNIA DRUGIEGO I PEWNE ZAGADNIENIA GEOMETRJI DZIEDZINY ZESPOLONEJ

SPRZEDAŻ W KSIĘGARNIACH NIEDOZWOLONA

DAR
TOWARZYSTWA PRZYJACIÓŁ

Dr. KAZIMIERZ ŻORAWSKI
PROFESOR UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO

BIBLIOTEKA
K. U. Z. G. P. przy A. G. U.
w KRAKOWIE

WYKŁADY GEOMETRJI ANALITYCZNEJ

18/III

TOM II

LINJE KRZYWE STOPNIA DRUGIEGO I PEWNE ZAGADNIENIA GEOMETRJI DZIEDZINY ZESPOLONEJ

WYDANO Z SUBWENCJI
FUNDUSZU KULTURY NARODOWEJ.

WARSZAWA 1934
SKŁAD GŁÓWNY W KASIE IM. MIANOWSKIEGO, W PAŁACU STASZICA.

BIBLIOTEKA GŁÓWNA AGH
1000173374

1572

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
W KRAKOWIE
BIBLIOTEKA

II 14366

NZB 4415

Druk. M. Garasiński, Warszawa, Bracka 20.

Akc. Nr 5019/53

PRZEDMOWA

Treścią tomu II-go „Wykładów geometrji analitycznej" jest opracowanie dalszego ciągu materjału naukowego i dydaktycznego, który był podstawą treści tomu I-go. Opracowanie to obejmuje dalsze własności metryczne i pokrewieństwa tworów płaskich pierwszego i drugiego stopnia w dziedzinach rzeczywistej i urojonej, a rachunki i rozważania tomu II-go oparte są tak samo jak w tomie I-ym głównie na matematyce elementarnej.

Rozdział pierwszy zawiera studjum kształtu i niektórych innych własności krzywych stopnia drugiego na podstawie równań tych krzywych względem szczególnie wybranych układów spółrzędnych prostolinjowych prostokątnych i względem szczególnie wybranych układów spółrzędnych biegunowych. W nauce geometrji stosowane jest często przy badaniu własności linij krzywych rozważanie przecięć linij krzywych linjami prostemi i odnoszenie linij krzywych do odpowiednio dobranych układów spółrzędnych. Właśnie rozdział drugi rozpoczyna się wyprowadzeniem ogólnego równania, określającego punkty wspólne krzywej stopnia drugiego i właściwej linji prostej oraz wykonaniem zmiany spółrzędnych prostolinjowych w wielomianie stopnia drugiego z dowolnemi spółczynnikami. Konstatowanie szeregu własności rzeczonego równania, określającego punkty wspólne krzywej stopnia drugiego i właściwej linji prostej, obliczanie niezmienników wielomianu drugiego stopnia i krzywej drugiego stopnia względem ogólnych zmian spółrzędnych prostolinjowych i względem zmian tych spółrzędnych przy niezmiennym ich początku, wreszcie upraszczanie równania drugiego stopnia przez bezpośrednie grupowanie odpowiednich jego wyrazów, składają się na dalszą treść rozdziału drugiego. Rozważania i rachunki rozdziałów trzeciego i czwartego opierają się głównie na ogólnych wynikach uzyskanych w rozdziale drugim, częściowo zaś na równaniach kanonicznych elipsy, hiperboli i paraboli, poda-

nych w rozdziale pierwszym. Rozdziały trzeci i czwarty zawierają wykład własności dwukierunków asymptotycznych, środków, stycznych, asymptot, średnic, dwukierunków ze sobą sprzężonych, dwukierunków głównych i osi krzywych stopnia drugiego, jak również wykonanie klasyfikacji tych krzywych oraz wykład związanych z rzeczonemi własnościami metod upraszczania równań krzywych stopnia drugiego. Treścią rozdziału piątego są własności rzeczywistych i urojonych ognisk i kierownic krzywych stopnia drugiego oraz własności kątów, których jedno ramię leży na stycznej do krzywej stopnia drugiego, a drugie przechodzi przez jej ognisko. Rozdział szósty zawiera opracowanie szeregu zagadnień, odnoszących się bądź do szczególnych, bądź też do ogólnych linjowych rzeczywistych przekształceń płaszczyzny.

Cztery ostatnie rozdziały tomu II-go poświęcone są zagadnieniom, należącym do geometrji dziedziny zespolonej. Już w tomie I-ym zajmowaliśmy się urojonemi figurami elementarnemi i ich interpretacją w dziedzinie rzeczywistej. Rozdział siódmy tomu II-go zawiera zastosowania elips i hiperbol do opisu dalszych własności interpretacyj wektorów zespolonych, linij prostych o urojonych dwukierunkach i kół zespolonych. Nadto w rozdziale tym zbadane są wzajemne własności węgłów wektorów urojonych, należących do układu wektorów, których składowe utworzone są w pewien sposób z czterech danych liczb rzeczywistych. Wreszcie w tymże rozdziale rozważone są wyniki, do których prowadzi wykonywanie przekształceń linjowych rzeczywistych na figurach urojonych elementarnych. Treścią rozdziału ósmego są własności zbiorów punktów zespolonych, położonych na linjach krzywych stopnia drugiego. Naprzód wyprowadzone są wzory, określające ślad A punktu zespolonego istotnej krzywej stopnia drugiego przez ślad R tego punktu, i odwrotnie wzory, określające ślad R tego punktu przez jego ślad A. Odnośne rachunki i rozważania wykonane są zarówno w przypadku istotnej krzywej stopnia drugiego z właściwym środkiem, jak w przypadku istotnej krzywej stopnia drugiego z niewłaściwym środkiem na podstawie ogólnych równań tych krzywych w spółrzędnych prostolinjowych i prowadzą do ogólnego przekształcenia śladów R i A bieżącego zespolonego punktu tych linij krzywych. Badanie analitycznych własności rzeczonych przekształceń oraz opis, odpowiadających im odwzorowań płaszczyzn R i A, stanowią dalszą treść tego rozdziału, w którym nadto rozważone są interpretacje dwukierunków asymptotycznych, asymptot, stycznych

w punktach urojonych i urojonych dwukierunków ze sobą sprzężonych. Wreszcie rozdział ten zawiera wyprowadzenie pewnych twierdzeń, których szczególnemi przypadkami są twierdzenia Apollonjusza. Treścią rozdziału dziewiątego jest badanie zbiorów punktowych, określonych własnością, że spółrzędne prostolinjowe bieżącego punktu zbioru są całkowitemi funkcjami pierwszego stopnia z zespolonemi spółczynnikami jednego, dwóch, lub trzech zmiennych parametrów rzeczywistych. Rozważania te dotyczą rozmaitych postaci analitycznego przedstawienia tych zbiorów, ich geometrycznego znaczenia na płaszczyznach R i A, wreszcie ich niezmienników względem zmian spółrzędnych prostolinjowych. Przedmiotem ostatniego rozdziału tomu II-go są linjowe rzeczywiste przekształcenia par punktów rzeczywistych i zastosowania tych przekształceń do geometrji dziedziny zespolonej płaszczyzny rzeczywistej. Pewne szczególne kategorje tych przekształceń są w bliskim związku z zespolonemi linjami prostemi, względnie z pewnemi dwuparametrowemi zbiorami punktów zespolonych, rozważanemi bliżej w rozdziale dziewiątym. Kategorje tych przekształceń, jeszcze bardziej wyszczególnione, dotyczą wzajemnych zależności wektorów urojonych, należących do zespołu wektorów, badanego w rozdziale siódmym. Wreszcie linjowe rzeczywiste przekształcenia par punktów rzeczywistych zastosowane są do określenia pewnych obrazów punktów zespolonych właściwych i niewłaściwych oraz do określenia odpowiednich obrazów wektorów zespolonych. Szczególnemi przypadkami tych rozważań są konstrukcje obrazów Marie i Laguerre'a, podane w dwóch ostatnich paragrafach tomu II-go, zawierających także wyprowadzenie własności odpowiednich obrazów punktów niewłaściwych oraz badanie odpowiednich węgłów wektorów zespolonych, przy osobnem rozważeniu wektorów, których kwadrat długości równa się dodatniej jedności.

Stosunek czterech ostatnich rozdziałów tomu II-go do publikacyj innych autorów w zakresie geometrji dziedziny zespolonej jest w znacznej mierze analogiczny do odnośnego stosunku opracowania zagadnień z geometrji dziedziny zespolonej w tomie I-ym tych wykładów. Mając na myśli głównie zasadniczą treść, możemy powiedzieć, że naogół rzeczone rozdziały tomu II-go bądź zawierają rozważania i wyniki, których nie spotkałem w publikacjach innych autorów w dziale geometrji dziedziny zespolonej, bądź też są opracowaniem tematów, które były poprzednio rozważane gdzieindziej w innym systemie wzorów i przy zastosowaniu innej inter-

pretacji geometrycznej. Np. zbiory punktów zespolonych, należących do istotnych krzywych stopnia drugiego, były w znanej mi literaturze geometrji dziedziny zespolonej rozważane na podstawie równań kanonicznych rzeczonych linij krzywych i przy użyciu innych obrazów punktów zespolonych. Nadmieniam przytem, że opieranie rachunków i rozważań na równaniach znacznej ogólności w obrębie przyjętych środków analitycznych, stosowanie śladów R i A, położonych w zasadzie na dwóch różnych płaszczyznach, wreszcie obliczanie niezmienników tworów geometrycznych względem zmian spółrzędnych prostolinjowych, stanowią może główne różnice pomiędzy mojem opracowaniem zagadnień geometrji dziedziny zespolonej, a innemi przedstawieniami tego przedmiotu.

Wreszcie pragnąłbym zaznaczyć, że starałem się tak wybierać zagadnienia i tematy tomu II-go oraz metodę ich opracowania, ażeby tomy I-szy i II-gi w pewnej mierze stanowiły całość. Pomimo jednak obszerności wykładu nie wszystkie poruszone tutaj tematy mogły być wyczerpane. Mam nadzieję, że może uda mi się niektóre nieuwzględnione w tomie II-gim wyniki opublikować w czasie późniejszym.

Na str. VII i VIII przedmowy do tomu I-go zamieściłem wzmiankę o moich dawniejszych wykładach, seminarjach i kursach litografowanych oraz wymieniłem strony wydanej w r. 1906 Części I-ej kursu litografowanego geometrji analitycznej, które po uskutecznieniu pewnych zmian i dodatków wcielone zostały do rzeczonego tomu I-go. W tomie II-gim umieszczone zostały po wykonaniu pewnych uzupełnień i modyfikacyj dalsze strony Części I-ej, a mianowicie strony: 273 — 281, 284 — 302, 324 — 328, 330 — 335, 346 — 350, 365 — 414, 423 — 461, 466 — 562, 574 — 603, z których powstały następujące części tekstu tego tomu: §§ 1 — 3, część końcowa § 5, § 6, część początkowa § 7, § 8, § 9, część początkowa § 10, §§ 11 — 16, §§ 19 — 27, § 29, § 30, §§ 32 — 34, część końcowa § 36 i częściowo § 38. Natomiast § 4, część początkowa § 5, dalszy ciąg i koniec § 7, część końcowa § 10, § 17, § 18, § 28, § 31, § 35, część początkowa § 36, § 37 i częściowo § 38 opracowane zostały w latach późniejszych. Wreszcie §§ 39 — 71, zajmujące razem 375 stron druku, opracowane zostały w latach 1928 — 1931.

Ogłaszając drukiem ten tom, składam bardzo uprzejme podziękowanie Dyrekcji Funduszu Kultury Narodowej za przyznanie mi środków pieniężnych na pokrycie kosztów tej publikacji. Dziękuję także Kasie im. Mianowskiego za ułatwianie mi spraw admi-

nistracyjnych związanych z wydaniem tego tomu, Panu Stanisławowi Garlickiemu, Profesorowi Politechniki Warszawskiej za wypożyczenie mi pomocy technicznych do wykreślenia linij krzywych stopnia drugiego dla ilustracyj tego tomu, wreszcie Panu Bolesławowi Iwaszkiewiczowi, Asystentowi Uniwersytetu Warszawskiego za Jego współpracę przy wykonywaniu korekt.

Warszawa, w grudniu 1933.

Kazimierz Żorawski

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

Pewne szczególne formy równań elipsy, hiperboli i paraboli.

§ 1. Elipsa i hiperbola oraz ich równania kanoniczne.

Niech będzie na płaszczyźnie dwubiegunowy układ spółrzędnych z biegunami F i F', których odległość jest $2c$. Odległości od biegunów jakiegokolwiek rzeczywistego właściwego punktu M tej płaszczyzny oznaczymy odpowiednio przez r i r'. Zajmiemy się badaniem miejsc geometrycznych punktów, spełniających warunek formy:

$$\eta r + \eta' r' = 2a, \tag{1}$$

gdzie $\eta = \pm 1$, $\eta' = \pm 1$, a $2a$ jest wielkością dodatnią. W tym celu zastąpimy układ dwubiegunowy przez prostolinjowy, prostokątny układ spółrzędnych x, y, tak samo jak w § 11 tomu I. Początek spółrzędnych O umieścimy w środku odcinka FF', prostą tego odcinka przyjmiemy za oś x-ów, a kierunek wektora $\overline{OF}$ za jej kierunek dodatni. Naskutek tych umów mieć będziemy wzory:

$$r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad r' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \tag{2}$$

na mocy których warunek (1) otrzymuje postać:

$$\eta \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \eta' \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Jeżeli drugi wyraz lewej strony tego związku przeniesiemy na prawą stronę i następnie obie strony podniesiemy do kwadratu, to po wykonaniu skróceń dojdziemy do równania:

$$a^2 + c\,x = a\,\eta' \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,,$$

a podnosząc do kwadratu także obie strony tego równania i porządkując odpowiednio wyrazy, otrzymamy równanie:

$$(3) \qquad (a^2 - c^2)\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2\,(a^2 - c^2)\,.$$

Każdy punkt właściwy rzeczywisty, czyniący zadość któremukolwiek z warunków (1), spełnia to równanie i nawzajem każdy punkt właściwy rzeczywisty, spełniający to równanie, czyni zadość przynajmniej jednemu z warunków (1). Postaramy się sprecyzować drugą część tego wniosku, t.j. określić, któremu względnie którym z warunków (1) czynią zadość punkty właściwe rzeczywiste, spełniające równanie (3) przy danych wartościach długości a i c. Zwróćmy przedewszystkiem uwagę na to, że niema punktów rzeczywistych, spełniających warunek (1), gdy zachodzą jednocześnie równości: $\eta = -1$, $\eta' = -1$. Pozostają zatem tylko trzy możliwości:

$$(4) \qquad \begin{cases} r + r' = 2\,a\,, \\ r' - r = 2\,a\,, \\ r - r' = 2\,a\,. \end{cases}$$

Jeżeli $a = c$, to równanie (3) określa punkty osi x-ów. Warunki (4) określają te punkty w taki sposób, że pierwszemu z tych warunków czynią zadość wszystkie punkty odcinka $F\,F'$, drugiemu wszystkie punkty ramienia, którego początek jest w F i które nie zawiera punktu F', trzeciemu wszystkie punkty ramienia, którego początek jest w F' i które nie zawiera punktu F. Założymy w dalszym ciągu, że $a \neq c$.

Gdy $a > c$, wówczas zważywszy, że musi być $|r - r'| \leqslant 2\,c$, dostrzeżemy łatwo, że istnieją tylko punkty rzeczywiste, czyniące zadość pierwszemu z warunków (4). Miejsce geometryczne tych punktów, t.j. miejsce geometryczne punktów, których suma odległości od dwóch punktów stałych jest stałą dodatnią większą od odległości tych punktów stałych, nazywa się elipsą, a rzeczone punkty stałe ogniskami elipsy. W spółrzędnych x, y to miejsce geometryczne przedstawione jest równaniem (3) przy założeniu $a > c$.

Gdy $a < c$, wówczas zważywszy, że musi być $r + r' \geqslant 2\,c$, dostrzeżemy łatwo, że istnieją tylko punkty rzeczywiste, czyniące

zadość drugiemu i trzeciemu z warunków (4). Miejsce geometryczne tych punktów, t.j. miejsce geometryczne punktów, których różnica odległości od dwóch punktów stałych jest stałą i bezwzględnie mniejszą od odległości tych punktów stałych, nazywa się hiperbolą, a rzeczone punkty stałe ogniskami hiperboli. W spółrzędnych x, y to miejsce geometryczne przedstawione jest równaniem (3) przy założeniu $a < c$.

Równanie (3) napiszemy teraz w innej formie; jeżeli mianowicie wprowadzimy jeszcze dodatnią wielkość b, określoną zapomocą równości:

$$a^2 - c^2 = \varepsilon b^2, \tag{5}$$

gdzie $\varepsilon = +1$ dla elipsy, zaś $\varepsilon = -1$ dla hiperboli, to można będzie rzeczone równanie przedstawić w postaci:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} = 1. \tag{6}$$

Równanie to określa przy $\varepsilon = +1$ elipsę, a przy $\varepsilon = -1$ hiperbolę i nazywa się odpowiednio równaniem kanonicznem elipsy, względnie równaniem kanonicznem hiperboli. Zauważymy tu przytem, że elipsą nazywać będziemy także zbiór wszystkich właściwych i niewłaściwych punktów zespolonych, których spółrzędne spełniają równanie (6) przy $\varepsilon = +1$, a hiperbolą zbiór wszystkich właściwych i niewłaściwych punktów zespolonych, których spółrzędne spełniają równanie (6) przy $\varepsilon = -1$. Dopiero jednak w dalszym ciągu tego tomu poznamy znaczenie i pełne zakresy tych zbiorów.

Zwrócimy się teraz do zbadania niektórych własności linij krzywych, przedstawionych równaniem (6). Przedewszystkiem zauważamy, że równanie to nie zmieni się jeżeli zmienimy w niem x na $-x$, a także jeżeli zmienimy w niem y na $-y$, lub wreszcie jeżeli wykonamy w niem obie te zmiany. To znaczy, że krzywa jest symetrycznie położona zarówno względem osi x-ów, jako też względem osi y-ów. Osie spółrzędnych x, y nazywamy osiami elipsy, względnie osiami hiperboli, a początek spółrzędnych x, y nazywamy środkiem odnośnej linji krzywej, t. j. środkiem elipsy, względnie środkiem hiperboli. Widoczne przytem, że punkty spotkania każdej z tych linij krzywych z osią x-ów określają się wartościami spółrzędnych:

$$y = 0, \quad x = \pm a.$$

W przypadku elipsy a nazywa się połową osi wielkiej, a w przypadku hiperboli połową osi rzeczywistej. Punkty spotkania z osią y-ów określają się wartościami spółrzędnych:

$$x = 0, \quad y = \pm b\sqrt{|\varepsilon|},$$

są więc dla elipsy rzeczywiste, a dla hiperboli urojone. W przypadku elipsy b nazywa się połową osi małej, a w przypadku hiperboli połową osi urojonej. Punkty spotkania elipsy względnie hiperboli z ich osiami nazywają się wierzchołkami tych linij krzywych. Elipsa ma cztery wierzchołki rzeczywiste, hiperbola zaś ma dwa wierzchołki rzeczywiste i dwa urojone. Wielkość c jest odległością jednego i drugiego z ognisk linji krzywej od jej środka i nazywa się odległością ogniskową. Według danych a, b wielkość ta określa się wzorem:

$$c = \sqrt{|a^2 - \varepsilon b^2|}. \tag{7}$$

Stosunek:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{|a^2 - \varepsilon b^2|}}{a} \tag{8}$$

nazywa się mimośrodem i jest w przypadku elipsy wielkością mniejszą od jedności, a w przypadku hiperboli wielkością większą od jedności.

Niech będzie równanie elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{9}$$

Z równania tego wynika, że spółrzędne rzeczywistych punktów elipsy czynią zadość warunkom:

$$|x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant b.$$

Stąd wnosimy, że punkty te znajdują się we wnętrzu lub na obwodzie prostokąta, którego dwa boki są równoległe do osi x-ów, a dwa inne boki są równoległe do osi y-ów. Dwa pierwsze boki są położone po obu stronach osi x-ów i każdy z nich jest odległy od osi x-ów o b, a dwa drugie boki są położone po obu stronach

osi y-ów i każdy z nich jest odległy od osi y-ów o a. Jeżeli rozwiążemy równanie elipsy względem y, to otrzymamy:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Z tego wzoru wynika, że gdy x maleje od a do 0, wówczas wartość y odpowiadająca górnemu znakowi stale rośnie od 0 do b, a wartość y odpowiadająca dolnemu znakowi stale maleje od 0 do $-b$. Gdy zaś x maleje od 0 do $-a$, wówczas wartość y odpowiadająca górnemu znakowi stale maleje od b do 0, a wartość y odpowiadająca dolnemu znakowi stale rośnie od $-b$ do 0. Należy także zauważyć, że z któregokolwiek z tych wniosków wynikają wszystkie trzy inne na tej podstawie, że elipsa jest symetryczna względem obu osi x, y. Z powyższych własności wynika, że elipsa jest krzywą zamkniętą (fig. 1).

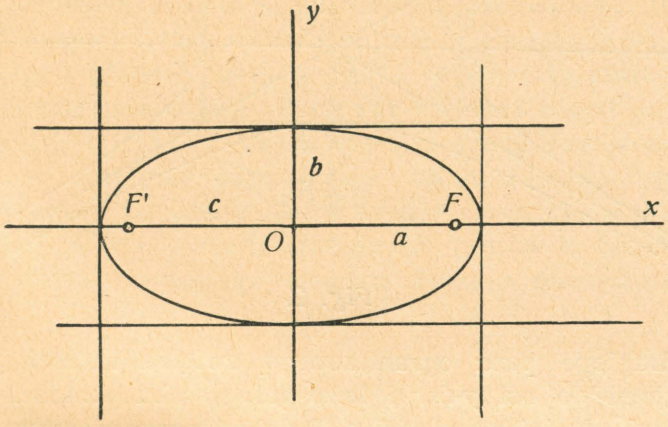

Fig. 1.

Szczególnym przypadkiem elipsy jest **koło**:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Dla koła otrzymujemy $e = 0$, t.j. **mimośród koła jest równy zeru.**

Jeżeli teraz równanie hiperboli:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10}$$

rozwiążemy względem y, to otrzymamy:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Stąd wynika, że dla rzeczywistych punktów hiperboli mamy:

$$|x| \geqslant a,$$

a to znaczy, że żaden punkt hiperboli nie leży wewnątrz nieskoń-

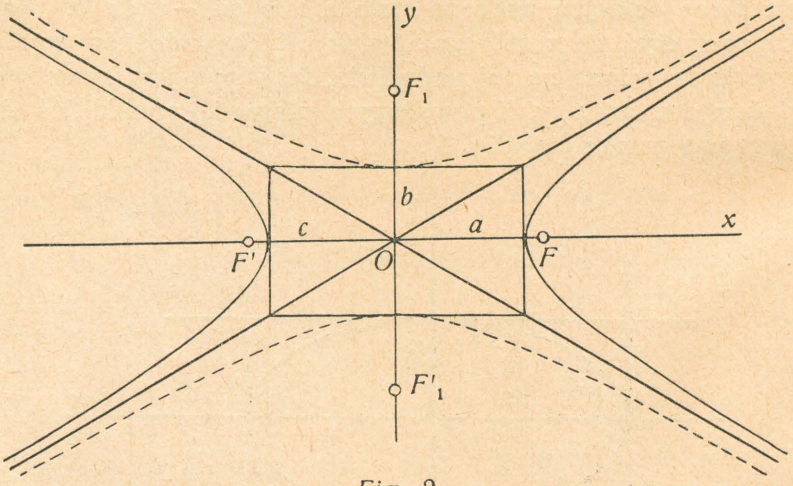

Fig. 2.

czenie długiego pasa ograniczonego dwiema linjami prostemi równoległemi do osi y-ów i leżącemi po obu stronach tej osi w tej samej od niej odległości a. Dalej widoczne, że gdy x rośnie od a do nieskończoności dodatniej, lub maleje od $-a$ do nieskończoności ujemnej, wówczas wartość y odpowiadająca górnemu znakowi stale rośnie od 0 do nieskończoności dodatniej, zaś wartość y odpowiadająca dolnemu znakowi stale maleje od zera do nieskończoności ujemnej. Z tych uwag wynika, że hiperbola składa się z dwóch osobnych części (fig. 2). Jedna z tych części leży po jednej stronie, a druga po drugiej stronie rzeczonego nieskończenie długiego pasa i każda z nich rozciąga się do nieskończoności. Części te nazwiemy g a ł ę z i a m i h i p e r b o l i.

Niech będzie teraz prostokąt, którego dwa boki leżą na linjach prostych, będących ograniczeniami rzeczonego pasa, a dwa

inne boki leżą na linjach prostych równoległych do osi x-ów i położonych po obu stronach tej osi w tej samej odległości b (fig. 2). Równania linij prostych, na których leżą dwie przekątnie tego prostokąta są:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \tag{11}$$

a obie te proste razem można przedstawić zapomocą równania:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{12}$$

Układ spółrzędnych x, y dzieli płaszczyznę na cztery obszary dwuwymiarowe. Pierwsza z prostych (11) leży w prawym obszarze górnym i lewym obszarze dolnym, druga w lewym obszarze górnym i w prawym obszarze dolnym. W każdym z tych obszarów są także punkty hiperboli. Zajmiemy się zapytaniem, jak punkty hiperboli, znajdujące się w każdym z tych obszarów płaszczyzny, położone są względem punktów linij prostych (11), które znajdują się w tym samym obszarze. Ponieważ zarówno hiperbola (10) jak i para prostych (12) są tworami symetrycznemi względem obu osi x i y, więc wystarczy odpowiedzieć na to zapytanie tylko dla jednego obszaru, bo wtedy można będzie przez dwa odbicia wnosić o wzajemnem położeniu rzeczonych tworów w trzech innych obszarach. Dla pierwszego obszaru mamy z pierwszego z równań (11):

$$y = \frac{b}{a} x, \tag{13}$$

a z równania (10) hiperboli:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \tag{14}$$

Rozważajmy wektor równoległy do osi y-ów, którego początek położony jest na części hiperboli, znajdującej się w prawym obszarze górnym, koniec zaś leży na prostej (13). Długość tego wektora, mierzona w kierunku dodatnim osi y-ów, wyraża się różnicą:

$$\frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right),$$

jest więc dodatnia, a stąd wynika, że punkty hiperboli znajdują się pomiędzy jej osią rzeczywistą i uważaną linją prostą. Długość tę można także przedstawić wyrażeniem:

$$\frac{a\,b}{x+\sqrt{x^2-a^2}},$$

a stąd wnosimy, że gdy x dąży do nieskończoności, wówczas długość ta dąży do zera. Analogiczne fakty mają miejsce i w innych obszarach płaszczyzny. Linje proste (11) nazywają się asymptotami hiperboli. Ilustracją wszystkich powyższych wyników jest rysunek figury 2, gdzie hiperbola, o której mowa, przedstawiona jest linją ciągłą.

Równanie:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \tag{15}$$

przedstawia także hiperbolę. Oś urojona hiperboli (10) jest osią rzeczywistą hiperboli (15), a oś rzeczywista hiperboli (10) jest osią urojoną hiperboli (15). Hiperbole (10) i (15) mają wspólne asymptoty. Ogniska hiperboli (15) leżą na osi y i oznaczone są na fig. 2 literami F_1 i F_1'. Odległość ogniskowa hiperboli (15) jest równa odległości ogniskowej hiperboli (10). Hiperbola (15) narysowana jest na fig. 2 linją przerywaną. Hiperbole (10) i (15) nazywają się hiperbolami ze sobą sprzężonemi.

Hiperbola, której równanie jest:

$$x^2-y^2=a^2, \tag{16}$$

nazywa się hiperbolą równoboczną. Asymptoty tej hiperboli przecinają się pod kątem prostym. Hiperbola sprzężona z ostatnio uważaną hiperbolą, t.j. hiperbola:

$$y^2-x^2=a^2$$

jest także hiperbolą równoboczną. Dla każdej hiperboli równobocznej mamy $e=\sqrt{2}$, t.j. mimośród każdej hiperboli równobocznej równa się dodatniemu pierwiastkowi z dwóch.

Zauważamy wreszcie, że z równań (4) wynika sposób wykreślania elipsy i hiperboli. Przyjmując dwa różne od

siebie punkty F i F' oraz długość $2a$ większą od odległości $2c$ tych punktów, obieramy dwa promienie r i r', spełniające pierwsze z równań (4). Jeżeli z punktu F jako ze środka zatoczymy koło promieniem r, a z punktu F' jako ze środka zatoczymy koło promieniem r', to koła te przetną się w dwóch punktach, należących do elipsy, której odległością ogniskową jest c, a połową osi wielkiej jest a. Ponieważ możemy wyznaczyć dowolną ilość par promieni, spełniających pierwsze z równań (4), przeto tą drogą możemy wykreślić dowolną ilość punktów elipsy. Analogiczną metodę możemy zastosować do hiperboli. Przypadek hiperboli tem różni się od przypadku elipsy, że długość $2a$ jest mniejsza od długości $2c$ i że promienie r i r' spełniają albo drugie albo trzecie z równań (4). Widoczne przytem, że promienie wodzące punktów hiperboli, położonych po stronie dodatnich x-ów, spełniają drugie z równań (4), a promienie wodzące punktów hiperboli, położonych po stronie ujemnych x-ów, spełniają trzecie z równań (4). I jedne i drugie z tych punktów otrzymują się podobnie jak w przypadku elipsy przez przecięcia odpowiednich kół.

§ 2. Dalsze rachunki i wykresy odnoszące się do elipsy i hiperboli.

Elipsę i hiperbolę można przedstawić analitycznie także w rozmaitych innych postaciach. Zajmiemy się tu równaniami, w których spółrzędne punktów elipsy i hiperboli przedstawione są jako funkcje pewnego parametru i wyprowadzimy z tych równań pewne konstrukcje dla tych linij krzywych. Widoczne, że jeżeli z równań:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t \tag{17}$$

wyrugujemy t, to otrzymamy:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

t.j. równanie elipsy. Podobnież, jeżeli wyrugujemy t z równań:

$$x = a\sec t, \quad y = b\,\mathrm{tg}\,t, \tag{18}$$

to otrzymamy:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

t.j. równanie hiperboli. Zatem równania (17) i (18) przedstawiają odpowiednio elipsę i hiperbolę. Zapomocą tych równań można dojść do tych samych rezultatów, które otrzymaliśmy już poprzednio. Tem zajmować się nie będziemy; natomiast podamy oparte na tych równaniach sposoby wykreślania punktów elipsy i hiperboli według danych długości a i b.

Z początku spółrzędnych prostokątnych O jako ze środka (fig. 3) opiszmy dwa koła, jedno o promieniu a, drugie o promie-

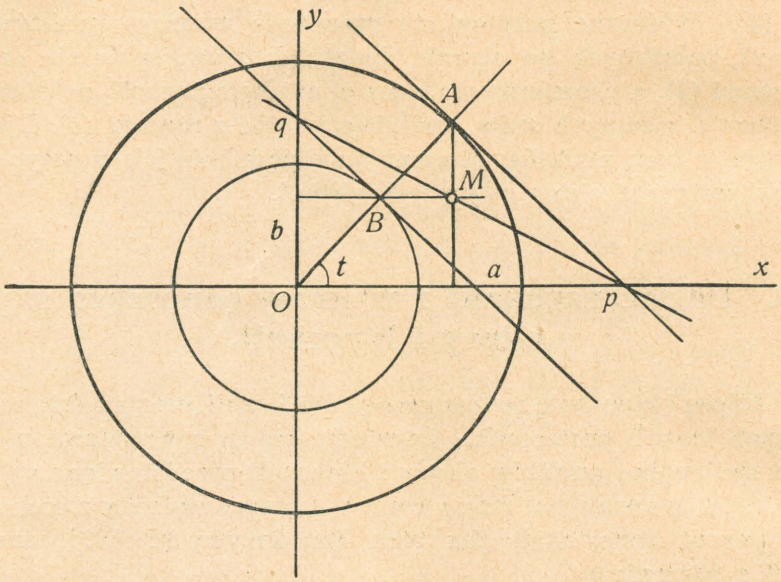

Fig. 3.

niu $b < a$. Przeprowadźmy z punktu O ramię, które z dodatnim kierunkiem osi x-ów tworzy kąt t. Ramię to spotyka rzeczone koła w punktach, które oznaczymy odpowiednio przez A i B. Przez punkt A prowadzimy równoległą do osi y-ów, a przez punkt B równoległą do osi x-ów. Punkt M przecięcia się tych linij prostych jest punktem elipsy, bo odczytujemy z figury, że odcięta i rzędna tego punktu mają wartości określone wzorami (17). W ten sposób możemy otrzymać dowolną liczbę punktów elipsy.

Zwrócimy się teraz do wykreślania punktów hiperboli na

podstawie równań (18). Opiszmy z początku O układu spółrzędnych prostokątnych x, y jako ze środka dwa koła jedno o promieniu a, drugie zaś o promieniu b (fig. 4). Niech punkt przecięcia się tego drugiego koła z dodatniem ramieniem osi x-ów będzie T. Przeprowadźmy przez początek spółrzędnych O oś, której kierunek dodatni tworzy z dodatnim kierunkiem osi x-ów kąt t. Punkty, w których dodatnie ramię tej osi przecina koła o promieniach a i b, oznaczymy odpowiednio przez A i B, a rzeczoną oś nazwiemy osią OA. Przeprowadźmy w punkcie A styczną do koła o promieniu a i nazwijmy α punkt przecięcia się tej

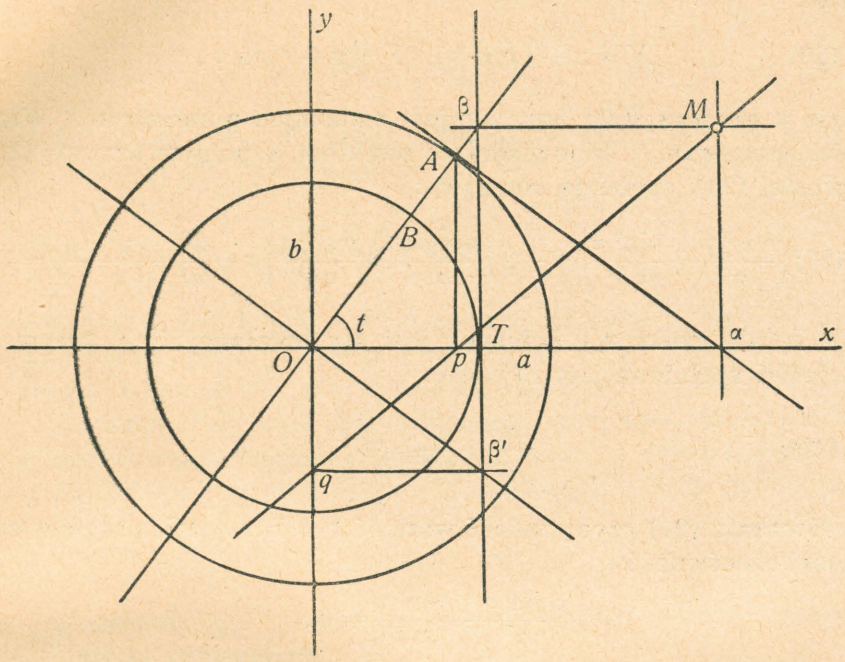

Fig. 4.

stycznej z osią x-ów. Na podstawie pierwszego ze wzorów (18) widoczne, że wektor $\overline{O\alpha}$ równa się spółrzędnej x punktu hiperboli. Następnie przeprowadźmy w punkcie T styczną do koła o promieniu b i przedłużmy tę styczną do spotkania się z osią OA w punkcie β. Na podstawie drugiego ze wzorów (18) wektor $\overline{T\beta}$, rachowany jako dodatni w stronę dodatnich y-ów, jako ujemny zaś w stronę ujemnych y-ów, będzie właśnie spółrzędną v punktu hiperboli. Według tych spółrzędnych x i y wykreślimy

teraz punkt M hiperboli i w taki sam sposób możemy wykreślić dowolną liczbę punktów tej linji krzywej.

Jeżeli spółrzędne bieżące punktów uważanych poprzednio linij krzywych oznaczymy odpowiednio przez X, Y, to odnośne równanie mieć będzie postać:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{\varepsilon b^2}=1, \quad (\varepsilon=\pm 1). \tag{19}$$

Weźmy pod uwagę linję prostą, przechodzącą przez punkt x, y i określmy ją w spółrzędnych bieżących X, Y równaniami osiowemi:

$$X=x+r\cos\varphi, \quad Y=y+r\sin\varphi, \tag{20}$$

gdzie φ oznacza stały kąt, a r jest zmiennym parametrem. Wartości parametru r, odpowiadające punktom wspólnym krzywej (19) i prostej (20), spełniają równanie:

$$\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{\varepsilon b^2}\right)r^2+2\left(\frac{x\cos\varphi}{a^2}+\frac{y\sin\varphi}{\varepsilon b^2}\right)r+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\varepsilon b^2}-1=0. \tag{21}$$

Jeżeli punkt x, y położony jest na uważanej linji krzywej, t.j. jeżeli spełniona jest równość:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\varepsilon b^2}=1, \tag{22}$$

to równaniu (21) czyni zadość wartość $r=0$, a jeżeli przytem zachodzi nierówność:

$$\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{\varepsilon b^2}\neq 0,$$

to równaniu (21) czyni także zadość wartość:

$$r=-2\frac{\dfrac{x\cos\varphi}{a^2}+\dfrac{y\sin\varphi}{\varepsilon b^2}}{\dfrac{\cos^2\varphi}{a^2}+\dfrac{\sin^2\varphi}{\varepsilon b^2}}. \tag{23}$$

Jeżelibyśmy teraz zmieniali kąt φ pozostawiając przytem bez zmiany spółrzędne x, y, to linja prosta (20) obracałaby się, przechodząc przytem stale przez punkt x, y. Jeżeli zachodzi równość

(22), to wyrażenia stojące przy r i przy r^2 w równaniu (21) nie mogą być jednocześnie zerami, bo w takim razie wszystkie punkty prostej (20) położone byłyby na krzywej (19), co jest niemożliwe, bo to byłoby sprzeczne z rezultatami otrzymanemi w § 1. Stąd wynika, że dla każdego punktu x, y położonego na krzywej (15) istnieje taka wartość kąta φ, że przy dążeniu kąta φ do tej wartości licznik wyrażenia (23) dąży do zera, a mianownik pozostaje różny od zera, a więc parametr r dąży do zera. Powiemy wtedy, że prosta (20) dąży do stycznej do krzywej (19) w punkcie x, y. Równanie stycznej otrzymać można przez rugowanie kąta φ z warunku:

$$\frac{x \cos \varphi}{a^2} + \frac{y \sin \varphi}{\varepsilon b^2} = 0$$

i ze związków (20). Tą drogą dochodzimy mianowicie na podstawie równości (22) do równania:

$$\frac{x X}{a^2} + \frac{y Y}{\varepsilon b^2} = 1, \tag{24}$$

które, przy $\varepsilon = +1$, jest równaniem stycznej do elipsy w jej punkcie x, y, a przy $\varepsilon = -1$, jest równaniem stycznej do hiperboli w jej punkcie x, y.

Równanie stycznej (24) możemy wyprowadzić także na drodze zastosowania odnośnego ogólnego wzoru z dziedziny zastosowań rachunku różniczkowego do geometrji. Styczna do linji krzywej:

$$F(x, y) = 0$$

w jej punkcie x, y określa się przy pewnych bardzo ogólnych założeniach, równaniem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) = 0, \tag{25}$$

w którem X, Y oznaczają spółrzędne bieżące punktów stycznej. Założeniami temi bliżej tutaj nie będziemy się zajmować, a tylko przyjmując:

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} - 1,$$

obliczymy pochodne:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2\frac{x}{a^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2\frac{y}{\varepsilon b^2}$$

i zastosujemy równanie ogólne (25). W ten sposób dojdziemy do równania:

$$\frac{x}{a^2}(X-x) + \frac{y}{\varepsilon b^2}(Y-y) = 0,$$

z którego, na podstawie warunku (22), otrzymamy równanie stycznej do elipsy względnie do hiperboli w postaci (24).

Zajmiemy się teraz zadaniem wykreślenia stycznej do elipsy w jej punkcie danym, oraz zadaniem wykreślenia stycznej do hiperboli w jej punkcie danym. Jeżeli w równaniu (24) wstawimy przy założeniu $\varepsilon = +1$ wyrażenia (17), to otrzymamy równanie stycznej do elipsy w formie:

$$\frac{\cos t}{a} X + \frac{\sin t}{b} Y = 1.$$

Jeżeli zaś w równaniu (24) wstawimy przy założeniu $\varepsilon = -1$ wyrażenia (18), to otrzymamy równanie stycznej do hiperboli w formie:

$$\frac{\sec t}{a} X - \frac{\operatorname{tg} t}{b} Y = 1.$$

Oznaczmy w jednym i w drugim przypadku odcinki stycznej na osiach odpowiednio przez m i n. Wtedy mieć będziemy w przypadku elipsy:

$$m = a \sec t, \quad n = b \operatorname{cosec} t, \tag{26}$$

a w przypadku hiperboli:

$$m = a \cos t, \quad n = b \operatorname{tg}\left(t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{27}$$

Ze wzorów (26) widać bezpośrednio, że wykreślenie stycznej w punkcie M elipsy można wykonać na figurze 3 w sposób następujący. Prowadzimy styczną do większego koła w punkcie A oraz styczną do mniejszego koła w punkcie B. Niech punkt przecięcia się pierwszej z tych stycznych z osią x-ów będzie p, a punkt przecięcia się drugiej z tych stycznych z osią y-ów będzie q. Prosta $p\,q$ będzie żądaną linją styczną do elipsy; styczna ta musi oczywiście przechodzić przez punkt M, a ta okoliczność może służyć do sprawdzenia dokładności rysunku.

Ze wzorów (27) wynika, że dla wykreślenia stycznej w punkcie M hiperboli można postąpić w sposób następujący. Opuśćmy z punktu A (fig. 4) prostopadłą na oś x-ów, i oznaczmy spodek tej prostopadłej przez p. Przeprowadźmy następnie prostą prostopadłą do osi OA, przechodzącą przez punkt O i oznaczmy punkt spotkania tej prostopadłej z prostą $T\beta$ przez β'. Następnie przeprowadźmy przez punkt β' równoległą do osi x-ów aż do spotkania się tej równoległej z osią y-ów i oznaczmy punkt tego spotkania literą q. Prosta pq jest żądaną linją styczną do hiperboli. Styczna ta musi przechodzić przez punkt M i fakt ten może służyć do kontroli dokładności rysunku.

Zauważmy tu jeszcze, że jeżeli w równaniach (17) i (18) podstawimy $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \tau$, to w obu przypadkach otrzymamy na x i y wyrażenia, będące wymiernemi funkcjami parametru τ. Mianowicie w przypadku elipsy otrzymamy wyrażenia:

$$(28) \qquad x = a\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, \quad y = b\frac{2\tau}{1+\tau^2},$$

a w przypadku hiperboli wyrażenia:

$$(29) \qquad x = a\frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}, \quad y = b\frac{2\tau}{1-\tau^2}.$$

Równania (28) określają tak samo jak równania (17) elipsę, a równania (29) tak samo jak równania (18) hiperbolę.

§ 3. Parabola.

Niech będą dane na płaszczyźnie: właściwy rzeczywisty punkt F i właściwa rzeczywista prosta D przez ten punkt nie przechodząca (fig. 5). Zajmiemy się wyznaczeniem geometrycznego miejsca punktów, których odległość od punktu F i prostopadła odległość od prostej D są sobie równe. Wybierzemy w pewien określony sposób układ spółrzędnych prostokątnych x, y. Niech osią x będzie linja prosta prostopadła do D, przechodząca przez punkt F, i niech dodatnie ramię tej osi ma kierunek od D do F. Początek spółrzędnych O obieramy w punkcie, który dzieli odcinek osi x pomiędzy D i F na dwie części równe. Zatem oś y będzie równoległą do prostej D i obie-

rzemy jako dodatnie to ramię tej osi, które z dodatnim kierunkiem osi x-ów tworzy kąt $+\frac{\pi}{2}$. Oznaczmy prostopadłą bezwzględną odległość punktu F od D przez p. Wobec tego spółrzędne punktu F

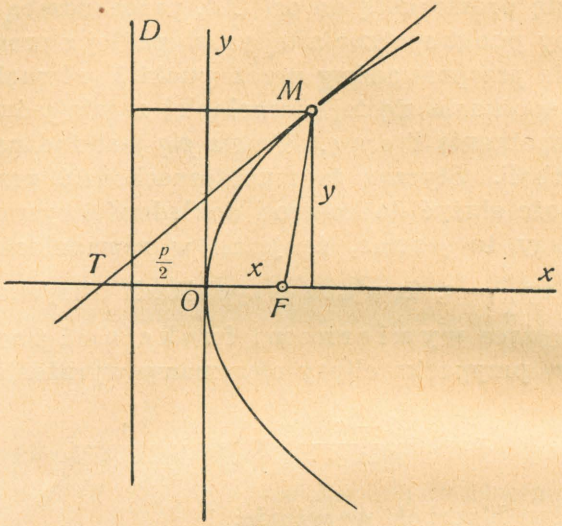

Fig. 5.

będą $x = \frac{p}{2}$, $y = 0$, a równanie prostej D będzie: $x + \frac{p}{2} = 0$. Równanie geometrycznego miejsca, którem zajmiemy się będzie:

$$\left| x + \frac{p}{2} \right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2} \right)^2 + y^2},$$

a podnosząc obie strony tego równania do kwadratu, otrzymujemy po widocznych skróceniach równanie:

(30) $$y^2 = 2px.$$

Miejsce geometryczne określone tem równaniem nazywa się p a r a b o l ą.

Z równania (30) wynika, że dla rzeczywistych punktów paraboli x nie może mieć wartości ujemnych. To znaczy, że punkty paraboli leżeć mogą tylko na osi y-ów oraz po tej stronie osi y-ów, która odpowiada dodatnim wartościom x-ów. Jedynym punktem osi y-ów należącym do paraboli jest początek spółrzędnych. Dalej zauważmy, że równanie krzywej nie zmienia się, gdy

y zastępujemy przez $-y$. To znaczy, że krzywa jest symetryczna względem osi x-ów. Tę linję prostą nazywamy osią paraboli, a punkt w którym oś paraboli przecina parabolę, wierzchołkiem paraboli. Przy nieograniczonem wzrastaniu odciętej x bezwzględna wartość y wzrasta nieograniczenie. Parabola jest linją krzywą, rozciągającą się do nieskończoności tak jak to wskazuje fig. 5. Punkt F nazywa się ogniskiem paraboli, prosta D kierownicą paraboli, a wielkość p parametrem paraboli. Wreszcie równanie (30) nazywać będziemy kanonicznem równaniem paraboli. Metoda wykreślania punktów paraboli wynika wprost z definicji tego geometrycznego miejsca.

Oznaczmy teraz spółrzędne bieżące punktów paraboli przez X, Y. Wtedy kanoniczne równanie paraboli mieć będzie postać:

$$Y^2 = 2pX.$$

Jeżeli następnie weźmiemy pod uwagę linję prostą, pisząc jej równanie w formie (20), t.j. w formie:

$$X = x + r\cos\varphi, \quad Y = y + r\sin\varphi,$$

to punkty wspólne paraboli z tą linją prostą określone będą równaniem:

$$(31) \qquad \sin^2\varphi\, r^2 + 2(y\sin\varphi - p\cos\varphi)\, r + y^2 - 2px = 0.$$

Punkt x, y położony jest na paraboli wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest równość:

$$y^2 = 2px.$$

Równaniu (31) czyni wówczas zadość wartość $r = 0$, a przy spełnieniu nierówności $\sin^2\varphi \neq 0$ także wartość:

$$(32) \qquad r = -\frac{2(y\sin\varphi - p\cos\varphi)}{\sin^2\varphi}.$$

Przy zmianie kąta φ uważana linja prosta obraca się, przechodząc przytem stale przez punkt paraboli x, y. Podobnież jak w przypadku elipsy i hiperboli skonstatujemy, że dla każdego punktu x, y istnieje taka wartość kąta φ, iż przy dążeniu tego kąta do tej wartości wyrażenie (32) dąży do zera. Powiemy wtedy, że linja prosta dąży do stycznej do paraboli w punk-

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
w KRAKOWIE
BIBLIOTEKA

cie x, y. Równanie tej stycznej otrzymuje się przez rugowanie kąta φ z warunku:

$$y \sin \varphi - p \cos \varphi = 0$$

i z równań uważanej linji prostej. Tą drogą dochodzimy do związku:

$$y\,Y = p\,(X + x), \tag{33}$$

który jest równaniem stycznej do paraboli w jej punkcie x, y.

Równanie to można wyprowadzić także przez zastosowanie ogólnego równania (25). Przyjmując mianowicie:

$$F(x, y) = y^2 - 2px,$$

mieć będziemy:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2p, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y,$$

a więc otrzymamy równanie:

$$-p\,(X - x) + y\,(Y - y) = 0,$$

z którego wynika równanie (33).

Wykreślenie stycznej do paraboli w jej punkcie x, y, nie będącym jej wierzchołkiem, można wykonać na podstawie uwagi, że ta styczna przechodzi przez punkt T, którego spółrzędne mają wartości równe odpowiednio liczbom $-x$, 0. Styczną do paraboli w jej wierzchołku jest oś y-ów.

Rozważania niniejszego paragrafu związemy jeszcze z teorją trójmianu drugiego stopnia, należącą do algebry elementarnej. Oznaczmy przez y trójmian drugiego stopnia względem zmiennej x, t.j. funkcję formy:

$$y = a x^2 + 2 b x + c, \tag{34}$$

gdzie a, b, c oznaczają spółczynniki rzeczywiste, z których spółczynnik a jest różny od zera. Jeżeli oznaczymy:

$$\delta = a c - b^2,$$

to wiadomo, że można będzie y napisać w postaci.

$$y = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{\delta}{a}. \tag{35}$$

Jeżeli x i y interpretować będziemy jako spółrzędne prostokątne punktu w płaszczyźnie, to równanie (34) przedstawiać będzie linję krzywą, która, jak zaraz zobaczymy, jest parabolą. Wprowadźmy mianowicie zamiast spółrzędnych x, y nowe spółrzędne prostokątne X, Y związane z poprzedniemi zapomocą równań:

$$y - \frac{\delta}{a} = \varepsilon X, \quad x + \frac{b}{a} = -\varepsilon Y,$$

gdzie ε jest równe $+1$, gdy a jest wielkością dodatnią, jest zaś równe -1, gdy a jest wielkością ujemną. Nadto wprowadźmy zamiast stałej a dodatnią wielkość p z równania:

$$p = \frac{1}{2\varepsilon a}.$$

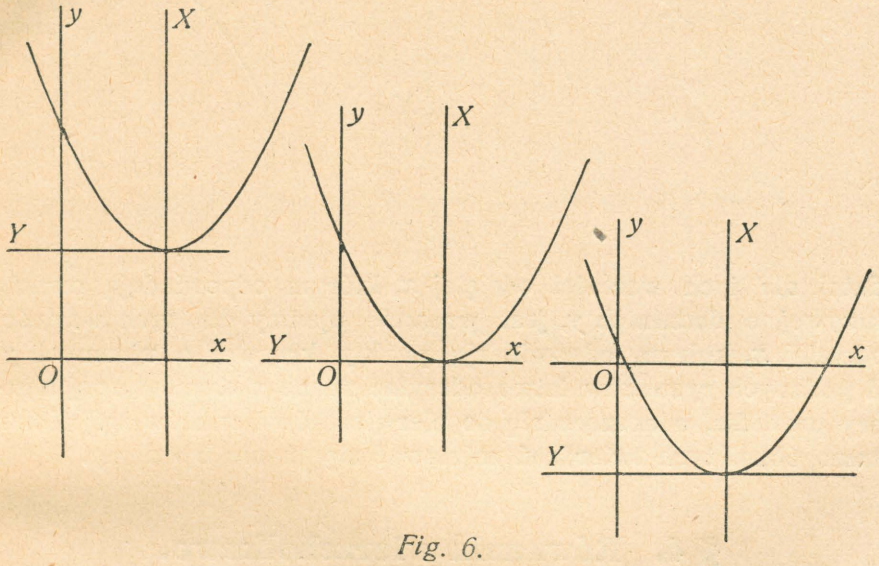

Fig. 6.

Ze wzoru (35) wynika, że wówczas równanie krzywej (34) można będzie przedstawić w postaci:

$$Y^2 = 2pX,$$

t.j. że krzywa ta jest parabolą. Wzajemne położenie układu x, y, układu X, Y oraz linji krzywej (34) uwidocznione jest na figurach 6 i 7. Rysunki te wykonane są dla przypadków $-\frac{b}{a} > 0$.

Trzy rysunki figury 6 odnoszą się do przypadku $\varepsilon = +1$ kolejno przy założeniach $\delta > 0$, $\delta = 0$, $\delta < 0$. Trzy rysunki figury 7 odnoszą się do przypadku $\varepsilon = -1$ kolejno przy założeniach $\delta < 0$, $\delta = 0$, $\delta > 0$. Trójmian jest zerem dla tych wartości odciętej x, którym odpowiadają punkty wspólne krzywej z osią x, jest do-

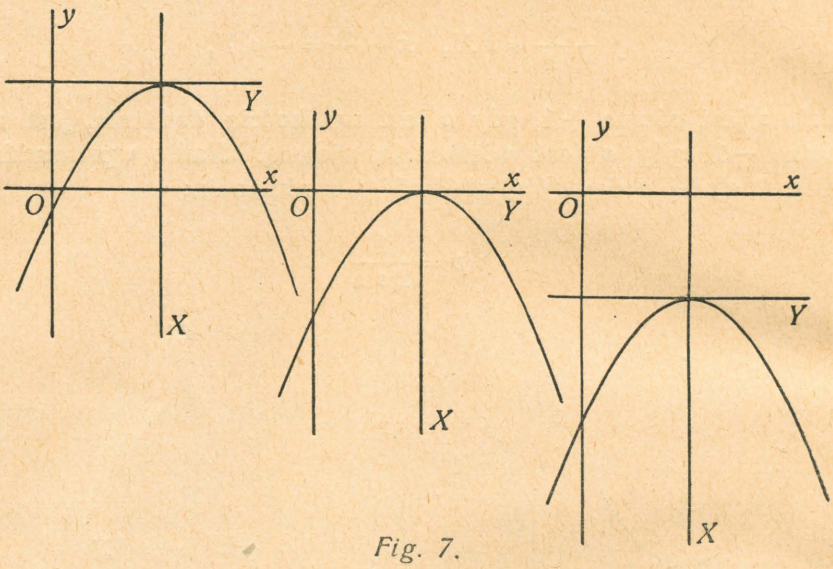

Fig. 7.

datni dla tych wartości odciętej x, którym odpowiadają punkty krzywej o dodatnich y, jest wreszcie ujemny dla tych wartości odciętej x, którym odpowiadają punkty krzywej o ujemnych y. Z podanych rysunków łatwo odczytać znane z elementarnej algebry prawidła, odnoszące się do pierwiastków i znaków trójmianu; szczegółami tych twierdzeń zajmować się tu nie będziemy.

§ 4. Równania wierzchołkowe.

Niech będzie kanoniczne równanie elipsy, względnie hiperboli:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} = 1, \quad (\varepsilon = \pm 1). \tag{36}$$

Zauważymy naprzód, że jeżeli przyjmiemy $x = \pm c$, to z równania (36) otrzyma się:

$$y^2 = \varepsilon b^2 \frac{a^2 - c^2}{a^2}.$$

Stąd wynika, że na krzywej (36) leżą punkty wyznaczone wartościami spółrzędnych:

$$x = \eta c, \quad y = \zeta p,$$

gdzie $\eta = \pm 1, \zeta = \pm 1$, a p określa się wzorem:

$$p = \frac{b^2}{a}. \tag{37}$$

Wielkość p nazywa się parametrem odnośnej linji krzywej, t.j. przy $\varepsilon = +1$ parametrem elipsy, a przy $\varepsilon = -1$ parametrem hiperboli. Jeżeli przez którekolwiek ognisko elipsy, względnie hiperboli przeprowadzimy prostopadłą do osi wielkiej, względnie do osi rzeczywistej aż do spotkania się z krzywą w dwóch punktach, to na tej prostopadłej mieć będziemy dwa odcinki, z których każdy ma jeden kraniec w ognisku, a drugi kraniec na linji krzywej. Z powyższego rozważania wynika, że oba te odcinki mają jedną i tę samą bezwzględną długość równą parametrowi p. Zauważymy przytem, że pomiędzy wielkościami a, c i p zachodzi związek:

$$c^2 = a(a - \varepsilon p), \tag{38}$$

z którego otrzymujemy na kwadrat mimośrodu wyrażenie:

$$e^2 = \frac{a - \varepsilon p}{a}. \tag{39}$$

Przekształcimy teraz równanie (36), wprowadzając zamiast układu prostokątnego x, y układ prostokątny X, Y, nakładalny na poprzedni i określony równaniami:

$$x + \sigma X = \tau a, \quad y + \sigma Y = 0, \tag{40}$$

gdzie $\sigma = \pm 1, \tau = \pm 1$. Wtedy równanie (36) przejdzie w równanie:

$$Y^2 = 2\varepsilon\tau\sigma\frac{b^2}{a}X - \varepsilon\frac{b^2}{a^2}X^2,$$

które można będzie przy zastosowaniu wzoru (37) napisać w postaci:

$$Y^2 = 2\varepsilon\tau\sigma p X - \varepsilon\frac{p}{a}X^2.$$

A jeżeli kierunek osi X wybierzemy w taki sposób, żeby zachodziła równość:

$$\sigma = \varepsilon\tau,$$

to z ostatniego równania otrzymamy równanie:

$$Y^2 = 2pX - \varepsilon \frac{p}{a} X^2.$$

To znaczy, że elipsę, określoną przy $\varepsilon = +1$ równaniem (36), można przez zastosowanie związków:

$$x + \tau_1 X = \tau_1 a, \quad y + \tau_1 Y = 0 \tag{41}$$

gdzie $\tau_1 = \pm 1$, przedstawić równaniem:

$$Y^2 = 2pX - \frac{p}{a} X^2, \tag{42}$$

a hiperbolę, określoną równaniem (36) przy $\varepsilon = -1$, można przez zastosowanie związków:

$$x - \tau_2 X = \tau_2 a, \quad y - \tau_2 Y = 0 \tag{43}$$

gdzie $\tau_2 = \pm 1$, przedstawić równaniem:

$$Y^2 = 2pX + \frac{p}{a} X^2. \tag{44}$$

Równania (42) i (44) nazwiemy odpowiednio r ó w n a n i e m w i e r z c h o ł k o w e m e l i p s y i r ó w n a n i e m w i e r z c h o ł k o w e m h i p e r b o l i.

Zauważmy, że w przypadku elipsy $b < a$. Stąd wynika, że dla tej linji krzywej $p < b$, a więc także $p < a$. Przypuśćmy teraz, że dane są d w i e s t a ł e l i c z b y d o d a t n i e a i p, s p e ł n i a j ą c e n i e r ó w n o ś ć $p < a$. Według tych danych otrzymamy na podstawie wzoru (37) określoną wartość na dodatnią wielkość b. Niech będą dwa płaskie arkusze i przyjmijmy na każdym z tych arkuszy prostokątny układ spółrzędnych x, y. Możemy założyć, że rzeczone układy przyjęte na tych arkuszach są nakładalne. Możemy następnie według powyższych danych narysować na jednym z tych arkuszy elipsę, określoną równaniem (36) przy $\varepsilon = +1$, a na drugim z tych arkuszy hiperbolę, określoną równaniem (36) przy $\varepsilon = -1$. Wprowadźmy następnie na pierwszym arkuszu układ spółrzędnych X, Y, określony równaniami (41), a na drugim układ spółrzędnych X, Y, określony równaniami (43). Elipsa pierwszego arkusza wyznaczona będzie w odnośnym układzie X, Y równaniem (42), a hiperbola drugiego arkusza wyznaczona będzie w odnośnym

układzie X, Y równaniem (44). Układy te są nakładalne i jeżeli uważane arkusze doprowadzimy do takiej pozycji, żeby jednakowo oznaczone osie rzeczonych układów X, Y nakrywały się i miały te same kierunki, to krzywe określone równaniami (42) i (44) znajdować się będą jedna względem drugiej w pewnem szczególnem położeniu, które postaramy się teraz bliżej zbadać. Zadanie to rozszerzymy przytem jeszcze przez to, że współcześnie rozważać będziemy parabolę, określoną równaniem:

$$Y^2 = 2pX, \tag{45}$$

gdzie przez p oznaczyliśmy tę samą stałą, co poprzednio.

Na podstawie równania (42) odcięte rzeczywistych punktów elipsy spełniają warunki $0 \leqslant X \leqslant 2a$. Na podstawie równania (45) odcięte rzeczywistych punktów paraboli spełniają warunek $X \geqslant 0$. Wreszcie na podstawie równania (44) odcięte rzeczywistych punktów hiperboli spełniają albo warunek $X \geqslant 0$, albo warunek $X \leqslant -2a$. Zauważamy naprzód, że wszystkie trzy uważane linje krzywe przechodzą przez początek spółrzędnych. Jeżeli następnie przez $|Y_e|$, $|Y_p|$ i $|Y_h|$ oznaczymy odpowiednio bezwzględne wartości rzędnych punktów elipsy, paraboli i hiperboli, mających tę samą odciętą X, czyniącą zadość warunkom $0 < X \leqslant 2a$, to mieć będziemy nierówności: $|Y_e| < |Y_p| < |Y_h|$. Jeżeli dalej przez $|Y_p|$ i $|Y_h|$ oznaczymy odpowiednio bezwzględne wartości rzędnych punktów paraboli i hiperboli, mających tę samą odciętą X, czyniącą zadość warunkom $X > 2a$, to mieć będziemy nierówność $|Y_p| < |Y_h|$. Wzajemne położenie trzech linij krzywych, o których jest mowa, przedstawione jest na figurze 8. Zauważymy przytem, że na podstawie równania (37) długość b jest średnią geometryczną długości a i p. Ponieważ na tej własności można oprzeć wykreślenie długości b, przeto można w łączności z rozważaniem § 2 wykonać wykreślenie dowolnej liczby punktów elipsy i hiperboli, określonych równaniami (42) i (44). Na fig. 8 narysowane są wszystkie trzy linje krzywe, przyczem wzajemne położenie tych krzywych jest takie, że parabola obejmuje elipsę, a sama objęta jest przez jedną z dwóch gałęzi hiperboli, której druga gałąź leży w innej części płaszczyzny. Jeżeli wykreślimy na płaszczyźnie linję prostą $Y = p$, to spotka ona uważane linje krzywe razem w pięciu punktach. Jeżeli z tych punktów opuścimy prostopadłe na oś X-ów, to otrzymamy na tej ostatniej pięć ognisk rzeczonych linij krzywych. Z powyższej

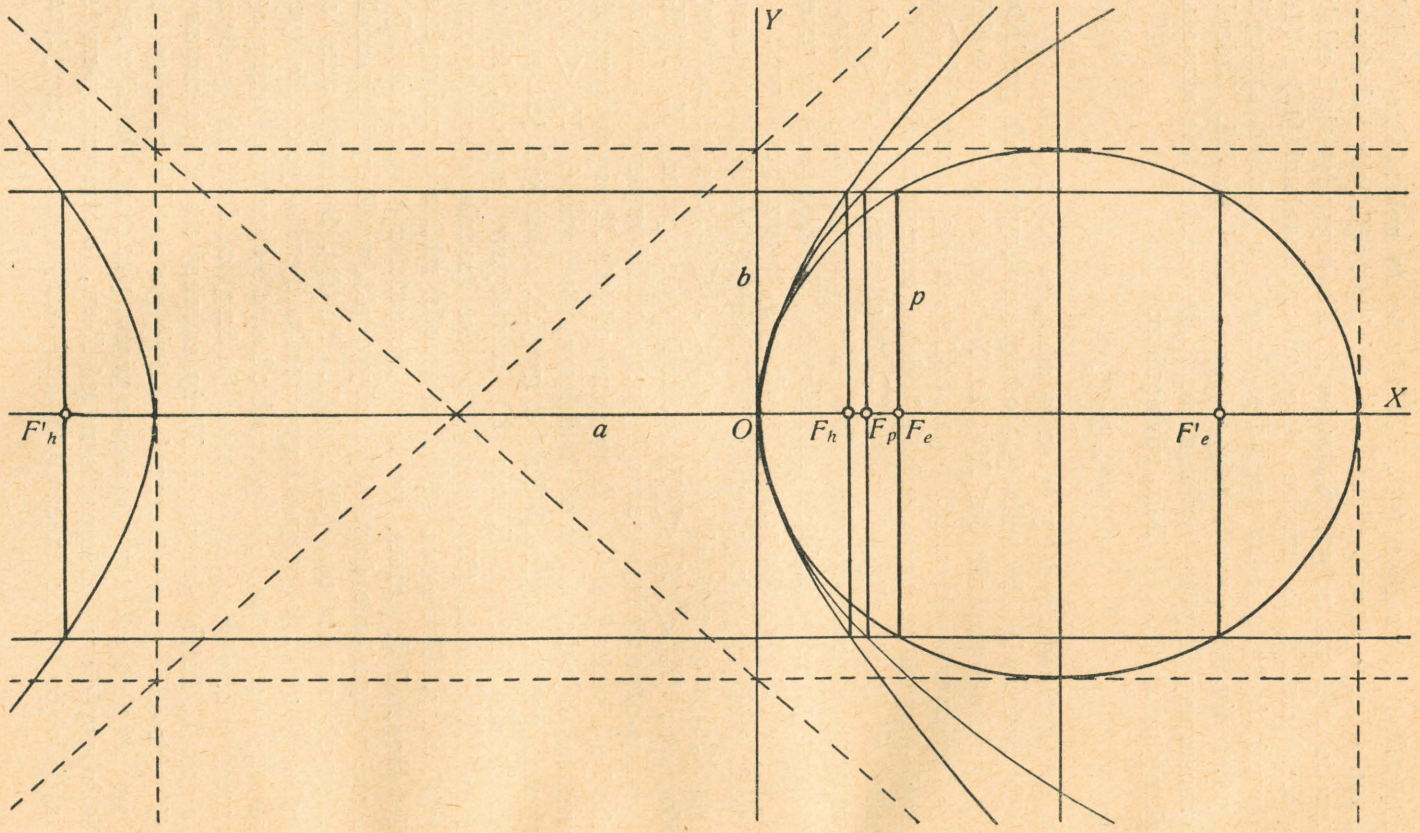

Fig. 8.

uwagi o położeniu tych linij krzywych wynika, że na ujemnem ramieniu osi X leży tylko jedno ognisko hiperboli oraz, że na jej dodatniem ramieniu znajdują się pozostałe cztery ogniska uważanych krzywych i że leżą one na tem ramieniu według następującej kolejności w kierunku powiększających się X-ów: drugie ognisko hiperboli, ognisko paraboli, dwa ogniska elipsy. Wszystkie te ogniska oznaczone są na figurze literami: F_h', F_h, F_p, F_e, F_e' w takim porządku jak zostały tu wymienione.

Wzajemne położenie ognisk na osi X-ów można uzasadnić także drogą następującego rachunku. Z równań (41) wynika, że odcięte X ognisk elipsy wyrażają się wzorem:

$$X = a - \eta\,\tau_1\,c,$$

a z równań (43) wynika, że odcięte ognisk hiperboli wyrażają się wzorem:

$$X = \eta\,\tau_2\,c - a.$$

Jeżeli przeto dla odciętych ognisk przyjmiemy sposób oznaczania analogiczny do powyższego sposobu oznaczania tych ognisk, to mieć będziemy wzory następujące:

$$(46)\qquad \begin{cases} X_e = a - c, \quad X_e' = a + c, \\ X_p = \dfrac{p}{2}, \\ X_h = c - a, \quad X_h' = -c - a, \end{cases}$$

przyczem zaznaczamy, że c w równościach pierwszego wiersza jest odległością ogniskową elipsy, a c w równościach trzeciego wiersza odległością ogniskową hiperboli. Ale wielkości X_e i X_h możemy inaczej przedstawić w postaci:

$$(47)\qquad \begin{cases} X_e = a - \sqrt{a(a-p)} = \dfrac{p}{1 + \sqrt{1 - \dfrac{p}{a}}}, \\ X_h = \sqrt{a(a+p)} - a = \dfrac{p}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{p}{a}}}. \end{cases}$$

Ze wzorów (46) i (47) wynikają przeto nierówności następujące:

$$X_h' < X_h < X_p < X_e < X_e'.$$

W ten sposób konstatujemy powtórnie poprzednie wyniki o położeniu ognisk uważanych linij krzywych.

Zajmiemy się teraz rozważeniem pewnego graniczn e g o proces u. Przypuśćmy mianowicie, że wielkość a wzrasta nieograniczenie, a wielkość p pozostaje bez zmiany. Wtedy mieć będziemy na podstawie wzorów (38) i (39) dla odległości ogniskowych i mimośrodów elipsy i hiperboli wyniki:

$$\lim c = \infty, \quad \lim e = 1,$$

a na podstawie wzorów (46) i (47) dla odciętych ognisk elipsy i hiperboli wyniki:

$$\lim X_e = \frac{p}{2}, \quad \lim X_e' = \infty,$$

$$\lim X_h = \frac{p}{2}, \quad \lim X_h' = -\infty.$$

Wtedy równania (42) i (44) dążyć będą do równania (45). Dochodzimy przeto do następującego t w i e r d z e n i a: jeżeli dla elipsy i hiperboli, określonych równaniami (42) i (44), wielkość a wzrasta nieograniczenie, a wielkość p pozostaje bez zmiany, to obie te krzywe dążą do paraboli, określonej równaniem (45). Wtedy odległości ogniskowe elipsy i hiperboli dążą do nieskończoności, a ich mimośrody dążą do jedności. Wtedy dwa ogniska jedno elipsy i jedno hiperboli dążą do ogniska paraboli, a dwa inne ogniska tych krzywych oddalają się do nieskończoności.

§ 5. Równania biegunowe.

Niech będzie układ spółrzędnych prostokątnych x, y, którego oś y tworzy z osią x-ów kąt $+\frac{\pi}{2}$. Weźmy w tym układzie pod uwagę równanie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon\, b^2} = 1, \tag{48}$$

określające przy $\varepsilon = +1$ elipsę, a przy $\varepsilon = -1$ hiperbolę. Przyjmijmy następnie układ spółrzędnych biegunowych, którego biegunem jest początek spółrzędnych, a ramieniem biegunowem dodatnie ramię osi x-ów. Jeżeli w tym układzie biegunowym promień wodzący i amplituda punktu oznaczone są odpowiednio przez ρ i ω, to zmiana jednego z rzeczonych układów spółrzędnych na drugi określa się związkami:

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega. \tag{49}$$

Podstawiając wyrażenia (49) w równanie (48) i rozwiązując wynikające tą drogą równanie względem ρ^2, dochodzimy do równania:

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \omega + \varepsilon a^2 \sin^2 \omega},$$

z którego przez wyciąganie pierwiastka kwadratowego wynika równanie:

$$\rho = \frac{a b}{\sqrt{b^2 \cos^2 \omega + \varepsilon a^2 \sin^2 \omega}}, \tag{50}$$

gdzie symbol pierwiastka oznacza bądź jedną bądź drugą z jego wartości. Można na podstawie tego równania badać, jak zmienia się promień wodzący ρ przy zmianach amplitudy ω, ale szczegóły odnośnych rozważań pomijamy.

Niech będzie teraz w układzie prostokątnym X, Y, którego oś Y tworzy z osią X kąt $+\frac{\pi}{2}$, równanie wierzchołkowe:

$$Y^2 = 2pX - \varepsilon \frac{p}{a} X^2. \tag{51}$$

W równaniu tem p oznacza stałą dodatnią. Gdy a jest nieskończenie wielkie, wówczas równanie (51) określa parabolę, położoną po stronie dodatnich X-ów. Gdy $\varepsilon = +1$, a litera a oznacza stałą dodatnią, spełniającą warunek $a > p$, wówczas równanie (51) określa elipsę, której oś wielka leży na dodatniem ramieniu osi X-ów. Gdy wreszcie $\varepsilon = -1$, a litera a oznacza dowolną stałą dodatnią, wówczas równanie (51) określa hiperbolę, której oś rzeczywista leży na ujemnem ramieniu osi X-ów. Jeżeli wprowadzimy teraz układ spółrzędnych biegunowych, którego biegu-

nem jest początek spółrzędnych X, Y, a ramieniem biegunowem dodatnie ramię osi X, t.j. jeżeli zastosujemy związki:

$$X = \rho \cos \omega, \quad Y = \rho \sin \omega,$$

to z równania wierzchołkowego (51) wyniknie równanie:

$$\rho^2 \sin^2 \omega = 2p\rho \cos \omega - \varepsilon \frac{p}{a} \rho^2 \cos^2 \omega,$$

które spełnia się przy $\rho = 0$. Opuszczając w niem wspólny wszystkim wyrazom czynnik ρ, otrzymujemy związek, z którego przez rozwiązanie względem ρ dochodzimy do równania:

$$\rho = \frac{2p \cos \omega}{\sin^2 \omega + \varepsilon \frac{p}{a} \cos^2 \omega},$$

które można we wszystkich wymienionych wyżej przypadkach (zob. wzór (39)) doprowadzić do postaci:

$$\rho = \frac{2p \cos \omega}{1 - e^2 \cos^2 \omega}. \tag{52}$$

Gdy $e = 1$, równanie to określa parabolę, gdy $e < 1$ elipsę, a gdy $e > 1$ hiperbolę. We wszystkich tych przypadkach z równania tego wynika $\rho = 0$, gdy amplituda ω jest kątem prostym. Równaniu (52) przysługuje także we wszystkich przypadkach pewna własność, którą skonstatować możemy w sposób następujący. Oznaczmy przez $\bar{\rho}$ długość promienia wodzącego, wynikającą z równania (52) dla wartości $\bar{\omega}$ amplitudy, określonej równością: $\bar{\omega} = \omega + \pi$. Widoczne, że zachodzi równość:

$$\bar{\rho} = -\frac{2p \cos \omega}{1 - e^2 \cos^2 \omega},$$

t.j. że mamy równość $\bar{\rho} = -\rho$. Ponieważ zaś punkt określony spółrzędnemi biegunowemi $\bar{\omega}, \bar{\rho}$ jest tym samym punktem, co punkt określony spółrzędnemi biegunowemi ω, ρ, przeto zbiór punktów, których spółrzędne spełniają równanie (52) dla wszystkich wartości amplitudy ω, czyniącej zadość warunkom $0 \leqslant \omega < \pi$, jest zbiorem wszystkich punktów określonych przez równanie (52). Roz-

ważymy dla każdej z trzech krzywych z osobna, w jaki sposób punkt bieżący opisuje te linje krzywe przy zmienianiu się kąta ω.

W przypadku p a r a b o l i równanie (52) można napisać w postaci:

$$\rho = 2p \frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega}.$$

Z równania tego wynika, że gdy ω wzrasta od zera do $\frac{\pi}{2}$, wówczas ρ maleje od nieskończoności dodatniej do zera, t.j. punkt bieżący opisuje tę część paraboli od nieskończoności do wierzchołka, która leży względem ramienia biegunowego po stronie kątów dodatnich (zob. fig. 9). Gdy ω wzrasta od $\frac{\pi}{2}$ do π, wówczas ρ maleje od zera do nieskończoności ujemnej, t.j. punkt bieżący opisuje tę część

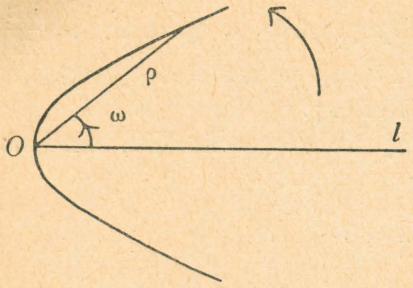

Fig. 9.

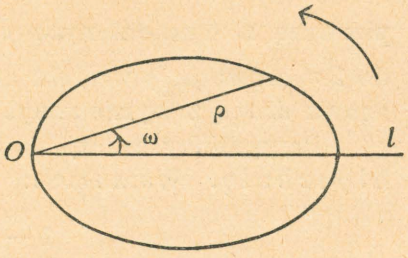

Fig. 10.

paraboli od wierzchołka do nieskończoności, która leży względem ramienia biegunowego po stronie kątów ujemnych. Przy dalszem zmienianiu się kąta ω punkt bieżący opisze na podstawie przytoczonej powyżej własności ogólnej tę samą parabolę. Gdy ω wzrasta od π do $\frac{3\pi}{2}$, wówczas ρ wzrasta od nieskończoności ujemnej do zera, t.j. punkt bieżący opisuje znowu pierwszą z wymienionych części paraboli. Gdy ω wzrasta od $\frac{3\pi}{2}$ do 2π, wówczas ρ wzrasta od zera do nieskończoności dodatniej, t.j. punkt bieżący opisuje znowu drugą z wymienionych części paraboli.

Zauważmy, że w przypadku elipsy względnie hiperboli zachodzi równość:

$$\frac{2p}{1-e^2} = 2\varepsilon a. \tag{53}$$

Niech będzie teraz $e < 1$, t.j. niech równanie (52) określa elipsę. Wtedy mianownik prawej strony tego równania jest zawsze dodatni. Gdy ω wzrasta od 0 do $\frac{\pi}{2}$, wówczas ρ maleje od $2a$ do 0, t.j. punkt bieżący opisuje od wierzchołka elipsy, nie leżącego w biegunie układu, do wierzchołka elipsy, leżącego w biegunie układu, tę część elipsy, która znajduje się względem ramienia biegunowego po stronie kątów dodatnich (zob. fig. 10). Gdy ω wzrasta od $\frac{\pi}{2}$ do π, wówczas ρ maleje od 0 do $-2a$, t.j. punkt bieżący opisuje od wierzchołka elipsy, leżącego w biegunie układu, do wierzchołka elipsy, nie leżącego w biegunie układu, tę część tej krzywej, która znajduje się względem ramienia biegunowego po stronie kątów ujemnych. Gdy ω wzrasta od π do $\frac{3\pi}{2}$, wówczas ρ wzrasta od $-2a$ do 0, t.j. punkt bieżący opisuje znowu pierwszą z wymienionych części elipsy. Gdy ω wzrasta od $\frac{3\pi}{2}$ do 2π, wówczas ρ wzrasta od 0 do $2a$, t.j. punkt bieżący opisuje znowu drugą z wymienionych części elipsy.

Przypuśćmy teraz, że $e > 1$, t.j. że równanie (52) określa hiperbolę. Warunkowi:

$$1 - e^2 \cos^2 \omega = 0$$

czynią zadość amplitudy ω, przy których ρ jest nieskończenie wielkie. Amplitudy te określają kierunki asymptot i spełniają bądź jedno bądź drugie z równań:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg} \omega = -\frac{b}{a}.$$

Oznaczmy przez ω_1 i ω_2 kąty dodatnie mniejsze od π, które czynią zadość odpowiednio pierwszemu i drugiemu z tych równań. Stosując te oznaczenia, będziemy mogli odnośnie do zależności (52), określającej hiperbolę, wypowiedzieć wnioski następujące. Gdy ω rośnie od 0 do ω_1, wówczas ρ maleje od $-2a$ do nieskończoności ujemnej, t.j. punkt bieżący opisuje tę nieskończoną część hiperboli, poruszając się na niej od wierzchołka do nieskończoności, która leży w stosunku do ramienia biegunowego po stronie kątów ujemnych i nie przechodzi przez biegun (zob. fig. 11). Gdy ω, przechodząc przez wartość ω_1, rośnie od tej wartości do $\frac{\pi}{2}$, wówczas ρ

maleje od wartości nieskończonej dodatniej do zera, t.j. punkt bieżący hiperboli porusza się od nieskończoności do wierzchołka hiperboli opisując tę nieskończoną część hiperboli, która przechodzi przez biegun i leży w stosunku do ramienia biegunowego po stronie kątów dodatnich. Gdy ω rośnie od $\frac{\pi}{2}$ do ω_2, wówczas ρ maleje od zera do nieskończoności ujemnej, t.j. punkt bieżący opisuje tę nieskończoną część hiperboli od bieguna układu do nieskończoności, która w stosunku do ramienia biegunowego leży

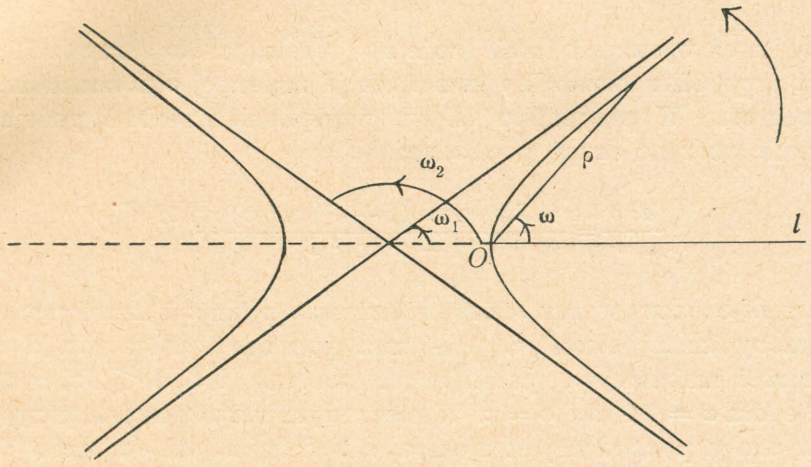

Fig. 11.

po stronie kątów ujemnych. Gdy ω, przechodząc przez wartość ω_2, rośnie od tej wartości do π, wówczas ρ maleje od wartości nieskończenie wielkiej dodatniej do $2a$, t.j. punkt bieżący hiperboli porusza się od nieskończoności do wierzchołka hiperboli, opisując tę nieskończoną część hiperboli, która nie przechodzi przez biegun i leży w stosunku do ramienia biegunowego po stronie kątów dodatnich. Jeżeli następnie zmieniać będziemy ω od π do 2π, to ρ przyjmować będzie kolejno wartości, różniące się tylko znakiem od odpowiednich wartości poprzednio przyjmowanych przez ρ. Punkt bieżący na hiperboli odbędzie wtedy jeszcze raz tę samą drogę, którą odbył przy zmianie ω od 0 do π.

Z tych rozważań w szczególności wynika, że w przypadku paraboli ρ jako funkcja zmiennej ω niema żadnego extremum. Natomiast w przypadku elipsy względnie hiperboli funkcja ρ ma

przy $\omega = 0$ maximum $2\varepsilon a$, a przy $\omega = \pi$ minimum $-2\varepsilon a$. Sprawdzimy te rezultaty zapomocą różniczkowania. Z równania (52) otrzymuje się przez różniczkowanie:

$$\frac{d\rho}{d\omega} = -\frac{2p \sin\omega (1 + e^2 \cos^2\omega)}{(1 - e^2 \cos^2\omega)^2}.$$

Z tego wzoru dla paraboli wynika:

$$\frac{d\rho}{d\omega} = -\frac{2p(1 + \cos^2\omega)}{\sin^3\omega}$$

i ponieważ wyrażenie to nie może być zerem, przeto sprawdziliśmy, że w przypadku paraboli ρ jako funkcja zmiennej ω niema żadnego extremum. W przypadku elipsy względnie hiperboli podajemy jeszcze wzór na drugą pochodną:

$$\frac{d^2\rho}{d\omega^2} = -\frac{2p \cos\omega (1 + e^2 \cos^2\omega)}{(1 - e^2 \cos^2\omega)^2} + M,$$

gdzie M oznacza wyraz, który znika wraz z $\sin\omega$ i którego niema potrzeby bliżej określać. Pierwsza pochodna znika dla dwóch wartości zmiennej ω, spełniających warunki $0 \leqslant \omega < 2\pi$, mianowicie dla $\omega = 0$ i dla $\omega = \pi$. W pierwszym z tych dwóch przypadków druga pochodna jest ujemna, a w drugim jest dodatnia. Stąd wynika, że dla elipsy względnie hiperboli w przypadku $\omega = 0$ zachodzi maximum, a w przypadku $\omega = \pi$ minimum wielkości ρ. Na podstawie wzorów (52) i (53) to maximum równa się $2\varepsilon a$, a to minimum równa się $-2\varepsilon a$.

Zajmiemy się tu jeszcze wyprowadzeniem i rozważeniem pewnego innego równania w spółrzędnych biegunowych, które w zależności od wartości zachodzącego w niem mimośrodu e przedstawia albo elipsę, albo parabolę, albo hiperbolę.

Weźmy pod uwagę znowu równanie (48) i wprowadźmy w niem układ spółrzędnych prostokątnych X, Y określony związkami:

$$x = \eta c + \sigma X, \quad y = \sigma Y,$$

gdzie $\sigma = \pm 1$, $\eta = \pm 1$, a c oznacza bezwzględną odległość ogniska elipsy względnie hiperboli od jej środka. Wtedy otrzymamy równanie:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{\varepsilon b^2}+2\sigma\eta\frac{c}{a^2}X-\frac{\varepsilon b^2}{a^2}=0,$$

a jeżeli wprowadzimy w niem spółrzędne biegunowe ρ, ω, określone związkami:

$$X=\rho\cos\omega,\quad Y=\rho\sin\omega,$$

to dojdziemy do równania:

$$\left(\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{\varepsilon b^2}\right)\rho^2+2\sigma\eta\frac{c}{a^2}\rho\cos\omega-\frac{\varepsilon b^2}{a^2}=0.$$

Równanie to można inaczej napisać w postaci:

$$\frac{c^2}{a^2}\rho^2\cos^2\omega-2\sigma\varepsilon\eta\frac{cb^2}{a^2}\rho\cos\omega+\frac{b^4}{a^2}=\rho^2,$$

albo w postaci:

$$e^2\rho^2\cos^2\omega-2\eta\sigma\varepsilon ep\rho\cos\omega+p^2=\rho^2.$$

To znaczy, że doszliśmy do równania:

$$(p-\sigma\varepsilon\eta e\rho\cos\omega)^2=\rho^2,$$

z którego wynika równanie:

$$\rho=\frac{\zeta p}{1+\zeta\sigma\varepsilon\eta e\cos\omega},\tag{54}$$

gdzie $\zeta=\pm 1$.

Weźmy nadto pod uwagę równanie paraboli:

$$y^2=2px.$$

Jeżeli wykonamy w niem zmianę spółrzędnych, określoną związkami:

$$x=\frac{p}{2}+\sigma X,\quad y=\sigma Y,$$

gdzie $\sigma=\pm 1$, to otrzymamy równanie:

$$Y^2=2\sigma pX+p^2,$$

a wprowadzając tu spółrzędne biegunowe ρ, ω, określone związkami:

$$X=\rho\cos\omega,\quad Y=\rho\sin\omega,$$

dojdziemy do równania:

$$\rho^2 \sin^2 \omega = 2\sigma p \rho \cos \omega + p^2,$$

które można inaczej napisać w postaci:

$$\rho^2 = (p + \sigma \rho \cos \omega)^2.$$

Równanie to jest równoważne z równaniem:

$$\rho = \frac{\zeta p}{1 - \zeta \sigma \cos \omega}, \tag{55}$$

gdzie $\zeta = \pm 1$.

Jeżeli w równaniu (54) elipsy względnie hiperboli obierzemy $\sigma = \varepsilon \eta$, to mieć będziemy równanie:

$$\rho = \frac{\zeta p}{1 + \zeta e \cos \omega}. \tag{56}$$

A jeżeli w równaniu (55) paraboli obierzemy $\sigma = -1$, to mieć będziemy równanie:

$$\rho = \frac{\zeta p}{1 + \zeta \cos \omega}. \tag{57}$$

To ostatnie równanie otrzymuje się przez przyjęcie w równaniu (56) $e = 1$. Zatem równanie (56) określa przy $e < 1$ elipsę, przy $e = 1$ parabolę, a przy $e > 1$ hiperbolę. Równanie (56) jest przedstawieniem analitycznem jednej z rzeczonych linij krzywych w takim układzie spółrzędnych biegunowych, którego biegun znajduje się w ognisku tej linji krzywej, a ramię biegunowe leży na osi linji krzywej, ognisko to zawierającej, i ma kierunek od ogniska do wierzchołka w przypadku paraboli, a od ogniska do bliższego z dwóch wierzchołków, leżących na tej osi, w przypadku elipsy lub hiperboli.

Zajmiemy się rozważeniem pewnych szczegółów odnoszących się do równania (56). Amplituda ω jest kątem, który oś, przechodząca przez biegun układu, tworzy z ramieniem biegunowem. Wszystkie punkty krzywej, określonej równaniem (56), można otrzymać przez wyznaczenie wszystkich punktów wspólnych tej linji krzywej ze wszystkiemi rzeczonemi osiami, których kąt ω spełnia warunki $0 \leqslant \omega < \pi$. Ponieważ równanie (56) zawiera podwójny znak ζ, przeto wszystkie te punkty otrzymują się z równań:

$$(58) \qquad \rho = \frac{p}{1 + e\cos\omega}, \quad \rho = -\frac{p}{1 - e\cos\omega}$$

przy spełnieniu warunków $0 \leqslant \omega < \pi$. Jeżeli do drugiego z tych równań zastosujemy przekształcenie:

$$(59) \qquad \bar{\omega} = \omega + \pi, \quad \bar{\rho} = -\rho,$$

to otrzyma się z niego równanie:

$$\bar{\rho} = \frac{p}{1 + e\cos\bar{\omega}},$$

które przy spełnieniu warunków $\pi \leqslant \bar{\omega} < 2\pi$ określi te same punkty, co drugie z równań (58). Stąd wynika, że wszystkie punkty krzywej, określonej równaniem (56), wyznaczone są przez równanie:

$$(60) \qquad \rho = \frac{p}{1 + e\cos\omega}$$

przy spełnieniu warunków $0 \leqslant \omega < 2\pi$. Podobnież, jeżeli do pierwszego z równań (58) zastosujemy przekształcenie (59), to punkty wyznaczone przez to równanie określimy przez równanie:

$$\bar{\rho} = -\frac{p}{1 - e\cos\bar{\omega}}$$

przy spełnieniu warunków $\pi \leqslant \bar{\omega} < 2\pi$. Stąd wynika, że wszystkie punkty krzywej, określonej równaniem (56), wyznaczone są także przez równanie:

$$\rho = -\frac{p}{1 - e\cos\omega}$$

przy spełnieniu warunków: $0 \leqslant \omega < 2\pi$.

W dalszym ciągu oprzemy się wyłącznie na równaniu (60) i rozważymy w szczegółach, jak punkt bieżący opisuje linję krzywą, określoną tem równaniem, gdy ω wzrasta od 0 do 2π. Jeżeli $e < 1$, t.j. w przypadku elipsy, ρ jest stale dodatnie; gdy przytem ω wzrasta od 0 do π, wówczas ρ stale rośnie od wartości $\frac{p}{1+e}$ do wartości $\frac{p}{1-e}$, a punkt bieżący opisuje połowę elipsy, znajdującą się w stosunku do ramienia biegunowego po stronie kątów dodatnich (zob. fig. 12), gdy zaś ω wzrasta od π do 2π

wówczas ρ stale maleje od wartości $\frac{p}{1-e}$ do wartości $\frac{p}{1+e}$, a punkt bieżący opisuje połowę elipsy, znajdującą się w stosunku do ramienia biegunowego po stronie kątów ujemnych. Jeżeli $e = 1$, t.j. w przypadku p a r a b o l i, ρ także jest stale dodatnie; gdy przytem ω wzrasta od 0 do π, wówczas ρ stale wzrasta od $\frac{p}{2}$ do nieskończoności dodatniej, a punkt bieżący opisuje tę część paraboli

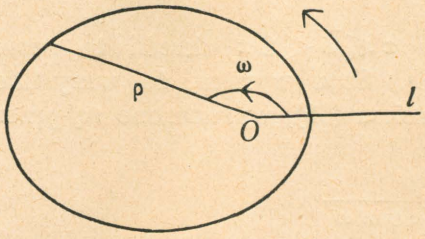

Fig. 12.

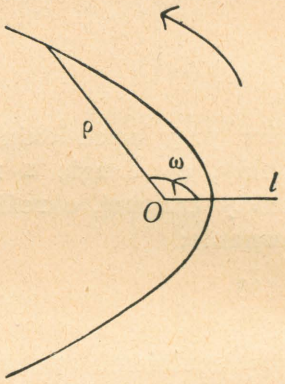

Fig. 13.

od jej wierzchołka do nieskończoności, która w stosunku do ramienia biegunowego leży po stronie kątów dodatnich (zob. fig. 13), gdy zaś ω wzrasta od π do 2π, wówczas ρ stale maleje od nieskończoności dodatniej do $\frac{p}{2}$, a punkt bieżący opisuje tę część paraboli od nieskończoności do jej wierzchołka, która leży po stronie kątów ujemnych. Gdy wreszcie $e > 1$, t.j. w przypadku h i p e r b o l i, zauważymy, że ρ ma wartość nieskończenie wielką dla kątów ω, spełniających równanie:

$$1 + e \cos \omega = 0,$$

t.j. dla kątów ω, określonych związkiem:

$$\cos \omega = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Istnieją dwa kąty zawarte pomiędzy 0 i 2π, spełniające ten związek. Oznaczymy mniejszy z nich przez ω', a większy przez ω'', i zauważymy, że zachodzi równość:

$$\omega' + \omega'' = 2\pi.$$

Gdy ω wzrasta od 0 do ω', wówczas ρ rośnie od $\frac{p}{1+e}$ do wartości nieskończonej dodatniej, a punkt bieżący opisuje od wierzchołka do nieskończoności tę nieskończoną część hiperboli, która leży względem ramienia biegunowego po stronie kątów dodatnich i należy do gałęzi położonej bliżej do bieguna układu (zob. fig. 14). Gdy ω, przekraczając wartość ω', rośnie od tej wartości do wartości π, wówczas ρ rośnie od wartości nieskończonej ujemnej do $\frac{p}{1-e}$, punkt bieżący opisuje od nieskończoności do wierzchołka

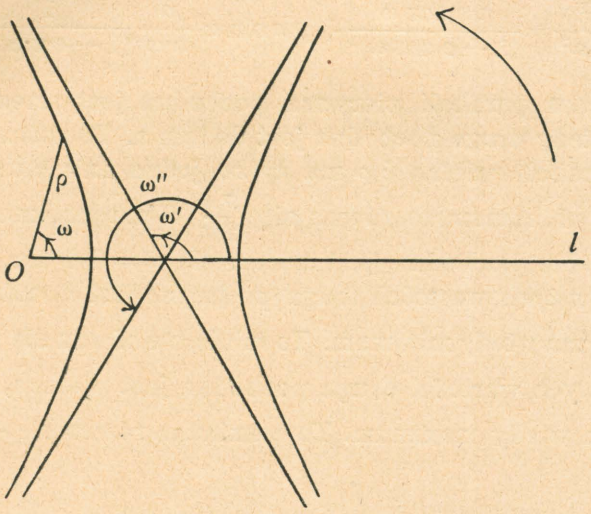

Fig. 14.

nieskończoną część hiperboli, która w stosunku do ramienia biegunowego położona jest po stronie kątów ujemnych i należy do gałęzi, leżącej dalej od bieguna układu. Gdy ω rośnie od wartości π do wartości ω'', wówczas ρ maleje od $\frac{p}{1-e}$ do wartości nieskończonej ujemnej, a punkt bieżący opisuje od wierzchołka do nieskończoności tę część nieskończoną hiperboli, która położona jest w stosunku do ramienia biegunowego po stronie kątów dodatnich i należy do gałęzi, leżącej dalej od bieguna układu. Gdy ω, przekraczając wartość ω'', rośnie od tej wartości do wartości 2π, wówczas ρ maleje od wartości nieskończonej dodatniej do wartości $\frac{p}{1+e}$, a punkt bieżący opisuje od nieskończoności do wierzchołka tę część nieskończoną hiperboli, która leży w stosunku do ramie-

nia biegunowego po stronie kątów ujemnych i należy do gałęzi bliższej do bieguna układu.

Rozważania, które przeprowadziliśmy, rozwiązują już zadanie o extremach wielkości ρ jako funkcji kąta ω, określonej równaniem (60). Odnośne rezultaty skonstatujemy jeszcze na drodze różniczkowania. Mamy wzory:

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{p\,e \sin\omega}{(1+e\cos\omega)^2},$$

$$\frac{d^2\rho}{d\omega^2} = \frac{p\,e\cos\omega}{(1+e\cos\omega)^2} + p\,e\sin\omega\,\frac{d}{d\omega}\,\frac{1}{(1+e\cos\omega)^2}.$$

W przypadku paraboli pierwsza pochodna jest zerem tylko przy $\omega = 0$ i wtedy druga pochodna jest dodatnia. To znaczy, że w przypadku paraboli wielkość ρ ma tylko jedno extremum, które jest minimum. Minimum to równa się $\frac{p}{2}$. W przypadku elipsy i hiperboli pierwsza pochodna jest zerem dla $\omega = 0$ i dla $\omega = \pi$. Przy pierwszej z tych wartości druga pochodna jest dodatnia, a zatem wielkość ρ ma wtedy minimum. To minimum równa się $\frac{p}{1+e}$. Przy drugiej z tych wartości druga pochodna jest ujemna, a więc wielkość ρ ma wtedy maximum. To maximum równa się $\frac{p}{1-e}$.

ROZDZIAŁ DRUGI.

Przekształcanie ogólnego równania stopnia drugiego o dwóch zmiennych.

§ 6. Podstawowe wzory dotyczące wielomianu stopnia drugiego o dwóch zmiennych.

Niech będzie wielomian:

$$(1)\quad f(x,y) = A\,x^2 + 2\,B\,x\,y + C\,y^2 + 2\,D\,x + 2\,E\,y + F,$$

gdzie A, B, C, D, E, F oznaczają spółczynniki rzeczywiste, z których A, B, C nie są wszystkie trzy jednocześnie zerami. Wstawiając w ten wielomian:

$$(2)\qquad x = a + h,\quad y = b + k,$$

otrzymamy:

$$(3)\quad f(a+h, b+k) = A\,(a+h)^2 + 2\,B\,(a+h)\,(b+k) + C\,(b+k)^2 + \\ + 2\,D\,(a+h) + 2\,E\,(b+k) + F$$

i wykonywając wskazane tu działania, możemy uporządkować ten rezultat według potęg h i k. Łatwo dostrzec, że jeżeli tak samo jak w § 31 tomu I przyjmiemy oznaczenie:

$$(4)\qquad \varphi(x,y) = A\,x^2 + 2\,B\,x\,y + C\,y^2$$

oraz wprowadzimy oznaczenia:

$$(5)\qquad \begin{cases} \alpha = A\,a + B\,b + D, \\ \beta = B\,a + C\,b + E, \\ \gamma = D\,a + E\,b + F, \end{cases}$$

to otrzymamy wzór:

$$(6)\qquad f(a+h, b+k) = \varphi(h, k) + 2(\alpha h + \beta k) + f(a, b)$$

i łatwo skonstatujemy związek:

$$(7)\qquad f(a, b) = \alpha a + \beta b + \gamma .$$

Wzór (6) można także napisać na podstawie wzoru Taylora. Stosując mianowicie wzór ten do uważanego tu szczególnego przypadku, mamy:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) k +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) h^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right) h\,k + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) k^2\right],$$

gdzie pochodne w nawiasach oznaczają ich wartości przy $x = a$, $y = b$. Ale różniczkowanie prowadzi do wzorów:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(A\,x + B\,y + D), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(B\,x + C\,y + E),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\,A, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 2\,B, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\,C,$$

a z pomocą tych wzorów i oznaczeń (4) i (5) otrzymamy stąd znowu wzór (6).

Załóżmy teraz, że x, y oznaczają spółrzędne prostolinjowe zmiennego punktu na płaszczyźnie. Przy tem założeniu stosować będziemy w dalszym ciągu często r ó w n a n i a o s i o w e l i n j i p r o s t e j:

$$(8)\qquad x = a + \lambda r, \quad y = b + \mu r,$$

gdzie r jest zmiennym parametrem i gdzie a, b oznaczają spółrzędne stałego punktu, a λ, μ spółczynniki stałego kierunku względ-

nie pseudokierunku w tym samym układzie [1]). Ze wzoru (6) widzimy, że rezultat podstawienia prawych stron tych równań w wielomian $f(x, y)$ określi się wzorem:

$$(9)\quad f(a+\lambda r, b+\mu r) = \varphi(\lambda, \mu) r^2 + 2(\alpha\lambda + \beta\mu) r + f(a, b).$$

Zauważmy przytem, że taki sam wzór stosować można w przypadku uogólnionych równań osiowych:

$$(10)\qquad x = a + u t, \quad y = b + v t,$$

gdzie t jest zmiennym parametrem i gdzie a, b oznaczają spółrzędne stałego punktu, a u, v składowe stałego wektora, nie będące obie jednocześnie zerami [2]). W przypadku tym mamy:

$$(11)\quad f(a+u t, b+v t) = \varphi(u, v) t^2 + 2(\alpha u + \beta v) t + f(a, b).$$

W wielu zadaniach wprowadzać będziemy także w wielomian $f(x, y)$ nowe spółrzędne prostolinjowe $\bar{x}, \bar{y}$ na podstawie wzorów:

$$(12)\qquad \begin{cases} x = a + a_1 \bar{x} + a_2 \bar{y}, \\ y = b + b_1 \bar{x} + b_2 \bar{y}, \end{cases}$$

wyprowadzonych w § 9 tomu I. W tych wzorach a, b oznaczają stałe spółrzędne rzeczywistego początku spółrzędnych nowego układu, a a_1, b_1 i a_2, b_2 spółczynniki kierunkowe nowych osi $\bar{x}, \bar{y}$. Jeżeli kierunek kątów dodatnich na płaszczyźnie jest ustalony i ϑ oznacza kąt osi y z osią x, a $\bar{\vartheta}$ kąt osi $\bar{y}$ z osią $\bar{x}$, to spełnione są związki:

$$(13)\qquad \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 + 2 a_1 b_1 \cos\vartheta = 1, \quad a_2^2 + b_2^2 + 2 a_2 b_2 \cos\vartheta = 1, \\ \cos\bar{\vartheta} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) \cos\vartheta, \\ \sin\bar{\vartheta} = (a_1 b_2 - b_1 a_2) \sin\vartheta. \end{cases}$$

Jeżeli we wzorze (6) przyjmiemy:

$$h = a_1 \bar{x} + a_2 \bar{y}, \quad k = b_1 \bar{x} + b_2 \bar{y},$$

---

[1]) Zob. § 12 i § 28 w tomie I-ym.
[2]) Zob. § 28 tomu I-ego.

to mieć będziemy:

$$f(a + a_1 \overline{x} + a_2 \overline{y},\ b + b_1 \overline{x} + b_2 \overline{y}) =$$

$$= \varphi(a_1 \overline{x} + a_2 \overline{y},\ b_1 \overline{x} + b_2 \overline{y}) + 2\alpha(a_1 \overline{x} + a_2 \overline{y}) +$$

$$+ 2\beta(b_1 \overline{x} + b_2 \overline{y}) + f(a, b).$$

To znaczy, że otrzymamy rezultat formy:

$$(14) \qquad f(a + a_1 \overline{x} + a_2 \overline{y},\ b + b_1 \overline{x} + b_2 \overline{y}) =$$

$$= \overline{A}\,\overline{x}^2 + 2\overline{B}\,\overline{x}\,\overline{y} + \overline{C}\,\overline{y}^2 + 2\overline{D}\,\overline{x} + 2\overline{E}\,\overline{y} + \overline{F},$$

gdzie, wprowadzając jeszcze oznaczenie:

$$(15) \quad \varphi(a_1, b_1;\ a_2, b_2) = A\,a_1\,a_2 + B(a_1\,b_2 + a_2\,b_1) + C\,b_1\,b_2,$$

mieć będziemy:

$$(16) \quad \begin{cases} \overline{A} = \varphi(a_1, b_1), & \overline{B} = \varphi(a_1, b_1;\ a_2, b_2), & \overline{C} = \varphi(a_2, b_2), \\ \overline{D} = \alpha\,a_1 + \beta\,b_1, & \overline{E} = \alpha\,a_2 + \beta\,b_2, & \overline{F} = f(a, b). \end{cases}$$

Jeżeli wyrażenia, znajdujące się w tych wzorach po stronie prawej wypiszemy jeszcze wyraźnie bez przyjętych poprzednio skróceń, to mieć będziemy także wzory następujące:

$$(17) \quad \begin{cases} \overline{A} = A\,a_1^2 + 2B\,a_1\,b_1 + C\,b_1^2, \\ \overline{B} = A\,a_1\,a_2 + B(a_1\,b_2 + a_2\,b_1) + C\,b_1\,b_2, \\ \overline{C} = A\,a_2^2 + 2B\,a_2\,b_2 + C\,b_2^2, \\ \overline{D} = (A\,a + B\,b + D)\,a_1 + (B\,a + C\,b + E)\,b_1, \\ \overline{E} = (A\,a + B\,b + D)\,a_2 + (B\,a + C\,b + E)\,b_2, \\ \overline{F} = A\,a^2 + 2B\,a\,b + C\,b^2 + 2D\,a + 2E\,b + F. \end{cases}$$

§ 7. Niezmienniki wielomianu drugiego stopnia i niezmienniki krzywej drugiego stopnia.

W poprzednim paragrafie widzieliśmy, że na mocy równań (12) wielomian drugiego stopnia w spółrzędnych prostolinjowych x, y:

$$(1) \quad f(x,y) = A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F$$

przechodzi w wielomian drugiego stopnia w spółrzędnych prostolinjowych $\bar{x}, \bar{y}$:

$$(14) \quad f(a + a_1 \bar{x} + a_2 \bar{y},\ b + b_1 \bar{x} + b_2 \bar{y}) =$$

$$= \bar{A} \bar{x}^2 + 2 \bar{B} \bar{x} \bar{y} + \bar{C} \bar{y}^2 + 2 \bar{D} \bar{x} + 2 \bar{E} \bar{y} + \bar{F},$$

przyczem spółczynniki drugiego wielomianu określają się przez spółczynniki pierwszego i stałe związków (12) zapomocą wzorów (16) lub równoważnych z niemi związków (17). Przekonamy się przez rugowanie spółczynników a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 z równań (13) i (17), że dla wielomianu drugiego stopnia o dwóch zmiennych istnieją takie wyrażenia, zależne od spółczynników wielomianu i ewentualnie od kąta osi rzędnych z osią odciętych, które obliczone dla jednego i dla drugiego z uważanych układów, t.j. dla spółczynników niekreskowanych i kąta ϑ oraz dla spółczynników kreskowanych i kąta $\bar{\vartheta}$, mają na podstawie związków (13) i (17) równe sobie wartości. Takie wyrażenia nazywać będziemy niezmiennikami wielomianu stopnia drugiego przy zmianach spółrzędnych prostolinjowych.

Zwróćmy naprzód uwagę na trzy pierwsze ze związków (17). Przy zastosowaniu oznaczeń:

$$(18) \quad \begin{cases} \varphi(\xi, \eta) = A \xi^2 + 2 B \xi \eta + C \eta^2, \\ \Phi(\xi, \eta) = \xi^2 + 2 \cos \vartheta \, \xi \eta + \eta^2 \end{cases}$$

oraz oznaczeń:

$$(19) \quad \begin{cases} \bar{\varphi}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \bar{A} \bar{\xi}^2 + 2 \bar{B} \bar{\xi} \bar{\eta} + \bar{C} \bar{\eta}^2, \\ \bar{\Phi}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \bar{\xi}^2 + 2 \cos \bar{\vartheta} \, \bar{\xi} \bar{\eta} + \bar{\eta}^2 \end{cases}$$

można treść trzech pierwszych ze związków (17) wysłowić jak

następuje. Spółczynniki A, B, C i spółczynniki $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ znajdują się w takiej zależności, że naskutek przekształcenia:

$$(20)\qquad \begin{cases} \xi = a_1 \overline{\xi} + a_2 \overline{\eta}, \\ \eta = b_1 \overline{\xi} + b_2 \overline{\eta} \end{cases}$$

zachodzą równości:

$$(21)\qquad \begin{cases} \varphi(\xi, \eta) = \overline{\varphi}(\overline{\xi}, \overline{\eta}), \\ \Phi(\xi, \eta) = \overline{\Phi}(\overline{\xi}, \overline{\eta}). \end{cases}$$

Z rozważań, przeprowadzonych w § 45 tomu I, wynika, że jeżeli zastosujemy oznaczenia:

$$(22)\qquad \delta = AC - B^2, \quad \omega = A + C - 2B\cos\vartheta$$

oraz oznaczenia:

$$(23)\qquad \overline{\delta} = \overline{A}\,\overline{C} - \overline{B}^2, \quad \overline{\omega} = \overline{A} + \overline{C} - 2\overline{B}\cos\vartheta,$$

to mieć będziemy równości:

$$(24)\qquad \frac{\overline{\delta}}{\sin^2\vartheta} = \frac{\delta}{\sin^2\vartheta}, \quad \frac{\overline{\omega}}{\sin^2\vartheta} = \frac{\omega}{\sin^2\vartheta}.$$

Skonstatowaliśmy w ten sposób dwa niezmienniki bezwzględne wielomianu drugiego stopnia, które oznaczymy:

$$(25)\qquad (\delta) = \frac{\delta}{\sin^2\vartheta}, \quad (\omega) = \frac{\omega}{\sin^2\vartheta}.$$

W § 32 tomu I rozważaliśmy wyrażenie Ω, określone wzorem (23) tego paragrafu. Wyrażenie to możemy napisać w postaci:

$$(26)\qquad \Omega = \sqrt{\omega^2 - 4\delta\sin^2\vartheta}\,.$$

Wprowadzając oznaczenie:

$$(27)\qquad (\Omega) = \frac{\Omega}{\sin^2\vartheta},$$

skonstatujemy łatwo, że zachodzi związek:

$$(28)\qquad (\Omega) = \sqrt{(\omega)^2 - 4(\delta)}\,,$$

z którego wynika, że wyrażenie (Ω) jest niezmiennikiem wielomianu drugiego stopnia. Niezmiennik ten jest zależny od niezmienników (δ) i (ω). Zaznaczamy, że niezmienniki (25) i (27) zależą tylko od spółczynników wyrazów drugiego stopnia uważanego wielomianu.

Wyprowadzimy teraz niezmiennik zależny od wszystkich spółczynników wielomianu drugiego stopnia. Niech będzie wyznacznik:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A, & B, & D \\ B, & C, & E \\ D, & E, & F \end{vmatrix}; \tag{29}$$

wprowadźmy w układzie $\bar{x}, \bar{y}$ oznaczenie analogiczne:

$$\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} \bar{A}, & \bar{B}, & \bar{D} \\ \bar{B}, & \bar{C}, & \bar{E} \\ \bar{D}, & \bar{E}, & \bar{F} \end{vmatrix}. \tag{30}$$

Jeżeli wyznacznik Δ pomnożymy przez wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a \\ b_1, & b_2, & b \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}, \tag{31}$$

to otrzymamy:

$$\begin{vmatrix} A\,a_1 + B\,b_1, & A\,a_2 + B\,b_2, & A\,a + B\,b + D \\ B\,a_1 + C\,b_1, & B\,a_2 + C\,b_2, & B\,a + C\,b + E \\ D\,a_1 + E\,b_1, & D\,a_2 + E\,b_2, & D\,a + E\,b + F \end{vmatrix},$$

a mnożąc ten wyznacznik jeszcze raz przez wyznacznik (31) i korzystając ze wszystkich związków (17) otrzymamy wyznacznik $\bar{\Delta}$. Jeżeli przytem zwrócimy uwagę na to, że wyznacznik (31) równa się stosunkowi $\sin\bar{\vartheta} : \sin\vartheta$, to dojdziemy do równości:

$$\frac{\bar{\Delta}}{\sin^2\bar{\vartheta}} = \frac{\Delta}{\sin^2\vartheta}. \tag{32}$$

Otrzymaliśmy więc znów niezmiennnik bezwzględny wielomianu drugiego stopnia, który oznaczymy:

$$(\Delta) = \frac{\Delta}{\sin^2 \vartheta}. \tag{33}$$

W związku ze wzorem (282), podanym w § 66-tym tomu I-go zajmiemy się tu jeszcze pewnym rachunkiem, dotyczącym wyrażenia:

$$\tau = \Phi(-E, D) - \omega F. \tag{34}$$

Niech będzie w układzie przekształconym wyrażenie:

$$\overline{\tau} = \overline{\Phi}(-\overline{E}, \overline{D}) - \overline{\omega}\,\overline{F}. \tag{35}$$

Jeżeli czwarty i piąty ze związków (16) rozwiążemy względem α i β, to otrzymamy:

$$-\beta = \frac{\sin \vartheta}{\sin \overline{\vartheta}}(-\overline{E}\,a_1 + \overline{D}\,a_2), \quad \alpha = \frac{\sin \vartheta}{\sin \overline{\vartheta}}(-\overline{E}\,b_1 + \overline{D}\,b_2).$$

Widoczne, że z równań tych wynika równość:

$$\frac{\overline{\Phi}(-\overline{E}, \overline{D})}{\sin^2 \overline{\vartheta}} = \frac{\Phi(-\beta, \alpha)}{\sin^2 \vartheta}. \tag{36}$$

Na podstawie ostatniego ze związków (16), drugiego ze związków (24) oraz związku (36) otrzymujemy wyrażenie:

$$\overline{\tau} = \frac{\sin^2 \overline{\vartheta}}{\sin^2 \vartheta}[\Phi(-\beta, \alpha) - \omega f(a, b)]. \tag{37}$$

Wyrażenie to zależy od kątów ϑ i $\overline{\vartheta}$, od spółczynników wielomianu i od wielkości a, b wchodzących za pośrednictwem trójmianów α i β oraz wielomianu $f(a, b)$. Obliczymy pierwsze pochodne tego wyrażenia względem wielkości a i b. Otrzymujemy naprzód na te pochodne wyrażenia:

$$\frac{\partial \overline{\tau}}{\partial a} = 2\frac{\sin^2 \overline{\vartheta}}{\sin^2 \vartheta}[A\alpha + B\beta - (A\beta + B\alpha)\cos \vartheta - (A + C - 2B\cos \vartheta)\alpha],$$

$$\frac{\partial \overline{\tau}}{\partial b} = 2\frac{\sin^2 \overline{\vartheta}}{\sin^2 \vartheta}[B\alpha + C\beta - (B\beta + C\alpha)\cos \vartheta - (A + C - 2B\cos \vartheta)\beta],$$

a porządkując je według trójmianów α i β dochodzimy do wzorów:

$$(38)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{\tau}}{\partial a} = 2\dfrac{\sin^2 \bar{\vartheta}}{\sin^2 \vartheta}\,[(B\cos\vartheta - C)\,\alpha + (B - A\cos\vartheta)\,\beta], \\ \dfrac{\partial \bar{\tau}}{\partial b} = 2\dfrac{\sin^2 \bar{\vartheta}}{\sin \vartheta}\,[(B - C\cos\vartheta)\,\alpha + (B\cos\vartheta - A)\,\beta]. \end{cases}$$

Łatwo obliczyć, że wyrazy, które znajdują się po prawej stronie wzorów (38) i przytem zawierają wielkości a i b, są odpowiednio następujące:

$$-2\frac{\sin^2 \bar{\vartheta}}{\sin^2 \vartheta}(a + b\cos\vartheta)\,\delta,$$

$$-2\frac{\sin^2 \bar{\vartheta}}{\sin^2 \vartheta}(a\cos\vartheta + b)\,\delta.$$

Stąd wynika, że prawe strony wyrażeń (38) są wtedy i tylko wtedy niezależne od a i b, gdy $\delta = 0$. Jeżeli zaś warunek ten jest spełniony, to istnieją takie dwie liczby $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$, nie obie jednocześnie równe zeru, że zachodzą równości:

$$A = \varepsilon\,\mathfrak{a}^2, \quad B = \varepsilon\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}, \quad C = \varepsilon\,\mathfrak{b}^2$$

i wtedy pochodne (38) można przedstawić w postaci następującej:

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial a} = 2\,\varepsilon\frac{\sin^2 \bar{\vartheta}}{\sin^2 \vartheta}(\mathfrak{a}\cos\vartheta - \mathfrak{b})\,(D\,\mathfrak{b} - E\,\mathfrak{a}),$$

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial b} = 2\,\varepsilon\frac{\sin^2 \bar{\vartheta}}{\sin^2 \vartheta}(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\cos\vartheta)\,(D\,\mathfrak{b} - E\,\mathfrak{a}).$$

Z tych wzorów wynika, że uważane pochodne są wtedy i tylko wtedy obie jednocześnie równe zeru, gdy spełniona jest równość:

$$D\,\mathfrak{b} - E\,\mathfrak{a} = 0,$$

t.j. gdy prócz równości $\delta = 0$ spełniona jest równość $\Delta = 0$. Zatem dochodzimy do wyniku, że warunek konieczny i wystarczający, żeby wyrażenie (37) na $\bar{\tau}$ było niezależne od wielkości a i b, polega na tem, żeby spełnione były jednocześnie równości $\delta = 0$ i $\Delta = 0$. Gdy równości te są spełnione, wówczas mamy prawo przyjąć w związku (37) na a i b wartości dowolne, a więc i wartości $a = 0$, $b = 0$. W ten sposób dochodzimy do związku:

$$(39) \qquad \frac{\bar{\tau}}{\sin^2 \bar{\vartheta}} = \frac{\tau}{\sin^2 \vartheta}.$$

Wprowadzimy teraz oznaczenie:

$$(40) \qquad (\tau) = \frac{\tau}{\sin^2 \vartheta}$$

i nazwiemy wyrażenie to niezmiennikiem warunkowym wielomianu drugiego stopnia, rozumiejąc przez ten sposób wyrażania się, że równość (39) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy jednocześnie spełnione są warunki:

$$(41) \qquad \Delta = 0, \quad \delta = 0.$$

Miejsce geometryczne punktów, których spółrzędne spełniają równanie:

$$(42) \quad f(x, y) = A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0,$$

gdzie A, B, C, D, E, F oznaczają spółczynniki rzeczywiste, z których A, B, C nie są wszystkie trzy jednocześnie zerami, nazywać będziemy we wszystkich możliwych przypadkach linją krzywą drugiego stopnia, lub wprost krzywą drugiego stopnia. Według tego sposobu wyrażania się zaliczamy w szczególności do krzywych drugiego stopnia każde miejsce geometryczne punktów, określone równaniem (42) przy spełnieniu warunku $\Delta = 0$, t.j., jak wiemy, bądź dwie bądź też jedną linję prostą. Własnościami równania (42) przy tem założeniu zajmowaliśmy się w §§ 31, 32, 34, 35 tomu I-go. Jeżeli natomiast spełniony jest warunek $\Delta \neq 0$, to miejsce geometryczne, określone równaniem (42), nazywać będziemy istotną krzywą drugiego stopnia i własności tego miejsca geometrycznego stanowić będą główną treść II-go tomu tych wykładów.

Niech teraz będzie wielomian:

$$(43) \quad \underline{f}(x, y) = \underline{A} x^2 + 2 \underline{B} x y + \underline{C} y^2 + 2 \underline{D} x + 2 \underline{E} y + \underline{F},$$

gdzie spółczynniki $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}, \underline{E}, \underline{F}$, są iloczynami spółczynników A, B, C, D, E, F przez różny od zera, ale zresztą dowolny, czynnik l. Jeżeli przez $\underline{\delta}, \underline{\omega}, \underline{\Omega}, \underline{\Delta}, \underline{\tau}$ oznaczymy wyrażenia tak samo utworzone ze spółczynników wielomianu $\underline{f}(x, y)$, jak wyrażenia $\delta, \omega, \Omega, \Delta, \tau$ są utworzone ze spółczynników wielomianu $f(x, y)$, to wyrażenia:

$$(44)\qquad \begin{cases} (\underline{\delta}) = \dfrac{\underline{\delta}}{\sin^2\vartheta}, \quad (\underline{\omega}) = \dfrac{\underline{\omega}}{\sin^2\vartheta}, \quad (\underline{\Omega}) = \dfrac{\underline{\Omega}}{\sin^2\vartheta}, \\ (\underline{\Delta}) = \dfrac{\underline{\Delta}}{\sin^2\vartheta}, \quad (\underline{\tau}) = \dfrac{\underline{\tau}}{\sin^2\vartheta} \end{cases}$$

będą niezmiennikami wielomianu $\underline{f}(x, y)$. Pomiędzy niezmiennikami wielomianów $f(x, y)$ i $\underline{f}(x, y)$ zachodzą widocznie związki:

$$(45)\qquad \begin{cases} (\underline{\delta}) = l^2(\delta), \quad (\underline{\omega}) = l(\omega), \quad (\underline{\Omega}) = \varepsilon\, l(\Omega), \\ (\underline{\Delta}) = l^3(\Delta), \quad (\underline{\tau}) = l^2(\tau), \end{cases}$$

gdzie ε, figurujące w trzeciej równości pierwszego wiersza, równa się ± 1, zależnie od tego, czy l jest czynnikiem dodatnim, czy też ujemnym. Równania:

$$f(x, y) = 0 \quad \text{i} \quad \underline{f}(x, y) = 0$$

określają ten sam związek pomiędzy x i y, a więc tę samą krzywą drugiego stopnia. Zajmiemy się wyprowadzeniem związków, otrzymujących się ze związków (45) i niezależnych od czynnika l, t. j. wynikających ze związków (45) przez rugowanie czynnika l.

Założymy naprzód, że $\Omega \neq 0$. Wtedy przez rugowanie czynnika l z czterech związków (45) otrzymujemy równości:

$$\frac{(\underline{\omega})}{(\underline{\Omega})} = \frac{(\omega)}{\varepsilon(\Omega)}, \quad \frac{(\underline{\delta})}{(\underline{\Omega})^2} = \frac{(\delta)}{(\Omega)^2}, \quad \frac{(\underline{\Delta})}{(\underline{\Omega})^3} = \frac{(\Delta)}{\varepsilon(\Omega)^3},$$

które są skonstatowaniem, że wielkości:

$$(46)\qquad N_1 = \frac{(\omega)}{(\Omega)}, \quad N_2 = \frac{(\delta)}{(\Omega)^2}, \quad N_3 = \frac{(\Delta)}{(\Omega)^3}$$

są niezmiennikami krzywej stopnia drugiego przy zmianach spółrzędnych prostolinjowych. Na podstawie wzorów (25), (27) i (33) niezmienniki te można napisać w postaci:

$$(47)\qquad N_1 = \frac{\omega}{\Omega}, \quad N_2 = \frac{\delta \sin^2\vartheta}{\Omega^2}, \quad N_3 = \frac{\Delta \sin^4\vartheta}{\Omega^3}.$$

N_2 jest niezmiennikiem bezwzględnym, N_1 i N_3 są względnemi niezmiennikami, a kwadraty N_1^2 i N_3^2 są bezwzględnemi niezmiennikami. Niezmienniki N_1 i N_2 spełniają związek:

$$N_1^2 - 4N_2 = 1. \tag{48}$$

Jeżeli teraz przyjmiemy, że $\omega \neq 0$, to przez rugowanie czynnika l z trzech ze związków (45) będziemy mogli dojść do równości:

$$\frac{(\delta)}{(\omega)^2} = \frac{(\delta)}{(\omega)^2}, \quad \frac{(\Delta)}{(\omega)^3} = \frac{(\Delta)}{(\omega)^3},$$

i w ten sposób skonstatujemy, że wielkości:

$$N_2^{(1)} = \frac{(\delta)}{(\omega)^2}, \quad N_3^{(1)} = \frac{(\Delta)}{(\omega)^3} \tag{49}$$

są niezmiennikami krzywej stopnia drugiego przy zmianach spółrzędnych prostolinjowych. Na podstawie wzorów (25) i (33) będziemy mogli niezmienniki te przedstawić w postaci:

$$N_2^{(1)} = \frac{\delta \sin^2 \vartheta}{\omega^2}, \quad N_3^{(1)} = \frac{\Delta \sin^4 \vartheta}{\omega^3}. \tag{50}$$

Obie te wielkości są bezwzględnemi niezmiennikami. Jeżeli przy założeniu $\omega \neq 0$, także spełniona jest nierówność $\Omega \neq 0$, to niezmienniki (49) można wyrazić przez niezmienniki (46), mianowicie mamy wzory:

$$N_2^{(1)} = \frac{N_2}{N_1^2}, \quad N_3^{(1)} = \frac{N_3}{N_1^3}. \tag{51}$$

Przyjmiemy teraz, że $\delta \neq 0$. Wtedy rugowaniem czynnika l z trzech ze związków (45) będziemy mogli otrzymać równości:

$$\frac{(\omega)^2}{(\delta)} = \frac{(\omega)^2}{(\delta)}, \quad \frac{(\Delta)^2}{(\delta)^3} = \frac{(\Delta)^2}{(\delta)^3}$$

i w ten sposób stwierdzimy, że wielkości:

(52) $$N_2^{(2)} = \frac{(\omega)^2}{(\delta)}, \quad N_6^{(2)} = \frac{(\Delta)^2}{(\delta)^3}$$

są niezmiennikami bezwzględnemi krzywej stopnia drugiego przy zmianach spółrzędnych prostolinjowych. Na podstawie wzorów (25) i (33) możemy niezmienniki te przedstawić w postaci:

(53) $$N_2^{(2)} = \frac{\omega^2}{\delta \sin^2 \vartheta}, \quad N_6^{(2)} = \frac{\Delta^2 \sin^2 \vartheta}{\delta^3}.$$

Przytem zauważamy, że jeżeli przy założeniu $\delta \neq 0$ spełniona jest także nierówność $\Omega \neq 0$, to niezmienniki (52), wyrażają się przez niezmienniki (46) zapomocą wzorów:

(54) $$N_2^{(2)} = \frac{N_1^2}{N_2}, \quad N_6^{(2)} = \frac{N_3^2}{N_2^3}.$$

Jeżeli zachodzą obie nierówności: $\omega \neq 0$ i $\delta \neq 0$, to wielkość:

(55) $$N_3^{(3)} = \frac{(\Delta)}{(\omega)(\delta)} = \frac{\Delta \sin^2 \vartheta}{\omega \delta}$$

jest bezwzględnym niezmiennikiem krzywej drugiego stopnia przy zmianach spółrzędnych prostolinjowych, który w przypadkach, gdy jeszcze spełniona jest nierówność $\Omega \neq 0$, wyraża się przez niezmienniki (46) wzorem:

(56) $$N_3^{(3)} = \frac{N_3}{N_1 N_2}.$$

Wielkość (τ) jest niezmiennikiem wielomianu drugiego stopnia wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są jednocześnie równości: $\delta = 0$ i $\Delta = 0$. Wtedy $\omega \neq 0$ i wielkość:

(57) $$N_2^{(4)} = \frac{(\tau)}{(\omega)^2} = \frac{\tau \sin^2 \vartheta}{\omega^2}$$

jest niezmiennikiem warunkowym krzywej stopnia drugiego przy zmianach spółrzędnych prostolinjowych.

Wszystkie powyżej podane niezmienniki przy zmianach spółrzędnych prostolinjowych oznaczaliśmy literą N z rozmaitemi wskaźnikami. Wskaźnik dolny oznaczał zawsze stopień funkcji całkowitej spółczynników równania (42), figurującej w liczniku odnośnego niezmiennika. Literą N bez wskaźnika górnego oznaczaliśmy niezmiennik, otrzymujący się przy założeniu $\Omega \neq 0$ i mający w mianowniku dodatnią potęgę wielkości Ω. Wskaźnik górny $^{(1)}$ względnie $^{(2)}$ stosowaliśmy do oznaczenia niezmiennika, wyprowadzonego odpowiednio przy założeniu $\omega \neq 0$, względnie $\delta \neq 0$ i mającego w mianowniku dodatnią potęgę wielkości ω, względnie wielkości δ. Wskaźnik górny $^{(3)}$ przyjęliśmy dla niezmiennika wyprowadzonego przy żałożeniu $\omega\,\delta \neq 0$ i mającego w mianowniku iloczyn $\omega\,\delta$. Wreszcie wskaźnik górny $^{(4)}$ zastosowaliśmy do oznaczenia niezmiennika warunkowego, wyprowadzonego przy założeniach $\delta = 0$, $\Delta = 0$.

Pomiędzy wyprowadzonemi niezmiennikami są niezależne jedne od drugich i połączone jedne z drugiemi rozmaitemi związkami. Wzory i równości, które otrzymaliśmy poprzednio, są zarazem odpowiedziami na zapytania w kwestji wzajemnej niezależności, względnie wzajemnej zależności rozważanych tutaj niezmienników.

Już z rozważań i rachunków tomu I wynika w pewnych przypadkach szczególnych znaczenie geometryczne niektórych z tych niezmienników. Jeżeli $\Delta = 0$ i oznaczymy przez $\operatorname{tg}^2\varphi$ kwadrat stycznej któregokolwiek z kątów pomiędzy linjami prostemi, przedstawionemi wtedy przez równanie (42), to na podstawie wzoru (26), podanego w § 32 tomu I-go, mieć będziemy równość:

$$\operatorname{tg}^2\varphi = -\frac{4\,\delta\,\sin^2\vartheta}{\omega^2}, \tag{58}$$

z której przy zastosowaniu pierwszego ze wzorów (50) i pierwszego ze wzorów (53) wynikają równości:

$$\operatorname{tg}^2\varphi = -4\,N_2^{(1)} = -\frac{4}{N_2^{(2)}}, \tag{59}$$

które objaśniają znaczenie geometryczne niezmienników $N_2^{(1)}$ i $N_2^{(2)}$. Jeżeli $\delta = 0$, $\Delta = 0$ i oznaczymy przez d^2 kwadrat prostopadłej odległości linij prostych przedstawionych wtedy przez równanie

(42), to na podstawie wzoru (77) § 35 tomu I-go mieć będziemy równość:

$$d^2 = \frac{4\tau \sin^2 \vartheta}{\omega^2}, \tag{60}$$

z której wynika równość:

$$d^2 = 4 N_2^{(4)}, \tag{61}$$

wyjaśniająca znaczenie geometryczne niezmiennika warunkowego $N_2^{(4)}$. Uwagi te, odnoszące się do wielkości (59) i (61), porównać można także z rozważaniami podanemi na str. 432 i 433 tomu I-go. Jeżeli wreszcie $\Omega = 0$, $\Delta \neq 0$ i oznaczymy przez r^2 kwadrat promienia koła ze sobą samem sprzężonego, przedstawionego wtedy równaniem (42), to na podstawie rachunku podanego na str. 188 i 189 tomu I-go, mieć będziemy wzór:

$$r^2 = -\frac{8\Delta \sin^4 \vartheta}{\omega^3}, \tag{62}$$

skąd na mocy drugiego ze wzorów (50) otrzymamy równość:

$$r^2 = -8 N_3^{(1)}, \tag{63}$$

która objaśnia w szczególnym przypadku koła ze sobą samem sprzężonego znaczenie geometryczne niezmiennika $N_3^{(1)}$. W dalszym ciągu tej książki poznamy ogólnie geometryczne znaczenie niezmienników krzywej stopnia drugiego przy zmianach spółrzędnych prostolinjowych.

Zajmiemy się tu jeszcze wyznaczeniem niezmienników wielomianu (1) i niezmienników krzywej (42) przy przekształceniach jednorodnych:

$$x = a_1 \bar{x} + a_2 \bar{y}, \quad y = b_1 \bar{x} + b_2 \bar{y}, \tag{64}$$

które określają zmiany spółrzędnych prostolinjowych na spółrzędne prostolinjowe o tym samym początku spółrzędnych. Wtedy zamiast związków (16) mamy związki:

$$\left\{\begin{array}{lll} \bar{A} = \varphi(a_1, b_1), & \bar{B} = \varphi(a_1, b_1; a_2, b_2), & \bar{C} = \varphi(a_2, b_2), \\ \bar{D} = Da_1 + Eb_1, & \bar{E} = Da_2 + Eb_2, & \bar{F} = F \end{array}\right. \tag{65}$$

i łatwo dostrzec, że wtedy wszystkie wielkości:

$$(66)\quad \begin{cases} (\delta) = \dfrac{\delta}{\sin^2 \vartheta}, \quad (\omega) = \dfrac{\omega}{\sin^2 \vartheta}, \quad (\Omega) = \dfrac{\Omega}{\sin^2 \vartheta}, \\ (\Phi) = \dfrac{\Phi(-E, D)}{\sin^2 \vartheta}, \quad (\varphi) = \dfrac{\varphi(-E, D)}{\sin^2 \vartheta}, \quad F \end{cases}$$

są bezwzględnemi niezmiennikami wielomianu (1). Zauważymy przytem, że niezmienniki (33) i (40) wyrażają się przez niezmienniki (66) zapomocą wzorów:

$$(67)\qquad (\Delta) = F(\delta) - (\varphi), \quad (\tau) = (\Phi) - (\omega) F,$$

i że w szczególności druga z tych wielkości jest przy przekształceniach (64) bezwzględnym i niepodlegającym żadnym warunkom niezmiennikiem wielomianu (1), gdy tymczasem jest ona warunkowym niezmiennikiem tego wielomianu przy przekształceniach (12).

Przechodząc do określenia niezmienników krzywej (42) przy przekształceniach (64) zauważymy, że jeżeli wielomian (1) pomnożymy przez czynnik l i do spółczynników otrzymanego tą drogą wielomianu oraz do wyrażeń, zależących od tych spółczynników, zastosujemy oznaczenia, różniące się od poprzednich tylko poziomą kreską dolną, to mieć będziemy związki:

$$(68)\quad \begin{cases} \underline{(\delta)} = l^2 (\delta), \quad \underline{(\omega)} = l (\omega), \quad \underline{(\Omega)} = \varepsilon l (\Omega), \\ \underline{(\Phi)} = l^2 (\Phi), \quad \underline{(\varphi)} = l^3 (\varphi), \quad \underline{F} = l F, \end{cases}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$ zależnie od tego, czy l jest czynnikiem dodatnim, czy też ujemnym. Wszystkie niezmienniki linji krzywej (42) przy przekształceniach (12) są zarazem niezmiennikami tej krzywej przy przekształceniach (64), ale nie wyczerpują ogółu niezmienników przy przekształceniach (64). Do ogółu tych niezmienników dojdziemy widocznie przez dołączenie do poprzednich jeszcze tych niezmienników, które otrzymują się drogą podstawiania w równościach drugiego wiersza związków (68) wartości czynnika l, wynikających z równości pierwszego wiersza związków (68). Niezmienniki, otrzymujące się na tej drodze, oznaczać będziemy literą M ze wskaźnikami, które mieć będą to samo znaczenie, co odpowiednie wskaźniki przy literze N.

Jeżeli $\Omega \neq 0$, to z trzeciej równości pierwszego wiersza i z trzech równości drugiego wiersza związków (68) otrzymamy niezmienniki krzywej stopnia drugiego przy wszelkich zmianach kierunków osi spółrzędnych:

$$(69) \qquad M_1 = \frac{F}{(\Omega)}, \quad M_2 = \frac{(\Phi)}{(\Omega)^2}, \quad M_3 = \frac{(\varphi)}{(\Omega)^3}.$$

Niezmienniki te na podstawie tabelki (66) można przedstawić w postaci:

$$(70) \quad M_1 = \frac{F \sin^2 \vartheta}{\Omega}, \quad M_2 = \frac{\Phi(-E, D) \sin^2 \vartheta}{\Omega^2}, \quad M_3 = \frac{\varphi(-E, D) \sin^4 \vartheta}{\Omega^3}.$$

M_2 jest bezwzględnym niezmiennikiem, M_1 i M_3 są względnemi niezmiennikami, a kwadraty M_1^2 i M_3^2 są bezwzględnemi niezmiennikami. Na podstawie pierwszego ze wzorów (67) zachodzi równość:

$$(71) \qquad N_3 = M_1 N_2 - M_3.$$

Przy założeniu $\omega \neq 0$, otrzymamy z drugiej równości pierwszego wiersza i z trzech równości drugiego wiersza związków (68) następujące niezmienniki krzywej stopnia drugiego przy wszelkich zmianach kierunków osi spółrzędnych:

$$(72) \qquad M_1^{(1)} = \frac{F}{(\omega)}, \quad M_2^{(1)} = \frac{(\Phi)}{(\omega)^2}, \quad M_3^{(2)} = \frac{(\varphi)}{(\omega)^3},$$

które są wszystkie bezwzględnemi niezmiennikami. Niezmienniki te można napisać w postaci:

$$(73) \quad \begin{cases} M_1^{(1)} = \dfrac{F \sin^2 \vartheta}{\omega}, \quad M_2^{(1)} = \dfrac{\Phi(-E, D) \sin^2 \vartheta}{\omega^2}, \\ M_3^{(1)} = \dfrac{\varphi(-E, D) \sin^4 \vartheta}{\omega^3}. \end{cases}$$

Jeżeli przy założeniu $\omega \neq 0$ spełniona jest także nierówność $\Omega \neq 0$, to zachodzą wzory:

$$(74) \qquad M_1^{(1)} = \frac{M_1}{N_1}, \quad M_2^{(1)} = \frac{M_2}{N_1^2}, \quad M_3^{(1)} = \frac{M_3}{N_1^3}.$$

Przyjmując teraz, że $\delta \neq 0$, otrzymamy z pierwszej równości pierwszego wiersza i z trzech równości drugiego wiersza związków (68) następujące niezmienniki krzywej stopnia drugiego przy wszelkich zmianach kierunków osi spółrzędnych;

$$(75) \qquad M_2^{(2)} = \frac{F^2}{(\delta)}, \quad M_2'^{(2)} = \frac{(\Phi)}{(\delta)}, \quad M_6^{(2)} = \frac{(\varphi)^2}{(\delta)^3}.$$

Niezmienniki te można inaczej przedstawić w postaci:

$$(76) \qquad \begin{cases} M_2^{(2)} = \dfrac{F^2 \sin^2 \vartheta}{\delta}, \quad M_2'^{(2)} = \dfrac{\Phi(-E, D)}{\delta}, \\ M_6^{(2)} = \dfrac{[\varphi(-E, D)]^2 \sin^2 \vartheta}{\delta^3}. \end{cases}$$

Są one wszystkie bezwzględnemi niezmiennikami. Jeżeli przy założeniu $\delta \neq 0$ spełniona jest także nierówność $\Omega \neq 0$, to dla niezmienników (75) mamy wzory:

$$(77) \qquad M_2^{(2)} = \frac{M_1^2}{N_2}, \quad M_2'^{(2)} = \frac{M_2}{N_2}, \quad M_6^{(2)} = \frac{M_3^2}{N_2^3}.$$

Przy założeniu, że $\omega\,\delta \neq 0$, otrzymuje się przez rugowanie czynnika l z pierwszej i drugiej równości pierwszego wiersza oraz z drugiej równości drugiego wiersza związków (68) niezmiennik bezwzględny krzywej stopnia drugiego przy wszelkich zmianach kierunków osi spółrzędnych:

$$(78) \qquad M_3^{(3)} = \frac{(\varphi)}{(\omega)\,(\delta)} = \frac{\varphi(-E, D) \sin^2 \vartheta}{\omega\,\delta}.$$

Jeżeli przy nierówności $\omega\,\delta \neq 0$ spełniona jest także nierówność $\Omega \neq 0$, to dla niezmiennika $M_3^{(3)}$ zachodzi wzór:

$$(79) \qquad M_3^{(3)} = \frac{M_3}{N_1 N_2}.$$

W przypadkach, określonych równościami $\delta = 0$, $\Delta = 0$, rozważaliśmy niezmiennik warunkowy krzywej przy zmianach spółrzędnych prostolinjowych, określony wzorem (57) i oznaczony literą $N_2^{(4)}$. W przypadkach spełnienia jednego tylko warunku $\omega \neq 0$ tak samo zbudowane wyrażenie:

$$(80) \qquad \frac{(\tau)}{(\omega)^2} = \frac{\tau \sin^2 \vartheta}{\omega^2} = M_2^{(1)} - M_1^{(1)}$$

jest niezmiennikiem bezwzględnym krzywej stopnia drugiego przy wszelkich zmianach kierunków osi spółrzędnych.

Znaczenie geometryczne niezmienników przy przekształceniach (64) poznamy w dalszym ciągu tej książki.

§ 8. Bezpośrednia metoda redukcji ogólnego równania drugiego stopnia do postaci prostszych.

Niech będzie równanie drugiego stopnia:

$$(81) \quad f(x,y) = A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0,$$

gdzie A, B, C, D, E, F oznaczają spółczynniki rzeczywiste, z których A, B, C nie mogą być wszystkie trzy jednocześnie zerami. Będziemy starali się równanie to doprowadzić w różnych przypadkach do postaci prostszych zapomocą odpowiednio wybranej zmiany spółrzędnych prostolinjowych. Ponieważ A, B, C nie mogą być wszystkie jednocześnie zerami, więc mogą zajść dwa przypadki następujące: a) wielkości A i C nie są równocześnie zerami; b) wielkości A i C są równocześnie zerami, ale B jest różne od zera.

Zajmiemy się naprzód przypadkiem a) i założymy, że C jest różne od zera. Równanie (81) możemy napisać w formie:

$$C y^2 + 2 (B x + E) y + A x^2 + 2 D x + F = 0$$

i, jak wiadomo z teorji trójmianu drugiego stopnia, przedstawić w postaci:

$$C\left(y + \frac{B x + E}{C}\right)^2 + A x^2 + 2 D x + F - \frac{(B x + E)^2}{C} = 0.$$

albo w postaci:

$$C\left(y+\frac{Bx+E}{C}\right)^2+\frac{T}{C}=0, \tag{82}$$

gdzie zastosowaliśmy oznaczenie:

$$T=C(Ax^2+2Dx+F)-(Bx+E)^2.$$

Przypominając oznaczenia, które wprowadziliśmy w § 33 tomu I-go, łatwo dostrzec, że trójmian ten można napisać w formie:

$$T=\delta x^2-2k''x+\delta'.$$

Wyróżnikiem tego trójmianu jest $\delta\delta'-k''^2$, co na podstawie wzoru (44) w § 33 tomu I-go równa się $C\Delta$.

Załóżmy naprzód, że δ jest różne od zera. Trójmian T możemy wówczas przedstawić w formie:

$$T=\delta\left(x-\frac{k''}{\delta}\right)^2+\frac{C\Delta}{\delta}. \tag{83}$$

Wprowadźmy teraz nowy układ spółrzędnych X, Y, który obierzemy w taki sposób, żeby prosta:

$$x-\frac{k''}{\delta}=0$$

była osią Y-ów, a prosta:

$$y+\frac{Bx+E}{C}=0$$

osią X-ów. To przekształcenie wyraża się wzorami formy:

$$X=p\left(x-\frac{k''}{\delta}\right),\quad Y=q\left(y+\frac{Bx+E}{C}\right), \tag{84}$$

gdzie p i q są odpowiednio dobranemi czynnikami według § 21 w tomie I-ym. Czynniki te są następujące:

$$p=\varepsilon'\frac{1}{C}\sqrt{B^2+C^2-2BC\cos\vartheta},\quad q=\varepsilon'', \tag{85}$$

gdzie $\varepsilon'=\pm 1$ i $\varepsilon''=\pm 1$. Jeżeli zapomocą pierwszego ze wzorów (84) przekształcimy wyrażenie (83) na T, to otrzymamy:

$$T = \delta \frac{X^2}{p^2} + \frac{C\Delta}{\delta},$$

a jeżeli wzory (84) zastosujemy do równania (82), to dojdziemy do następującego równania:

$$C Y^2 + \frac{\delta X^2}{C p^2} + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{86}$$

Niech teraz będzie $\delta = 0$. Wtedy otrzymamy:

$$T = -2 k'' x + \delta' \tag{87}$$

i załóżmy naprzód, że $k'' \neq 0$. Wprowadźmy znów nowe osie X, Y na podstawie równań formy:

$$X = \bar{p}(-2 k'' x + \delta'), \quad Y = \bar{q}\left(y + \frac{B x + E}{C}\right), \tag{88}$$

gdzie spółczynniki $\bar{p}$ i $\bar{q}$ mają wartości:

$$\bar{p} = \frac{\varepsilon'}{2 k'' C}\sqrt{B^2 + C^2 - 2 B C \cos \vartheta}, \quad \bar{q} = \varepsilon'', \tag{89}$$

przyczem $\varepsilon' = \pm 1$ i $\varepsilon'' = \pm 1$. Wówczas równanie (81) doprowadzimy do postaci:

$$C^2 Y^2 + \frac{X}{\bar{p}} = 0. \tag{90}$$

Jeżeli zaś $k'' = 0$, to można będzie wprowadzić nowy układ X, Y na mocy równań:

$$X = p x, \quad Y = q\left(y + \frac{B x + E}{C}\right), \tag{91}$$

gdzie p i q mają znaczenia (85), i wówczas równanie (81) doprowadzimy do formy:

$$C^2 Y^2 + \delta' = 0. \tag{92}$$

W ten sposób wykonaliśmy przekształcenie równania drugiego stopnia we wszystkich przypadkach, w których $C \neq 0$. Gdyby było $C = 0$, a $A \neq 0$, to możnaby przeprowadzić zupełnie

analogiczne rachunki i uzyskać analogiczne rezultaty. Rozważanie tego przypadku pomijamy.

Zwrócimy się teraz do przypadku b) t.j. założymy, że $A = C = 0$, a więc $B \neq 0$. Wówczas mamy równanie:

$$2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{93}$$

Ale zwróćmy uwagę na to, że zachodzi równość:

$$B\left(x + \frac{E}{B}\right)\left(y + \frac{D}{B}\right) = Bxy + Dx + Ey + \frac{ED}{B},$$

skąd wynika, że równanie (93) można w tym przypadku napisać w formie:

$$2B\left(x + \frac{E}{B}\right)\left(y + \frac{D}{B}\right) = 2\frac{ED}{B} - F,$$

a zważywszy, że przy $A = C = 0$ mamy:

$$\Delta = 2BDE - B^2F,$$

widzimy, że równanie (93) można wówczas przedstawić w postaci:

$$2B^3\left(x + \frac{E}{B}\right)\left(y + \frac{D}{B}\right) = \Delta. \tag{94}$$

Wprowadzając teraz nowy układ spółrzędnych X, Y określony wzorami:

$$X = \varepsilon'\left(x + \frac{E}{B}\right), \quad Y = \varepsilon''\left(y + \frac{D}{B}\right), \tag{95}$$

gdzie $\varepsilon' = \pm 1$ i $\varepsilon'' = \pm 1$, dojdziemy do równania:

$$2B^3\varepsilon'\varepsilon''XY = \Delta. \tag{96}$$

§ 9. Krzywe drugiego stopnia, określone przez uproszczone równania.

W poprzednim paragrafie doszliśmy w rozmaitych przypadkach do prostszych postaci równań stopnia drugiego (86), (90), (92) i (96). Zajmiemy się teraz krótkim przeglądem linij krzywych, określonych przez te prostsze równania.

Rozpoczniemy od równania (86). Niech będzie naprzód $\Delta \neq 0$ i $\delta > 0$. Wówczas mnożąc lewą stronę równania (86) przez $\frac{\delta}{\Delta}$, napiszemy je w postaci:

$$\frac{X^2}{\frac{C\Delta p^2}{\delta^2}} + \frac{Y^2}{\frac{C\Delta}{C^2\delta}} + 1 = 0,$$

z której widzimy, że znak obu mianowników pierwszych dwóch wyrazów tego równania jest ten sam: ujemny, gdy $C\Delta < 0$, dodatni zaś, gdy $C\Delta > 0$. Niech będzie naprzód $C\Delta < 0$. W tym przypadku $\sqrt{\delta}$ i $\sqrt{-C\Delta}$ będą liczbami rzeczywistemi, zaś wyrażenia:

$$(97) \qquad a' = \left| \frac{p\sqrt{-C\Delta}}{\delta} \right|, \quad b' = \left| \frac{\sqrt{-C\Delta}}{C\sqrt{\delta}} \right|,$$

będą dodatniemi liczbami rzeczywistemi i będziemy mogli przedstawić uważane równanie w kształcie:

$$(98) \qquad \frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} = 1.$$

Rozwiązując równanie to względem Y, otrzymujemy:

$$Y = \eta\, b' \sqrt{1 - \frac{X^2}{a'^2}},$$

gdzie $\eta = \pm 1$. Widzimy stąd, że każdemu rzeczywistemu X, mniejszemu co do wartości bezwzględnej od a', odpowiadają dwie rzeczywiste wartości na Y o tej samej wartości bezwzględnej mniejszej od b' i o różnych znakach oraz, że wartościom $X = \pm a'$ odpowiada jedna wartość $Y = 0$. Rozwiązując zaś równanie (98) względem X otrzymujemy:

$$X = \varepsilon\, a' \sqrt{1 - \frac{Y^2}{b'^2}},$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$. Widzimy przeto, że każdemu rzeczywistemu Y, mniejszemu co do wartości bezwzględnej od b', odpowiadają dwie rzeczywiste wartości na X o tej samej wartości bezwzględnej mniejszej od a' i o różnych znakach oraz, że wartościom $Y = \pm b'$

odpowiada jedna wartość $X = 0$. Linja krzywa przebiega tak, jak to wskazuje fig. 15, a w dalszym ciągu tej książki udowodnimy przez nową zmianę układu spółrzędnych, że krzywa ta jest elipsą. Krzywą tą zajmowaliśmy się już w § 1, a w dalszym ciągu nazywać ją będziemy także elipsą rzeczywistą.

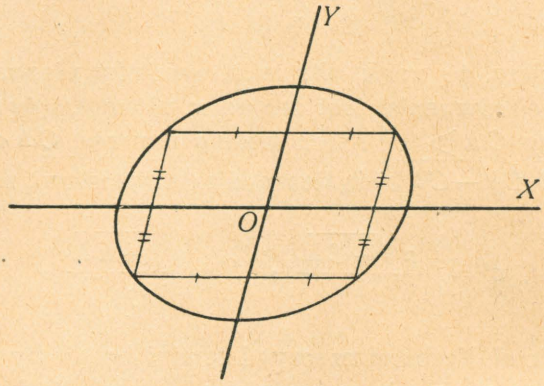

Fig. 15.

Jeżeli mamy $\delta > 0$ i $C\Delta > 0$, to $\sqrt{C\Delta}$ jest liczbą rzeczywistą i $\sqrt{\delta}$ jest także liczbą rzeczywistą, zaś wyrażenia:

$$a' = \left| \frac{p\sqrt{C\Delta}}{\delta} \right|, \quad b' = \left| \frac{\sqrt{C\Delta}}{C\sqrt{\delta}} \right|$$

są dodatniemi liczbami rzeczywistemi i równanie (86) można napisać w postaci:

$$\frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} + 1 = 0. \tag{99}$$

Ponieważ pierwsze dwa wyrazy stojące po lewej stronie tego równania są dla rzeczywistych X i Y obą nieujemne, przeto na krzywej niema żadnych punktów rzeczywistych. Krzywa ta nazywa się elipsą urojoną.

Niech będzie teraz $\Delta = 0$ i $\delta > 0$. Wówczas równanie (86) będzie:

$$C^2 Y^2 + \frac{\delta X^2}{p^2} = 0 \tag{100}$$

i, jak wiemy z rozważań § 31 w tomie I-ym, przedstawia ono dwie proste urojone ze sobą sprzężone, spotykające się w punkcie $X=0$, $Y=0$.

Przejdźmy teraz do przypadku $\Delta \neq 0$ i $\delta < 0$. Równanie (86) znów przedstawimy w postaci:

$$\frac{X^2}{\frac{C\Delta p^2}{\delta^2}} + \frac{Y^2}{\frac{C\Delta}{C^2\delta}} + 1 = 0. \tag{101}$$

Znaki mianowników pierwszych dwóch wyrazów tego równania są różne jeden od drugiego. Załóżmy naprzód, że $C\Delta < 0$. Wielkości:

$$a' = \left| \frac{p\sqrt{-C\Delta}}{\delta} \right|, \quad b' = \left| \frac{\sqrt{-C\Delta}}{C\sqrt{-\delta}} \right| \tag{102}$$

są dodatniemi liczbami rzeczywistemi i stosując te oznaczenia, mieć będziemy równanie:

$$\frac{X^2}{a'^2} - \frac{Y^2}{b'^2} = 1. \tag{103}$$

Jeżeli równanie to rozwiążemy względem Y, to otrzymamy:

$$Y = \eta\, b' \sqrt{\frac{X^2}{a'^2} - 1}, \tag{104}$$

gdzie $\eta = \pm 1$, skąd widzimy, że każdemu rzeczywistemu X większemu co do bezwzględnej wartości od a' odpowiadają dwie wartości na Y o tej samej wartości bezwzględnej i różnych znakach oraz, że wartościom $X = \pm a'$ odpowiada jedna wartość $Y = 0$. Jeżeli zaś równanie (103) rozwiążemy względem X, to mieć będziemy:

$$X = \varepsilon\, a' \sqrt{\frac{Y^2}{b'^2} + 1},$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$, skąd wnosimy, że każdemu rzeczywistemu Y odpowiadają dwie wartości na X o tej samej wartości bezwzględnej większej od a' i różnych znakach oraz, że niema takich rzeczywistych wartości na Y, którym odpowiadałaby wartość $X = 0$ Niech będzie nadto równanie:

$$\frac{X^2}{a'^2} - \frac{Y^2}{b'^2} = 0 \tag{105}$$

otrzymujące się z równania (103), jeżeli jego prawą stronę zastąpimy przez zero. Równanie (105) przedstawia dwie proste rzeczywiste, mianowicie:

$$Y = \zeta \frac{b'}{a'} X, \tag{106}$$

gdzie $\zeta = \pm 1$. Prosta równoległa do osi Y, której spółrzędna X czyni zadość warunkowi $|X| > a'$, spotyka krzywą w dwóch punk-

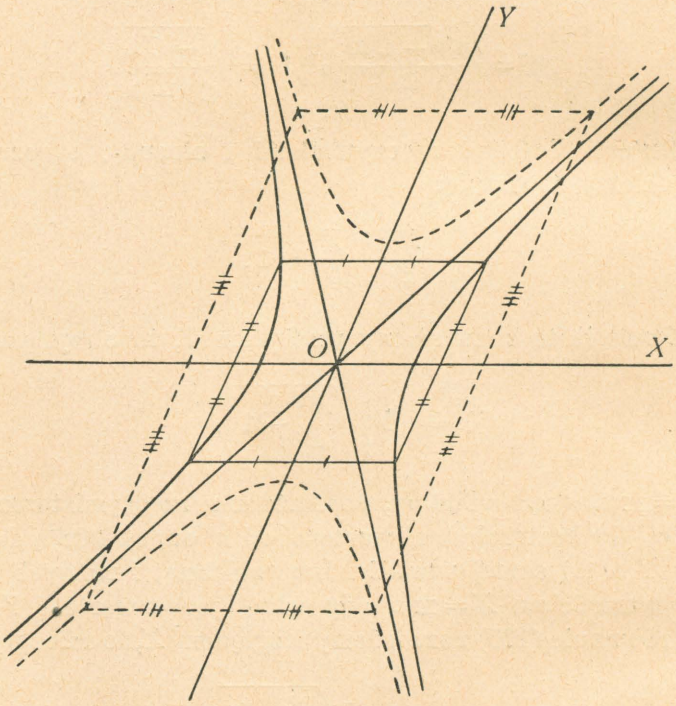

Fig. 16.

tach, których spółrzędne Y określone są wzorem (104), a uważane proste w dwóch punktach, których spółrzędne Y określone są wzorem (106). Odległość któregokolwiek z tych punktów położonych na prostej (106) od któregokolwiek z tych punktów, położonych na krzywej, równa się bezwzględnej wartości różnicy:

$$\frac{b'}{a'}(\zeta X - \eta \sqrt{X^2 - a'^2}).$$

Łatwo dostrzec, że różnicę tę można napisać w postaci:

$$\frac{\zeta a' b'}{X + \zeta \eta \sqrt{X^2 - a'^2}}.$$

Przypuśćmy teraz, że spółrzędna X zmierza do nieskończoności zachowując stały znak. We wszystkich przypadkach, w których $\zeta \eta$ równa się $+1$, gdy X jest dodatnie, i w których $\zeta \eta$ równa się -1, gdy X jest ujemne, różnica ta przy dążeniu X do nieskończoności zmierza do zera. Z rozważań, które przeprowadzimy w dalszym ciągu tej książki wyniknie, że krzywa (103) jest hiperbolą, o której już była mowa w § 1. Z dalszych rozważań wyniknie także, że prosta (106), odpowiadająca $\zeta = +1$, jest asymptotą hiperboli w tych częściach krzywej, dla których stosunek $Y : X$ jest dodatni, prosta zaś (106), odpowiadająca $\zeta = -1$, jest asymptotą hiperboli w tych częściach krzywej, dla których stosunek $Y : X$ jest ujemny. Na fig. 16 krzywa (103) oznaczona jest linją nieprzerywaną.

Niech będzie $C\Delta > 0$. Wielkości:

$$(107) \qquad a' = \left| \frac{p\sqrt{C\Delta}}{\delta} \right|, \quad b' = \left| \frac{\sqrt{C\Delta}}{C\sqrt{-\delta}} \right|$$

są dodatniemi liczbami rzeczywistemi i równanie (86) można napisać w postaci:

$$(108) \qquad \frac{Y^2}{b'^2} - \frac{X^2}{a'^2} = 1.$$

Ta linja krzywa mieć będzie kształt analogiczny do krzywej, o której dopiero co była mowa, ale przecinać będzie oś Y-ów. Spółczynniki równania (86) mają w odróżnianych tu przypadkach wartości wogóle różne jedne od drugich, chociaż ciągle tak samo są oznaczane. Przytem jednak zdarzyć się może, że wartości na a', b' określone wzorami (102) i (107) są te same. Linja przerywana na fig. 16 przedstawia właśnie krzywą (108) w tym przypadku. Przekonamy się w dalszym ciągu, że wtedy równania (103) i (108) przedstawiają hiperbole ze sobą sprzężone, o których już była mowa w § 1.

Wreszcie w przypadku $\Delta = 0$ i $\delta < 0$ równanie (86) mieć będzie postać:

$$C^2 Y^2 + \frac{\delta X^2}{p^2} = 0 \tag{109}$$

i przedstawiać będzie dwie proste rzeczywiste spotykające się w punkcie $X = 0$, $Y = 0$. Taką parą prostych zajmowaliśmy się już w § 31 w tomie I-ym.

Drugi z uważanych typów równań, mianowicie równanie (90), otrzymaliśmy przez redukcję równania ogólnego przy założeniu $\Delta \neq 0$ i $\delta = 0$. Oznaczając:

$$p' = -\frac{1}{2p\,C^2}$$

napiszemy równanie (90) w postaci:

$$Y^2 = 2p'X. \tag{110}$$

Jeżeli $p' > 0$ natenczas każdemu dodatniemu X odpowiadają dwie rzeczywiste wartości Y, równe co do wartości bezwzględnej, a różniące się tylko znakiem; przytem jeżeli X rośnie nieograniczenie wartość absolutna Y też rośnie nieograniczenie. Dla $X = 0$ mamy $Y = 0$, a ujemnym X nie odpowiadają żadne rzeczywiste wartości na Y. Jeżeli $p' < 0$, natenczas możemy powtórzyć te same rozważania, tylko to co stosowało się do dodatnich X teraz stosować się będzie do ujemnych. W dalszych rozważaniach udowodnimy, że każda z tych krzywych jest parabolą, nadmieniając tu, że krzywa ta była już przedmiotem rozważań naszych w § 3. Na fig. 17 narysowane są dwie parabole odpowiadające dwóm spółczynnikom p' o tej samej wartości bezwzględnej, a różnych znaków, przyczem założeniu $p' > 0$ odpowiada krzywa narysowana linją ciągłą, a założeniu $p' < 0$ krzywa narysowana linją przerywaną.

Typ następny, mianowicie równanie (92), otrzymuje się przy spełnieniu równości $\Delta = 0$ i $\delta = 0$. Równanie (92) określa albo dwie proste równoległe rzeczywiste, albo dwie proste równolegle urojone sprzężone, albo też jedną prostą podwójną. Takiemi równaniami i odróżnieniem wymienionych tu przypadków zajmowaliśmy się już w § 34 tomu I-go.

Wreszcie pozostaje do rozważenia równanie (96). Może tu być naprzód $\Delta \neq 0$ i $\delta < 0$. Wtedy, wprowadzając oznaczenie:

$$r = \varepsilon' \varepsilon'' \frac{\Delta}{2 B^3},$$

mieć będziemy równanie:

(111) $$X Y = r.$$

Jeżeli $r > 0$, to krzywa mieści się w częściach płaszczyzny, dla których znaki spółrzędnych X i Y są bądź oba dodatnie bądź

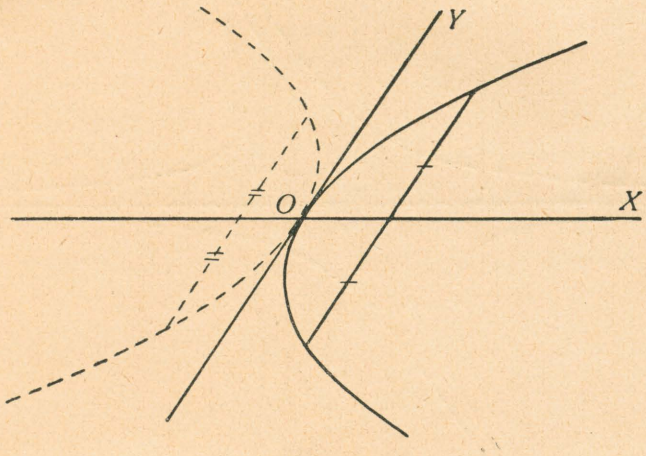

Fig. 17.

oba ujemne. Z równania (111) widać, że gdy jedna ze spółrzędnych X, Y dąży do nieskończoności, wówczas druga dąży do zera. Zobaczymy w dalszym ciągu, że krzywa ta jest h i p e r b o l ą, którą zajmowaliśmy się w § 1, i że osie spółrzędnych są jej asymptotami. W przypadku $r < 0$ otrzymamy rezultat analogiczny z tą tylko różnicą, że krzywa mieści się w tych częściach płaszczyzny, dla których spółrzędne X, Y mają znaki różne. Na fig. 18 narysowane są krzywe odpowiadające dwóm wartościom na r, różniącym się tylko znakiem, przyczem krzywa naznaczona linją ciągłą odpowiada wartości dodatniej, a krzywa naznaczona linją przerywaną wartości ujemnej. Są to h i p e r b o l e z e s o b ą s p r z ę ż o n e.

Pozostaje jeszcze przypadek $\Delta = 0$ i $\delta < 0$, w którym równanie (96) jest:

$$XY = 0. \tag{112}$$

Przedstawia ono dwie proste spotykające się rzeczywiste, które są osiami spółrzędnych X, Y.

Przeprowadzona w niniejszym paragrafie redukcja ogólnego równania drugiego stopnia do równań prostszych i przegląd krzy-

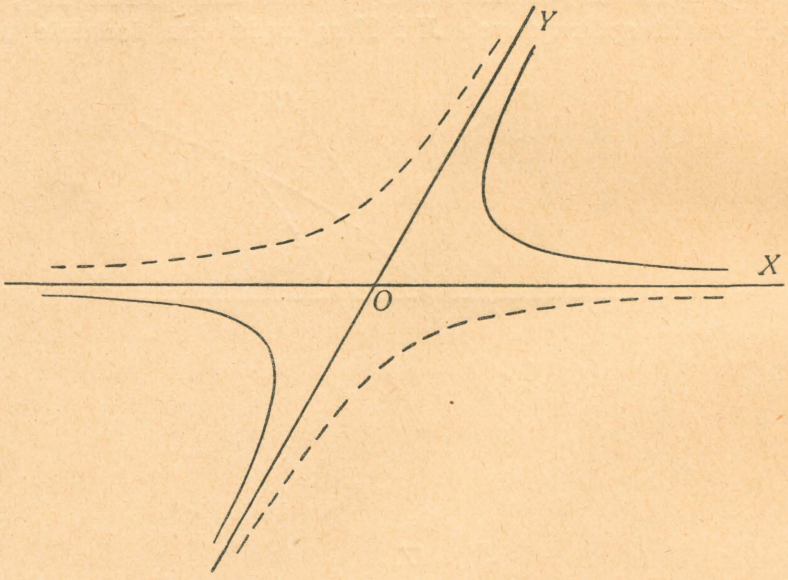

Fig. 18.

wych, określonych temi prostszemi równaniami, mogą być z korzyścią używane w rozmaitych przypadkach konkretnych i zastosowaniach. Pod względem teoretycznym jednak pożądane jest postępowanie, które obejmowałoby odrazu wszystkie krzywe o pewnych własnościach, wyodrębniających je od innych krzywych, określonych także równaniami stopnia drugiego. Metoda użyta w §§ 8 i 9 cechy tej nie posiada. Prócz rozważonych przypadków przy założeniu $C \neq 0$ prowadzi ona do analogicznych przypadków przy założeniu $A \neq 0$. Nadto w przypadkach, w których $A = C = 0$, prowadzi ona do hiperboli i prostych spotykających się rzeczywistych, które zachodzą także i przy założeniu

$C \neq 0$, albo $A \neq 0$. Już stąd wynika, że dla klasyfikacji krzywych drugiego stopnia odróżnianie wymienionych tu założeń odnośnie do spółczynników przy wyrazach drugiego stopnia uważanego równania nie jest istotne. Na podstawie powyższych rozważań można wyodrębnić kryterja konieczne i wystarczające zachodzenia krzywych rozmaitych postaci. Ale w przypadkach, scharakteryzowanych równością $\Delta = 0$, zadanie klasyfikacji w zupełności rozwiązane zostało już w § 34 tomu I, a w ciągu dalszym traktować będziemy zadania klasyfikacji i redukcji jeszcze na innej drodze, mianowicie oprzemy je we wszystkich możliwych przypadkach na zależnościach, które zachodzą pomiędzy spółczynnikami równania drugiego stopnia i geometrycznemi własnościami krzywej, określonej przez to równanie.

§ 10. O równaniu drugiego stopnia, określającem punkty wspólne krzywej drugiego stopnia i właściwej linji prostej.

Punkty wspólne linji krzywej, określonej równaniem:

$$(81)\quad f(x,y) = A\,x^2 + 2\,B\,x\,y + C\,y^2 + 2\,D\,x + 2\,E\,y + F = 0$$

i linji prostej, określonej równaniami:

$$(8)\qquad x = a + \lambda\,r,\quad y = b + \mu\,r,$$

spełniają na mocy wzoru (9) równanie:

$$(113)\qquad \varphi(\lambda,\mu)\,r^2 + 2\,(\alpha\,\lambda + \beta\,\mu)\,r + f(a,b) = 0.$$

Jeżelibyśmy linję prostą określili ogólniejszemi równaniami:

$$(10)\qquad x = a + u\,t,\quad y = b + v\,t,$$

to dla punktów wspólnych krzywej (81) i prostej (10) mielibyśmy na podstawie wzoru (11) równanie:

$$(114)\qquad \varphi(u,v)\,t^2 + 2\,(\alpha\,u + \beta\,v)\,t + f(a,b) = 0.$$

Rozważania niniejszego paragrafu oprzemy na tem ostatniem równaniu.

Wyprowadzimy naprzód pewne wzory, odnoszące się do wielkości, które zachodzą w tem równaniu.

Weźmy naprzód pod uwagę wyznacznik:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A, & B, & D \\ B, & C, & E \\ D, & E, & F \end{vmatrix}.$$

Jeżeli elementy pierwszego wiersza tego wyznacznika pomnożymy przez a, elementy zaś drugiego wiersza przez b i jeżeli otrzymane iloczyny dodamy do odpowiednich elementów trzeciego wiersza, to mieć będziemy wzór:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A, & B, & D \\ B, & C, & E \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{vmatrix}.$$

Mnożąc zaś elementy pierwszej kolumny ostatniego wyznacznika przez a, elementy zaś drugiej kolumny przez b i dodając iloczyny do odpowiednich elementów trzeciej kolumny, mieć będziemy równość:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A, & B, & \alpha \\ B, & C, & \beta \\ \alpha, & \beta, & f(a, b) \end{vmatrix}.$$

Obliczenie tego ostatniego wyznacznika prowadzi do tożsamości:

$$\Delta = f(a, b)\,\delta - (C\,\alpha^2 + A\,\beta^2 - 2\,B\,\alpha\,\beta), \tag{115}$$

którą właśnie chcieliśmy wyprowadzić.

Następnie zajmiemy się wyróżnikiem równania (114). Oznaczając wyróżnik ten przez w, mieć będziemy wzór:

$$w = \varphi(u, v)\,f(a, b) - (\alpha\,u + \beta\,v)^2. \tag{116}$$

Weźmy pod uwagę punkt linji prostej (10), różny od punktu a, b, ale zresztą wybrany dowolnie i oznaczmy spółrzędne tego punktu przez p, q, a odpowiadającą temu punktowi wartość parametru t przez τ. Wtedy mieć będziemy związki:

$$\tau\,u = p - a, \quad \tau\,v = q - b$$

a na podstawie tych związków zastąpimy równość (116) przez równość:

$$(117)\quad \tau^2 w = f(a, b)\,\varphi(p - a, q - b) - [\alpha(p - a) + \beta(q - b)]^2.$$

Ale mamy widocznie:

$$\varphi(p - a, q - b) = \varphi(a, b) + \varphi(p, q) - 2\varphi(a, b; p, q),$$

skąd przy uwzględnieniu wzorów:

$$\varphi(a, b) = f(a, b) - 2Da - 2Eb - F,$$

$$\varphi(p, q) = f(p, q) - 2Dp - 2Eq - F,$$

$$\varphi(a, b; p, q) = (\alpha - D)p + (\beta - E)q$$

otrzymujemy:

$$\varphi(p - a, q - b) = f(a, b) + f(p, q) - 2(\alpha p + \beta q + \gamma).$$

Ponieważ zaś zachodzi równość:

$$\alpha(p - a) + \beta(q - b) = \alpha p + \beta q + \gamma - f(a, b),$$

przeto z równości (117) wynika wzór:

$$(118)\qquad \tau^2 w = f(a, b)\,f(p, q) - (\alpha p + \beta q + \gamma)^2.$$

Tym wzorem wyróżnik równania (114) określony jest przez spółrzędne dwóch różnych od siebie punktów, położonych na prostej (10). W dalszych częściach tych wykładów poznamy także inne sformułowanie zadania o punktach wspólnych linji prostej z linją krzywą stopnia drugiego, a w związku z tem sformułowaniem także inne uzasadnienie równości (118).

Rozważymy teraz różne przypadki, które zajść mogą przy stosowaniu równania (114).

Równość (114) jest spełniona przy każdej wartości wielkości t, gdy zachodzą jednocześnie równości:

$$(119)\qquad \varphi(u, v) = 0,\quad \alpha u + \beta v = 0,\quad f(a, b) = 0.$$

W tym przypadku wszystkie punkty linji prostej (10) leżą na krzywej określonej równaniem (81). Z rozważań § 34 tomu I-go wynika, że wtedy spełniona jest równość $\Delta = 0$. Równość tę

skonstatować można także na podstawie wzoru (115). Jeżeli wielkości α i β nie są obie jednocześnie zerami, to z pierwszych dwóch z warunków (119) wynika:

$$C\alpha^2 + A\beta^2 - 2B\alpha\beta = 0, \tag{120}$$

a więc naskutek tej równości i trzeciego z warunków (119) otrzymujemy na mocy wzoru (115) równość $\Delta = 0$. Jeżeli zaś α i β są obie jednocześnie zerami, to równość (120) także jest spełniona, a więc z warunków (119) wynika także równość $\Delta = 0$. Wyróżnik w jest przy spełnieniu równości (119) równy zeru.

Równość (114) nie jest spełniona przy żadnej skończonej wartości parametru t, gdy zachodzą warunki:

$$\varphi(u, v) = 0, \quad \alpha u + \beta v = 0, \quad f(a, b) \neq 0. \tag{121}$$

W tym przypadku $\Delta = 0$, gdy $\delta = 0$, a $\Delta \neq 0$, gdy $\delta \neq 0$. Wyróżnik w jest w tym przypadku równy zeru.

Równość (114) jest równaniem pierwszego stopnia względem t, gdy spełnione są warunkl:

$$\varphi(u, v) = 0, \quad \alpha u + \beta v \neq 0 \tag{122}$$

i wtedy otrzymuje się z niego na t wartość:

$$t = -\frac{f(a, b)}{2(\alpha u + \beta v)}. \tag{123}$$

W tym przypadku wyróżnik w jest różny od zera, a wyznacznik Δ jest równy zeru, albo też różny od zera, zależnie od innych warunków.

Równość (114) jest równaniem drugiego stopnia, gdy spełniony jest warunek:

$$\varphi(u, v) \neq 0. \tag{124}$$

Wtedy równaniu (114) czynią zadość wartości na t, określone wzorem:

$$t = \frac{1}{\varphi(u, v)} \left[-(\alpha u + \beta v) + \eta \sqrt{-w} \right], \tag{125}$$

gdzie $\eta = \pm 1$. Wzór ten wyznacza dwie wartości na t, czyli dwa pierwiastki równania (114), gdy $w \neq 0$, natomiast jedną wartość

na t, czyli jeden pierwiastek równania (114) zwany podwójnym, gdy $w = 0$. Wyznacznik Δ jest wtedy albo różny od zera, albo równy zeru, zależnie od innych warunków.

Zauważmy tutaj, że jeżeliby wielkości a, b, u, v miały wartości rzeczywiste, to wzór (125) określałby przy spełnieniu nierówności $w < 0$ dwa różne jeden od drugiego pierwiastki rzeczywiste, przy spełnieniu równości $w = 0$ jeden pierwiastek rzeczywisty podwójny, a wreszcie przy spełnieniu warunku $w > 0$ dwa pierwiastki urojone ze sobą sprzężone.

Przypuśćmy teraz, że litery a, b, u, v, zachodzące w równaniach (10), oznaczają wielkości, które zmieniają się w sposób ciągły. Dla każdego systemu wartości tych wielkości, w którym u, v nie są jednocześnie zerami, równania (10) określają właściwą linję prostą, dla każdego zaś systemu wartości tych wielkości, w którym u, v są jednocześnie zerami, równania (10) określają punkt właściwy.

Niech będzie proces graniczny, naskutek którego twór wyznaczony równaniami (10) dąży do określonej prostej właściwej i przytem zachodzą równości:

$$(126)\quad \lim \varphi(u, v) = L, \quad \lim (\alpha u + \beta v) = M, \quad \lim f(a, b) = N,$$

gdzie L, M, N oznaczają określone skończone wartości. Zajmiemy się rozważaniem pewnych szczególnych przypadków takiego granicznego procesu, będących w bliskim związku z zadaniem o punktach wspólnych linji krzywej stopnia drugiego i właściwej linji prostej.

Jeżeli naprzód zachodzi proces graniczny, naskutek którego spełnione są równości:

$$(127)\qquad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

to w granicy równaniu (114) czyni zadość każda dowolna wartość wielkości t, a twór (10) dąży do prostej, należącej do linij prostych, określonych równaniem (81).

Zauważmy teraz, że mnożąc i dzieląc prawą stronę wzoru (125) przez wyrażenie:

$$\alpha u + \beta v + \eta \sqrt{-w}$$

i wykonywając skrócenie przez $\varphi(u, v)$, dochodzimy do wzoru:

$$t = -\frac{f(a, b)}{\alpha u + \beta v + \eta \sqrt{-w}}. \tag{128}$$

Niech będzie następnie proces graniczny, naskutek którego spełnione są warunki:

$$L = 0, \quad M \neq 0. \tag{129}$$

Oznaczmy przez ω amplitudę zasadniczą liczby M i niech będzie $\eta' = \pm 1$, zależnie od wartości tej amplitudy. Jeżeli mianowicie spełnione są warunki $0 \leqslant \omega < \pi$, to przyjmiemy $\eta' = +1$, jeżeli zaś spełnione są warunki $\pi \leqslant \omega < 2\pi$, to przyjmiemy $\eta' = -1$. Gdy $\eta = \eta'$, wówczas zastosowanie w uważanym procesie wzoru (125) nie prowadzi do żadnej określonej wartości, natomiast zastosowanie wzoru (128) prowadzi do wartości $-N : 2M$. Jest to ta sama wartość, która dla granicznych wartości wielkości a, b, u, v otrzymuje się ze wzoru (123). Gdy $\eta = -\eta'$, wówczas ze wzoru (125) wynika nieskończona wartość na t. W ten sposób dochodzimy do wyniku, że gdy zachodzi proces graniczny, określony warunkami (129), wówczas jeden z pierwiastków równania (114) dąży do wartości nieskończenie wielkiej, drugi zaś do wartości skończonej, która dla granicznych wartości wielkości a, b, u, v otrzymuje się ze wzoru (123).

Wreszcie rozważymy proces graniczny, naskutek którego spełnione są warunki:

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N \neq 0. \tag{130}$$

Wtedy zastosowanie wzoru (125) nie prowadzi przy żadnym ze znaków $\eta = \pm 1$ do określonej wartości, natomiast zastosowanie wzoru (128) daje przy każdym z tych znaków wartość nieskończenie wielką. To znaczy, że gdy zachodzi proces graniczny, określony warunkami (130), wówczas oba pierwiastki równania (114) dążą do nieskończoności.

W § 38 tomu I-go dyskutowaliśmy, wśród innych zadań, zadanie punktów wspólnych koła i prostej. Dyskusje te zawierały w postaci różnej od stosowanej obecnie rozważania procesów granicznych, będących w bliskim związku z tem szczególnem zadaniem. Rachunki i rozważania niniejszego paragrafu stosować będziemy w dalszych częściach tej książki w zadaniach bardziej ogólnych.

ROZDZIAŁ TRZECI.

Zagadnienia dotyczące środków, stycznych i asymptot krzywych stopnia drugiego.

§ 11. Dwukierunki asymptotyczne.

Niech będzie znowu ogólne równanie drugiego stopnia:

$$(1)\quad f(x,y) = A\,x^2 + 2\,B\,x\,y + C\,y^2 + 2\,D\,x + 2\,E\,y + F = 0,$$

gdzie A, B, C, D, E, F oznaczają spółczynniki rzeczywiste, z których A, B, C, nie są wszystkie trzy jednocześnie zerami. Weźmy nadto pod uwagę linję prostą określoną uogólnionemi równaniami osiowemi:

$$(2)\qquad x = a + u\,t,\quad y = b + v\,t.$$

Wtedy, tak samo jak w § 10, można będzie równanie, określające punkty wspólne krzywej (1) i prostej (2), napisać w postaci:

$$(3)\qquad \varphi(u,\,v)\,t^2 + 2\,(\alpha\,u + \beta\,v)\,t + f(a,b) = 0.$$

Przypuśćmy, że wielkości a, b, u, v zmieniają się w sposób ciągły i podlegają procesowi granicznemu, naskutek którego wielkości u, v nie dążą obie jednocześnie do zer, a przytem zachodzą równości:

$$(4)\quad \lim \varphi(u,v) = L,\quad \lim(\alpha\,u + \beta\,v) = M,\quad \lim f(a,b) = N,$$

gdzie L, M, N mają określone skończone wartości. Jeżeli uwzględnimy wyniki, które uzyskaliśmy w § 10 odnośnie do rozważo-

nych tam procesów granicznych, to będziemy mogli wypowiedzieć wniosek następujący. Warunek konieczny i wystarczający, żeby albo zmienna prosta (2) dążyła do jednej z prostych określonych równaniem (1), albo też, żeby przynajmniej jeden z punktów wspólnych krzywej (1) i prostej (2) oddalał się do nieskończoności, polega na tem, żeby było $L = 0$. W każdym z tych przypadków powiemy, że prosta graniczna ma dwukierunek asymptotyczny krzywej stopnia drugiego (1). Widoczne, że jeżeli przez λ, μ oznaczymy spółczynniki kierunkowe, względnie spółczynniki pseudokierunkowe kierunków, względnie pseudokierunków, należących do dwukierunku asymptotycznego, to warunkiem koniecznym i wystarczającym, któremu muszą czynić zadość λ, μ, będzie równanie:

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0. \tag{5}$$

Linja prosta na fig. 19 ma w stosunku do narysowanej tam linji krzywej dwukierunek asymptotyczny.

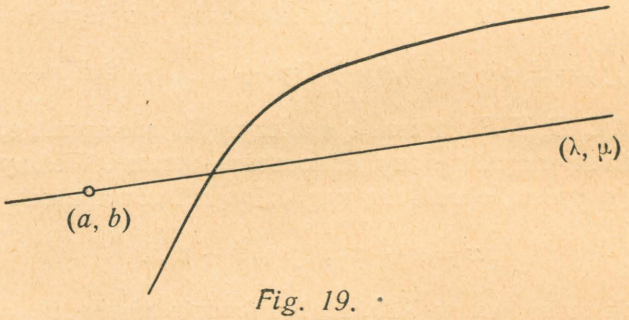

Fig. 19.

W § 31 tomu I-go rozważaliśmy własności równania:

$$\varphi(x, y) = 0$$

i korzystając z wyników tych rozważań, możemy odnośnie do stosunków $\mu : \lambda$, spełniających równanie (5), wypowiedzieć wnioski następujące. Gdy $\delta > 0$, wówczas równanie (5) określa na stosunek $\mu : \lambda$ dwie wartości urojone ze sobą sprzężone; gdy $\delta < 0$, wówczas równanie (5) określa na stosunek $\mu : \lambda$ dwie różne jedna od drugiej wartości rzeczywiste; gdy wreszcie $\delta = 0$, wówczas równanie (5) określa na stosunek $\mu : \lambda$ jedną wartość rzeczywistą.

Stąd wynika naprzód, że przy spełnieniu nierówności $\delta > 0$ linja krzywa (1) stopnia drugiego ma dwa dwukierunki asymptotyczne urojone ze sobą sprzężone. W rachunkach, które wykonaliśmy w § 32 tomu I-go, ważną rolę odegrywała wielkość, określona wzorem:

$$(6) \qquad \Omega = \sqrt{[2B - (A + C)\cos\vartheta]^2 + (A - C)^2 \sin^2\vartheta}\,.$$

Z rachunków tych wynika, że jeżeli wielkość Ω jest dodatnia, to dwa urojone dwukierunki asymptotyczne są nieizotropowe, jeżeli zaś wielkość Ω jest zerem, to dwa urojone dwukierunki asymptotyczne są izotropowe. Inaczej możemy powiedzieć, że warunki konieczne i wystarczające, aby dwukierunki asymptotyczne były dwukierunkami izotropowemi, polegają na jednoczesnem spełnieniu równości:

$$(7) \qquad A = C, \quad B = A\cos\vartheta = C\cos\vartheta\,.$$

Wiadomo nam z §§ 32 i 36 tomu I-go, że warunki te spełnione są tylko dla prostych izotropowych ze sobą sprzężonych i dla kół.

Jeżeli następnie $\delta < 0$, to linja krzywa stopnia drugiego ma dwa różne jeden od drugiego dwukierunki asymptotyczne rzeczywiste.

Jeżeli wreszcie $\delta = 0$, to linja krzywa stopnia drugiego ma jeden rzeczywisty dwukierunek asymptotyczny, który nazwiemy także dwukierunkiem asymptotycznym podwójnym.

Na początku tego paragrafu mówiliśmy o pewnych procesach granicznych. Wskutek procesu granicznego, przy którym przynajmniej jeden z punktów wspólnych krzywej (1) i prostej (2) oddala się nieograniczenie, punkt ten zmierza do odpowiedniego punktu niewłaściwego. Wyniki, które otrzymaliśmy powyżej odnośnie do dwukierunków asymptotycznych, możemy sformułować także jako wyniki odnoszące się do punktów niewłaściwych linij krzywych stopnia drugiego. Jeżeli $\delta > 0$, to krzywa drugiego stopnia posiada dwa punkty niewłaściwe urojone ze sobą sprzężone, do których prowadzą dwa dwukierunki asymptotyczne urojone ze sobą sprzężone. Gdy przytem $\Omega > 0$, wówczas te punkty niewłaściwe nie są niewłaściwemi punktami kołowemi, gdy natomiast $\Omega = 0$, wówczas te punkty są niewłaściwemi punktami kołowemi. Jeżeli $\delta < 0$, to krzy-

wa posiada dwa różne od siebie punkty niewłaściwe rzeczywiste, do których prowadzą dwa różne od siebie dwukierunki asymptotyczne rzeczywiste. Wreszcie w przypadku $\delta = 0$ krzywa posiada jeden punkt niewłaściwy rzeczywisty, do którego prowadzi podwójny dwukierunek asymptotyczny.

Na podstawie rozważań tego paragrafu można oprzeć pewien podział krzywych drugiego stopnia. Jeżeli $\delta > 0$, t.j. jeżeli krzywa posiada dwa dwukierunki asymptotyczne urojone ze sobą sprzężone, mówimy, że należy ona do rodzaju elips. Do tego rodzaju należą w szczególności linje krzywe, dla których $\Omega = 0$, t.j. krzywe, które posiadają dwa dwukierunki asymptotyczne urojone ze sobą sprzężone izotropowe. Tę szczególną kategorję krzywych rodzaju elips nazywamy krzywemi rodzaju kół. Jeżeli $\delta < 0$, t.j. jeżeli krzywa posiada dwa różne od siebie dwukierunki asymptotyczne rzeczywiste, mówimy, że należy ona do rodzaju hiperbol. Gdy wreszcie $\delta = 0$, t.j. gdy krzywa posiada dwukierunek asymptotyczny podwójny, zaliczamy ją do krzywych rodzaju parabol.

W §§ 31, 32, 34—38 i 66 tomu I-go oraz w §§ 1—5, 8 i 9 tomu II-go zajmowaliśmy się różnemi szczególnemi przypadkami krzywych stopnia drugiego. Z rozważań, które tam przeprowadzone zostały, wnosimy, że do rodzaju elips należą elipsy rzeczywiste i elipsy urojone oraz pary prostych spotykających się urojonych ze sobą sprzężonych. W szczególności do rodzaju kół należą koła rzeczywiste i koła urojone same ze sobą sprzężone, oraz pary prostych izotropowych ze sobą sprzężonych. Do rodzaju hiperbol należą hiperbole i pary prostych spotykających się rzeczywistych. Wreszcie do rodzaju parabol należą: parabole, pary prostych równoległych rzeczywistych, pary prostych równoległych urojonych ze sobą sprzężonych oraz proste podwójne.

§ 12. Środki.

Niech będzie znowu krzywa stopnia drugiego określona równaniem (1). Środkiem krzywej stopnia drugiego nazywa się taki właściwy punkt P na płaszczyźnie, że każda prosta przez ten punkt przechodząca ma w stosunku do krzywej własność następującą: jeżeli pewien punkt jest wspólnym punktem tej prostej i krzywej (1), to jego punkt symetryczny względem punktu

P jest również punktem wspólnym tej prostej i krzywej (1). Zajmiemy się zbadaniem środków krzywej stopnia drugiego na podstawie tej definicji.

Jeżeli a, b oznaczają spółrzędne szukanego punktu P, to każdą prostą przechodzącą przez punkt P można przedstawić osiowemi równaniami:

$$x = a + \lambda r, \quad y = b + \mu r. \tag{8}$$

Punkty wspólne krzywej (1) i prostej (8) określają się wartościami parametru r spełniającemi równanie:

$$\varphi(\lambda, \mu) r^2 + 2(\alpha\lambda + \beta\mu) r + f(a, b) = 0. \tag{9}$$

Warunek konieczny i wystarczający, by punkt a, b był środkiem, polega na tem, żeby równanie (9) miało przy każdym wyborze dwukierunku prostej własność następującą: jeżeli równaniu (9) czyni zadość pewna wartość parametru r, to czyni mu również zadość wartość, różniąca się od poprzedniej tylko znakiem. Zatem dla każdego kierunku λ, μ musi być spełniona równość:

$$\alpha\lambda + \beta\mu = 0. \tag{10}$$

Równość ta musi być spełniona w szczególności dla kierunków osi spółrzędnych, t.j. przy $\lambda = 1$, $\mu = 0$ i $\lambda = 0$, $\mu = 1$. Dochodzimy więc do równości:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0 \tag{11}$$

i gdy równości te są spełnione, wówczas spełnioną jest także przy dowolnych λ, μ równość (10). Stąd wynika, że zadanie wyznaczenia środków redukuje się do wyznaczenia wielkości a, b, spełniających równania:

$$\begin{cases} Aa + Bb + D = 0, \\ Ba + Cb + E = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Na podstawie przyjętej definicji środka mamy określić właściwe punkty a, b spełniające jednocześnie oba równania (12). Ale obok właściwych punktów, czyniących zadość powyższej definicji środka, lub jak inaczej powiemy, obok środków właściwych uważać będziemy także środki niewłaściwe, przyczem środ-

kiem niewłaściwym nazywać będziemy punkt niewłaściwy, czyniący zadość jednocześnie obu równaniom (12). Badanie obu kategoryj środków można przeprowadzić łącznie, stosując spółrzędne jednorodne $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ określone równościami:

$$a = \frac{\bar{a}}{\bar{c}}, \quad b = \frac{\bar{b}}{\bar{c}}.$$

Zadanie nasze polegać będzie zatem na wyznaczeniu spółrzędnych jednorodnych $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ punktów właściwych i niewłaściwych z dwóch jednoczesnych warunków:

$$(13) \qquad \begin{cases} A\bar{a} + B\bar{b} + D\bar{c} = 0, \\ B\bar{a} + C\bar{b} + E\bar{c} = 0. \end{cases}$$

Takiemi dwoma równaniami w spółrzędnych jednorodnych zajmowaliśmy się w pierwszej części § 23 w tomie I-ym. Zastosujemy tu oznaczenia:

$$(14) \qquad \delta = AC - B^2, \quad k' = DB - EA, \quad k'' = BE - DC,$$

które stosowaliśmy już w tomie I-ym (zob. § 33 tomu I-go). Jeżeli nie wszystkie wielkości (14) są zerami, to z równań (13) otrzymujemy:

$$(15) \qquad \bar{a} : \bar{b} : \bar{c} = k'' : k' : \delta,$$

t.j. oba równania (13) są spełnione jednocześnie tylko dla punktu określonego stosunkami (15). Jeżeli zaś wszystkie wielkości (14) są zerami, to równania (13) określają tylko jeden związek pomiędzy wielkościami $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Związek ten przedstawia linję prostą właściwą, bo wielkości A, B, C nie są wszystkie trzy jednocześnie zerami.

Zwracając się do pierwszego z wymienionych tu przypadków widzimy, że punkt (15) jest punktem właściwym, gdy $\delta \neq 0$. Każda więc krzywa rodzaju elips lub rodzaju hiperbol posiada jeden środek właściwy, którego spółrzędne prostolinjowe są:

$$(16) \qquad a = \frac{k''}{\delta}, \quad b = \frac{k'}{\delta}.$$

Na fig. 20 zilustrowana jest własność środka elipsy, polegająca na tem, że każda cięciwa elipsy, przez punkt ten przechodząca, dzieli się w nim na dwie części równe.

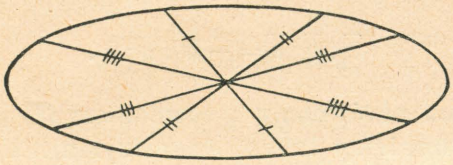

Fig. 20.

Zauważmy, że punkt przecięcia prostych przecinających się, należących do pary określonej równaniem stopnia drugiego, jest szczególnym przypadkiem środka. Wyznaczeniem tego punktu przecięcia zajmowaliśmy się w § 35 tomu I-go, a wyprowadzone tam równania (68) i (69) w założeniu $\Delta = 0$ mają dokładnie tę samą formę, co równania (12) i (16) bieżącego paragrafu, odnoszące się tutaj i do przypadków w których $\Delta = 0$ i do przypadków w których $\Delta \neq 0$. Także środek koła jest szczególnym przypadkiem środka właściwego krzywej drugiego stopnia i porównywając rachunki bieżącego paragrafu z rachunkami drugiej części § 36 tomu I-go, skonstatujemy łatwo wspólne cechy jednych i drugich.

Zajmiemy się teraz rozważeniem naszego zadania przy założeniu $\delta = 0$. Podstawmy naprzód we wzorach na k' i k'' wyrażenia:

$$A = \varepsilon\, \mathfrak{a}^2, \quad B = \varepsilon\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}, \quad C = \varepsilon\, \mathfrak{b}^2,$$

gdzie $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ są rzeczywistemi wielkościami, które nie są obie jednocześnie zerami. Wtedy otrzymamy:

$$(17) \qquad k' = \varepsilon\, \mathfrak{a}\, (D\, \mathfrak{b} - E\, \mathfrak{a}), \quad k'' = -\varepsilon\, \mathfrak{b}\, (D\, \mathfrak{b} - E\, \mathfrak{a}).$$

Ale łatwo sprawdzić, że zachodzi równość:

$$(D\, \mathfrak{b} - E\, \mathfrak{a})^2 = -\varepsilon\, \Delta.$$

Stąd wynika, że przy założeniu $\delta = 0$ obie wielkości k' i k'' nie są jednocześnie zerami, gdy nie jest zerem wielkość Δ, są zaś jednocześnie zerami, gdy $\Delta = 0$. To samo można wywnioskować także na podstawie wzorów (43) i (44) w § 33 tomu I-go. Można

przeto przy założeniu $\delta = 0$ odróżniać przypadki naszego zadania według wartości wielkości Δ.

W przypadku $\delta = 0$ i $\Delta \neq 0$ otrzymujemy na podstawie równości (17) ze wzoru (15):

$$\bar{a} : \bar{b} : \bar{c} = -\mathbf{b} : \mathbf{a} : 0 .$$

Jeżeli rezultat ten porównamy z równaniem (5) poprzedniego paragrafu, to dostrzeżemy łatwo, że otrzymuje się punkt niewłaściwy, do którego prowadzi podwójny dwukierunek asymptotyczny. Widzimy zatem, że w przypadku $\delta = 0$ i $\Delta \neq 0$, t.j. w przypadku krzywej rodzaju parabol, nie będącej parą prostych właściwych, istnieje jeden niewłaściwy środek, będący punktem niewłaściwym uważanej krzywej rodzaju parabol.

W przypadku $\delta = 0$ i $\Delta = 0$, t.j. w przypadku pary prostych właściwych o wspólnym dwukierunku, równania (12) lub (13), w których a, b względnie $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ traktujemy jako zmienne spółrzędne punktu, określają jedną prostą właściwą, którą nazywamy prostą środków. Na niej leży nieskończenie wiele środków właściwych i jeden środek niewłaściwy, do którego prowadzi podwójny dwukierunek asymptotyczny. Własność prostej środków

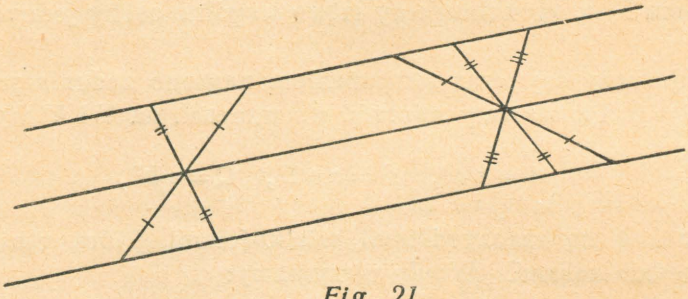

Fig. 21.

zilustrowana jest na fig. 21. Prostą tą zajmowaliśmy się już w § 35 tomu I-go, określając ją analitycznie równaniem (73) lub równaniami (74).

Zaznaczymy, że niezależnie od tego, czy krzywa drugiego stopnia jest rzeczywista, czy też urojona, środek właściwy w przypadku $\delta \neq 0$ i środek niewłaściwy w przypadku $\delta = 0$ i $\Delta \neq 0$ są punktami rzeczywistemi, a prosta środków w przypadku $\delta = 0$ i $\Delta = 0$ jest prostą rzeczywistą.

Łącznie z temi rozważaniami o środkach krzywych drugiego stopnia zamieścimy jeszcze w tym paragrafie uwagę następującą. Każdy punkt $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ właściwy, czy też niewłaściwy, spełniający jednocześnie trzy równania:

$$A\bar{a} + B\bar{b} + D\bar{c} = 0,$$

$$B\bar{a} + C\bar{b} + E\bar{c} = 0,$$

$$D\bar{a} + E\bar{b} + F\bar{c} = 0,$$

które dla spółrzędnych prostolinjowych a, b można napisać w postaci:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

nazywa się p u n k t e m p o d w ó j n y m krzywej drugiego stopnia. Stąd widzimy, że każdy punkt podwójny jest środkiem, bo dwa pierwsze równania pierwszego z tych układów są równaniami (13), a dwa pierwsze równania drugiego z tych układów są równaniami (11). Na podstawie drugiego z zadań, traktowanych w § 23 tomu I-go wnosimy, że dla istnienia punktów podwójnych musi być spełniony warunek $\Delta = 0$. Jeżeli $\Delta = 0$ i $\delta \neq 0$, t.j. jeżeli krzywa jest parą prostych właściwych przecinających się, to posiada ona jeden właściwy punkt podwójny, który jest punktem przecięcia się tych prostych. Przechodząc do przypadków $\Delta = 0$ i $\delta = 0$, zwrócimy uwagę na to, że na podstawie związków (57) i (60) w § 34 tomu I-go warunki dla punktów podwójnych można napisać w postaci:

$$\varepsilon(\mathfrak{a}\bar{a} + \mathfrak{b}\bar{b}) + m\bar{c} = 0$$

$$m(\mathfrak{a}\bar{a} + \mathfrak{b}\bar{b}) + F\bar{c} = 0.$$

W przypadku $\varepsilon F - m^2 \neq 0$ równania te określają punkt niewłaściwy, do którego prowadzi podwójny dwukierunek asymptotyczny, w przypadku zaś $\varepsilon F - m^2 = 0$ określają one prostą środków. Ten rezultat można na podstawie rozważań § 34 tomu I-go formułować w sposób następujący. Jeżeli $\Delta = 0$ i $\delta = 0$, ale nie obie wielkości δ' i δ'' są zerami, t.j. jeżeli krzywa jest parą dwóch różnych od siebie prostych równoległych, to posiada ona j e d e n n i e w ł a ś c i w y p u n k t p o d w ó j n y, do którego prowadzi podwójny dwukierunek asymptotyczny. Jeżeli zaś $\Delta = 0$ i wszystkie

trzy wielkości $\delta, \delta', \delta''$ są zerami, t.j. jeżeli krzywa jest rzeczywistą prostą podwójną, to posiada ona nieskończenie wiele punktów podwójnych, któremi są wszystkie punkty właściwe należące do prostej podwójnej i jej punkt niewłaściwy.

§ 13. Równanie krzywej odniesione do środka.

W § 6 stosowaliśmy do wielomianu drugiego stopnia ogólną zmianę układu spółrzędnych prostolinjowych. Zwrócimy się teraz do szczególnego przypadku tego przekształcenia, a mianowicie obierzemy początek nowego układu we właściwym środku krzywej albo we właściwym punkcie prostej środków, nie zmieniając przytem kierunków osi spółrzędnych. Z rozważań poprzedniego paragrafu wynika, że przekształcenie to możliwe jest w przypadku $\delta \neq 0$ oraz w przypadku $\delta = 0$, $\Delta = 0$ i wyraża się związkami:

$$x = a + \bar{x}, \quad y = b + \bar{y}, \tag{18}$$

gdzie a, b są spółrzędnemi środka właściwego w jednym z wymienionych przypadków.

Wielkości a i b spełniają równania:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \tag{11}$$

a więc wzory (16) § 6 można w danym przypadku napisać w postaci:

$$\bar{A} = A, \quad \bar{B} = B, \quad \bar{C} = C,$$

$$\bar{D} = 0, \quad \bar{E} = 0, \quad \bar{F} = \gamma.$$

Stąd otrzymujemy następujący kształt równania krzywej, odniesionego do środka:

$$A\bar{x}^2 + 2B\bar{x}\bar{y} + C\bar{y}^2 + \gamma = 0.$$

W równaniu tem trzeba jeszcze obliczyć γ. Dla wykonania tego rachunku musimy odróżnić przypadki $\delta \neq 0$ i $\delta = 0$, $\Delta = 0$.

W pierwszym z tych przypadków, t.j. gdy $\delta \neq 0$, otrzymują się określone wartości na a, b z równań (11). Wstawiając je

w wyrażenie na γ otrzymamy szukany rezultat. Do rezultatu tego najprościej jednak dojść można rugując a, b z równań:

$$(19) \qquad \begin{cases} A\,a + B\,b + D = 0, \\ B\,a + C\,b + E = 0, \\ D\,a + E\,b + F = \gamma. \end{cases}$$

Widoczne, że rezultat rugowania jest:

$$\begin{vmatrix} A, B, & D \\ B, C, & E \\ D, E, F - \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Wyznacznik lewej strony tej równości możemy napisać w kształcie sumy dwóch wyznaczników, ponieważ elementy ostatniej kolumny można uważać za sumy elementów dwóch kolumn. Stąd łatwo dostrzec, że otrzymujemy następujące równanie:

$$\Delta - \delta\,\gamma = 0,$$

a ponieważ $\delta \neq 0$, więc mamy:

$$\gamma = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Zatem w przypadku $\delta \neq 0$, równanie krzywej odniesione do środka, t.j. równanie krzywej rodzaju elips lub rodzaju hiperbol odniesione do środka jest:

$$(20) \qquad A\,\bar{x}^2 + 2\,B\,\bar{x}\,\bar{y} + C\,\bar{y}^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Niech teraz będzie $\delta = 0$ i $\Delta = 0$. W przypadku tym można wyznaczenie wielkości γ znów oprzeć na równaniach (19). Jeżeli mianowicie zwrócimy uwagę na to, że na mocy rozważań § 34 tomu I-go w przypadku tym istnieją takie wielkości rzeczywiste $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ nie obie jednocześnie równe zeru i taka rzeczywista wielkość m, że zachodzą równości:

$$A = \varepsilon\,\mathfrak{a}^2, \quad B = \varepsilon\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}, \quad C = \varepsilon\,\mathfrak{b}^2, \quad D = m\,\mathfrak{a}, \quad E = m\,\mathfrak{b},$$

to można będzie w tym przypadku zastąpić równania (19) przez równania:

$$\varepsilon(\mathfrak{a}\,a + \mathfrak{b}\,b) + m = 0,$$

$$m(\mathfrak{a}\,a + \mathfrak{b}\,b) + F = \gamma,$$

a rugując z nich dwumian $\mathfrak{a}\,a + \mathfrak{b}\,b$ otrzymać na γ wzór:

$$\gamma = F - \varepsilon m^2.$$

Zatem w przypadku $\delta = 0$ i $\Delta = 0$ równanie krzywej odniesione do jednego z środków właściwych, t.j. r ó w n a n i e p a r y p r o s t y c h w ł a ś c i w y c h o w s p ó l n y m d w u k i e r u n k u o d n i e s i o n e d o j e d n e g o z ś r o d k ó w w ł a ś c i w y c h można napisać albo w postaci:

$$A\bar{x}^2 + 2B\bar{x}\bar{y} + C\bar{y}^2 + F - \varepsilon m^2 = 0 \tag{21}$$

albo też w postaci:

$$\varepsilon(\mathfrak{a}\,\bar{x} + \mathfrak{b}\,\bar{y})^2 + F - \varepsilon m^2 = 0. \tag{22}$$

Zauważmy, że równanie (22) łatwo także wywnioskować ze wzoru (64) § 34 tomu I-go na wielomian $f(x, y)$ w uważanym przypadku. Zauważmy nadto, że kształt równania (21) lub (22) zupełnie nie zależy od tego, do którego z punktów właściwych na prostej środków odnosimy równanie uważanej pary prostych.

§ 14. Asymptoty.

W § 11 zajmowaliśmy się wyznaczeniem dwukierunków asymptotycznych linij krzywych stopnia drugiego. W przypadku każdej dowolnie wybranej linji krzywej stopnia drugiego istnieje nieskończenie wiele linij prostych, z których każda ma dwukierunek asymptotyczny. Zajmiemy się teraz zadaniem wyznaczenia takich ewentualnie istniejących właściwych linij prostych o dwukierunkach asymptotycznych, które posiadają własność następującą. Gdy punkt bieżący oddala się na krzywej do nieskończoności, wówczas odległość tego punktu od rzeczonej prostej, mierzona w dowolnym stałym kierunku, różnym od każdego z kierunków tej prostej, dąży do zera. W przypadkach istnienia linij prostych, posiadających tę własność, nazywać je będziemy a s y m p t o t a m i.

Niech będzie równanie ogólne krzywej stopnia drugiego:

$$(1)\quad f(x,y) = A\,x^2 + 2\,B\,x\,y + C\,y^2 + 2\,D\,x + 2\,E\,y + F = 0.$$

W równaniu tem zamiast zmiennych x, y wprowadzimy zmienne $\overline{x}, \overline{y}$, określone związkami:

$$x = a + a_1\,\overline{x} + a_2\,\overline{y},$$

$$y = b + b_1\,\overline{x} + b_2\,\overline{y},$$

gdzie a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 są stałemi spółczynnikami, które mogą być bądź rzeczywiste, bądź urojone, a cztery ostatnie z nich spełniają warunek:

$$a_1\,b_2 - b_1\,a_2 \neq 0.$$

Nadto założymy, że spełniona jest równość:

$$a_2^2 + b_2^2 + 2\,a_2\,b_2\cos\vartheta = 1,$$

t.j. że zmienna $\overline{y}$ jest długością, mierzoną w kierunku określonym spółczynnikami kierunkowemi a_2, b_2. Dla a_1, b_1 nie przyjmujemy odpowiedniego założenia, a więc nie usuwamy możliwości zachodzenia związku:

$$a_1^2 + b_1^2 + 2\,a_1\,b_1\cos\vartheta = 0,$$

albo, inaczej mówiąc, nie wykluczamy przypadku, w którym stosunek $b_1 : a_1$ wyznacza dwukierunek izotropowy. Uważaną zmianę zmiennych możemy traktować jako pewne uogólnienie zmiany spółrzędnych prostolinjowych. Stosując ją do równania (1), możemy widocznie skorzystać z rachunków i oznaczeń § 6. Otrzymamy wówczas równanie:

$$(23)\quad \overline{A}\,\overline{x}^2 + 2\,\overline{B}\,\overline{x}\,\overline{y} + \overline{C}\,\overline{y}^2 + 2\,\overline{D}\,\overline{x} + 2\,\overline{E}\,\overline{y} + \overline{F} = 0,$$

gdzie przyjęto oznaczenia:

$$(24)\quad \begin{cases} \overline{A} = \varphi(a_1, b_1),\ \overline{B} = \varphi(a_1, b_1;\ a_2, b_2),\ \overline{C} = \varphi(a_2, b_2), \\ \overline{D} = \alpha\,a_1 + \beta\,b_1,\ \overline{E} = \alpha\,a_2 + \beta\,b_2,\ \overline{F} = f(a, b). \end{cases}$$

Niech teraz $b_1 : a_1$ określa dwukierunek asymptotyczny krzywej

(1), zaś $b_2 : a_2$ różny od niego dwukierunek nieizotropowy; postarajmy się, o ile to możliwe, tak wybrać stałe a, b, żeby $\bar{y}$ zmie-

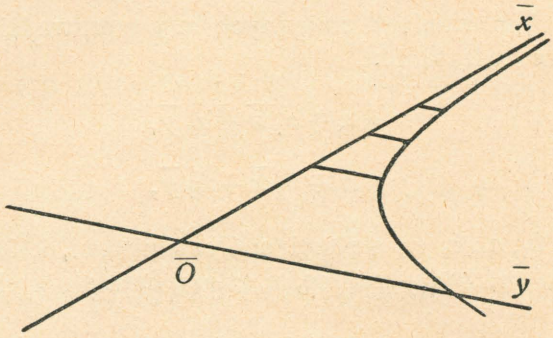

Fig. 22.

rzało do zera, gdy $\bar{x}$ zmierza do nieskończoności, t.j. żeby prosta określona równaniem:

$$\bar{y} = 0 \tag{25}$$

była, o ile możliwe, asymptotą (zob. fig. 22). Z wymienionych założeń wynika:

$$\bar{A} = \varphi(a_1, b_1) = 0, \quad \bar{C} = \varphi(a_2, b_2) \neq 0, \tag{26}$$

a ponieważ na podstawie rachunków § 7 zachodzi równość:

$$-\bar{B}^2 = (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 \delta,$$

przeto wnosimy, że gdy $\delta \neq 0$, wówczas $\bar{B} \neq 0$, gdy zaś $\delta = 0$, wówczas $\bar{B} = 0$.

Zajmiemy się naprzód przypadkiem w którym $\delta \neq 0$, a więc i $\bar{B} \neq 0$. Wobec warunków (26) można równanie (23) napisać w formie:

$$\bar{y}^2 + 2\frac{\bar{B}\bar{x} + \bar{E}}{\bar{C}}\bar{y} + \frac{2\bar{D}\bar{x} + \bar{F}}{\bar{C}} = 0. \tag{27}$$

Wprowadźmy, przy założeniu $\bar{B} \neq 0$, oznaczenia:

$$P = \frac{\bar{B}\bar{x} + \bar{E}}{\bar{C}}, \quad Q = \frac{(2\bar{D}\bar{x} + \bar{F})\bar{C}}{(\bar{B}\bar{x} + \bar{E})^2}.$$

Stosując te oznaczenia, można wartości na $\bar{y}$, wynikające z równania (27) napisać w postaci:

$$\bar{y} = -P \pm P\sqrt{1-Q}. \tag{28}$$

Zauważmy, że gdy mamy jednocześnie

$$\bar{D} = 0, \quad \bar{F} = 0, \tag{29}$$

wówczas jest także $Q = 0$ i otrzymamy na $\bar{y}$ z równości (28) przy górnym znaku wartość zero. Jeżeli jednak fakt, że $\bar{y}$ jest stale zerem, uważać będziemy jako szczególny przypadek zmierzania do zera, to będziemy mogli powiedzieć, że przy spełnieniu warunków (29) prosta $\bar{y} = 0$ jest asymptotą. Niech teraz $\bar{F}$ będzie różne od zera. Wówczas wartości na $\bar{y}$, wynikające ze wzoru (28), rozważać będziemy przy $\bar{x}$ zmierzającem do nieskończoności. Zauważmy, że gdy Q dąży do zera, wówczas pierwiastek, figurujący we wzorze (28), dąży do $+1$. Widoczne przeto, że gdy $\bar{x}$ zmierza do nieskończoności, wówczas wartość $\bar{y}$, odpowiadająca dolnemu znakowi wzoru (28), także zmierza do nieskończoności. Wartość odpowiadającą górnemu znakowi możemy przedstawić w postaci:

$$\bar{y} = -\frac{PQ}{1+\sqrt{1-Q}}.$$

Ponieważ zaś:

$$PQ = \frac{2\bar{D}\bar{x}+\bar{F}}{\bar{B}\bar{x}+\bar{E}},$$

przeto, gdy $\bar{x}$ dąży do nieskończoności, wówczas $\bar{y}$ dąży do $-\bar{D}:\bar{B}$. Widzimy stąd, że uważana wartość na $\bar{y}$ dąży do zera wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{D} = 0$. Uwzględniając przeto przypadek określony wartościami (29), dochodzimy do wniosku, że przy założeniu $\delta \neq 0$ prosta $\bar{y} = 0$ jest asymptotą wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość:

$$\bar{D} = 0. \tag{30}$$

Załóżmy teraz, że $\delta = 0$, a więc, że $\bar{B} = 0$. Wówczas równanie (27) można napisać w formie:

$$\bar{y}^2 + 2\frac{\bar{E}}{\bar{C}}\bar{y} + \frac{2\bar{D}\bar{x}+\bar{F}}{\bar{C}} = 0,$$

skąd wynikają wartości:

$$\bar{y} = \frac{-\bar{E} \pm \sqrt{-(\bar{C}\bar{F} - \bar{E}^2) - 2\bar{C}\bar{D}\bar{x}}}{\bar{C}}.$$

Gdy $\bar{x}$ dąży do nieskończoności i $\bar{D} \neq 0$, wówczas obie wartości na $\bar{y}$ także dążą do nieskończoności. Zatem otrzymujemy naprzód warunek $\bar{D} = 0$. Aby zaś $\bar{y}$ przy spełnieniu tego warunku mogło być zerem, musi być $\bar{F} = 0$ i wówczas conajmniej jedna z wartości na $\bar{y}$ jest stale równa zeru. Jeżeli jednak fakt, że $\bar{y}$ jest stale równe zeru, uważać będziemy jako szczególny przypadek zmierzania do zera, to będziemy mogli powiedzieć, że przy założeniu $\delta = 0$ prosta $\bar{y} = 0$ jest asymptotą wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą równości:

$$\bar{D} = 0, \quad \bar{F} = 0. \tag{31}$$

Zauważmy teraz, że przy spełnieniu warunków (29) lub (31) linja prosta $\bar{y} = 0$ należy do uważanej krzywej. To zachodzi w przypadkach, które charakteryzują się własnością $\Delta = 0$, a wtedy linje proste, określone równaniem drugiego stopnia, są zarazem asymptotami tego tworu geometrycznego. Linja prosta $\bar{y} = 0$ nie stanowi części składowej tworu geometrycznego tylko przy założeniu $\delta \neq 0$, $\Delta \neq 0$ i w tym przypadku obok nierówności $\bar{F} \neq 0$ mamy warunek (30). Jakkolwiek tylko w tym ostatnim przypadku dochodzimy do linij prostych, których nie badaliśmy dotychczas na podstawie ogólnego równania drugiego stopnia, to jednak dla pełności wyprowadzimy we wszystkich przypadkach równania asymptot w układzie spółrzędnych x, y, opierając się jedynie na analitycznem sformułowaniu otrzymanem w tym paragrafie.

Oznaczmy dwukierunek $b_1 : a_1$ przez $\mu : \lambda$, przyjmując, że λ, μ są spółczynnikami kierunkowemi lub pseudokierunkowemi zależnie od tego, czy rzeczony dwukierunek jest dwukierunkiem nieizotropowym czy też dwukierunkiem izotropowym. Wtedy prostą o dwukierunku $\mu : \lambda$ można przedstawić zapomocą równań osiowych:

$$x = a + \lambda r, \quad y = b + \mu r. \tag{32}$$

Jeżeli $\delta \neq 0$, to warunki, aby ta prosta była asymptotą, można na podstawie poprzednich rozważań napisać w formie:

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0, \quad \alpha\lambda + \beta\mu = 0. \tag{33}$$

Jeżeli zaś $\delta = 0$, to warunki, żeby ta prosta była asymptotą, są:

$$(34) \qquad \varphi(\lambda, \mu) = 0, \quad \alpha\lambda + \beta\mu = 0, \quad f(a, b) = 0.$$

Zajmiemy się naprzód przypadkiem $\delta \neq 0$. Jeżeli λ, μ spełniają pierwszy z warunków (33), to dla otrzymania równania asymptoty o dwukierunku asymptotycznym $\mu : \lambda$, trzeba wyrażenia na a i b wynikające ze związków (32) podstawić w drugi z warunków (33). Wykonywając to podstawienie, otrzymujemy na mocy pierwszego z warunków (33) równanie asymptoty:

$$(35) \qquad \lambda(A x + B y + D) + \mu(B x + C y + E) = 0.$$

Z tego równania wynika, że asymptota przechodzi przez środek linji krzywej. Ponieważ w przypadku $\delta \neq 0$ mamy dwa różne od siebie dwukierunki asymptotyczne, które oznaczymy $\mu_1 : \lambda_1$ i $\mu_2 : \lambda_2$, otrzymujemy więc dwie różne od siebie asymptoty:

$$(36) \qquad \begin{cases} \lambda_1(A x + B y + D) + \mu_1(B x + C y + E) = 0, \\ \lambda_2(A x + B y + D) + \mu_2(B x + C y + E) = 0. \end{cases}$$

Każda więc krzywa rodzaju elips ma dwie asymptoty urojone ze sobą sprzężone, przechodzące przez środek krzywej. W szczególności każda krzywa rodzaju kół ma dwie asymptoty, które są sprzężonemi ze sobą prostemi izotropowemi, przechodzącemi przez środek krzywej. Każda krzywa rodzaju hiperbol ma dwie rzeczywiste asymptoty, przechodzące przez środek krzywej. Jeżeli w szczególności $\Delta = 0$, to asymptoty (36) są linjami prostemi, należącemi do uważanej pary prostych właściwych.

Asymptoty (36) tworzą we wszystkich tych przypadkach parę prostych właściwych, przecinających się. Zapytamy teraz, jak napisać równanie drugiego stopnia tej pary linij prostych. Możemy dojść do tego równania drogą następującą. Jeżeli w wielomian $f(x, y)$ zamiast spółrzędnych x, y wprowadzimy spółrzędne $\bar{x}, \bar{y}$ określone równaniami:

$$x = a + \bar{x}, \quad y = b + \bar{y},$$

gdzie a, b oznaczają spółrzędne środka krzywej, to na podstawie rachunków § 13 otrzymamy:

$$f(x, y) = A\bar{x}^2 + 2B\bar{x}\bar{y} + C\bar{y}^2 + \frac{\Delta}{\delta}. \tag{37}$$

Ponieważ asymptoty mają dwukierunki asymptotyczne i obie przechodzą przez środek krzywej, przeto równanie pary asymptot w spółrzędnych $\bar{x}, \bar{y}$ jest:

$$A\bar{x}^2 + 2B\bar{x}\bar{y} + C\bar{y}^2 = 0.$$

Stąd wynika na mocy związku (37), że w pierwotnym układzie x, y równanie pary asymptot krzywej rodzaju elips lub rodzaju hiperbol jest:

$$f(x, y) = \frac{\Delta}{\delta}. \tag{38}$$

W szczególności dla asymptot pary prostych właściwych przecinających się otrzymamy równanie:

$$f(x, y) = 0.$$

Równanie (38) można także wyprowadzić bez pomocy innego układu spółrzędnych bezpośrednio przez rugowanie wielkości a, b, λ, μ, r z równań (32) i warunków (33). Jeżeli w wielomianie $f(x, y)$ podstawimy wyrażenia (32), to otrzymamy:

$$f(x, y) = \varphi(\lambda, \mu) r^2 + 2(\alpha\lambda + \beta\mu) r + f(a, b), \tag{39}$$

a uwzględniając związki (33) dojdziemy do równości:

$$f(x, y) = f(a, b). \tag{40}$$

Ale zwróćmy uwagę na to, że drugi z warunków (33) można zastąpić przez równości:

$$\alpha = -\rho\mu, \quad \beta = \rho\lambda,$$

gdzie ρ jest czynnikiem różnym od zera. Z tej uwagi wynika równość:

$$C\alpha^2 + A\beta^2 - 2B\alpha\beta = \rho^2\varphi(\lambda, \mu),$$

a więc trójmian stojący po lewej stronie tej równości jest zerem naskutek pierwszego ze związków (33). Zatem na podstawie tożsamości (115) § 10 dochodzimy do równości:

$$f(a, b) = \frac{\Delta}{\delta},$$

a korzystając z niej, otrzymujemy ze związku (40) wyprowadzone poprzednio pod numerem (38) równanie asymptot.

Zwracając się teraz do przypadku $\delta = 0$, należy zastosować warunki (34). Na mocy tych warunków otrzymujemy ze wzoru (39) równanie:

$$f(x, y) = 0.$$

Wynik ten odnosi się tutaj do przypadku $\delta = 0$, $\Delta = 0$, t.j. asymptotami są linje proste o wspólnym dwukierunku, określone danem równaniem stopnia drugiego. Równaniami pierwszego stopnia, wynikającemi z tego równania, zajmowaliśmy się już w § 34 tomu I-go.

Zauważymy wreszcie, że przyjętą na początku tego paragrafu definicję asymptot można zastąpić inną definicją. W § 10 rozważaliśmy pewne procesy graniczne, przy których odegrywały rolę wielkości, oznaczone literami L, M, N. Niech będzie proces graniczny, który charakteryzuje się własnością, że zmienna linja prosta dąży do określonej prostej granicznej i że zachodzą albo warunki:

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \tag{41}$$

albo też warunki:

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N \neq 0. \tag{42}$$

Prosta graniczna każdego takiego procesu nazywa się asymptotą odnośnej linji krzywej stopnia drugiego. Łatwo dostrzec, że na podstawie tej definicji dochodzimy do tych samych warunków, co poprzednio. Oczywiste przytem, że warunki (41) prowadzą do asymptot w przypadku $\Delta = 0$, a warunki (42) do asymptot w przypadku $\Delta \neq 0$.

§ 15. Równanie krzywej odniesione do asymptot.

W § 13 wykonaliśmy redukcję ogólnego równania drugiego stopnia do równania formy prostszej w przypadku, gdy istnieje środek lub prosta środków. Nowe osie $\bar{x}, \bar{y}$ miały przytem te same kierunki co dawne osie x, y. Niech będzie teraz równanie zredukowane do środka:

$$A\bar{x}^2 + 2B\bar{x}\bar{y} + C\bar{y}^2 + \gamma = 0, \tag{43}$$

i przyjmijmy nowy układ spółrzędnych, którego osie mają spółczynniki kierunkowe λ_1, μ_1 i λ_2, μ_2, a początek znajduje się w początku dawnego układu. Jeżeli spółrzędne tego nowego układu oznaczymy przez X, Y, to mieć będziemy:

$$\begin{cases} \bar{x} = \lambda_1 X + \lambda_2 Y, \\ \bar{y} = \mu_1 X + \mu_2 Y, \end{cases} \tag{44}$$

a równanie (43) będziemy mogli napisać w postaci:

$$\underline{A} X^2 + 2\underline{B} X Y + \underline{C} Y^2 + \gamma = 0, \tag{45}$$

gdzie spółczynniki wyrazów drugiego stopnia określają się wzorami:

$$\begin{cases} \underline{A} = A\lambda_1^2 + 2B\lambda_1\mu_1 + C\mu_1^2, \\ \underline{B} = A\lambda_1\lambda_2 + B(\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2) + C\mu_1\mu_2, \\ \underline{C} = A\lambda_2^2 + 2B\lambda_2\mu_2 + C\mu_2^2. \end{cases} \tag{46}$$

Obierając na λ_1, μ_1 i λ_2, μ_2 szczególne układy wartości, możemy równanie (43) sprowadzić do szczególnych postaci jeszcze prostszych.

Zajmiemy się teraz redukcją równania (43) do takiej postaci, któraby nie zawierała kwadratów wielkości X i Y. Kierunki określone spółczynnikami λ_1, μ_1 i λ_2, μ_2 powinny więc czynić zadość warunkom:

$$\varphi(\lambda_1, \mu_1) = 0, \quad \varphi(\lambda_2, \mu_2) = 0, \tag{47}$$

t.j. powinny być kierunkami asymptotycznemi. Ponieważ tylko w przypadku $\delta < 0$ istnieją dwa różne od siebie dwukierunki

asymptotyczne rzeczywiste, przeto tylko w tym przypadku istnieje rzeczywisty układ spółrzędnych X, Y, czyniący zadość powyższym warunkom. Ale będziemy się starali rzeczone zadanie redukcji rozwiązać ogólniej, wykonywając przekształcenie (44) we wszystkich przypadkach, w których istnieją dwa różne od siebie dwukierunki asymptotyczne nieizotropowe, t.j. we wszystkich przypadkach, czyniących zadość założeniom $\delta \neq 0$, $\Omega > 0$. Gdy $\delta > 0$ i $\Omega > 0$, wówczas powiemy, że zmienne X, Y wyznaczone równaniami (44) przy spełnieniu związków (47) określają spółrzędne punktu w układzie, którego osie mają urojone kierunki asymptotyczne. Ponieważ przytem wyłączyliśmy przypadek $\Omega = 0$, t.j. przypadek krzywych rodzaju kół, więc w układzie tym wielkości X i Y mogą być interpretowane jako długości. Początkiem nowego układu jest środek krzywej, a więc osiami X, Y są asymptoty krzywej, mianowicie osią X jest asymptota o dwukierunku $\mu_1 : \lambda_1$, a osią Y asymptota o dwukierunku $\mu_2 : \lambda_2$. Wtedy równanie (45) można napisać w postaci:

$$2\underline{B}XY + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \tag{48}$$

gdzie spółczynnik $\underline{B}$ określa się drugim ze wzorów (46) przy uwzględnieniu warunków (47). Postaramy się wyrazić spółczynnik $\underline{B}$ przez spółczynniki A, B, C. Oprzemy się przytem na rachunkach §§ 31 i 32 tomu I-go. Mieliśmy tam związki:

$$A = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2, \quad 2B = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}_2, \quad C = \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2, \tag{49}$$

oraz wzory:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{\mathfrak{b}_1}{\varepsilon_1 \mathfrak{r}_1}, & \mu_1 = \dfrac{\mathfrak{a}_1}{\varepsilon_1 \mathfrak{r}_1}, \\ \lambda_2 = -\dfrac{\mathfrak{b}_2}{\varepsilon_2 \mathfrak{r}_2}, & \mu_2 = \dfrac{\mathfrak{a}_2}{\varepsilon_2 \mathfrak{r}_2}, \end{cases} \tag{50}$$

gdzie $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, a wielkości $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$ są w przypadku $\delta < 0$ rzeczywiste dodatnie, a w przypadku $\delta > 0$ mają amplitudy zawarte między zerem i π. Na podstawie tych wzorów otrzymujemy:

$$\underline{B} = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2} [A \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 - B(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}_2) + C \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2].$$

Ale z rachunków § 32 tomu I-go wynika wzór:

$$(51)\qquad \mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_2 = \tau\,\Omega = \tau\,\sqrt{[2B-(A+C)\cos\vartheta]^2+(A-C)^2\sin^2\vartheta}\,.$$

gdzie $\tau = \pm 1$. Zatem naskutek wzorów (49) i (51) dochodzimy do wyrażenia:

$$B = \frac{2\,\delta}{\tau\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\Omega},$$

a wstawiając wyrażenie to w równanie (48), otrzymujemy rezultat, że równanie krzywej rodzaju hiperbol lub rodzaju elips, z wyłączeniem krzywych rodzaju kół, odniesione do asymptot, jest:

$$(52)\qquad 4\,X\,Y+\frac{\tau\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\Omega\,\Delta}{\delta^2}=0,$$

gdzie $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, $\tau = \pm 1$. Z równaniem postaci (52) spotkaliśmy się już w § 8 w przypadku, gdy asymptoty są rzeczywiste. Jeżeli $\Delta = 0$, to równanie (52) przedstawia same asymptoty, jak to zgadza się z rozważaniami § 14.

Zwrócimy tutaj uwagę na łączność, która zachodzi pomiędzy niezmiennikami krzywej i pewnemi wzorami, odnoszącemi się do dwukierunków asymptotycznych i do asymptot. Funkcje trygonometryczne kątów, które tworzą ze sobą dwa kierunki, należące do dwóch różnych od siebie dwukierunków asymptotycznych, mogą być określone wzorami (25) i (26) § 32 tomu I-go, t.j. wzorami:

$$(53)\qquad \left\{\begin{array}{l} \cos\varphi = \dfrac{\omega}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\tau\,\Omega}\,,\quad \sin\varphi = \dfrac{2\,\eta\,\zeta\,\sqrt{-\delta}\,\sin\vartheta}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\tau\,\Omega}\,, \\ \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2\,\eta\,\zeta\,\sqrt{-\delta}\,\sin\vartheta}{\omega}\,. \end{array}\right.$$

W tych wzorach $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, $\eta = \pm 1$, $\zeta = \pm 1$, $\tau = \pm 1$ i znaczenie tych podwójnych znaków objaśnione jest w rzeczonym § 32. Zastosujemy nadto do wyrazu wolnego od spółrzędnych w równaniu (52) oznaczenie:

$$(54)\qquad R = \frac{\tau\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\Omega\,\Delta}{\delta^2}\,.$$

W § 7 wyraziliśmy $\operatorname{tg}^2\varphi$ przez niezmienniki zapomocą wzorów (59). Wzory te nie podlegają ograniczeniu $\Omega \neq 0$. Natomiast pierwszy i drugi ze wzorów (53) są ważne przy założeniu $\Omega \neq 0$ i przy tem założeniu otrzymujemy z nich na podstawie wzorów (47) § 7 równości:

$$\cos^2\varphi = N_1^2, \quad \sin^2\varphi = -4N_2. \tag{55}$$

Kwadraty wielkości (53) są bezwzględnemi niezmiennikami krzywej drugiego stopnia. Ze wzoru (54) wynika na podstawie tychże wzorów (47) przy założeniu $\Omega \neq 0$ wzór:

$$R^2 = \frac{N_3^2}{N_2^4}. \tag{56}$$

Wielkość R^2 jest również niezmiennikiem bezwzględnym krzywej drugiego stopnia.

Metodę redukcji równania krzywej, zastosowaną w tym paragrafie, można także scharakteryzować w ten sposób, że polega ona na rozłożeniu sumy wyrazów drugiego stopnia na dwa czynniki pierwszego stopnia i zastąpieniu tych czynników przez takie czynniki do nich proporcjonalne, że są one dwiema spółrzędnemi punktu w jednym i tym samym prostolinjowym układzie. Tego postępowania nie można było zastosować do krzywych rodzaju kół. Jeżeliby jednak ograniczyć się tylko do rozkładu sumy wyrazów drugiego stopnia na dwa czynniki pierwszego stopnia, to można tą drogą przekształcić i równanie krzywej rodzaju kół. Równanie każdej krzywej rodzaju kół, odniesione do jej środka, można napisać w postaci:

$$\bar{x}^2 + 2\cos\vartheta\,\bar{x}\,\bar{y} + \bar{y}^2 = r^2$$

i wprowadzając w tem równaniu nowe zmienne X, Y określone związkami:

$$X = \bar{x} + e^{\vartheta i}\bar{y}, \quad Y = \bar{x} + e^{-\vartheta i}\bar{y},$$

otrzymamy równanie:

$$XY = r^2. \tag{57}$$

Proste $X = 0$ i $Y = 0$ są asymptotami krzywej, ale nie można znaleźć takich skończonych czynników stałych, żeby dwumiany X i Y pomnożone przez te czynniki były długościami, określającemi spółrzędne punktu w układzie prostolinjowym.

§ 16. Styczna w danym punkcie krzywej drugiego stopnia.

Niech będzie ogólne równanie drugiego stopnia:

$$f(x, y) = 0 \tag{58}$$

i uogólnione równania osiowe linji prostej:

$$x = a + u\,t, \quad y = b + v\,t. \tag{59}$$

Punkty wspólne prostej (59) z krzywą (58) określają się równaniem:

$$\varphi(u, v)\,t^2 + 2(\alpha u + \beta v)\,t + f(a, b) = 0. \tag{60}$$

Niech a, b będzie punktem położonym na krzywej (58) (zob. fig. 23), t.j. niech będzie:

$$f(a, b) = 0. \tag{61}$$

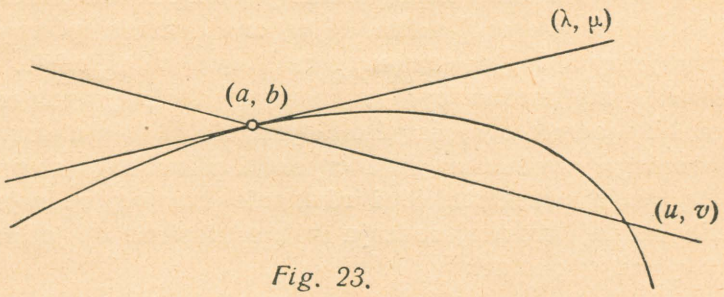

Fig. 23.

Jeżeli zmieniamy spółczynniki u, v, to prosta (59) obraca się naokoło punktu a, b. Jeżeli przytem $\alpha u + \beta v$ nie jest stale równe zeru, t.j. jeżeli α i β nie są obie jednocześnie równe zeru, to istnieje tylko jeden taki dwukierunek $\mu : \lambda$, dla którego:

$$\alpha\lambda + \beta\mu = 0. \tag{62}$$

Ten dwukierunek ma tę własność, że gdy dwukierunek prostej (59) dąży do tego dwukierunku, to w przypadku, jeżeli dla tego dwukierunku $\varphi(\lambda, \mu) \neq 0$, różna od zera wartość na t, spełniająca równanie (60), dąży do zera, w przypadku zaś, jeżeli dla tego dwukierunku $\varphi(\lambda, \mu) = 0$, równość (60) staje się tożsamością.

Linję prostą (59), odpowiadającą temu dwukierunkowi, nazywamy w obu tych przypadkach **prostą styczną do krzywej drugiego stopnia w jej punkcie właściwym** a, b, punkt ten zaś **punktem styczności**. Można łatwo przedstawić styczną zapomocą jednego równania. Mianowicie ze związku (62) otrzymujemy dla spółrzędnych x, y punktów stycznej równanie:

$$\alpha (x - a) + \beta (y - b) = 0 \tag{63}$$

i zważywszy, że równość (61) można napisać w postaci:

$$\alpha a + \beta b + \gamma = 0, \tag{64}$$

dochodzimy do równania:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0, \tag{65}$$

które przy spełnieniu równości (61) i warunku, żeby nie obie wielkości α i β były jednocześnie zerami, nazywamy **równaniem stycznej do krzywej stopnia drugiego w jej punkcie właściwym** a, b.

Do równania (65) możemy dojść także przez zastosowanie pewnych różniczkowań. Oznaczając mianowicie wartości pochodnych cząstkowych $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ w właściwym punkcie krzywej $x = a$, $y = b$ przez $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ i $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, otrzymujemy w założeniu, że nie obie te wartości są jednocześnie zerami, równanie stycznej do krzywej (58) w tym punkcie w postaci:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x - a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(y - b) = 0.$$

Jeżeli zaś zważymy, że na mocy rachunków § 6 mamy:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2\alpha, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2\beta,$$

to otrzymamy równanie:

$$\alpha (x - a) + \beta (y - b) = 0,$$

t.j. równanie (63), z którego tak samo jak poprzednio dojdziemy do równania (65).

Zarówno w jednem jak w drugiem wyprowadzeniu równania stycznej czyniliśmy założenie, że nie obie wielkości α i β są jednocześnie równe zeru. Gdyby obie te wielkości były zerami, to na mocy związku (64) byłaby zerem także i wielkość γ. Stąd wnosimy, że równanie (65) określa styczną do krzywej drugiego stopnia w każdym właściwym punkcie a, b tej krzywej z wyjątkiem właściwych punktów podwójnych, dla których równość (65) jest tożsamością.

W pierwszem z wyprowadzeń równania stycznej odróżnialiśmy przypadki, w których dla dwukierunku stycznej zachodzi nierówność $\varphi(\lambda, \mu) \neq 0$, od przypadków, w których dla tego dwukierunku zachodzi równość $\varphi(\lambda, \mu) = 0$. W przypadkach pierwszej kategorji tylko punkt a, b jest punktem wspólnym krzywej (58) i prostej (59), a zarazem punkt ten jest jedynym punktem styczności krzywej (58) i prostej (59). W przypadkach drugiej kategorji wszystkie punkty prostej (59) spełniają równanie (58) i każdy jej punkt właściwy jest punktem styczności, o ile nie jest punktem podwójnym. Zauważmy tutaj, że ze związku (62) wynika:

$$\alpha = -\sigma\mu, \quad \beta = \sigma\lambda,$$

gdzie σ jest czynnikiem różnym od zera. Przy uwzględnieniu tych wartości i zastosowaniu związku (61) otrzymujemy z tożsamości (115) § 10 związek:

$$\sigma^2 \varphi(\lambda, \mu) = -\Delta.$$

Ze związku tego wynika, że przy $\Delta \neq 0$ musi być $\varphi(\lambda, \mu) \neq 0$, a przy $\Delta = 0$, musi być $\varphi(\lambda, \mu) = 0$, co łączy się z własnościami stycznej, o których przed chwilą była mowa.

W przypadkach drugiej kategorji można równanie stycznej napisać w postaci, która bezpośrednio ilustruje własności stycznej w tych przypadkach. Jeżeli mianowicie uwzględnimy wzory (52) i (53) § 34 tomu I-go, to będziemy mogli równanie (65) napisać w postaci:

$$(\mathfrak{a}_2 a + \mathfrak{b}_2 b + \mathfrak{c}_2)(\mathfrak{a}_1 x + \mathfrak{b}_1 y + \mathfrak{c}_1) +$$

$$+ (\mathfrak{a}_1 a + \mathfrak{b}_1 b + \mathfrak{c}_1)(\mathfrak{a}_2 x + \mathfrak{b}_2 y + \mathfrak{c}_2) = 0.$$

Gdy punkt a, b spełnia warunki:

$$\mathfrak{a}_1 a + \mathfrak{b}_1 b + \mathfrak{c}_1 = 0,$$

$$\mathfrak{a}_2 a + \mathfrak{b}_2 b + \mathfrak{c}_2 \neq 0,$$

wówczas równanie stycznej jest:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$

gdy zaś punkt a, b spełnia warunki:

$$a_1 a + b_1 b + c_1 \neq 0,$$

$$a_2 a + b_2 b + c_2 = 0,$$

wówczas równanie stycznej jest:

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0.$$

To stosuje się do przypadków $\delta \neq 0$ i może być zastosowane także do tych przypadków $\delta = 0$, w których równanie (58) określa dwie różne linje proste o wspólnym dwukierunku.

Zajmiemy się teraz w przypadkach $\Delta \neq 0$, t.j. w przypadkach istotnej krzywej drugiego stopnia, zbadaniem kwestji, co dzieje się ze styczną, gdy jej punkt styczności z krzywą oddala się na krzywej do nieskończoności. Zastosujemy przytem spółrzędne jednorodne $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, w których styczna określona będzie równaniem:

$$\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \gamma \bar{z} = 0, \tag{66}$$

a spółrzędne punktu a, b przedstawimy zapomocą iloczynów:

$$a = p\tau, \quad b = q\tau, \tag{67}$$

gdzie wielkości p, q są skończone, a τ jest różne od zera. Równość (61) i równanie (66) można wtedy napisać w postaci:

$$\begin{cases} \varphi(p, q) + 2(Dp + Eq)\dfrac{1}{\tau} + \dfrac{F}{\tau^2} = 0, \\ p(A\bar{x} + B\bar{y} + D\bar{z}) + q(B\bar{x} + C\bar{y} + E\bar{z}) + \\ \quad + (D\bar{x} + E\bar{y} + F\bar{z})\dfrac{1}{\tau} = 0. \end{cases} \tag{68}$$

Niech będzie naprzód $\delta \neq 0$ i rozważajmy proces graniczny, przy którym τ nieograniczenie wzrasta, a p, q zmieniają się w taki sposób, że pierwszy ze związków (68) jest stale spełniony, a stosunek $q : p$ dąży przytem do określonej wartości. Wtedy,

SPRZEDAŻ W KSIĘGARNIACH NIEDOZWOLONA

DAR TOWARZYSTWA PRZYJACIÓŁ MŁODZIEŻY AKAD...

oznaczając granicę tego stosunku przez $\mu : \lambda$, widzimy, że związki (68) dążą do związków:

$$(69)\quad \begin{cases} \varphi(\lambda, \mu) = 0, \\ \lambda(A\bar{x} + B\bar{y} + D\bar{z}) + \mu(B\bar{x} + C\bar{y} + E\bar{z}) = 0. \end{cases}$$

Stąd wynika, że gdy punkt styczności stycznej do istotnej krzywej rodzaju elips lub rodzaju hiperbol oddala się na tej krzywej w taki sposób do nieskończoności, że dąży do jednego określonego z jej punktów niewłaściwych, wówczas styczna dąży do tej z asymptot uważanej linji krzywej, która zawiera rzeczony niewłaściwy punkt. Stosownie do tej własności nazywać będziemy tę asymptotę także styczną istotnej krzywej rodzaju elips lub rodzaju hiperbol w punkcie niewłaściwym, do którego prowadzi dwukierunek asymptotyczny tej asymptoty, punkt ten zaś niewłaściwym punktem styczności.

Przechodząc teraz do przypadku $\delta = 0$, t.j. do przypadku krzywej rodzaju parabol, zauważamy, że przez zastosowanie równości:

$$A = \varepsilon \mathfrak{a}^2, \quad B = \varepsilon \mathfrak{a}\mathfrak{b}, \quad C = \varepsilon \mathfrak{b}^2,$$

można związki (68) napisać w postaci:

$$(70)\quad \begin{cases} \varepsilon(\mathfrak{a}p + \mathfrak{b}q)^2 + 2(Dp + Eq)\dfrac{1}{\tau} + \dfrac{F}{\tau^2} = 0, \\ \varepsilon(\mathfrak{a}p + \mathfrak{b}q)(\mathfrak{a}\bar{x} + \mathfrak{b}\bar{y}) + (pD + qE)\bar{z} + \\ \qquad + (D\bar{x} + E\bar{y} + F\bar{z})\dfrac{1}{\tau} = 0. \end{cases}$$

Niech będzie proces graniczny, czyniący zadość warunkom, że z pośród wielkości p, q, τ pierwsze dwie pozostają stale skończone, a trzecia dąży do nieskończoności i że spełniony jest stale pierwszy ze związków (70). Widoczne, że pierwszy ze związków (70) prowadzi naskutek tego procesu do związku:

$$\lim(q : p) = -\mathfrak{a} : \mathfrak{b},$$

a zatem drugi ze związków (70) prowadzi do związku:

$$(D\mathfrak{b} - E\mathfrak{a})\bar{z} = 0.$$

Gdy $\Delta \neq 0$, wówczas także i dwumian $D\,\mathfrak{b} - E\,\mathfrak{a}$ jest różny od zera. Widzimy więc, że gdy punkt styczności stycznej do istotnej krzywej rodzaju parabol oddala się na krzywej do nieskończoności, wówczas styczna dąży do prostej niewłaściwej. Stosownie do tego prostą niewłaściwą w tym przypadku nazywać będziemy także styczną istotnej krzywej rodzaju parabol w punkcie niewłaściwym paraboli, a ten punkt niewłaściwy punktem styczności prostej niewłaściwej.

Streszczając rezultaty uzyskane w tym paragrafie mamy wnioski następujące. Każda istotna krzywa drugiego stopnia posiada w każdym punkcie właściwym określoną właściwą linję styczną, która niema z krzywą żadnych innych punktów wspólnych. Gdy punkt styczności stycznej do istotnej krzywej rodzaju elips lub rodzaju hiperbol oddala się na tej krzywej w taki sposób do nieskończoności, że zmierza do określonego punktu niewłaściwego, wówczas styczna dąży do tej z dwóch asymptot linji krzywej, która zawiera rzeczony punkt niewłaściwy. Gdy punkt styczności stycznej do istotnej krzywej rodzaju parabol dąży na tej krzywej do nieskończoności, wówczas styczna dąży do prostej niewłaściwej. Para prostych posiada styczną w każdym punkcie właściwym nie będącym punktem podwójnym. Styczną w każdym takim punkcie pary prostych jest prosta pary przez ten punkt przechodząca.

§ 17. Styczne do krzywej stopnia drugiego, przechodzące przez dany punkt płaszczyzny.

Niech będzie znowu równanie stopnia drugiego (58), a także uogólnione równania osiowe linji prostej (59) i równanie (60), określające punkty wspólne krzywej (58) i prostej (59). Zajmiemy się naprzód zbadaniem, jakie znaczenie geometryczne ma spełnienie równości:

$$f(a, b)\,\varphi(u, v) - (\alpha u + \beta v)^2 = 0. \tag{71}$$

Jeżeli $\varphi(u, v) \neq 0$, to przy spełnieniu równości (71) równanie (60) ma pierwiastek podwójny $t = t'$, który wyraża się wzorem:

$$t' = -\frac{\alpha u + \beta v}{\varphi(u, v)}. \tag{72}$$

Wówczas spółrzędne a', b' punktu prostej, odpowiadającego temu pierwiastkowi, będą:

$$a' = a + u\,t', \quad b' = b + v\,t'.$$

Spółrzędne te spełniają równanie:

$$f(a', b') = 0, \tag{73}$$

a jeżeli przez α', β' oznaczymy wyrażenia, które otrzymują się z α, β, gdy zamiast a, b podstawimy odpowiednio a', b', to mieć będziemy:

$$\alpha' = \alpha + (A\,u + B\,v)\,t', \quad \beta' = \beta + (B\,u + C\,v)\,t'.$$

Stąd na podstawie wzoru (72) otrzymuje się:

$$\alpha'\,u + \beta'\,v = 0. \tag{74}$$

To znaczy, że dla punktu a', b' spełnione są warunki (73) i (74). Jeżeli więc wielkości α' i β' nie są obie jednocześnie zerami, to wobec założenia $\varphi(u, v) \neq 0$ prosta (59) jest w punkcie a', b' styczną linji krzywej, spełniającej warunek $\Delta \neq 0$, t.j. **styczną w punkcie a', b' istotnej krzywej drugiego stopnia.** Jeżeli zaś obie wielkości α' i β' są zerami, to punkt a', b' jest właściwym punktem podwójnym, a więc spełnione są albo warunki $\Delta = 0$, $\delta \neq 0$, albo też warunki $\Delta = 0$, $\delta = 0$, $\delta' = 0$, $\delta'' = 0$, t.j. równanie (58) przedstawia albo dwie proste spotykające się, albo też prostą podwójną. Jeżeli wówczas $t' \neq 0$, to prosta (59) jest **prostą połączenia punktów a, b i a', b'.** Jeżeli zaś $t' = 0$, to punkt a, b jest punktem podwójnym i równość (71) spełniona jest przy założeniu $\varphi(u, v) \neq 0$ **dla każdej prostej, nie należącej do prostych przedstawionych równaniem (58) i przechodzącej przez ten punkt.**

Niech będzie teraz:

$$\varphi(u, v) = 0, \quad f(a, b) \neq 0. \tag{75}$$

Równość (71) spełniona jest wtedy, gdy spełniony jest warunek:

$$\alpha\,u + \beta\,v = 0. \tag{76}$$

Przy założeniu $\delta \neq 0$ i $\Delta \neq 0$ prosta (59) jest wówczas **asymptotą istotnej krzywej rodzaju elips lub rodzaju hiperbol.**

Jeżeli zaś $\delta = 0$ i $\Delta \neq 0$, to spełnienie obecnie założonych warunków (75) i (76) jest niemożliwe, bo z równości (115) § 10 wynika, że wtedy warunki te byłyby ze sobą sprzeczne. Jeżeli zaś $\delta = 0$ i $\Delta = 0$, to warunkom (75) i (76) odpowiada linja prosta, posiadająca dwukierunek asymptotyczny tworu geometrycznego określonego równaniem (58) i przechodząca przez punkt a, b, który nie należy do tego tworu.

Wreszcie warunek (71) jest spełniony, gdy mamy jednocześnie:

$$\varphi(u, v) = 0, \quad \alpha u + \beta v = 0, \quad f(a, b) = 0.$$

Zachodzi to wówczas, gdy $\Delta = 0$ i gdy prosta (59) należy do tworu geometrycznego określonego równaniem (58).

Po tej interpretacji związku (71) zajmiemy się zadaniami następującemi:

I) Wyznaczyć takie proste właściwe, przechodzące przez dany właściwy rzeczywisty punkt a, b, żeby dla każdej z tych prostych spełniony był warunek (71).

II) Wyznaczyć takie proste właściwe, posiadające dany rzeczywisty dwukierunek $v : u$, żeby dla każdej z tych prostych spełniony był warunek (71).

W celu rozwiązania pierwszego z tych zadań wyrugujemy $t u$ i $t v$ z równań (59) i warunku (71). Otrzymujemy równanie:

$$(77) \quad f(a, b)\,\varphi(x - a, y - b) - [\alpha(x - a) + \beta(y - b)]^2 = 0,$$

które możemy napisać w postaci:

$$(78) \quad [A f(a, b) - \alpha^2](x - a)^2 + [C f(a, b) - \beta^2](y - b)^2 + 2[B f(a, b) - \alpha\beta](x - a)(y - b) = 0.$$

Jest to równanie jednorodne drugiego stopnia względem różnic $x - a$ i $y - b$. Równaniami jednorodnemi zajmowaliśmy się w § 31 tomu I. W celu zbadania równania (78) obliczymy naprzód jego wyróżnik, który oznaczymy przez δ_1. Wyróżnik ten określa się wzorem:

$$\delta_1 = [A f(a, b) - \alpha^2][C f(a, b) - \beta^2] - [B f(a, b) - \alpha\beta]^2,$$

skąd otrzymuje się:

$$\delta_1 = f(a, b)[f(a, b)\,\delta - (C\alpha^2 + A\beta^2 - 2B\alpha\beta)],$$

a korzystając z tożsamości (115) § 10 dochodzimy do wzoru:

$$\delta_1 = f(a, b)\,\Delta. \tag{79}$$

Równość (78) jest tożsamością, jeżeli spełnione są warunki:

$$A f(a, b) = \alpha^2, \quad B f(a, b) = \alpha\beta, \quad C f(a, b) = \beta^2. \tag{80}$$

Rugując z nich α i β otrzymujemy równość:

$$f(a, b)\,\delta = 0.$$

Gdy spełnione są warunki (80), wówczas i wyróżnik δ_1 jest zerem, przeto mamy także:

$$f(a, b)\,\Delta = 0.$$

Obie ostatnie równości są spełnione albo wtedy, gdy zachodzi równość:

$$f(a, b) = 0, \tag{81}$$

albo też wtedy, gdy zachodzą równości:

$$\delta = 0, \quad \Delta = 0. \tag{82}$$

Równość (81) pociąga za sobą na mocy związków (80) równości $\alpha = 0$ i $\beta = 0$, a więc także i $\gamma = 0$. Przy spełnieniu zaś równości (82) można wielomian $f(x, y)$ przedstawić wzorem:

$$f(x, y) = \varepsilon(\mathfrak{a}\,x + \mathfrak{b}\,y)^2 + 2m(\mathfrak{a}\,x + \mathfrak{b}\,y) + F$$

i wtedy warunki (80) sprowadzają się do jednego tylko warunku:

$$\varepsilon f(a, b) = [\varepsilon(\mathfrak{a}\,a + \mathfrak{b}\,b) + m]^2,$$

który jest równoważny z równością:

$$\varepsilon F - m^2 = 0.$$

Z tych rezultatów widzimy, że równość (78) może być tożsamością tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$, t.j. gdy krzywa stopnia drugiego jest parą prostych. Jeżeli przytem $\delta \neq 0$, to równość (78) jest tożsamością tylko dla punktu a, b, który jest punktem podwójnym. Widzimy więc, że jeżeli krzywa drugiego stopnia jest parą prostych

przecinających się, to każda prosta przechodząca przez punkt ich przecięcia jest rozwiązaniem zadania I. Jeżeli zaś $\delta = 0$, to równość (78) jest tożsamością tylko wtedy, gdy krzywa stopnia drugiego jest prostą podwójną, ale wówczas równość (78) jest tożsamością dla każdego właściwego punktu a, b. Stąd wynika, że jeżeli krzywa stopnia drugiego jest prostą podwójną, to każda prosta właściwa jest rozwiązaniem zadania I.

Zapytamy dalej, przy spełnieniu jakich warunków równość (78) jest równaniem prostej podwójnej. Zachodzi to wówczas, gdy (78) nie jest tożsamością i gdy spełniony jest warunek:

$$f(a, b)\,\Delta = 0\,.$$

Zatem związek (78) jest równaniem prostej podwójnej naprzód dla każdego właściwego punktu a, b, spełniającego warunek $f(a, b) = 0$ i nie będącego punktem podwójnym uważanej krzywej stopnia drugiego. Wtedy na mocy poprzednich rozważań, prosta jest styczną do krzywej w punkcie a, b. Jeżeli przeto punkt a, b jest właściwym punktem krzywej drugiego stopnia, nie będącym jej punktem podwójnym, to rozwiązaniem zadania I jest styczna do krzywej w punkcie a, b. Związek (78) jest równaniem prostej podwójnej także wtedy, gdy $\Delta = 0$, ale krzywa stopnia

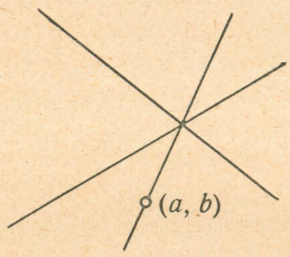

Fig. 24.

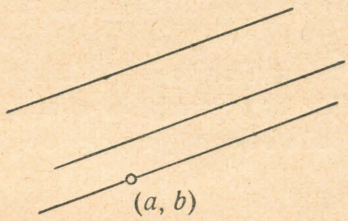

Fig. 25.

drugiego nie jest prostą podwójną, a punkt a, b jest jakimkolwiek punktem płaszczyzny, nie będącym punktem podwójnym tej krzywej. Zatem na mocy poprzednich rozważań tego paragrafu widzimy, że jeżeli krzywa stopnia drugiego jest parą prostych, nie będącą prostą podwójną, a punkt a, b jest jakimkolwiek punktem płaszczyzny, nie będącym punktem

podwójnym tej pary, to rozwiązaniem zadania I jest linja prosta, która łączy punkt a, b z punktem podwójnym pary zarówno w przypadku, gdy punkt ten jest właściwy, jak i w przypadku, gdy jest on niewłaściwy (zob. fig. 24 i fig. 25).

Wreszcie zajmiemy się przypadkami, w których równanie (78) przedstawia dwie różne od siebie linje proste, które są wówczas prostemi przecinającemi się w punkcie

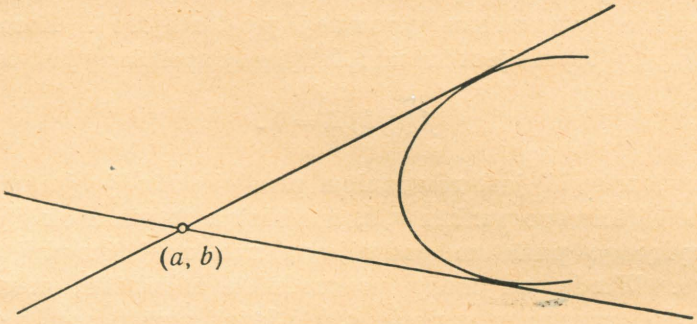

Fig. 26.

a, b. Przypadki te zachodzą wtedy, gdy wyróżnik δ_1 jest różny od zera, t.j. gdy $\Delta \neq 0$ i $f(a, b) \neq 0$. Na mocy poprzednich rozważań tego paragrafu dochodzimy do następującego rezultatu. Jeżeli uważana linja krzywa jest istotną krzywą stopnia drugiego i jeżeli punkt a, b jest właściwym punktem płaszczyzny, nie leżącym na tej linji krzywej, to rozwiązaniem zadania I są dwie różne od siebie styczne tej linji krzywej przechodzące

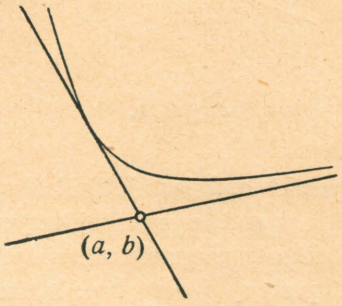

Fig. 27.

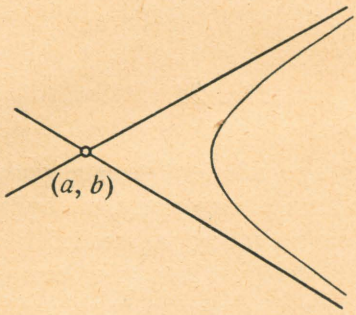

Fig. 28.

przez punkt a, b, przyczem punkt styczności każdej z nich może być ewentualnie albo punktem właściwym, albo punktem niewłaściwym (zob. fig. 26, fig. 27 i fig. 28).

Przejdziemy do bliższego rozważenia tych rezultatów.

Rozpoczniemy od przypadku $\Delta = 0$, $\delta \neq 0$ i wyprowadzimy w tym przypadku z równania (78) równanie prostej, przechodzącej przez punkt podwójny i przez punkt a, b nie będący punktem podwójnym (fig. 24). Na podstawie tożsamości (115) § 10 mamy w uważanym obecnie przypadku:

$$f(a, b) = \frac{1}{\delta}(C\alpha^2 + A\beta^2 - 2B\alpha\beta).$$

Korzystając z tego związku otrzymujemy:

$$A f(a, b) - \alpha^2 = \frac{1}{\delta}(A\beta - B\alpha)^2,$$

$$B f(a, b) - \alpha\beta = \frac{1}{\delta}(A\beta - B\alpha)(B\beta - C\alpha),$$

$$C f(a, b) - \beta^2 = \frac{1}{\delta}(B\beta - C\alpha)^2,$$

a na podstawie tych wzorów widzimy, że prosta podwójna przedstawiona w tym przypadku równaniem (78) jest prostą:

$$(A\beta - B\alpha)(x - a) + (B\beta - C\alpha)(y - b) = 0.$$

Ale łatwo sprawdzić, że to ostatnie równanie można napisać w postaci:

$$\beta(Ax + By + D) - \alpha(Bx + Cy + E) = 0.$$

Jest to równanie prostej, na której leży i punkt a, b i punkt podwójny uważanej pary prostych.

Załóżmy teraz, że $\Delta = 0$ i $\delta = 0$, ale że uważana para prostych nie jest prostą podwójną (fig. 25). W tym przypadku można doprowadzić równanie (78) do postaci:

$$(\varepsilon F - m^2)[\mathfrak{a}(x - a) + \mathfrak{b}(y - b)]^2 = 0,$$

gdzie $\varepsilon F - m^2$ jest przy obecnych założeniach różne od zera.

Zatem równanie linji prostej, będącej w tym przypadku rozwiązaniem zadania I, jest:

$$\mathfrak{a}(x-a)+\mathfrak{b}(y-b)=0;$$

jest to więc linja prosta, przechodząca przez punkt a, b, której dwukierunek jest podwójnym dwukierunkiem asymptotycznym.

Dla rozważenia dalszych wyników zauważymy, że na podstawie wzoru (118) § 10 można równanie (77) obecnego paragrafu napisać w postaci:

$$f(a,b)f(x,y)-(\alpha x+\beta y+\gamma)^2=0. \tag{83}$$

Założymy, że $\Delta \neq 0$, t.j. że równanie $f(x,y)=0$ przedstawia istotną krzywą drugiego stopnia. Przy spełnieniu nierówności $\Delta \neq 0$ i $\delta_1 \neq 0$ równanie (77) określa dwie styczne do tej krzywej, przechodzące przez dany właściwy punkt a, b, przyczem rozumiemy to w ten sposób, że w pewnych przypadkach punkt styczności jest punktem niewłaściwym, t.j. że styczna w takim punkcie jest asymptotą. Przy założeniach zaś $\Delta \neq 0$ i $\delta_1 = 0$ równanie (77) określa styczną do krzywej w jej właściwym punkcie a, b. Według sformułowania zadania I właściwy punkt a, b jest punktem rzeczywistym, a więc spółczynniki równania (77), (78) lub (83) są rzeczywiste i równanie to określa pewną parę prostych, którą nazwiemy parą stycznych właściwych istotnej krzywej stopnia drugiego, przechodzących przez dany rzeczywisty właściwy punkt płaszczyzny. Wyróżnik tej pary stycznych określony jest wzorem (79).

Jeżeli właściwy punkt a, b leży na krzywej, to wyróżnik δ_1 jest zerem, a z równania (83) wynika związek:

$$\alpha x+\beta y+\gamma=0,$$

który jest równaniem stycznej do krzywej w tym punkcie.

Jeżeli właściwy punkt a, b nie jest punktem krzywej drugiego stopnia, to δ_1 jest różne od zera i równanie pary stycznych określa dwie styczne, które przedstawimy zapomocą równań postaci osiowej:

$$x=a+\lambda_1 r,\quad y=b+\mu_1 r, \tag{84}$$

$$x=a+\lambda_2 r,\quad y=b+\mu_2 r. \tag{85}$$

Styczne te są rzeczywiste lub urojone ze sobą sprzężone, zależnie od znaku wyróżnika δ_1. Jeżeli mianowicie $f(a, b)\,\Delta > 0$, to styczne te są urojone ze sobą sprzężone i wówczas mówić będziemy, że punkt a, b leży wewnątrz istotnej krzywej drugiego stopnia, jeżeli zaś $f(a, b)\,\Delta < 0$, styczne te są rzeczywiste i wówczas mówić będziemy, że punkt a, b leży zewnątrz istotnej krzywej drugiego stopnia. Punkty styczności prostych (84) i (85) z krzywą położone są na krzywej, a więc na podstawie równania (83) spełniają jednocześnie równania:

$$f(x, y) = 0, \tag{86}$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0, \tag{87}$$

t.j. są punktami wspólnemi danej krzywej (86) i prostej (87). Stąd wynika, że jeden z rzeczonych punktów styczności jest wspólnym punktem prostych (84) i (87), drugi zaś jest wspólnym punktem prostych (85) i (87). Ponieważ prosta (87) jest przy naszych założeniach zawsze prostą rzeczywistą, przeto rzeczone punkty styczności są urojone ze sobą sprzężone, gdy proste (84) i (85) są urojone ze sobą sprzężone, są zaś rzeczywiste, gdy proste (84) i (85) są rzeczywiste.

Punkty styczności stycznych uważanej pary prostych mogą być bądź właściwe, bądź też niewłaściwe. Niewłaściwe punkty styczności są niewłaściwemi punktami krzywej, do których prowadzą jej dwukierunki asymptotyczne. Postaramy się wyodrębnić przypadki, w których bądź jeden, bądź też oba punkty styczności są punktami niewłaściwemi.

Rozpoczynając od badania przypadku, w którym oba punkty styczności są punktami niewłaściwemi, przyjmujemy, że dwukierunki prostych (84) i (85), t.j. dwukierunki $\mu_1 : \lambda_1$ i $\mu_2 : \lambda_2$, są oba asymptotycznemi dwukierunkami krzywej (fig. 28). To może mieć miejsce tylko dla przypadków, w których $\delta = 0$. Ponieważ punkty niewłaściwe, odpowiadające tym dwukierunkom, mają być punktami styczności, przeto muszą leżeć na prostej (87), t.j. muszą być jednocześnie spełnione równości:

$$\alpha \lambda_1 + \beta \mu_1 = 0, \quad \alpha \lambda_2 + \beta \mu_2 = 0,$$

skąd wynika:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0.$$

Zatem punkt a, b jest wówczas środkiem krzywej, a ponieważ na skutek założenia $\Delta \neq 0$ mamy $\gamma \neq 0$, przeto prosta (87) jest prostą niewłaściwą. W tym przypadku rzeczywista para stycznych jest parą asymptot.

Przyjmijmy teraz, że tylko jeden z punktów styczności prostych uważanej pary jest punktem niewłaściwym (fig. 27). Założymy naprzód, że $\delta < 0$, zaznaczając, że wtedy asymptoty krzywej są rzeczywiste. Jeżeli niewłaściwym punktem jest punkt styczności prostej (84), to dwukierunek tej prostej $\mu_1 : \lambda_1$ jest dwukierunkiem asymptotycznym. Wtedy na podstawie równania prostej (87), na której leżą oba punkty styczności, mamy równość:

$$\alpha \lambda_1 + \beta \mu_1 = 0,$$

w której wielkości α i β nie są obie jednocześnie zerami, bo w takim przypadku i drugi punkt styczności byłby punktem niewłaściwym. Widzimy więc, że wtedy punkt a, b leży na asymptocie krzywej, odpowiadającej dwukierunkowi asymptotycznemu $\mu_1 : \lambda_1$, ale że nie jest środkiem krzywej. Wówczas prosta (87) jest prostą właściwą równoległą do asymptoty i przecina krzywą jeszcze w punkcie właściwym rzeczywistym, który jest punktem styczności prostej (85). To znaczy, że wtedy para stycznych składa się ze stycznej w tym właściwym rzeczywistym punkcie i z asymptoty o dwukierunku $\mu_1 : \lambda_1$. Podobnie, jeżeli tylko punkt styczności prostej (85) jest punktem niewłaściwym, wyprowadzimy tak samo rezultat analogiczny, przyczem tylko role prostych (84) i (85) będą przestawione. Ale rozważania tego nie można zastosować przy założeniu $\delta > 0$, wtedy bowiem asymptoty są urojone ze sobą sprzężone i prócz środka niema na nich żadnego innego rzeczywistego punktu. To znaczy, że przy założeniu $\delta > 0$ uważana para stycznych niema przy żadnym wyborze właściwego rzeczywistego punktu a, b takich punktów styczności, z których jeden byłby punktem właściwym, a drugi punktem niewłaściwym. Jeżeli wreszcie $\delta = 0$, to żaden punkt styczności uważanej pary stycznych nie jest punktem niewłaściwym. Istotnie, gdyby istniał taki niewłaściwy punkt styczności, to styczna w tym punkcie musiałaby być prostą właściwą, co sprzeciwia się faktowi, że styczna w punkcie niewłaściwym istotnej krzywej drugiego stopnia jest w uważanym przypadku prostą niewłaściwą.

Streszczając wyniki otrzymane w tem rozważaniu możemy powiedzieć, że punkty styczności pary stycznych

istotnej krzywej stopnia drugiego, przechodzących przez dany rzeczywisty właściwy punkt a, b, nie leżący na tej krzywej, są oba punktami właściwemi (fig. 26) z wyjątkiem przypadków następujących. Jeżeli $\delta \neq 0$ i punkt a, b jest środkiem krzywej, to oba punkty styczności są punktami niewłaściwemi. Jeżeli $\delta < 0$ i właściwy punkt a, b nie jest środkiem, ale leży na jednej z asymptot, to jeden z punktów styczności jest niewłaściwym punktem tej asymptoty, drugi zaś jest właściwym rzeczywistym punktem krzywej.

Zwróćmy się teraz do zadania II. W stosunku do tego zadania warunek (71) wogóle charakteryzuje wszystkie takie punkty a, b, że dla prostych, przechodzących przez te punkty i posiadających dany dwukierunek $v : u$, równanie (60) ma pierwiastek podwójny na t. Jeżeli więc równanie miejsca geometrycznego tych punktów chcemy napisać w spółrzędnych bieżących x, y, to trzeba tylko zamiast a, b wstawić w ten warunek x, y. Ze względu na rzeczone równanie i mające nastąpić rachunki wprowadzimy jeszcze oznaczenia:

$$(88) \qquad \begin{cases} L = A x + B y + D, \\ M = B x + C y + E, \\ N = D x + E y + F. \end{cases}$$

Wówczas równanie, o które chodzi, można będzie napisać w postaci:

$$(89) \qquad \varphi(u, v) f(x, y) - (u L + v M)^2 = 0.$$

Równanie to można także otrzymać przez rugowanie wielkości a, b i t z równań (59) i z warunku (71). Na podstawie równań (59) mamy związki:

$$\alpha = L - (A u + B v) t,$$

$$\beta = M - (B u + C v) t,$$

skąd wynika:

$$(90) \qquad \alpha u + \beta v = u L + v M - \varphi(u, v) t,$$

na podstawie zaś wzoru (6) § 6 otrzymamy łatwo związek:

$$(91) \qquad f(a, b) = \varphi(u, v) t^2 - 2 (u L + v M) t + f(x, y).$$

Jeżeli w związek (71) wstawimy wyrażenia (90) i (91), to otrzymamy równanie (89).

Zajmiemy się przekształceniem równania (89). Niech będzie wyrażenie:

$$(92) \qquad W = -\begin{vmatrix} A, & B, & D & , -v \\ B, & C, & E & , u \\ D, & E, & F & , vx - uy \\ -v, & u, & vx - uy, & 0 \end{vmatrix}.$$

Jeżeli elementy pierwszego wiersza w podanym tu wyznaczniku czwartego stopnia pomnożymy przez x, elementy drugiego wiersza przez y i iloczyny te dodamy do elementów trzeciego wiersza, to otrzymamy:

$$W = -\begin{vmatrix} A, & B, & D & , -v \\ B, & C, & E & , u \\ L, & M, & N & , 0 \\ -v, & u, & vx - uy, & 0 \end{vmatrix},$$

Mnożąc zaś elementy pierwszej kolumny ostatniego wyznacznika przez x, elementy drugiej przez y i dodając te iloczyny do elementów trzeciej kolumny oraz uwzględniając równość:

$$Lx + My + N = f(x, y),$$

otrzymamy wyrażenie:

$$W = -\begin{vmatrix} A, & B, & L & , -v \\ B, & C, & M & , u \\ L, & M, & f(x, y), & 0 \\ -v, & u, & 0 & , 0 \end{vmatrix}.$$

Jeżeli obliczymy ten wyznacznik czwartego stopnia, to dojdziemy do wzoru:

$$W = \varphi(u, v) f(x, y) - (uL + vM)^2.$$

Inaczej obliczając bezpośrednio wyznacznik (92) i stosując oznaczenia przyjęte w § 33 tomu I-go, otrzymamy wyrażenie:

$$W = \delta (v\,x - u\,y)^2 + 2\,(k'\,u - k''\,v)\,(v\,x - u\,y) + \delta''\,u^2 - 2\,k\,u\,v + \delta'\,v^2.$$

Widzimy przeto, że równanie (89) można napisać w postaci:

$$\delta (v\,x - u\,y)^2 + 2\,(k'\,u - k''\,v)\,(v\,x - u\,y) + \tag{93}$$
$$+ \delta''\,u^2 - 2\,k\,u\,v + \delta'\,v^2 = 0$$

i na tej postaci oprzemy badanie własności tego równania.

Równanie to jest wogóle równaniem drugiego stopnia względem różnicy $v\,x - u\,y$. Jeżeli wyróżnik tego równania oznaczymy przez δ_2, to mieć będziemy:

$$\delta_2 = \delta\,(\delta''\,u^2 - 2\,k\,u\,v + \delta'\,v^2) - (k'\,u - k''\,v)^2, \tag{94}$$

a stąd przez wykonanie wskazanych działań otrzymamy:

$$\delta_2 = (\delta''\,\delta - k'^2)\,u^2 + 2\,(k'\,k'' - k\,\delta)\,u\,v + (\delta\,\delta' - k''^2)\,v^2.$$

Z tego ostatniego wzoru, na podstawie związków udowodnionych w § 33 tomu I-go, otrzymujemy na wyróżnik δ_2 wzór następujący:

$$\delta_2 = \varphi\,(u, v)\,\Delta. \tag{95}$$

W przypadkach $\delta = 0$ znika w równaniu (93) wyraz drugiego stopnia względem $v\,x - u\,y$. W tych przypadkach przedstawimy równanie (93) inaczej przez zastosowanie wielkości $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$. Otrzymujemy tą drogą wyrażenia:

$$k' = \varepsilon\,\mathfrak{a}\,(D\,\mathfrak{b} - E\,\mathfrak{a}), \quad k'' = -\,\varepsilon\,\mathfrak{b}\,(D\,\mathfrak{b} - E\,\mathfrak{a}),$$

$$\delta'' = \varepsilon\,\mathfrak{a}^2\,F - D^2, \quad k = -\,(\varepsilon\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,F - D\,E), \quad \delta' = \varepsilon\,\mathfrak{b}^2\,F - E^2,$$

na podstawie których równanie (93) można w tych przypadkach zastąpić przez równanie:

$$2\,\varepsilon\,(D\,\mathfrak{b} - E\,\mathfrak{a})\,(\mathfrak{a}\,u + \mathfrak{b}\,v)\,(v\,x - u\,y) + \tag{96}$$
$$+ \varepsilon\,F\,(\mathfrak{a}\,u + \mathfrak{b}\,v)^2 - (D\,u + E\,v)^2 = 0.$$

Zauważmy tu, że w tych przypadkach otrzymalibyśmy ze wzoru (94) na wyróżnik δ_2 wyrażenie:

$$\delta_2 = -\,(D\,\mathfrak{b} - E\,\mathfrak{a})^2\,(\mathfrak{a}\,u + \mathfrak{b}\,v)^2.$$

Zbadamy naprzód przypadki, w których równość (93) jest albo sprzecznością, albo też spełnia się tożsamościowo. Jeden i drugi z tych przypadków zachodzić może ewentualnie tylko wtedy, gdy $\delta = 0$. To znaczy, że dla zbadania tych przypadków możemy oprzeć się na równaniu (96). Przy założeniu $D\,\mathfrak{b} - E\,\mathfrak{a} \neq 0$ równanie (96) nie zawiera wyrazu pierwszego stopnia, gdy $\mathfrak{a}\,u + \mathfrak{b}\,v = 0$, t.j. gdy dwukierunek $v : u$ jest dwukierunkiem asymptotycznym; wtedy z równania (96) otrzymujemy przy rzeczonem założeniu sprzeczność. To znaczy, że w przypadku istotnej krzywej rodzaju parabol niema prostej właściwej o asymptotycznym dwukierunku, która byłaby rozwiązaniem zadania II. W przypadku zaś $D\,\mathfrak{b} - E\,\mathfrak{a} = 0$, t.j. w przypadku istnienia takiego czynnika m, że $D = m\,\mathfrak{a}$, $E = m\,\mathfrak{b}$ lewa strona równania (96) sprowadza się do wyrazu:

$$(\varepsilon F - m^2)\,(\mathfrak{a}\,u + \mathfrak{b}\,v)^2.$$

Stąd wynika naprzód, że w przypadku pary prostych o wspólnym dwukierunku, nie będącej prostą podwójną, niema prostej właściwej, posiadającej dwukierunek nieasymptotyczny, która byłaby rozwiązaniem zadania II, a natomiast każda prosta o asymptotycznym dwukierunku jest rozwiązaniem zadania II. Stąd wynika także, że w przypadku prostej podwójnej każda dowolna prosta właściwa jest rozwiązaniem zadania II.

Przejdziemy teraz do rozważenia przypadków, w których równanie (93) przedstawia właściwą prostą podwójną. Z rozważań naszych widać bezpośrednio, że nie może to zachodzić przy $\delta = 0$. Jeżeli zaś $\delta \neq 0$, zachodzi to dla każdego dwukierunku $v : u$, gdy $\Delta = 0$, a tylko dla dwukierunków asymptotycznych, gdy $\Delta \neq 0$. Na podstawie wstępnych rozważań obecnego paragrafu wnosimy, że gdy $\Delta = 0$, $\delta \neq 0$, t.j. dla pary prostych spotykających się rozwiązaniem zadania II jest prosta o danym dwukierunku $v : u$, przechodząca przez punkt podwójny uważanej pary prostych. Zważywszy, że punkt podwójny określa się wzorami (16) § 12, widzimy, że równanie tej prostej można napisać w formie:

$$\delta\,(v\,x - u\,y) + k'\,u - k''\,v = 0.$$

Z drugiej strony, podnosząc lewą stronę tego równania do kwadratu i uwzględniając, że $\delta_2 = 0$, otrzymujemy lewą stronę rów-

nania (93) pomnożoną przez δ. Gdy zaś $\Delta \neq 0$, $\delta < 0$ i dany dwukierunek $v : u$ jest dwukierunkiem asymptotycznym, wówczas otrzymujemy asymptotę, to znaczy, że dla każdego asymptotycznego dwukierunku istotnej krzywej rodzaju hiperbol rozwiązaniem zadania II jest należąca do tego dwukierunku asymptota tej linji krzywej. Równanie tej asymptoty jest:

$$u(Ax + By + D) + v(Bx + Cy + E) = 0$$

przy spełnieniu równości $\varphi(u, v) = 0$, co też, biorąc pod uwagę oznaczenia (88), dostrzegamy także bezpośrednio z równania (89). Analogiczny rezultat przy założeniu $\delta > 0$ nie stosuje się do naszego zadania II, bo wtedy dwukierunki asymptotyczne są urojone, a w zadaniu II założyliśmy, że dany dwukierunek $v : u$ jest rzeczywisty.

Przechodzimy teraz do rozważenia przypadków, w których $\delta_2 \neq 0$, t.j. $\Delta \neq 0$ i $\varphi(u, v) \neq 0$. Na podstawie wstępnych rozważań tego paragrafu wnioskujemy, że w przypadku $\delta \neq 0$ równanie (93) określa dwie różne od siebie styczne do krzywej w jej punktach właściwych, a w przypadku $\delta = 0$ równanie (96) określa jedną styczną do krzywej w jej punkcie właściwym. To znaczy, że dla istotnej krzywej rodzaju elips lub rodzaju hiperbol i danego nieasymptotycznego dwukierunku $v : u$, rozwiązaniem zadania II są dwie różne od siebie styczne do tej krzywej (zob. fig. 29 i fig. 30), przyczem punkty styczności są punktami właściwemi,

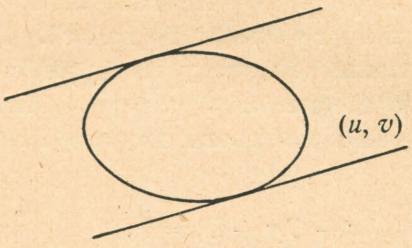

Fig. 29.

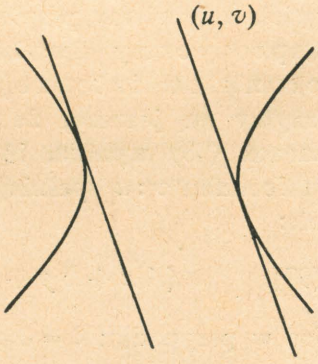

Fig. 30.

a dla istotnej krzywej rodzaju parabol i danego dwukierunku nieasymptotycznego $v:u$, rozwiązaniem zadania II jest jedna styczna do tej krzywej, przyczem punkt styczności jest również punktem właściwym. Analogicznie do nazwy zastosowanej w zadaniu I nazwiemy parę prostych określonych równaniem (93) przy założeniach $\Delta \neq 0$, $\delta \neq 0$ parą stycznych właściwych istotnej krzywej rodzaju elips, względnie rodzaju hiperbol, posiadających wspólny dany dwukierunek rzeczywisty, zaznaczając, że ta para stycznych jest prostą podwójną tylko dla asymptotycznych dwukierunków krzywej rodzaju hiperbol, przyczem jest ona w każdym takim przypadku należącą do asymptotycznego dwukierunku asymptotą. Tej nazwy nie możemy zastosować do przypadku $\Delta \neq 0$, $\delta = 0$, w tym przypadku bowiem równanie (93) określa jedną styczną właściwą istotnej krzywej rodzaju parabol, posiadającą dany rzeczywisty dwukierunek nieasymptotyczny. W przypadkach $\delta \neq 0$ i $\delta_2 \neq 0$ styczne pary są dwiema prostemi urojonemi ze sobą sprzężonemi, gdy $\varphi(u, v)\,\Delta > 0$, są zaś dwiema prostemi rzeczywistemi, gdy $\varphi(u, v)\,\Delta < 0$. Powiemy przytem w pierwszym z tych przypadków, że rzeczywisty dwukierunek nieasymptotyczny $v:u$ jest dwukierunkiem wewnętrznym istotnej krzywej rodzaju elips, względnie rodzaju hiperbol, a w drugim przypadku, że rzeczywisty dwukierunek nieasymptotyczny $v:u$ jest dwukierunkiem zewnętrznym krzywej rodzaju elips, względnie rodzaju hiperbol. Jeżeli $\delta = 0$, to styczna o nieasymptotycznym rzeczywistym dwukierunku $v:u$ jest zawsze rzeczywista i powiemy przytem, że każdy rzeczywisty nieasymptotyczny dwukierunek jest zewnętrznym dwukierunkiem istotnej krzywej rodzaju parabol. Zauważymy tu jeszcze, że z równania (89) przy uwzględnieniu oznaczeń (88) wynika, iż punkty styczności stycznej o danym dwukierunku $v:u$ spełniają jednocześnie równanie krzywej i równanie:

$$u(Ax + By + D) + v(Bx + Cy + E) = 0, \tag{97}$$

które w przypadku $\delta = 0$ można także napisać w postaci:

$$\varepsilon(\mathfrak{a}u + \mathfrak{b}v)(\mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y) + Du + Ev = 0. \tag{98}$$

Dla pary stycznych o danym rzeczywistym dwukierunku $v : u$ w przypadku istotnej krzywej rodzaju elips lub rodzaju hiperbol, punkty styczności są urojone ze sobą sprzężone lub rzeczywiste zależnie od tego, czy styczne są urojone ze sobą sprzężone, czy też rzeczywiste. Punkt styczności stycznej o danym rzeczywistym nieasymptotycznym dwukierunku $v : u$, w przypadku istotnej krzywej rodzaju parabol, jest zawsze punktem rzeczywistym. Punkty styczności we wszystkich tych przypadkach są punktami właściwemi z wyjątkiem niewłaściwych punktów styczności asymptot właściwej krzywej rodzaju hiperbol.

Rozwiązania zagadnień I i II, które uzyskaliśmy w tym paragrafie, wykazują pewną zasadniczą różnicę, na którą zwrócimy teraz uwagę czytelnika. Rozwiązaniem zadania I jest równanie drugiego stopnia względem spółrzędnych bieżącego punktu. Rozwiązaniem zadania II jest równanie drugiego stopnia względem spółrzędnych bieżącego punktu, tylko dla krzywych rodzaju elips i rodzaju hiperbol, jest zaś równanie pierwszego stopnia względem tych spółrzędnych dla krzywych rodzaju parabol. W zadaniach tych szukaliśmy tylko prostych właściwych, spełniających pewne szczególne warunki. Ale zamiast tych zadań można traktować jedno zadanie ogólne, którego rozwiązaniami mogą być zarówno proste właściwe jak i prosta niewłaściwa. To zadanie ogólne prowadzi zawsze do równania drugiego stopnia i ogólniejszego układu rozważań, który obejmuje i uzupełnia rezultaty zadań I i II. Tem zadaniem ogólnem, jak również związaną z niem ogólną teorją linij prostych, zwanych biegunowemi, zajmiemy się dopiero w dalszym ciągu tych wykładów. Ale, żeby czytelnik mógł już teraz dostrzec możliwość tego uogólnienia podamy w tem miejscu analityczne określenie biegunowej, z którego przekonamy się, że już wielokrotnie spotykaliśmy się ze szczególnemi przypadkami tej linji prostej.

Niech będzie w spółrzędnych jednorodnych punkt $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ i napiszmy również w spółrzędnych jednorodnych $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ równanie:

$$(99) \qquad (A\bar{a} + B\bar{b} + D\bar{c})\bar{x} + (B\bar{a} + C\bar{b} + E\bar{c})\bar{y} + (D\bar{a} + E\bar{b} + F\bar{c})\bar{z} = 0.$$

Równanie to jest tożsamością wtedy i tylko wtedy, gdy punkt $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ jest punktem podwójnym krzywej $f(x, y) = 0$. Jeżeli zaś

punkt $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ nie jest punktem podwójnym tej krzywej, to równanie (99) określa w spółrzędnych bieżących $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ linję prostą, która nazywa się biegunową punktu $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ w stosunku do krzywej drugiego stopnia $f(x, y) = 0$. Jeżeli punkt $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ jest właściwym lub niewłaściwym środkiem krzywej $f(x, y) = 0$, ale nie jest jej punktem podwójnym, to w równaniu (99) spółczynniki przy $\bar{x}$ i $\bar{y}$ są zerami, a spółczynnik przy $\bar{z}$ jest różny od zera. Stąd wynika, że biegunową właściwego lub niewłaściwego środka krzywej drugiego stopnia, nie będącego zarazem jej punktem podwójnym, jest w stosunku do tej samej krzywej linja prosta niewłaściwa. Dalej zauważmy, że jeżeli $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ jest punktem właściwym o spółrzędnych prostolinjowych a, b i jeżeli równanie (99) wyrazimy w spółrzędnych prostolinjowych x, y, to otrzymamy równanie (87). Podobnież, jeżeli $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ jest punktem niewłaściwym i jeżeli mamy $\bar{a} : \bar{b} : \bar{c} = u : v : 0$, to wyrażając równanie (99) w spółrzędnych prostolinjowych x, y otrzymamy równanie (97). Równania (87) i (97) odegrywają, jak widzieliśmy, ważną rolę w naszych zadaniach I i II. Szczególnym przypadkiem pierwszego z tych równań jest równanie stycznej w danym punkcie krzywej, a szczególnym przypadkiem drugiego z nich jest równanie asymptoty o danym niepodwójnym dwukierunku asymptotycznym. Stąd wnosimy, że pewne twory geometryczne, o których mówiliśmy w §§ 12, 14, 16 i 17 tego rozdziału są w bezpośrednim związku z biegunową określoną równaniem (99).

§ 18. O położeniu punktów styczności pary stycznych do istotnej krzywej stopnia drugiego.

Zajmiemy się tutaj pewnemi własnościami stycznych do elipsy, hiperboli i paraboli, przechodzących przez dany punkt płaszczyzny. Przyjmiemy, że te krzywe określone są ich równaniami kanonicznemi, wyprowadzonemi w § 1 i § 3.

Jeżeli naprzód oznaczymy przez p i q połowy osi elipsy względnie hiperboli, to równanie (6) § 1 otrzyma postać:

$$f(x, y) = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{\varepsilon q^2} - 1 = 0, \tag{100}$$

gdzie dla elipsy $\varepsilon = +1$, dla hiperboli zaś $\varepsilon = -1$. Wtedy mieć będziemy:

$$\Delta = -\frac{\varepsilon}{p^2 q^2}$$

i według sposobu wyrażania się, który przyjęliśmy w paragrafie poprzednim, punkt a, b leży wewnątrz krzywej, gdy wyrażenie:

$$-\frac{\varepsilon}{p^2 q^2}\left(\frac{a^2}{p^2}+\frac{b^2}{\varepsilon q^2}-1\right)$$

ma znak dodatni, leży zaś zewnątrz krzywej, gdy wyrażenie to ma znak ujemny. Środkiem krzywej jest w uważanym przypadku punkt $a = 0$, $b = 0$; dla tego punktu wyrażenie to ma ten sam znak co ε. To znaczy, że punkt a, b, położony po tej samej stronie krzywej, co jej środek, jest w przypadku elipsy punktem wewnętrznym, a w przypadku hiperboli punktem zewnętrznym. To rozstrzyga bezpośrednio, czy para stycznych, przechodzących przez dany właściwy rzeczywisty punkt a, b, nie leżący na krzywej, składa się ze stycznych urojonych ze sobą sprzężonych, czy też ze stycznych rzeczywistych. Także można łatwo wywnioskować bezpośrednio, które z uważanych par stycznych nie mają niewłaściwych punktów styczności, które zaś mają bądź jeden niewłaściwy punkt styczności, bądź też dwa niewłaściwe punkty styczności.

Równanie paraboli można na podstawie wzoru (30) § 3 napisać w postaci:

$$f(x, y) = y^2 - 2px = 0 \tag{101}$$

i w tym przypadku mamy:

$$\Delta = -p^2.$$

Weźmy pod uwagę wyrażenie:

$$-p^2(b^2 - 2pa);$$

spółrzędne ogniska paraboli są: $a = \frac{p}{2}$, $b = 0$, t.j. dla ogniska wyrażenie to jest dodatnie. Stąd wynika, że punkt a, b, położony po tej samej stronie paraboli co jej ognisko, jest w stosunku do niej punktem wewnętrznym. To pozwala rozstrzygnąć w zależności od położenia punktu a, b, czy rzeczywista para stycznych

składa się ze stycznych urojonych ze sobą sprzężonych, czy też ze stycznych rzeczywistych. W przypadku paraboli punkty styczności rzeczywistej pary stycznych właściwych są zawsze punktami właściwemi.

W dalszym ciągu zwrócimy uwagę na to, że osie, do których odniesione są równania kanoniczne elipsy, hiperboli i paraboli dzielą te linje krzywe na pewne łuki, które w przypadku elipsy są skończone, a w przypadkach hiperboli i paraboli są nieskończone. Można rozważać zależność, która zachodzi pomiędzy położeniem zewnętrznego punktu a, b i przynależnością punktów styczności stycznych, przechodzących przez ten punkt a, b, do pewnych określonych z tych łuków, względnie do ich ograniczeń. Wnioskowanie w tej kwestji opierać będziemy na związkach analitycznych, które wynikają dla rzeczonych punktów styczności z równań kanonicznych uważanych linij krzywych.

Rozpoczynając od elipsy względnie hiperboli, mieć będziemy na mocy związków (86) i (87) równania:

$$(102) \qquad \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{\varepsilon q^2} = 1, \quad \frac{a x}{p^2} + \frac{b y}{\varepsilon q^2} = 1,$$

którym czynią zadość spółrzędne x, y punktów styczności stycznych, przechodzących przez punkt a, b. Załóżmy naprzód, że wielkości a, b są obie różne od zera, t.j. że punkt a, b nie leży na żadnej z osi spółrzędnych. Rugując z równań (102) naprzód y, a potem x, otrzymujemy dwa równania:

$$(103) \qquad \begin{cases} \left(\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{\varepsilon q^2}\right)\frac{x^2}{p^2} - 2\frac{a x}{p^2} + 1 - \frac{b^2}{\varepsilon q^2} = 0, \\ \left(\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{\varepsilon q^2}\right)\frac{y^2}{\varepsilon q^2} - 2\frac{b y}{\varepsilon q^2} + 1 - \frac{a^2}{p^2} = 0. \end{cases}$$

Zauważmy przytem, że gdy $b = 0$ i $a \neq 0$, wówczas równania te redukują się do związków:

$$x = \frac{p^2}{a}, \quad \frac{y^2}{\varepsilon q^2} = 1 - \frac{p^2}{a^2},$$

które są zgodne ze związkami, wynikającemi w tym przypadku z równań (102). Podobnież, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$, wówczas równania (103) redukują się do związków:

$$\frac{x^2}{p^2} = 1 - \frac{\varepsilon q^2}{b^2}, \quad y = \frac{\varepsilon q^2}{b},$$

które są zgodne ze związkami, wynikającemi w tym przypadku z równań (102). Jeżeliby było $a = 0$, $b = 0$, to drugie z równań (102) byłoby sprzecznością i przytem oba równania (103) byłyby sprzecznościami. Wyróżniki równań (103) są odpowiednio równe wyrażeniom:

$$(104) \qquad \begin{cases} \dfrac{b^2}{\varepsilon p^2 q^2}\left(1 - \dfrac{a^2}{p^2} - \dfrac{b^2}{\varepsilon q^2}\right), \\ \dfrac{a^2}{\varepsilon p^2 q^2}\left(1 - \dfrac{a^2}{p^2} - \dfrac{b^2}{\varepsilon q^2}\right). \end{cases}$$

Naskutek założenia, że punkt a, b jest zewnętrznym punktem względem odnośnej linji krzywej, wyróżniki te nie mogą mieć wartości dodatnich. Zwrócimy teraz uwagę na wartość sumy:

$$(105) \qquad \frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{\varepsilon q^2},$$

w której a, b oznaczają spółrzędne zewnętrznego punktu względem odnośnej linji krzywej. Gdy krzywa jest elipsą, suma (105) ma stale wartość dodatnią. Gdy krzywa jest hiperbolą, suma (105) ma wartość dodatnią wewnątrz obszarów ograniczonych asymptotami i zawierających oś rzeczywistą, ma wartość ujemną wewnątrz obszarów ograniczonych asymptotami i zawierających oś urojoną, ma wreszcie wartość zero na asymptotach. Gdy suma (105) jest różną od zera, zachodzą wzory:

$$(106) \qquad x_1 + x_2 = \frac{2a}{\dfrac{a^2}{p^2} + \dfrac{b^2}{\varepsilon q^2}}, \quad y_1 + y_2 = \frac{2b}{\dfrac{a^2}{p^2} + \dfrac{b^2}{\varepsilon q^2}},$$

a także wzory:

$$(107) \qquad x_1 x_2 = \frac{1 - \dfrac{b^2}{\varepsilon q^2}}{\dfrac{1}{p^2}\left(\dfrac{a^2}{p^2} + \dfrac{b^2}{\varepsilon q^2}\right)}, \quad y_1 y_2 = \frac{1 - \dfrac{a^2}{p^2}}{\dfrac{1}{\varepsilon q^2}\left(\dfrac{a^2}{p^2} + \dfrac{b^2}{\varepsilon q^2}\right)},$$

gdzie w jednych i w drugich x_1, x_2 oznaczają pierwiastki pierwszego z równań (103), a y_1, y_2 oznaczają pierwiastki drugiego z równań (103).

Zajmiemy się naprzód bliższem rozważeniem zadania dla elipsy. Na figurze 31 narysowany jest układ spółrzędnych x, y i elipsa. Oznaczymy przez l_1, l_2, l_3, l_4 łuki elipsy, zawarte kolejno pomiędzy jej wierzchołkami i przyjmiemy, że wierzchołki nie należą do tych łuków. Rysujemy nadto cztery styczne do elipsy w jej wierzchołkach. Elipsa i te cztery styczne dzielą część płaszczyzny, znajdującą się na zewnątrz elipsy, na dwanaście

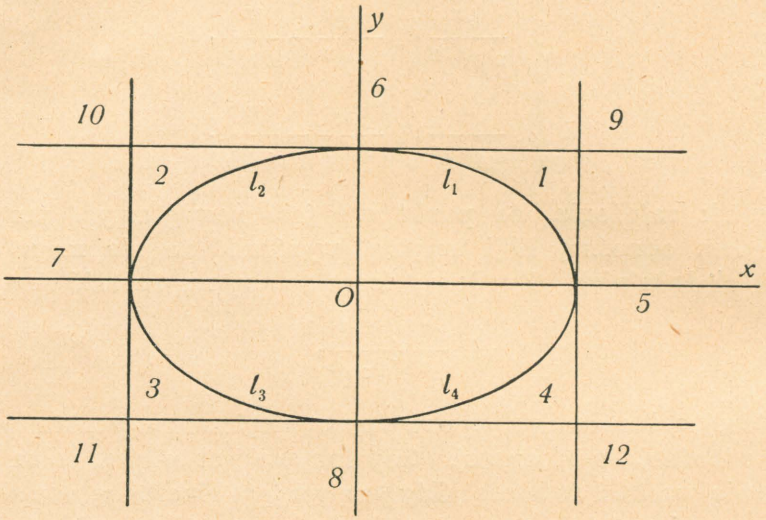

Fig. 31.

obszarów dwuwymiarowych. Obszary, znajdujące się pomiędzy elipsą i bokami prostokąta zamkniętego przez rzeczone styczne, oznaczamy numerami 1, 2, 3, 4. Nieskończone obszary pomiędzy stycznemi, zawierające nieskończone części osi spółrzędnych x, y, oznaczamy numerami 5, 6, 7, 8. Wreszcie nieskończone obszary, ograniczone tylko dwiema z rzeczonych stycznych, oznaczamy numerami 9, 10, 11, 12. Zauważmy naprzód, że prawe strony wzorów (107) są obie jednocześnie zerami, gdy punkt a, b jest jednym z wierzchołków prostokąta, którego boki są rzeczonemi stycznemi do elipsy w jej wierzchołkach. Widzimy następnie, że prawe strony wzorów (107) są obie dodatnie, gdy punkt a, b znajduje się wewnątrz rzeczonego prostokąta i że wówczas na podstawie wzorów (106) wspólny znak spółrzędnych x_1, x_2 jest ten sam, co znak spółrzędnej a, a wspólny znak spółrzędnych y_1, y_2 jest ten sam, co znak spółrzędnej b. To znaczy, że obie styczne,

przechodzące przez punkt a, b, znajdujący się wewnątrz którego-kolwiek z obszarów 1, 2, 3, 4, mają punkty styczności, położone odpowiednio na łukach l_1, l_2, l_3, l_4. Zauważamy dalej, że jeżeli prawa strona pierwszego ze wzorów (107) jest zerem, a prawa strona drugiego ze wzorów (107) jest różna od zera, to punkt a, b, nie będąc wierzchołkiem prostokąta, leży na jednej z dwóch stycznych do elipsy w jej wierzchołkach, położonych na małej osi. Jeżeli przytem prawa strona drugiego ze wzorów (107) jest dodatnia, t.j. odcięta a ma bezwzględną wartość mniejszą od p, to punkt styczności drugiej stycznej leży na łuku elipsy, ograniczającym ten sam z obszarów 1, 2, 3, 4, którego ograniczenie zawiera punkt a, b. Gdy natomiast prawa strona drugiego ze wzorów (107) jest ujemna, t.j. odcięta a ma bezwzględną wartość większą od p, wówczas drugi punkt styczności leży na tym z czterech łuków l_1, l_2, l_3, l_4, którego punkty mają odcięte o tym samym znaku, co znak odciętej a i rzędne o przeciwnym znaku znakowi rzędnej b. Przypuśćmy teraz, że prawa strona drugiego ze wzorów (107) jest zerem, a prawa strona pierwszego ze wzorów (107) jest różna od zera, t.j. że punkt a, b, nie będąc wierzchołkiem prostokąta, położony jest na jednej z dwóch stycznych do elipsy w jej wierzchołkach, leżących na wielkiej osi elipsy. Jeżeli przytem prawa strona pierwszego ze wzorów (107) jest dodatnia, t.j. rzędna b ma bezwzględną wartość mniejszą od q, to punkt styczności drugiej stycznej położony jest na łuku elipsy, ograniczającym ten sam z obszarów 1, 2, 3, 4, którego ograniczenie zawiera punkt a, b. Jeżeli zaś prawa strona pierwszego ze wzorów (107) jest ujemna, t.j. jeżeli rzędna b ma bezwzględną wartość większą od q, to drugi punkt styczności leży na tym z łuków l_1, l_2, l_3, l_4, którego punkty mają rzędne o tym samym znaku, co znak rzędnej b, a odcięte o znaku przeciwnym znakowi odciętej a. Przypuśćmy teraz, że prawa strona pierwszego ze wzorów (107) jest dodatnia, a prawa strona drugiego ze wzorów (107) jest ujemna, t.j. że punkt a, b leży albo wewnątrz obszaru 5 albo wewnątrz obszaru 7. W tych przypadkach znaki odciętych punktów styczności są te same, co znak odciętej a, a znaki rzędnych punktów styczności są różne jeden od drugiego. Zatem jedna ze stycznych przechodzących przez punkt a, b, położony wewnątrz obszaru 5, ma punkt styczności, leżący na łuku l_1, druga zaś ma punkt styczności, leżący na łuku l_4. Podobnież jedna ze stycznych, przechodzących przez punkt a, b, położony wewnątrz obszaru 7, ma punkt

styczności na łuku l_2, druga zaś ma punkt styczności na łuku l_3. Niech teraz prawa strona pierwszego ze wzorów (107) ma wartość ujemną, a prawa strona drugiego ze wzorów (107) ma wartość dodatnią, t.j. niech punkt a, b leży albo wewnątrz obszaru 6, albo też wewnątrz obszaru 8. W tych przypadkach znaki odciętych punktów styczności są różne jeden od drugiego, a znaki rzędnych punktów styczności są oba te same, co znak rzędnej b. Stąd wynika, że jedna ze stycznych, przechodzących przez punkt a, b, położony wewnątrz obszaru 6, ma punkt styczności leżący na łuku l_1, druga zaś ma punkt styczności leżący na łuku l_2. Podobnież jedna ze stycznych, przechodzących przez pnnkt a, b, położony wewnątrz obszaru 8, ma punkt styczności leżący na łuku l_3, druga zaś ma punkt styczności leżący na łuku l_4. Wreszcie trzeba rozważyć przypadki, w których prawe strony obu wzorów (107) mają wartości ujemne. Wtedy zachodzą jednocześnie nierówności $|a| > p$, $|b| > q$, t.j. punkt a, b położony jest wewnątrz jednego z obszarów 9, 10, 11, 12. Przytem zauważamy, że w punktach leżących wewnątrz obszaru 9 obie spółrzędne a, b są dodatnie, w punktach leżących wewnątrz obszaru 10 spółrzędna a jest ujemna, a spółrzędna b jest dodatnia, w punktach leżących wewnątrz obszaru 11 obie spółrzędne a, b są ujemne i wreszcie w punktach leżących wewnątrz obszaru 12 spółrzędna a jest dodatnia, a spółrzędna b jest ujemna. Z tych uwag wynikają przy wyszczególnionych pozycjach punktu a, b następujące wnioski, dotyczące wielkości x, y, które spełniają drugie z równań (102) : dla obszaru 9 te wielkości x, y nie mogą być obie jednocześnie ujemne; dla obszaru 10 nie może być jednocześnie x dodatnie, a y ujemne; dla obszaru 11 te wielkości x i y nie mogą być obie jednocześnie dodatnie; wreszcie dla obszaru 12 nie może być jednocześnie x ujemne, a y dodatnie. Z drugiej strony, ponieważ iloczyny $x_1 x_2$ i $y_1 y_2$ są w uważanych obecnie przypadkach oba ujemne, więc i odcięte dwóch punktów styczności mają różne znaki i rzędne dwóch punktów styczności mają także różne znaki, a stąd wynika, że punkty styczności leżą albo na dwóch łukach l_1 i l_3, albo też na dwóch łukach l_2 i l_4. Ale zapomocą poprzednich wniosków, dotyczących wielkości x, y, możemy dla każdego z obszarów 9, 10, 11, 12 wyłączyć jedną z tych możliwości i tą drogą dojść do konkluzyj następujących. Dwa punkty styczności stycznych do elipsy, przechodzących przez punkt, położony wewnątrz jednego z obszarów 9 i 11, leżą na

łukach l_2 i l_4, a dwa punkty styczności stycznych do elipsy, przechodzących przez punkt położony wewnątrz jednego z obszarów 10 i 12 leżą na łukach l_1 i l_3.

Zwrócimy się teraz do przeprowadzenia analogicznych rozważań dla hiperboli. Na fig. 32 mamy układ spółrzędnych x, y, hiperbolę, jej asymptoty i styczne do hiperboli w jej wierzchołkach. Oznaczamy przez l_1 i l_4 nieskończone łuki powstające przez podział prawej gałęzi hiperboli w jej wierzchołku na dwie części; analogicznie oznaczamy przez l_2 i l_3 nieskończone łuki, powstające przez podział lewej gałęzi hiperboli w jej wierzchołku na dwie części. Przyjmujemy, że rzeczone wierzchołki nie należą do tych łuków. Dwuwymiarowe obszary, zawarte pomiędzy łukami l_1, l_2, l_3, l_4 hiperboli, pomiędzy nieograniczenie zbliżającemi się do nich ramionami asymptot i wreszcie odcinkami stycznych w wierzchołkach oznaczamy odpowiednio numerami 1, 2, 3, 4.

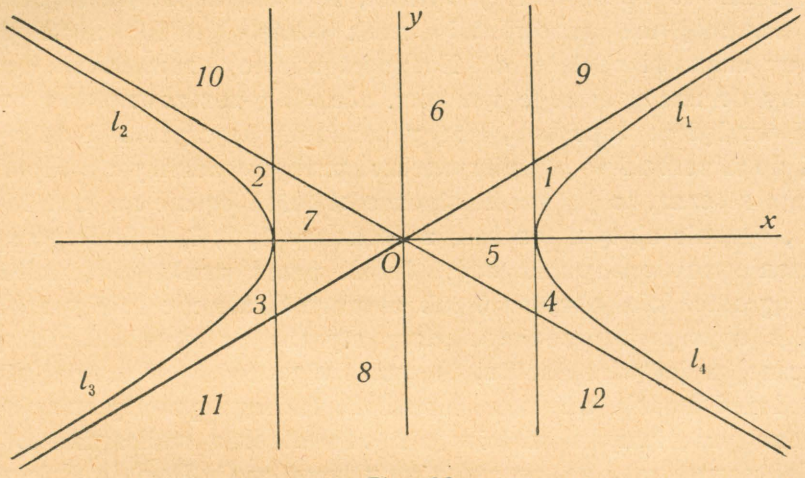

Fig. 32.

Obszary wewnętrzne trójkątów równoramiennych, których boki są odcinkami asymptot i odcinkami stycznych w wierzchołkach oznaczamy numerami 5 i 7. Nieskończone obszary pomiędzy asymptotami i stycznemi, zawierające ramiona osi y, oznaczamy numerami 6 i 8. Wreszcie pozostałe części zewnętrznej strony hiperboli t.j. obszary nieskończone, z których każdy zawarty jest pomiędzy ramieniem asymptoty i ramieniem stycznej, oznaczamy numerami 9, 10, 11, 12. W celu rozważenia zadania na podstawie równań (102) i wzorów (106) i (107) zwracamy uwagę na to, że suma

(105) jest dodatnia dla punktów a, b, znajdujących się po tej samej stronie obu asymptot, co punkty rzeczywistej osi hiperboli, jest zaś ujemna dla punktów a, b, znajdujących się po tej samej stronie obu asymptot, co punkty urojonej osi hiperboli. Zauważamy dalej, że licznik pierwszego ze wzorów (107) jest stale dodatni, licznik zaś drugiego ze wzorów (107) jest dodatni dla punktów a, b, zawartych wewnątrz nieskończonego pasa pomiędzy stycznemi w wierzchołkach, jest zaś ujemny dla punktów a, b, położonych na zewnątrz tego pasa. Licznik prawej strony drugiego ze wzorów (107) jest zerem dla punktów a, b, leżących na stycznych do hiperboli w jej wierzchołkach. Z drugiego ze wzorów (106) wynika, że rzędna punktu styczności drugiej stycznej, przez ten punkt przechodzącej, jest tego samego znaku, co rzędna b, gdy spełniony jest warunek $|b| < q$, jest zaś znaku przeciwnego niż znak rzędnej b, gdy spełniony jest warunek $|b| > q$. Z pierwszego zaś ze wzorów (107) wynika, że odcięta punktu styczności tej stycznej ma odpowiednio znak odciętej a lub znak przeciwny znakowi odciętej a. Na podstawie tego rozważania dochodzimy do następującego wniosku. Jeżeli przez zewnętrzny punkt a, b względem hiperboli, leżący pomiędzy asymptotami na stycznej do hiperboli w jej wierzchołku, przeprowadzimy do hiperboli drugą styczną, to jej punkt styczności leżeć będzie na łuku hiperboli, ograniczającym ten sam z obszarów 1, 2, 3, 4, którego ograniczenie zawiera punkt a, b. Jeżeli przez punkt a, b, należący do ograniczenia obszaru 6 lub obszaru 8, ale nie leżący na żadnej z asymptot, przeprowadzimy styczną do hiperboli, różną od stycznej w jej wierzchołku, to punkt styczności tej drugiej stycznej leżeć będzie na łuku hiperboli, którego punkty mają spółrzędne przeciwnych znaków niż odpowiednio spółrzędne a i b. Dalej zauważmy, że prawe strony wzorów (107) mają obie znak dodatni dla punktu a, b, zewnętrznego względem hiperboli, gdy jest on wewnętrznym punktem jednego z obszarów 1, 2, 3, 4. Ze wzorów (106) widzimy, że wtedy spółrzędne x_1, x_2 mają ten sam znak, co spółrzędna a, spółrzędne zaś y_1, y_2 ten sam znak, co spółrzędna b. Stąd wynika, że obie styczne, przechodzące przez punkt a, b, położony wewnątrz któregokolwiek z obszarów 1, 2, 3, 4, mają punkty styczności, które oba leżą na łuku hiperboli, ograniczającym ten sam obszar. Widzimy dalej, że prawa strona pierwszego ze wzorów (107) ma wartość dodatnią, a prawa strona drugiego ze wzorów (107) ma wartość ujemną, gdy punkt

a, b położony jest wewnątrz jednego z obszarów 5 i 7. Wtedy odcięte x_1, x_2 punktów styczności mają obie ten sam znak, co odcięta a, rzędne zaś y_1, y_2 punktów styczności są różnych znaków. Stąd wynika, że jedna ze stycznych, przechodzących przez punkt a, b, położony wewnątrz obszaru 5, ma punkt styczności na łuku l_1, druga zaś ze stycznych, przechodzących przez tenże punkt a, b, ma punkt styczności na łuku l_4; stąd wynika także, że jedna ze stycznych, przechodzących przez punkt a, b, położony wewnątrz obszaru 7, ma punkt styczności na łuku l_2, druga zaś ze stycznych, przechodzących przez tenże punkt a, b, ma punkt styczności na łuku l_3. Zauważmy w dalszym ciągu, że prawa strona pierwszego ze wzorów (107) jest ujemna, a prawa strona drugiego ze wzorów (107) jest dodatnia, gdy punkt a, b położony jest wewnątrz jednego z obszarów 6 i 8. Wtedy rzędne y_1, y_2 punktów styczności są obie znaku wprost przeciwnego, niż znak rzędnej b, znaki zaś odciętych x_1, x_2 punktów styczności są różne jeden od drugiego. Stąd wnosimy, że jedna ze stycznych, przechodzących przez punkt a, b, położony wewnątrz obszaru 6, ma punkt styczności na łuku l_3, druga zaś ze stycznych, przechodzących przez tenże punkt a, b, ma punkt styczności na łuku l_4; stąd wnosimy także, że jedna ze stycznych, przechodzących przez punkt a, b, położony wewnątrz obszaru 8, ma punkt styczności na łuku l_1, druga zaś ze stycznych, przechodzących przez tenże punkt a, b, ma punkt styczności na łuku l_2. Wreszcie zauważymy, że prawe strony wzorów (107) są obie ujemne, gdy punkt a, b położony jest wewnątrz jednego z obszarów 9, 10, 11, 12. Jeżeli zwrócimy uwagę na znaki spółrzędnych a, b punktów, położonych wewnątrz tych obszarów, to dostrzeżemy łatwo, że wielkości x, y, spełniające drugie z równań (102), mają własności następujące: dla rzeczonych punktów a, b obszaru 9 nie może być jednocześnie x ujemne, a y dodatnie; dla rzeczonych punktów a, b obszaru 10 wielkości x i y nie mogą mieć obie jednocześnie dodatniego znaku; dla rzeczonych punktów a, b obszaru 11 nie może być jednocześnie x dodatnie, a y ujemne; wreszcie dla rzeczonych punktów a, b obszaru 12 wielkości x i y nie mogą być obie jednocześnie ujemnego znaku. Z drugiej strony wobec nierówności $x_1 x_2 < 0$, $y_1 y_2 < 0$ w rozważanych obecnie przypadkach punkty styczności stycznych, przechodzących przez punkt a, b, leżą albo na dwóch łukach l_1 i l_3, albo też na dwóch łukach l_2 i l_4. Ale z poprzednich uwag wynika, że dla każdego z obszarów 9, 10, 11, 12 jedna z tych ewentualności jest niemoż-

liwa. Wobec tego dochodzimy do wyników następujących. Dwa punkty styczności stycznych do hiperboli, przechodzących przez punkt, położony wewnątrz jednego z obszarów 9 i 11, leżą na łukach l_1 i l_3. Dwa punkty styczności stycznych do hiperboli, przechodzących przez punkt, położony wewnątrz jednego z obszarów 10 i 12, leżą na łukach l_2 i l_4.

Przypuśćmy teraz, że punkt a, b położony jest na asymptocie hiperboli, nie będąc przytem jej środkiem. Przez każdy taki punkt przechodzi tylko jedna styczna do hiperboli, posiadająca właściwy punkt styczności. Z równań (103) wynika, że spółrzędne tego punktu styczności określają się wzorami:

$$(108) \qquad x = \frac{p^2\left(1 + \frac{b^2}{q^2}\right)}{2a}, \quad y = -\frac{q^2\left(1 - \frac{a^2}{p^2}\right)}{2b},$$

w których wielkości a, b mają wartości, spełniające równość:

$$\frac{a^2}{p^2} - \frac{b^2}{q^2} = 0.$$

Z pierwszego ze wzorów (108) widzimy, że spółrzędna x tego punktu styczności ma ten sam znak, co spółrzędna a. Na podstawie drugiego ze wzorów (108) możemy zależność znaku spółrzędnej y od pozycji punktu a, b na asymptocie wypowiedzieć jak następuje. Gdy punkt a, b leży na asymptocie pomiędzy środkiem hiperboli i punktem spotkania asymptoty ze styczną w wierzchołku, wówczas y ma znak przeciwny znakowi spółrzędnej b; gdy punkt a, b leży w punkcie spotkania asymptoty ze styczną w wierzchołku, wówczas y ma wartość zero; gdy punkt a, b znajduje się poza tym punktem spotkania na ramieniu, które ma początek w tym punkcie i nie zawiera środka hiperboli, wówczas znak spółrzędnej y jest ten sam, co znak spółrzędnej b. Korzystając z tych uwag, dochodzimy do wyników następujących. Styczna do hiperboli, przechodząca przez punkt a, b, który leży na asymptocie na prawo od urojonej osi hiperboli, ma punkt styczności na gałęzi hiperboli, położonej również na prawo od tej osi, a styczna do hiperboli, przechodząca przez punkt a, b, leżący na asymptocie na lewo od urojonej osi hiperboli, ma punkt styczności na gałęzi hiperboli, położonej także na lewo od tej osi. Przytem, gdy punkt a, b znajduje się na asymptocie pomiędzy środkiem

hiperboli i punktem spotkania ze styczną do hiperboli w jej wierzchołku, wówczas punkt a, b i punkt styczności leżą po przeciwnych stronach rzeczywistej osi hiperboli. Jeżeli natomiast punkt a, b położony jest na asymptocie, ale nie należy do punktów, o których była mowa przed chwilą i nie jest punktem spotkania asymptoty ze styczną w wierzchołku hiperboli, to rzeczony punkt a, b i punkt styczności znajdują się po tej samej stronie rzeczywistej osi hiperboli.

Niech będzie teraz parabola, określona równaniem (101), w którem $p > 0$. Spółrzędne x, y punktów styczności stycznych do paraboli, przechodzących przez punkt a, b, spełniają równania, otrzymujące się w uważanym przypadku ze wzorów ogólnych (86) i (87), t.j. równania:

$$y^2 - 2px = 0, \quad by - p(x + a) = 0. \tag{109}$$

Rugując z nich spółrzędną x, otrzymujemy na spółrzędną y równanie:

$$y^2 - 2by + 2pa = 0,$$

z którego wynikają wartości:

$$y = b \pm \sqrt{b^2 - 2pa}. \tag{110}$$

Dla każdego rzeczywistego punktu a, b, który jest względem paraboli punktem zewnętrznym, wartości tych jest dwie i są one obie rzeczywiste. Jeżeli przytem $a > 0$, to obie wartości (110)

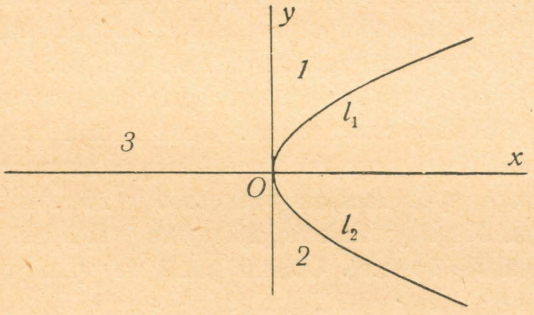

Fig. 33.

są tego samego znaku, co znak spółrzędnej b. Jeżeli $a = 0$, to jedna z tych wartości ma ten sam znak, co spółrzędna b, druga zaś jest zerem. Jeżeli wreszcie $a < 0$, to jedna z wartości (110) jest dodatnia, druga zaś jest ujemna. Niech będą na rysunku

fig. 33 osie x, y i parabola. Oznaczmy przez l_1 i l_2 nieskończone łuki, powstające przez podział tej krzywej na dwie części w jej wierzchołku. Przyjmijmy, że wierzchołek nie należy do tych łuków. Oznaczmy numerem 1 obszar zawarty pomiędzy dodatniem ramieniem osi y i łukiem l_1, numerem 2 obszar, zawarty pomiędzy ujemnem ramieniem osi y i łukiem l_2, wreszcie numerem 3 obszar, określony nierównością $x < 0$. Na podstawie poprzednich uwag dostrzegamy bezpośrednio, że zachodzą własności następujące. Jeżeli punkt a, b, zewnętrzny względem paraboli, położony jest na stycznej do paraboli w jej wierzchołku, to punkt styczności drugiej stycznej, przechodzącej przez punkt a, b, znajduje się na tym z łuków l_1, l_2, którego punkty mają rzędne o tym samym znaku, co znak rzędnej b. Jeżeli punkt a, b, zewnętrzny względem paraboli, znajduje się wewnątrz jednego z obszarów 1, 2, to punkty styczności stycznych, przez ten punkt przechodzących, leżą oba na tym z łuków l_1, l_2, który jest ograniczeniem tego obszaru. Jeżeli punkt a, b leży wewnątrz obszaru 3, to jedna ze stycznych do paraboli, przez ten punkt przechodzących ma punkt styczności na łuku l_1, druga zaś ma punkt styczności na łuku l_2.

Zajmiemy się teraz kwestją następującą. Punkt a, b, zewnętrzny względem istotnej krzywej stopnia drugiego, porusza się na płaszczyźnie w sposób ciągły, pozostając stale punktem zewnętrznym względem tej linji krzywej; chodzi o odpowiedź na zapytanie, czy kierunki ramion, mających początek w punkcie a, b i prowadzących od tego punktu do punktów styczności rzeczonych ramion z krzywą, zmieniają się przy tym ruchu w sposób ciągły, czy też ciągłość tych zmian podlega w pewnych przypadkach jakim przerwom. Jeżeli linja krzywa jest elipsą, albo też parabolą, to przy ruchu, o którym mowa, ciągłość zmian kierunków rzeczonych ramion widocznie w żadnym przypadku nie jest zakłócona. Jeżeli jednak linja krzywa jest hiperbolą, to sprawa ta przedstawia się inaczej. Obszar pomiędzy prawą gałęzią hiperboli i ramionami asymptot, gałąź tę obejmującemi i mającemi wspólny początek w środku hiperboli, nazwiemy obszarem I (fig. 34). Podobnież obszar pomiędzy lewą gałęzią hiperboli i ramionami asymptot, gałąź tę obejmującemi i mającemi wspólny początek w środku hiperboli, nazwiemy obszarem III. Dalej nazwiemy obszarem II obszar, leżący nad górnemi ograniczeniami obszarów I i III, a obszarem IV obszar, leżący pod dolnemi ograniczeniami

obszarów I i III. Korzystając z poprzednich rozważań, odnoszących się do hiperboli, dostrzeżemy łatwo, że jeżeli punkt a, b porusza się w sposób ciągły pozostając stale wewnątrz któregokolwiek z obszarów I, II, III, IV, to kierunki ramion, które prowadzą od punktu a, b, do punktów styczności tych ramion z hiperbolą, zmieniają się także w sposób ciągły. Zatem przerwy ciągłości kierunków rzeczonych ramion zachodzić mogą przy ciągłym ruchu punktu a, b tylko wówczas, gdy punkt ten przechodzi z jednego do drugiego z obszarów I, II, III, IV. Niech będzie punkt M, położony wewnątrz

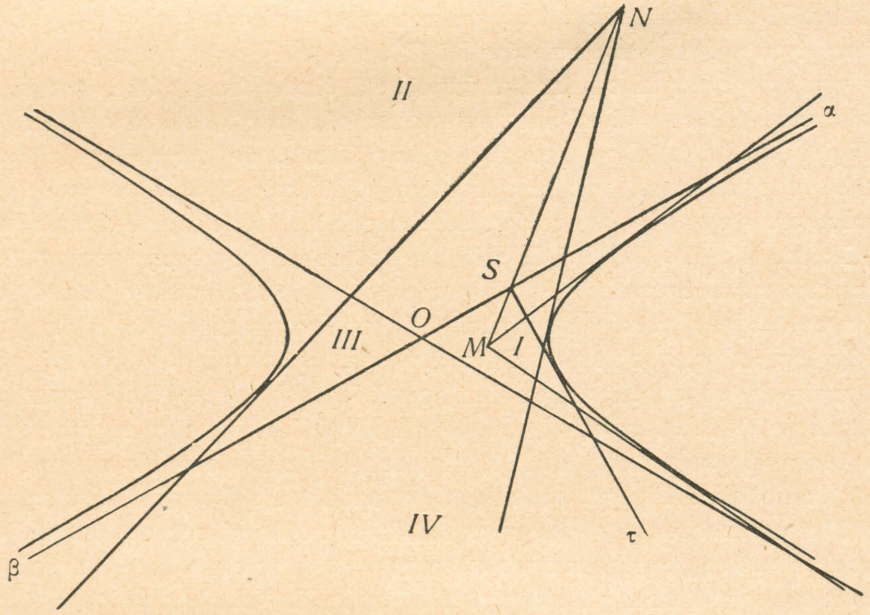

Fig. 34.

obszaru I i punkt N, położony wewnątrz obszaru II. Połączmy te punkty odcinkiem prostolinjowym i oznaczmy literą S punkt przecięcia się tego odcinka z asymptotą. Gdy punkt a, b dąży na tym odcinku od M do S, wówczas ramiona stycznych do hiperboli, prowadzące od punktu a, b do punktów styczności, zmieniają swoje pozycje w ten sposób, że jedno z nich dąży do ramienia $S\tau$, należącego do stycznej, drugie zaś dąży do ramienia $S\alpha$, należącego do asymptoty. Gdy punkt a, b dąży na tym odcinku od N do S, wówczas odnośne ramiona stycznych do hiperboli zmieniają swoje pozycje w ten sposób, że jedno z nich dąży do ramienia $S\tau$,

należącego do stycznej, drugie zaś dąży do ramienia $S\beta$, należącego do asymptoty. Wyniki te można inaczej wysłowić w sposób następujący. Gdy punkt a, b opisuje odcinek MN, albo w kierunku od M do N, albo też w kierunku od N do M, wówczas jedno z ramion, o których mowa, stale zmienia swój kierunek w sposób ciągły, drugie zaś zmienia swój kierunek w sposób ciągły tylko wewnątrz każdego z obszarów I i II zosobna, a natomiast przy przejściu punktu a, b z jednego z tych obszarów do drugiego doznaje zmiany kierunku na kierunek wprost przeciwny. Zauważmy teraz, że rozumowanie nasze nie zmieniłoby się, gdybyśmy odcinek MN zastąpili ciągłym łukiem krzywolinjowym, łączącym punkty M i N, zawartym wewnątrz obszarów I i II oraz przecinającym asymptotę w punkcie różnym od środka hiperboli. Zauważmy także, iż rozumowania takie można przeprowadzić dla par obszarów II i III, III i IV, IV i I. Dostrzeżemy wtedy łatwo, że zachodzą fakty, które można wysłowić jak następuje. Niech będą dwa punkty, położone wewnątrz obszarów, należących do jednej z par obszarów I, II; II, III; III, IV; IV, I. Niech będzie ciągły łuk, łączący te punkty, zawarty wewnątrz obszarów, do których punkty te należą i przecinający ramię asymptoty, które rozgranicza te obszary. Gdy punkt a, b opisuje rzeczony łuk, wówczas dla jednej ze stycznych hiperboli, przez ten punkt przechodzących, kierunek ramienia, które prowadzi od punktu a, b do punktu styczności, zmienia się w sposób ciągły, dla drugiej zaś kierunek ramienia, tak samo określonego, zmienia się w sposób ciągły tylko wewnątrz każdego z rzeczonych obszarów zosobna, a natomiast przy przejściu punktu a, b z jednego z tych obszarów do drugiego doznaje zmiany na kierunek wprost przeciwny. Możemy podobnież rozważać ciągły łuk, zawarty wewnątrz obszarów I i III oraz przechodzący przez środek hiperboli i łączący punkty, z których jeden leży wewnątrz obszaru I, a drugi wewnątrz obszaru III, a także ciągły łuk, zawarty wewnątrz obszarów II i IV oraz przechodzący przez środek hiperboli i łączący punkty, z których jeden leży wewnątrz obszaru II, a drugi wewnątrz obszaru IV. Gdy punkt a, b opisuje rzeczony łuk w jednym lub w drugim z tych przypadków, wówczas dla obu stycznych do hiperboli, przez ten punkt przechodzących, zachodzi fakt, że kierunki ramion tych stycznych od punktu a, b do punktów styczności zmieniają się w sposób ciągły wewnątrz każdego z tych obszarów, ale podlegają zmianie na wprost przeciwne przy przejściu punktu a, b przez środek hiperboli.

Rozważać tu będziemy jeszcze styczne do elipsy, hiperboli i paraboli o danym rzeczywistym dwukierunku.

Zauważmy naprzód, że w przypadku kanonicznego równania elipsy względnie hiperboli mamy na podstawie wzoru (95) wyróżnik:

$$\delta_2 = \varphi(u, v)\,\Delta = -\frac{\varepsilon}{p^2 q^2}\left(\frac{u^2}{p^2} + \frac{v^2}{\varepsilon q^2}\right).$$

Stąd wynika, że w przypadku elipsy każdy rzeczywisty dwukierunek $v:u$ jest dwukierunkiem zewnętrznym. W przypadku hiperboli natomiast zewnętrznemi są oba dwukierunki asymptotyczne i dwukierunki wszystkich linij prostych przechodzących przez środek hiperboli i nie mających z nią rzeczywistych punktów wspólnych. Nadto hiperbola posiada dwukierunki wewnętrzne, któremi są dwukierunki wszystkich prostych przechodzących przez środek hiperboli i przecinających ją w punktach rzeczywistych. Stąd wynikają bezpośrednio wnioski co do rzeczywistości względnie urojoności stycznych o danym rzeczywistym dwukierunku.

Następnie zajmiemy się kwestją położenia punktów styczności stycznych o danym zewnętrznym dwukierunku $v:u$ i rozpoczynając od elipsy względnie hiperboli, mieć będziemy na podstawie związków (86) i (97) równania:

$$(111)\qquad \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{\varepsilon q^2} - 1 = 0, \quad \frac{u\,x}{p^2} + \frac{v\,y}{\varepsilon q^2} = 0,$$

w których x, y oznaczają spółrzędne odnośnych punktów styczności. Założymy naprzód, że żadna z wielkości u, v nie jest zerem i wyrugujemy z równań (111) naprzód y, a potem x. Dojdziemy tą drogą do równań:

$$(112)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{u^2}{p^2} + \dfrac{v^2}{\varepsilon q^2}\right)\dfrac{x^2}{p^2} - \dfrac{v^2}{\varepsilon q^2} = 0, \\ \left(\dfrac{u^2}{p^2} + \dfrac{v^2}{\varepsilon q^2}\right)\dfrac{y^2}{\varepsilon q^2} - \dfrac{u^2}{p^2} = 0 \end{cases}$$

i zauważymy, że gdy $v = 0$, $u \neq 0$, wówczas równania (112) sprowadzają się do równań prostszych:

$$x = 0, \quad y^2 = \varepsilon q^2,$$

a gdy $u = 0$, $v \neq 0$, wówczas równania (112) sprowadzają się do równań prostszych:

$$x^2 = p^2, \quad y = 0.$$

Te prostsze równania określają wierzchołki elipsy względnie hiperboli i wynikają przy odnośnych szczególnych założeniach także z równań (111). Zatem równania (112) jako wyniki rugowania z równań (111) y względnie x nie podlegają żadnemu ograniczeniu. Suma:

$$\frac{u^2}{p^2} + \frac{v^2}{\varepsilon q^2} \tag{113}$$

jest w przypadku elipsy dodatnia dla wszelkich dwukierunków rzeczywistych, a w przypadku hiperboli jest dodatnia dla wszelkich dwukierunków wewnętrznych względem hiperboli, jest zerem dla jej dwukierunków asymptotycznych, a jest ujemna dla wszelkich innych dwukierunków rzeczywistych. Gdy suma (113) jest różna od zera, wówczas zachodzą wzory:

$$(114) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, & y_1 + y_2 = 0, \\ x_1 x_2 = -\dfrac{\dfrac{v^2}{\varepsilon q^2}}{\dfrac{1}{p^2}\left(\dfrac{u^2}{p^2} + \dfrac{v^2}{\varepsilon q^2}\right)}, & y_1 y_2 = -\dfrac{\dfrac{u^2}{p^2}}{\dfrac{1}{\varepsilon q^2}\left(\dfrac{u^2}{p^2} + \dfrac{v^2}{\varepsilon q^2}\right)}, \end{cases}$$

w których x_1, x_2 oznaczają pierwiastki pierwszego z równań (112), a y_1, y_2 oznaczają pierwiastki drugiego z równań (112). Wzory te stosować będziemy w przypadku elipsy do wszelkich dwukierunków rzeczywistych, a w przypadku hiperboli do wszelkich dwukierunków zewnętrznych prócz dwukieruków asymptotycznych. Pierwiastki x_1, x_2, y_1, y_2 mają we wszystkich tych przypadkach skończone wartości rzeczywiste.

Niech będzie naprzód e l i p s a. Jeżeli $v = 0$, $u \neq 0$, to z równań (114) wynika, że oba pierwiastki x_1, x_2 są zerami, że więc punktami styczności stycznych o dwukierunku $0 : u$ są wierzchołki elipsy, leżące na małej osi. Jeżeli $u = 0$, $v \neq 0$, to z tychże równań (114) wynika, że oba pierwiastki y_1, y_2 są zerami, t.j. że punktami styczności stycznych o dwukierunku $v : 0$ są wierzchołki

elipsy, położone na wielkiej osi. Gdy $u \neq 0$, $v \neq 0$, wówczas pierwiastki x_1, x_2 są oba różne od zera i różnych znaków, a także pierwiastki y_1, y_2 są oba różne od zera i różnych znaków. Jeżeli przytem u i v są tych samych znaków, to z drugiego z równań (111) wniesiemy, że x_1, y_1 są różnych znaków i że x_2, y_2 są różnych znaków. Stąd wynika, że z dwóch stycznych do elipsy, mających wspólny dwukierunek, którego spółczynnik jest liczbą skończoną dodatnią, jedna ma punkt styczności na łuku l_2 druga zaś na łuku l_4 tej linji krzywej (fig. 31). Jeżeli zaś u i v są różnych znaków, to z drugiego z równań (111) wniesiemy, że x_1, y_1 są tych samych znaków i że x_2, y_2 są tych samych znaków. Stąd wynika, że z dwóch stycznych do elipsy, mających dwukierunek, którego spółczynnik jest liczbą skończoną ujemną, jedna ma punkt styczności na łuku l_1, druga zaś na łuku l_3 tej linji krzywej.

Przechodząc teraz do rozważenia analogicznych faktów w przypadku hiperboli, zauważymy naprzód, że jeżeli $u = 0$, $v \neq 0$, to z równań (114) wynika, że oba pierwiastki y_1, y_2 są zerami, t.j. że punktami styczności stycznych o dwukierunku $v : 0$ są wierzchołki hiperboli. Jeżeli następnie wielkości u, v są obie różne od zera, to możemy podobnie jak poprzednio w przypadku elipsy posiłkując się równaniami (111) dojść do wyników następujących. Z dwóch stycznych do hiperboli, mających wspólny nieasymptotyczny dwukierunek zewnętrzny, którego spółczynnik jest liczbą skończoną dodatnią, jedna ma punkt styczności na łuku l_1 (fig. 32) druga zaś na łuku l_3 tej linji krzywej. Z dwóch stycznych do hiperboli, mających wspólny nieasymptotyczny dwukierunek zewnętrzny, którego spółczynnik jest liczbą skończoną ujemną, jedna ma punkt styczności na łuku l_2, druga zaś na łuku l_4 tej linji krzywej.

W przypadku paraboli istnieje jedna styczna do tej krzywej o danym nieasymptotycznym dwukierunku. Dla wyznaczenia punktu styczności stycznej do paraboli o nieasymptotycznym dwukierunku $v : u$ mamy równania:

$$y^2 - 2px = 0, \quad pu - vy = 0, \tag{115}$$

w których $p > 0$. Z tych równań otrzymują się na spółrzędne punktu styczności wyrażenia:

$$x = \frac{p}{2}\frac{u^2}{v^2}, \quad y = p\frac{u}{v}. \tag{116}$$

Z nich wynika, że punktem styczności stycznej o dwukierunku, określonym wartościami $u = 0$, $v \neq 0$, t.j. dwukierunku prostopadłym do dwukierunku asymptotycznego, jest wierzchołek paraboli. Gdy zaś żadna z wielkości u, v nie jest zerem, wówczas znak spółrzędnej y jest ten sam, co znak stosunku $v : u$. Zatem punkt styczności stycznej do paraboli o dwukierunku rzeczywistym $v : u$, różnym od dwukierunku asymptotycznego i od dwukierunku prostopadłego do dwukierunku asymptotycznego, leży na łuku l_1 (fig. 33), gdy stosunek $v : u$ jest dodatni, a na łuku l_2, gdy stosunek $v : u$ jest ujemny.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

Zagadnienia dotyczące średnic i osi krzywych stopnia drugiego.

§ 19. Średnica sprzężona z danym dwukierunkiem.

Niech będzie krzywa stopnia drugiego:

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

i dany dwukierunek $\mu : \lambda$. Równania każdej prostej właściwej, posiadającej ten dany dwukierunek $\mu : \lambda$, można napisać w postaci:

$$x = a + \lambda r, \quad y = b + \mu r. \tag{2}$$

Zajmiemy się zbadaniem miejsca geometrycznego punktów a, b, z których każdy ma tę własność, że jeżeli pewien punkt prostej (2) jest wspólnym punktem prostej (2) i krzywej (1), to punkt prostej (2) symetryczny do tego punktu względem punktu a, b jest również punktem wspólnym krzywej (1) i prostej (2). Na podstawie równania:

$$\varphi(\lambda, \mu) r^2 + 2(\alpha\lambda + \beta\mu) r + f(a, b) = 0$$

zachodzi to wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość:

$$\alpha\lambda + \beta\mu = 0,$$

która określa żądane miejsce geometryczne punktów a, b. Jeżeli dla spółrzędnych bieżącego punktu tego miejsca geometrycznego wprowadzimy zamiast oznaczeń a, b oznaczenia x, y, to otrzymamy równanie:

(3) $$\lambda(A x + B y + D) + \mu(B x + C y + E) = 0;$$

a jeżeli zamiast x, y wprowadzimy spółrzędne jednorodne $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, to mieć będziemy równanie:

(4) $$\lambda(A \bar{x} + B \bar{y} + D \bar{z}) + \mu(B \bar{x} + C \bar{y} + E \bar{z}) = 0.$$

Linję prostą właściwą, bądź też niewłaściwą, określoną przez równanie (3), bądź (4), nazywać będziemy **średnicą linji krzywej stopnia drugiego, sprzężoną z dwukierunkiem** $\mu : \lambda$. Z tą linją prostą spotkaliśmy się już w § 17. Jeżeli mianowicie zwrócimy uwagę na równanie (99) oraz na szczególne przypadki tego równania (97) i (98), to dostrzeżemy, że równanie (4) określa biegunową niewłaściwego punktu $\bar{a} : \bar{b} : \bar{c} = \lambda : \mu : 0$ względem krzywej (1).

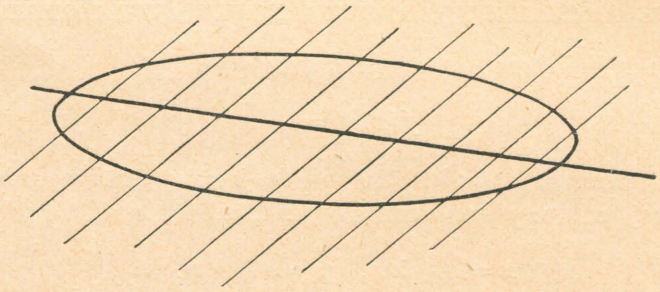

Fig. 35.

Zajmiemy się teraz rozważeniem szczególnych przypadków równania (4).

Niech będzie naprzód **krzywa rodzaju elips lub rodzaju hiperbol**. Wówczas każda średnica jest prostą właściwą i jeżeli dwukierunek $\mu : \lambda$ nie jest dwukierunkiem asymptotycznym, to średnica sprzężona z tym dwukierunkiem dzieli cięciwy krzywej, mające ten dwukierunek na dwie części równe, (zob. fig. 35 i 36) jeżeli zaś dwukierunek $\mu : \lambda$ jest dwukierunkiem asymptotycznym, to średnica sprzężona z tym dwukierunkiem jest asymptotą, mającą ten asymptotyczny dwukierunek. W jednym i w drugim przypadku średnica przechodzi przez środek krzywej i nawzajem pokażemy, że każda prosta, przechodząca przez środek krzywej, jest średnicą. Równanie każdej takiej

prostej można w spółrzędnych prostolinjowych x, y napisać w postaci:

$$l(A x + B y + D) + m(B x + C y + E) = 0,$$

gdzie spółczynniki l i m nie są oba jednocześnie zerami. Widzimy więc, że prosta ta istotnie jest średnicą sprzężoną z dwukierunkiem określonym proporcją $\mu : \lambda = m : l$.

Jeżeli krzywa należy do rodzaju parabol, to równanie (4) można napisać w postaci:

$$\varepsilon(\mathfrak{a}\lambda + \mathfrak{b}\mu)(\mathfrak{a}\bar{x} + \mathfrak{b}\bar{y}) + (D\lambda + E\mu)\bar{z} = 0. \tag{5}$$

Widzimy z tego równania, że jeżeli $\mathfrak{a}\lambda + \mathfrak{b}\mu \neq 0$, t.j. jeżeli dwukierunek $\mu : \lambda$ nie jest dwukierunkiem asymptotycznym, to średnica sprzężona z tym dwukierunkiem jest prostą właściwą, posia-

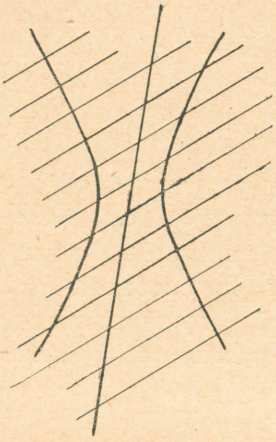

Fig. 36.

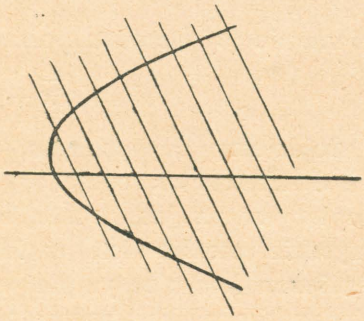

Fig. 37.

dającą dwukierunek asymptotyczny. Prosta ta dzieli cięciwy krzywej, mające dwukierunek $\mu : \lambda$, na dwie części równe (zob. fig. 37). Odróżnimy tu przytem dwa przypadki, mianowicie przypadek, gdy $\Delta \neq 0$ i przypadek, gdy $\Delta = 0$. Udowodnimy, że w przypadku $\Delta \neq 0$, t.j. w przypadku istotnej krzywej rodzaju parabol, każda prosta właściwa, posiadająca dwukierunek asymptotyczny jest średnicą sprzężoną z określonym dwukierunkiem nieasymtotycznym. Równanie każdej takiej prostej można napisać w postaci:

$$\varepsilon(\mathfrak{a}\bar{x} + \mathfrak{b}\bar{y}) + n\bar{z} = 0. \tag{6}$$

Równanie to przedstawia prostą, należącą do prostych właściwych wyznaczonych równaniem (5), jeżeli można znaleść określony dwukierunek $\mu : \lambda$, spełniający związek:

$$(7) \qquad (D - n\,\mathfrak{a})\,\lambda + (E - n\,\mathfrak{b})\,\mu = 0\,.$$

Zauważymy, że w przypadku $\Delta \neq 0$ niema takiego czynnika n, dla któregoby oba nawiasy tego związku były zerami, bo wówczas byłoby także $D\,\mathfrak{b} - E\,\mathfrak{a} = 0$, co sprzeciwia się założeniu $\Delta \neq 0$. Stąd wynika, że dla każdego n można znaleść określony dwukierunek $\mu : \lambda$, spełniający warunek (7). Ten dwukierunek nie jest dwukierunkiem asymptotycznym, bo także i wówczas byłoby $D\,\mathfrak{b} - E\,\mathfrak{a} = 0$, co w uważanym przypadku jest niemożliwe. Udowodniliśmy więc, że każda prosta (6) jest średnicą sprzężoną z określonym dwukierunkiem nieasymptotycznym. Przechodząc teraz do przypadku $\Delta = 0$, mieć będziemy:

$$D = m\,\mathfrak{a}\,, \quad E = m\,\mathfrak{b}$$

i równanie (5) otrzyma postać:

$$\varepsilon\,(\mathfrak{a}\,\bar{x} + \mathfrak{b}\,\bar{y}) + m\,\bar{z} = 0\,,$$

t.j. dojdziemy do rezultatu, że średnicą pary prostych o wspólnym dwukierunku, sprzężoną z dowolnym dwukierunkiem nieasymptotycznym, jest prosta środków. W ten sposób rozważyliśmy wszystkie możliwości, w których dany dwukierunek $\mu : \lambda$ jest dwukierunkiem nieasymptotycznym. Jeżeli dany dwukierunek $\mu : \lambda$ jest dwukierunkiem asymptotycznym, to równanie (5) można napisać w postaci:

$$(D\,\mathfrak{b} - E\,\mathfrak{a})\,\bar{z} = 0\,.$$

Stąd wnosimy, że średnicą istotnej krzywej rodzaju parabol sprzężoną z dwukierunkiem asymptotycznym jest prosta niewłaściwa oraz, że w przypadku $\delta = 0, \Delta = 0$ i także asymptotycznego dwukierunku, równość (4) jest tożsamością.

§ 20. Pary dwukierunków sprzężonych i pary średnic sprzężonych.

Niech będzie znowu równanie (4) t.j. równanie:

$$(4) \qquad \lambda\,(A\,\bar{x} + B\,\bar{y} + D\,\bar{z}) + \mu\,(B\,\bar{x} + C\,\bar{y} + E\,\bar{z}) = 0\,.$$

Wyznacza ono albo określoną średnicę sprzężoną z dwukierunkiem $\mu : \lambda$, która może być prostą właściwą lub też niewłaściwą, albo też jest tożsamością. W przypadku określonej prostej właściwej jeden tylko punkt niewłaściwy spełnia równanie (4). Jeżeli punkt niewłaściwy, spełniający równanie (4), oznaczymy stosunkami $\lambda' : \mu' : 0$, to dla każdego takiego punktu zachodzić będzie we wszystkich przypadkach warunek:

$$(8) \qquad (A\lambda + B\mu)\lambda' + (B\lambda + C\mu)\mu' = 0,$$

lub też po innem porządkowaniu wyrazów warunek:

$$(9) \qquad A\lambda\lambda' + B(\lambda\mu' + \mu\lambda') + C\mu\mu' = 0.$$

Widoczne, że zamiast mówić o punkcie niewłaściwym $\lambda' : \mu' : 0$ możemy także mówić o dwukierunku $\mu' : \lambda'$, który prowadzi do tego punktu.

Związek (9) należy do kategorji związków, któremi zajmowaliśmy się w § 51 tomu I. Na podstawie tego paragrafu możemy powiedzieć, że związek (9) jest inwolucją dwukierunków, określonych stosunkami $\mu : \lambda$ i $\mu' : \lambda'$. Dla opisania własności związku (9) wystarczy zastosować do niego część rozważań zawartych w rzeczonym § 51. Uczynimy to w formie różniącej się trochę od formy rozważań tego paragrafu.

Jeżeli $\delta \neq 0$, to oba nawiasy związku (8) nie mogą być jednocześnie zerami, ponieważ założenie:

$$A\lambda + B\mu = 0, \quad B\lambda + C\mu = 0$$

prowadziłoby do wniosku $\delta = 0$, bo spółczynniki λ i μ nie mogą być oba jednocześnie zerami. Stąd wynika, że w przypadku $\delta \neq 0$ każdemu dwukierunkowi $\mu : \lambda$ odpowiada na podstawie związku (9) jeden określony dwukierunek $\mu' : \lambda'$. Zauważmy przytem, że warunek (9) nie zmieni się, gdy λ przestawimy z λ' oraz jednocześnie μ przestawimy z μ'. Z tej symetrji warunku (9) wynika wniosek następujący. Jeżeli dla danego dwukierunku $\mu : \lambda = \mu_0 : \lambda_0$ otrzymujemy na mocy związku (9) dwukierunek $\mu' : \lambda' = \mu'_0 : \lambda'_0$, to dla danego dwukierunku $\mu : \lambda = \mu'_0 : \lambda'_0$ otrzymujemy na mocy tegoż związku dwukierunek $\mu' : \lambda' = \mu_0 : \lambda_0$. Inaczej mówiąc dwukierunki $\mu_0 : \lambda_0$ i $\mu'_0 : \lambda'_0$ stanowią taką parę dwukierunków, która spełnia związek (9) i wtedy, gdy te dwukierunki podstawimy odpowiednio zamiast $\mu : \lambda$ i $\mu' : \lambda'$ i wtedy, gdy je

podstawimy odpowiednio zamiast $\mu' : \lambda'$ i $\mu : \lambda$. Własność ta jest charakterystyczna dla odpowiedniości inwolucyjnych. Zauważymy przytem, że dwa dwukierunki, spełniające związek (9), nazywać będziemy także parą dwukierunków sprzężonych, i że terminu tego nie należy mieszać z brzmiącym tak samo terminem w teorji zespolonych elementów. Rozważanie powyższe odnosi się oczywiście także do punktów niewłaściwych, do których prowadzą te dwukierunki, i dwa punkty niewłaściwe, spełniające jednocześnie związek (9), nazwiemy parą punktów niewłaściwych sprzężonych. Z powyższego wywodu widzimy, że krzywa rodzaju elips lub rodzaju hiperbol posiada nieskończenie wiele par dwukierunków sprzężonych lub, inaczej wyrażając się, nieskończenie wiele par punktów niewłaściwych sprzężonych. Przy szczególnem założeniu $\mu' : \lambda' = \mu : \lambda$ otrzymujemy ze związku (9):

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 = 0. \tag{10}$$

Każda tak określona para składa się z jednego dwukierunku, który jest sam ze sobą sprzężony, lub inaczej mówiąc z jednego niewłaściwego punktu, który jest sam ze sobą sprzężony. Ze związku (10) widać, że każda krzywa rodzaju elips lub rodzaju hiperbol posiada dwa dwukierunki same ze sobą sprzężone, któremi są dwukierunki asymptotyczne, lub inaczej mówiąc dwa punkty niewłaściwe same ze sobą sprzężone, do których prowadzą dwukierunki asymptotyczne.

Załóżmy teraz, że $\delta = 0$. Wtedy związek (9) można napisać w postaci:

$$\mathfrak{a}^2\lambda\lambda' + \mathfrak{a}\mathfrak{b}(\lambda\mu' + \eta\lambda') + \mathfrak{b}^2\mu\mu' = 0,$$

albo też w postaci:

$$(\mathfrak{a}\lambda + \mathfrak{b}\mu)(\mathfrak{a}\lambda' + \mathfrak{b}\mu') = 0. \tag{11}$$

Ze związku tego wynika, że jeżeli dwukierunek $\mu : \lambda$ nie jest dwukierunkiem asymptotycznym, to dwukierunek $\mu' : \lambda'$ jest dwukierunkiem asymptotycznym, że jeżeli dwukierunek $\mu' : \lambda'$ nie jest dwukierunkiem asymptotycznym, to dwukierunek $\mu : \lambda$ jest dwukierunkiem asymptotycznym, a wreszcie, że zarówno dwukierunek $\mu : \lambda$ jak i dwukierunek $\mu' : \lambda'$ mogą być oba tym samym dwukierunkiem asymptotycznym. Jeżeli przeto do dwóch dwukierunków $\mu : \lambda$ i $\mu' : \lambda'$, spełniających jednocześnie związek (11), zastosujemy nazwę pary dwukierunków sprzężonych, to możemy

powiedzieć, że krzywa rodzaju parabol posiada nieskończenie wiele par dwukierunków sprzężonych i jednym z dwukierunków każdej pary jest dwukierunek asymptotyczny, a drugim dwukierunkiem może być każdy inny dwukierunek nie wyłączając asymptotycznego. Inaczej mówiąc, dwukierunek asymptotyczny jest sprzężony z każdym innym dwukierunkiem, a także sam ze sobą. Widoczne, jak wyniki te sformułować dla par punktów niewłaściwych sprzężonych i na tem zatrzymywać się nie będziemy.

Zauważmy teraz, że związek (9) określa przy $\delta > 0$ pary dwukierunków sprzężonych dla krzywej rodzaju elips, przy $\delta < 0$ pary dwukierunków sprzężonych dla krzywej rodzaju hiperbol, a przy $\delta = 0$ pary dwukierunków sprzężonych dla krzywej rodzaju parabol. Z temi faktami łączą się nazwy inwolucyj, któremi można zastępować nazwy stosowane w § 51 tomu I. Mianowicie nazwy: inwolucja o wyróżniku dodatnim, inwolucja o wyróżniku ujemnym i inwolucja o wyróżniku równym zeru zastępować będziemy odpowiednio nazwami: inwolucja eliptyczna, inwolucja hiperboliczna i inwolucja paraboliczna.

Parą średnic sprzężonych nazywać będziemy dwie średnice sprzężone z dwoma dwukierunkami, należącemi do tej samej pary dwukierunków sprzężonych. Na podstawie poprzednich rozważań możemy rozejrzeć się w zbiorze par średnic sprzężonych we wszystkich przypadkach.

Niech będzie naprzód $\delta \neq 0$. Oznaczmy przez $\mu : \lambda$ i $\mu' : \lambda'$ dwa dwukierunki, spełniające związek (9), t.j. należące do tej samej pary dwukierunków sprzężonych. Oznaczmy dalej przez d średnicę sprzężoną z dwukierunkiem $\mu : \lambda$, a przez d' średnicę sprzężoną z dwukierunkiem $\mu' : \lambda'$. Z poprzednich rozważań wynika, że średnica d jest prostą właściwą, mającą dwukierunek $\mu' : \lambda'$, a średnica d' jest prostą właściwą, mającą dwukierunek $\mu : \lambda$. Dwukierunki $\mu : \lambda$ i $\mu' : \lambda'$ są albo oba nieasymptotyczne, albo też są oba tym samym dwukierunkiem asymptotycznym. W pierwszym przypadku średnica d dzieli cięciwy krzywej, posiadające dwukierunek średnicy d' na części równe, a średnica d' dzieli cięciwy krzywej, posiadające dwukierunek średnicy d na części równe. W drugim przypadku para średnic składa się z jednej tylko prostej, która jest średnicą ze samą sobą sprzężoną i jest asymptotą, należącą do rzeczonego dwukierunku asymptotycznego. Istnieje nieskończenie wiele par średnic sprzężonych; każda para składa się z dwóch różnych od siebie linij

prostych z wyjątkiem dwóch par, z których każda jest średnicą ze samą sobą sprzężoną t.j. asymptotą krzywej.

Niech teraz będzie $\delta = 0$. Przy spełnieniu tego założenia każda para dwukierunków sprzężonych składa się z dwukierunku asymptotycznego i z dwukierunku, który jest albo dwukierunkiem różnym od asymptotycznego, albo też jest dwukierunkiem asymptotycznym. Na podstawie poprzednich rozważań wnosimy, że w przypadku $\Delta \neq 0$, t.j. w przypadku istotnej krzywej rodzaju parabol każda para różnych od siebie średnic sprzężonych składa się z prostej niewłaściwej i z prostej właściwej, mającej dwukierunek asymptotyczny, natomiast parą średnic sprzężonych, będącą średnicą ze sobą samą sprzężoną, jest prosta niewłaściwa. Mamy zatem w tym przypadku nieskończenie wiele par średnic sprzężonych, składających się z dwóch różnych linij prostych oraz jedną średnicę ze sobą samą sprzężoną, którą jest prosta niewłaściwa.

W rozważanych dotychczas przypadkach każdemu dwukierunkowi odpowiada jedna określona średnica z dwukierunkiem tym sprzężona i nawzajem każdej średnicy odpowiada jeden określony dwukierunek, z którym średnica ta jest sprzężona. Inaczej rzecz się ma w przypadku $\delta = 0$ i $\Delta = 0$, t.j. w przypadku pary linij prostych o wspólnym dwukierunku. W przypadku tym średnicą sprzężoną z każdym dwukierunkiem nieasymptotycznym jest jedna i ta sama linja prosta, mianowicie prosta środków, a dla asymptotycznego dwukierunku równość (4) jest tożsamością.

§ 21. Badanie wzajemnego nachylenia średnic sprzężonych elipsy i hiperboli na podstawie równań kanonicznych tych linij krzywych.

Niech będzie równanie elipsy względnie hiperboli, wyprowadzone w § 1:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} = 1 . \tag{12}$$

Jeżeli φ jest kątem dowolnego kierunku z osią x-ów, to jego spółczynniki kierunkowe są:

$$\lambda = \cos\varphi , \quad \mu = \sin\varphi .$$

Jeżeli zaś oznaczamy przez φ' kąt kierunku sprzężonego z kierunkiem λ, μ, to odnośne spółczynniki kierunkowe będą:

$$\lambda' = \cos\varphi', \quad \mu' = \sin\varphi'.$$

Równanie (9) § 20 przybierze wtedy postać:

$$\frac{\cos\varphi\cos\varphi'}{a^2} + \frac{\sin\varphi\sin\varphi'}{\varepsilon b^2} = 0. \tag{13}$$

Równanie to możemy przedstawić jako związek pomiędzy styczną kąta φ i styczną kąta φ'. Mamy mianowicie równanie:

$$\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi' = -\frac{\varepsilon b^2}{a^2}. \tag{14}$$

Zaznaczymy teraz bezpośrednie konsekwencje, wynikające z tego równania. Widoczne naprzód, że zarówno w przypadku elipsy jak w przypadku hiperboli osie x i y są średnicami ze sobą sprzężonemi. Następnie, ponieważ dla elipsy iloczyn stycznych $\operatorname{tg}\varphi$ i $\operatorname{tg}\varphi'$ jest ujemny, przeto wszelka para innych średnic sprzężonych elipsy ma takie wzajemne położenie, że gdy jedna z tych średnic jest położona w prawym obszarze górnym i w lewym obszarze dolnym, to druga z nich jest położona w prawym obszarze dolnym i w lewym obszarze górnym. Proste MN i $M'N'$ na fig. 38 są średnicami ze sobą sprzężonemi. Średnice, które są same

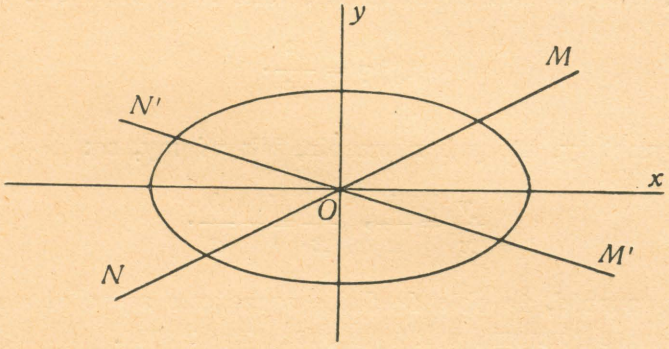

Fig. 38.

ze sobą sprzężone, są jak wiemy urojone, co zgadza się z faktem, że, gdy we wzorze (14) przyjmiemy $\varphi' = \varphi$, wówczas na kwadrat

$\operatorname{tg}^2 \varphi$ otrzyma się wartość ujemną. Następnie, przechodząc do średnic hiperboli, nie będących osiami, widzimy naprzód, że jeżeli jedna z nich położona jest w prawym obszarze górnym i w lewym obszarze dolnym, to i druga z nich położona jest także w prawym obszarze górnym i w lewym obszarze dolnym. Podobnież, jeżeli jedna z tych średnic leży w prawym obszarze dolnym i w lewym obszarze górnym, to i druga leży w prawym obszarze dolnym

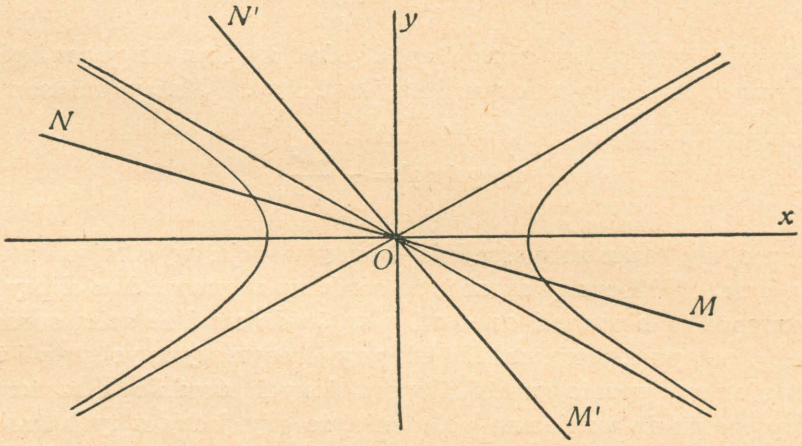

Fig. 39.

i w lewym obszarze górnym. W przypadku hiperboli istnieją, jak wiemy, rzeczywiste średnice same ze sobą sprzężone, mianowicie średnice, których dwukierunki określone są równaniem:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{b^2}{a^2}.$$

Są to asymptoty, których równania, jak wiemy, są:

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}, \quad \frac{y}{x} = -\frac{b}{a}.$$

Załóżmy naprzód, że obie średnice sprzężone są położone w prawym obszarze górnym i w lewym obszarze dolnym. Wówczas wielkości $\operatorname{tg} \varphi$ i $\operatorname{tg} \varphi'$ są obie dodatnie i widoczne, że jeżeli $\operatorname{tg} \varphi < \frac{b}{a}$, to $\operatorname{tg} \varphi' > \frac{b}{a}$. Stąd wynika, że średnice ze sobą sprzężone są

położone po dwóch stronach asymptoty, znajdującej się w prawym obszarze górnym i w lewym obszarze dolnym. Podobnież średnice sprzężone, położone w prawym obszarze dolnym i w lewym obszarze górnym znajdują się po obu stronach asymptoty, leżącej w prawym obszarze dolnym i w lewym obszarze górnym. Proste MN i $M'N'$ na figurze 39 są takiemi średnicami ze sobą sprzężonemi.

Zwróćmy się teraz do zbadania własności kąta:

$$\Phi = \varphi' - \varphi.$$

Mamy:

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{\operatorname{tg}\varphi' - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi'},$$

a na mocy związku (14), oraz stosując oznaczenie:

$$c^2 = a^2 - \varepsilon b^2,$$

otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}\Phi = -\frac{1}{c^2}\left(a^2 \operatorname{tg}\varphi + \frac{\varepsilon b^2}{\operatorname{tg}\varphi}\right). \tag{15}$$

Obliczmy pochodną kąta Φ względem kąta φ. Otrzymujemy:

$$\sec^2\Phi \frac{d\Phi}{d\varphi} = -\frac{\sec^2\varphi}{c^2}\left(a^2 - \frac{\varepsilon b^2}{\operatorname{tg}^2\varphi}\right). \tag{16}$$

Widoczne, że w przypadku elipsy równanie:

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = 0 \tag{17}$$

posiada dwa rozwiązania rzeczywiste:

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{b}{a}. \tag{18}$$

Widoczne też, że rozwiązaniom tym odpowiadają dwie średnice ze sobą sprzężone, będące przekątniami prostokąta opisanego na elipsie, którego boki są styczne do elipsy w jej wierzchołkach. W przypadku hiperboli równanie (17) nie posiada żadnych rozwiązań rzeczywistych. W przypadku elipsy możemy też zaraz odróżnić, któremu z roz-

wiązań (18) odpowiada maximum, a któremu minimum kąta Φ. Ponieważ mianowicie mamy:

$$\sec^2\Phi\left[\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+2\operatorname{tg}\Phi\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2\right]=$$

$$=-2\sec^2\varphi\left[\frac{b^2\sec^2\varphi}{c^2\operatorname{tg}^3\varphi}+\frac{\operatorname{tg}\varphi}{c^2}\left(a^2-\frac{b^2}{\operatorname{tg}^2\varphi}\right)\right]$$

widzimy więc, że górnemu znakowi we wzorze (18) odpowiada maximum, a dolnemu minimum.

Zajmiemy się teraz bliżej zbadaniem, jak zmienia się kąt Φ, gdy kąty φ i φ', spełniające związek (14), zmieniają się w sposób ciągły. Oznaczymy przez φ_0 kąt, spełniający związek:

$$\operatorname{tg}\varphi_0=\frac{b}{a} \tag{19}$$

i zawarty pomiędzy 0 i $+\frac{\pi}{2}$. Przyjmiemy, że początkowemi wartościami tych kątów, spełniających związek (14), są wartości $\varphi=0$ i $\varphi'=+\frac{\pi}{2}$ i zapytamy, jak zmienia się kąt Φ, gdy kąt φ powiększa się, począwszy od wartości zerowej.

Rozważymy naprzód przypadek elipsy. W tym przypadku pochodna $\frac{d\Phi}{d\varphi}$ równa się zeru dla wartości określonych wzorem (18). Podstawiając wartości te we wzór (15), otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}\Phi=\pm 2\frac{ab}{c^2}=\pm\frac{2ab}{a^2-b^2},$$

a więc na podstawie wzoru (19) dochodzimy do równości:

$$\operatorname{tg}\Phi=\pm\frac{2\operatorname{tg}\varphi_0}{1-\operatorname{tg}^2\varphi_0}.$$

Oznaczmy przez Φ_1 kąt dodatni, mniejszy od π, spełniający tę równość przy znaku górnym, a przez Φ_2 kąt dodatni, mniejszy od π i spełniający tę równość przy znaku dolnym. Wtedy mieć będziemy widocznie:

$$\Phi_1=\pi-2\varphi_0,\quad \Phi_2=2\varphi_0.$$

W przypadku elipsy dla każdego kąta φ, czyniącego zadość nierówności $0 < \varphi < \varphi_0$ pochodna $\frac{d\Phi}{d\varphi}$ ma wartość dodatnią, a więc kąt Φ stale powiększa się. Gdy $\varphi = \varphi_0$ pochodna $\frac{d\Phi}{d\varphi}$ ma wartość zero, a pochodna $\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$ ma wartość ujemną, a więc kąt Φ ma wówczas maximum równe wielkości Φ_1. Gdy kąt φ ma jakąkolwiek wartość, spełniającą nierówności $\varphi_0 < \varphi < \pi - \varphi_0$, wówczas pochodna $\frac{d\Phi}{d\varphi}$ ma wartość ujemną. Stąd wynika, że gdy kąt φ powiększa się pomiędzy temi granicami, wówczas kąt Φ stale zmniejsza się. Zauważamy przytem, że dla wartości $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ mamy wartość $\Phi = +\frac{\pi}{2}$. Gdy $\varphi = \pi - \varphi_0$, wówczas pochodna $\frac{d\Phi}{d\varphi}$ ma wartość równą zeru, a pochodna $\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$ ma wartość dodatnią. To znaczy, że dla wartości $\varphi = \pi - \varphi_0$, kąt Φ ma minimum równe wielkości Φ_2. Jeżeli dalej kąt φ czyni zadość nierównościom: $\pi - \varphi_0 < \varphi < \pi + \varphi_0$, to pochodna $\frac{d\Phi}{d\varphi}$ ma wartość dodatnią, t.j. przy powiększaniu się kąta φ pomiędzy temi krańcami kąt Φ stale powiększa się, przyczem dla wartości $\varphi = \pi$, kąt Φ ma wartość $\Phi = +\frac{\pi}{2}$. Podobnież jak poprzednio, możemy łatwo konstatować, jak zmienia się kąt Φ przy dalszem powiększaniu się kąta φ. Widoczne przytem, że przy warunkach, przyjętych tutaj dla tego zmieniania się, kąt Φ stale czyni zadość warunkom: $2\varphi_0 \leqslant \Phi \leqslant \pi - 2\varphi_0$.

Zwracając się teraz do przypadku hiperboli, dostrzeżemy łatwo, że gdy φ powiększa się, wówczas przy zmienianiu się, określonem powyżej, Φ stale zmniejsza się. Gdy φ przechodzi przez wartości: $0, \varphi_0, \frac{\pi}{2}, \pi - \varphi_0, \pi$ it.d., wówczas Φ przechodzi odpowiednio przez wartości: $+\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2}, -\pi, -\frac{3\pi}{2}$ i t. d. Charakter zmieniania się kąta Φ jest w przypadku hiperboli zupełnie inny, niż w przypadku elipsy.

§ 22. Punkty przecięcia linji krzywej stopnia drugiego z jej średnicą, sprzężoną z danym dwukierunkiem.

Zajmiemy się teraz zastosowaniem teorji średnic do następującego zadania.

Niech będzie dany dwukierunek rzeczywisty $b_2 : a_2$, o którym zakładamy, że jest on dwukierunkiem nieasymptotycznym, t.j. że spełniona jest nierówność:

$$\varphi(a_2, b_2) \neq 0.$$

Postaramy się wyznaczyć punkty przecięcia krzywej stopnia drugiego z jej średnicą, sprzężoną z rzeczonym dwukierunkiem nieasymptotycznym $b_2 : a_2$.

Oznaczając spółrzędne punktu przecięcia przez a, b, będziemy mogli warunki, które muszą być spełnione dla każdego takiego punktu, napisać w postaci:

$$\alpha a + \beta b + \gamma = 0, \quad \alpha a_2 + \beta b_2 = 0. \tag{20}$$

Warunki te możemy przez wprowadzenie jeszcze jednej niewiadomej ρ zastąpić przez warunki:

$$\alpha = b_2 \rho, \quad \beta = -a_2 \rho, \quad (b_2 a - a_2 b)\rho + \gamma = 0, \tag{21}$$

a wstawiając tutaj wyrażenia na α, β, γ, możemy układ tych warunków napisać w formie:

$$\left\{\begin{array}{l} A a + B b + D - \rho b_2 = 0, \\ B a + C b + E + \rho a_2 = 0, \\ (D + \rho b_2) a + (E - \rho a_2) b + F = 0. \end{array}\right. \tag{22}$$

Mamy więc układ trzech równań o trzech niewiadomych a, b, ρ i zajmiemy się rozwiązaniem tego układu.

Załóżmy naprzód, że $\delta \neq 0$. W tym przypadku można dwa pierwsze z równań (22) rozwiązać względem a, b i podstawić otrzymane wyrażenia w trzecie z tych równań. Związek, który otrzyma się w ten sposób, zawierać będzie już tylko jedną niewiadomą ρ. Ale rugowanie, o którem mowa, można wykonać znacznie krótszą drogą, mianowicie przez zastosowanie tożsamości (115) § 10. Tożsamość ta jest:

$$\Delta = f(a, b)\,\delta - (C\,\alpha^2 + A\,\beta^2 - 2\,B\,\alpha\,\beta),$$

a więc na podstawie pierwszego z równań (20) i pierwszych dwóch z równań (21) otrzymujemy z niej równanie:

$$\Delta + \rho^2\,\varphi\,(a_2, b_2) = 0, \tag{23}$$

które jest żądanym rezultatem rugowania. Ponieważ $\varphi\,(a_2, b_2) \neq 0$, więc w przypadku $\Delta \neq 0$ otrzymujemy stąd na ρ dwie wartości różne od zera i różniące się jedna od drugiej tylko znakiem. Gdy $\varphi\,(a_2, b_2)\,\Delta > 0$, wówczas wartości te są urojone ze sobą sprzężone i nie mają rzeczywistych części. Gdy zaś $\varphi\,(a_2, b_2)\,\Delta < 0$, wówczas wartości te są obie rzeczywiste. Punkty przecięcia a, b, odpowiadające tym wartościom na ρ, wynikają z pierwszych dwóch z równań (22). Otrzymują się przytem zawsze dwa różne od siebie punkty przecięcia średnicy z krzywą, bo przypuszczenie jednego tylko punktu przecięcia prowadziłoby na podstawie pierwszych dwóch z równań (22) do konkluzji, że równanie (23) ma pierwiastek podwójny, co w przypadkach scharakteryzowanych nierównością $\Delta \neq 0$, jest niemożliwością. Jeżeli nadto przypomnimy pewne nazwy, o których była mowa w § 17, to będziemy mogli uzyskane rezultaty wypowiedzieć w sposób następujący. Średnica istotnej krzywej rodzaju elips lub rodzaju hiperbol, sprzężona z dwukierunkiem wewnętrznym w stosunku do tej krzywej ma z nią dwa właściwe urojone sprzężone punkty wspólne. Średnica istotnej krzywej rodzaju elips lub rodzaju hiperbol, sprzężona z dwukierunkiem zewnętrznym w stosunku do tej krzywej ma z nią dwa różne od siebie rzeczywiste właściwe punkty wspólne. Jeżeli wreszcie $\Delta = 0$, to z równania (23) wynika $\rho = 0$, a pierwsze dwa z równań (22) otrzymują postać:

$$A\,a + B\,b + D = 0,$$

$$B\,a + C\,b + E = 0.$$

To znaczy, że w przypadkach dwóch prostych spotykających się jedynym punktem wspólnym tych prostych z średnicą, sprzężoną z dowolnym dwukierunkiem nieasymptotycznym, jest punkt ich spotkania.

Niech teraz będzie $\delta = 0$. Mamy wtedy:

$$A = \varepsilon\,\mathfrak{a}^2, \quad B = \varepsilon\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}, \quad C = \varepsilon\,\mathfrak{b}^2$$

i równania (22) możemy napisać w postaci następującej:

$$(24)\qquad \begin{cases} \varepsilon\,\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}\,a+\mathfrak{b}\,b)+D-\rho\,b_2=0, \\ \varepsilon\,\mathfrak{b}\,(\mathfrak{a}\,a+\mathfrak{b}\,b)+E+\rho\,a_2=0, \\ (D+\rho\,b_2)\,a+(E-\rho\,a_2)\,b+F=0. \end{cases}$$

Z dwóch pierwszych z równań (24) otrzymujemy przez rugowanie sumy $\mathfrak{a}\,a+\mathfrak{b}\,b$ związek:

$$\mathfrak{a}\,(E+\rho\,a_2)-\mathfrak{b}\,(D-\rho\,b_2)=0,$$

z którego wynika:

$$(25)\qquad \rho=-\frac{\mathfrak{a}\,E-\mathfrak{b}\,D}{\mathfrak{a}\,a_2+\mathfrak{b}\,b_2}.$$

Zauważmy przytem, że przy założeniu $\delta=0$, można równanie (23) napisać w postaci:

$$(26)\qquad (\mathfrak{a}\,a_2+\mathfrak{b}\,b_2)^2\,\rho^2=(\mathfrak{a}\,E-\mathfrak{b}\,D)^2$$

i że wartość (25) na ρ spełnia to równanie. Dla wyznaczenia wielkości a, b trzeba uwzględnić pierwsze i trzecie z równań układu (24), gdy $\mathfrak{a}\neq 0$, a drugie i trzecie z tych równań, gdy $\mathfrak{b}\neq 0$. Niech będzie $\mathfrak{a}\neq 0$. Wówczas z równań:

$$(27)\qquad \begin{cases} \varepsilon\,\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}\,a+\mathfrak{b}\,b)+D-\rho\,b_2=0, \\ (D+\rho\,b_2)\,a+(E-\rho\,a_2)\,b+F=0, \end{cases}$$

wynikną określone wartości na a i b tylko wtedy, gdy wyznacznik spółczynników przy a i b jest różny od zera. Wyznacznik ten jest:

$$\varepsilon\,\mathfrak{a}\,[\mathfrak{a}\,(E-\rho\,a_2)-\mathfrak{b}\,(D+\rho\,b_2)],$$

a wstawiając tutaj na ρ wartość (25), otrzymamy dla tego wyznacznika wyrażenie:

$$2\,\varepsilon\,\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}\,E-\mathfrak{b}\,D).$$

Musimy odróżnić tutaj dwa przypadki. Niech będzie naprzód:

$$\mathfrak{a}\,E-\mathfrak{b}\,D\neq 0,$$

t.j. $\Delta \neq 0$. Wówczas z równań (27) otrzymamy jeden układ wartości na a i b, t.j. jeden punkt, spełniający warunki (22). Niech będzie następnie:

$$\mathfrak{a} E - \mathfrak{b} D = 0,$$

t.j. $\Delta = 0$. Wówczas z równości (25) wyniknie:

$$\rho = 0,$$

t.j. układ (27) będzie równoważny z układem:

$$\varepsilon (\mathfrak{a} a + \mathfrak{b} b) + m = 0,$$

$$m (\mathfrak{a} a + \mathfrak{b} b) + F = 0.$$

Aby tym równaniom czyniły zadość skończone wartości na a, b musi być:

$$F - \varepsilon m^2 = 0,$$

t.j. równanie stopnia drugiego musi przedstawić jedną prostą podwójną. Jeżeli tak będzie, to każdy punkt tej prostej spełniać będzie żądane warunki (22). Łatwo dostrzec, że przy założeniu $\mathfrak{b} \neq 0$ można będzie analogicznem rozumowaniem dojść do takich samych rezultatów. Wszystkie te rezultaty można wysłowić w sposób następujący. Średnica istotnej krzywej stopnia drugiego rodzaju parabol, sprzężona z dwukierunkiem nieasymptotycznym, ma z tą krzywą jeden właściwy rzeczywisty punkt wspólny. Średnica nieistotnej krzywej rodzaju parabol albo niema z tą krzywą żadnych właściwych punktów wspólnych, albo też ma z nią wszystkie właściwe punkty wspólne. Pierwszy przypadek zachodzi wtedy, gdy rzeczona linja krzywa składa się z dwóch prostych równoległych, drugi zaś wtedy, gdy jest ona prostą podwójną.

W przypadkach, określonych równością $\delta = 0$, zajmiemy się rozważanem zadaniem także bez stosowania parametru ρ. W każdym takim przypadku można warunki (20) przedstawić w postaci:

$$\varepsilon (\mathfrak{a} a + \mathfrak{b} b)^2 + 2 D a + 2 E b + F = 0,$$

$$\varepsilon (\mathfrak{a} a_2 + \mathfrak{b} b_2) (\mathfrak{a} a + \mathfrak{b} b) + D a_2 + E b_2 = 0.$$

Wyrażenie na $\mathfrak{a} a + \mathfrak{b} b$, wynikające z drugiego z tych równań, można podstawić w pierwsze z nich i w ten sposób sprowadzić

zadanie do rozwiązania dwóch równań pierwszego stopnia. Jeżeli $\mathfrak{a}\,E - \mathfrak{b}\,D$ jest różne od zera, t.j. jeżeli krzywa jest istotną krzywą stopnia drugiego, to równania te określą jeden punkt wspólny linji krzywej i jej średnicy, sprzężonej z nieasymptotycznym dwukierunkiem $b_2 : a_2$. Jeżeli zaś wyznacznik $\mathfrak{a}\,E - \mathfrak{b}\,D$ jest zerem, to jest jeżeli równanie stopnia drugiego przedstawia dwie linje proste o wspólnym dwukierunku, to powyższe równania doprowadzą do wyniku, że dla rozwiązalności zadania musi być $F - \varepsilon\, m^2 = 0$. To znaczy, że w przypadku dwóch prostych o wspólnym dwukierunku średnica sprzężona z nieasymptotycznym dwu-

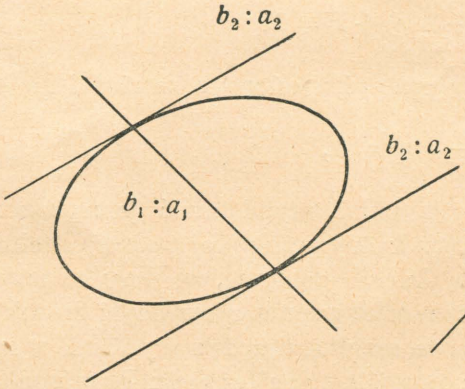

Fig. 40.

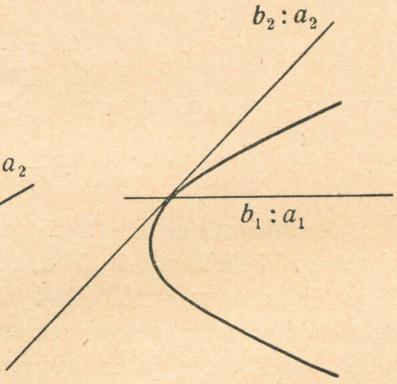

Fig. 41.

kierunkiem $b_2 : a_2$ ma z krzywą właściwe punkty wspólne tylko wtedy, gdy ta ostatnia jest prostą podwójną i wówczas średnica jest położona całkowicie na prostej podwójnej.

Z rozważań niniejszego paragrafu wynika pewna własność krzywych stopnia drugiego, odnosząca się do ich stycznych i ich średnic. Styczna do krzywej stopnia drugiego określa się, jak wiemy, równaniem:

$$\alpha\, x + \beta\, y + \gamma = 0,$$

gdzie a, b oznacza punkt styczności, który spełnia równość:

(28) $$\alpha\, a + \beta\, b + \gamma = 0.$$

Jeżeli dwukierunek stycznej oznaczymy stosunkiem $\mu : \lambda$, to mieć będziemy równość:

(29) $$\alpha\, \lambda + \beta\, \mu = 0.$$

Porównajmy teraz równości (28) i (29) z warunkami (20). Na podstawie rozważań niniejszego paragrafu dochodzimy do następującego wniosku. Średnica istotnej krzywej stopnia drugiego sprzężona z dwukierunkiem stycznej do tej krzywej przechodzi przez odnośny punkt styczności.

Powracając do stosowanych poprzednio oznaczeń $b_1 : a_1$ i $b_2 : a_2$, możemy rezultaty uzyskane w tym paragrafie zilustrować dla istotnych krzywych stopnia drugiego z właściwym środkiem figurą 40, a dla istotnych krzywych stopnia drugiego z niewłaściwym środkiem figurą 41. Szczegóły tych figur są bezpośrednio związane z treścią niniejszego paragrafu i bliższe ich objaśnianie uważamy już za zbyteczne.

§ 23. Zastosowania własności średnic do upraszczania równań stopnia drugiego.

W § 13 zajmowaliśmy się w przypadkach, gdy to było możliwe, odniesieniem równania krzywej stopnia drugiego do układu spółrzędnych prostolinjowych, którego początek położony był w środku krzywej. Opieraliśmy się przytem na wzorach (16) § 6, stosując własności środków krzywych drugiego stopnia, zbadane w § 12. W niniejszym paragrafie opierać się będziemy na tych samych wzorach (16) § 6 i stosować będziemy do upraszczania równań stopnia drugiego wyniki uzyskane w §§ 19, 20 i 22.

Założymy naprzód, że $\delta \neq 0$ i postaramy się odnieść linję krzywą do średnic ze sobą sprzężonych. Krzywa drugiego stopnia, posiadająca jeden właściwy środek, ma w spółrzędnych prostolinjowych x, y z początkiem w tym środku rownanie:

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 .$$

Ażeby odnieść ją do jej średnic ze sobą sprzężonych, przyjmijmy dwa kierunki nie należące do tego samego dwukierunku, określone spółczynnikami kierunkowemi a_1, b_1 i a_2, b_2, spełniającemi związek:

$$\varphi (a_1, b_1 ; a_2, b_2) = 0 \tag{30}$$

i wprowadźmy spółrzędne $\bar{x}, \bar{y}$, określone równaniami:

$$x = a_1 \bar{x} + a_2 \bar{y}, \quad y = b_1 \bar{x} + b_2 \bar{y}. \tag{31}$$

Wtedy otrzymamy równanie:

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \tag{32}$$

w którem spółczynniki $\bar{A}$ i $\bar{C}$ określają się wzorami:

$$\bar{A} = \varphi(a_1, b_1), \quad \bar{C} = \varphi(a_2, b_2).$$

Zwracamy przytem uwagę na to, że już w §§ 8 i 9 doszliśmy na innej drodze do równania postaci (32) i że tam także już była mowa o własnościach linji krzywej, związanych z tą postacią jej równania.

Łatwo przytem dostrzec, że jeżeli $\Delta \neq 0$, to każde równanie (32) można doprowadzić do jednej z postaci:

$$\frac{\bar{x}^2}{\bar{a}^2} + \frac{\bar{y}^2}{\varepsilon \bar{b}^2} - \bar{\eta} = 0,$$

gdzie $\bar{a}$ i $\bar{b}$ oznaczają liczby rzeczywiste dodatnie obie różne od zera, a $\bar{\varepsilon} = \pm 1$, $\bar{\eta} = \pm 1$. Odnośna linja krzywa, przecina oś $\bar{x}$ w punktach, określonych spółrzędnemi:

$$\bar{x} = \pm \bar{a} \sqrt{|\bar{\eta}|}, \quad \bar{y} = 0,$$

a oś $\bar{y}$ w punktach określonych spółrzędnemi:

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = \pm \bar{b} \sqrt{|\bar{\varepsilon}\,\bar{\eta}|}.$$

Odcinki, leżące na osiach $\bar{x}, \bar{y}$ i mające jeden kraniec wspólny w początku spółrzędnych, a długości odpowiednio równe wielkościom $\bar{a}, \bar{b}$ nazywają się p o ł o w a m i ś r e d n i c s p r z ę ż o n y c h uważanej linji krzywej. Przytem odcinek położony na osi $\bar{x}$ nazywa się w przypadku $\bar{\eta} = +1$ p o ł o w ą ś r e d n i c y r z e c z y w i s t e j, a w przypadku $\bar{\eta} = -1$ p o ł o w ą ś r e d n i c y u r o j o n e j. Podobnież odcinek położony na osi $\bar{y}$ nazywa się w przypadku $\bar{\varepsilon}\bar{\eta} = +1$ p o ł o w ą ś r e d n i c y r z e c z y w i s t e j, a w przypadku $\bar{\varepsilon}\bar{\eta} = -1$ p o ł o w ą ś r e d n i c y u r o j o n e j.

W § 13 zajmowaliśmy się w przypadkach, scharakteryzowanych warunkami $\delta = 0$ i $\Delta = 0$, odniesieniem równania stopnia drugiego do układu spółrzędnych prostolinjowych, którego początek położony jest na prostej środków, i otrzymaliśmy równanie:

$$\varepsilon (\mathfrak{a} x + \mathfrak{b} y)^2 + F - \varepsilon m^2 = 0. \tag{33}$$

Równanie to przekształcimy teraz zapomocą związków (31) w których spółczynniki kierunkowe a_1, b_1 i a_2, b_2 spełniają warunek (30). W danym razie jeden z tych kierunków należy do kierunków prostych równoległych, przedstawionych przez równanie stopnia drugiego, drugi zaś jest kierunkiem, który nie może należeć do kierunków tych równoległych, ale zresztą może być obrany zupełnie dowolnie. Niech spółczynniki a_1, b_1 określają pierwszy z tych dwóch kierunków, spółczynniki zaś a_2, b_2 drugi z tych dwóch kierunków. Wtedy z równania (33) otrzymamy równanie:

$$\varepsilon (\mathfrak{a} a_2 + \mathfrak{b} b_2)^2 \bar{y}^2 + F - \varepsilon m^2 = 0, \tag{34}$$

w którem spółczynnik przy $\bar{y}^2$ jest różny od zera. Jeżeli w szczególności równanie stopnia drugiego przedstawia prostą podwójną t.j. jeżeli spełniona jest równość: $F - \varepsilon m^2 = 0$, to równanie (34) redukuje się do równania $\bar{y}^2 = 0$.

Rozważymy tu jeszcze inną metodę upraszczania równania krzywej stopnia drugiego. Jeżeli przyjmiemy, że nowa oś $\bar{y}$ ma dany kierunek nieasymptotyczny a_2, b_2, że nowa oś $\bar{x}$ jest średnicą sprzężoną z tym kierunkiem, a początek nowego układu jest jednym z właściwych punktów wspólnych tej średnicy z uważaną linją krzywą, to spółczynniki związków zmiany spółrzędnych:

$$\begin{cases} x = a + a_1 \bar{x} + a_2 \bar{y}, \\ y = b + b_1 \bar{x} + b_2 \bar{y} \end{cases} \tag{35}$$

spełniać będą warunki następujące:

$$\begin{cases} \varphi (a_1, b_1; a_2, b_2) = 0, \quad \varphi (a_2, b_2) \neq 0, \\ \alpha a_2 + \beta b_2 = 0, \qquad f(a, b) = 0. \end{cases} \tag{36}$$

Z warunków tych wynika, że w tym nowym układzie spółrzędnych równanie krzywej można będzie napisać w postaci:

$$\overline{A}\,\overline{x}^2 + \overline{C}\,\overline{y}^2 + 2\,\overline{D}\,\overline{x} = 0, \tag{37}$$

gdzie odnośne spółczynniki określone będą wzorami:

$$\overline{A} = \varphi(a_1, b_1), \quad \overline{C} = \varphi(a_2, b_2), \quad \overline{D} = \alpha\, a_1 + \beta\, b_1$$

i przytem $\overline{C} \neq 0$.

Możemy także na innej drodze skonstatować, że zastosowanie układu prostolinjowego $\overline{x}, \overline{y}$, czyniącego zadość określonym powyżej wymaganiom geometrycznym, prowadzi do równania postaci (37). Średnica krzywej stopnia drugiego:

$$\overline{A}\,\overline{x}^2 + 2\,\overline{B}\,\overline{x}\,\overline{y} + \overline{C}\,\overline{y}^2 + 2\,\overline{D}\,\overline{x} + 2\,\overline{E}\,\overline{y} + \overline{F} = 0, \tag{38}$$

sprzężona z dwukierunkiem $\overline{\mu} : \overline{\lambda}$, określa się równaniem:

$$\overline{\lambda}(\overline{A}\,\overline{x} + \overline{B}\,\overline{y} + \overline{D}) + \overline{\mu}(\overline{B}\,\overline{x} + \overline{C}\,\overline{y} + \overline{E}) = 0. \tag{39}$$

Rzeczone wymagania geometryczne są spełnione, gdy równaniu (38) czyni zadość układ wartości $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = 0$ i gdy przytem równanie (39) redukuje się dla wartości $\overline{\lambda} = 0$ do równania $\overline{y} = 0$. Zatem rzeczonym wymaganiom staje się zadość wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

$$\overline{B} = 0, \quad \overline{C} \neq 0, \quad \overline{E} = 0, \quad \overline{F} = 0,$$

t.j. gdy równanie stopnia drugiego ma postać (37).

Dla krzywej, określonej równaniem (37), mamy wzory:

$$\overline{\delta} = \overline{A}\,\overline{C}, \quad \overline{\Delta} = -\,\overline{C}\,\overline{D}^2.$$

Z drugiego z tych wzorów wynika, że $\overline{\Delta} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{D} = 0$. Jeżeli przytem $\overline{A} \neq 0$, to równanie (37) przedstawia dwie linje proste, przecinające się w początku spółrzędnych. Te linje proste są urojone ze sobą sprzężone, gdy $\overline{A}\,\overline{C} > 0$, są zaś obie rzeczywiste, gdy $\overline{A}\,\overline{C} < 0$. Jeżeli $\overline{A} = 0$, to równanie (37) przedstawia prostą podwójną, którą jest oś $\overline{x}$-ów. Widzimy stąd, że redukcja równania drugiego stopnia do postaci (37) w przypadkach, gdy ono przedstawia linje proste, możliwa jest tylko wtedy, gdy te proste przecinają się, albo też, gdy równanie przedstawia prostą podwójną. W pierwszym z tych przypadków punkt a, b jest punktem przecięcia się rzeczonych linij prostych, w drugim zaś jest dowolnym punktem prostej podwójnej.

Zwracając się teraz do przypadków, w których równanie stopnia drugiego przedstawia istotną krzywą stopnia drugiego, zauważymy przedewszystkiem, że oś $\bar{y}$-ów jest wtedy styczną do krzywej w początku nowego układu spółrzędnych. Jeżeli następnie przyjmiemy, że $b_2 : a_2$ jest danym nieasymptotycznym dwukierunkiem rzeczywistym, to na podstawie rozważań § 22 wniesiemy, że w pewnych przypadkach punkty a, b, które spełniają żądane warunki, będą rzeczywiste, w innych zaś będą urojone. To znaczy, że w pewnych przypadkach redukcja, o której mowa, może być wykonana zapomocą rzeczywistego układu spółrzędnych, w innych zaś zapomocą układu spółrzędnych, którego początek jest urojony, a osie mają kierunki rzeczywiste. Jeżeli $\delta \neq 0$, to pierwsza kategorja przypadków zachodzi wtedy, gdy $\varphi(a_2, b_2)\,\Delta < 0$, t.j. gdy $b_2 : a_2$ jest w stosunku do krzywej dwukierunkiem zewnętrznym, druga zaś wtedy, gdy $\varphi(a_2, b_2)\,\Delta > 0$, t.j. gdy $b_2 : a_2$ jest w stosunku do krzywej dwukierunkiem wewnętrznym. W przypadkach jednej i drugiej z tych kategoryj oś $\bar{x}$-ów jest rzeczywista i leży na średnicy sprzężonej z dwukierunkiem $b_2 : a_2$, oś $\bar{y}$-ów zaś leży bądź na jednej, bądź na drugiej ze stycznych linji krzywej, posiadających wspólny dwukierunek $b_2 : a_2$. Jeżeli przytem dwukierunek ten jest zewnętrzny, to oś $\bar{y}$-ów jest rzeczywista, jeżeli zaś jest wewnętrzny, to oś $\bar{y}$-ów jest urojona. W przypadkach $\delta = 0$ obie osie nowych spółrzędnych $\bar{x}, \bar{y}$ są rzeczywiste; oś $\bar{x}$-ów leży na średnicy sprzężonej z dwukierunkiem $b_2 : a_2$, a oś $\bar{y}$-ów leży na stycznej do krzywej w punkcie jej spotkania z tą średnicą.

Zajmiemy się jeszcze pewnemi własnościami równania (37) przy założeniu, że przedstawia ono linję krzywą. Jeżeli przyjmiemy naprzód, że $\bar{\delta} \neq 0$ i zastosujemy oznaczenia:

$$\bar{p} = -\frac{\bar{D}}{\bar{C}}, \quad \bar{a} = -\varepsilon\frac{\bar{D}}{\bar{A}}, \tag{40}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$, zależnie od tego czy $\bar{\delta} > 0$, czy też $\bar{\delta} < 0$, to będziemy mogli równanie (37) napisać w postaci:

$$\bar{y}^2 = 2\bar{p}\,\bar{x} - \varepsilon\frac{\bar{p}}{\bar{a}}\,\bar{x}^2. \tag{41}$$

Wyznaczymy punkty wspólne krzywej (41) i pewnych linij prostych. Przyjmując naprzód linję prostą $\bar{y} = 0$, otrzymujemy na odcięte punktów przecięcia $\bar{x} = 0$ i $\bar{x} = 2\varepsilon\bar{a}$. Ponieważ prosta

$\bar{y} = 0$ jest średnicą, przeto stąd wynika, że punkt określony na tej prostej odciętą $\bar{x} = \varepsilon \bar{a}$ jest środkiem krzywej, a to wyjaśnia geometryczne znaczenie stałej $\bar{a}$. Przecinając następnie krzywą (41) linją prostą $\bar{x} = \varepsilon \bar{a}$, otrzymujemy na rzędne $\bar{y}$ odnośnych punktów przecięcia równanie:

$$\bar{y}^2 = \varepsilon \bar{a} \bar{p}. \tag{42}$$

Przyjmując wreszcie dwie równoległe określone równaniem $\bar{y}^2 = \bar{p}^2$, otrzymujemy na odcięte punktów spotkania krzywej (41) z temi równoległemi równanie:

$$\bar{x}^2 - 2\varepsilon \bar{a} \bar{x} + \varepsilon \bar{a} \bar{p} = 0,$$

z którego wynikają wartości:

$$\bar{x} = \varepsilon \bar{a} + \eta \sqrt{\bar{a}(\bar{a} - \varepsilon \bar{p})},$$

gdzie $\eta = \pm 1$. Jeżeli przytem zastosujemy jeszcze oznaczenie:

$$\bar{c} = \sqrt{\bar{a}(\bar{a} - \varepsilon \bar{p})}, \tag{43}$$

to będziemy mogli wartości te przedstawić w postaci:

$$\bar{x} = \varepsilon \bar{a} + \eta \bar{c}. \tag{44}$$

Zatem rzuty na oś $\bar{x}$ o kierownicy $\bar{y}$ punktów spotkania krzywej (41) z prostemi $\bar{y} = \pm \bar{p}$ są symetrycznie położone względem środka krzywej i pozycja ich określa się wielkością $\bar{c}$.

Jeżelibyśmy przyjęli na $\bar{a}$ wartość nieskończenie wielką, to otrzymalibyśmy z równania (41) równanie:

$$\bar{y}^2 = 2\bar{p}\bar{x}, \tag{45}$$

dla którego $\bar{\delta} = 0$. Równanie to określa istotną krzywą rodzaju parabol, a geometryczne znaczenie wielkości $\bar{p}$ wynika z faktu, że odcięta punktów przecięcia krzywej prostemi $\bar{y} = \pm \bar{p}$ określa się wzorem $\bar{x} = \frac{\bar{p}}{2}$.

Zajmiemy się jeszcze przypadkami, w których układ $\bar{x}, \bar{y}$ jest rzeczywistym układem spółrzędnych. Możemy wtedy tak obrać

dodatni kierunek osi $\bar{x}$-ów, żeby $\bar{p}$ było wielkością dodatnią, bo w przeciwnym razie wystarczyłoby spółczynniki kierunkowe a_1, b_1 zastąpić przez spółczynniki kierunkowe $-a_1, -b_1$. Przypuszczając, że dodatni kierunek osi $\bar{x}$ tak został wybrany i zważywszy, że ze wzorów (40) wynika:

$$\bar{p}\,\bar{a} = \varepsilon \frac{\bar{D}^2}{\delta},$$

wnosimy, że wtedy i $\bar{a}$ jest wielkością dodatnią. Wtedy wartości wielkości $\bar{y}$, wynikające z równania (42), są rzeczywiste w przypadku krzywej rodzaju elips, są zaś urojone w przypadku krzywej rodzaju hiperbol. Wtedy wartość $\bar{c}$, określona wzorem (43), jest dla krzywej rodzaju hiperbol zawsze rzeczywista, dla krzywej zaś rodzaju elips rzeczywista przy spełnieniu warunku $\bar{a} \geqslant \bar{p}$, a urojona przy spełnieniu warunku $\bar{a} < \bar{p}$. Przy obecnych założeniach punkty krzywej, należące do najbliższego otoczenia punktu a, b, leżą po stronie dodatniego kierunku osi $\bar{x}$-ów, gdyż dla dostatecznie małych dodatnich $\bar{x}$-ów równanie (41) daje dodatnie wartości na $\bar{y}^2$, a dla dostatecznie małych ujemnych $\bar{x}$-ów równanie (41) daje na $\bar{y}^2$ wartości ujemne. Niech będzie teraz dana pewna dodatnia wartość wielkości $\bar{p}$ i rozważymy przy tej wartości trzy równania (41) odpowiadające wartościom: 1) $\bar{a} = u$, $\varepsilon = +1$; 2) $\bar{a} = \infty$; 3) $\bar{a} = v$, $\varepsilon = -1$, gdzie u i v oznaczają stałe dodatnie. Przy wartościach 1) równanie (41) określa istotną krzywą rodzaju elips; przy wartości 2) istotną krzywą rodzaju parabol; przy wartościach 3) istotną krzywą rodzaju hiperbol. Jeżeli $\bar{x}$ ma wartość dodatnią, która spełnia nierówność $\bar{x} < 2u$, to odpowiadająca jej wartość $|\bar{y}|$ jest najmniejsza w przypadku 1), t.j. w przypadku krzywej rodzaju elips; jest pośrednia w przypadku 2), t.j. w przypadku krzywej rodzaju parabol; wreszcie jest największa w przypadku 3), t.j. w przypadku krzywej rodzaju hiperbol. Inaczej możemy powiedzieć, że w obszarach płaszczyzny, odpowiadających dodatnim wartościom spółrzędnej $\bar{x}$, krzywa, odpowiadająca wartościom 3), obejmuje krzywą odpowiadającą wartościom 2), ta zaś obejmuje krzywą, odpowiadającą wartościom 1). Gdybyśmy w równaniu (41) uważali wielkość $\bar{a}$ jako zmienny parametr, to przedstawiałoby ono nieskończoną ilość krzywych rodzaju elips, nieskończoną ilość krzywych rodzaju hiperbol, a nadto linję krzywą rodzaju parabol, do której dążą krzywe obu poprzednich rodzajów, gdy wielkość $\bar{a}$ zmierza do nieskończoności.

§ 24. Dwukierunki główne i osie.

W §§ 32 i 35 tomu I zajmowaliśmy się wśród różnych zadań, odnoszących się do par linij prostych, wyprowadzeniem równania dwusiecznych kątów dwóch linij prostych, należących do tej samej pary. W § 58 tomu I zajmowaliśmy się wyznaczeniem pewnych wektorów rzeczywistych, blisko związanych z dwusiecznemi kątów dwóch sprzężonych prostych o urojonych dwukierunkach. Przedmiotem obecnego paragrafu będą rozważania i rachunki, mające bliską łączność z treścią wymienionych zadań tomu I. Zauważamy przytem, że te zadania tomu I są pod pewnemi względami szczególnemi przypadkami rozważań i rachunków obecnego paragrafu.

Niech będzie linja krzywa stopnia drugiego i oznaczmy przez λ, μ spółczynniki kierunku względnie pseudokierunku, a przez u, v spółczynniki drugiego kierunku względnie pseudokierunku. Zajmiemy się wyznaczeniem takich par dwukierunków $\mu : \lambda$ i $v : u$, żeby dwukierunki, należące do tej samej pary, były do siebie prostopadłe i jednocześnie ze sobą sprzężone względem uważanej krzywej stopnia drugiego. To zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są jednocześnie równości:

$$(46) \qquad \begin{cases} \lambda u + \cos\vartheta\,(\lambda v + \mu u) + \mu v = 0, \\ A\lambda u + B\,(\lambda v + \mu u) + C\mu v = 0 \end{cases}$$

i zadanie nasze polega na określeniu stosunków $\mu : \lambda$ i $v : u$, czyniących zadość tym równościom.

Zauważmy naprzód, że drugie z równań (46) jest wynikiem pierwszego z nich wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są jednocześnie równości:

$$(47) \qquad A = C, \quad B = A\cos\vartheta = C\cos\vartheta.$$

Wtedy każde dwa dwukierunki do siebie prostopadłe są zarazem ze sobą sprzężone.

Aby rozważyć inne przypadki, napiszemy równości (46) w postaci:

$$(\lambda + \mu\cos\vartheta)\,u + (\lambda\cos\vartheta + \mu)\,v = 0,$$

$$(A\lambda + B\mu)\,u + (B\lambda + C\mu)\,v = 0$$

i zauważymy, że wielkości u, v nie mogą być obie jednocześnie zerami. Stąd wynika, że wielkości λ, μ muszą spełniać równość:

$$(\lambda + \mu \cos\vartheta)(B\lambda + C\mu) - (\lambda \cos\vartheta + \mu)(A\lambda + B\mu) = 0,$$

którą można inaczej napisać w formie:

$$(48)\quad (A\cos\vartheta - B)\lambda^2 + (A - C)\lambda\mu + (B - C\cos\vartheta)\mu^2 = 0.$$

Jeżeli zachodzą warunki (47), to równość (48) spełniona jest tożsamościowo. Jeżeli zaś warunki (47) nie są spełnione, to równość (48) jest równaniem stopnia drugiego względem stosunku $\mu : \lambda$. Zauważmy tu, że w § 32 tomu I mieliśmy równanie (35), które określało tam dwusieczne kątów pary linij prostych. Równanie (48) otrzymuje się z tego równania (35), przez zastąpienie w niem spółrzędnych x i y odpowiednio przez spółczynniki λ i μ. W rzeczonym § 32 studjowaliśmy także wyróżnik równania (35). Równanie (48) ma ten sam wyróżnik, t.j. wyrażenie:

$$(49)\quad -\frac{1}{4}\Omega^2 = -\frac{1}{4}\{[2B - (A + C)\cos\vartheta]^2 + (A - C)^2\sin^2\vartheta\}.$$

Stąd widać, że jeżeli warunki (47) nie są spełnione, to wyróżnik równania (48) jest ujemny, a to znaczy, że równanie (48) określa dwa dwukierunki rzeczywiste, różne jeden od drugiego. Zauważmy teraz, że przez rugowanie z równań (46) spółczynników λ, μ otrzymalibyśmy na spółczynniki u, v ten sam związek, który poprzednio otrzymaliśmy na λ, μ. Ta uwaga prowadzi dla przypadków, w których równości (47) nie są spełnione, do następującego wniosku. Jeżelibyśmy jeden z dwukierunków, spełniających równanie (48) przyjęli za $\mu : \lambda$, to drugi z nich byłby odpowiednim dwukierunkiem $v : u$. To znaczy, że w przypadkach, gdy równości (47) nie są spełnione, istnieje jedna tylko para dwukierunków ze sobą sprzężonych i do siebie prostopadłych. Dwukierunek prostopadły do dwukierunku z nim sprzężonego, nazywa się dwukierunkiem głównym krzywej stopnia drugiego. Każdy kierunek, należący do dwukierunku głównego, nazywa się kierunkiem głównym krzywej stopnia drugiego. Jeżeli krzywa stopnia drugiego nie należy do rodzaju kół, to istnieje jedna para dwukierunków głównych. Z rozważań § 11 tomu II i § 32 tomu I wynika, że przy założeniu $\delta \neq 0$ dwukierunki główne dzielą kąty pomiędzy nieizotropowemi

dwukierunkami asymptotycznemi na dwie części równe. Z § 32 tomu I także wynika, że w przypadkach $\delta = 0$ jednym z dwukierunków głównych jest dwukierunek asymptotyczny, drugim zaś dwukierunek do niego prostopadły. Wreszcie w przypadkach krzywych rodzaju kół każdy dwukierunek jest dwukierunkiem głównym, t.j. każde dwa dwukierunki do siebie prostopadłe są zarazem ze sobą sprzężone.

Zobaczymy, że wyznaczanie dwukierunków głównych można także zredukować do innego równania stopnia drugiego. Metoda, którą w tym celu stosować będziemy, jest blisko związana z rachunkami końcowego ustępu § 45 tomu I-go i z niezmiennikami, wyznaczonemi w § 7 tomu II-go. Część rozważań i rachunków wykonanych w § 58 tomu I-go stanowi w szczegółach zasadniczych przypadek szczególny tej metody.

Rezultat rugowania wielkości u, v z równań (46) można przez zastosowanie parametru S przedstawić w postaci dwóch równań, mianowicie równań:

$$(50) \qquad \begin{cases} A\lambda + B\mu = S(\lambda + \mu\cos\vartheta), \\ B\lambda + C\mu = S(\lambda\cos\vartheta + \mu), \end{cases}$$

które inaczej napisać możemy w postaci:

$$(A - S)\lambda + (B - S\cos\vartheta)\mu = 0,$$

$$(B - S\cos\vartheta)\lambda + (C - S)\mu = 0.$$

Ale dwukierunek $\mu : \lambda$, spełniający tę dwa równania istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy wielkość S czyni zadość równaniu:

$$\begin{vmatrix} A - S & , & B - S\cos\vartheta \\ B - S\cos\vartheta, & & C - S \end{vmatrix} = 0.$$

Obliczając wyznacznik, można równanie to napisać w formie:

$$\sin^2\vartheta\, S^2 - (A + C - 2B\cos\vartheta)\, S + A\,C - B^2 = 0,$$

albo, stosując oznaczenia § 7, w formie:

$$(51) \qquad \sin^2\vartheta\, S^2 - \omega\, S + \delta = 0.$$

Równanie to jest zawsze stopnia drugiego, bo $\sin^2 \vartheta \neq 0$. Wyróżnik tego równania jest:

$$\sin^2 \vartheta \, \delta - \frac{1}{4} \omega^2,$$

t.j., jak wynika z rachunków § 32 tomu I, równa się $-\frac{1}{4} \Omega^2$. Widzimy więc, że równanie (51) ma ten sam wyróżnik, co równanie (48). To znaczy, że rozwiązanie każdego z tych równań wymaga obliczenia pierwiastka kwadratowego z tej samej wielkości i że dyskusja tego rozwiązania prowadzi do tej samej klasyfikacji przypadków.

Gdy więc $\Omega = 0$, t.j. gdy dwukierunki asymptotyczne są izotropowe, wówczas równanie (51) lub, jak mówić będziemy także, r ó w n a n i e n a S m a j e d e n r z e c z y w i s t y p i e r w i a s t e k p o d w ó j n y. Ten pierwiastek podwójny określa się wzorem:

$$S = \frac{\omega}{2 \sin^2 \vartheta} = A \tag{52}$$

i wtedy równania (50) będą spełnione przy każdym wyborze dwukierunku $\mu : \lambda$.

Gdy zaś $\Omega \neq 0$, t.j. we wszystkich innych przypadkach, r ó w n a n i e n a S m a d w a r ó ż n e o d s i e b i e p i e r w i a s t k i r z e c z y w i s t e. Jeżeli pierwiastki te oznaczymy przez S_1 i S_2, to będziemy mogli wyrazić je zapomocą wzorów:

$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{\omega - \tau \Omega}{2 \sin^2 \vartheta} = \dfrac{\omega - \tau \sqrt{\omega^2 - 4 \delta \sin^2 \vartheta}}{2 \sin^2 \vartheta}, \\ S_2 = \dfrac{\omega + \tau \Omega}{2 \sin^2 \vartheta} = \dfrac{\omega + \tau \sqrt{\omega^2 - 4 \delta \sin^2 \vartheta}}{2 \sin^2 \vartheta}, \end{cases} \tag{53}$$

w których przez τ rozumiemy ± 1 i pozostawiamy narazie tę wielkość bez bliższego określenia.

Jeżeli następnie podstawimy zamiast S w równaniach (50) pierwiastek S_1, to otrzymamy z nich na spółczynnik dwukierunku $\mu : \lambda$ pewną wartość, którą oznaczymy przez $b_1 : a_1$. Podobnież, jeżeli podstawimy w równaniach (50) zamiast parametru S pierwiastek S_2, to otrzymamy z nich na stosunek $\mu : \lambda$ pewną wartość, którą oznaczymy przez $b_2 : a_2$. Zachodzić będą przeto równości:

$$(54)\qquad \begin{cases} A a_1 + B b_1 = S_1 (a_1 + b_1 \cos \vartheta), \\ B a_1 + C b_1 = S_1 (a_1 \cos \vartheta + b_1) \end{cases}$$

i równości:

$$(55)\qquad \begin{cases} A a_2 + B b_2 = S_2 (a_2 + b_2 \cos \vartheta), \\ B a_2 + C b_2 = S_2 (a_2 \cos \vartheta + b_2). \end{cases}$$

Do dwukierunków $b_1 : a_1$ i $b_2 : a_2$ doszliśmy, szukając dwukierunków ze sobą sprzężonych i do siebie prostopadłych. Teraz sprawdzimy, że dwukierunki $b_1 : a_1$ i $b_2 : a_2$, spełniające związki (54) i (55), są parą dwukierunków, mającą obie te własności. Jeżeli przypomnimy oznaczenia:

$$\Phi (a_1, b_1; a_2, b_2) = a_1 a_2 + \cos \vartheta (a_1 b_2 + b_1 a_2) + b_1 b_2,$$

$$\varphi (a_1, b_1; a_2, b_2) = A a_1 a_2 + B (a_1 b_2 + b_1 a_2) + C b_1 b_2,$$

to mnożąc związki (54) odpowiednio przez a_2 i b_2 i dodając stronami, otrzymamy równość:

$$\varphi (a_1, b_1; a_2, b_2) = S_1 \Phi (a_1, b_1; a_2, b_2),$$

a mnożąc związki (55) odpowiednio przez a_1 i b_1 i dodając stronami, otrzymamy równość:

$$\varphi (a_1, b_1; a_2, b_2) = S_2 \Phi (a_1, b_1; a_2, b_2).$$

Ponieważ $S_1 \neq S_2$, przeto konsekwencją tych dwóch równości są równości:

$$\Phi (a_1, b_1; a_2, b_2) = 0, \quad \varphi (a_1, b_1; a_2, b_2) = 0,$$

a to znaczy, że dwukierunki $b_1 : a_1$ i $b_2 : a_2$, spełniające związki (54) i (55), są do siebie prostopadłe i ze sobą sprzężone.

Zanotujemy tu jeszcze inne związki, wynikające ze związków (54) i (55). Mianowicie, mnożąc obie strony związków (54) odpowiednio przez a_1 i b_1 oraz dodając wyniki, dochodzimy do związku:

$$(56)\qquad \varphi (a_1, b_1) = S_1,$$

a mnożąc obie strony związków (55) odpowiednio przez a_2 i b_2 oraz dodając wyniki, dochodzimy do związku:

$$(57)\qquad \varphi (a_2, b_2) = S_2.$$

Zwrócimy się teraz przy założeniu $\Omega \neq 0$ do bliższego rozważenia pierwiastków S_1 i S_2. Gdy $\delta > 0$, oba te pierwiastki są różne od zera i tego samego znaku; gdy $\delta = 0$, jeden z nich jest równy zeru, a drugi różny od zera; gdy wreszcie $\delta < 0$, oba pierwiastki są różne od zera i mają różne znaki. Łatwo dostrzec, że w przypadkach $\delta \geqq 0$ wielkość ω jest zawsze różna od zera. Tak jest istotnie, bo jeżeliby przypuścić, że w jakimkolwiek z przypadków, określonych warunkiem $\delta \geqq 0$, zachodzi równość $\omega = 0$, to przy spełnieniu nierówności $\delta > 0$ doszłoby się do niemożliwego wyniku, że Ω^2 ma wartość ujemną, a przy spełnieniu równości $\delta = 0$ do niemożliwego wyniku, że Ω^2 jest zerem. Wobec tego rozważenie wartości pierwiastków S_1 i S_2 redukuje się przy założeniu $\delta \geqq 0$ do uwzględnienia przypadków następujących. Gdy $\delta > 0$ i $\tau\omega > 0$, wówczas S_1 i S_2 są takiemi pierwiastkami jednakowego znaku, że $|S_1| < |S_2|$; gdy zaś $\delta > 0$ i $\tau\omega < 0$, wówczas S_1 i S_2 są takiemi pierwiastkami jednakowego znaku, że $|S_1| > |S_2|$. Gdy $\delta = 0$ i $\tau\omega > 0$, wówczas $S_1 = 0$, a $S_2 \neq 0$; gdy zaś $\delta = 0$ i $\tau\omega < 0$, wówczas $S_1 \neq 0$, a $S_2 = 0$. Jeżeli teraz założymy, że $\delta < 0$, to będziemy mieli do uwzględnienia dwa przypadki: gdy $\tau = +1$, wówczas zachodzą nierówności: $S_1 < 0$, $S_2 > 0$; gdy zaś $\tau = -1$, wówczas zachodzą nierówności: $S_1 > 0$, $S_2 < 0$. Zauważymy, że przy założeniu $\delta < 0$ może się zdarzyć, iż oba pierwiastki mają tę samą bezwzględną wartość, t.j. że spełniona jest równość $|S_2| = |S_1|$. Widoczne, że to zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest równość $\omega = 0$.

Każda prosta właściwa, będąca średnicą krzywej stopnia drugiego, sprzężoną z dwukierunkiem prostopadłym do jej własnego dwukierunku, nazywa się *osią krzywej stopnia drugiego*. Dwukierunek osi i dwukierunek do niej prostopadły są dwukierunkami głównemi. W każdym przypadku spełnienia nierówności $\delta \neq 0$, $\Omega \neq 0$, t.j. w przypadku *krzywej stopnia drugiego rodzaju hiperbol*, oraz w przypadku *krzywej rodzaju elips, nie należącej do rodzaju kół*, istnieje jedna i tylko *jedna para osi*. Z zasadniczej własności dwukierunków głównych wynika, że para osi jest *parą dwusiecznych kątów, które tworzą ze sobą asymptoty linji krzywej*. Przypominamy przytem, że pewnemi przypadkami tych dwusiecznych zajmowaliśmy się już w §§ 32, 35 i 58 tomu I-go. Gdy $\delta > 0$ i $\Omega = 0$, t.j. w przypadku *krzywej rodzaju kół, każda średnica jest osią*. Gdy $\delta = 0$ i $\Delta \neq 0$, t.j.

w przypadku istotnej krzywej rodzaju parabol, istnieje tylko jedna oś, którą jest średnica sprzężona z dwukierunkiem prostopadłym do asymptotycznego. Gdy wreszcie $\delta = 0$ i $\Delta = 0$, t.j. w przypadku pary prostych o wspólnym dwukierunku, osią jest prosta środków, a także każda prosta do niej prostopadła.

Zajmiemy się jeszcze wyprowadzeniem równań osi przy założeniach $\delta \neq 0$, $\Omega \neq 0$ i przy założeniach $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$.

W pierwszym z tych przypadków można skorzystać bezpośrednio z równania (48). Oznaczając mianowicie literami a, b spółrzędne środka linji krzywej, otrzymamy równanie pary osi w postaci:

$$(58)\quad (A\cos\vartheta - B)\,(x-a)^2 + (B - C\cos\vartheta)\,(y-b)^2 + \\ + (A - C)\,(x-a)\,(y-b) = 0.$$

Inną formę tego równania można otrzymać przez zastosowanie równania średnicy, sprzężonej z dwukierunkiem $\mu:\lambda$, t.j. równania:

$$(59)\quad \lambda\,(A\,x + B\,y + D) + \mu\,(B\,x + C\,y + E) = 0.$$

Ponieważ średnica jest osią wtedy i tylko wtedy, gdy dwukierunek $\mu:\lambda$ jest dwukierunkiem głównym, przeto równanie pary osi można wyprowadzić przez wyrugowanie stosunku $\mu:\lambda$ z równań (48) i (59). Tą drogą otrzymamy równanie:

$$(60)\quad (A\cos\vartheta - B)\,(B\,x + C\,y + E)^2 + (B - C\cos\vartheta)\,(A\,x + B\,y + D)^2 - \\ - (A - C)\,(B\,x + C\,y + E)\,(A\,x + B\,y + D) = 0,$$

które jest inną postacią równania pary osi. Łatwo także sprawdzić bezpośrednio, że związki (58) i (60) przedstawiają jedno i to samo równanie. W tym celu zwrócimy uwagę na to, że wielkości a, b spełniają związki:

$$A\,a + B\,b + D = 0,$$
$$B\,a + C\,b + E = 0.$$

Stąd wynika, że równanie (60) można inaczej napisać w formie:

$$(A\cos\vartheta - B)\,[B\,(x-a) + C\,(y-b)]^2 + \\ + (B - C\cos\vartheta)\,[A\,(x-a) + B\,(y-b)]^2 - \\ - (A - C)\,[B\,(x-a) + C\,(y-b)]\,[A\,(x-a) + B\,(y-b)] = 0,$$

a jeżeli uporządkujemy tutaj wyrazy według potęg $x-a$ i $y-b$, to otrzymamy wielomian, stojący po lewej stronie równania (58), pomnożony przez $-\delta$.

W drugim z wymienionych powyżej przypadków zastosujemy odpowiednią postać równania średnicy sprzężonej z dwukierunkiem $\mu:\lambda$, mianowicie równanie:

$$(61) \qquad \varepsilon(\mathfrak{a}\lambda+\mathfrak{b}\mu)(\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}y)+D\lambda+E\mu=0.$$

Aby ta średnica była osią, potrzeba i wystarcza, żeby dwukierunek $\mu:\lambda$ był prostopadły do dwukierunku asymptotycznego. To znaczy, że zadanie nasze można rozwiązać przez rugowanie stosunku $\mu:\lambda$ z równania (61) i z równania:

$$\mathfrak{a}\mu-\mathfrak{b}\lambda-(\mathfrak{b}\mu-\mathfrak{a}\lambda)\cos\vartheta=0.$$

Tą drogą otrzymujemy następujące równanie osi:

$$(62) \quad \varepsilon(\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2-2\mathfrak{a}\mathfrak{b}\cos\vartheta)(\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}y)+D(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\cos\vartheta)+$$
$$+E(\mathfrak{b}-\mathfrak{a}\cos\vartheta)=0.$$

Zauważmy, że przy założeniu $A\neq 0$ można równanie to napisać w postaci:

$$\omega(Ax+By)+D(A-B\cos\vartheta)+E(B-A\cos\vartheta)=0,$$

a przy założeniu $C\neq 0$ w postaci:

$$\omega(Bx+Cy)+D(B-C\cos\vartheta)+E(C-B\cos\vartheta)=0.$$

§ 25. Równania stopnia drugiego odniesione do układów spółrzędnych, których osie mają dwukierunki główne.

Niech będzie znowu równanie stopnia drugiego:

$$(63) \qquad f(x,y)=0.$$

Jeżeli w równaniu tem wykonamy zmianę spółrzędnych, określoną związkami:

$$(64) \qquad \begin{cases} x=a+a_1\bar{x}+a_2\bar{y}, \\ y=b+b_1\bar{x}+b_2\bar{y}, \end{cases}$$

gdzie a_1, b_1 i a_2, b_2 oznaczają spółczynniki dwóch kierunków sprzężonych krzywej (63) i będących zarazem jej kierunkami głównemi, to z jednej strony w równaniu tem zajdzie pewne uproszczenie, z drugiej zaś krzywa będzie odniesiona do prostokątnego układu spółrzędnych prostolinjowych. W paragrafie bieżącym uskutecznimy to uproszczenie równania (63), a także rozważymy uproszczenia, otrzymujące się przez pewne założenia co do pozycji początku nowego układu spółrzędnych.

Niech krzywa (63) należy naprzód do rodzaju kół, t.j. załóżmy naprzód, że $\Omega = 0$. Wszystkie przypadki, należące do tego rodzaju, objęte są już rozważaniami podanemi w §§ 32, 34 i 36 tomu I. Ale obecnie w związku z rachunkami, odnoszącemi się do dwukierunków głównych, zauważymy, że przez zastosowanie zmiany spółrzędnych (64) otrzymamy dla krzywej rodzaju kół równanie:

$$S(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + 2\bar{D}\bar{x} + 2\bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0,$$

a przyjmując przytem, że początek układu spółrzędnych $\bar{x}, \bar{y}$ znajduje się w środku krzywej, mieć będziemy wartości:

$$\bar{D} = 0, \quad \bar{E} = 0, \quad \bar{F} = \frac{\Delta}{\delta}$$

i otrzymamy dla tej krzywej równanie:

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \frac{8 \sin^4 \vartheta \, \Delta}{\omega^3} = 0. \tag{65}$$

Równanie to jest w bliskiej łączności z pewnemi równaniami i wzorami przytoczonych paragrafów tomu I. Są to mianowicie równania i wzory, które odnoszą się tam do par prostych izotropowych i do kół samych ze sobą sprzężonych.

Załóżymy teraz, że $\Omega \neq 0$, t.j. zwrócimy się do rozważania wszystkich innych przypadków. Równanie (63) przy tem założeniu przechodzi przez przekształcenie (64) w równanie nie zawierające iloczynu $\bar{x}\,\bar{y}$, mianowicie w równanie:

$$S_1 \bar{x}^2 + S_2 \bar{y}^2 + 2\bar{D}\bar{x} + 2\bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0. \tag{66}$$

Zajmiemy się uproszczeniami, które można osiągnąć przez odpowiednie umieszczenie początku spółrzędnych nowego układu.

Załóżmy naprzód, że $\delta \neq 0$. Wtedy możemy początek nowego układu umieścić w środku krzywej i otrzymamy równanie:

$$S_1 \bar{x}^2 + S_2 \bar{y}^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 . \tag{67}$$

Niech będzie następnie $\delta = 0$. Załóżmy przytem, że znak τ, figurujący we wzorach (53), określony jest nierównością $\tau \omega > 0$. Wtedy z pierwszego z tych wzorów wynika $S_1 = 0$. To znaczy, że $b_1 : a_1$ określa dwukierunek asymptotyczny, że więc oś $\bar{x}$-ów ma dwukierunek asymptotyczny. Jeżelibyśmy przytem przyjęli, że początek spółrzędnych nowego układu leży na średnicy sprzężonej z dwukierunkiem $b_2 : a_2$, to mielibyśmy:

$$\bar{E} = \alpha a_2 + \beta b_2 = 0 .$$

Ponieważ średnica ta byłaby wówczas osią, mającą dwukierunek asymptotyczny, przeto widzimy, że w przypadku $\delta = 0$ równanie krzywej, odniesione do prostolinjowego prostokątnego układu spółrzędnych $\bar{x}, \bar{y}$, którego oś $\bar{x}$ jest osią o dwukierunku asymptotycznym, ma postać:

$$S_2 \bar{y}^2 + 2 \bar{D} \bar{x} + \bar{F} = 0 . \tag{68}$$

Odróżnimy przytem dwa przypadki. Gdy $\Delta \neq 0$, wówczas wielkości α i β nie mogą być obie jednocześnie zerami, gdy zaś $\Delta = 0$, wtedy wielkości α i β są obie jednocześnie zerami, bo punkt a, b położony jest na prostej środków. Stąd wynika, że dla istotnej krzywej rodzaju parabol spółczynnik $\bar{D}$ jest w równaniu (68) różny od zera, natomiast dla pary prostych o wspólnym dwukierunku spółczynnik $\bar{D}$ jest równy zeru. W pierwszym z tych przypadków można uzyskać jeszcze dalsze uproszczenie, którem zajmiemy się także w niniejszym paragrafie, ale w związku z innemi redukcjami. W drugim z tych przypadków mamy równanie:

$$S_2 \bar{y}^2 + \bar{F} = 0 , \tag{69}$$

które określa dwie proste o wspólnym dwukierunku. Ponieważ przytem zachodzi równość:

$$S_2 = \frac{\omega}{\sin^2 \vartheta} ,$$

a z równania (34) wynika, że dla $\overline{F}$ można podać wzór:

$$\overline{F} = F - \varepsilon m^2,$$

przeto możemy równanie (69) napisać w postaci:

$$\overline{y}^2 + \frac{(F - \varepsilon m^2) \sin^2 \vartheta}{\omega} = 0.$$

Ale zważywszy, że w przypadku, którym zajmujemy się, zachodzą związki:

$$D = m\,\mathfrak{a}, \quad E = m\,\mathfrak{b}$$

i że przytem spełniona jest równość:

$$\omega = \varepsilon (\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 - 2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \cos \vartheta),$$

dochodzimy do wyniku, że uważane równanie drugiego stopnia można przedstawić w formie:

$$\overline{y}^2 = \frac{d^2}{4}, \tag{70}$$

gdzie d^2 określa się wzorem:

$$d^2 = \frac{4 \sin^2 \vartheta}{\omega^2} [\Phi (-E, D) - \omega F]. \tag{71}$$

Wzór ten wyprowadziliśmy w § 35 tomu I. Wyznacza on kwadrat prostopadłej odległości prostych o wspólnym dwukierunku określonych równaniem stopnia drugiego.

Zajmiemy się teraz uproszczeniami równania (66), wynikającemi z założenia, że początek spółrzędnych układu $\overline{x}, \overline{y}$ leży na uważanej linji krzywej i na jej średnicy, sprzężonej z dwukierunkiem $b_2 : a_2$. Wówczas spełnione muszą być równości:

$$\overline{F} = f(a, b) = 0, \quad \overline{E} = \alpha a_2 + \beta b_2 = 0,$$

a przytem mieć będziemy na $\overline{D}$ wzór:

$$\overline{D} = \alpha a_1 + \beta b_1.$$

Wtedy można zastosować rachunki zawarte w § 22 i widzimy, że ze wzorów (21) i (22) tego paragrafu wynika w szczególności, iż ma miejsce wzór:

(72) $$\overline{D} = (a_1 b_2 - b_1 a_2)\,\rho$$

i że czynnik ρ, we wzorze tym zachodzący, spełnia równanie:

(73) $$\Delta + S_2 \rho^2 = 0 .$$

Wzór (72) przedstawimy w innej formie. Ponieważ dwukierunki $b_1 : a_1$ i $b_2 : a_2$ są do siebie prostopadłe, więc zachodzi równość:

$$(a_1 b_2 - b_1 a_2) \sin \vartheta = \eta ,$$

gdzie $\eta = \pm 1$. Stąd wynika, że wielkość $\overline{D}$ określa się wzorem:

(74) $$\overline{D} = \eta \rho \operatorname{cosec} \vartheta .$$

Łatwo dostrzec przytem, że w zadaniu redukcji, którem zajmujemy się, można kierunki a_1, b_1 i a_2, b_2 dwukierunków głównych $b_1 : a_1$ i $b_2 : a_2$ wybrać dowolnie albo w taki sposób, że $\eta = +1$, t.j. $\sin \vartheta = +1$, albo też w taki sposób, że $\eta = -1$, t.j. $\sin \vartheta = -1$.

Niech będzie teraz naprzód $\delta \neq 0$. Wówczas otrzymamy z równania (73) dwie wartości na ρ, określone wzorem:

$$\rho = \zeta \sqrt{\left| -\frac{\Delta}{S_2} \right|} ,$$

gdzie $\zeta = \pm 1$, a więc dojdziemy na podstawie wzoru (74) do równości:

(75) $$\overline{D} = \eta \zeta \operatorname{cosec} \vartheta \sqrt{\left| -\frac{\Delta}{S_2} \right|} ,$$

t.j. otrzymamy z równania (66) równanie:

(76) $$S_1 \overline{x}^2 + S_2 \overline{y}^2 + 2 \eta \zeta \operatorname{cosec} \vartheta \sqrt{\left| -\frac{\Delta}{S_2} \right|}\, \overline{x} = 0 .$$

Zauważmy, że równanie to stosuje się przy założeniu $\delta \neq 0$ do wszystkich możliwych przypadków uważanej redukcji. Ale w niektórych z tych przypadków jest ono odniesione do rzeczywistego układu spółrzędnych, w innych zaś do układu spółrzędnych o rzeczywistych kierunkach osi, ale o urojonym początku spółrzędnych. Bliższem rozważeniem jednych i drugich z tych przypadków zajmiemy się dopiero w § 26.

Niech będzie następnie $\delta = 0$. Z rozważań § 23 wynika, że redukcja, którą obecnie wykonywamy, może być stosowana tylko do przypadku istotnej krzywej rodzaju parabol i do przypadku prostej podwójnej. Ten ostatni przypadek prowadzi do równania $y^2 = 0$. Zajmiemy się przeto tylko pierwszym, t.j. założymy, że $\Delta \neq 0$. Wtedy znowu przyjmiemy, że znak τ we wzorach (53) wybrany jest w taki sposób, iż mamy $\tau\,\omega > 0$. Wobec tego będziemy mieli równości $S_1 = 0$, $S_2 = \frac{\omega}{\sin^2 \vartheta}$ oraz równość (74), przyczem w ostatniej z nich czynnik ρ mieć będzie jedną z wartości spełniających równanie (73), które obecnie napisać można w postaci:

$$\sin^2 \vartheta\, \Delta + \rho^2\, \omega = 0 .$$

Z tego równania wynika:

$$\rho = \zeta \sin \vartheta \sqrt{-\frac{\Delta}{\omega}}, \tag{77}$$

gdzie na ζ trzeba przyjąć albo wartość $+1$, albo wartość -1. Odnośnie do wzoru (77) zaznaczymy przedewszystkiem, że w uważanym przypadku zachodzi równość:

$$-\frac{\Delta}{\omega} = \frac{(\mathfrak{a} E - \mathfrak{b} D)^2}{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 - 2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \cos \vartheta}, \tag{78}$$

t.j. że wielkość, znajdująca się we wzorze (77) pod pierwiastkiem, ma wartość dodatnią. Następnie, stosując wzór (74), wyprowadzimy na $\overline{D}$ wyrażenie:

$$\overline{D} = \eta\, \zeta \sqrt{-\frac{\Delta}{\omega}}. \tag{79}$$

Wreszcie zwrócimy uwagę na to, że jak wynika z rozważań § 22, określonej zmianie spółrzędnych uważanego tutaj rodzaju, odpowiada w przypadku $\delta = 0$ jedna określona wartość na ρ, a więc jeden określony znak ζ. Ażeby zorjentować się, jak znak ten powinien być wybrany, zwrócimy uwagę na to, że przy każdej zmianie spółrzędnych prostolinjowych mamy wzór:

$$\overline{D} = \alpha\, a_1 + \beta\, b_1 ,$$

który można napisać w formie:

$$\overline{D} = D\, a_1 + E\, b_1 + a\,(A\, a_1 + B\, b_1) + b\,(B\, a_1 + C\, b_1) .$$

Ponieważ dwukierunek $b_1 : a_1$ jest w rozważanym obecnie przypadku dwukierunkiem asymptotycznym, przeto spełnione są obie równości:

$$A a_1 + B b_1 = 0, \quad B a_1 + C b_1 = 0$$

i dochodzimy do wzoru:

$$\overline{D} = D a_1 + E b_1. \tag{80}$$

Jeżeli określimy wielkość ζ_1 w ten sposób, że $\zeta_1 = +1$, gdy wielkość (80) jest dodatnia, że zaś $\zeta_1 = -1$, gdy wielkość (80) jest ujemna, to będziemy mogli napisać równość:

$$\zeta = \eta \zeta_1, \tag{81}$$

która wyznacza znak ζ we wzorze (77). Łatwo przytem stwierdzić bezpośrednio, że zachodzi równość:

$$-\frac{\Delta}{\omega} = (D a_1 + E b_1)^2,$$

bo spółczynniki a_1, b_1 określają się wzorami:

$$a_1 = -\frac{\mathfrak{b}}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon \omega}}, \quad b_1 = \frac{\mathfrak{a}}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon \omega}}.$$

gdzie $\varepsilon_1 = \pm 1$, a stąd wynika, że równość, o której mowa, jest tylko inną formą równości (78). Naskutek tych rozważań możemy w przypadku $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$ uproszczone równanie drugiego stopnia napisać w postaci:

$$\overline{y}^2 + 2 \frac{\sin^2 \vartheta}{\omega} (D a_1 + E b_1) \overline{x} = 0, \tag{82}$$

albo w postaci:

$$\overline{y}^2 + 2 \zeta_1 \frac{\sin^2 \vartheta}{\omega} \sqrt{-\frac{\Delta}{\omega}} \overline{x} = 0, \tag{83}$$

gdzie ζ_1 jest znakiem wielkości $D a_1 + E b_1$.

W paragrafie bieżącym wyprowadziliśmy dla rozmaitych krzywych stopnia drugiego równania (65), (67), (70), (76) i (83), których spółczynniki znajdują się w bliskiej łączności z niezmien-

nikami przy zmianach spółrzędnych prostolinjowych. Już w § 7 podaliśmy związki (61), (62) i (63), które łączą stałą równania (70) pary prostych o wspólnym dwukierunku oraz stałą równania (65) linji krzywej rodzaju kół z odpowiedniemi niezmiennikami N. Przy założeniu $\delta \neq 0$, względnie $\delta \neq 0$, $\Omega \neq 0$, wzory (59) § 7 i (55) § 15 łączą pewne własności dwukierunków asymptotycznych z odpowiedniemi niezmiennikami N. Dalej weźmiemy pod uwagę równania (67) i (76) w założeniu, że $\delta \neq 0$ i $\Omega \neq 0$. Rzeczone własności dwukierunków asymptotycznych dotyczą, w odniesieniu do tych równań, stosunku spółczynników przy $\overline{x}^2$ i przy $\overline{y}^2$. Biorąc zamiast stosunku funkcję stopnia drugiego $(S_1 + S_2)^2 : S_1 S_2$, mamy:

$$\frac{(S_1 + S_2)^2}{S_1 S_2} = \frac{\omega^2}{\delta \sin^2 \vartheta} = N_2^{(2)}. \tag{84}$$

Ze spółczynników równania (67) można utworzyć niezmiennik zależny od Δ i takim niezmiennikiem jest:

$$\frac{\Delta^2}{S_1 S_2 \delta^2} = \frac{\Delta^2 \sin^2 \vartheta}{\delta^3} = N_6^{(2)}, \tag{85}$$

a jeżeli spełniona jest jeszcze nierówność $\omega \neq 0$, zachodzi także niezmiennik:

$$\frac{\Delta}{(S_1 + S_2)\,\delta} = \frac{\Delta \sin^2 \vartheta}{\omega\, \delta} = N_3^{(3)}. \tag{86}$$

Łatwo przytem sprawdzić, że spełniona jest równość:

$$N_6^{(2)} = N_2^{(2)} (N_3^{(3)})^2. \tag{87}$$

Zwracając się teraz do równania (76), dostrzegamy łatwo, że na podstawie oznaczeń (44) § 7 i drugiej z równości (53) mamy równość:

$$\frac{\Delta}{\sin^2 \vartheta\, S_2^3} = \frac{8\,(\Delta)}{[(\omega) + \tau\,(\Omega)]^3}$$

i dochodzimy do równości:

$$\frac{\Delta}{\sin^2 \vartheta\, S_2^3} = \frac{8\, N_3}{(N_1 + \tau)^3}. \tag{88}$$

Wreszcie, jeżeli w przypadku równania (83), otrzymanego przy założeniu $\delta = 0$, utworzymy kwadrat połowy spółczynnika przy x tego równania i zmienimy znak, to mieć będziemy wyrażenie:

$$\frac{\Delta \sin^4 \vartheta}{\omega^3} = N_3^{(1)}. \tag{89}$$

§ 26. Klasyfikacja istotnych krzywych stopnia drugiego.

Widzieliśmy w paragrafie poprzedzającym, że każdą krzywą stopnia drugiego, dla której spełniony jest warunek $\delta \neq 0$, można przedstawić w wybranym odpowiednio prostokątnym układzie spółrzędnych, które tutaj oznaczymy literami x, y, równaniem:

$$S_1 x^2 + S_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \tag{90}$$

w którem żadna z wielkości S_1 i S_2 nie równa się zeru. Założymy tutaj, że uważana linja krzywa jest istotną krzywą stopnia drugiego, nie należącą do rodzaju kół, t.j. że wielkości Δ i Ω są obie różne od zera. Wtedy wielkości S_1 i S_2 są różne jedna od drugiej i określają się wzorami (53).

Niech będzie naprzód $\delta > 0$ i zauważmy, że wtedy wielkości S_1 i S_2 są obie tego samego znaku. Stąd wynika, że albo wielkości a, b, określone wzorami:

$$a = \sqrt{-\frac{\Delta}{S_1 \delta}}, \quad b = \sqrt{-\frac{\Delta}{S_2 \delta}}, \tag{91}$$

są obie liczbami rzeczywistemi dodatniemi, albo też wielkości a, b, określone wzorami:

$$a = \sqrt{\frac{\Delta}{S_1 \delta}}, \quad b = \sqrt{\frac{\Delta}{S_2 \delta}}, \tag{92}$$

są obie liczbami rzeczywistemi dodatniemi. Pierwszy przypadek zachodzi wtedy, gdy znak wielkości Δ jest różny od wspólnego znaku wielkości S_1 i S_2, drugi zaś zachodzi wtedy, gdy znak wielkości Δ jest ten sam, co wspólny znak wielkości S_1 i S_2.

Inaczej możemy powiedzieć, że pierwszy przypadek zachodzi wtedy, gdy spełniona jest nierówność:

$$\omega \Delta < 0, \tag{93}$$

drugi zaś zachodzi wtedy, gdy spełniona jest nierówność:

$$\omega \Delta > 0. \tag{94}$$

W pierwszym z nich można równanie (90) napisać w postaci:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{95}$$

w drugim zaś w postaci:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0. \tag{96}$$

Zaznaczamy przytem, że ze wzorów (53) i rozważań podanych w § 24, a odnoszących się do tych wzorów, wynikają pewne uwagi które tutaj zamieścimy.

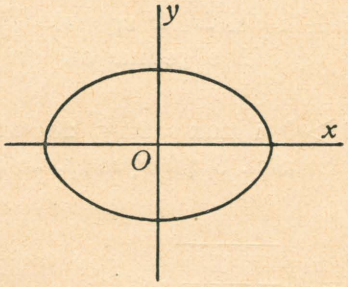

Fig. 42.

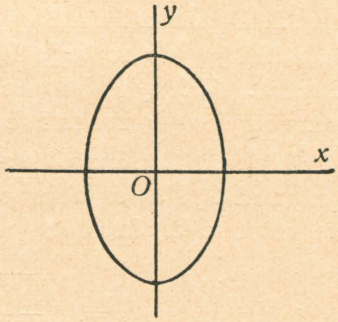

Fig. 43.

Jeżeli spełniona jest nierówność (93), to możemy wartość wielkości $\tau = \pm 1$ określić w ten sposób, żeby spełnione były nierówności $\tau\omega > 0$, $\tau\Delta < 0$ i wtedy, przyjmując na S_1 i S_2 wartości, wynikające ze wzorów (53) przy tej wartości wielkości τ, otrzymamy ze wzorów (91) wielkości a i b, spełniające nierówność $a > b$. Wtedy linja krzywa, określona równaniem (95), mieć będzie względem układu x, y pozycję, podaną na fig. 42.

Jeżeli spełniona jest nierówność (93), to możemy znak τ określić także w ten sposób, żeby spełnione były nierówności

$\tau\omega < 0$, $\tau\Delta > 0$ i jeżeli przyjmiemy wtedy na S_1 i S_2 wartości, które wynikają ze wzorów (53) przy tym znaku τ, to otrzymamy ze wzorów (91) wielkości a i b, spełniające nierówność $a < b$. Wówczas równanie (95) określać będzie linję krzywą, której pozycja względem układu x, y przedstawiona jest na fig. 43.

Z rozważań § 1 wynika, że w obu przypadkach, o których była mowa, linja krzywa, określona równaniem (95), jest elipsą, przyczem w pierwszym z tych przypadków wielka oś elipsy leży na osi x, a mała oś elipsy na osi y, a w drugim z tych przypadków wielka oś elipsy leży na osi y, zaś mała oś elipsy na osi x.

Przechodząc teraz do przypadków, w których spełniona jest nierówność (94), zauważmy, że możemy wtedy znak τ określić albo tak, że zachodzą nierówności $\tau\omega > 0$, $\tau\Delta > 0$, albo też tak, że zachodzą nierówności $\tau\omega < 0$, $\tau\Delta < 0$. Wartości na a i b, wynikające ze wzorów (92), będą w pierwszym z tych przypadków spełniały nierówność $a > b$, w drugim zaś z tych przypadków nierówność $a < b$. Tym przypadkom odpowiada równanie (96). Równanie to nie spełnia się w żadnym rzeczywistym punkcie płaszczyzny. Mówić będziemy, że równanie to określa elipsę urojoną, a odcinki o długościach a, b, leżące odpowiednio na osiach x, y i mające jeden wspólny kraniec w środku krzywej, nazywać będziemy połowami osi elipsy urojonej. W przeciwstawieniu do elipsy urojonej nazywać będziemy elipsę, określoną równaniem (95), także elipsą rzeczywistą.

Niech będzie teraz $\delta < 0$ i zauważmy, że wtedy wielkości S_1 i S_2 są różnych znaków. Z tej uwagi wynika, że albo wielkości a, b, określone wzorami:

$$(97) \qquad a = \sqrt{-\frac{\Delta}{S_1\delta}}, \quad b = \sqrt{\frac{\Delta}{S_2\delta}},$$

są obie rzeczywiste dodatnie, albo też wielkości a, b, określone wzorami:

$$(98) \qquad a = \sqrt{\frac{\Delta}{S_1\delta}}, \quad b = \sqrt{-\frac{\Delta}{S_2\delta}},$$

są obie rzeczywiste dodatnie. Wielkość $\tau = \pm 1$, figurująca we wzorach (53), spełnia nierówności $\tau S_1 < 0$, $\tau S_2 > 0$. Łatwo więc dostrzec, że gdy $\tau\Delta < 0$, wówczas wzory (97) dają na a, b war-

tości rzeczywiste dodatnie, gdy zaś $\tau\Delta > 0$, wówczas wzory (98) dają na a, b wartości rzeczywiste dodatnie. W pierwszym z tych przypadków równanie (90) można napisać w postaci:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{99}$$

i odnośna linja krzywa przedstawiona jest na fig. 44. W drugim

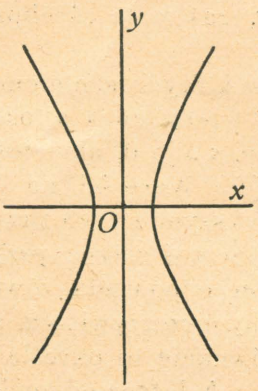

Fig. 44.

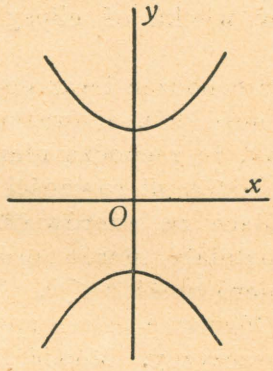

Fig. 45.

z rzeczonych przypadków równanie (90) można napisać w postaci:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \tag{100}$$

i odnośna linja krzywa przedstawiona jest na fig. 45.

Z równań i rachunków podanych w § 1 wynika, że każde z równań (99) i (100) przedstawia hiperbolę, przyczem hiperbola (99) ma oś rzeczywistą na osi x, urojoną zaś na osi y, a hiperbola (100) ma oś rzeczywistą na osi y, urojoną zaś na osi x.

Jeżeli zachodzi równość $\delta = 0$, to nie można równania krzywej stopnia drugiego doprowadzić przez odpowiedni wybór układu spółrzędnych prostolinjowych do postaci (90). Ale w przypadkach, określonych warunkami $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$, można odnośną linję krzywą przedstawić analitycznie zapomocą równania (83), odniesionego do wybranych odpowiednio spółrzędnych prostokątnych, które tutaj oznaczymy przez x, y i rzeczone równanie napiszemy w postaci:

$$y^2 + 2\zeta_1 \frac{\sin^2 \vartheta}{\omega} \sqrt{-\frac{\Delta}{\omega}}\, x = 0, \tag{101}$$

gdzie $\zeta_1 = \pm 1$. Jeżeli przy spełnieniu nierówności $\tau\omega > 0$ zastosujemy oznaczenie:

$$p = \frac{\tau \sin^2 \vartheta}{\omega} \sqrt{-\frac{\Delta}{\omega}}, \tag{102}$$

to p będzie wielkością dodatnią, i wtedy będziemy mogli równanie (101) napisać w postaci:

$$y^2 = 2\zeta p x, \tag{103}$$

gdzie $\zeta = -\tau\zeta_1$. Z rozważań i rachunków § 3 wynika, że równanie to przedstawia parabolę. Na fig. 46 przypadkowi $\zeta = +1$ odpowiada krzywa ciągła, przypadkowi zaś $\zeta = -1$ krzywa przerywana.

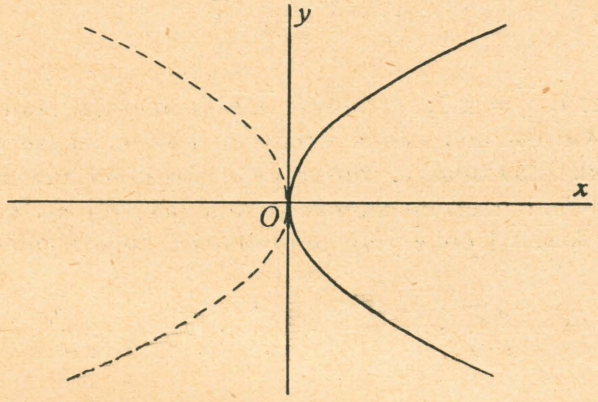

Fig. 46.

Redukcje, wykonane w tym paragrafie, dotyczą wszystkich możliwych istotnych krzywych stopnia drugiego, nie będących kołami, t.j. wszystkich możliwych linij krzywych, określonych przez równanie stopnia drugiego przy spełnieniu nierówności $\Delta \neq 0$, $\Omega \neq 0$. Z tych rozważań wynika twierdzenie następujące.

Linja krzywa stopnia drugiego jest elipsą rzeczywistą przy spełnieniu warunków:

(104) $$\delta > 0, \quad \Omega \neq 0, \quad \omega \Delta < 0;$$

elipsą urojoną przy spełnieniu warunków:

(105) $$\delta > 0, \quad \Omega \neq 0, \quad \omega \Delta > 0;$$

hiperbolą przy spełnieniu warunków:

(106) $$\delta < 0, \quad \Delta \neq 0;$$

parabolą przy spełnieniu warunków:

(107) $$\delta = 0, \quad \Delta \neq 0.$$

Warunki (104), (105) i (106) zastosujemy do pewnych szczególnych równań stopnia drugiego. Widzieliśmy w § 23, że każdą istotną linję krzywą stopnia drugiego ze środkiem można przedstawić zapomocą równania postaci:

(108) $$\frac{\bar{x}^2}{\bar{a}^2} + \frac{\bar{y}^2}{\bar{\varepsilon}\,\bar{b}^2} = \bar{\eta},$$

gdzie $\bar{\varepsilon} = \pm 1$, $\bar{\eta} = \pm 1$, a litery $\bar{a}, \bar{b}$ oznaczają stałe dodatnie. Linja krzywa jest odniesiona wtedy do dwóch jej średnic ze sobą sprzężonych. Zakładamy, że krzywa określona równaniem (108) nie jest kołem, i jeżeli do tego równania zastosujemy odpowiednio oznaczenia $\bar{\delta}, \bar{\omega}, \bar{\Delta}$ i obliczymy te wielkości, to otrzymamy:

(109) $$\bar{\delta} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}\,\bar{a}^2\,\bar{b}^2}, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{\bar{a}^2} + \frac{1}{\bar{\varepsilon}\,\bar{b}^2}, \quad \bar{\Delta} = -\frac{\bar{\eta}}{\bar{\varepsilon}\,\bar{a}^2\,\bar{b}^2}.$$

Z wyrażeń tych wynika, że równanie (108) przedstawia elipsę rzeczywistą, gdy $\bar{\varepsilon} = +1$, $\bar{\eta} = +1$, elipsę urojoną, gdy $\bar{\varepsilon} = +1$, $\bar{\eta} = -1$, hiperbolę zaś, gdy $\bar{\varepsilon} = -1$.

W tymże § 23 widzieliśmy, że każdą istotną krzywą rodzaju parabol przedstawić można zapomocą równania:

(110) $$\bar{y}^2 = 2\,\bar{p}\,\bar{x},$$

w którem $\bar{p}$ oznacza stałą dodatnią. Równanie to odniesione jest do osi spółrzędnych $\bar{x}, \bar{y}$, będących odpowiednio średnicą krzywej i styczną do krzywej w punkcie jej spotkania z tą średnicą.

Krzywa przedstawiona równaniem (110) jest parabolą, bo udowodniliśmy, że każda istotna krzywa rodzaju parabol jest parabolą.

W § 36 tomu I wyznaczyliśmy warunki, aby krzywa stopnia drugiego była kołem rzeczywistem, a także warunki, aby krzywa stopnia drugiego była kołem urojonem ze sobą sprzężonem. Warunki te możemy wypowiedzieć w postaci analogicznej do warunków (104) i (105). Mamy mianowicie twierdzenie:

Linja krzywa stopnia drugiego jest kołem rzeczywistem przy spełnieniu warunków:

$$\delta > 0, \quad \Omega = 0, \quad \omega \Delta < 0, \tag{111}$$

jest zaś kołem urojonem ze sobą sprzężonem przy spełnieniu warunków:

$$\delta > 0, \quad \Omega = 0, \quad \omega \Delta > 0. \tag{112}$$

Zwrócimy uwagę tutaj na możliwość pewnych modyfikacyj w formie warunków (104), (105), (111) i (112). Niech będą cztery wielkości:

$$A, \; C, \; \omega, \; \varphi(\xi, \eta) \tag{113}$$

i przypuśćmy, że przez ξ i η w czwartej z nich rozumieć będziemy liczby rzeczywiste, nie będące obie jednocześnie zerami. Jeżeli $\delta > 0$, to wszystkie cztery wielkości (113) są tego samego znaku. Stąd wynika, że w każdym z układów warunków (104), (105), (111) i (112) można bez żadnej zmiany znaczenia tych warunków zastąpić wielkość ω przez którąkolwiek z trzech innych wielkości (113).

Zajmiemy się tu jeszcze równaniem:

$$S_1 \bar{x}^2 + S_2 \bar{y}^2 + 2 \eta \zeta \operatorname{cosec} \vartheta \sqrt{-\frac{\Delta}{S_2}} \, \bar{x} = 0, \tag{76}$$

wyprowadzonem w § 25 przy założeniu $\delta \neq 0$, i postaramy się określić przypadki, w których spółrzędne $\bar{x}, \bar{y}$, figurujące w tem równaniu, mają początek w punkcie rzeczywistym oraz przypadki, w których spółrzędne te mają początek w punkcie urojonym. Przyjmiemy przytem założenie, że uważana linja krzywa jest istotną krzywą stopnia drugiego, nie należącą do rodzaju kół, t.j.

że zachodzą nierówności $\Delta \neq 0$, $\Omega \neq 0$. Z rozważań §§ 23 i 25 wynikają wnioski. Przypadki pierwszej kategorji zachodzą wtedy, gdy iloraz $\frac{\Delta}{S_2}$ ma wartość ujemną, przypadki zaś drugiej kategorji wtedy, gdy iloraz ten ma wartość dodatnią. Gdy $\delta > 0$ i $\omega \Delta \leqq 0$, t.j. w przypadkach elipsy rzeczywistej, układ spółrzędnych x, y, figurujących w równaniu (76), ma zawsze początek rzeczywisty. Jeżeli przytem znak τ spełnia nierówność $\tau \omega > 0$, to początek ten jest bądź jednym, bądź drugim z wierzchołków elipsy, położonych na wielkiej osi elipsy. Jeżeli zaś znak τ spełnia nierówność $\tau \omega < 0$, to początek ten jest bądź jednym, bądź drugim z wierzchołków elipsy, położonych na małej osi elipsy. Gdy $\delta > 0$ i $\omega \Delta > 0$, t.j. w przypadkach elipsy urojonej, początek układu spółrzędnych x, y, figurujących w równaniu (76), jest zawsze punktem urojonym. Gdy wreszcie $\delta \leqq 0$, t.j. gdy linja krzywa jest hiperbolą, układ spółrzędnych x, y, figurujących w równaniu (76), może mieć albo początek rzeczywisty, albo początek urojony. Jeżeli mianowicie $\tau \Delta < 0$, to początek ten jest rzeczywisty i jest bądź jednym, bądź drugim z wierzchołków hiperboli. Jeżeli zaś $\tau \Delta > 0$, to rzeczony początek spółrzędnych jest zawsze urojony.

Zwracamy wreszcie uwagę na to, że w § 4 zajmowaliśmy się rozmaitemi własnościami równań postaci (76) w przypadkach, gdy równania te są rzeczywiste i odniesione są do spółrzędnych prostolinjowych prostokątnych rzeczywistych.

§ 27. Twierdzenia Apollonjusza.

Każda krzywa stopnia drugiego ze środkiem, odniesiona do jej osi, określa się równaniem, które można napisać w jednej z postaci:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} = \eta, \tag{114}$$

gdzie a i b oznaczają liczby dodatnie, będące długościami połów osi tej linji krzywej, a $\varepsilon = \pm 1$, $\eta = \pm 1$. Krzywą (114) można także przedstawić równaniem, odniesionem do dowolnie wybranych jej średnic ze sobą sprzężonych. Równanie to ma jedną z postaci (108) i mianowicie na podstawie uwag podanych w § 26 łatwo dostrzec, że wielkości ε, η są odpowiednio równe wielko-

ściom ε, η, zachodzącym w równaniu (114). To znaczy, że krzywa (114), odniesiona do jej średnic ze sobą sprzężonych, określa się równaniem:

$$\frac{\bar{x}^2}{\bar{a}^2} + \frac{\bar{y}^2}{\varepsilon \bar{b}^2} = \eta, \tag{115}$$

gdzie przez $\bar{a}$ i $\bar{b}$ oznaczone są liczby dodatnie, będące długościami połów średnic tej krzywej, położonych na osiach $\bar{x}, \bar{y}$.

Do równań (114) i (115) zastosujemy związki (24), wyprowadzone w § 7, zwracając przytem uwagę na to, że w uważanym obecnie przypadku kąt ϑ osi y z osią x jest kątem prostym. Wtedy otrzymamy związki:

$$\frac{1}{\varepsilon \bar{a}^2 \bar{b}^2 \sin^2 \bar{\vartheta}} = \frac{1}{\varepsilon a^2 b^2},$$

$$\frac{1}{\sin^2 \bar{\vartheta}} \left(\frac{1}{\bar{a}^2} + \frac{1}{\varepsilon \bar{b}^2} \right) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\varepsilon b^2},$$

które są równoważne ze związkami:

$$\begin{cases} \bar{a} \bar{b} \, | \sin \bar{\vartheta} | = a b, \\ \bar{a}^2 + \varepsilon \bar{b}^2 = a^2 + \varepsilon b^2. \end{cases} \tag{116}$$

Związki te wyrażają twierdzenia Apollonjusza, które można także wypowiedzieć jak następuje:

1) Iloczyn połów długości dwóch średnic sprzężonych istotnej krzywej stopnia drugiego ze środkiem oraz bezwzględnej wartości wstawy kąta, zawartego pomiędzy temi średnicami, nie zależy od wyboru średnic sprzężonych i równa się przeto iloczynowi połów osi tej linji krzywej; albo też: bezwzględne pole równoległoboku, którego dwoma bokami są połowy średnic sprzężonych istotnej krzywej stopnia drugiego ze środkiem jest niezależne od wyboru średnic sprzężonych, i równa się przeto bezwzględnemu polu prostokąta, którego dwoma bokami są połowy osi tej linji krzywej.

2) Suma kwadratów długości połów średnic sprzężonych elipsy (rzeczywistej lub urojonej) nie zależy od wyboru średnic sprzężonych i równa się przeto sumie kwadratów połów osi tej linji krzywej. Różnica kwadratów długości połów średnic sprzę-

żonych hiperboli nie zależy od wyboru średnic sprzężonych i równa się przeto różnicy kwadratów połów osi tej linji krzywej.

Twierdzenia Apollonjusza wyprowadzimy jeszcze na innej drodze. W tym celu weźmiemy pod uwagę dwa punkty. Jeden o spółrzędnych:

$$\bar{x} = \bar{a}, \quad \bar{y} = 0, \tag{117}$$

drugi zaś o spółrzędnych:

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = \bar{b}. \tag{118}$$

Zauważymy, że pierwszy z nich leży na linji krzywej:

$$\frac{\bar{x}^2}{\bar{a}^2} + \frac{\bar{y}^2}{\varepsilon \bar{b}^2} = 1 \tag{119}$$

oraz, że drugi z nich leży na linji krzywej:

$$\frac{\bar{x}^2}{\bar{a}^2} + \frac{\bar{y}^2}{\varepsilon \bar{b}^2} = \varepsilon. \tag{120}$$

Oś y tworzy z osią x kąt $\tau\frac{\pi}{2}$, gdzie $\tau = \pm 1$. Jeżeli kąt, który oś $\bar{x}$ tworzy z osią x oznaczymy przez m, to spółrzędne x, y punktu (117) wyrażą się wzorami:

$$x = \bar{a} \cos m, \quad y = \tau \bar{a} \sin m. \tag{121}$$

Jeżeli zaś kąt, który oś $\bar{y}$ tworzy z osią x oznaczymy przez n, to spółrzędne x, y punktu (118) wyrażą się wzorami:

$$x = \bar{b} \cos n, \quad y = \tau \bar{b} \sin n. \tag{122}$$

Ponieważ punkt (117) leży na krzywej (119), przeto spółrzędne (121) muszą spełniać równanie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} = 1.$$

Ponieważ zaś punkt (118) leży na krzywej (120), przeto spółrzędne (122) muszą spełniać równanie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} = \varepsilon.$$

Dochodzimy w ten sposób do związku:

$$\frac{\bar{a}^2 \cos^2 m}{a^2} + \frac{\bar{a}^2 \sin^2 m}{\varepsilon b^2} = 1 \tag{123}$$

oraz do związku:

$$\frac{\bar{b}^2 \cos^2 n}{a^2} + \frac{\bar{b}^2 \sin^2 n}{\varepsilon b^2} = \varepsilon . \tag{124}$$

Ale zwróćmy uwagę na to, że dwukierunki osi $\bar{x}, \bar{y}$ są ze sobą sprzężone, t.j. że zachodzi równość:

$$\frac{\cos m \cos n}{a^2} + \frac{\sin m \sin n}{\varepsilon b^2} = 0 ,$$

którą można zastąpić równościami:

$$\frac{\cos n}{a} = -\rho \frac{\sin m}{\varepsilon b}, \quad \frac{\sin n}{b} = \rho \frac{\cos m}{a},$$

gdzie ρ jest czynnikiem różnym od zera. Z równości tych wynikają równości:

$$\frac{\bar{b} \cos n}{a} = -\sigma \frac{\bar{a} \sin m}{\varepsilon b}, \quad \frac{\bar{b} \sin n}{b} = \sigma \frac{\bar{a} \cos m}{a}, \tag{125}$$

w których σ oznacza także czynnik różny od zera. Jeżeli w związku (124) lewe strony równości (125) zastąpimy prawemi stronami tych równości, to dojdziemy do związku:

$$\sigma^2 \left[\frac{\bar{a}^2 \cos^2 m}{a^2} + \frac{\bar{a}^2 \sin^2 m}{\varepsilon b^2} \right] = 1 ,$$

z którego na podstawie związku (123) wynika, że $\sigma = \pm 1$. Korzystając teraz z równości (125), można związek (123) napisać w postaci:

$$\frac{\sigma \bar{b} \sin n}{b} \frac{\bar{a} \cos m}{a} - \frac{\sigma \bar{b} \cos n}{a} \frac{\bar{a} \sin m}{b} = 1 ,$$

a z niego wynika związek:

$$\bar{a}\,\bar{b} \,|\sin (n - m)| = a\, b ,$$

który jest pierwszą z równości (116), wyrażających twierdzenia

Apollonjusza. Na podstawie tychże związków (125) można z równości (123) i (124) wyprowadzić równości:

$$\bar{a}^2 \cos^2 m + \varepsilon \bar{b}^2 \cos^2 n = a^2,$$

$$\bar{a}^2 \sin^2 m + \varepsilon \bar{b}^2 \sin^2 n = \varepsilon b^2,$$

a dodając je stronami, dochodzimy do związku:

$$\bar{a}^2 + \varepsilon \bar{b}^2 = a^2 + \varepsilon b^2,$$

który jest drugą z równości (116), wyrażających twierdzenia Apollonjusza.

Zajmiemy się tu jeszcze wyprowadzeniem pewnego związku, odnoszącego się do p a r a b o l i, który można uważać za własność analogiczną do twierdzeń Apollonjusza. Parabola, odniesiona do układu spółrzędnych x, y, którego oś x jest osią paraboli, a oś y styczną do paraboli w punkcie spotkania krzywej z osią, określa się równaniem:

$$y^2 = 2 p x \tag{126}$$

i możemy założyć, że kierunek osi x jest wybrany w taki sposób, że spółczynnik p jest wielkością dodatnią. Jeżelibyśmy wykonali zmianę układu spółrzędnych x, y na układ spółrzędnych $\bar{x}, \bar{y}$, którego oś $\bar{x}$ byłaby dowolną średnicą paraboli, a oś $\bar{y}$ styczną do paraboli w punkcie jej spotkania z średnicą, to parabola byłaby przedstawiona równaniem postaci:

$$\bar{y}^2 = 2 \bar{p} \bar{x} \tag{127}$$

i moglibyśmy założyć, że kierunek osi $\bar{x}$ jest ten sam co osi x, a wtedy $\bar{p}$ byłoby wielkością dodatnią. Według drugiej z równości (50) § 7 przy założeniu $\omega \neq 0$ wielkość:

$$N_3^{(1)} = \frac{\Delta \sin^4 \vartheta}{\omega^3}$$

jest niezmiennikiem przy wszelkich zmianach spółrzędnych prostolinjowych. W przypadku paraboli nierówność $\omega \neq 0$ zawsze jest spełniona i możemy niezmiennik ten obliczyć dla równania (126) i dla równania (127). W ten sposób dojdziemy do równości:

$$\bar{p}^2 \sin^4 \bar{\vartheta} = p^2,$$

a zważywszy, że spółczynniki p i $\overline{p}$ są dodatnie, otrzymamy związek:

$$\overline{p} \sin^2 \overline{\vartheta} = p, \tag{128}$$

który właśnie chcieliśmy wyprowadzić. Związek ten możemy przedstawić jeszcze w innej formie. Oznaczmy przez a, b spółrzędne $\underline{x}, \underline{y}$ punktu paraboli, będącego początkiem układu spółrzędnych $\underline{x}, \underline{y}$. Spółrzędne a, b spełniają związek:

$$b^2 = 2 p a, \tag{129}$$

a z równania (33) § 3 wynika, że styczna do paraboli w punkcie a, b określa się w układzie x, y równaniem:

$$b y = p (x + a).$$

Z równania tego wnosimy, że zachodzi równość:

$$\operatorname{tg} \overline{\vartheta} = \frac{p}{b},$$

z której wynika równość:

$$\operatorname{cosec}^2 \overline{\vartheta} = \frac{b^2 + p^2}{p^2}.$$

Tę ostatnią można na podstawie związku (129) zastąpić równością:

$$\operatorname{cosec}^2 \overline{\vartheta} = \frac{p + 2a}{p},$$

a więc związek (128) można zastąpić związkiem:

$$\overline{p} = p + 2a. \tag{130}$$

§ 28. Znaczenie geometryczne niezmienników krzywej stopnia drugiego przy zmianach kierunków osi spółrzędnych prostolinjowych.

Z rozważań § 25 wynika, że jeżeli w równaniu stopnia drugiego:

$$f(x, y) = 0 \tag{63}$$

spółrzędne x, y zastąpimy przez prostokątne spółrzędne $\underline{x}, \underline{y}$, określone związkami:

$$x = a_1 \underline{x} + a_2 \underline{y}, \quad y = b_1 \underline{x} + b_2 \underline{y}, \tag{131}$$

w których wielkości a_1, b_1 i a_2, b_2 są spółczynnikami kierunkowemi kierunków głównych, to równanie (63) otrzyma postać:

$$S_1 \underline{x}^2 + S_2 \underline{y}^2 + 2\underline{D}\,\underline{x} + 2\underline{E}\,\underline{y} + F = 0, \tag{132}$$

gdzie S_1 i S_2 są pierwiastkami równania (51), a spółczynniki $\underline{D}$ i $\underline{E}$ określają się wzorami:

$$\underline{D} = D a_1 + E b_1, \quad \underline{E} = D a_2 + E b_2. \tag{133}$$

Przypuśćmy naprzód, że $\Omega \neq 0$ i $\delta \neq 0$ i zauważmy, że wtedy na spółrzędne środka krzywej w układzie $\underline{x}, \underline{y}$, którego osie mają dwukierunki główne, a początek leży w początku dawnego układu x, y, mieć będziemy wyrażenia:

$$\mathfrak{a} = -\frac{\underline{D}}{S_1}, \quad \mathfrak{b} = -\frac{\underline{E}}{S_2}, \tag{134}$$

w których wielkości S_1 i S_2 są różne jedna od drugiej. Zauważymy, że zachodzi równość:

$$\frac{\Phi(-\underline{E}, \underline{D})}{\sin^2 \vartheta} = \underline{E}^2 + \underline{D}^2,$$

z której na mocy związków (134) otrzymamy równość:

$$\frac{\Phi(-\underline{E}, \underline{D})}{\sin^2 \vartheta} = S_1^2\, \mathfrak{a}^2 + S_2^2\, \mathfrak{b}^2. \tag{135}$$

Jeżeli zaś zwrócimy uwagę na to, że ma miejsce także związek:

$$\frac{\varphi(-\underline{E}, \underline{D})}{\sin^2 \vartheta} = S_1\, \underline{E}^2 + S_2\, \underline{D}^2,$$

to dojdziemy do wniosku, że z równości (134) wynika także związek:

$$\frac{\varphi(-\underline{E}, \underline{D})}{\sin^2 \vartheta} = S_1 S_2 (S_1\, \mathfrak{a}^2 + S_2\, \mathfrak{b}^2). \tag{136}$$

Związki (135) i (136) możemy przy użyciu oznaczeń, podanych w drugim wierszu wzorów (66) § 7, napisać w postaci:

$$(\Phi) = S_1^2\, \mathfrak{a}^2 + S_2^2\, \mathfrak{b}^2, \quad (\varphi) = S_1 S_2 (S_1\, \mathfrak{a}^2 + S_2\, \mathfrak{b}^2). \tag{137}$$

Rozwiązując te związki względem $\mathfrak{a}^2$ i $\mathfrak{b}^2$, otrzymujemy:

$$(138) \qquad \mathfrak{a}^2 = \frac{(\varphi) - S_1(\Phi)}{S_1^2(S_2 - S_1)}, \quad \mathfrak{b}^2 = \frac{S_2(\Phi) - (\varphi)}{S_2^2(S_2 - S_1)},$$

a stąd dochodzimy do następujących wzorów na sumę i iloczyn tych kwadratów:

$$\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 = \frac{(S_1 + S_2)(\varphi) - S_1 S_2(\Phi)}{S_1^2 S_2^2},$$

$$\mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2 = \frac{(S_1 + S_2)(\Phi)(\varphi) - S_1 S_2(\Phi)^2 - (\varphi)^2}{S_1^2 S_2^2 (S_2 - S_1)^2}.$$

Jeżeli zaś zwrócimy uwagę na to, że ze wzorów (53) § 24 wynikają równości:

$$S_1 + S_2 = (\omega), \quad S_1 S_2 = (\delta), \quad (S_2 - S_1)^2 = (\Omega)^2,$$

to będziemy mogli sumę i iloczyn wielkości $\mathfrak{a}^2$ i $\mathfrak{b}^2$ przedstawić zapomocą wzorów:

$$(139) \qquad \begin{cases} \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 = \dfrac{(\omega)(\varphi) - (\delta)(\Phi)}{(\delta)^2}, \\ \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2 = \dfrac{(\Phi)[(\omega)(\varphi) - (\delta)(\Phi)] - (\varphi)^2}{(\Omega)^2 (\delta)^2}. \end{cases}$$

W pierwszym z tych wzorów zarówno licznik jak mianownik są funkcjami czwartego stopnia względem spółczynników równania (63), a w drugim z tych wzorów zarówno licznik jak mianownik są funkcjami szóstego stopnia względem spółczynników tego równania. Wyrażenia (139) można przedstawić jako funkcje niezmienników, podanych w tabelkach (46) i (69) § 7. W ten sposób dochodzimy do wzorów:

$$(140) \qquad \begin{cases} \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 = \dfrac{1}{N_2^2}(N_1 M_3 - N_2 M_2), \\ \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2 = \dfrac{1}{N_2^2}[M_2(N_1 M_3 - N_2 M_2) - M_3^2]. \end{cases}$$

Wzory (139) lub (140) wykazują znaczenie geometryczne niezmienników tabelki (46) i (69) § 7 przy założeniach $\delta \neq 0$, $\Omega \neq 0$. Gdy

dane są spółczynniki równania (63), wówczas istnieje jedna określona para linij prostych, przechodzących przez początek spółrzędnych i mających dwukierunki główne. Jeżelibyśmy nazwali te proste pierwszą i drugą, to moglibyśmy powiedzieć, że oś x może leżeć na pierwszej, a oś y na drugiej, albo też, że oś x może leżeć na drugiej, a oś y na pierwszej. Jeżeli kwadraty spółrzędnych punktu są w jednym z tych układów równe x^2, y^2, to kwadraty spółrzędnych tego samego punktu w drugim z nich są odpowiednio równe y^2, x^2. Nadto każdą z osi x, y można wybrać na każdej z tych prostych bądź w jednym, bądź w drugim kierunku i przy tych dwóch wyborach kierunku osi odnośna spółrzędna tego samego punktu ma tę samą wartość bezwzględną i, o ile jest różną od zera, ma raz wartość dodatnią, a drugi raz wartość ujemną. Widzimy, że przy wszystkich rozważonych tutaj możliwościach wyrażenia $x^2 + y^2$ i $x^2 y^2$ mają wartości niezależne od wyboru którejkolwiek z tych możliwości. Jeżeli spółrzędne x, y względem jednego któregokolwiek z tych układów określają środek krzywej, to rzeczone wyrażenia równają się odpowiednio wielkościom $\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2$ i $\mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2$ i są na mocy wzorów (139) lub (140) bezwzględnemi niezmiennikami krzywej przy wszelkich zmianach kierunków osi spółrzędnych. Z powyższych uwag wynika, że spółrzędne środka względem rozważanych układów spółrzędnych równe są odpowiednio parom wielkości:

$$(141) \qquad \begin{cases} \mathfrak{a}, \mathfrak{b}; & -\mathfrak{a}, \mathfrak{b}; & \mathfrak{a}, -\mathfrak{b}; & -\mathfrak{a}, -\mathfrak{b}; \\ \mathfrak{b}, \mathfrak{a}; & \mathfrak{b}, -\mathfrak{a}; & -\mathfrak{b}, \mathfrak{a}; & -\mathfrak{b}, -\mathfrak{a}. \end{cases}$$

Zachowanie się tych wielkości przy zmianach kierunków osi można scharakteryzować w sposób następujący. Przypuśćmy, że jedna i ta sama linja krzywa stopnia drugiego, czyniąca zadość warunkom $\delta \neq 0$, $\Omega \neq 0$, określa się w dwóch układach spółrzędnych prostolinjowych x, y i $\bar{x}, \bar{y}$, mających wspólny początek spółrzędnych, równaniami:

$$(142) \qquad f(x, y) = 0, \quad f(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Oba te równania prowadzą do tej samej pary linij prostych, przechodzących przez początek spółrzędnych i mających dwukierunki główne. Jeżelibyśmy odnieśli równania (142) do dwóch par prostopadłych osi, leżących na tych linjach prostych, to spół-

rzędne środka krzywej względem tych dwóch par osi określone byłyby dwiema parami liczb, należącemi do par liczb, podanych w tabelce (141). Własność tę sformułujemy krótko zdaniem, że tabelka (141) pozostaje bez zmiany przy wszelkich zmianach kierunków osi spółrzędnych prostolinjowych. Zauważymy tutaj jeszcze, że przy tych zmianach pozostają oczywiście bez zmiany wielkości, nie zmieniające się przy wszelkich zmianach spółrzędnych prostolinjowych.

Załóżmy teraz, że $\Omega = 0$, t.j. że krzywa (63) należy do rodzaju kół. Wtedy w równaniu (132) będzie:

$$S_2 = S_1 = \frac{\omega}{2 \sin^2 \vartheta} = \frac{1}{2}(\omega)$$

i spółrzędne $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ środka krzywej określone będą wzorami:

$$(143) \qquad \mathfrak{a} = -\frac{2\underline{D}}{(\omega)}, \quad \mathfrak{b} = -\frac{2\underline{E}}{(\omega)},$$

z których wynikają równości:

$$(144) \qquad \frac{4(\Phi)}{(\omega)^2} = \frac{8(\varphi)}{(\omega)^3} = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2.$$

Widzimy więc, że kwadrat odległości od początku spółrzędnych środka koła, względnie rzeczywistego punktu pary prostych izotropowych, jest niezmiennikiem krzywej rodzaju kół przy wszelkich zmianach kierunków osi spółrzędnych. Prócz tego kwadratu odległości i kwadratu promienia koła ze sobą samem sprzężonego, będącego niezmiennikiem przy wszelkich zmianach spółrzędnych prostolinjowych (zob. § 44 tomu I-go), niema innych niezależnych od nich niezmienników krzywych rodzaju kół względem wszelkich zmian kierunków osi spółrzędnych.

Przyjmiemy następnie, że $\delta = 0$ i $\Delta \neq 0$, t.j. że równanie (63) określa parabolę. Wtedy jeden ze stosunków $b_1 : a_1$ i $b_2 : a_2$ określa dwukierunek asymptotyczny i przyjmiemy, że własność tę ma stosunek $b_1 : a_1$, czyli że S_1 jest równe zeru, a S_2 jest różne od zera. Zatem równanie (132) ma wtedy postać:

$$(145) \qquad S_2 \underline{y}^2 + 2\underline{D}\,\underline{x} + 2\underline{E}\,\underline{y} + F = 0,$$

gdzie $\underline{D}$ i $\underline{E}$ określone są wzorami (133) i przytem $\underline{D}$ jest różne od zera. Zajmiemy się wyznaczeniem spółrzędnych wierzchołka paraboli (145) w układzie x, y, którego osie mają dwukierunki główne, a początek leży w początku danego układu x, y. Oznaczając je przez m, n, widzimy, że muszą one czynić zadość warunkom, przy których spełnieniu równanie (145) przechodzi przez przekształcenie:

$$\underline{x} = m + \xi, \quad \underline{y} = n + \eta \tag{146}$$

w równanie:

$$S_2 \eta^2 + 2 \underline{D} \xi = 0. \tag{147}$$

Warunki te są następujące:

$$S_2 n + \underline{E} = 0, \quad S_2 n^2 + 2 \underline{D} m + 2 \underline{E} n + F = 0 \tag{148}$$

i z nich wynikają na spółrzędne m i n wartości:

$$m = -\frac{1}{2 S_2 \underline{D}} (S_2 F - \underline{E}^2), \quad n = -\frac{\underline{E}}{S_2}. \tag{149}$$

Postaramy się wyznaczyć związki pomiędzy spółrzędnemi m, n i niezmiennikami względem zmian kierunków osi spółrzędnych. Rozwiązując w tym celu związki (148) względem $\underline{D}$ i $\underline{E}$, otrzymujemy:

$$\underline{D} = \frac{1}{2 m} (S_2 n^2 - F), \quad \underline{E} = - S_2 n, \tag{150}$$

a zważywszy, że w przypadku teraz uważanym zachodzą równości:

$$(\Phi) = \frac{\Phi (- E, D)}{\sin^2 \vartheta} = \underline{E}^2 + \underline{D}^2,$$

$$(\varphi) = \frac{\varphi (- E, D)}{\sin^2 \vartheta} = S_2 \underline{D}^2,$$

dochodzimy na podstawie wzorów (150), przy uwzględnieniu równości:

$$S_2 = (\omega),$$

do związków:

$$(151)\qquad \begin{cases} (\Phi) = (\omega)^2\, n^2 + \dfrac{[(\omega)\, n^2 - F]^2}{4\, m^2}, \\ (\varphi) = \dfrac{(\omega)\, [(\omega)\, n^2 - F]^2}{4\, m^2}. \end{cases}$$

Jeżeli związki te rozwiążemy względem m^2 i n^2, to otrzymamy:

$$(152)\quad m^2 = \frac{[(\omega)\,(\Phi) - (\varphi) - (\omega)^2\, F]^2}{4\,(\omega)^3\,(\varphi)}, \quad n^2 = \frac{(\omega)\,(\Phi) - (\varphi)}{(\omega)^3}.$$

Wyrażenia po stronach prawych tych równości są niezmiennikami paraboli przy wszelkich zmianach kierunków osi spółrzędnych. Stosując oznaczenia, podane w tabelkach (46) i (69) § 7, możemy dla kwadratów spółrzędnych m i n napisać wzory:

$$(153)\quad m^2 = \frac{(N_1\, M_2 - M_3 - N_1^2\, M_1)^2}{4\, N_1^3\, M_3}, \quad n^2 = \frac{N_1\, M_2 - M_3}{N_1^3}.$$

Osie $\underline{x}, \underline{y}$ przechodzą obie przez początek spółrzędnych i przytem pierwsza z nich ma dwukierunek osi paraboli, druga zaś dwukierunek stycznych do paraboli w jej wierzchołku. Kwadraty spółrzędnych wierzchołka paraboli względem układu spółrzędnych $\underline{x}, \underline{y}$ wyrażają się wymiernie przez spółczynniki równania (63). Kwadraty te są bezwzględnemi niezmiennikami paraboli przy wszelkich zmianach kierunków osi spółrzędnych. Każda ze spółrzędnych m, n, różna od zera, ma znak zależny od wyboru dodatniego kierunku odnośnej osi spółrzędnych. Powiemy, że spółrzędne m, n są względnemi niezmiennikami paraboli przy zmianach kierunków osi spółrzędnych. Prócz parametru paraboli, który jest niezmiennikiem przy wszelkich zmianach spółrzędnych prostolinjowych, i rozważonych powyżej niezmienników przy zmianach kierunków osi spółrzędnych, parabola nie ma innych niezależnych od nich niezmienników przy tych zmianach.

Gdy wreszcie $\delta = 0$ i $\Delta = 0$, wówczas przyjmując, jak w przypadku $\delta = 0$ i $\Delta \neq 0$, że $b_1 : a_1$ jest spółczynnikiem dwukierunku asymptotycznego, mieć będziemy w układzie spółrzędnych $\underline{x}, \underline{y}$ równanie drugiego stopnia w postaci:

$$(154)\qquad S_2\, \underline{y}^2 + 2\, \underline{E}\, \underline{y} + F = 0,$$

gdzie S_2 jest równe (ω) i jest różne od zera. Oznaczmy przez e prostopadłą odległość prostej środków równania (63) od prostej mającej ten sam dwukierunek i przechodzącej przez początek spółrzędnych danego układu x, y. Przyjmując, że ta odległość rachuje się w dodatnim kierunku osi y, mieć będziemy wzór:

$$e = -\frac{E}{(\omega)}. \tag{155}$$

Z innej strony w przypadku uważanym zachodzą równości:

$$(\Phi) = \frac{\Phi(-E, D)}{\sin^2 \vartheta} = E^2, \quad (\varphi) = \frac{\varphi(-E, D)}{\sin^2 \vartheta} = 0$$

i tylko pierwsza z nich prowadzi do niezmiennika. Mamy mianowicie niezmiennik bezwzględny:

$$e^2 = \frac{(\Phi)}{(\omega)^2}, \tag{156}$$

a wielkość e jest niezmiennikiem względnym, którego znak zmienia się przy zmianie kierunku osi y. Pozatem niezmienną jest przy obecnych założeniach tylko prostopadła odległość prostych o wspólnym dwukierunku, przedstawionych równaniem (63), względnie kwadrat tej odległości i zauważamy, że niezmienność ta zachodzi przy wszelkich zmianach spółrzędnych prostolinjowych.

ROZDZIAŁ PIĄTY.

Własności ogniskowe krzywych stopnia drugiego.

§ 29. Ogniska i kierownice elipsy i hiperboli.

Niech będzie prostokątny układ spółrzędnych x, y i w układzie tym równanie kanoniczne (6) § 1, t.j. równanie:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\varepsilon\, b^2}=1\,, \tag{1}$$

które przy $\varepsilon=+1$ przedstawia elipsę, a przy $\varepsilon=-1$ przedstawia hiperbolę. W pierwszym z tych przypadków dodatnie stałe a, b oznaczają odpowiednio długość połowy wielkiej osi i długość połowy małej osi elipsy, w drugim zaś odpowiednio długość połowy rzeczywistej osi i długość połowy urojonej osi hiperboli. Spółrzędne ognisk tych linij krzywych określają się wzorami:

$$x=\tau\, c=\tau\sqrt{a^2-\varepsilon\, b^2}\,,\quad y=0\,, \tag{2}$$

gdzie $\tau=\pm 1$. Oznaczmy bezwzględną odległość bieżącego punktu x, y linji krzywej od jej ogniska przez r. Wtedy mieć będziemy związek:

$$r^2=(x-\tau\, c)^2+y^2,$$

a podstawiając w nim wyrażenie, wynikające na y^2 z równania (1), dojdziemy do równości:

$$r^2=(x-\tau\, c)^2+\varepsilon\, b^2-\varepsilon\,\frac{b^2}{a^2}\,x^2,$$

którą łatwo doprowadzić do postaci:

$$r^2 = (e\,x - \tau\,a)^2, \tag{3}$$

gdzie e oznacza mimośród linji krzywej (1). Wielkość ρ, określona wzorem:

$$\rho = \left| x - \tau \frac{a^2}{c} \right|, \tag{4}$$

jest długością prostopadłej, opuszczonej z punktu x, y krzywej (1) na prostą:

$$x = \tau \frac{a^2}{c}. \tag{5}$$

Każda prosta, określona tem równaniem, nazywa się kierownicą odnośnej linji krzywej, a więc kierownicą elipsy, względnie kierownicą hiperboli. W przypadku elipsy są to dwie proste prostopadłe do wielkiej osi elipsy i symetrycznie położone względem jej środka. W przypadku hiperboli są to dwie proste prostopadłe do rzeczywistej osi hiperboli i symetrycznie położone względem jej środka. Punkt i prostą, określone dla tej samej krzywej (1) równaniami (2) i (5) przy tej samej wartości znaku τ, nazywać będziemy ogniskiem i kierownicą do siebie należącemi. Na podstawie wzoru (4) związek (3) można zastąpić równaniem:

$$r = e\,\rho. \tag{6}$$

Własność, która jest treścią tego równania, może być wysłowiona jak następuje. Stosunek odległości bieżącego punktu elipsy, względnie hiperboli od jej ogniska do długości prostopadłej, opuszczonej z tego bieżącego punktu na należącą do rzeczonego ogniska kierownicę, jest stały i równa się mimośrodowi krzywej. Porównywając otrzymane tutaj wyniki z definicją paraboli, podaną w § 3, dostrzeżemy łatwo, że jej własność charakterystyczną można sformułować analogicznie równaniem:

$$r = \rho. \tag{7}$$

Wskutek tego mówimy, że mimośród paraboli równa się jedności.

Zauważmy teraz, że zachodzi równość:

$$\frac{a^2}{c} = \frac{a}{e},$$

Z równości tej wynika, że długość prostopadłej, opuszczonej ze środka elipsy na jej kierownicę, jest większa od długości połowy wielkiej osi elipsy. Z równości tej wynika także, że długość prostopadłej opuszczonej ze środka hiperboli na jej kierownicę

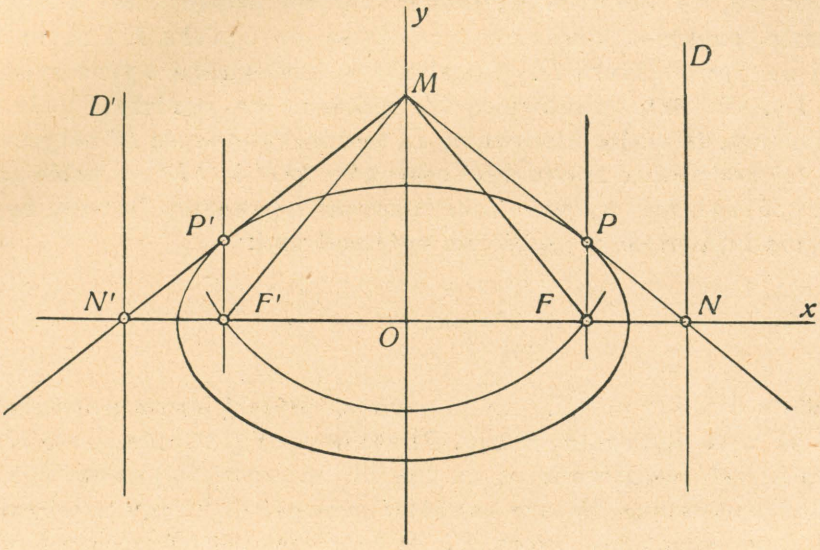

Fig. 47.

jest mniejsza od długości połowy rzeczywistej osi hiperboli. Nie poprzestaniemy jednak na tych uwagach, a zajmiemy się podaniem konstrukcyj, zapomocą których można dla elipsy i hiperboli wyznaczyć według danych długości a i b ogniska i kierownice tych linij krzywych.

Niech będzie elipsa, określona równaniem (1) przy $\varepsilon = +1$. W celu wyznaczenia ognisk zwrócimy uwagę na to, że jeżeli odcinek o długości a jest przeciwprostokątną, a odcinek o długości b przyprostokątną trójkąta prostokątnego, to druga przyprostokątna tego trójkąta ma długość c. Z jednego z wierzchołków elipsy, położonego na osi y-ów, zakreślamy jako ze środka koło o promieniu równym połowie wielkiej osi elipsy (fig. 47). Koło to

przecina oś x-ów w punktach F i F', które są ogniskami elipsy. W celu skonstruowania kierownic elipsy zauważymy, że długość a jest średnią geometryczną pomiędzy długością c i długością prostopadłej opuszczonej ze środka elipsy na kierownicę. Na osi y-ów odkładamy od środka elipsy bądź w kierunku dodatnim, bądź też w kierunku ujemnym, długość a. Koniec tego odcinka, leżącego, dajmy na to, na dodatniej części osi y-ów, oznaczamy literą M i łączymy odcinkiem linji prostej z ogniskiem F'. Jeżeli skonstruujemy prostopadłą do tego odcinka, przechodzącą przez punkt M, to punkt N przecięcia się tej prostopadłej z osią x będzie punktem kierownicy, należącej do ogniska F i naznaczonej na figurze literą D. Konstrukcją analogiczną wyznaczyliśmy na fig. 47 także kierownicę D', należącą do ogniska F', ale zauważamy, że mając kierownicę D, można kierownicę D' narysować na tej podstawie, że długości odcinków ON i ON' są sobie równe. W związku z temi konstrukcjami zauważmy jeszcze, że na elipsie leżą punkty, określone spółrzędnemi:

$$x = \tau c, \quad y = \zeta \frac{b^2}{a}, \tag{8}$$

gdzie $\tau = \pm 1$, $\zeta = \pm 1$. Są to punkty, których rzuty prostokątne na oś x są ogniskami elipsy. Punktów tych jest cztery, ale tylko dwa z nich naznaczone są na fig. 47, mianowicie punkty P i P'. Jeżeli spółrzędne bieżące punktów stycznej do elipsy w jej punkcie x, y oznaczymy przez X, Y, to równanie tej stycznej mieć będzie postać:

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1.$$

Stąd wynika, że styczna do elipsy w punkcie o spółrzędnych (8) określa się równaniem:

$$\zeta Y = a - \tau e X. \tag{9}$$

Z równania tego wynika, że styczna do elipsy w punkcie P, t.j. styczna, odpowiadająca wartościom $\zeta = +1$, $\tau = +1$, jest prostą MN, a styczna do elipsy w punkcie P', t.j. styczna, odpowiadająca wartościom $\zeta = +1$, $\tau = -1$, jest prostą MN'. Analogiczne wnioski można wyprowadzić przy wartości $\zeta = -1$, ale pominie-

my to, nadmieniając, że odnośne części rysunku na fig. 47 także nie są wykonane.

Zwrócimy się teraz do hiperboli, określonej równaniem (1) przy wartości $\varepsilon = -1$. Konstrukcyjne wyznaczenie ognisk i kierownic hiperboli według danych długości a i b można wykonać drogą do poprzedniej analogiczną. Jeżeli A oznacza wierzchołek hiperboli (fig. 48), a B koniec odcinka o długości b, odłożonego na osi y od punktu O, to ogniska hiperboli otrzymać można jako punkty spotkania osi x z kołem, opisanem promieniem równym odcinkowi AB ze środka, będącego środkiem hiperboli. W celu wy-

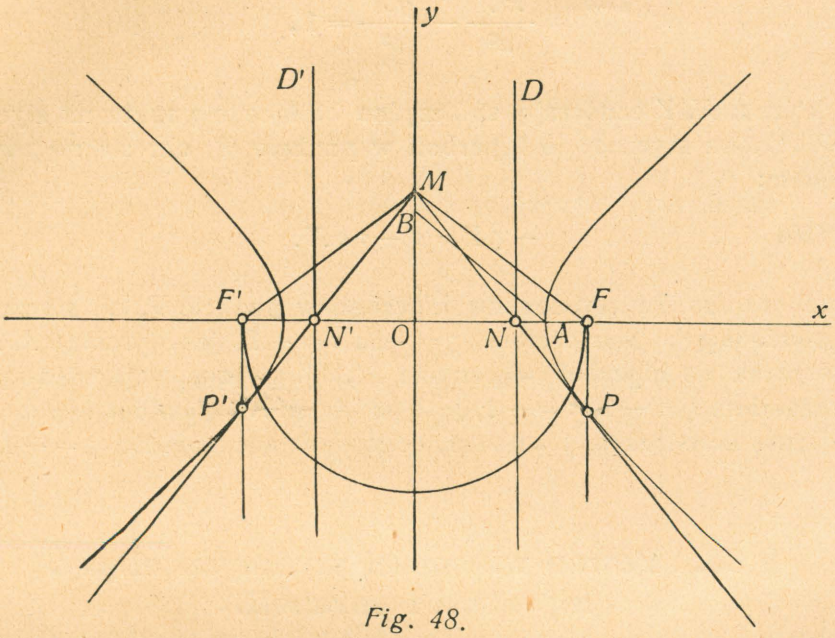

Fig. 48.

znaczenia kierownic hiperboli odkładamy długość a na osi y-ów od punktu O np. w kierunku dodatnich y-ów. Oznaczając literą M koniec odłożonego odcinka, wykreślamy odcinek MF' i konstruujemy do niego prostopadłą, przechodzącą przez punkt M. Punkt N, będący punktem spotkania tej prostopadłej z osią x-ów, jest punktem kierownicy, należącej do ogniska F, bo wtedy długość a jest średnią geometryczną pomiędzy długościami odcinków ON i OF. Tę kierownicę oznaczyliśmy na fig. 48 literą D, a kierownicę, należącą do ogniska F' i oznaczoną na figurze lite-

rą D', możemy otrzymać wtedy na podstawie uwagi, że długości ON i ON' muszą być sobie równe. Na rzeczonej figurze wykonaliśmy konstrukcję kierownicy D' także drogą analogiczną do poprzedniej konstrukcji kierownicy D. W łączności z zastosowaną tutaj drogą wykreślania kierownic zwracamy uwagę na to, że spółrzędne punktów hiperboli, których rzuty prostokątne na oś x są ogniskami hiperboli, wyrażają się także wzorami (8). Z pośród tych czterech punktów tylko punkty P i P', odpowiadające wartości $\zeta = -1$, naznaczone są na fig. 48. Styczna do hiperboli w punkcie x, y określa się równaniem:

$$\frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} = 1,$$

w którem X, Y oznaczają spółrzędne bieżącego punktu na stycznej. Zatem styczna do hiperboli w punkcie (8) określa się równaniem:

$$-\zeta Y = a - \tau e X. \tag{10}$$

Stąd wynika, że styczna do hiperboli w punkcie P, t.j. styczna, odpowiadająca wartościom $\zeta = -1$, $\tau = +1$, jest prostą MN, a styczna do hiperboli w punkcie P', t.j. styczna, odpowiadająca wartościom $\zeta = -1$, $\tau = -1$, jest prostą MN'. Pominęliśmy analogiczne konstrukcje i wnioski, odpowiadające wartości $\zeta = +1$.

§ 30. Pewne własności stycznych elipsy, hiperboli i paraboli.

Równanie stycznej do krzywej (1) w jej punkcie x, y można napisać w postaci:

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{\varepsilon b^2} = 1, \tag{11}$$

gdzie spółrzędne punktu bieżącego na stycznej oznaczone są literami X, Y. Bezwzględna długość prostopadłej, opuszczonej na styczną (11) z punktu płaszczyzny o spółrzędnych X_0, Y_0, określa się wyrażeniem:

$$(12) \qquad \frac{\left| \frac{x X_0}{a^2} + \frac{y Y_0}{\varepsilon b^2} - 1 \right|}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}.$$

Jeżeli oznaczymy przez l bezwzględną długość prostopadłej, opuszczonej ze środka krzywej (1) na styczną do tej krzywej w jej punkcie x, y, to z wyrażenia (12) otrzymamy wzór:

$$(13) \qquad l = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}.$$

Jeżeli następnie przez f oznaczymy bezwzględną długość prostopadłej, opuszczonej z ogniska (2) na styczną do krzywej (1) w jej punkcie x, y, to z wyrażenia (12) otrzymamy przy zastosowaniu równości (4) i (13) wzór:

$$(14) \qquad f = \frac{c}{a^2} l \rho.$$

Zauważmy wreszcie, że z wyrażenia (12) wynikają także inne wnioski. Bezwzględna długość prostopadłej, opuszczonej z punktu o spółrzędnych ηa, 0, $(\eta = \pm 1)$, na styczną do krzywej (1) w jej punkcie x, y, określa się wyrażeniem:

$$\frac{l}{a} |x - \eta a|.$$

Podobnież bezwzględna długość prostopadłej, opuszczonej z punktu o spółrzędnych 0, $\eta' b$, $(\eta' = \pm 1)$, na styczną do krzywej (1) w jej punkcie x, y, określa się wyrażeniem:

$$\frac{l}{b} |y - \varepsilon \eta' b|.$$

Załóżmy teraz, że kierunek rachowania kątów na płaszczyźnie jest ustalony i że oś y tworzy z osią x kąt $+\frac{\pi}{2}$. Oznaczając przez ω kąt jednego z kierunków stycznej (11), mieć będziemy wzory:

$$(15) \qquad \cos\omega = -\zeta\frac{y\,l}{\varepsilon\,b^2}, \quad \sin\omega = \zeta\frac{x\,l}{a^2},$$

w których $\zeta = \pm 1$, zależnie od wyboru rzeczonego kierunku stycznej. Jeżeli następnie oznaczymy przez φ kąt, utworzony z osią x przez wektor, którego początkiem jest punkt x, y linji krzywej, a końcem jej ognisko o spółrzędnych $\tau c, 0$, to uwzględniając związek (6) dojdziemy do wzorów:

$$(16) \qquad \cos\varphi = \frac{\tau c - x}{e\rho}, \quad \sin\varphi = -\frac{y}{e\rho}.$$

Zajmiemy się teraz obliczeniem funkcyj trygonometrycznych kąta $\varphi - \omega$, t.j. kąta, który kierunek, określony wzorem (16), tworzy z kierunkiem, określonym wzorem (15). Łatwo otrzymamy równości:

$$(17) \qquad \begin{cases} \cos(\varphi - \omega) = \dfrac{\zeta\,l\,y}{e\rho}\left[\dfrac{x - \tau c}{\varepsilon\,b^2} - \dfrac{x}{a^2}\right], \\ \sin(\varphi - \omega) = \dfrac{\zeta\,l}{e\rho}\left[\dfrac{x\,(x - \tau c)}{a^2} + \dfrac{y^2}{\varepsilon\,b^2}\right], \end{cases}$$

a zważywszy, że wyrażenia, znajdujące się w prostokątnych nawiasach równości (17), można odpowiednio przedstawić w formie:

$$\frac{c^2}{\varepsilon\,a^2 b^2}\left(x - \tau\frac{a^2}{c}\right), \quad -\frac{\tau c}{a^2}\left(x - \tau\frac{a^2}{c}\right),$$

dojdziemy do wzorów:

$$(18) \qquad \cos(\varphi - \omega) = \varepsilon\,\zeta\,\sigma\frac{e}{b^2}\,l\,y, \quad \sin(\varphi - \omega) = -\tau\,\zeta\,\sigma\frac{l}{a},$$

w których $\sigma = \pm 1$, zależnie od tego, czy różnica $x - \tau\dfrac{a^2}{c}$ jest wielkością dodatnią, czy też ujemną. Gdy $\varepsilon = +1$, t.j. w przypadku elipsy, różnica ta jest stale ujemna przy $\tau = +1$, natomiast jest stale dodatnia przy $\tau = -1$. Gdy $\varepsilon = -1$, t.j. w przypadku hiperboli, znak tej różnicy nie zależy od znaku τ i jest przy każdem τ dodatni dla punktów tej gałęzi hiperboli, która leży po stronie dodatnich x-ów, ujemny zaś dla punktów tej gałęzi hiper-

boli, która leży po stronie ujemnych x-ów. Ze wzorów (18) wynika wzór:

$$\text{(19)} \qquad \operatorname{tg}(\varphi - \omega) = -\tau\,\varepsilon\frac{b^2}{c\,y}.$$

Ze wzoru tego wnosimy, że przy zmianie znaku τ funkcja $\operatorname{tg}(\varphi - \omega)$ nie zmienia swej wartości bezwzględnej, ale zmienia swój znak. Na podstawie wzorów (18) i przytoczonych powyżej uwag wnosimy, że w przypadku elipsy przy zmianie znaku τ funkcja $\cos(\varphi - \omega)$ nie zmienia swej wartości bezwzględnej, lecz zmienia swój znak, a funkcja $\sin(\varphi - \omega)$ nie zmienia swego znaku, ani

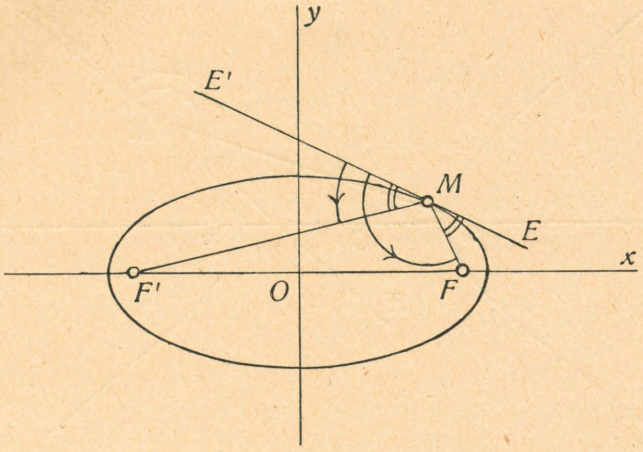

Fig. 49.

swej wartości bezwzględnej. Podobnież z tychże wzorów (18) i odnośnych uwag wnosimy, że w przypadku hiperboli przy zmianie znaku τ funkcja $\cos(\varphi - \omega)$ nie zmienia ani swego znaku, ani swej wartości bezwzględnej, a funkcja $\sin(\varphi - \omega)$ nie zmienia swej wartości bezwzględnej, lecz zmienia swój znak. Te rozważania prowadzą do dwóch wniosków następujących.

Dwa wektory, mające wspólny początek w punkcie M e l i p s y, a końce w jej ogniskach, tworzą z tym samym kierunkiem stycznej do elipsy w tym punkcie M kąty, które mają własność, że suma któregokolwiek z rzeczonych kątów pierwszego wektora i któregokolwiek z rzeczonych kątów drugiego wektora jest nieparzystą wielokrotnością liczby π.

Dwa wektory, mające wspólny początek w punkcie M hiperboli, a końce w jej ogniskach, tworzą z tym samym kierunkiem stycznej do hiperboli w tym punkcie M kąty, które mają własność, że suma któregokolwiek z rzeczonych kątów pierwszego wektora i któregokolwiek z rzeczonych kątów drugiego wektora jest parzystą wielokrotnością liczby π.

Jedna z par kątów, o których mowa w pierwszym z tych wniosków, naznaczona jest krzywemi strzałkami na fig. 49. Podobnież jedna z par kątów, wymienionych w drugim z tych wniosków, na-

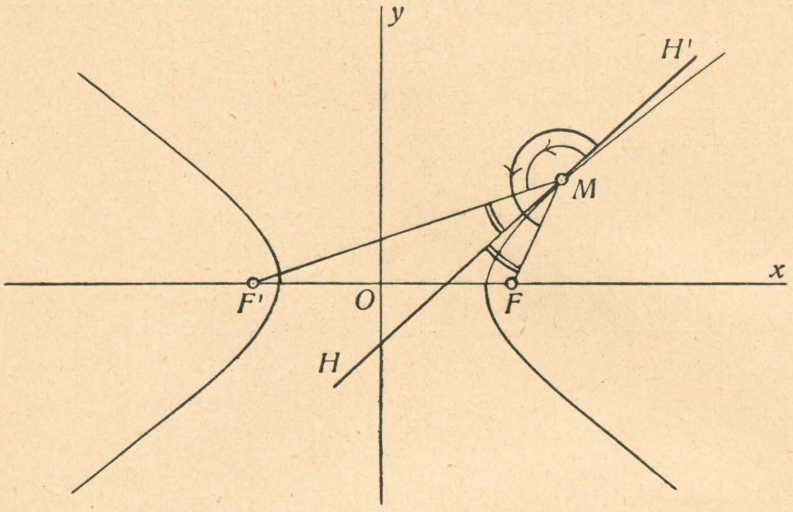

Fig. 50.

znaczona jest krzywemi strzałkami na fig. 50. Zwracamy przytem uwagę na to, że wnioski te są prawdziwe także w przypadku, gdy $y = 0$, t.j. gdy punkt M jest jednym z wierzchołków leżących na wielkiej osi elipsy, względnie jednym z wierzchołków leżących na rzeczywistej osi hiperboli.

Założymy w dalszym ciągu, że $y \neq 0$ i zastosujemy wielkość η, określoną równością $\eta = \pm 1$ zależnie od tego, czy y jest dodatnie, czy też ujemne. Z pośród kątów, o których była mowa, zwrócimy uwagę na kąty, których dostawy są dodatnie. Mamy więc warunek:

(20) $$\varepsilon \zeta \sigma \eta = +1.$$

Ponieważ w przypadku elipsy zachodzą równości: $\varepsilon = +1$, $\sigma = -\tau$, przeto mamy:

$$\zeta = -\tau\eta$$

i ta wielkość jest znakiem wstawy odnośnego kąta. Stąd wynika wniosek następujący.

Dwa wektory, prowadzące od punktu M o spółrzędnych $x, y \neq 0$ elipsy do jej ognisk, tworzą z dwoma odpowiednio obranemi kierunkami stycznej do elipsy w punkcie M dwa kąty ostre o przeciwnych znakach, ale mające te same wartości bezwzględne.

W przypadku hiperboli z równości (20) wynika równość:

$$\zeta = -\sigma\eta,$$

a to znaczy, że dodatnie dostawy uważanych kątów zachodzą dla jednego i tego samego kierunku stycznej w punkcie M. Wtedy znakiem wstawy jest $\tau\eta$, a więc dochodzimy do następującego wyniku.

Dwa wektory, które prowadzą od punktu M o spółrzędnych $x, y \neq 0$ hiperboli do jej ognisk, tworzą z jednym odpowiednio dobranym kierunkiem stycznej do hiperboli w punkcie M dwa kąty ostre o przeciwnych znakach, ale mające te same wartości bezwzględne.

Uwzględniając otrzymane tutaj wyniki i zważywszy, że w przypadkach $y = 0$ styczna jest prostopadła do wektorów, łączących punkt styczności z ogniskami krzywej, będziemy mogli wypowiedzieć twierdzenia następujące, w których terminu kąt bezwzględny użyjemy dla oznaczenia bezwzględnej wartości kąta bezwzględnie mniejszego od π.

1) Jeżeli MF i MF' (fig. 49) oznaczają dwa odcinki, które łączą punkt M elipsy z jej ogniskami, to można na stycznej do elipsy w tym punkcie tak obrać dwa przeciwnie skierowane ramiona $\overline{ME}$ i $\overline{ME'}$, że każdy z kątów bezwzględnych $\measuredangle EMF$ i $\measuredangle E'MF'$ jest mniejszy od $\frac{\pi}{2}$ lub conajwyżej równy $\frac{\pi}{2}$ i że wtedy zachodzi równość:

$$\measuredangle E'MF' = \measuredangle EMF.$$

2) Jeżeli MF i MF' (fig. 50) oznaczają dwa odcinki łączące punkt M hiperboli z jej ogniskami, to można na stycznej do hiperboli w tym punkcie wybrać takie ramię $\overline{MH}$, że każdy

z kątów bezwzględnych $\measuredangle HMF$ i $\measuredangle HMF'$ jest mniejszy od $\frac{\pi}{2}$, lub conajwyżej równy $\frac{\pi}{2}$ i że wtedy zachodzi równość:

$$\measuredangle HMF' = \measuredangle HMF.$$

Kąty bezwzględne, o których mowa w tych twierdzeniach, naznaczone są na fig. 49 i na fig. 50 podwójnemi łukami.

Niech będą teraz dwie krzywe elipsa i hiperbola, których ogniska leżą w tych samych punktach płaszczyzny. Mówić będziemy, że elipsa i hiperbola są wtedy krzywemi spółogniskowemi.

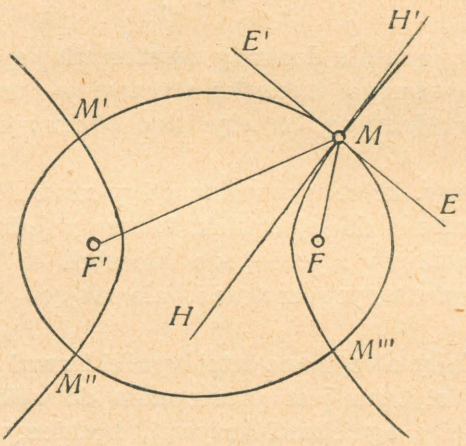

Fig. 51.

Spotykają się one w czterech punktach, które oznaczone są na fig. 51 literami M, M', M'', M'''. Przeprowadźmy w punkcie M styczne do obu tych linij krzywych i weźmy pod uwagę kąty bezwzględne: $\measuredangle EMF$, $\measuredangle E'MF'$, $\measuredangle HMF$, $\measuredangle HMF'$. Na podstawie twierdzeń 1) i 2) mamy równości:

$$\measuredangle E'MF' = \measuredangle EMF, \quad \measuredangle F'MH = \measuredangle FMH,$$

a dodając je stronami, dochodzimy do równości:

$$\measuredangle E'MH = \measuredangle EMH.$$

Ponieważ kąty, w równości tej zachodzące, dopełniają się do dwóch kątów prostych, przeto każdy z nich jest kątem prostym. Widocz-

ne, że takie samo rozważanie zastosować można do wszystkich punktów spotkania uważanych linij krzywych, t.j. do punktów, które naznaczone są na fig. 51 literami M', M'', M'''. Udowodniliśmy więc twierdzenie następujące:

Spółogniskowe elipsa i hiperbola mają w każdym wspólnym punkcie styczne do siebie prostopadłe.

Niech będzie teraz parabola, określona według § 3 równaniem kanonicznem:

$$y^2 = 2px, \tag{21}$$

gdzie p oznacza stałą dodatnią, zwaną parametrem paraboli. Styczna do paraboli (21) w jej punkcie x, y określa się według § 3 równaniem:

$$yY = p(X + x), \tag{22}$$

gdzie X, Y oznaczają spółrzędne bieżącego punktu na stycznej. Bezwzględna długość prostopadłej, opuszczonej z punktu X_0, Y_0 na styczną (22), określa się wyrażeniem:

$$\frac{|yY_0 - p(X_0 + x)|}{\sqrt{y^2 + p^2}}. \tag{23}$$

Jeżeli zwrócimy uwagę na to, że bezwzględna długość prostopadłej, opuszczonej z punktu x, y paraboli na kierownicę, określa się wzorem:

$$\rho = x + \frac{p}{2}, \tag{24}$$

to, korzystając z równania (21), otrzymamy:

$$y^2 + p^2 = 2p\rho.$$

Wobec tego długość (23) będziemy mogli napisać w formie:

$$\frac{|yY_0 - p(X_0 + x)|}{\sqrt{2p\rho}}. \tag{25}$$

Oznaczmy przez f bezwzględną długość prostopadłej, opuszczonej z ogniska paraboli na jej styczną w punkcie x, y. Na podstawie wzoru (25) otrzymamy wzór:

(26) $$f = \sqrt{\left|\frac{p\,\rho}{2}\right|},$$

a na podstawie wzorów (25) i (26) wniesiemy, że długość prostopadłej, opuszczonej z wierzchołka paraboli na jej styczną w punkcie x, y, równa się wyrażeniu:

$$\frac{p\,|x|}{2f}.$$

Jeżeli teraz oznaczymy przez ω kąt jednego z kierunków stycznej (22) z osią x-ów, to mieć będziemy wzory:

(27) $$\cos\omega = \frac{y}{\zeta\sqrt{|2p\rho|}}, \quad \sin\omega = \frac{p}{\zeta\sqrt{|2p\rho|}},$$

gdzie $\zeta = \pm 1$. Jeżeli zaś oznaczymy przez φ kąt, który z osią x tworzy wektor, którego początkiem jest punkt x, y paraboli, a końcem jej ognisko, to mieć będziemy wzory:

(28) $$\cos\varphi = \frac{\frac{p}{2} - x}{\rho}, \quad \sin\varphi = -\frac{y}{\rho}.$$

Na podstawie wzorów (27) i (28) łatwo skonstatujemy równości:

(29) $$\cos(\varphi - \omega) = -\cos\omega, \quad \sin(\varphi - \omega) = -\sin\omega.$$

W celu wyrażenia słowami tego wyniku przypomnimy, że w § 17 odróżnialiśmy wewnętrzną i zewnętrzną stronę każdej istotnej krzywej stopnia drugiego i wypowiemy treść równości (29) jak następuje.

Różnica dwóch kątów: kąta wektora, którego początkiem jest punkt M (fig. 52) p a r a b o l i, a końcem jej ognisko, z ramieniem stycznej w tym punkcie do paraboli i kąta tegoż ramienia stycznej z kierunkiem osi paraboli, prowadzącym do wewnątrz tej krzywej — jest nieparzystą wielokrotnością liczby π. Takie dwa kąty naznaczone są na fig. 52 zakrzywionemi strzałkami.

Zwróćmy uwagę na to, że gdybyśmy przyjęli oznaczenie $\bar{\omega} = \omega + \pi$, to możnaby związki (29) napisać w postaci:

(30) $$\cos(\varphi - \bar{\omega}) = \cos\omega, \quad \sin(\varphi - \bar{\omega}) = \sin\omega.$$

Kąty ω i $\bar{\omega}$ określają dwa wprost przeciwne sobie kierunki stycznej i stosując je, można wypowiedzieć bezpośrednio widoczną modyfikację poprzedniego wniosku. Ale pominiemy formułowanie jej w postaci ogólnej, a zwrócimy natomiast uwagę na to, że kąt ω może być zawsze obrany w taki sposób, żeby było $\cos\omega \geqslant 0$ i ograniczymy się do podania takiego wysłowienia otrzymanego wyniku, które podobnie jak w twierdzeniach, odnoszących się do elipsy i hiperboli, dotyczyć będzie bezpośrednio tytko kątów bezwzględnych. Mamy mianowicie twierdzenie następujące.

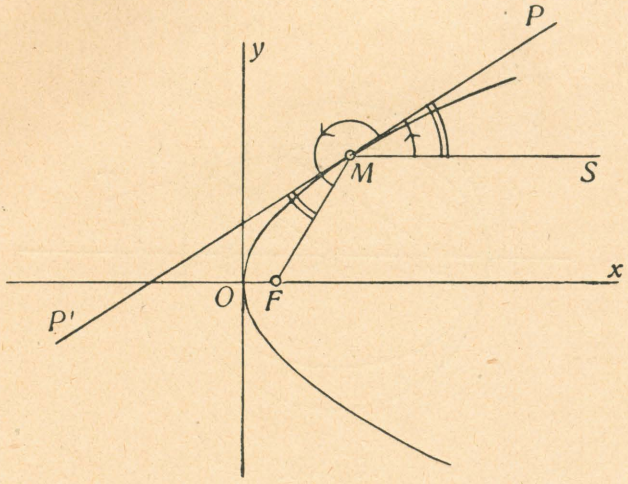

Fig. 52.

Jeżeli MS oznacza ramię średnicy paraboli, które prowadzi od jej punktu M do wewnątrz paraboli, a MF oznacza odcinek, który łączy punkt M z ogniskiem paraboli, to można na stycznej do paraboli w tym punkcie tak obrać dwa przeciwnie skierowane ramiona $\overline{MP}$ i $\overline{MP'}$, że każdy z kątów bezwzględnych $\measuredangle PMS$ i $\measuredangle P'MF$ jest mniejszy od $\frac{\pi}{2}$, lub conajwyżej równy $\frac{\pi}{2}$, i że wtedy zachodzi równość:

$$\measuredangle P'MF = \measuredangle PMS.$$

Kąty, o których mowa w tem twierdzeniu, naznaczone są na fig. 52 podwójnemi łukami.

§ 31. Własności par stycznych elipsy, hiperboli i paraboli.

Niech będzie naprzód elipsa i oznaczmy przez a połowę jej osi wielkiej, ogniska zaś literami F i F' (fig. 53). Rysujemy styczną TT' do elipsy w jej punkcie M i wyznaczamy punkt K symetryczny do ogniska F względem tej stycznej. Odcinek KF przecina styczną pod kątem prostym i dzieli się w punkcie G tej stycznej na dwie części równe. Punkty F i K łączymy odcinkami

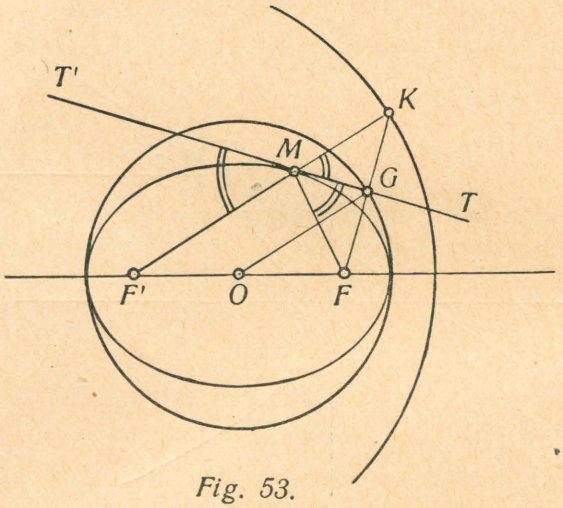

Fig. 53.

z punktem M. Z konstrukcji, którą wykonaliśmy, wynika równość odcinków:

$$MK = MF$$

i równość kątów bezwzględnych:

$$\measuredangle KMT = \measuredangle FMT.$$

Jeżeli zaś połączymy odcinkiem prostolinjowym punkty F' i M, to na podstawie rozważań poprzedniego paragrafu mieć będziemy równość kątów bezwzględnych:

$$\measuredangle F'MT' = \measuredangle FMT,$$

a więc odcinek MK położony jest na prostej odcinka $F'M$. Zatem dla odcinka $F'K$ zachodzi równość:

$$F'K = F'M + MF = 2a,$$

a to znaczy, że odcinek $F'K$ ma długość niezależną od wyboru na elipsie punktu M i równą długości wielkiej osi elipsy. Jeżeli teraz połączymy odcinkiem prostolinjowym punkty O i G, to dostrzeżemy łatwo, że długość odcinka OG równa się połowie długości odcinka $F'K$, że więc zachodzi równość:

$$OG = a.$$

To znaczy, że odcinek OG ma długość niezależną od wyboru na elipsie punktu M i równą długości połowy wielkiej osi elipsy.

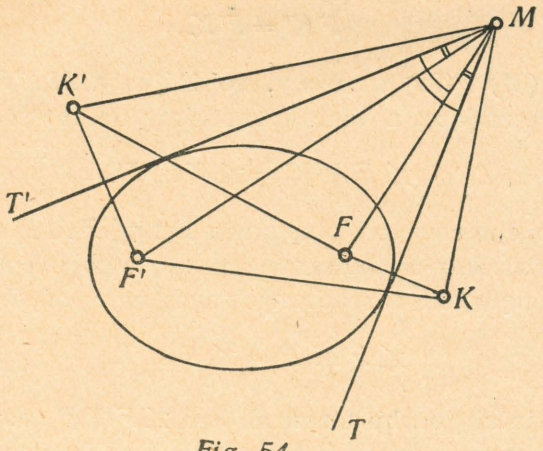

Fig. 54.

Zauważmy tutaj, że, zmieniając rolę ognisk, moglibyśmy przeprowadzić konstrukcje i rozważania analogiczne do poprzednich. Wobec tego widzimy, że mają miejsce twierdzenia następujące.

Miejsce geometryczne punktów symetrycznie położonych do ogniska elipsy względem jej stycznych jest kołem, którego środek leży w drugiem ognisku tej elipsy, a promień równa się długości jej osi wielkiej. Miejsce geometryczne spodków prostopadłych, opuszczonych z ogniska elipsy na jej linje styczne, jest kołem, którego środek leży w środku tej elipsy, a promień równa się długości połowy jej osi wielkiej.

Niech będzie znowu elipsa z ogniskami F i F' (fig. 54) i przeprowadźmy do niej linje styczne, przechodzące przez dany punkt

DAR TOWARZYSTWA PRZYJACIÓŁ MŁODZIEŻY AKADEMICKIEJ
SPRZEDAŻ W KSIĘGARNIACH NIEDOZWOLONA

M, będący w stosunku do niej punktem zewnętrznym. Styczne te naznaczone są na figurze przez MT i MT'. Wyznaczamy punkt K symetryczny do ogniska F względem stycznej MT i punkt K' symetryczny do ogniska F' względem stycznej MT'. Łączymy punkt M odcinkami linij prostych z punktami F, K, F', K' i zauważamy, że zachodzą równości odcinków:

$$MK = MF, \quad MK' = MF'. \tag{31}$$

Następnie łączymy odcinkami prostolinjowemi punkt F' z punktem K i punkt F z punktem K'. Na podstawie pierwszego z twierdzeń niniejszego paragrafu długość każdego z tych dwóch odcinków równa się $2a$, mamy więc równość:

$$FK' = F'K. \tag{32}$$

Z równości (31) i (32) wnosimy, że trójkąty $MK'F$ i $MF'K$ są do siebie przystające, a więc dochodzimy do równości:

$$\sphericalangle FMK' = \sphericalangle KMF'.$$

Jeżeli zaś odejmiemy od obu stron kąt $\sphericalangle FMF'$ i wyniki tego działania podzielimy obustronnie przez 2, to dojdziemy do równości kątów bezwzględnych (naznaczonych na figurze podwójnemi łukami):

$$\sphericalangle F'MT' = \sphericalangle FMT, \tag{33}$$

dodając zaś tutaj po obu stronach kąt $\sphericalangle FMF'$ otrzymamy równość kątów bezwzględnych (naznaczonych na figurze pojedyńczemi łukami):

$$\sphericalangle FMT' = \sphericalangle F'MT. \tag{34}$$

Zauważamy tutaj, że zmieniając rolę ognisk w stosunku do stycznych przechodzących przez punkt M, moglibyśmy przeprowadzić konstrukcje i rozważania analogiczne i doszlibyśmy widocznie do tych samych rezultatów. Zauważamy nadto, że rezultaty te nie mogą być zależne od wyboru konkretnych rysunków, z pomocą których przeprowadza się odnośne rozumowanie, bo przy ciągłych zmianach pozycji zewnętrznego punktu M zarówno kierunki wektorów, które prowadzą od punktu M do ognisk, jak kierunki ramion, które prowadzą od punktu M do punktów styczności, zmieniają się w sposób ciągły.

Treść równości (33) i (34) można wypowiedzieć teraz w postaci t w i e r d z e n i a.

Jeżeli przez punkt M, leżący nazewnątrz elipsy, przeprowadzimy dwie styczne do elipsy i punkt ten połączymy prostolinjowemi odcinkami z jej ogniskami, to ramiona stycznych, skierowane od punktu M do punktów styczności, i wektory, prowadzące na rzeczonych odcinkach od punktu M do ognisk, mieć będą własność następującą. Bezwzględny kąt dowolnie wybranego z rzeczonych dwóch ramion i dowolnie wybranego z rzeczonych dwóch wektorów równa się bezwzględnemu kątowi drugiego z tych dwóch ramion i drugiego z tych dwóch wektorów.

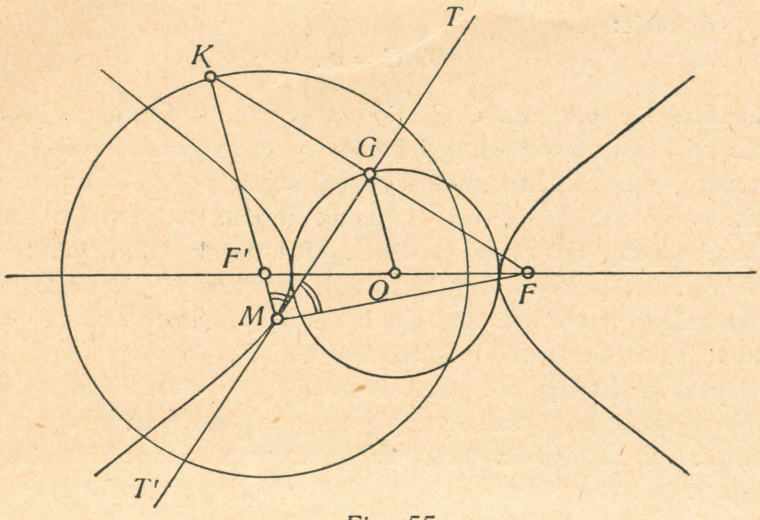

Fig. 55.

Niech będzie teraz h i p e r b o l a i oznaczmy połowę jej osi rzeczywistej literą a, ogniska zaś literami F i F' (fig. 55). Obieramy na hiperboli dowolny punkt M, rysujemy styczną do niej w tym punkcie i wyznaczamy punkt K symetrycznie położony do ogniska F względem tej stycznej. Odcinek FK dzieli się w punkcie G stycznej na dwie części równe i jest prostopadły do tej stycznej. Jeżeli połączymy punkty K i F z punktem M, to z wykonanej konstrukcji wniesiemy, że zachodzi równość odcinków:

$$MK = MF$$

i równość kątów bezwzględnych:

$$\measuredangle K M T = \measuredangle F M T.$$

Ale z tej ostatniej równości, opierając się na rozważaniach poprzedniego paragrafu, wyprowadzimy wniosek, że odcinek MK przechodzi przez ognisko F'. Zatem dla odcinka $F'K$ mamy równość:

$$F'K = MF - MF' = 2a,$$

a więc odcinek $F'K$ ma długość, niezależną od wyboru punktu M na hiperboli i równą długości rzeczywistej osi hiperboli. Połączmy jeszcze odcinkiem prostolinjowym punkty O i G. Widoczne, że długość odcinka OG równa się połowie odcinka $F'K$, t.j. że mamy równość:

$$OG = a.$$

Zatem długość odcinka OG nie zależy od wyboru na hiperboli punktu M i równa się długości połowy rzeczywistej osi hiperboli. Zauważmy, że zależnie od wyboru stycznej i od wyboru roli ognisk w stosunku do tej stycznej, można w tem rozważaniu otrzymać figury rozmaitej postaci. Jeżeli tak samo, jak w przypadku fig. 55, przyjmiemy punkt M na lewej gałęzi hiperboli, ale określimy w odniesieniu do lewego ogniska położenie dwóch punktów analogicznych do punktów G i K, to otrzymamy figurę innej postaci, niż fig. 55. Tak samo figury dwóch różnych postaci otrzymują się przez przyjęcie punktu M na prawej gałęzi hiperboli. W każdym z tych przypadków rozważanie analogiczne do poprzedniego prowadzi do wyników, które zawarte są wszystkie w twierdzeniach następujących.

Miejsce geometryczne punktów symetrycznie położonych do ogniska hiperboli względem jej stycznych jest kołem, którego środek leży w drugiem ognisku tej hiperboli, a promień równa się długości jej osi rzeczywistej. Miejsce geometryczne spodków prostopadłych, opuszczonych z ogniska hiperboli na jej styczne, jest kołem, którego środek leży w środku hiperboli, a promień jest połową jej osi rzeczywistej.

Miejsca geometryczne, będące przedmiotem tych twierdzeń, zawierają także punkty, które czynią zadość powyższym określeniom, gdy uważamy w nich asymptoty jako szczególne przypadki stycznych. Stwierdzimy to bezpośrednim dowodem geome-

tryeznym. Niech będzie hiperbola (fig. 56), jej oś rzeczywista, jej ogniska F i F' i jej asymptoty spotykające się w środku O. Prawy wierzchołek hiperboli oznaczony jest na figurze przez A, mamy więc $OA = a$. Prowadzimy z punktu A prostopadle do osi rzeczywistej odcinek AB, którego kraniec B leży na asymptocie: wtedy będzie $AB = b$, gdzie b oznacza długość urojonej osi hiperboli, oraz $OB = c$, gdzie c oznacza odległość ogniska od środka. Jeżeli teraz z ogniska F opuścimy prostopadłą na asymptotę, to oznaczając przez G spodek tej prostopadłej, mieć będziemy wi-

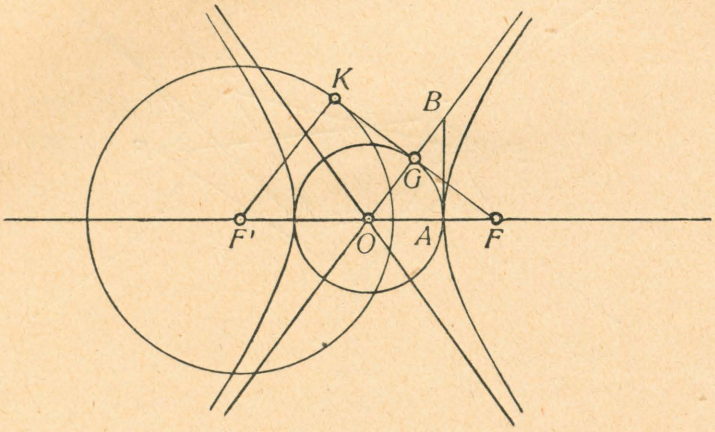

Fig. 56.

docznie $OG = a$, to zaś jest stwierdzeniem dla odnośnego punktu asymptoty własności podanej w drugiem z powyższych twierdzeń. Jeżeli następnie wyznaczymy punkt K w taki sposób, żeby on leżał na przedłużeniu odcinka FG i żeby było $GK = FG$, oraz połączymy ten punkt K odcinkiem prostolinjowym z punktem F', to z trójkąta $FF'K$ dostrzeżemy bezpośrednio, że długość odcinka OG równa się połowie długości boku $F'K$. Stąd wynika, że $F'K = 2a$, a to jest skonstatowaniem, że punkt symetryczny do ogniska względem asymptoty ma własność podaną w pierwszem z powyższych twierdzeń. Widoczne, że takie własności stwierdzić można dla każdego ogniska i dla każdej asymptoty.

Weźmy znowu pod uwagę h i p e r b o l ę i oznaczmy punkty, w których leżą jej ogniska, przez F i F' (fig. 57). Asymptoty hiperboli (które na fig. 57 nie są wykreślone) dzielą płaszczyznę na cztery obszary dwuwymiarowe; w jednej parze tych obszarów leży rzeczywista oś hiperboli, w drugiej zaś urojona oś hi-

perboli. Niech będzie naprzód punkt M, położony wewnątrz jednego z obszarów drugiej pary. Punkty styczności stycznych do hiperboli, przechodzących przez punkt M, znajdują się na dwóch różnych gałęziach hiperboli. Rzeczone styczne naznaczone są na fig. 57 przez $M\,T$ i $M\,T'$. Wyznaczamy na tej figurze punkty K i K', symetryczne odpowiednio do ognisk F i F', pierwszy

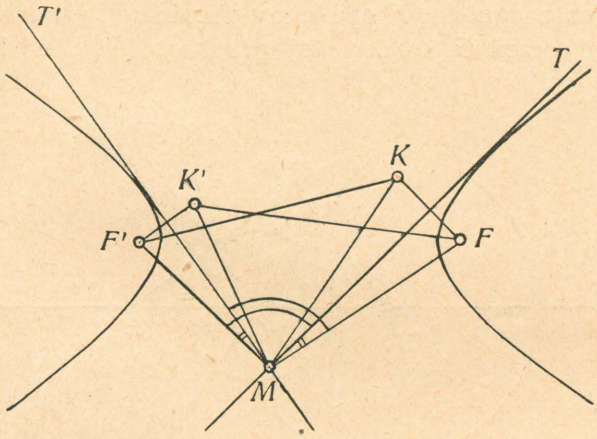

Fig. 57.

względem stycznej $M\,T$, drugi zaś względem stycznej $M\,T'$. Następnie łączymy punkt M odcinkami prostolinjowemi z punktami F, K, F', K' i konstatujemy zachodzenie równości odcinków:

$$(35) \qquad M\,K = M\,F, \quad M\,K' = M\,F'.$$

Jeżeli jeszcze połączymy odcinkami prostolinjowemi punkt K' z punktem F, a punkt K z punktem F' i zwrócimy uwagę na to, że długość każdego z tych odcinków równa się $2\,a$, to wniesiemy, że zachodzi równość:

$$(36) \qquad F\,K' = F'\,K.$$

Z równości (35) i (36) wynika, że trójkąty $M\,K'\,F$ i $M\,F'\,K$ są do siebie przystające, że więc zachodzi równość kątów:

$$\measuredangle\, F\,M\,K' = \measuredangle\, K\,M\,F'.$$

Jeżeli teraz po obu stronach tej równości odejmiemy kąt $\measuredangle K'MK$ i wyniki tego odejmowania podzielimy przez 2, to dojdziemy do równości kątów bezwzględnych (naznaczonych na figurze podwójnemi łukami):

$$\measuredangle F'MT' = \measuredangle FMT. \tag{37}$$

Jeżeli zaś do tej równości dodamy po obu stronach kąt $\measuredangle TMT'$, to skonstatujemy równość kątów bezwzględnych (naznaczonych na figurze pojedyńczemi łukami):

$$\measuredangle FMT' = \measuredangle F'MT. \tag{38}$$

Załóżmy teraz, że punkt M leży wewnątrz (a więc nie na ograniczeniu) tej pary wspomnianych powyżej obszarów, do któ-

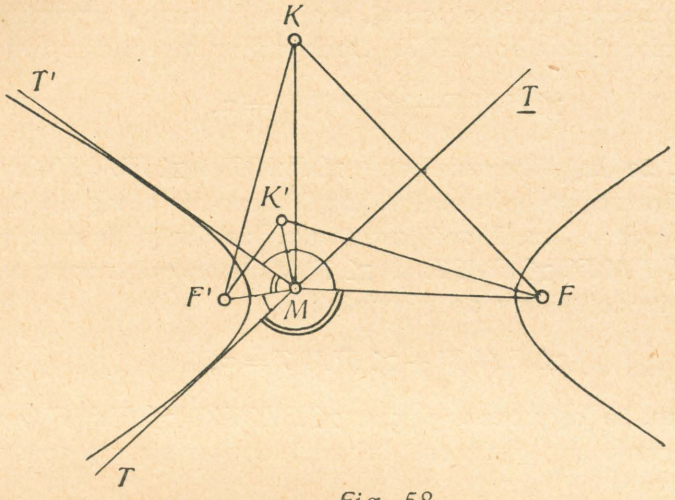

Fig. 58.

rych należy rzeczywista oś hiperboli. Punkty styczności stycznych MT i MT' do hiperboli, przechodzących przez punkt M, położone są oba na tej samej gałęzi hiperboli (fig. 58). Wyznaczamy punkt K symetryczny do ogniska F względem stycznej MT i punkt K' symetryczny do ogniska F' względem stycznej MT'. Następnie łączymy punkt M prostolinjowemi odcinkami z punktami F, K, F', K' i konstatujemy równość odcinków:

$$MK = MF, \quad MK' = MF'. \tag{39}$$

Jeżeli nadto weźmiemy pod uwagę prostolinjowe odcinki, łączące punkt K' z punktem F i punkt K z punktem F', to na podstawie własności, że długość każdego z tych odcinków równa się $2a$, wniesiemy, że zachodzi równość:

$$FK' = F'K. \tag{40}$$

Z równości (39) i (40) wynika, że trójkąty $MK'F$ i $MF'K$ są do siebie przystające, że więc zachodzi równość kątów:

$$\measuredangle FMK' = \measuredangle F'MK.$$

Odejmując stąd po obu stronach kąt $\measuredangle KMK'$ i dzieląc otrzymane wyniki przez 2, dojdziemy do równości:

$$\measuredangle F'MT' = \measuredangle FM\underline{T},$$

gdzie $M\underline{T}$ oznacza ramię stycznej, mające kierunek wprost przeciwny kierunkowi ramienia MT. Dochodzimy zatem do równości:

$$\measuredangle FMT + \measuredangle F'MT' = \pi, \tag{41}$$

t.j. do tego, że kąty bezwzględne $\measuredangle FMT$ i $\measuredangle F'MT'$ (naznaczone na figurze podwójnemi łukami) dopełniają się do dwóch kątów prostych. Jeżeli zaś zważymy, że kąty bezwzględne: $\measuredangle FMT$, $\measuredangle TMF'$, $\measuredangle F'MT'$ i $\measuredangle T'MF$ stanowią razem całkowity obrót, to dojdziemy do równości:

$$\measuredangle FMT' + \measuredangle F'MT = \pi, \tag{42}$$

t.j. do wyniku, że kąty bezwzględne $\measuredangle FMT'$ i $\measuredangle F'MT$ (naznaczone na figurze pojedyńczemi łukami) dopełniają się do dwóch kątów prostych.

Odnośnie do rysunków, zamieszczonych na fig. 57 i na fig. 58, zauważamy, że moglibyśmy w obu tych przypadkach zmienić rolę ognisk w stosunku do stycznych przechodzących przez punkt M, oraz przeprowadzić konstrukcje i rozważania analogiczne, otrzymując tą drogą te same rezultaty. Jeżeli przypomnimy obszary dwuwymiarowe I, II, III, IV, o których była mowa w § 18 (fig. 34), to będziemy mogli powiedzieć, że na fig. 57 punkt M położony jest wewnątrz obszaru IV, a na fig. 58 punkt M położony jest wewnątrz obszaru III. Ale przy ciągłych zmianach pozycji punktu M bądź wewnątrz obszaru IV, bądź też wewnątrz obszaru III, za-

równo kierunki wektorów, które prowadzą od punktu M do ognisk, jak i kierunki ramion, które prowadzą od punktu M do punktów styczności, zmieniają się w sposób ciągły. Stąd wynika, że własności kątów, które skonstatowaliśmy rozważaniami, związanemi z fig. 57 i z fig. 58, są odpowiednio udowodnione dla wszelkich punktów M, położonych wewnątrz obszaru IV i dla wszelkich punktów M, położonych wewnątrz obszaru III. Zwracając teraz uwagę na to, że rysunek symetryczny względem rzeczywistej osi hiperboli do rysunku na fig. 57 doprowadzi do punktów M, położonych wewnątrz obszaru II, do tej samej własności, którą skonstatowaliśmy dla punktów M, położonych wewnątrz obszaru IV, a rysunek symetryczny względem urojonej osi hiperboli do rysunku na fig. 58 doprowadzi dla punktów M, położonych wewnątrz obszaru I, do tej samej własności, którą skonstatowaliśmy dla punktów M, położonych wewnątrz obszaru III, dostrzeżemy łatwo, że z równości (37), (38), (41), (42) wynika twierdzenie następujące.

Jeżeli przez punkt M, położony nazewnątrz hiperboli, ale nie leżący na żadnej z jej asymptot, przeprowadzimy dwie styczne do hiperboli i punkt ten połączymy odcinkami prostolinjowemi z jej ogniskami, to ramiona stycznych, skierowane od punktu M do punktów styczności i wektory, prowadzące na rzeczonych odcinkach od punktu M do ognisk, mieć będą własność następującą. Bezwzględny kąt dowolnie wybranego z rzeczonych ramion i dowolnie wybranego z rzeczonych wektorów i bezwzględny kąt drugiego z rzeczonych ramion i drugiego z rzeczonych wektorów są albo sobie równe, albo też dopełniają się do dwóch kątów prostych. Pierwszy z tych przypadków zachodzi wtedy, gdy punkt M leży wewnątrz jednego z dwóch obszarów, ograniczonych asymptotami i zawierających urojoną oś hiperboli, drugi zaś zachodzi wtedy, gdy punkt M leży wewnątrz jednego z dwóch obszarów, ograniczonych asymptotami, a zawierających rzeczywistą oś hiperboli.

Zastanowimy się jeszcze nad tem, jak sformułować można analogiczną własność w przypadku, gdy punkt M położony jest na asymptocie. Wyłączymy przypadek, w którym punkt M jest środkiem hiperboli, bo własności kątów pomiędzy ramionami osi rzeczywistej hiperboli i ramionami jej asymptot są bezpośrednio widoczne. Aby własność, o którą chodzi, sformułować przy założeniu, że punkt M leży na asymptocie, ale jest różny od środka

hiperboli, zwrócimy uwagę na to, że punkty symetryczne ogniska względem asymptot są punktami tego samego koła, na którem leżą punkty symetryczne ogniska względem stycznych. Ponieważ dowód ostatniego z podanych twierdzeń oparty jest na zastosowaniu rzeczonego koła, przeto możemy otrzymać własność, o którą chodzi, przeprowadzając w sposób ciągły punkt M z wewnątrz obszarów I, II, III, IV na odpowiednie pozycje, należące do asymptot. Jeżeli punkt M figury 57, znajdujący się w obszarze IV, przeprowadzimy

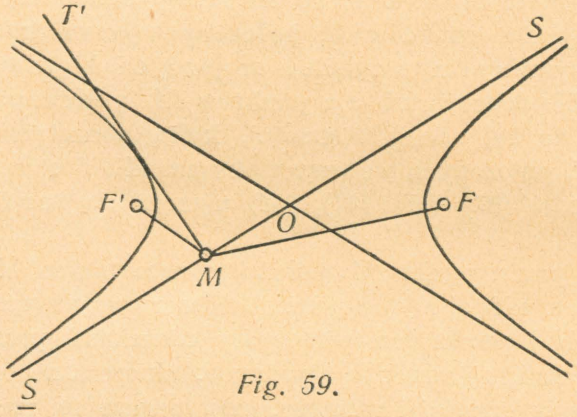

Fig. 59.

w sposób ciągły po odcinku prostolinjowym na pozycję naznaczoną na figurze 59, to na podstawie równości (37) i (38) dostrzeżemy, że zachodzą równości kątów bezwzględnych figury 59:

$$(43)\quad \measuredangle F'MT' = \measuredangle FMS, \quad \measuredangle FMT' = \measuredangle F'MS.$$

Jeżeli zaś punkt M figury 58, znajdujący się w obszarze III, przeprowadzimy w sposób ciągły po odcinku prostolinjowym na tę samą co poprzednio pozycję, naznaczoną na figurze 59, to na podstawie równości (41) i (42) skonstatujemy, że dla kątów bezwzględnych tej figury 59 zachodzą równości:

$$(44)\quad \measuredangle FM\underline{S} + \measuredangle F'MT' = \pi, \quad \measuredangle FMT' + \measuredangle F'M\underline{S} = \pi.$$

Ale łatwo dostrzec, że równości (43) i równości (44) są tylko dwiema różnemi formami wyrażenia tych samych własności. Widoczne, że takie same uwagi można odnieść do punktów M, różnych od środka hiperboli i leżących na częściach asymptot, należących

do ograniczeń innych par obszarów I, II, III, IV. Zatem możemy wypowiedzieć twierdzenie następujące.

Jeżeli przez punkt M, różny od środka hiperboli i leżący na jednej z jej asymptot, przeprowadzimy styczną do hiperboli i punkt ten połączymy odcinkami prostolinjowemi z jej ogniskami, to ramię rzeczonej asymptoty, skierowane od punktu M do środka hiperboli i ramię rzeczonej stycznej, skierowane od punktu M do punktu styczności oraz wektory, prowadzące od punktu M do ognisk, mieć będą własność następującą. Bezwzględny kąt rze-

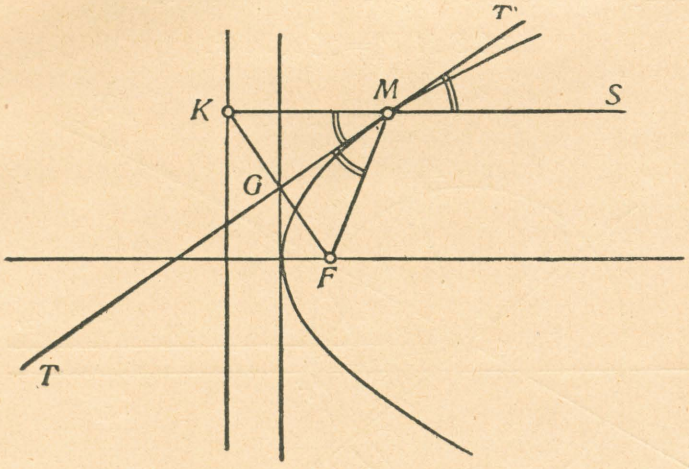

Fig. 60.

czonego ramienia stycznej i dowolnie wybranego z rzeczonych dwóch wektorów równa się bezwzględnemu kątowi rzeczonego ramienia asymptoty i drugiego z dwóch rzeczonych wektorów.

W paragrafie bieżącym wystudjujemy jeszcze analogiczne własności paraboli. Niech będzie na fig. 60 parabola, jej ognisko F i jej oś. W punkcie M paraboli, nie będącym jej wierzchołkiem, prowadzimy do niej styczną $T\,T'$ i wyznaczamy punkt K, będący symetrycznym punktem ogniska F względem tej stycznej. Odcinek prostolinjowy $K\,F$ przecina styczną $T\,T'$ w punkcie G pod kątem prostym i dzieli się w tym punkcie na dwie części równe. Jeżeli punkty F i K połączymy prostolinjowemi odcinkami z punktem M, to wskutek wykonanej konstrukcji mieć będziemy równość odcinków:

(45) $$KM = FM$$

i równość kątów bezwzględnych:

$$\measuredangle FMG = \measuredangle KMG.$$

A jeżeli wykreślimy ramię MS równoległe do osi paraboli i skierowane na wewnątrz paraboli oraz zwrócimy uwagę na równość kątów bezwzględnych:

$$\measuredangle SMT' = \measuredangle FMG,$$

to dojdziemy do równości kątów bezwzględnych:

(46) $$\measuredangle SMT' = \measuredangle KMG.$$

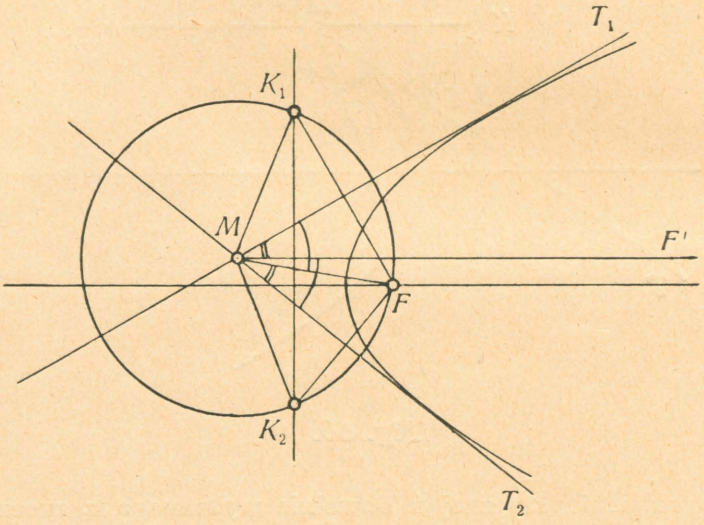

Fig. 61.

Z równości (46) wynika, że odcinek KM leży na prostej ramienia MS, więc z równości (45) wnosimy, że punkt K położony jest na kierownicy paraboli. Stąd wnosimy w dalszym ciągu, że punkt G leży na stycznej do paraboli w jej wierzchołku. Dochodzimy w ten sposób do twierdzeń następujących.

Miejscem geometrycznem punktów symetrycznie położonych do ogniska paraboli względem jej stycznych jest kierownica paraboli. Miejscem geometrycznem spodków prostopadłych, opuszczonych z ogniska paraboli na jej styczne jest styczna do paraboli w jej wierzchołku.

Niech będzie na fig. 61 p a r a b o l a, jej oś symetrji, jej kierownica i jej ognisko, oznaczone literą F. Z punktu M, który jest względem paraboli punktem zewnętrznym, prowadzimy do paraboli dwie styczne $M T_1$, $M T_2$, ramię $M F'$, mające kierunek wektora, prowadzącego od wierzchołka paraboli do jej ogniska oraz wektor $\overline{M F}$. Następnie konstruujemy punkty K_1 i K_2, symetryczne do ogniska F względem stycznych $M T_1$ i $M T_2$. Punkty te leżą na kierownicy paraboli i na kole opisanem z punktu M jako ze środka promieniem równym długości wektora $\overline{M F}$. Ponieważ ramiona kątów bezwzględnych $\measuredangle T_1 M F'$ i $\measuredangle F K_1 K_2$ są odpowiednio do siebie prostopadłe, przeto zachodzi równość:

$$\measuredangle T_1 M F' = \measuredangle F K_1 K_2,$$

a ponieważ kąt $\measuredangle F K_1 K_2$ jest obwodowym kątem wspomnianego wyżej koła i opiera się na łuku $F K_2$, a kąt $\measuredangle F M T_2$ jest środkowym kątem tegoż koła i opiera się na połowie łuku $F K_2$, przeto zachodzi równość:

$$\measuredangle F K_1 K_2 = \measuredangle F M T_2.$$

Z tych dwóch równości wynika równość:

$$\measuredangle F M T_2 = \measuredangle T_1 M F'. \tag{47}$$

Łatwo dostrzec, że drogą analogiczną można skonstatować równość:

$$\measuredangle F M T_1 = \measuredangle T_2 M F'. \tag{48}$$

Zauważmy przytem, że jeżeli punkt M, będący względem paraboli stale punktem zewnętrznym, porusza się w sposób ciągły, to kierunki ramion $M T_1$, $M T_2$ i kierunek wektora $\overline{M F}$ zmieniają się w sposób ciągły. Stąd wynika, że równości (47) i (48) są nietylko wynikiem wyboru zewnętrznego punktu M, dokonanego na fig. 61, ale że zachodzą przy każdej pozycji tego punktu nazewnątrz paraboli. Doszliśmy więc do następującego t w i e r d z e n i a.

Jeżeli przez punkt M, leżący nazewnątrz paraboli, przeprowadzimy dwie styczne do paraboli oraz punkt ten połączymy z ogniskiem paraboli odcinkiem prostolinjowym, to ramiona stycznych, skierowane od punktu M do punktów styczności, oraz wektory, z których jeden prowadzi od wierzchołka paraboli do jej ogniska, drugi zaś od punktu M do tegoż ogniska, mieć będą

własność następującą. Bezwzględny kąt dowolnie wybranego z rzeczonych dwóch ramion i dowolnie wybranego z rzeczonych dwóch wektorów równa się bezwzględnemu kątowi drugiego z rzeczonych dwóch ramion i drugiego z rzeczonych dwóch wektorów.

§ 32. Spółrzędne eliptyczne.

W § 1 z równania:

$$\eta r + \eta' r' = 2a \tag{49}$$

wyprowadziliśmy równania kanoniczne elipsy i hiperboli. Założymy, że równanie (49) przedstawia elipsę, t.j. że zachodzi nierówność $a > c$, i zajmiemy się obecnie równaniem:

$$\eta r + \eta' r' = 2a + 2k, \tag{50}$$

w którem k oznacza zmienny parametr rzeczywisty. Przy rozmaitych wartościach parametru k równanie (50) przedstawia rozmaite linje krzywe stopnia drugiego. Jeżeli wprowadzimy ten sam układ spółrzędnych prostolinjowych prostokątnych x, y, który stosowaliśmy w § 1, to otrzymamy z równania (50) równanie:

$$[(a+k)^2 - c^2]\, x^2 + (a+k)^2\, y^2 = (a+k)^2\, [(a+k)^2 - c^2], \tag{51}$$

a korzystając z wiadomego związku:

$$a^2 - c^2 = b^2$$

i stosując zamiast parametru k parametr λ, określony wzorem:

$$\lambda = -(k^2 + 2ka),$$

będziemy mogli równanie (51) doprowadzić do postaci:

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1. \tag{52}$$

Rozważymy, jakie krzywe przedstawia to równanie, gdy λ przyjmuje wszystkie możliwe wartości rzeczywiste. Niech będzie naprzód $\lambda < b^2$, a więc także $\lambda < a^2$. Przy każdem takiem λ równanie (52) przedstawia elipsę, a wszystkie te elipsy mają te same

ogniska, czyli, jak mówić będziemy, są elipsami spółogniskowemi. Jeżeli λ dąży do wartości b^2, to równanie (52) dąży do równania:

$$y^2 = 0,$$

t.j. równania, określającego oś x-ów. Gdy λ spełnia nierówność $a^2 > \lambda > b^2$, wówczas równanie (52) przedstawia hiperbolę, a wszystkie hiperbole, określone przez to równanie przy tych wartościach parametru λ, mają wspólne ogniska, będące przytem wspólnemi ogniskami elips, o których była mowa. Mówić będziemy, że rzeczone hiperbole są hiperbolami spółogniskowemi. Gdy λ dąży do a^2, wówczas równanie (52) dąży do równania:

$$x^2 = 0,$$

t.j. do równania, określającego oś y-ów. Gdy wreszcie λ spełnia nierówność $\lambda > a^2$, wówczas równanie (52) przedstawia elipsę urojoną.

Niech będzie teraz na płaszczyźnie rzeczywisty właściwy punkt dowolny M o spółrzędnych prostokątnych x, y. Zapytujemy, jak wyznaczyć ewentualnie istniejące rzeczywiste wartości parametru λ, przy których równanie (52) przedstawia linje krzywe, przechodzące przez punkt M. W tym celu rozwiążemy równanie (52) względem λ. Równanie to można napisać w postaci:

$$\lambda^2 - (a^2 + b^2 - x^2 - y^2)\,\lambda + a^2 b^2 - b^2 x^2 - a^2 y^2 = 0,$$

a więc otrzymujemy z niego wyrażenia:

$$(53) \qquad \lambda = \frac{a^2 + b^2 - x^2 - y^2}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2 - x^2 - y^2}{2}\right)^2 + b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2}.$$

Łatwo sprawdzić, że zachodzą równości:

$$a^2 - \frac{a^2 + b^2 - x^2 - y^2}{2} = \frac{x^2 + y^2 + c^2}{2},$$

$$b^2 - \frac{a^2 + b^2 - x^2 - y^2}{2} = \frac{x^2 + y^2 - c^2}{2},$$

$$\frac{(a^2+b^2-x^2-y^2)^2}{4}+b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=$$

$$=\frac{(x^2+y^2+c^2-2a^2)^2}{4}+(a^2-c^2)x^2+a^2y^2-a^2(a^2-c^2)=$$

$$=\left(\frac{x^2+y^2+c^2}{2}\right)^2-c^2x^2,$$

$$\frac{(a^2+b^2-x^2-y^2)^2}{4}+b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=$$

$$=\frac{(x^2+y^2-c^2-2b^2)^2}{4}+b^2x^2+(b^2+c^2)y^2-b^2(b^2+c^2)=$$

$$=\left(\frac{x^2+y^2-c^2}{2}\right)^2+c^2y^2,$$

na podstawie których dochodzimy do następujących wzorów dla wielkości λ, określonych wzorem (53):

$$(54)\quad \begin{cases} a^2-\lambda=\dfrac{x^2+y^2+c^2}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{x^2+y^2+c^2}{2}\right)^2-c^2x^2}, \\ b^2-\lambda=\dfrac{x^2+y^2-c^2}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{x^2+y^2-c^2}{2}\right)^2+c^2y^2}. \end{cases}$$

Z drugiego z przytoczonych wzorów wynika, że obie wartości na λ, czyniące zadość równaniu (52), są rzeczywiste dla każdego rzeczywistego punktu x, y. Przez dany punkt x, y przechodzą zatem w ogólności dwie różne od siebie krzywe, przedstawione równaniami kategorji (52). Oznaczmy przez u wartość parametru λ, odpowiadającą górnemu znakowi przed pierwiastkiem, a przez v wartość parametru λ, odpowiadającą dolnemu znakowi przed pierwiastkiem. Widzimy, że a^2-u jest zawsze wielkością dodatnią. Co się tyczy b^2-u, to przy spełnieniu nierówności $y^2\neq 0$ wielkość ta też jest dodatnią. Gdy $y^2=0$, wówczas $b^2-u>0$ przy spełnieniu nierówności $x^2>c^2$, a gdy $x^2\leqslant c^2$, wówczas $b^2-u=0$. Co się tyczy wartości v na λ, to przy spełnieniu nierówności $x^2\neq 0$ zachodzi nierówność $a^2-v>0$, a przy spełnieniu równości $x^2=0$, zachodzi równość $a^2-v=0$. Wielkość b^2-v jest ujemna, gdy $y^2\neq 0$; gdy zaś $y^2=0$, wówczas przy spełnieniu

warunku $x^2 \geqslant c^2$ zachodzi równość $b^2 - v = 0$, a przy spełnieniu warunku $x^2 < c^2$ zachodzi nierówność $b^2 - v < 0$.

Z rozważania, które przeprowadziliśmy, wynikają rezultaty, które sformułujemy jak następuje. Przypuśćmy naprzód, że punkt M nie leży na żadnej z osi spółrzędnych. Wówczas wartości u na λ odpowiada pewna elipsa, a wartości v na λ pewna hiperbola, które obie przechodzą przez punkt M. Gdy punkt M leży na osi x-ów i mamy $x^2 > c^2$, wówczas przez punkt M przechodzi

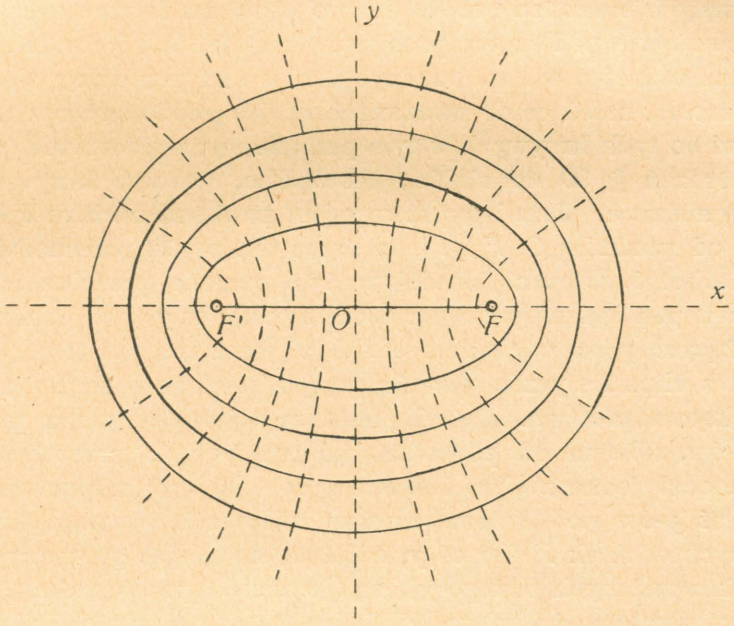

Fig. 62.

elipsa, odpowiadająca wartości u na λ, ale niema hiperboli, przechodzącej przez ten punkt i przytem wartości v odpowiadają punkty osi x-ów, spełniające warunek $x^2 > c^2$. Gdy zaś $x^2 < c^2$, wartości u odpowiada odcinek, łączący ogniska oznaczone literami F i F', zaś wartości v hiperbola. Przez żaden z punktów $x^2 = c^2$ osi x-ów nie przechodzi żadna z elips, ani żadna z hiperbol równania (52). Gdy M leży na osi y-ów i nie jest początkiem układu, wówczas wartości u odpowiada elipsa, przechodząca przez punkt M, a wartości v oś y-ów, gdy zaś M leży w początku układu, wówczas wartości u odpowiada odcinek $F F'$, a wartości v oś y-ów.

Figura 62 przedstawia miejsca geometryczne, określone równaniem (52) dla różnych wartości parametru λ, przytem wartościom u odpowiadają miejsca geometryczne narysowane linjami ciągłemi, a wartościom v miejsca geometryczne narysowane linjami przerywanemi. Odcinek FF' należy do miejsc geometrycznych pierwszej kategorji, a ramiona osi x-ów, leżące poza tym odcinkiem, do miejsc drugiej kategorji. Przypuśćmy teraz, że w punkcie x, y, który nie jest żadnem z ognisk F i F', przeprowadzone są styczne do miejsc geometrycznych pierwszej i drugiej kategorji, przechodzących przez ten punkt. Łatwo dostrzec, że rzeczone styczne przecinają się pod kątem prostym. Istotnie, jeżeli punkt x, y nie leży na żadnej z osi spółrzędnych, to w nim przecinają się elipsa i hiperbola, należące do uważanych miejsc geometrycznych, styczne zaś do tych krzywych w tym punkcie są na podstawie jednego z twierdzeń § 30 do siebie prostopadłe, bowiem krzywe te są spółogniskowe. Jeżeli punkt x, y jest punktem odcinka FF', różnym od punktów O, F i F', to przez ten punkt przechodzi jedna z hiperbol i styczna do niej w tym punkcie przecina rzeczony odcinek pod kątem prostym. Jeżeli punkt x, y jest punktem osi x, leżącym poza odcinkiem FF', to przez ten punkt przechodzi jedna z elips i styczna do niej w tym punkcie przecina oś x-ów pod kątem prostym. Jeżeli punkt x, y jest jednym z punktów osi y-ów, różnym od początku spółrzędnych, to przez ten punkt przechodzi jedna z elips i styczna do niej w tym punkcie przecina oś y-ów pod kątem prostym. Wreszcie w początku spółrzędnych odcinek FF' i oś y, należące do miejsc geometrycznych dwóch uważanych kategoryj, są do siebie prostopadłe. Zaznaczamy przytem, że własność, którą tutaj skonstatowaliśmy, nie zachodzi tylko w ogniskach F i F'.

Zapytamy teraz, jak dla układu wartości u, v otrzymać układy wartości x i y. Chodzi tu o wyznaczenie x i y z układów równań:

$$(55) \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2-u}+\dfrac{y^2}{b^2-u}=1, \\ \dfrac{x^2}{a^2-v}+\dfrac{y^2}{b^2-v}=1, \end{cases}$$

w których parametry u i v spełniają nierówności:

$$(56) \qquad \begin{cases} u \leqslant b^2, \\ b^2 \leqslant v \leqslant a^2. \end{cases}$$

Rozwiązując układ (55) względem x^2 i y^2, otrzymujemy:

$$x^2 = \frac{(a^2 - u)(a^2 - v)}{c^2},$$

$$y^2 = \frac{(b^2 - u)(v - b^2)}{c^2},$$

a wyciągając kwadratowe pierwiastki, dochodzimy do wzorów:

$$(57) \qquad \begin{cases} x = \frac{\varepsilon}{c} \sqrt{(a^2 - u)(a^2 - v)}, \\ y = \frac{\eta}{c} \sqrt{(b^2 - u)(v - b^2)}, \end{cases}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$ i $\eta = \pm 1$. Dla wartości u, v, spełniających nierówności (56) z wyłączeniem równości, wzory (57) określają cztery punkty na płaszczyźnie symetrycznie położone względem osi x i y. Gdy zachodzi równość $u = b^2$, ale nie zachodzi żadna z równości drugiego wiersza wzorów (56), a także, gdy zachodzi równość $v = b^2$, ale nie zachodzi równość pierwszego wiersza wzorów (56), wówczas wzory (57) określają dwa punkty osi x-ów symetrycznie położone względem początku spółrzędnych, ale różne od ognisk F i F'. Gdy zachodzi równość $v = a^2$, ale nie zachodzi równość pierwszego wiersza wzorów (56), wówczas wzory (57) określają dwa punkty osi y-ów symetrycznie położone względem początku spółrzędnych. Gdy $u = b^2$, $v = a^2$, wówczas wzory (57) określają początek spółrzędnych, a gdy wreszcie $u = v = b^2$, określają dwa ogniska F i F'.

Wielkości u, v, których własności tutaj rozważyliśmy, nazywają się spółrzędnemi eliptycznemi. Z przeprowadzonych rozważań wynika, że wielkości te wogóle nie określają jednowartościowo punktów płaszczyzny. Jeżeli jednak prócz wielkości u, v zastosujemy pewne dane dodatkowe, to otrzymamy tą drogą system jednowartościowego określania położenia punktu na płaszczyźnie. Osie spółrzędnych x, y dzielą płaszczyznę na cztery

obszary dwuwymiarowe, mianowicie prawy obszar górny, prawy obszar dolny, lewy obszar górny, lewy obszar dolny. Nadto początek spółrzędnych dzieli każdą z osi na ramię dodatnie i ramię ujemne. Otóż, jeżeli dane wartości wielkości u, v nie spełniają żadnej z równości wzorów (56), a spełniają nierówności tych wzorów, to dla jednowartościowego określenia punktu płaszczyzny wystarcza dodać, w którym z rzeczonych obszarów dwuwymiarowych punkt ten jest położony. Jeżeli zaś dane wartości wielkości u, v spełniają warunki (56), ale nie należą do poprzedniej kategorji i nie spełniają jednocześnie równości $u = b^2$, $v = a^2$, to punkty im odpowiadające leżą na jednej z osi spółrzędnych i dla jednowartościowego określenia punktu wystarcza podać ramię rzeczonej osi, na którem jest on położony. Przy jednoczesnem spełnieniu równości $u = b^2$, $v = a^2$ wzory (57) określają jedną parę wartości na x i y.

§ 33. Ogólne rachunki i twierdzenia, dotyczące ognisk i kierownic.

Niech będzie w prostolinjowym układzie spółrzędnych x, y, którego oś y tworzy z osią x kąt ϑ, równanie stopnia drugiego:

$$f(x, y) = 0, \tag{58}$$

gdzie, jak stale zakładaliśmy, wszystkie spółczynniki są rzeczywiste. Przypuśćmy, że można liczby zespolone $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ oraz liczby zespolone g, h, k, z których dwie pierwsze czynią zadość warunkowi:

$$\Phi(-h, g) = g^2 + h^2 - 2\,g\,h\cos\vartheta \neq 0, \tag{59}$$

wyznaczyć w taki sposób, że wielomian:

$$\bar{f}(x, y) = \Phi(x - \mathfrak{a}, y - \mathfrak{b}) - (g\,x + h\,y + k)^2$$

różni się tylko czynnikiem stałym od wielomianu $f(x, y)$ i niech będzie równanie:

$$\bar{f}(x, y) = 0. \tag{60}$$

Jeżeli wielomian $\bar{f}(x, y)$ napiszemy w postaci:

(61) $\overline{f}(x, y) = \overline{A}\,x^2 + 2\,\overline{B}\,x\,y + \overline{C}\,y^2 + 2\,\overline{D}\,x + 2\,\overline{E}\,y + \overline{F},$

to mieć będziemy dla spółczynników $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}, \overline{E}, \overline{F}$ wzory:

$$(62)\quad \begin{cases} \overline{A} = 1 - g^2, \quad \overline{B} = \cos\vartheta - g\,h, \quad \overline{C} = 1 - h^2, \\ \overline{D} = -(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\cos\vartheta + g\,k), \quad \overline{E} = -(\mathfrak{a}\cos\vartheta + \mathfrak{b} + h\,k), \\ \overline{F} = \Phi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) - k^2. \end{cases}$$

Jeżeli oznaczymy dla tego systemu spółczynników symetryczne wyznaczniki drugiego stopnia odpowiednio znakami $\overline{\delta}, \overline{\delta}', \overline{\delta}''$, to otrzymamy wyrażenia:

$$(63)\quad \begin{cases} \overline{\delta} = \sin^2\vartheta - \Phi(-h, g), \\ \overline{\delta}' = \mathfrak{a}^2\sin^2\vartheta - k^2 - h^2\,\Phi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) - 2\,h\,k\,(\mathfrak{a}\cos\vartheta + \mathfrak{b}), \\ \overline{\delta}'' = \mathfrak{b}^2\sin^2\vartheta - k^2 - g^2\,\Phi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) - 2\,g\,k\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\cos\vartheta). \end{cases}$$

Wyznacznik symetryczny trzeciego stopnia tegoż systemu spółczynników (62) określa się wzorem:

$$(64)\quad \overline{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 - g^2, & \cos\vartheta - g\,h, & -\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\cos\vartheta - g\,k \\ \cos\vartheta - g\,h, & 1 - h^2, & -\mathfrak{a}\cos\vartheta - \mathfrak{b} - h\,k \\ -\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\cos\vartheta - g\,k, & -\mathfrak{a}\cos\vartheta - \mathfrak{b} - h\,k, & \Phi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) - k^2 \end{vmatrix}.$$

Jeżeli w tym wyznaczniku wszystkie elementy pierwszego wiersza pomnożymy przez $\mathfrak{a}$, wszystkie elementy drugiego wiersza pomnożymy przez $\mathfrak{b}$ i wreszcie otrzymane iloczyny w każdej kolumnie dodamy do elementów trzeciego wiersza tej kolumny, to otrzymamy wyznacznik:

$$\overline{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 - g^2, & \cos\vartheta - g\,h, & -\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\cos\vartheta - g\,k \\ \cos\vartheta - g\,h, & 1 - h^2, & -\mathfrak{a}\cos\vartheta - \mathfrak{b} - h\,k \\ -g\,(g\,\mathfrak{a} + h\,\mathfrak{b} + k), & -h\,(g\,\mathfrak{a} + h\,\mathfrak{b} + k), & -k\,(g\,\mathfrak{a} + h\,\mathfrak{b} + k) \end{vmatrix}.$$

Jeżeli zaś w tym wyznaczniku wszystkie elementy pierwszej kolumny pomnożymy przez $\mathfrak{a}$, wszystkie elementy drugiej kolumny pomnożymy przez $\mathfrak{b}$ i następnie otrzymane iloczyny w każdym

wierszu dodamy do elementów trzeciej kolumny tego samego wiersza, to łatwo dojdziemy do wzoru:

$$\bar{\Delta} = (g\,\mathfrak{a} + h\,\mathfrak{b} + k)^2 \begin{vmatrix} 1-g^2\ , & \cos\vartheta - g\,h, & -g \\ \cos\vartheta - g\,h, & 1-h^2\ , & -h \\ -g\ , & -h\ , & -1 \end{vmatrix}.$$

Ale mnożąc w wyznaczniku tego wzoru elementy ostatniej kolumny przez $-g$ i dodając rezultaty do elementów pierwszej kolumny odpowiednio tych samych wierszy, a także mnożąc w tym wyznaczniku elementy ostatniej kolumny przez $-h$ i dodając wyniki do elementów drugiej kolumny odpowiednio tych samych wierszy, łatwo dojdziemy do wniosku, że ten wyznacznik równa się $-\sin^2\vartheta$. Otrzymujemy zatem na wyznacznik (64) wyrażenie:

$$\bar{\Delta} = -\sin^2\vartheta\,(g\,\mathfrak{a} + h\,\mathfrak{b} + k)^2. \tag{65}$$

Wyznacznik ten jest różny od zera, gdy zachodzi nierówność:

$$g\,\mathfrak{a} + h\,\mathfrak{b} + k \neq 0, \tag{66}$$

jest zaś równy zeru, gdy zachodzi równość:

$$g\,\mathfrak{a} + h\,\mathfrak{b} + k = 0. \tag{67}$$

Łatwo stwierdzić rachunkiem, że w tym ostatnim przypadku można na wyznaczniki $\bar{\delta}'$ i $\bar{\delta}''$ otrzymać wyrażenia:

$$\begin{cases} \bar{\delta}' = \mathfrak{a}^2\,[\sin^2\vartheta - \Phi(-h, g)], \\ \bar{\delta}'' = \mathfrak{b}^2\,[\sin^2\vartheta - \Phi(-h, g)]. \end{cases} \tag{68}$$

Równanie (60) napiszemy teraz w innej postaci. Stosując mianowicie wzór:

$$r = \sqrt{\Phi(x-\mathfrak{a}, y-\mathfrak{b})}, \tag{69}$$

będziemy mogli równanie (60) zastąpić równaniem:

$$r^2 = (g\,x + h\,y + k)^2,$$

z którego otrzymamy:

$$r = \zeta\,(g\,x + h\,y + k), \tag{70}$$

gdzie ζ ma tę z wartości ± 1, przy której amplituda zasadnicza prawej strony jest mniejsza od π. Jeżeli następnie zastosujemy wielkość stałą, określoną wzorem:

$$e = \frac{\sqrt{\Phi(-h, g)}}{|\sin \vartheta|}, \tag{71}$$

oraz wielkość zmienną, określoną wzorem:

$$\rho = \frac{(gx + hy + k)\,|\sin \vartheta|}{\zeta \sqrt{\Phi(-h, g)}}, \tag{72}$$

to będziemy mogli równanie (70) napisać w postaci:

$$r = e\rho. \tag{73}$$

Wielkość r jest długością wektora, łączącego punkt o spółrzędnych $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ z punktem o spółrzędnych x, y, a wielkość ρ długością prostopadłej, opuszczonej z punktu x, y na prostą, określoną równaniem:

$$gx + hy + k = 0. \tag{74}$$

Równanie (73) orzeka, że stosunek długości r i ρ jest dla wszystkich punktów krzywej (58) stały i równy e.

Gdy liczby zespolone $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, g, h, k$ czynią zadość, przy spełnieniu nierówności (59), warunkowi, by równanie (60) było tym samym związkiem pomiędzy x i y, co równanie (58), wówczas punkt o spółrzędnych $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ nazywa się ogniskiem krzywej stopnia drugiego (58), prosta określona równaniem (74) kierownicą tej linji krzywej, a wielkość e, obliczona na podstawie wzoru (71), mimośrodem tej linji krzywej. Mogą ewentualnie istnieć rozmaite układy rzeczonych liczb zespolonych, przy których zachodzi równoważność związków (58) i (60). Ognisko, kierownicę i mimośród, wynikające z pewnego określonego układu tych liczb nazywać będziemy systemem należących do siebie ogniska, kierownicy i mimośrodu albo wprost systemem ogniskowym. W § 3 poznaliśmy jeden system ogniskowy, należący do paraboli, a w § 29 dwa systemy ogniskowe, należące do elipsy i również dwa, należące do hiperboli. Ogniska, kierownice i mimośrody tych systemów są wszystkie rzeczywiste. W dalszym ciągu postaramy się wyznaczyć wszystkie możliwe

systemy ognisk, kierownic i mimośrodów krzywych stopnia drugiego i przekonamy się, że wśród nich istnieją systemy, określające się częściowo także liczbami urojonemi.

Obecnie zajmiemy się wyprowadzeniem pewnych wniosków, wynikających ze wzorów niniejszego paragrafu. Równania (60) i (58) określają ten sam związek pomiędzy x i y, gdy istnieje taki różny od zera czynnik m, że zachodzą tożsamościowo wartości:

$$(75)\qquad \begin{cases} \overline{A} = m\,A, & \overline{B} = m\,B, & \overline{C} = m\,C, \\ \overline{D} = m\,D, & \overline{E} = m\,E, & \overline{F} = m\,F. \end{cases}$$

Otóż udowodnimy naprzód, że czynnik m jest we wszystkich przypadkach liczbą rzeczywistą. W tym celu napiszemy równości pierwszego wiersza wzorów (75) w postaci:

$$(76)\qquad 1 - g^2 = m\,A, \quad \cos\vartheta - g\,h = m\,B, \quad 1 - h^2 = m\,C.$$

Widać bezpośrednio, że zapomocą dwóch zmiennych rzeczywistych u, v można treść równości (76) wyrazić związkiem tożsamościowym:

$$(77)\qquad \Phi(u, v) - (g\,u + h\,v)^2 = m\,\varphi(u, v),$$

a jeżeli liczby zespolone g, h, m przedstawimy w formie:

$$g = g' + i\,g'', \quad h = h' + i\,h'', \quad m = m' + i\,m'',$$

gdzie litery z jednym i z dwoma akcentami oznaczają liczby rzeczywiste, to związek ten można będzie zastąpić związkami:

$$(78)\qquad \begin{cases} \Phi(u, v) - (g'\,u + h'\,v)^2 + (g''\,u + h''\,v)^2 = m'\,\varphi(u, v), \\ \qquad\qquad - 2\,(g'\,u + h'\,v)\,(g''\,u + h''\,v) = m''\,\varphi(u, v). \end{cases}$$

Jeżelibyśmy założyli, że m jest liczbą urojoną, t.j. że $m'' \neq 0$, to ze związków (78) otrzymalibyśmy przez rugowanie formy $\varphi(u, v)$ związek:

$$(79)\qquad \Phi(u, v) - (g'\,u + h'\,v)^2 + (g''\,u + h''\,v)^2 + \\ + 2\,\frac{m'}{m''}\,(g'\,u + h'\,v)\,(g''\,u + h''\,v) = 0,$$

który tak samo jak poprzednie, winien zachodzić przy wszelkich rzeczywistych wartościach zmiennych u, v. Ale w przypadku $\delta > 0$ na podstawie drugiej z równości (78) wnosimy, że założenie $m'' \neq 0$ prowadzi do sprzeczności, bo w tym przypadku formy $\varphi(u, v)$ nie można rozłożyć na dwa rzeczywiste czynniki pierwszego stopnia względem u, v. W przypadkach zaś $\delta \leqslant 0$ z drugiej z równości (78) wnosimy, że przy założeniu $m'' \neq 0$, liczby g' i h' nie mogą być obie jednocześnie zerami, a przyjmując w związku (79) $u : v = -h' : g'$ dochodzimy do wyniku:

$$\Phi(-h', g') + (g' h'' - h' g'')^2 = 0,$$

który widocznie jest sprzecznością. Zatem udowodniliśmy, że czynnik m jest liczbą rzeczywistą.

Ze wzoru (65) na $\bar{\Delta}$ wynikają dwa wnioski następujące. Każdy system ogniskowy istotnej krzywej stopnia drugiego ma własność, że jego ognisko nie leży na jego kierownicy. Każdy system ogniskowy pary linij prostych ma własność, że jego ognisko leży na jego kierownicy.

Na podstawie wzoru (71) z pierwszego ze wzorów (63) wynika wniosek następujący. Każdy system ogniskowy linji krzywej stopnia drugiego rodzaju parabol ma własność, że należący do niego mimośród równa się jedności.

Wreszcie z pierwszego ze wzorów (63) oraz ze wzorów (68) wynika wniosek. Jeżeli para linij prostych o wspólnym dwukierunku posiada system ogniskowy, to jest prostą podwójną.

Załóżymy teraz, że równanie (58) przedstawia istotną krzywą stopnia drugiego. Wskutek proporcjonalności, zachodzącej pomiędzy spółczynnikami wielomianu $f(x, y)$ i wielomianu $\bar{f}(x, y)$, mamy równość:

$$(80) \qquad m f(x, y) = \Phi(x - \mathfrak{a}, y - \mathfrak{b}) - (g x + h y + k)^2,$$

gdzie m jest liczbą stałą rzeczywistą, różną od zera. Jeżeli zastosujemy oznaczenia:

$$(81) \qquad \begin{cases} \alpha = A\,\mathfrak{a} + B\,\mathfrak{b} + D, \\ \beta = B\,\mathfrak{a} + C\,\mathfrak{b} + E, \\ \gamma = D\,\mathfrak{a} + E\,\mathfrak{b} + F, \end{cases}$$

to mieć będziemy wzory:

$$(82)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=\mathfrak{a}\\ y=\mathfrak{b}}}, \quad \beta = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=\mathfrak{a}\\ y=\mathfrak{b}}}, \\ \gamma = f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) - \dfrac{\mathfrak{a}}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=\mathfrak{a}\\ y=\mathfrak{b}}} - \dfrac{\mathfrak{b}}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=\mathfrak{a}\\ y=\mathfrak{b}}} \end{cases}$$

i zważywszy, że zachodzi równość:

$$(83)\qquad f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = -\frac{1}{m}(g\,\mathfrak{a} + h\,\mathfrak{b} + k)^2,$$

otrzymamy na podstawie równości (80), przy zastosowaniu wzorów (82), wyrażenia:

$$\alpha = -\frac{g}{m}(g\,\mathfrak{a} + h\,\mathfrak{b} + k),$$

$$\beta = -\frac{h}{m}(g\,\mathfrak{a} + h\,\mathfrak{b} + k),$$

$$\gamma = -\frac{k}{m}(g\,\mathfrak{a} + h\,\mathfrak{b} + k),$$

z których wynika równość:

$$(84)\qquad \alpha x + \beta y + \gamma = -\frac{g\,\mathfrak{a} + h\,\mathfrak{b} + k}{m}(g\,x + h\,y + k).$$

Z założenia, że krzywa (58) jest istotną krzywą stopnia drugiego, wynika, że suma $g\,\mathfrak{a} + h\,\mathfrak{b} + k$ jest różna od zera, i że wielkość $f(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ jest różna od zera. Zapomocą związków (83) i (84) można równość (80) doprowadzić do postaci:

$$(85)\qquad \Phi(x-\mathfrak{a}, y-\mathfrak{b}) = \frac{m}{f(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}\{f(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\,f(x,y) - (\alpha x + \beta y + \gamma)^2\}.$$

Ze związków (84) i (85) wynika twierdzenie następujące.

Parą stycznych istotnej krzywej stopnia drugiego, przechodzących przez ogniska krzywej, jest para prostych izotropowych, przechodzących przez ten punkt. Punkty styczności tych stycz-

nych leżą na należącej do tego ogniska kierownicy, która jest biegunową ogniska względem rzeczonej linji krzywej.

Niech będzie teraz punkt o spółrzędnych $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ i niech litery α, β, γ, oznaczają wielkości, określone dla tego punktu wzorami (81). Założymy, że spółrzędne tego punktu spełniają nierówności:

$$f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \neq 0, \quad \Phi(-\beta, \alpha) \neq 0 \tag{86}$$

i że dla punktu tego przy wszelkich wartościach wielkości zmiennych x, y zachodzi równość:

$$\Phi(x - \mathfrak{a}, y - \mathfrak{b}) = \sigma [f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) f(x, y) - (\alpha x + \beta y + \gamma)^2], \tag{87}$$

w której σ jest czynnikiem stałym różnym od zera. Równość tę możemy inaczej napisać w postaci:

$$\sigma f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) f(x, y) = \Phi(x - \mathfrak{a}, y - \mathfrak{b}) - [\sqrt{-\sigma}(\alpha x + \beta y + \gamma)]^2, \tag{88}$$

skąd wnosimy, że zachodzi twierdzenie następujące.

Jeżeli styczne do krzywej stopnia drugiego, które przechodzą przez punkt, nie leżący na tej krzywej i mający względem niej właściwą nieizotropową biegunową, tworzą parę izotropowych linij prostych, to punkt ten jest ogniskiem rzeczonej linji krzywej.

§ 34. Wyznaczenie rzeczywistych i urojonych ognisk, kierownic i mimośrodów linij krzywych stopnia drugiego.

Niech będzie naprzód istotna krzywa stopnia drugiego ze środkiem. Jeżeli tę krzywą odniesiemy do spółrzędnych prostolinjowych prostokątnych x, y, których dwukierunki są dwukierunkami głównemi, to mieć będziemy równanie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} = \eta, \tag{89}$$

gdzie a i b są liczbami dodatniemi, a ε i η mają znaczenia $\varepsilon = \pm 1$, $\eta = \pm 1$. Równanie to, zależnie od wartości stałych dodatnich a, b i zależnie od wartości wielkości ε i η, przedstawia, jak wiadomo nam z poprzednich rozdziałów, linję krzywą, należącą do jednej z następujących kategoryj: koło rzeczywiste, koło

urojone samo ze sobą sprzężone, elipsa rzeczywista, elipsa urojona, hiperbola. Zadanie wyznaczenia systemów ogniskowych, które na podstawie umów i definicyj, przyjętych w § 33, należą do tych linij krzywych, możemy traktować łącznie, opierając się na równaniu (89). Przytem zadanie to nie ulegnie istotnemu ograniczeniu, jeżeli założymy, że w przypadkach elipsy rzeczywistej i urojonej $a > b$, a w przypadku hiperboli $\eta = +1$. To znaczy, że w przypadkach elipsy wielka oś elipsy położona jest na osi x, a w przypadku hiperboli rzeczywista oś hiperboli położona jest na osi x.

Przez zastosowanie do równania (89) wzorów (62) i związków (75) otrzymujemy równania:

$$(90)\quad \begin{cases} 1 - g^2 = \dfrac{m}{a^2}, \quad g\,h = 0, \quad 1 - h^2 = \dfrac{m}{\varepsilon\, b^2}, \\ \mathfrak{a} + g\,k = 0, \quad \mathfrak{b} + h\,k = 0, \quad k^2 - \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2 = \eta\, m. \end{cases}$$

Widoczne, że temu układowi równań można uczynić zadość albo przez układ równań:

$$(91)\quad \begin{cases} h = 0, \quad m = \varepsilon\, b^2, \quad 1 - g^2 = \varepsilon \dfrac{b^2}{a^2}, \\ \mathfrak{b} = 0, \quad \mathfrak{a} + g\,k = 0, \quad k^2 - \mathfrak{a}^2 = \varepsilon\,\eta\, b^2, \end{cases}$$

albo też przez układ równań:

$$(92)\quad \begin{cases} g = 0, \quad m = a^2, \quad 1 - h^2 = \dfrac{a^2}{\varepsilon\, b^2}, \\ \mathfrak{a} = 0, \quad \mathfrak{b} + h\,k = 0, \quad k^2 - \mathfrak{b}^2 = \eta\, a^2. \end{cases}$$

Zajmiemy się naprzód układem (91). Zauważymy, że z trzeciego z równań (91) wtedy i tylko wtedy wynika $g = 0$, gdy $\varepsilon = +1$ i $b = a$, t.j. gdy krzywa (89) jest kołem. To znaczy, że wtedy nie może być spełniony warunek (59), czyli że układ równań (91) nie określa żadnych systemów ogniskowych koła, podlegających definicjom i warunkom, podanym w § 33. Jeżeli we wszystkich innych przypadkach skorzystamy z równości:

$$c^2 = a^2 - \varepsilon\, b^2,$$

to otrzymamy:

$$g = \zeta \frac{c}{a}, \tag{93}$$

gdzie $\zeta = \pm 1$. Z innej strony, rugując $\mathfrak{a}$ z dwóch ostatnich równań drugiego wiersza i korzystając z trzeciego z równań pierwszego wiersza, otrzymamy na niewiadomą k dwie wartości, które przedstawimy zapomocą wzoru:

$$k = -\zeta \tau \sqrt{\eta}\, a, \tag{94}$$

gdzie $\tau = \pm 1$. Na podstawie równości (93) i (94) otrzymamy następnie z drugiego z równań drugiego wiersza na niewiadomą $\mathfrak{a}$ wartości:

$$\mathfrak{a} = \tau \sqrt{\eta}\, c.$$

Doszliśmy w ten sposób do wyniku, że krzywa (89), nie będąca kołem, posiada ogniska, określone spółrzędnemi:

$$\mathfrak{a} = \tau \sqrt{\eta}\, c, \quad \mathfrak{b} = 0, \tag{95}$$

kierownice, określone równaniem:

$$x - \tau \sqrt{\eta}\, \frac{a^2}{c} = 0 \tag{96}$$

i mimośród, określony wzorem:

$$e = \frac{c}{a}. \tag{97}$$

Zwracając się teraz do układu równań (92), zauważymy, że z trzeciego z równań pierwszego wiersza tego układu otrzymuje się $h = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\varepsilon = +1$ i $b = a$. Tak samo jak poprzednio dochodzimy do wniosku, że z układu równań (92) nie wynikają żadne systemy ogniskowe koła, czyniące zadość określeniom podanym w § 33. We wszystkich innych przypadkach mieć będziemy:

$$h = \zeta \sqrt{-\varepsilon}\, \frac{c}{b}, \tag{98}$$

gdzie $\zeta = \pm 1$. Jeżeli następnie wyrugujemy $\mathfrak{b}$ z drugiego i trzeciego z równań drugiego wiersza i skorzystamy przytem z trze-

ciego z równań pierwszego wiersza, to otrzymamy na k dwie wartości, które możemy napisać w postaci:

$$k = \zeta \tau \varepsilon \sqrt{-\varepsilon} \sqrt{-\eta}\, b, \tag{99}$$

gdzie $\tau = \pm 1$. Wobec tego z drugiego z równań drugiego wiersza wynikną wartości:

$$\mathfrak{b} = \tau \sqrt{-\eta}\, c.$$

W ten sposób doszliśmy do rezultatu, że linja krzywa, określona równaniem (89), posiada także ogniska, określone spółrzędnemi:

$$\mathfrak{a} = 0, \quad \mathfrak{b} = \tau \sqrt{-\eta}\, c, \tag{100}$$

kierownice, określone równaniem:

$$y + \tau \varepsilon \sqrt{-\eta}\, \frac{b^2}{c} = 0, \tag{101}$$

i mimośród, określony wzorem:

$$e = \sqrt{-\varepsilon}\, \frac{c}{b}. \tag{102}$$

Uzyskane rezultaty odnoszą się do trzech kategoryj krzywych stopnia drugiego: elips rzeczywistych, elips urojonych i hiperbol. Rezultaty te sformułujemy teraz osobno dla każdej z tych trzech kategoryj. Przytem będziemy łącznie notować pary systemów, stosując znak podwójny $\tau = \pm 1$. Gdy $\tau = +1$, mięć będziemy jeden z systemów pary, gdy zaś $\tau = -1$, drugi z systemów pary.

Elipsa rzeczywista ma dwa systemy należących do siebie ognisk, kierownic i mimośrodów, określonych równaniami:

$$\begin{cases} \mathfrak{a} = \tau c, \quad \mathfrak{b} = 0, \\ x - \tau \dfrac{a^2}{c} = 0, \quad e = \dfrac{c}{a}. \end{cases} \tag{103}$$

Ogniska, kierownice i wspólny mimośród tych systemów są rzeczywiste. Poznaliśmy już te systemy w § 29. Nadto elipsa rzeczywista ma dwa systemy ogniskowe, określone równaniami:

$$(104)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a} = 0, \quad \mathfrak{b} = \tau i c, \\ y + \tau i \dfrac{b^2}{c} = 0, \quad e = i \dfrac{c}{b}. \end{cases}$$

Ogniska dwóch tych systemów leżą na osi y-ów i są punktami urojonemi ze sobą sprzężonemi. Kierownice tych dwóch systemów są prostemi urojonemi ze sobą sprzężonemi równoległemi do osi x-ów. Wreszcie wspólny mimośród jest liczbą urojoną o amplitudzie zasadniczej równej $+\frac{\pi}{2}$.

Elipsa urojona ma dwa systemy należących do siebie ognisk, kierownic i mimośrodów, określonych równaniami:

$$(105)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a} = \tau i c, \quad \mathfrak{b} = 0, \\ x - \tau i \dfrac{a^2}{c} = 0, \quad e = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Ogniska tych systemów są punktami urojonemi ze sobą sprzężonemi, położonemi na osi x-ów, kierownice zaś są prostemi urojonemi ze sobą sprzężonemi, równoległemi do osi y-ów. Wspólny mimośród jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Nadto elipsa urojona ma dwa systemy ogniskowe, określone równaniami:

$$(106)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a} = 0, \quad \mathfrak{b} = \tau c, \\ y + \tau \dfrac{b^2}{c} = 0, \quad e = i \dfrac{c}{b}. \end{cases}$$

Ogniska tych systemów są punktami rzeczywistemi, położonemi na osi y-ów, kierownice zaś są prostemi rzeczywistemi, równoległemi do osi x-ów. Wreszcie wspólny mimośród jest liczbą urojoną o amplitudzie równej $+\frac{\pi}{2}$.

Hiperbola ma dwa systemy należących do siebie ognisk, kierownic i mimośrodów, określonych równaniami:

$$(107)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a} = \tau c, \quad \mathfrak{b} = 0, \\ x - \tau \dfrac{a^2}{c} = 0, \quad e = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Systemy te, mające rzeczywiste ogniska i kierownice oraz wspólny rzeczywisty mimośród, poznaliśmy już w § 29. Hiperbola ma także systemy ogniskowe określone równaniami:

$$(108)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a} = 0, \quad \mathfrak{b} = \tau i c, \\ y - \tau i \dfrac{b^2}{c} = 0, \quad e = \dfrac{c}{b}. \end{cases}$$

Ogniska tych systemów są punktami ze sobą sprzężonemi, leżącemi na osi y-ów, a kierownice są prostemi urojonemi ze sobą sprzężonemi równoległemi do osi x-ów. Wspólny mimośród tych systemów jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

Analogiczną metodę zastosujemy teraz do paraboli, zakładając, że jest ona odniesiona do układu prostokątnego, w którym oś symetrji paraboli łącznie z wybranym na niej kierunkiem dodatnim, prowadzącym do wewnątrz paraboli, jest osią x-ów, a styczna w wierzchołku paraboli jest osią y-ów. Wtedy parabola określona jest równaniem:

$$(109)\qquad y^2 - 2px = 0,$$

w którem p jest dodatnią liczbą stałą. Stosując wzory (62) i związki (75), otrzymujemy równania:

$$(110)\qquad \begin{cases} 1 - g^2 = 0, \quad gh = 0, \quad 1 - h^2 = m, \\ \mathfrak{a} + gk = mp, \quad \mathfrak{b} + hk = 0, \quad k^2 - \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2 = 0. \end{cases}$$

Widoczne, że równania te są równoważne z równaniami:

$$(111)\qquad \begin{cases} g = \zeta, \quad h = 0, \quad m = 1, \\ \mathfrak{a} + \zeta k = p, \quad \mathfrak{b} = 0, \quad k^2 - \mathfrak{a}^2 = 0, \end{cases}$$

w których $\zeta = \pm 1$. Równania pierwsze i ostatnie drugiego wiersza równań (111) dają na k i $\mathfrak{a}$ wartości:

$$k = \zeta \frac{p}{2}, \quad \mathfrak{a} = \frac{p}{2}.$$

Wobec tego otrzymujemy w przypadku paraboli system należących do siebie ogniska, kierownicy i mimośrodu, określony równaniami:

$$(112)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a} = \dfrac{p}{2}, \quad \mathfrak{b} = 0, \\ x + \dfrac{p}{2} = 0, \quad e = 1. \end{cases}$$

System ten poznaliśmy już w § 3. Parabola niema żadnych innych systemów ogniskowych.

Niech będzie teraz para prostych przecinających się. Równanie każdej takiej pary prostych można odnieść do układu spółrzędnych prostokątnych x, y, których początkiem jest punkt przecięcia się tych prostych, a kierunkami osi są prostopadłe do siebie kierunki główne pary. Wtedy mieć będziemy równanie:

$$(113)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} = 0,$$

w którem a i b oznaczają dwie liczby rzeczywiste dodatnie, a $\varepsilon = \pm 1$. Jeżeli zastosujemy wzory (62) i związki (75) do pary prostych (113), to mieć będziemy równania:

$$(114)\qquad \begin{cases} 1 - g^2 = \dfrac{m}{a^2}, \quad g h = 0, \quad 1 - h^2 = \dfrac{m}{\varepsilon b^2}, \\ \mathfrak{a} + g k = 0, \quad \mathfrak{b} + h k = 0, \quad k^2 - \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2 = 0. \end{cases}$$

Te równania będą spełnione albo wtedy, gdy przyjmiemy:

$$(115)\qquad \begin{cases} h = 0, \quad m = \varepsilon b^2, \quad 1 - g^2 = \varepsilon \dfrac{b^2}{a^2}, \\ \mathfrak{b} = 0, \quad \mathfrak{a} + g k = 0, \quad k^2 - \mathfrak{a}^2 = 0, \end{cases}$$

albo też wtedy, gdy przyjmiemy:

$$(116)\qquad \begin{cases} g = 0, \quad m = a^2, \quad 1 - h^2 = \dfrac{a^2}{\varepsilon b^2}, \\ \mathfrak{a} = 0, \quad \mathfrak{b} + h k = 0, \quad k^2 - \mathfrak{b}^2 = 0. \end{cases}$$

Zauważmy, że gdy $a^2 = b^2$ i przytem $\varepsilon = +1$, wówczas i z jednych i z drugich z równań (115) i (116) wynikają wartości $g = 0$, $h = 0$,

t.j. że wówczas nie istnieje żaden system ogniskowy, czyniący zadość określeniom i warunkom, podanym w § 33. Ponieważ zaś równanie (113) przedstawia przy spełnieniu równości $a^2 = b^2$, $\varepsilon = +1$ parę prostych izotropowych, więc dochodzimy do wyniku, że para prostych izotropowych niema żadnego systemu ogniskowego. Przyjmiemy teraz, że ten wyjątkowy przypadek nie zachodzi. Widoczne, że bez istotnego zmniejszenia ogólności możemy przy $\varepsilon = +1$ założyć, że zachodzi nierówność $a > b$. Z trzeciego równania pierwszego wiersza związków (115) otrzymujemy:

$$g = \zeta \frac{\sqrt{a^2 - \varepsilon b^2}}{a},$$

gdzie $\zeta = \pm 1$ i widoczne, że te wartości na g są różne od zera. Ponieważ rugowanie wielkości $\mathfrak{a}$ z równań drugiego i trzeciego, zachodzących w drugim wierszu związków (115), prowadzi do wyniku $(1 - g^2)\, k^2 = 0$, przeto otrzymujemy na $\mathfrak{a}$ i k wartości:

$$\mathfrak{a} = 0, \quad k = 0.$$

Podobnież z trzeciego równania pierwszego wiersza związków (116) wynika:

$$h = \zeta \frac{\sqrt{b^2 - \varepsilon a^2}}{b},$$

gdzie $\zeta = \pm 1$ i te wartości na h są różne od zera. Rugowanie wielkości $\mathfrak{b}$ z równań drugiego i trzeciego, znajdujących się w drugim wierszu związków (116), prowadzi do równania $(1 - h^2)\, k^2 = 0$, a więc dochodzimy do następujących wartości na $\mathfrak{b}$ i k:

$$\mathfrak{b} = 0, \quad k = 0.$$

W ten sposób para prostych, określona równaniem (113) i nie będąca parą prostych izotropowych, ma jeden system ogniskowy, wynikający z równań (115):

$$(117) \qquad \begin{cases} \mathfrak{a} = 0, \quad \mathfrak{b} = 0, \\ x = 0, \quad e = \dfrac{\sqrt{a^2 - \varepsilon b^2}}{a}, \end{cases}$$

a drugi wynikający z równań (116):

$$(118)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a} = 0, \quad \mathfrak{b} = 0, \\ y = 0, \quad e = \dfrac{\sqrt{b^2 - \varepsilon a^2}}{b}. \end{cases}$$

Zauważymy, że początek spółrzędnych jest punktem przecięcia się prostych, określonych równaniem (113), a osie spółrzędnych x, y są dwusiecznemi kątów tych linij prostych. W przypadku gdy $\varepsilon = +1$, t.j. gdy proste (113) są urojone, możemy do osi x zastosować nazwę pierwszej dwusiecznej, a do osi y nazwę drugiej dwusiecznej (zob. § 58 i § 60 tomu I, a w szczególności strony 351 i 367 tego tomu). Wtedy będziemy mogli uzyskane rezultaty scharakteryzować w przypadku $\varepsilon = +1$ jak następuje. Para prostych urojonych przecinających się ma dwa systemy ogniskowe. Każdy z tych systemów ma ognisko w punkcie przecięcia się rzeczonych linij prostych. Kierownicą jednego z tych systemów jest druga dwusieczna i mimośród tego systemu jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Kierownicą drugiego z tych systemów jest pierwsza dwusieczna, a mimośród tego systemu jest liczbą urojoną o amplitudzie równej $+\frac{\pi}{2}$. W przypadku $\varepsilon = -1$, t.j. w przypadku pary prostych przecinających się rzeczywistych, istnieją również dwa systemy ogniskowe. Ogniskiem jest w każdym z tych systemów punkt przecięcia się rzeczonych prostych. Kierownicami są w tych systemach dwusieczne kątów rzeczonej pary prostych, a mimośrodami liczby rzeczywiste dodatnie. Te mimośrody są sobie równe tylko w przypadku $a = b$. Wyniki, odnoszące się do przypadku $\varepsilon = -1$, są wysłowieniem pewnych faktów geometrji elementarnej, których bliższe rozważenie pomijamy.

Wiemy z § 33, że para prostych o wspólnym dwukierunku, nie będąca prostą podwójną, nie posiada żadnego systemu ogniskowego. Rozważymy przeto zadanie wyznaczenia ewentualnie istniejących systemów ogniskowych tylko dla prostej podwójnej. Przyjmiemy, że układ spółrzędnych prostokątnych wybrany został w taki sposób, że prosta podwójna określona jest równaniem:

$$(119)\qquad y^2 = 0.$$

Stosując wzory (62) i związki (75), mieć będziemy równania:

$$(120)\quad \begin{cases} 1-g^2=0, \quad gh=0, \quad 1-h^2=m, \\ \mathfrak{a}+gk=0, \quad \mathfrak{b}+hk=0, \quad k^2-\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2=0, \end{cases}$$

z których wynikają wartości:

$$g=\zeta, \quad h=0, \quad m=1,$$

$$\mathfrak{a}=-\zeta k, \quad \mathfrak{b}=0,$$

gdzie $\zeta=\pm 1$, a k nie jest skrępowane żadnym warunkiem, jest przeto dowolną liczbą zespoloną. To znaczy, że systemy ogniskowe, należące do prostej podwójnej (119), można przedstawić wzorami:

$$(121)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}=-\zeta k, \quad \mathfrak{b}=0, \\ x+\zeta k=0, \quad e=1. \end{cases}$$

Widzimy więc, że prosta podwójna ma nieskończenie wiele systemów ogniskowych. Wszystkie one mają ten sam mimośród równy jedności, a każdy punkt zespolony prostej podwójnej wraz z prostą, prostopadłą do prostej podwójnej i przez ten punkt przechodzącą, stanowią ognisko i kierownicę do siebie należące.

§ 35. Krzywe stopnia drugiego o wspólnych dwukierunkach głównych oraz analityczne wyprowadzenie i uogólnienie twierdzeń § 31.

Niech będzie linja krzywa stopnia drugiego:

$$(122)\quad f(x,y)=A\,x^2+2\,B\,x\,y+C\,y^2+2\,D\,x+2\,E\,y+F=0$$

i przypomnijmy, że jej dwukierunki główne spełniają równanie:

$$(123)\quad (A\cos\vartheta-B)\,\lambda^2+(A-C)\,\lambda\,\mu+(B-C\cos\vartheta)\,\mu^2=0.$$

Zapytujemy, jakim warunkom muszą czynić zadość spółczynniki równania krzywej stopnia drugiego:

$$(124)\quad \underline{f}(x,y) = \underline{A}\,x^2 + 2\,\underline{B}\,x\,y + \underline{C}\,y^2 + 2\,\underline{D}\,x + 2\,\underline{E}\,y + \underline{F} = 0,$$

ażeby istniała przynajmniej jedna para prostopadłych dwukierunków, które byłyby dwukierunkami głównemi zarówno krzywej (122), jak i krzywej (124). Zachodzi to widocznie zawsze wtedy, gdy bądź jedna z tych linij należy do rodzaju kół, bądź też obie należą do rodzaju kół. Jeżeli krzywa (122) nie jest krzywą rodzaju kół, to żądana własność zachodzi wtedy, gdy istnieje rzeczywisty czynnik M, przy którym spełnione są równości:

$$(125)\quad \begin{cases} \underline{A}\cos\vartheta - \underline{B} = M(A\cos\vartheta - B), \\ \underline{A} - \underline{C} = M(A - C), \\ \underline{B} - \underline{C}\cos\vartheta = M(B - C\cos\vartheta). \end{cases}$$

Stąd łatwo wywnioskować, że wtedy spółczynniki $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ muszą wyrażać się wzorami:

$$(126)\quad \underline{A} = MA + N,\quad \underline{B} = MB + N\cos\vartheta,\quad \underline{C} = MC + N,$$

gdzie N jest wielkością, która w stosunku do M skrępowana jest tylko warunkiem, że wielkości M i N nie mogą być obie jednocześnie zerami. Jeżeli przyjmiemy oznaczenia:

$$\varphi(x,y) = A\,x^2 + 2\,B\,x\,y + C\,y^2,\quad \underline{\varphi}(x,y) = \underline{A}\,x^2 + 2\,\underline{B}\,x\,y + \underline{C}\,y^2,$$

to będziemy mogli treść równości (126) sformułować analitycznie w ten sposób, że dla zachodzenia żądanej własności muszą istnieć takie czynniki stałe M i N, żeby była spełniona tożsamościowo równość:

$$(127)\qquad \underline{\varphi}(x,y) = M\varphi(x,y) + N\Phi(x,y).$$

Jeżeli wyróżnik formy $\underline{\varphi}(x,y)$ oznaczymy przez $\underline{\delta}$, to widocznie mieć będziemy wzór:

$$(128)\qquad \underline{\delta} = \delta M^2 + \omega MN + \sin^2\vartheta\, N^2.$$

Wyrażenie to jest formą stopnia drugiego względem wielkości M i N, a jej wyróżnik jest znaną nam wielkością:

$$\sin^2 \vartheta \, \delta - \frac{1}{4} \omega^2 = -\frac{1}{4} \Omega^2 ,$$

która ma wartość ujemną naskutek założenia, że krzywa (122) nie należy do rodzaju kół. Jeżeli $M = 0$, to $\underline{\delta} > 0$ i przytem ze związków (125) lub ze związku (127) wynika, że krzywa (124) należy do rodzaju kół. Gdy natomiast $M \neq 0$ a stosunek $-N : M$ oznaczymy przez T, to będziemy mogli wzór (128) zastąpić wzorem:

$$\underline{\delta} = M^2 (\sin^2 \vartheta \, T^2 - \omega \, T + \delta) . \tag{129}$$

Jeżeli następnie oznaczymy przez T' i T'' wielkości, które podstawione zamiast T w wyrażenie (129) prowadzą do wyniku $\underline{\delta} = 0$ i przytem spełniają nierówności $T' < T''$, to będziemy mogli powiedzieć, że krzywa (124) należy do rodzaju elips, gdy zachodzi jedna z nierówności $T < T'$, $T > T''$, do rodzaju parabol, gdy zachodzi jedna z równości $T = T'$, $T = T''$, a do rodzaju hiperbol, gdy spełnione są jednocześnie nierówności: $T' < T < T''$.

Załóżmy teraz, że x, y oznaczają spółrzędne prostokątne i przyjmijmy w tych spółrzędnych r ó w n a n i e:

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{\varepsilon q^2} - \eta = 0 , \tag{130}$$

w którem p, q oznaczają wielkości dodatnie, a $\varepsilon = \pm 1$, $\eta = \pm 1$. Wiadomo, że zależnie od wartości wielkości ε i η równanie (130) określa bądź rzeczywistą lub urojoną istotną krzywą rodzaju elips, bądź też hiperbolę. Przyjmiemy nadto, że w przypadkach $\varepsilon = +1$ zachodzi zawsze nierówność $p \neq q$, t.j. że krzywa (130) nie należy do rodzaju kół. Oznaczmy następnie przez a, b spółrzędne dowolnie wybranego właściwego rzeczywistego punktu. Równanie stycznych do krzywej (130), przechodzących przez punkt a, b, można napisać w postaci:

$$\left(\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{\varepsilon q^2} - \eta\right)\left(\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{\varepsilon q^2} - \eta\right) - \left(\frac{a x}{p^2} + \frac{b y}{\varepsilon q^2} - \eta\right)^2 = 0 . \tag{131}$$

Z rozważania, które przeprowadziliśmy na początku tego paragrafu, wynika, że każdą parę prostych, posiadających te same dwusieczne kątów, co styczne (131), można przedstawić zapomocą równania postaci:

$$(132)\qquad M\left\{\left(\frac{a^2}{p^2}+\frac{b^2}{\varepsilon q^2}-\eta\right)\left(\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{\varepsilon q^2}-\eta\right)-\left(\frac{a x}{p^2}+\frac{b y}{\varepsilon q^2}-\eta\right)^2\right\}+N[(x-a)^2+(y-b)^2]=0,$$

gdzie M i N oznaczają spółczynniki rzeczywiste, z których M jest różny od zera. W § 34 wyznaczyliśmy system dwóch ognisk krzywej (130), położonych na osi x-ów, i system dwóch ognisk tej krzywej, położonych na osi y-ów. Przy zastosowaniu oznaczenia:

$$(133)\qquad c=\sqrt{|p^2-\varepsilon q^2|},$$

pierwszy z tych systemów wyrazi się wartościami spółrzędnych:

$$(134)\qquad x=\tau\sqrt{|\eta|}\,c,\quad y=0,\quad (\tau=\pm 1),$$

drugi zaś wartościami spółrzędnych:

$$(135)\qquad x=0,\quad y=\sigma\sqrt{-|\eta|}\,c,\quad (\sigma=\pm 1).$$

Założymy teraz, że punkt a, b nie jest żadnem z ognisk krzywej (130) i zajmiemy się dwoma zapytaniami: 1) czy można tak wyznaczyć spółczynniki M i N, żeby spółrzędne obu ognisk (134) spełniały równanie (132)? 2) czy można tak wyznaczyć spółczynniki M i N, żeby spółrzędne obu ognisk (135) spełniały równanie (132)?

Zwracając się naprzód do pierwszego z tych zapytań, skonstatujemy, że dla wartości spółrzędnych (134) zachodzą równości:

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{\varepsilon q^2}-\eta=-\varepsilon\eta\frac{q^2}{p^2},$$

$$\frac{a x}{p^2}+\frac{b y}{\varepsilon q^2}-\eta=\frac{\tau\sqrt{|\eta|}\,a c}{p^2}-\eta,$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=(a-\tau\sqrt{|\eta|}\,c)^2+b^2.$$

Na podstawie pierwszych dwóch z tych równości obliczymy łatwo, że spółczynnik wielkości M w równaniu (132) będzie wtedy równy wyrażeniu:

$$-\frac{\eta}{p^2}[(a-\tau\sqrt{\eta}\,c)^2+b^2].$$

Ale prostokątny nawias tego wyrażenia jest zawsze różny od zera. Gdy $\eta=+1$, wynika to z założenia, że punkt a, b jest różny od obu ognisk (134). Gdy zaś $\eta=-1$, wówczas nawias ten byłby równy zeru wtedy i tylko wtedy, gdyby jednocześnie zachodziły równości:

$$a=0,\quad b^2=c^2,$$

co jest niemożliwe, bo wówczas punkt a, b byłby jednem z ognisk (135). Zatem otrzymujemy na spółczynniki M i N równanie:

$$\eta M-p^2 N=0,$$

skąd na stosunek $M:N$ wynika wartość, przy której równanie (132) spełnia się dla obu ognisk (134). Dochodzimy przeto do następującego twierdzenia: jeżeli rzeczywisty właściwy punkt a, b nie jest żadnem z ognisk krzywej (130), to para jej stycznych, przez ten punkt przechodzących, i para prostych, łączących ten punkt z ogniskami (134), mają wspólne dwusieczne ich kątów.

Zauważmy, że para prostych, łączących punkt a, b z ogniskami (134), przedstawiona będzie równaniem:

$$\eta p^2\left\{\left(\frac{a^2}{p^2}+\frac{b^2}{\varepsilon q^2}-\eta\right)\left(\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{\varepsilon q^2}-\eta\right)-\left(\frac{a\,x}{p^2}+\frac{b\,y}{\varepsilon q^2}-\eta\right)^2\right\}+(x-a)^2+(y-b)^2=0. \tag{136}$$

Równanie pary prostych, łączących punkt a, b z ogniskami (134), można w innej formie wyprowadzić drogą następującą. Równanie każdej pary prostych, przechodzących przez punkt a, b, można napisać w postaci:

$$l(x-a)^2+2m(x-a)(y-b)+n(y-b)^2=0, \tag{137}$$

gdzie l, m, n oznaczają spółczynniki rzeczywiste, które nie wszystkie jednocześnie są zerami. Jeżeli $b\neq 0$, to warunek, aby proste (137) łączyły punkt a, b z ogniskami (134), wyraża się analitycznie zachodzeniem równości:

$$l(\tau\sqrt{\eta}\,|\,c-a)^2-2\,m\,b\,(\tau\sqrt{\eta}\,|\,c-a)+n\,b^2=0$$

przy obu wartościach $\tau=\pm 1$. Warunek ten jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy jednocześnie spełnione są równości:

$$l(a^2+\eta\,c^2)+2\,m\,a\,b+n\,b^2=0,$$

$$l\,a+m\,b=0.$$

Stąd wynika, że równanie prostych, łączących punkt a, b z ogniskami (134), napisać można w postaci:

$$\begin{vmatrix} (x-a)^2\,, & 2\,(x-a)\,(y-b)\,, & (y-b)^2 \\ a^2+\eta\,c^2\,, & 2\,a\,b\,, & b^2 \\ a\,, & b\,, & 0 \end{vmatrix}=0,$$

lub też, obliczając wyznacznik, w postaci:

(138) $$b^2\,(x-a)^2-2\,a\,b\,(x-a)\,(y-b)+(a^2-\eta\,c^2)\,(y-b)^2=0.$$

Jeżeli $b=0$, to para prostych łączących punkt a, b z ogniskami (134) określona będzie równaniem: $y^2=0$.

Przejdziemy teraz do drugiego z naszych zapytań i sprawdzimy naprzód, że dla wartości spółrzędnych (135) spełnione są równości:

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{\varepsilon\,q^2}-\eta=-\frac{\eta\,p^2}{\varepsilon\,q^2},$$

$$\frac{a\,x}{p^2}+\frac{b\,y}{\varepsilon\,q^2}-\eta=\frac{\sigma\sqrt{-\eta}\,|\,b\,c}{\varepsilon\,q^2}-\eta,$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+(b-\sigma\sqrt{-\eta}\,|\,c)^2.$$

Następnie, korzystając z dwóch pierwszych z tych równości, skonstatujemy, że spółczynnik przy M w równaniu (132) będzie wtedy równy wyrażeniu:

$$-\frac{\eta}{\varepsilon\,q^2}\,[a^2+(b-\sigma\sqrt{-\eta}\,|\,c)^2].$$

Gdy $\eta=-1$, wówczas prostokątny nawias tego wyrażenia jest różny od zera, bo punkt a, b jest różny od obu ognisk (135). Gdy

zaś $\eta = +1$, wówczas nawias ten jest także różny od zera, bo dla znikania tego nawiasu musiałyby zachodzić jednocześnie równości:

$$a^2 = c^2, \quad b = 0,$$

co sprzeciwia się założeniu, że punkt a, b nie jest żadnem z ognisk (134). Dochodzimy przeto do równania:

$$\eta M - \varepsilon q^2 N = 0$$

i przy otrzymującej się stąd wartości stosunku $M : N$ równanie (132) spełnia się dla spółrzędnych obu ognisk (135). Udowodniliśmy przeto twierdzenie następujące: jeżeli rzeczywisty właściwy punkt a, b nie jest żadnem z ognisk krzywej (130), to para jej stycznych, przechodzących przez ten punkt i para linij prostych, łączących ten punkt z ogniskami (135), mają wspólne dwusieczne ich kątów.

Równanie pary prostych, łączących punkt a, b z ogniskami (135), można przedstawić albo w postaci:

$$(139) \qquad \eta \varepsilon q^2 \left\{ \left(\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{\varepsilon q^2} - \eta \right) \left(\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{\varepsilon q^2} - \eta \right) - \left(\frac{a x}{p^2} + \frac{b y}{\varepsilon q^2} - \eta \right)^2 \right\} + (x-a)^2 + (y-b)^2 = 0,$$

albo też w postaci, którą otrzymać można z równania (137) drogą analogiczną do zastosowanej odnośnie do zapytania 1). Jeżeli $a \neq 0$, to spółczynniki l, m, n równania (137) powinny być wybrane w taki sposób, żeby równość:

$$l a^2 - 2 m a (\sigma \sqrt{-\eta}\, c - b) + n (\sigma \sqrt{-\eta}\, c - b)^2 = 0$$

spełniona była przy obu wartościach $\sigma = \pm 1$. Warunek ten można zastąpić jednoczesnem zachodzeniem dwóch równości:

$$l a^2 + 2 m a b + n (b^2 - \eta c^2) = 0,$$

$$m a + n b = 0,$$

z których wnosimy, że żądane równanie pary prostych można napisać w postaci:

$$\begin{vmatrix} (x-a)^2 , & 2(x-a)(y-b) , & (y-b)^2 \\ a^2 , & 2ab , & b^2 - \eta c^2 \\ 0 , & a , & b \end{vmatrix} = 0 ,$$

albo też w postaci:

(140) $$(b^2 + \eta c^2)(x-a)^2 - 2ab(x-a)(y-b) + a^2(y-b)^2 = 0 .$$

W przypadku, gdy $a = 0$, para linij prostych, łączących punkt a, b z ogniskami (135), określona jest równaniem: $x^2 = 0$.

Można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że równania (136) i (138) określają ten sam związek pomiędzy x i y. Podobnież można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że równania (139) i (140) są tym samym związkiem pomiędzy zmiennemi x i y. Sprawdzenia te pozostawiamy czytelnikowi.

Niech teraz będzie w spółrzędnych prostokątnych x, y równanie paraboli:

(141) $$y^2 = 2px .$$

Przyjmiemy, że a, b oznaczają spółrzędne dowolnie wybranego właściwego rzeczywistego punktu, różnego od ogniska paraboli (141). Styczne tej linji krzywej, przechodzące przez punkt a, b, określone będą równaniem:

(142) $$(b^2 - 2pa)(y^2 - 2px) - (px - by + pa)^2 = 0 .$$

Każdą parę linij prostych, mających te same dwusieczne kątów, co styczne (142), można przedstawić zapomocą równania:

(143) $$M[(b^2 - 2pa)(y^2 - 2px) - (px - by + pa)^2] + N[(x-a)^2 + (y-b)^2)] = 0 ,$$

gdzie M i N oznaczają spółczynniki rzeczywiste, z których M jest różny od zera. Spółczynniki te określimy w taki sposób, żeby jedna z prostych (143) przechodziła przez ognisko paraboli, t.j. przez punkt o spółrzędnych:

(144) $$x = \frac{p}{2}, \quad y = 0 .$$

Przy tych wartościach spółrzędnych zachodzą równości:

$$y^2 - 2px = -p^2,$$

$$px - by + pa = p\left(\frac{p}{2} + a\right),$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \left(\frac{p}{2} - a\right)^2 + b^2.$$

Z pierwszych dwóch z tych równości wynika, że spółczynnik przy M w równaniu (143) równa się wyrażeniu:

$$-p^2\left[\left(\frac{p}{2} - a\right)^2 + b^2\right],$$

a ponieważ nawias tego wyrażenia jest różny od zera, bo punkt a, b nie jest ogniskiem paraboli, przeto otrzymujemy na spółczynniki M i N warunek:

$$-p^2 M + N = 0,$$

skąd wynika, że równanie pary prostych (143), z których jedna przechodzi przez ognisko (144), jest:

$$(145) \quad (b^2 - 2pa)(y^2 - 2px) - (px - by + pa)^2 + p^2[(x-a)^2 + (y-b)^2] = 0.$$

Zauważmy z innej strony, że równanie prostej, przechodzącej przez punkt a, b i przez ognisko (144), jest:

$$(146) \quad p(y-b) + 2(bx - ay) = 0$$

i że równanie prostej, przechodzącej przez punkt a, b i mającej dwukierunek asymptotyczny paraboli jest:

$$(147) \quad y - b = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że para prostych (145) składa się z prostej (146) i z prostej (147); dochodzimy przeto do następującego twierdzenia: jeżeli rzeczywisty właściwy punkt a, b nie jest ogniskiem paraboli, to para jej stycznych, przechodzących przez ten punkt i para prostych, z których jedna łączy punkt a, b z ogniskiem paraboli, druga zaś jest przechodzącą przez ten punkt prostą o asymptotycznym dwukierunku, mają wspólne dwusieczne ich kątów.

W § 31 wyprowadziliśmy na drodze geometrycznej dla elips rzeczywistych, hiperbol i parabol twierdzenia, które odnoszą się do par prostych rzeczywistych, spotykających się w punktach zewnętrznych odpowiednich linij krzywych i mają wspólną nazwę twierdzeń Poncelet'a. W paragrafie bieżącym udowodniliśmy na drodze analitycznej trzy twierdzenia, które są z jednej strony inną formą twierdzeń poprzednio wyprowadzonych, z drugiej zaś są ich uogólnieniem pod kilkoma względami. Odnoszą się one mianowicie nie tylko do punktów zewnętrznych, ale także do punktów wewnętrznych krzywych stopnia drugiego, nie tylko do ognisk rzeczywistych, ale także do ognisk urojonych tych linij krzywych, nie tylko wreszcie do elips rzeczywistych, ale także do elips urojonych.

ROZDZIAŁ SZÓSTY.

O linjowych przekształceniach w płaszczyźnie.

§ 36. Wzory zmiany spółrzędnych prostolinjowych.

Niech będą równania:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a + a_1 \bar{x} + a_2 \bar{y}, \\ y = b + b_1 \bar{x} + b_2 \bar{y}, \end{cases}$$

w których a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 oznaczają dane spółczynniki rzeczywiste, spełniające nierówność:

$$(2) \qquad a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0,$$

a x, y i $\bar{x}, \bar{y}$ oznaczają wielkości zmienne. Wtedy równania (1) określają przekształcenie zmiennych $\bar{x}, \bar{y}$ na zmienne x, y i zajmiemy się zapytaniem, jakim warunkom czynić muszą zadość rzeczone spółczynniki tych równań, aby istniały na płaszczyźnie takie dwa układy spółrzędnych prostolinjowych x, y i $\bar{x}, \bar{y}$, żeby przekształcenie (1) było zmianą spółrzędnych tych układów. Z rozważań zawartych w §§ 7 i 9 tomu I-go wynika, że wtedy i tylko wtedy istnieją na płaszczyźnie układy spółrzędnych x, y i $\bar{x}, \bar{y}$, dla których przekształcenie (1) określa zmianę spółrzędnych tych układów, gdy istnieją kąty ϑ, $\bar{\vartheta}$ i φ, które spełniają związki:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin(\vartheta-\varphi)}{\sin\vartheta}=a_1, & \dfrac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}=b_1, \\ \dfrac{\sin(\vartheta-\varphi-\overline{\vartheta})}{\sin\vartheta}=a_2, & \dfrac{\sin(\varphi+\overline{\vartheta})}{\sin\vartheta}=b_2. \end{cases}$$

Przez rugowanie z pierwszych dwóch z tych równań kąta φ, a z drugich dwóch z tych równań kąta $\varphi+\overline{\vartheta}$, otrzymujemy równości:

$$(4)\qquad \begin{cases} a_1^2+b_1^2+2\,a_1\,b_1\cos\vartheta=1, \\ a_2^2+b_2^2+2\,a_2\,b_2\cos\vartheta=1, \end{cases}$$

z których wynika, że spółczynniki a_1, b_1, a_2, b_2 muszą spełniać równość:

$$(5)\qquad a_2\,b_2\,(a_1^2+b_1^2-1)-a_1\,b_1\,(a_2^2+b_2^2-1)=0.$$

Jeżeli żaden ze spółczynników a_1, b_1, a_2, b_2 nie jest zerem, to możemy równości (4) napisać w postaci:

$$\cos\vartheta=\frac{1-a_1^2-b_1^2}{2\,a_1\,b_1}=\frac{1-a_2^2-b_2^2}{2\,a_2\,b_2}.$$

Jeżeli żadna z wielkości a_1, b_1 nie jest zerem, ale jedna z wielkości a_2, b_2 jest zerem, to mamy:

$$(6)\qquad \cos\vartheta=\frac{1-a_1^2-b_1^2}{2\,a_1\,b_1}$$

i przytem zachodzą albo równości:

$$(7)\qquad a_2=\varepsilon_2,\quad b_2=0,\quad (\varepsilon_2=\pm 1),$$

albo też równości:

$$(8)\qquad a_2=0,\quad b_2=\eta_2,\quad (\eta_2=\pm 1).$$

Jeżeli żadna z wielkości a_2, b_2 nie jest zerem, ale jedna z wielkości a_1, b_1 jest zerem, to mamy:

$$(9)\qquad \cos\vartheta=\frac{1-a_2^2-b_2^2}{2\,a_2\,b_2}$$

i zachodzą albo równości:

$$(10)\qquad a_1=\varepsilon_1,\quad b_1=0,\quad (\varepsilon_1=\pm 1),$$

albo też równości:

$$a_1 = 0, \quad b_1 = \eta_1, \quad (\eta_1 = \pm 1). \tag{11}$$

Może wreszcie zdarzyć się, że jedna z wielkości a_1, b_1 jest zerem i że przytem także jedna z wielkości a_2, b_2 jest zerem. Takie przypadki objęte są albo wzorami:

$$a_1 = \varepsilon_1, \quad b_1 = 0; \quad a_2 = 0, \quad b_2 = \eta_2, \tag{12}$$

albo też wzorami:

$$a_1 = 0, \quad b_1 = \eta_1; \quad a_2 = \varepsilon_2, \quad b_2 = 0, \tag{13}$$

gdzie symbole $\varepsilon_1, \eta_1, \varepsilon_2, \eta_2$ mają to samo znaczenie, co poprzednio.

Warunki konieczne i wystarczające, aby istniały takie układy spółrzędnych prostolinjowych x, y i $\bar{x}, \bar{y}$, żeby przekształcenie (1) określało zmianę spółrzędnych tych układów, polegają po pierwsze na spełnieniu równości (5), po drugie zaś, przy założeniu $a_1 b_1 \neq 0$, na spełnieniu nierówności:

$$|1 - a_1^2 - b_1^2| < 2|a_1 b_1|,$$

a przy założeniu $a_2 b_2 \neq 0$, na spełnieniu nierówności:

$$|1 - a_2^2 - b_2^2| < 2|a_2 b_2|.$$

Jeżeli natomiast zachodzą obie równości:

$$a_1 b_1 = 0, \quad a_2 b_2 = 0,$$

to zachodzi także równość (5) i istnienie rzeczonych układów jest zabezpieczone bez spełnienia jakichkolwiek dalszych warunków.

Załóżmy teraz, że przynajmniej jeden z iloczynów $a_1 b_1$ i $a_2 b_2$ jest różny od zera i że spełnione są odpowiednie z podanych przed chwilą warunków. Wtedy na dostawę kąta ϑ osi y-ów z osią x-ów otrzymuje się jedna określona wartość, a więc na wstawę tego kąta dwie wartości, różniące się tylko znakiem. Jeżeli przytem zważymy, że zachodzą wzory:

$$\begin{cases} \cos\bar{\vartheta} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\cos\vartheta, \\ \sin\bar{\vartheta} = (a_1 b_2 - b_1 a_2)\sin\vartheta, \end{cases} \tag{14}$$

to dostrzeżemy bezpośrednio, że wtedy na dostawę kąta $\bar{\vartheta}$ osi $\bar{y}$ z osią $\bar{x}$, otrzymuje się jedna określona wartość, na wstawę zaś tegoż kąta otrzymuje się dwie wartości różniące się tylko znakiem. To znaczy, że przy spełnieniu powyższych założeń i warunków równania (1) odnoszą się do wszelkich układów x, y, których oś y tworzy z osią x jeden z kątów ϑ o określonej powyżej dostawie $\cos\vartheta$ i że każdemu z powyższych układów x, y odpowiada na mocy równań (1) jeden określony układ $\bar{x}, \bar{y}$, którego kąt $\bar{\vartheta}$ spełnia równości (14).

W przypadkach, zawartych we wzorach (12) i (13), układ x, y może być obrany zupełnie dowolnie, a każdemu takiemu układowi odpowiada na podstawie równań (1) określony układ $\bar{x}, \bar{y}$, którego kąt $\bar{\vartheta}$ wyznacza się odpowiednio bądź ze wzorów:

$$\cos\bar{\vartheta} = \varepsilon_1 \eta_2 \cos\vartheta, \quad \sin\bar{\vartheta} = \varepsilon_1 \eta_2 \sin\vartheta,$$

bądź też ze wzorów:

$$\cos\bar{\vartheta} = \eta_1 \varepsilon_2 \cos\vartheta, \quad \sin\bar{\vartheta} = -\eta_1 \varepsilon_2 \sin\vartheta.$$

Geometryczne znaczenie tych wzorów jest widoczne i bliższe jego rozważenie tutaj pomijamy.

Następnie zajmiemy się różną od poprzedniej interpretacją geometryczną równań, określających zmianę spółrzędnych prostolinjowych. Przypuśćmy, że równania:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a + a_1 \bar{x} + a_2 \bar{y}, \\ y = b + b_1 \bar{x} + b_2 \bar{y} \end{cases}$$

określają zmianę spółrzędnych prostolinjowych $\bar{x}, \bar{y}$ na spółrzędne prostolinjowe x, y. Niech x_0, y_0 oznaczają spółrzędne punktu M_0 (fig. 63) w układzie spółrzędnych x, y i niech punkt ten przechodzi w punkt M o spółrzędnych x, y w tymże samym układzie na mocy przekształcenia:

$$(15) \qquad \begin{cases} x = a + a_1 x_0 + a_2 y_0, \\ y = b + b_1 x_0 + b_2 y_0. \end{cases}$$

Postaramy się scharakteryzować zależność pozycji punktu M od pozycji punktu M_0. W tym celu weźmiemy pod uwagę układ $\bar{x}, \bar{y}$, o którym mówiliśmy przed chwilą. Spółrzędnemi punktu M

w układzie $\bar{x}, \bar{y}$ są oczywiście $\bar{x} = x_0$, $\bar{y} = y_0$. Stąd wynika, że jeżeli mamy dany punkt M_0 o spółrzędnych x_0, y_0 w układzie x, y, to trzeba w celu otrzymania punktu M, w który przechodzi punkt M_0 przez przekształcenie (15), skonstruować punkt, którego spółrzędne w układzie $\bar{x}, \bar{y}$ są odpowiednio x_0 i y_0, a punkt ten będzie właśnie punktem M.

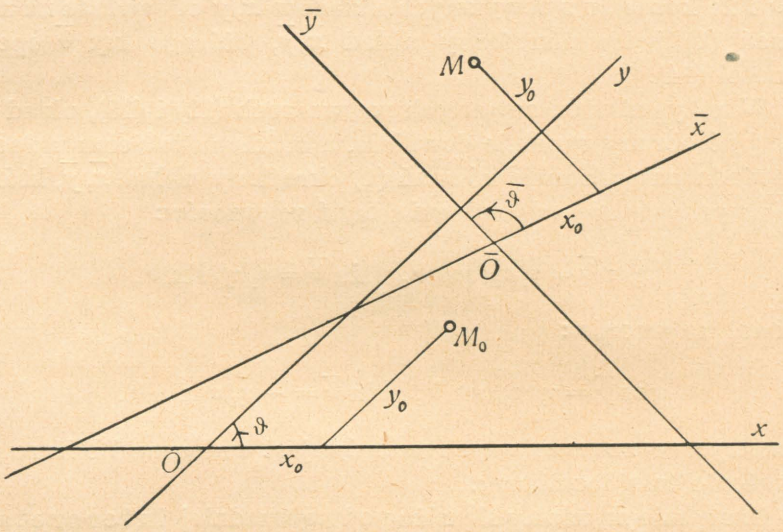

Fig. 63.

Zwrócimy uwagę na pewien szczególny przypadek przekształcenia (15). Gdy zachodzą równości:

$$\sin \bar{\vartheta} = \sin \vartheta, \quad \cos \bar{\vartheta} = \cos \vartheta,$$

wówczas możemy równania (15) napisać w postaci:

$$(16) \qquad \begin{cases} x = a + \dfrac{\sin(\vartheta - \varphi)}{\sin \vartheta} x_0 - \dfrac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} y_0, \\ y = b + \dfrac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} x_0 + \dfrac{\sin(\varphi + \vartheta)}{\sin \vartheta} y_0. \end{cases}$$

Zatem punkt M jest tak samo położony względem osi $\bar{x}, \bar{y}$, jak punkt M_0 względem układu x, y. Przekształcenie (16) określa więc takie przemieszczenie całej płaszczyzny w samej sobie, że osie x i y przechodzą odpowiednio w osie $\bar{x}, \bar{y}$. W szczególności jeżeli

oba układy są prostokątne i takie, że $\vartheta = \overline{\vartheta} = \frac{\pi}{2}$, otrzymujemy wzory:

$$(17) \quad \begin{cases} x = a + x_0 \cos\varphi - y_0 \sin\varphi, \\ y = b + x_0 \sin\varphi + y_0 \cos\varphi, \end{cases}$$

które najczęściej stosują się dla analitycznego określenia przemieszczenia płaszczyzny w samej sobie. Inaczej powiemy, że równania (16) określają przemieszczenie płaszczyzny w samej sobie w układzie prostolinjowym x, y, którego oś y tworzy z osią x kąt ϑ, a równania (17) przemieszczenie płaszczyzny w samej sobie w układzie prostolinjowym x, y, którego oś y tworzy z osią x kąt $+\frac{\pi}{2}$.

Zwracając się teraz do ogólnych wzorów (15) w założeniu, że nie zachodzą jednocześnie obie równości:

$$\sin\overline{\vartheta} = \sin\vartheta, \quad \cos\overline{\vartheta} = \cos\vartheta,$$

napiszemy wzory (15) w postaci:

$$(18) \quad \begin{cases} x = a + \dfrac{\sin(\vartheta - \varphi)}{\sin\vartheta} x_0 + \dfrac{\sin(\vartheta - \varphi - \overline{\vartheta})}{\sin\vartheta} y_0, \\ y = b + \dfrac{\sin\varphi}{\sin\vartheta} x_0 + \dfrac{\sin(\varphi + \overline{\vartheta})}{\sin\vartheta} y_0. \end{cases}$$

Zapytamy zapomocą jakiego przekształcenia należy przejść od punktu M_0 do takiego punktu N o spółrzędnych ξ, η w układzie spółrzędnych x, y, żeby spółrzędne punktu M, t.j. x, y, określały się z ξ, η wzorami:

$$(19) \quad \begin{cases} x = a + \dfrac{\sin(\vartheta - \varphi)}{\sin\vartheta} \xi - \dfrac{\sin\varphi}{\sin\vartheta} \eta, \\ y = b + \dfrac{\sin\varphi}{\sin\vartheta} \xi + \dfrac{\sin(\varphi + \vartheta)}{\sin\vartheta} \eta, \end{cases}$$

t.j., by przejście od punktu N do punktu M było przekształceniem równoważnem takiemu przemieszczeniu płaszczyzny, przy którem początek układu x, y przechodzi w a, b, oś x w oś x, a oś y w oś y,

tworzącą z osią $\bar{x}$ kąt $\bar{\vartheta}$. Przekształcenie, o które chodzi, otrzymuje się przez rugowanie x i y z równań (18) i (19) i można sprawdzić, że dojdziemy tą drogą do związków:

$$(20) \qquad \xi = x_0 + \frac{\sin(\vartheta - \bar{\vartheta})}{\sin\vartheta} y_0, \quad \eta = \frac{\sin\bar{\vartheta}}{\sin\vartheta} y_0.$$

Dla sprawdzenia, że istotnie otrzymują się te związki, sprawdzimy równości:

$$\frac{\sin(\vartheta-\varphi)}{\sin\vartheta}\frac{\sin(\vartheta-\bar{\vartheta})}{\sin\vartheta} - \frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\frac{\sin\bar{\vartheta}}{\sin\vartheta} = \frac{\sin(\vartheta-\varphi-\bar{\vartheta})}{\sin\vartheta},$$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\frac{\sin(\vartheta-\bar{\vartheta})}{\sin\vartheta} + \frac{\sin(\varphi+\vartheta)}{\sin\vartheta}\frac{\sin\bar{\vartheta}}{\sin\vartheta} = \frac{\sin(\varphi+\bar{\vartheta})}{\sin\vartheta}.$$

W tych równościach spółczynniki przy $\cos\varphi$ znoszą się widocznie, a spółczynniki przy $\sin\varphi$ znoszą się na podstawie równości:

$$\cos\vartheta\sin(\vartheta-\bar{\vartheta}) + \sin\bar{\vartheta} = \cos(\vartheta-\bar{\vartheta})\sin\vartheta,$$

$$\sin(\vartheta-\bar{\vartheta}) + \cos\vartheta\sin\bar{\vartheta} = \cos\bar{\vartheta}\sin\vartheta.$$

Równania (20) otrzymują się z równań (18), jeżeli przyjmiemy w tych ostatnich $a = 0$, $b = 0$, $\varphi = 0$ oraz $x = \xi$, $y = \eta$. Zatem równania (20) można interpretować w sposób następujący. Weźmy pod uwagę taki układ prostolinjowy p, q, w którym osią p jest oś x, a osią q jest oś, tworząca z osią p kąt $\bar{\vartheta}$ (fig. 64). Punkt M_0 ma spółrzędne x_0, y_0 w układzie x, y, a punkt N jest punktem, mającym spółrzędne x_0, y_0 w układzie p, q, a spółrzędne ξ, η określone wzorami (20) w układzie x, y.

Zapytujemy, czy prócz osi x niema jeszcze innych prostych, przechodzących przez początek spółrzędnych, które miałyby własność niezmienności w stosunku do przekształcenia określonego w równaniu (20). Niech będzie równanie:

$$(21) \qquad A\xi + B\eta = 0,$$

w którem A i B oznaczają spółczynniki, nie będące oba jednocześnie zerami. Podstawiając wyrażenia (20), mamy:

$$A\left[x_0 + \frac{\sin(\vartheta-\bar{\vartheta})}{\sin\vartheta} y_0\right] + B\frac{\sin\bar{\vartheta}}{\sin\vartheta} y_0 = 0.$$

Aby więc prosta określona równaniem (21) była niezmienną prostą przekształcenia (20), potrzeba i wystarcza byśmy mieli tożsamościowo:

$$A\left[x_0 + \frac{\sin(\vartheta - \bar{\vartheta})}{\sin\vartheta}\, y_0\right] + B\,\frac{\sin\bar{\vartheta}}{\sin\vartheta}\, y_0 = k\,(A\,x_0 + B\,y_0),$$

gdzie k jest czynnikiem różnym od zera. Stąd wynikają warunki:

$$A = k\,A, \quad A\,\frac{\sin(\vartheta - \bar{\vartheta})}{\sin\vartheta} + B\,\frac{\sin\bar{\vartheta}}{\sin\vartheta} = k\,B.$$

Można spełnić pierwszy z tych warunków, gdy przyjmiemy $A = 0$, wtedy jednak prosta (21) jest osią x, a już wiemy, że oś x jest

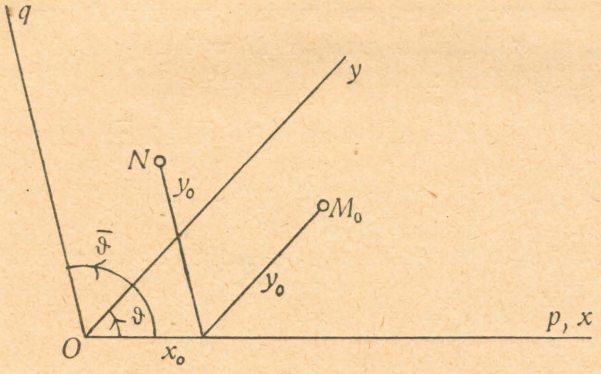

Fig. 64.

prostą niezmienną przy przekształceniu 20). Pierwszy z rzeczonych warunków można spełnić także, przyjmując $k = 1$ i wtedy z drugiego z nich wyniknie:

$$A = l\,(\sin\bar{\vartheta} - \sin\vartheta), \quad B = l\sin(\bar{\vartheta} - \vartheta),$$

gdzie l jest różne od zera. Wynikający stąd spółczynnik A jest różny od zera wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest nierówność $\sin\bar{\vartheta} \neq \sin\vartheta$. To znaczy, że ta nierówność jest warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia prócz osi x jeszcze drugiej prostej niezmiennej, przechodzącej przez początek spółrzędnych, i widoczne, że ta prosta określi się wtedy równaniem:

$$(\sin\bar{\vartheta} - \sin\vartheta)\,x + \sin(\bar{\vartheta} - \vartheta)\,y = 0. \tag{22}$$

Przy rzeczonem założeniu przedstawimy jeszcze odkształcenie płaszczyzny, określone wzorami (20), w nowych spółrzędnych u, v, z których oś u jest osią x, a oś v leży na niezmiennej prostej (22). Jeżeli spółczynniki kierunkowe w układzie x, y jednego z kierunków prostej (22) nazwiemy λ, μ, natenczas mieć będziemy następujące związki między spółrzędnemi x, y i u, v:

$$x = u + \lambda v, \quad y = \mu v. \tag{23}$$

Przytem zachodzą równości:

$$\lambda = -m \sin(\bar{\vartheta} - \vartheta), \quad \mu = m(\sin \bar{\vartheta} - \sin \vartheta),$$

gdzie m oznacza odpowiednio wybrany czynnik, który jest różny od zera. Oznaczmy teraz spółrzędne punktu M_0 w układzie u, v przez u_0, v_0, a spółrzędne punktu N w tym układzie przez $\bar{u}, \bar{v}$. Wtedy mieć będziemy:

$$x_0 = u_0 + \lambda v_0, \quad \xi = \bar{u} + \lambda \bar{v},$$

$$y_0 = \mu v_0, \quad \eta = \mu \bar{v},$$

a wprowadzając te wartości w równania (20), otrzymujemy:

$$\bar{u} = u_0, \quad \bar{v} = \frac{\sin \bar{\vartheta}}{\sin \vartheta} v_0. \tag{23}$$

Widzimy więc, że każda prosta, mająca ten sam dwukierunek co oś v przechodzi sama w siebie, a każda prosta, mająca ten sam dwukierunek co oś u, przechodzi w prostą także o dwukierunku osi u i przytem wszystkie punkty osi u przechodzą same w siebie.

Gdy założenie $\sin \bar{\vartheta} \neq \sin \vartheta$ nie jest spełnione, mamy:

$$\sin \bar{\vartheta} = \sin \vartheta, \quad \cos \bar{\vartheta} = \pm \cos \vartheta. \tag{24}$$

Ale wystarczy rozważyć tylko przypadek, odpowiadający dolnemu znakowi drugiej z tych równości, jeżeli bowiem są one spełnione przy górnym znaku, to równania (15) mają postać (16) i zachodzi przemieszczenie płaszczyzny. Gdy zaś równości (24) są spełnione przy dolnym znaku drugiej z tych równości, wówczas równania (20) można napisać w postaci:

$$\xi = x_0 - 2 \cos \vartheta \, y_0, \quad \eta = y_0. \tag{25}$$

Przy tem przekształceniu każda prosta, mająca dwukierunek osi x, przechodzi sama w siebie i nadto każdy punkt osi x przechodzi sam w siebie. Odnośnie do punktów, nie leżących na osi x, możemy jeszcze powiedzieć, że każdy wektor o początku w punkcie x_0, y_0 i o końcu w punkcie ξ, η ma składową na osi y równą zeru, a składową na osi x niezależną od x_0.

§ 37. Symetrja względem linji prostej.

Niech będzie linja prosta właściwa rzeczywista zadana równaniem:

$$g\,x + h\,y + k = 0. \tag{26}$$

Jeżeli zastosujemy oznaczenie:

$$G = \sqrt{g^2 + h^2 - 2\,g\,h\cos\vartheta}, \tag{27}$$

to spółczynniki kierunków tej prostej określone będą wzorami:

$$\lambda = -\frac{h}{\varepsilon\,G}, \quad \mu = \frac{g}{\varepsilon\,G}, \quad (\varepsilon = \pm 1). \tag{28}$$

Jeżeli następnie literami $\underline{\lambda}$, $\underline{\mu}$ oznaczymy spółczynniki kierunku, który tworzy z kierunkiem (28) kąt $+\frac{\pi}{2}$, to mieć będziemy wzory:

$$\underline{\lambda} = -\frac{g - h\cos\vartheta}{\varepsilon\,G\sin\vartheta}, \quad \underline{\mu} = \frac{g\cos\vartheta - h}{\varepsilon\,G\sin\vartheta}. \tag{29}$$

Prosta, prostopadła do prostej (26) i przechodząca przez punkt o spółrzędnych ξ, η, może być określona równaniami osiowemi (zob. tom I § 17):

$$x = \xi + \underline{\lambda}\,r, \quad y = \eta + \underline{\mu}\,r, \tag{30}$$

w których r jest zmiennym parametrem. Dwa różne od siebie punkty nazywają się p u n k t a m i s y m e t r y c z n e m i w z g l ę d e m p e w n e j l i n j i p r o s t e j, gdy odcinek łączący te punkty spotyka ją pod kątem prostym i dzieli się w punkcie spotkania na dwie części równe. Punkt położony na rzeczonej linji prostej jest punktem symetrycznym ze sobą samym. Łatwo wyprowadzić

wzory, zapomocą których według spółrzędnych dowolnie zadanego punktu można obliczyć spółrzędne punktu z nim symetrycznego względem danej linji prostej. W tym celu oprzemy się na równaniach (30). Długość prostopadłej, opuszczonej z punktu ξ, η na prostą (26), rachowana jako dodatnia w kierunku, określonym wzorami (29), jest:

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon G}(g\xi + h\eta + k)\sin\vartheta, \tag{31}$$

i jeżeli spółrzędne punktu symetrycznego z punktem ξ, η względem prostej (26) oznaczymy literami $\bar{\xi}, \bar{\eta}$, to na podstawie równań (30) mieć będziemy:

$$\bar{\xi} = \xi + 2\underline{\lambda}\rho, \quad \bar{\eta} = \eta + 2\underline{\mu}\rho. \tag{32}$$

Równania te określają przekształcenie punktu ξ, η na punkt $\bar{\xi}, \bar{\eta}$, które nazywać będziemy p r z e k s z t a ł c e n i e m s y m e t r j i w z g l ę d e m p r o s t e j (26), zwanej także w stosunku do tego przekształcenia o s i ą s y m e t r j i. Jeżeli w równaniach (32) podstawimy wyrażenia (29) i (31), to otrzymamy:

$$\begin{cases} \bar{\xi} = \xi - 2\dfrac{g - h\cos\vartheta}{G^2}(g\xi + h\eta + k), \\ \bar{\eta} = \eta - 2\dfrac{h - g\cos\vartheta}{G^2}(g\xi + h\eta + k). \end{cases} \tag{33}$$

Równania te łatwo rozwiązać względem ξ, η i wówczas dojdziemy do wyniku:

$$\begin{cases} \xi = \bar{\xi} - 2\dfrac{g - h\cos\vartheta}{G^2}(g\bar{\xi} + h\bar{\eta} + k), \\ \eta = \bar{\eta} - 2\dfrac{h - g\cos\vartheta}{G^2}(g\bar{\xi} + h\bar{\eta} + k). \end{cases} \tag{34}$$

Zauważymy przytem, że na podstawie geometrycznego znaczenia przekształcenia symetrji łatwo bez pomocy rachunku dojść do wniosku, że rzeczone rozwiązanie prowadzić musi do otrzymanego wyniku.

Na podstawie definicji punktów symetrycznych można bezpośrednio skonstatować w wielu przypadkach własności figury

symetrycznej z daną figurą. Pomimo to, zajmiemy się tutaj analitycznem wyprowadzeniem niektórych takich własności.

Zauważymy naprzód, że jeżeli składowe dwóch wektorów symetrycznych względem prostej (26) są u, v i $\bar{u}, \bar{v}$, to ze wzorów (33) wynika, że składowe $\bar{u}, \bar{v}$ wyrażają się przez składowe u, v wzorami:

$$(35)\qquad \begin{cases} \bar{u} = u - 2\dfrac{g - h\cos\vartheta}{G^2}(g\,u + h\,v), \\ \bar{v} = v - 2\dfrac{h - g\cos\vartheta}{G^2}(g\,u + h\,v), \end{cases}$$

a ze wzorów (34) wynika, że składowe u, v wyrażają się przez składowe $\bar{u}, \bar{v}$ wzorami:

$$(36)\qquad \begin{cases} u = \bar{u} - 2\dfrac{g - h\cos\vartheta}{G^2}(g\,\bar{u} + h\,\bar{v}), \\ v = \bar{v} - 2\dfrac{h - g\cos\vartheta}{G^2}(g\,\bar{u} + h\,\bar{v}). \end{cases}$$

Łatwo dostrzec, że wzory (35) można także napisać w postaci:

$$(37)\qquad \begin{cases} \bar{u} = u - 2\lambda\,\Psi(\lambda, \mu; u, v), \\ \bar{v} = v - 2\mu\,\Psi(\lambda, \mu; u, v). \end{cases}$$

Skonstatujemy rachunkiem, że kwadraty długości dwóch wektorów symetrycznych są sobie równe. Ze wzorów (37) otrzymujemy:

$$\Phi(\bar{u}, \bar{v}) = \Phi(u, v) - 4\,\Phi(\lambda, \mu; u, v)\,\Psi(\lambda, \mu; u, v) + 4\,\Psi^2(\lambda, \mu; u, v),$$

a ponieważ możemy sprawdzić równość:

$$\Phi(\lambda, \mu; u, v) = \Psi(\lambda, \mu; u, v),$$

przeto dochodzimy do równości:

$$(38)\qquad \Phi(\bar{u}, \bar{v}) = \Phi(u, v),$$

która jest skonstatowaniem rzeczonej własności wektorów symetrycznych.

Niech będą teraz składowe dwóch wektorów u_1, v_1 i u_2, v_2. Oznaczymy składowe wektorów symetrycznych odpowiednio przez $\bar{u}_1, \bar{v}_1$ i $\bar{u}_2, \bar{v}_2$ i zajmiemy się obliczeniem niezmiennika $\Psi(\bar{u}_1, \bar{v}_1; \bar{u}_2, \bar{v}_2)$ przez składowe u_1, v_1 i u_2, v_2, stosując do obu uważanych wektorów wzory (37). Tą drogą dochodzimy do równości:

$$\Psi(\bar{u}_1, \bar{v}_1; \bar{u}_2, \bar{v}_2) =$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 - 2\bar{\lambda}\Psi(\lambda, \mu; u_1, v_1), & u_2 - 2\bar{\lambda}\Psi(\lambda, \mu; u_2, v_2) \\ v_1 - 2\bar{\mu}\Psi(\lambda, \mu; u_1, v_1), & v_2 - 2\bar{\mu}\Psi(\lambda, \mu; u_2, v_2) \end{vmatrix} \sin\vartheta,$$

którą łatwo doprowadzić do postaci:

$$\Psi(\bar{u}_1, \bar{v}_1; \bar{u}_2, \bar{v}_2) =$$

$$= \Psi(u_1, v_1; u_2, v_2) - 2 \begin{vmatrix} \Psi(\lambda, \mu; u_1, v_1), & \Psi(\lambda, \mu; u_2, v_2) \\ \Psi(\bar{\lambda}, \bar{\mu}; u_1, v_1), & \Psi(\bar{\lambda}, \bar{\mu}; u_2, v_2) \end{vmatrix}.$$

Ponieważ zaś wyznacznik, figurujący po prawej stronie tej równości, równa się iloczynowi:

$$\sin^2\vartheta \begin{vmatrix} \lambda, & \mu \\ \bar{\lambda}, & \bar{\mu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1, & -u_1 \\ v_2, & -u_2 \end{vmatrix} = \Psi(\lambda, \mu; \bar{\lambda}, \bar{\mu})\ \Psi(u_1, v_1; u_2, v_2),$$

a pomiędzy spółczynnikami kierunkowemi λ, μ i $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ zachodzi równość:

$$\Psi(\lambda, \mu; \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 1,$$

przeto dochodzimy do wyniku:

$$\Psi(\bar{u}_1, \bar{v}_1; \bar{u}_2, \bar{v}_2) = -\Psi(u_1, v_1; u_2, v_2). \tag{39}$$

Jeżelibyśmy początki wektorów u_1, v_1 i u_2, v_2 umieścili w tym samym punkcie, a końce tych wektorów połączyli odcinkiem prostolinjowym, to otrzymalibyśmy trójkąt, którego pole, obiegane w kierunku zgodnym z kierunkiem pierwszego z tych wektorów, byłoby równe $\frac{1}{2}\Psi(u_1, v_1; u_2, v_2)$. Pole trójkąta, obiegane przez punkt do poprzedniego symetryczny, wyraża się zarówno co do

wartości bezwzględnej jak i co do znaku wartością wielkości $\frac{1}{2}\Psi(\bar{u}_1, \bar{v}_1; \bar{u}_2, \bar{v}_2)$. Ponieważ zachodzi równość (39), przeto z niej wnosimy, że przekształcenie symetrji nie zmienia wartości bezwzględnej pola trójkąta, ale zmienia znak pola trójkąta na wprost przeciwny.

Zajmiemy się teraz rozważeniem prostych symetrycznych do prostych danych względem prostej (26). Niech będzie prosta właściwa rzeczywista, określona w spółrzędnych ξ, η równaniem:

$$A\xi + B\eta + C = 0. \tag{40}$$

Ze wzorów (34) wynika, że prosta z nią symetryczna określona będzie w spółrzędnych $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ równaniem:

$$A\bar{\xi} + B\bar{\eta} + C - 2\frac{\Phi(-h, g; -B, A)}{G^2}(g\bar{\xi} + h\bar{\eta} + k) = 0. \tag{41}$$

Zapytamy naprzód, w jakich przypadkach równania (40) i (41) przedstawiają jedną i tę samą linję prostą. Fakt ten zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki czynnik m różny od zera, że przy zastosowaniu oznaczenia:

$$P = \frac{\Phi(-h, g; -B, A)}{G^2},$$

spełnione są równości:

$$A(1-m) - 2Pg = 0, \quad B(1-m) - 2Ph = 0, \quad C(1-m) - 2Pk = 0.$$

Jeżeli nie wszystkie wyznaczniki macierzy:

$$\begin{vmatrix} g, & h, & k \\ A, & B, & C \end{vmatrix}$$

są zerami, to rzeczone równości spełnione są tylko przy $m = 1$, $P = 0$. To znaczy, że prosta różna od osi symetrji przechodzi przy przekształceniu symetrji sama w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do osi symetrji. Jeżeli zaś wszystkie wyznaczniki powyższej macierzy są zerami, to prosta (40) jest osią symetrji i wówczas każdy jej punkt jest punktem niezmiennym przy uważanem przekształceniu symetrji.

Następnie zauważymy, że jeżeli prosta (40) nie jest prostą niezmienną przekształcenia symetrji i jeżeli przecina oś symetrji, to, jak widać z równań (40) i (41), prosta symetryczna do prostej (40) przecina oś symetrji w tym samym punkcie. Prosta (40) ma z osią symetrji wspólny dwukierunek, gdy istnieje taki czynnik n, że spełnione są równości:

$$A = n\,g, \quad B = n\,h,$$

gdzie n jest czynnikiem różnym od zera. Wówczas równanie (40) można przedstawić w postaci.

$$g\,\xi + h\,\eta + k + \frac{C}{n} - k = 0,$$

a równanie (41) w postaci:

$$g\,\bar{\xi} + h\,\bar{\eta} + k - \left(\frac{C}{n} - k\right) = 0.$$

Gdy $C \neq k\,n$, wówczas obie te proste są różne od osi symetrji, są do niej równoległe i leżą po dwóch różnych stronach osi symetrji w tych samych od niej odległościach.

Niech teraz będzie linja krzywa stopnia drugiego określona w spółrzędnych $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ równaniem:

$$(42)\quad f(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = A\,\bar{\xi}^2 + 2\,B\,\bar{\xi}\,\bar{\eta} + C\,\bar{\eta}^2 + 2\,D\,\bar{\xi} + 2\,E\,\bar{\eta} + F = 0.$$

Jeżeli podstawimy tutaj wyrażenia (32), to otrzymamy równanie:

$$(43)\quad f(\xi, \eta) + 4\,[\underline{\lambda}\,(A\,\xi + B\,\eta + D) + \underline{\mu}\,(B\,\xi + C\,\eta + E)]\,\rho + \\ + 4\,\varphi\,(\underline{\lambda}, \underline{\mu})\,\rho^2 = 0.$$

Zapytujemy, przy spełnieniu jakich warunków krzywa (42) pozostaje bez zmiany przy przekształceniu symetrji względem prostej (26), jako osi symetrji. Widoczne, że to zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki czynnik m różny od zera, że spełniona jest tożsamościowo równość:

$$(44)\quad 4\,[\underline{\lambda}\,(A\,\xi + B\,\eta + D) + \underline{\mu}\,(B\,\xi + C\,\eta + E) + \varphi\,(\underline{\lambda}, \underline{\mu})\,\rho]\,\rho = \\ = (m - 1)\,f(\xi, \eta).$$

Ta równość może zachodzić albo przy $m = 1$, albo też przy $m \neq 1$.

W pierwszym z tych przypadków spełniona musi być tożsamościowo równość:

$$(45)\quad \underline{\lambda}\,(A\,\xi + B\,\eta + D) + \underline{\mu}\,(B\,\xi + C\,\eta + E) + \varphi\,(\underline{\lambda}, \underline{\mu})\,\rho = 0\,.$$

Jeżeli przytem $\varphi\,(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) \neq 0$, t.j. dwukierunek $\underline{\mu} : \underline{\lambda}$ nie jest dwukierunkiem asymptotycznym, to z równości tej wynika, że prosta (26) musi być średnicą sprzężoną z dwukierunkiem do niej prostopadłym. Jeżeli zaś $\varphi\,(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) = 0$, t.j. dwukierunek $\underline{\mu} : \underline{\lambda}$ jest dwukierunkiem asymptotycznym, to muszą być spełnione warunki:

$$A\,\underline{\lambda} + B\,\underline{\mu} = 0\,, \quad B\,\underline{\lambda} + C\,\underline{\mu} = 0\,, \quad D\,\underline{\lambda} + E\,\underline{\mu} = 0\,,$$

z których wynikają widocznie równości:

$$\delta = 0\,, \quad \Delta = 0\,,$$

a to znaczy, że warunek (45) może być wówczas spełniony tylko dla pary prostych o wspólnym dwukierunku i widoczne, że wtedy każda prosta prostopadła do prostych pary może być wybrana jako prosta (26). To znaczy, że warunek, aby przekształcenie symetrji nie zmieniało krzywej stopnia drugiego, spełniony jest przy $m = 1$ zawsze wtedy i tylko wtedy, gdy jako oś symetrji obierzemy którąkolwiek oś krzywej stopnia drugiego. Jeżeli następnie zachodzi nierówność $m \neq 1$, to z warunku (44) wynika, że dla rozważanej niezmienności prosta (26) musi należeć do miejsca geometrycznego, określonego równaniem (42). Z warunku (44) wynika widocznie, że musi być także spełniona tożsamościowo równość:

$$(m-1)\,\varphi\,(\xi, \eta) = 4\left[\underline{\lambda}\,(A\,\xi + B\,\eta) + \underline{\mu}\,(B\,\xi + C\,\eta) + \right.$$

$$\left. + \varphi\,(\underline{\lambda}, \underline{\mu})\,\frac{g\,\xi + h\,\eta}{\varepsilon\,G}\sin\vartheta\right]\frac{g\,\xi + h\,\eta}{\varepsilon\,G}\sin\vartheta\,.$$

Przyjmując w równości tej $\xi = \underline{\lambda}$, $\eta = \underline{\mu}$, dochodzimy do równości:

$$(m-1)\,\varphi\,(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) = 4\left(1 + \frac{g\,\underline{\lambda} + h\,\underline{\mu}}{\varepsilon\,G}\sin\vartheta\right)\frac{g\,\underline{\lambda} + h\,\underline{\mu}}{\varepsilon\,G}\sin\vartheta\,\varphi\,(\underline{\lambda}, \underline{\mu})\,,$$

a ponieważ ze wzorów (28) wynika równość:

$$\frac{g\underline{\lambda} + h\underline{\mu}}{\varepsilon G} \sin\vartheta = -(\lambda\underline{\mu} - \mu\underline{\lambda}) \sin\vartheta = -1,$$

przeto dochodzimy do wyniku:

$$\varphi(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) = 0. \tag{46}$$

Wnosimy z niego, że w przypadku $m \neq 1$ proste, należące do miejsca geometrycznego (42), muszą być do siebie prostopadłe. To znaczy, że przedstawiając wielomian $f(\xi, \eta)$ w postaci:

$$f(\xi, \eta) = (g\xi + h\eta + k)(g_1\xi + h_1\eta + k_1), \tag{47}$$

gdzie g_1, h_1, k_1 oznaczają spółczynniki, z których dwa pierwsze nie są oba jednocześnie zerami, mieć będziemy równość:

$$g_1\underline{\lambda} + h_1\underline{\mu} = 0. \tag{48}$$

Przy zachodzeniu równości (47) można warunek (44) napisać w formie:

$$2[(g\underline{\lambda} + h\underline{\mu})(g_1\xi + h_1\eta + k_1) + (g_1\underline{\lambda} + h_1\underline{\mu})(g\xi + h\eta + k) + \\ + 2\varphi(\underline{\lambda}, \underline{\mu})\rho]\rho = (m-1)f(\xi, \eta), \tag{49}$$

skąd wnosimy, że gdy zachodzą równości (46) i (48), warunek (44) spełniony będzie przy wartości:

$$m - 1 = \frac{2(g\underline{\lambda} + h\underline{\mu}) \sin\vartheta}{\varepsilon G} = -2. \tag{50}$$

Widzimy więc, że warunek, aby przekształcenie symetrji pozostawiało bez zmiany krzywą stopnia drugiego, spełniony jest przy $m \neq 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy krzywa składa się z dwóch prostych do siebie prostopadłych i gdy jako oś symetrji obierzemy którąkolwiek z tych linij prostych.

§ 38. Homotetyczność i podobieństwo.

Załóżmy, że kierunek powiększania się kątów na płaszczyźnie jest ustalony i obierzmy na niej układ spółrzędnych biegunowych, którego biegun oznaczymy literą A, a ramię biegunowe literą s. Zajmiemy się własnościami pewnej odpowiedniości, określonej związkami pomiędzy spółrzędnemi biegunowemi punktów sobie odpo-

wiadających. Oznaczając mianowicie promienie wodzące i amplitudy tych punktów literami r, w i literami r', w' rozważać będziemy własności odpowiedniości określonej równaniami:

$$r' = \tau r, \quad w' = w, \tag{51}$$

gdzie τ oznacza stałą rzeczywistą, różną od zera i od dodatniej jedności. Tę odpowiedniość nazywać będziemy homotetycznością, biegun A środkiem homotetyczności, a czynnik τ stosunkiem homotetyczności. Nadto homotetyczność nazywać będziemy dodatnią, względnie ujemną, zależnie od tego, czy zachodzi nierówność $\tau > 0$, czy też nierówność $\tau < 0$. Niech będzie figura F, składająca się z punktów, które nazwiemy punktami M. Podobnież niech będzie figura F', składająca się z punktów, które nazwiemy punktami M'. Jeżeli istnieje taki środek A i taki rzeczywisty stosunek τ, różny od zera i od jedności dodatniej, że spółrzędne r, w każdego punktu M przechodzą naskutek równań (51) w spółrzędne r', w' punktu, należącego do punktów M', a spółrzędne r', w' każdego punktu M' przechodzą naskutek równań (51) w spółrzędne r, w punktu, należącego do punktów M, to mówić będziemy, że figury F i F' są homotetyczne ze środkiem homotetyczności A i stosunkiem homotetyczności τ i przytem nazwiemy figury te homotetycznemi wprost, gdy $\tau > 0$, a homotetycznemi odwrotnie, gdy $\tau < 0$. Łatwo dostrzec, że jeżeliby było $\tau = -1$ i gdybyśmy którąkolwiek z figur homotetycznych F i F' obrócili naokoło środka homotetyczności A o kąt $+\pi$, albo o kąt $-\pi$, wówczas figura ta przeszłaby w drugą z nich i przytem nakryłyby się punkty M i M' sobie odpowiadające. Jeżeliby zaś τ było różne od -1 i gdybyśmy którąkolwiek z figur F i F' obrócili dookoła punktu A o kąt $+\pi$, lub o kąt $-\pi$, to otrzymalibyśmy figurę, która byłaby także figurą homotetyczną z drugą z nich i przytem środkiem tej homotetyczności byłby ten sam punkt A, a jej stosunkiem byłaby liczba, różniąca się tylko znakiem od wartości poprzedniego stosunku. Część wniosków, zawartych w zdaniu poprzedniem, możemy także wypowiedzieć w ten sposób, że naskutek powyższego działania figury odwrotnie homotetyczne przechodzą przy spełnieniu nierówności $\tau \neq -1$ w figury wprost homotetyczne, a figury wprost homotetyczne przechodzą w figury odwrotnie homotetyczne, z wyłączeniem przypadku, w którym stosunkiem ostatniej homotetyczności jest -1.

Przytoczymy teraz bez bliższego uzasadnienia pewne elementarne własności odpowiedniości, o których tutaj mowa.

Jedynym właściwym punktem niezmiennym homotetyczności jest jej środek. Każda prosta, przechodząca przez środek homotetyczności, jest niezmienną prostą tej homotetyczności. Każda prosta, nie przechodząca przez środek homotetyczności, nie jest prostą niezmienną tej homotetyczności, ale jej dwukierunek jest dwukierunkiem niezmiennym tej homotetyczności. Każdy odcinek prostolinjowy przechodzi naskutek homotetyczności w odcinek prostolinjowy, którego bezwzględna długość równa się bezwzględnej długości poprzedniego odcinka pomnożonej przez bezwzględną wartość stosunku homotetyczności. Każdy wektor, położony na prostej, zawierającej środek homotetyczności, przechodzi naskutek homotetyczności w wektor, położony na tejże linji prostej. Każdy wektor o długości różnej od zera, położony na prostej, nie zawierającej środka homotetyczności, przechodzi naskutek homotetyczności w wektor, położony na innej prostej, nie zawierającej środka homotetyczności, ale mającej z poprzednią wspólny dwukierunek. Wektory o długościach różnych od zera, odpowiadające sobie naskutek homotetyczności, mają ten sam kierunek, gdy stosunek homotetyczności jest dodatni, mają zaś wprost przeciwne sobie kierunki, gdy stosunek homotetyczności jest ujemny. Homotetyczność nie zmienia kątów ani co do ich wartości bezwzględnych, ani co do ich znaków. Homotetyczność przekształca każdy wielobok w wielobok, którego kąty równają się odpowiednim kątom poprzedniego wieloboku, a bezwzględne długości boków równają się bezwzględnym długościom odpowiednich boków poprzedniego wieloboku, pomnożonym przez bezwzględną wartość stosunku homotetyczności.

Niech będzie teraz na płaszczyźnie układ spółrzędnych prostolinjowych x, y. Oznaczmy w tym układzie spółrzędne pierwotnego punktu przez x, y, a spółrzędne przekształconego punktu przez x', y' i przypuśćmy, że spółrzędne środka homotetyczności A są w tymże układzie odpowiednio równe liczbom g, h. Jeżelibyśmy jeszcze oznaczyli w tym układzie literami λ, μ spółczynniki kierunkowe, należące do kierunku, określonego amplitudą w i na podstawie pierwszego z równań (51) napisali równania:

$$r'\lambda = \tau r \lambda, \quad r'\mu = \tau r \mu,$$

to z nich doszlibyśmy do związków:

(52) $$x'-g=\tau(x-g),\quad y'-h=\tau(y-h),$$

które przy zastosowaniu oznaczeń:

(53) $$p=g(1-\tau),\quad q=h(1-\tau),$$

moglibyśmy także napisać w postaci:

(54) $$x'=p+\tau x,\quad y'=q+\tau y.$$

Związki (52) lub (54) określają w układzie prostolinjowym x,y homotetyczność o środku homotetyczności g,h i stosunku homotetyczności τ. Wielkości p,q są spółrzędnemi punktu, który otrzymuje się przez wykonanie uważanego przekształcenia na początku spółrzędnych.

Weźmy w dalszym ciągu pod uwagę związki:

(55) $$\begin{cases}\bar{x}=a+a_1x'+a_2y',\\ \bar{y}=b+b_1x'+b_2y',\end{cases}$$

w których a,b oznaczają rzeczywiste liczby stałe, a a_1,b_1 i a_2,b_2 są dwiema parami rzeczywistych spółczynników kierunkowych, spełniających równości:

(56) $$a_1a_2+b_1b_2+(a_1b_2+b_1a_2)\cos\vartheta=\cos\vartheta,\quad a_1b_2-b_1a_2=1.$$

Związki (55) określają przekształcenie zmiennych x',y' na zmienne $\bar{x},\bar{y}$, które przedstawia przemieszczenie płaszczyzny w samej sobie. Jeżeli w związki (55) wstawimy wyrażenia (54), to otrzymamy:

(57) $$\begin{cases}\bar{x}=a+a_1p+a_2q+\tau(a_1x+a_2y),\\ \bar{y}=b+b_1p+b_2q+\tau(b_1x+b_2y).\end{cases}$$

Wykonamy teraz naprzód przemieszczenie płaszczyzny w samej sobie, a potem homotetyczność. Jeżeli w związkach:

(58) $$\begin{cases}x'=a+a_1x+a_2y,\\ y'=b+b_1x+b_2y,\end{cases}$$

wielkości a,b,a_1,b_1,a_2,b_2 mają te same znaczenia, co w związkach (55), a więc w szczególności spełnione są równości (56), to

związki te określają przemieszczenie płaszczyzny w samej sobie. Jeżeli w związkach:

$$\bar{x} = p + \tau x', \quad \bar{y} = q + \tau y' \tag{59}$$

wielkości p, q, τ mają to samo znaczenie, co w równaniach (54), to związki (59) określają homotetyczność. Podstawiając w (59) wyrażenia (58), dochodzimy do równości:

$$\begin{cases} \bar{x} = p + \tau a + \tau (a_1 x + a_2 y), \\ \bar{y} = q + \tau b + \tau (b_1 x + b_2 y). \end{cases} \tag{60}$$

Weźmy teraz pod uwagę dwa równania postaci:

$$\begin{cases} \bar{x} = m + m_1 x + m_2 y, \\ \bar{y} = n + n_1 x + n_2 y. \end{cases} \tag{61}$$

Jeżeli wielkości m, n oznaczają w nich stałe rzeczywiste, a wielkości m_1, n_1, m_2, n_2 takie stałe rzeczywiste, że z równań:

$$\tau a_1 = m_1, \quad \tau b_1 = n_1, \quad \tau a_2 = m_2, \quad \tau b_2 = n_2 \tag{62}$$

wynikają na τ wartości rzeczywiste, różne od zera i nie spełniające równania $\tau^2 = 1$, a na a_1, b_1, a_2, b_2 spółczynniki kierunkowe rzeczywiste, spełniające równości (56), to mówić będziemy, że związki (61) określają przekształcenie podobieństwa. Z równań (62) i równości (56) otrzymują się przy uwzględnieniu oznaczeń (3) i (18) §§ 39 i 40 tomu I równania:

$$\begin{cases} \tau^2 = \Phi (m_1, n_1) = \Phi (m_2, n_2), \\ \cos \vartheta \, \tau^2 = \Phi (m_1, n_1; m_2, n_2); \ \sin \vartheta \, \tau^2 = \Psi (m_1, n_1; m_2, n_2), \end{cases} \tag{63}$$

a to znaczy, że równania (61) określają wtedy i tylko wtedy przekształcenie podobieństwa, gdy spełnione są warunki:

$$\begin{cases} \Phi (m_2, n_2) = \Phi (m_1, n_1) \neq 1, \\ \Phi (m_1, n_1; m_2, n_2) = \cos \vartheta \, \Phi (m_1, n_1), \\ \Psi (m_1, n_1; m_2, n_2) = \sin \vartheta \, \Phi (m_1, n_1). \end{cases} \tag{64}$$

Widoczne, że wówczas wynikają z równań (63) wartości na τ, które są obie rzeczywiste i różnią się jedna od drugiej tylko znakiem, a ich wspólna wartość bezwzględna jest różna od zera i od jedności. Wartości te są spółczynnikami dwóch homotetyczności, które służyć mogą do wytworzenia uważanego przekształcenia podobieństwa działaniami, o których powyżej była mowa. Przy jednym z tych spółczynników równania (62) określają jedną parę kierunków a_1, b_1 i a_2, b_2, przy drugim z nich parę kierunków wprost przeciwnych. Jeżeli w celu wytworzenia przekształcenia podobieństwa wykonywamy naprzód homotetyczność, a następnie przemieszczenie płaszczyzny w samej sobie, to na podstawie równości (53), (57), (61) i (62) dochodzimy do związków:

$$(65)\qquad \begin{cases} \tau\,(m-a)+(\tau-1)\,(m_1\,g+m_2\,h)=0\,, \\ \tau\,(n-b)+(\tau-1)\,(n_1\,g+n_2\,h)=0\,, \end{cases}$$

które, dla danego przekształcenia podobieństwa i dla wybranego z pośród dwóch rzeczonych spółczynników homotetyczności, określają jednojednowartościową odpowiedniość pomiędzy punktem a, b i środkiem homotetyczności g, h. Jeżeli zaś dla wytworzenia przekształcenia podobieństwa wykonywamy naprzód przemieszczenie płaszczyzny w samej sobie, a następnie homotetyczność, to na podstawie równości (53), (60), (61) i (62) mamy związki:

$$(66)\qquad \tau\,a+(1-\tau)\,g-m=0\,,\quad \tau\,b+(1-\tau)\,h-n=0\,,$$

które przy takiem wytwarzaniu przekształcenia podobieństwa określają jednojednowartościową odpowiedniość punktów a, b i g, h, należącą do tego przekształcenia podobieństwa i do jednego z dwóch odnośnych spółczynników homotetyczności.

W związku z temi rozważaniami o homotetyczności i podobieństwie rozważymy tutaj pewne zadania, dotyczące krzywych stopnia drugiego. Weźmiemy pod uwagę dwie różne jedna od drugiej krzywe stopnia drugiego:

$$(67)\qquad \begin{cases} f\,(x,y)=A\,x^2+2\,B\,x\,y+C\,y^2+2\,D\,x+2\,E\,y+F=0\,, \\ f'(x',y')=A'x'^2+2\,B'x'y'+C'y'^2+2\,D'x'+2\,E'y'+F'=0 \end{cases}$$

i zajmiemy się naprzód kwestją wyznaczenia takich ewentualnie istniejących homotetyczności, naskutek których jedna z tych linij

krzywych przechodzi w drugą. Podstawiając w wielomian $f'(x', y')$ spółrzędne x', y', określone wzorami (54), otrzymujemy wzór:

$$(68) \qquad f'(x', y') = \tau^2 (A'x^2 + 2B'xy + C'y^2) +$$
$$+ 2\tau [(A'p + B'q + D')x + (B'p + C'q + E')y] + f'(p, q).$$

Krzywe (67) są homotetyczne wtedy i tylko wtedy, gdy można wyznaczyć rzeczywiste wielkości p, q, rzeczywistą, różną od zera i od jedności, wielkość τ i rzeczywisty, różny od zera, czynnik ρ, czyniące zadość równaniom:

$$(69) \quad \begin{cases} \tau^2 A' = \rho A, \quad \tau^2 B' = \rho B, \quad \tau^2 C' = \rho C, \\ \tau (A'p + B'q + D') = \rho D, \quad \tau (B'p + C'q + E') = \rho E, \\ p (A'p + B'q + D') + q (B'p + C'q + E') + \\ + D'p + E'q + F' = \rho F. \end{cases}$$

Z równań pierwszego wiersza wynika, że krzywe (67) mogą być homotetyczne tylko wtedy, gdy obie mają te same dwukierunki asymptotyczne. Jeżeli warunek ten jest spełniony, to można lewą stronę drugiego z równań (67) pomnożyć przez taki czynnik stały, że zachodzić będą równości:

$$(70) \qquad A' = A, \quad B' = B, \quad C' = C.$$

Wobec tego możemy a priori założyć, że zachodzą równości (70), a więc z pierwszego wiersza równań (69) dojdziemy do równości $\rho = \tau^2$ i będziemy mogli równania drugiego i trzeciego wiersza napisać w postaci:

$$Ap + Bq + D' = \tau D, \quad Bp + Cq + E' = \tau E,$$
$$p (Ap + Bq + D') + q (Bp + Cq + E') + D'p + E'q + F' = \tau^2 F.$$

Łatwo dostrzec, że te trzy równania zastąpić można przez równania:

$$(71) \quad \begin{cases} Ap + Bq + D' - \tau D = 0, \\ Bp + Cq + E' - \tau E = 0, \\ (D' + \tau D) p + (E' + \tau E) q + F' - \tau^2 F = 0. \end{cases}$$

Zajmiemy się naprzód przypadkami, w których $\delta \neq 0$. Wtedy warunek konieczny i wystarczający, żeby istniały wielkości p, q, spełniające związki (71), polega na zachodzeniu równości:

$$\begin{vmatrix} A\ , & B\ , & D'-\tau D \\ B\ , & C\ , & E'-\tau E \\ D'+\tau D, & E'+\tau E, & F'-\tau^2 F \end{vmatrix} = 0,$$

którą łatwo można doprowadzić do postaci:

$$(72) \qquad \begin{vmatrix} A, & B, & D' \\ B, & C, & E' \\ D', & E', & F' \end{vmatrix} - \tau^2 \begin{vmatrix} A, & B, & D \\ B, & C, & E \\ D, & E, & F \end{vmatrix} = 0.$$

Jeżeli zaś zastosujemy wiadome oznaczenie Δ, a odnośnie do drugiego z równań (67) użyjemy analogicznego oznaczenia Δ', to będziemy mogli związek (72) napisać w postaci:

$$(73) \qquad \Delta' - \tau^2 \Delta = 0.$$

Ze związku tego wynika, że w przypadkach zachodzenia homotetyczności wielkości Δ i Δ' są albo obie równe zeru, albo też obie różne od zera i przytem obie tego samego znaku. Gdy $\Delta = 0$ i $\Delta' = 0$, wówczas na wielkość τ można wybrać każdą wartość rzeczywistą różną od zera i od $+1$. Gdy wielkości Δ i Δ' są obie różne od zera i obie tego samego znaku, ale przytem $\Delta \neq \Delta'$, wówczas otrzymujemy na τ dwie wartości, określone wzorem:

$$(74) \qquad \tau = \pm \sqrt{\left|\frac{\Delta'}{\Delta}\right|}.$$

Gdy zaś wielkości Δ i Δ' są obie różne od zera i przytem $\Delta' = \Delta$, wówczas na stosunek homotetyczności otrzymujemy wartość -1. W tych wszystkich przypadkach na mocy wzorów (53) i pierwszych dwóch z równań (71) spółrzędne g, h środka homotetyczności otrzymują się z równań:

$$(75) \qquad \begin{cases} A g + B h + \dfrac{D' - \tau D}{1 - \tau} = 0, \\ B g + C h + \dfrac{E' - \tau E}{1 - \tau} = 0. \end{cases}$$

Zauważymy tu naprzód, że w przypadku szczególnym $\tau = -1$ równania te są:

$$(76)\quad Ag + Bh + \frac{D + D'}{2} = 0, \quad Bg + Ch + \frac{E + E'}{2} = 0.$$

Następnie zaś zapytamy, czy istnieją przypadki, w których dwóm różnym wartościom τ_1 i τ_2 na stosunek homotetyczności τ odpowiada jeden i ten sam środek homotetyczności. To zachodziłoby wtedy i tylko wtedy, gdyby spełnione były równości:

$$\frac{D' - \tau_1 D}{1 - \tau_1} = \frac{D' - \tau_2 D}{1 - \tau_2}, \quad \frac{E' - \tau_1 E}{1 - \tau_1} = \frac{E' - \tau_2 E}{1 - \tau_2}.$$

Równości te można inaczej napisać w postaci:

$$(\tau_2 - \tau_1)(D - D') = 0, \quad (\tau_2 - \tau_1)(E - E') = 0,$$

a stąd wynika, że przypadki, w których dwóm różnym wartościom na stosunek τ odpowiada ten sam środek homotetyczności, zachodzić mogą tylko wtedy, gdy spełnione są obie równości:

$$(77)\quad D' = D, \quad E' = E.$$

Ale przy spełnieniu tych równości równania (75) redukują się do równań:

$$(78)\quad Ag + Bh + D = 0, \quad Bg + Ch + E = 0.$$

Na podstawie tych rachunków możemy teraz wyliczyć wszystkie przypadki zachodzenia homotetyczności pomiędzy dwiema linjami krzywemi stopnia drugiego, mającemi środki. Jeżeli dwie pary linij prostych przecinających się mają te same dwukierunki, ale różne od siebie punkty przecięcia się, to pomiędzy niemi zachodzi nieskończenie wiele homotetyczności; wtedy stosunkiem homotetyczności może być każda dowolna liczba rzeczywista różna od zera i dodatniej jedności, a gdy liczba ta jest wybrana, wówczas odnośny środek homotetyczności otrzymuje się z równań (75). Zauważymy przytem, że rugowanie wielkości τ ze związków (75) prowadzi do równania:

$$(Ag + Bh + D)(Bg + Ch + E') - (Bg + Ch + E)(Ag + Bh + D') = 0,$$

które jest widocznie równaniem pierwszego stopnia względem g i h. Można je napisać w formie:

$$(E - E')(A\,g + B\,h + D) - (D - D')(B\,g + C\,h + E) = 0,$$

a także w formie:

$$(E - E')(A\,g + B\,h + D') - (D - D')(B\,g + C\,h + E') = 0.$$

Widzimy więc, że środki homotetyczności dwóch uważanych par linij prostych leżą na prostej, łączącej punkt przecięcia się prostych jednej pary i punkt przecięcia się prostych drugiej pary. Łatwo przytem dostrzec, że te punkty przecięcia się i niewłaściwy punkt rzeczonej prostej połączenia odpowiadają wartościom 0, ∞ i $+1$ wielkości τ, t.j. wartościom, z których żadna nie może być stosunkiem homotetyczności. Dwa koła same ze sobą sprzężone i różne jedno od drugiego są homotetyczne wtedy i tylko wtedy, gdy są albo oba rzeczywiste, albo też oba urojone. Dwa takie koła mogą mieć: 1) różne promienie i różne środki, 2) różne promienie i ten sam środek, 3) te same promienie i różne środki. Dwie elipsy są homotetyczne wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same dwukierunki asymptotyczne, gdy są albo obie rzeczywiste, albo obie urojone i gdy wreszcie dwukierunki ich osi wielkich są te same. Dwie takie elipsy mogą mieć: 1) różne długości wielkich osi i różne środki, 2) różne długości wielkich osi i ten sam środek, 3) te same długości wielkich osi i różne środki. Dwie hiperbole są homotetyczne wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same dwukierunki asymptotyczne i gdy dwukierunki ich osi rzeczywistych są te same. Takie dwie hiperbole mogą mieć: 1) różne długości osi rzeczywistych i różne środki, 2) różne długości osi rzeczywistych i ten sam środek, 3) te same długości osi rzeczywistych i różne środki. Bliższe określenie własności homotetyczności, które mają miejsce dla wymienionych powyżej par kół, par elips i par hiperbol można sformułować jak następuje. W każdym z przypadków 1) pomiędzy odnośnemi linjami krzywemi zachodzą dwie homotetyczności, których stosunki określają się ze wzoru (74), a dwa różne od siebie środki homotetyczności z równań (75). W każdym z przypadków 2) zachodzą pomiędzy odnośnemi linjami krzywemi także dwie homotetyczności, których stosunki określają się ze wzoru (74), ale obie te homotetyczności mają ten sam środek, który spełnia równanie (78), jest więc wspólnym środkiem uważanych linij krzywych. Wreszcie w każdym z przypadków 3) zachodzi tylko jedna homotetyczność, której stosunek równa się -1, a środek określa się z równań (76); ta homotetyczność jest równoważna

obrotowi linji krzywej o którykolwiek z kątów $\pm\pi$ naokoło środka homotetyczności.

Zwrócimy się teraz do wyprowadzenia konsekwencyj, wynikających z równań (71) przy założeniu $\delta = 0$. Wtedy możemy te równania napisać w postaci:

$$(79)\qquad \begin{cases} \varepsilon\,\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}\,p + \mathfrak{b}\,q) + D' - \tau D = 0, \\ \varepsilon\,\mathfrak{b}\,(\mathfrak{a}\,p + \mathfrak{b}\,q) + E' - \tau E = 0, \\ (D' + \tau D)\,p + (E' + \tau E)\,q + F' - \tau^2 F = 0. \end{cases}$$

Jeżeli z pierwszych dwóch z tych równań wyrugujemy dwumian $\mathfrak{a}\,p + \mathfrak{b}\,q$, to otrzymamy związek:

$$(80)\qquad \mathfrak{a}\,E' - \mathfrak{b}\,D' - \tau\,(\mathfrak{a}\,E - \mathfrak{b}\,D) = 0.$$

Przez zastosowanie do pierwszej i drugiej z krzywych (67) wiadomych oznaczeń Δ i Δ' mieć będziemy:

$$\Delta = -\varepsilon\,(\mathfrak{a}\,E - \mathfrak{b}\,D)^2, \quad \Delta' = -\varepsilon\,(\mathfrak{a}\,E' - \mathfrak{b}\,D')^2,$$

a więc τ, czyniące zadość związkowi (80), spełnia także związek:

$$\Delta' - \tau^2\,\Delta = 0,$$

t.j. związek tej samej postaci, co związek (72). Ze związku (80) wynika, że parabola może być homotetyczną tylko z parabolą, a para prostych o wspólnym dwukierunku z parą prostych o wspólnym dwukierunku. Załóżmy naprzód, że równania (67) przedstawiają d w i e p a r a b o l e, t.j. że oba wyznaczniki $\mathfrak{a}\,E - \mathfrak{b}\,D$ i $\mathfrak{a}\,E' - \mathfrak{b}\,D'$ są różne od zera. Wtedy z równania (80) wynika na τ wartość:

$$(81)\qquad \tau = \frac{\mathfrak{a}\,E' - \mathfrak{b}\,D'}{\mathfrak{a}\,E - \mathfrak{b}\,D},$$

a stosując ten wzór, otrzymujemy wyrażenia:

$$D' - \tau\,D = \frac{\mathfrak{a}\,(D'E - E'D)}{\mathfrak{a}\,E - \mathfrak{b}\,D}, \quad E' - \tau\,E = \frac{\mathfrak{b}\,(D'E - E'D)}{\mathfrak{a}\,E - \mathfrak{b}\,D}.$$

Na podstawie tych wyrażeń i wzorów (53) możemy przy spełnieniu nierówności:

$$\mathfrak{a}\,E' - \mathfrak{b}\,D' \neq \mathfrak{a}\,E - \mathfrak{b}\,D \tag{82}$$

układ równań (79) zastąpić przez równania:

$$\begin{cases} \mathfrak{a}\,g + \mathfrak{b}\,h + \dfrac{\varepsilon}{1-\tau}\,\dfrac{D'E - E'D}{\mathfrak{a}\,E - \mathfrak{b}\,D} = 0, \\ (D' + \tau D)\,g + (E' + \tau E)\,h + \dfrac{F' - \tau^2 F}{1-\tau} = 0, \end{cases} \tag{83}$$

w których τ ma wartość (81). Na podstawie rozważań podanych w końcu § 25 łatwo dostrzec, że przypadek, w którym równania (83) zastosowane być nie mogą, t.j. przypadek spełnienia równości:

$$\mathfrak{a}\,E' - \mathfrak{b}\,D' = \mathfrak{a}\,E - \mathfrak{b}\,D,$$

zachodzi wtedy, gdy jedna parabola przechodzi w drugą przez przesunięcie. Wyznacznik równań (83) względem g i h równa się wielkości:

$$2\,(\mathfrak{a}\,E' - \mathfrak{b}\,D'),$$

a więc jest różny od zera. Widzimy zatem, że dwie parabole są wtedy i tylko wtedy homotetyczne, gdy mają ten sam dwukierunek asymptotyczny i gdy spełniona jest nierówność (82). Spółczynnik tej homotetyczność określa się ze wzoru (81), a spółrzędne jej środka z równań (83).

Przypuśćmy teraz, że równania (67) przedstawiają dwie pary prostych o wspólnym dwukierunku, t.j. że spełnione są obie równości:

$$\mathfrak{a}\,E - \mathfrak{b}\,D = 0, \quad \mathfrak{a}\,E' - \mathfrak{b}\,D' = 0. \tag{84}$$

Wtedy istnieją takie różne od zera czynniki rzeczywiste m i m', że zachodzą równości:

$$D = m\,\mathfrak{a}, \quad E = m\,\mathfrak{b}, \quad D' = m'\mathfrak{a}, \quad E' = m'\mathfrak{b}, \tag{85}$$

i można związki (79) zastąpić przez związki:

$$\begin{cases} \varepsilon\,(\mathfrak{a}\,p + \mathfrak{b}\,q) + m' - \tau\,m = 0, \\ (m' + \tau\,m)\,(\mathfrak{a}\,p + \mathfrak{b}\,q) + F' - \tau^2 F = 0. \end{cases} \tag{86}$$

Aby równania te nie były sprzeczne musi być spełniony warunek:

$$F' - \varepsilon\,m'^2 - \tau^2\,(F - \varepsilon\,m^2) = 0. \tag{87}$$

Ze związku tego wynika, że w przypadkach zachodzenia homotetyczności wielkości $F - \varepsilon m^2$ i $F' - \varepsilon m'^2$ muszą być albo obie różne od zera i obie tego samego znaku, albo też obie równe zeru. Pierwszy z tych przypadków ma miejsce wówczas, gdy obie pary składają się z różnych prostych rzeczywistych, lub też ze sprzężonych prostych urojonych. Jeżeli w pierwszym z tych przypadków założymy naprzód, że zachodzi nierówność:

$$F' - \varepsilon m'^2 \neq F - \varepsilon m^2,$$

czyli, że kwadrat prostopadłej odległości dwóch prostych jednej pary jest różny od kwadratu prostopadłej odległości dwóch prostych drugiej pary, to z warunku (87) wynikną na stosunek homotetyczności τ dwie liczby o bezwzględnej wartości różnej od zera i od jedności oraz różniące się jedna od drugiej tylko znakiem. Każdemu z tych stosunków odpowiada nieskończenie wiele środków homotetyczności, położonych na prostej, określonej równaniem:

$$(88) \qquad \varepsilon (\mathfrak{a}\, g + \mathfrak{b}\, h) + m' - \tau [\varepsilon (\mathfrak{a}\, g + \mathfrak{b}\, h) + m] = 0,$$

a miejscem geometrycznem środków homotetyczności, należących do obu tych stosunków, jest para prostych wyznaczona równaniem:

$$(89) \qquad (F - \varepsilon m^2) [\varepsilon (\mathfrak{a}\, g + \mathfrak{b}\, h) + m']^2 -$$

$$- (F' - \varepsilon m'^2) [\varepsilon (\mathfrak{a}\, g + \mathfrak{b}\, h) + m]^2 = 0.$$

Jeżeli zaś w pierwszym z rzeczonych przypadków zachodzi równość:

$$F' - \varepsilon m'^2 = F - \varepsilon m^2,$$

t.j. jeżeli kwadrat prostopadłej odległości dwóch prostych jednej pary równa się kwadratowi prostopadłej odległości dwóch prostych drugiej pary, to z warunku (87) otrzymuje się na τ tylko jedna wartość, która jest stosunkiem homotetyczności, mianowicie $\tau = -1$. Na podstawie pierwszego z równań (86) wartości tej odpowiada nieskończenie wiele środków homotetyczności, leżących na prostej określonej równaniem:

$$(90) \qquad \varepsilon (\mathfrak{a}\, g + \mathfrak{b}\, h) + \frac{m + m'}{2} = 0.$$

Ta prosta posiada wspólny dwukierunek z prostemi środków obu par i dzieli na dwie części równe prostopadłą odległość tych prostych. Drugi z wymienionych powyżej przypadków zachodzi wówczas, gdy obie pary prostych redukują się do prostej podwójnej. Wtedy środek homotetyczności może być wybrany w dowolnym punkcie płaszczyzny, nie leżącym na żadnej z prostych podwójnych, a wartość spółczynnika homotetyczności temu środkowi odpowiadająca, otrzyma się z równania (88) i widoczne, że wartość ta będzie różna od zera, nieskończoności i dodatniej jedności.

Weźmy teraz pod uwagę dowolną figurę F, składającą się bądź ze skończonej, bądź też z nieskończonej liczby punktów zespolonych. Jeżeli na wszystkich punktach figury F wykonamy przekształcenie określone wzorami (58), w których spółczynniki a_1, b_1, a_2, b_2 spełniają związki (56), to otrzymamy pewną figurę F', wogóle różną od poprzedniej. Dwie dane różne od siebie figury F i F', składające się z punktów zespolonych i mające własność, że punkty jednej z nich przechodzą w punkty drugiej przez odpowiednio dobrane przekształcenie (58), którego spółczynniki spełniają równości (56), nazywać będziemy figurami nakładalnemi. Jeżeli na wszystkich punktach figury F wykonamy przekształcenie (61), którego spółczynniki m_1, n_1, m_2, n_2 spełniają równości (64), to otrzymamy pewną figurę $\bar{F}$, wogóle różną od poprzedniej i wogóle nienakładalną na poprzednią. Dwie dane różne od siebie figury F i $\bar{F}$, składające się z punktów zespolonych i mające własność, że punkty jednej z nich przechodzą w punkty drugiej przez przekształcenie (61), którego spółczynniki spełniają równości (64), nazywać będziemy figurami podobnemi. Zajmiemy się rozważeniem warunków, przy zachodzeniu których dwie dane różne od siebie krzywe stopnia drugiego są figurami nakładalnemi oraz rozważeniem warunków, przy spełnieniu których dwie dane różne od siebie krzywe stopnia drugiego są figurami podobnemi. Zauważmy, że jeżeli istnieją takie dwa nakładalne prostokątne układy spółrzędnych, że równanie, które określa jedną z krzywych stopnia drugiego w jednym z tych układów, i równanie, które określa drugą z krzywych stopnia drugiego w drugim z tych układów, są temi samemi związkami pomiędzy odnośnemi spółrzędnemi, to rzeczone krzywe stopnia drugiego są krzywemi nakładalnemi. Zauważmy także, że jeżeli istnieje takie przemieszczenie jednej z dwóch krzywych

stopnia drugiego, że po wykonaniu tego przemieszczenia krzywe uważane stają się homotetycznemi, a spółczynnik tej homotetyczności jest różny od — 1, to rzeczone krzywe są krzywemi podobnemi. Korzystając z tych uwag, możemy na podstawie poprzednich rozważań wypowiedzieć szereg wniosków następujących.

Warunek konieczny i wystarczający, żeby dwie pary linij prostych przecinających się były bądź na siebie nakładalne, bądź też do siebie podobne, polega na tem, żeby kwadrat tangensa kątów linij prostych jednej z tych par był równy kwadratowi tangensa kątów linij prostych drugiej z tych par. Jeżeli warunek ten jest spełniony, to pary te są na siebie nakładalne, a przytem istnieje nieskończenie wiele przekształceń podobieństwa, które jedną z tych par przeprowadzają w drugą. Dwa różne od siebie koła same ze sobą sprzężone są na siebie nakładalne wtedy i tylko wtedy, gdy promień jednego z nich równa się promieniowi drugiego z nich. Każde dwa koła rzeczywiste o różnych promieniach są do siebie podobne. Każde dwa koła urojone same ze sobą sprzężone o różnych promieniach są do siebie podobne. Dwie różne od siebie elipsy rzeczywiste są na siebie nakładalne wtedy i tylko wtedy, gdy długości ich osi wielkich są te same i długości ich osi małych są te same. Dwie elipsy rzeczywiste są do siebie podobne, gdy stosunek długości wielkiej osi jednej z tych elips do długości wielkiej osi drugiej z nich równa się stosunkowi długości małej osi pierwszej z tych elips do długości małej osi drugiej z nich i gdy stosunki te są różne od jedności. Dwie różne od siebie elipsy urojone są na siebie nakładalne, względnie do siebie podobne, gdy spełnione są dla nich odpowiednio warunki, które formułują się tak samo, jak powyższe warunki, dotyczące elips rzeczywistych. Dwie różne od siebie hiperbole są na siebie nakładalne wtedy i tylko wtedy, gdy długości ich osi rzeczywistych są te same i długości ich osi urojonych są te same. Dwie hiperbole są do siebie podobne, gdy stosunek długości rzeczywistej osi jednej z nich do długości rzeczywistej osi drugiej z nich równa się stosunkowi urojonej osi pierwszej z nich do długości urojonej osi drugiej i gdy wspólna wartość tych stosunków jest różna od jedności. Zauważmy przytem, że z powyższych twierdzeń wynika wniosek następujący. Jedynym bezwzględnym niezmiennikiem krzywej stopnia drugiego rodzaju elips lub rodzaju hiperbol jest przy przekształceniach podobieństwa stosunek $\omega^2 : \delta$.

Przechodząc teraz do krzywych rodzaju parabol, zaznaczymy naprzód, że dwie różne od siebie parabole są na siebie nakładalne wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same parametry. Każde dwie parabole o różnych od siebie parametrach są do siebie podobne. Dwie różne od siebie pary linij prostych, mających wspólny dwukierunek, są na siebie nakładalne wtedy i tylko wtedy, gdy kwadrat prostopadłej odległości prostych pierwszej pary równa się kwadratowi prostopadłej odległości prostych drugiej pary. Jeżeli dla dwóch par prostych rzeczywistych, mających wspólny dwukierunek, spełnione są warunki: 1) kwadrat prostopadłej odległości prostych pierwszej pary nie równa się kwadratowi prostopadłej odległości prostych drugiej pary, 2) żaden z rzeczonych kwadratów nie jest zerem, to pary te są do siebie podobne i przytem istnieje nieskończenie wiele przekształceń podobieństwa, które jedną z nich przeprowadzają w drugą. Jeżeli dla dwóch par prostych urojonych ze sobą sprzężonych, mających wspólny dwukierunek, spełniony jest warunek, że kwadrat prostopadłej odległości prostych pierwszej pary nie równa się kwadratowi prostopadłej odległości prostych drugiej pary, to pary te są do siebie podobne i istnieje nieskończenie wiele przekształceń podobieństwa, przeprowadzających jedną z tych par w drugą. Każde dwie różne od siebie proste podwójne są na siebie nakładalne i przytem istnieje nieskończenie wiele przekształceń podobieństwa, które przeprowadzają jedną z tych prostych w drugą. Krzywa stopnia drugiego rodzaju parabol niema żadnego niezmiennika względem przekształceń podobieństwa.

Wreszcie zaznaczamy, że w podanych tutaj wynikach, dotyczących nakładalności i podobieństwa krzywych stopnia drugiego pominęliśmy rozmaite szczegóły tego tematu, np. nie zajmowaliśmy się wcale rozważeniem takich ewentualnie istniejących przemieszczeń względnie takich ewentualnie istniejących przekształceń podobieństwa, które daną krzywą stopnia drugiego przeprowadzają w tę samą krzywą stopnia drugiego.

§ 39. Niektóre uogólnienia rozważań § 38.

Niech będzie układ spółrzędnych prostolinjowych x, y, którego oś y tworzy z osią x kąt ϑ. Zajmiemy się naprzód pewnem przekształceniem zmiennych x, y na zmienne x', y', interpretując pierwsze

z nich jako spółrzędne pierwotnego punktu w układzie x, y, drugie zaś jako spółrzędne przekształconego punktu w tymże układzie x, y. Niech będzie stały punkt A o spółrzędnych g, h i weźmy pod uwagę przekształcenie, określone równaniami:

$$x' - g = \tau (x - g), \quad y' - h = \sigma (y - h), \tag{91}$$

w których τ i σ są spółczynnikami rzeczywistemi różnemi od zera. Jeżeliby było $\sigma = \tau$, a przytem $\tau \neq 1$, to mielibyśmy równania (52), określające homotetyczność, której własności rozważaliśmy w § 38. Przyjmiemy naprzód, że spełniona jest nierówność $\sigma \neq \tau$ i zwrócimy uwagę na to, że tak samo jak przy homotetyczności jedynym niezmiennym właściwym punktem przekształcenia (91) jest punkt A i że przekształcenie to przeprowadza każdą prostą, przechodzącą przez ten punkt, w prostą również przechodzącą przez ten punkt. Wśród tych prostych są tylko dwie proste niezmienne przy przekształceniu (91), a mianowicie proste, przechodzące przez punkt A i mające dwukierunki osi spółrzędnych x i y. Każda inna prosta, mająca dwukierunek osi x-ów, przechodzi w różną od siebie prostą, mającą dwukierunek osi x-ów, a każda inna prosta, mająca dwukierunek osi y-ów, przechodzi w różną od siebie prostą, mającą dwukierunek osi y-ów. Każda prosta, której dwukierunek jest różny od dwukierunków osi spółrzędnych, przechodzi naskutek przekształcenia (91) w prostą o dwukierunku, różnym od swego poprzedniego dwukierunku i od dwukierunków osi spółrzędnych.

Założymy teraz, że spółczynniki τ i σ, figurujące w równaniach (91), mogą przyjmować wszelkie możliwe wartości rzeczywiste, byleby żaden z nich nie był równy zeru. Jeżeli zastosujemy oznaczenia:

$$p = g (1 - \tau), \quad q = h (1 - \sigma), \tag{92}$$

to będziemy mogli równania (91) napisać w postaci:

$$x' = p + \tau x, \quad y' = q + \sigma y. \tag{93}$$

Niech będą następnie równania:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = a + a_1 x' + a_2 y', \\ \bar{y} = b + b_1 x' + b_2 y', \end{array} \right. \tag{94}$$

w których a, b oznaczają rzeczywiste wielkości stałe, a a_1, b_1 i a_2, b_2

dwie pary rzeczywistych spółczynników kierunkowych, t.j. wielkości, spełniających równania:

$$\Phi(a_1, b_1) = 1, \quad \Phi(a_2, b_2) = 1, \tag{95}$$

przyczem zakładamy, że kierunki określone przez te spółczynniki nie należą do tego samego dwukierunku, t.j. że spełniona jest nierówność:

$$\Psi(a_1, b_1; a_2, b_2) \neq 0. \tag{96}$$

Jeżeli w równaniach (94) wielkości x' i y' oznaczają spółrzędne punktu w układzie x, y, a wielkości $\bar{x}, \bar{y}$ także spółrzędne punktu w układzie x, y, to równania te określają przekształcenie płaszczyzny, którego własności studjowaliśmy w § 36. Podstawiając w równania (94) wyrażenia (93), otrzymamy związki:

$$\begin{cases} \bar{x} = a + a_1 p + a_2 q + \tau a_1 x + \sigma a_2 y, \\ \bar{y} = b + b_1 p + b_2 q + \tau b_1 x + \sigma b_2 y. \end{cases} \tag{97}$$

Jeżeli zaś naprzód wykonamy przekształcenie płaszczyzny, określone równaniami:

$$\begin{cases} x' = a + a_1 x + a_2 y, \\ y' = b + b_1 x + b_2 y, \end{cases} \tag{98}$$

w których spółczynniki rzeczywiste $a_1, b_1; a_2, b_2$ spełniają warunki (95) i (96), potem zaś przekształcenie, określone równaniami:

$$\bar{x} = p + \tau x', \quad \bar{y} = q + \sigma y', \tag{99}$$

w których spółczynniki mają takie same znaczenia jak odpowiednie spółczynniki w równaniach (93), to dojdziemy do związków:

$$\begin{cases} \bar{x} = p + \tau a + \tau (a_1 x + a_2 y), \\ \bar{y} = q + \sigma b + \sigma (b_1 x + b_2 y). \end{cases} \tag{100}$$

Weźmy teraz pod uwagę równania:

$$\begin{cases} \bar{x} = m + m_1 x + m_2 y, \\ \bar{y} = n + n_1 x + n_2 y, \end{cases} \tag{101}$$

w których m, n oznaczają dane wielkości stałe, a m_1, n_1, m_2, n_2 takie dane wielkości stałe, że spełniona jest nierówność:

$$m_1 n_2 - n_1 m_2 \neq 0.$$

Równania (101) określają wtedy pewne dane linjowe przekształcenie zmiennych x, y na zmienne $\bar{x}, \bar{y}$. Zajmiemy się zapytaniem, czy można i ewentualnie jak można przedstawić dane przekształcenie (101) równaniami postaci (97) i równaniami postaci (100), t.j. czy można i ewentualnie jak można wytworzyć przekształcenie (101) przez wykonanie przekształceń takich kategoryj, i w takiej kolejności, jak to czyniliśmy właśnie przy wyprowadzaniu równań (97) i równań (100).

Aby równania (101) przedstawić w postaci (97), trzeba wyznaczyć takie wielkości rzeczywiste a, b; a_1, b_1; a_2, b_2; τ, σ; p, q, czyniące zadość wyżej podanym warunkom, żeby spełnione były równania:

$$(102) \quad \begin{cases} a + a_1 p + a_2 q = m, \quad b + b_1 p + b_2 q = n, \\ \tau a_1 = m_1, \quad \tau b_1 = n_1, \quad \sigma a_2 = m_2, \quad \sigma b_2 = n_2. \end{cases}$$

Z drugiego wiersza tych równań wynikają na τ i σ wartości:

$$(103) \qquad \tau = \varepsilon_1 \sqrt{\Phi(m_1, n_1)}, \quad \sigma = \varepsilon_2 \sqrt{\Phi(m_2, n_2)},$$

gdzie $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, a więc otrzymujemy na spółczynniki kierunkowe a_1, b_1 i a_2, b_2 wartości:

$$(104) \quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{m_1}{\varepsilon_1 \sqrt{\Phi(m_1, n_1)}}, \quad b_1 = \dfrac{n_1}{\varepsilon_1 \sqrt{\Phi(m_1, n_1)}}, \\ a_2 = \dfrac{m_2}{\varepsilon_2 \sqrt{\Phi(m_2, n_2)}}, \quad b_2 = \dfrac{n_2}{\varepsilon_2 \sqrt{\Phi(m_2, n_2)}}. \end{cases}$$

Z pierwszego wiersza równań (102) wynikają przy uwzględnieniu drugiego wiersza tych równań oraz związków (92) związki:

$$(105) \quad \begin{cases} \tau\sigma(a - m) + \sigma(1 - \tau) m_1 g + \tau(1 - \sigma) m_2 h = 0, \\ \tau\sigma(b - n) + \sigma(1 - \tau) n_1 g + \tau(1 - \sigma) n_2 h = 0. \end{cases}$$

Jeżeli żadna z wielkości τ i σ nie jest jednością, to dla każdej pary tych wielkości, określonych wzorami (103), związki (105)

wyznaczają jednojednowartościową odpowiedniość pomiędzy punktem o spółrzędnych a, b i punktem o spółrzędnych g, h. Jeżeli $\sigma = 1$, a $\tau \neq 1$, to punkt a, b spełniać musi warunek:

$$n_1 (a - m) - m_1 (b - n) = 0$$

i każdemu takiemu punktowi a, b odpowiada określona wartość na g, a wartość na h może być wybrana dowolnie. Jeżeli $\tau = 1$, a $\sigma \neq 1$, to punkt a, b spełniać musi warunek:

$$n_2 (a - m) - m_2 (b - n) = 0$$

i przytem każdemu takiemu punktowi a, b odpowiada określona wartość na h, a wielkość g może być wybrana dowolnie. Jeżeli wreszcie $\tau = 1$ i $\sigma = 1$, to spółrzędne a, b mają wartości:

$$a = m, \quad b = n,$$

a spółrzędne g, h mogą być obie wybrane dowolnie.

Ażeby równania (101) przedstawić w postaci (100), trzeba tak określić odpowiednie wielkości rzeczywiste a, b; a_1, b_1; a_2, b_2; τ, σ; p, q, żeby spełnione były równania:

$$(106) \quad \begin{cases} p + \tau a = m, \quad q + \sigma b = n, \\ \tau a_1 = m_1, \quad \sigma b_1 = n_1, \quad \tau a_2 = m_2, \quad \sigma b_2 = n_2. \end{cases}$$

Z równań drugiego wiersza tych wzorów wynikają na τ i σ warunki:

$$\Phi\left(\frac{m_1}{\tau}, \frac{n_1}{\sigma}\right) = 1, \quad \Phi\left(\frac{m_2}{\tau}, \frac{n_2}{\sigma}\right) = 1,$$

a jeżeli wprowadzimy zamiast σ nową niewiadomą ω na podstawie związku:

$$\sigma = \tau \omega,$$

to warunki te można będzie napisać w postaci:

$$\Phi (\omega m_1, n_1) = \tau^2 \omega^2, \quad \Phi (\omega m_2, n_2) = \tau^2 \omega^2.$$

Widzimy więc, że ω trzeba wyznaczyć z równania:

$$(107) \qquad \Phi (\omega m_2, n_2) - \Phi (\omega m_1, n_1) = 0$$

i że każdemu rzeczywistemu pierwiastkowi ω tego równania, różnemu od zera, odpowiadają na τ i σ wartości:

$$(108) \qquad \tau = \frac{\varepsilon \sqrt{\Phi(\omega m_1, n_1)}}{\omega}, \quad \sigma = \varepsilon \sqrt{\Phi(\omega m_1, n_1)},$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$. Zatem z drugiego wiersza związków (106) i z równania (107) wynika, że odnośne spółczynniki kierunkowe a_1, b_1 i a_2, b_2 można wyrazić wzorami:

$$(109) \quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{\omega m_1}{\varepsilon \sqrt{\Phi(\omega m_1, n_1)}}, & b_1 = \dfrac{n_1}{\varepsilon \sqrt{\Phi(\omega m_1, n_1)}}, \\ a_2 = \dfrac{\omega m_2}{\varepsilon \sqrt{\Phi(\omega m_2, n_2)}}, & b_2 = \dfrac{n_2}{\varepsilon \sqrt{\Phi(\omega m_2, n_2)}}. \end{cases}$$

Równanie (107) napiszemy teraz w postaci:

$$(110) \qquad (m_2^2 - m_1^2)\,\omega^2 + 2\,(m_2 n_2 - m_1 n_1)\cos\vartheta\,\omega + n_2^2 - n_1^2 = 0.$$

Zajmiemy się naprzód przypadkami, w których układ spółrzędnych x, y jest prostokątny, t.j. $\cos\vartheta = 0$. Wtedy równanie (110) jest:

$$(111) \qquad (m_2^2 - m_1^2)\,\omega^2 + n_2^2 - n_1^2 = 0.$$

Gdy zachodzą równości:

$$(112) \qquad m_2 = \eta\, m_1, \quad n_2 = \zeta\, n_1,$$

w których $\eta = \pm 1$, $\zeta = \pm 1$, wówczas równanie (111) spełnia się przy każdem dowolnem ω. Ale zważywszy, że wtedy:

$$m_1 n_2 - n_1 m_2 = (\zeta - \eta)\, m_1 n_1,$$

widzimy, że przy założeniu $m_1 n_2 - n_1 m_2 \neq 0$ musi być $\zeta = -\eta$. To znaczy, że tylko gdy $\zeta = -\eta$ na stosunek ω może być wybrana dowolna liczba rzeczywista różna od zera. Natomiast nie istnieje żadna liczba rzeczywista różna od zera i spełniająca równanie (111), gdy jedna tylko z różnic $m_2^2 - m_1^2$ i $n_2^2 - n_1^2$ jest zerem, albo też, gdy obie te różnice są tego samego znaku. Jeżeli zaś spełniona jest nierówność:

$$(m_2^2 - m_1^2)(n_2^2 - n_1^2) < 0,$$

to na stosunek ω wynikają z równania (111) dwie wartości rzeczywiste, różniące się tylko znakiem. Każda z tych wartości prowadzi do odnośnej redukcji przekształcenia linjowego i przytem w przypadku spełnienia równości:

$$m_2^2 - m_1^2 + n_2^2 - n_1^2 = 0$$

równanie (111) ma na ω pierwiastki $+1$ i -1, z których pierwszy zachodzi wtedy, gdy równania (99) określają albo homotetyczność, albo też redukują się do równań $\bar{x} = x'$, $\bar{y} = y'$. Przejdziemy teraz do przypadków, w których układ x, y jest ukośnokątny, t.j. $\cos \vartheta \neq 0$. Jeżeli zachodzą równości (112), to mamy:

$$m_2 n_2 - m_1 n_1 = (\eta \zeta - 1) m_1 n_1 ,$$

a stąd wynika, że przy spełnieniu warunku $m_1 n_2 - n_1 m_2 \neq 0$ lewa strona równości (110) nie może być tożsamościowo zerem. Dalej widzimy, że przy zachodzeniu równości (112) i spełnieniu rzeczonego warunku, równaniu (110) czyni zadość tylko wartość $\omega = 0$, której nie może odpowiadać rozważana redukcja przekształcenia linjowego. Jeżeli $m_2 = \eta m_1$, ale $n_2^2 - n_1^2 \neq 0$, to można równanie (110) doprowadzić do postaci:

$$2 \eta m_1 \cos \vartheta \, \omega + n_2 + \eta n_1 = 0 .$$

Wtedy otrzymujemy na ω wartość, której odpowiadają równania (99) nie redukujące się do równań $\bar{x} = x'$, $\bar{y} = y'$ i nie określające homotetyczności, jeżeli spełniona jest nierówność:

$$2 \eta m_1 \cos \vartheta + n_2 + \eta n_1 \neq 0 .$$

Gdy $n_2 = \zeta n_1$, ale $m_2^2 - m_1^2 \neq 0$, wówczas można, opuszczając po lewej stronie czynnik ω, doprowadzić równanie (110) do postaci:

$$(m_2 + \zeta m_1) \omega + 2 \zeta n_1 \cos \vartheta = 0 .$$

Stąd wynika na ω wartość, której odpowiadają równania (99), nie określające homotetyczności i nie redukujące się do równań $\bar{x} = x'$, $\bar{y} = y'$, jeżeli spełniona jest nierówność:

$$m_2 + \zeta m_1 + 2 \zeta n_1 \cos \vartheta \neq 0 .$$

Przy zachodzeniu obu nierówności $m_2^2 - m_1^2 \neq 0$ i $n_2^2 - n_1^2 \neq 0$ pierwiastki równania (110) są skończone i różne od zera. Jeżeli spełniony jest warunek:

(113) $(m_2^2 - m_1^2)(n_2^2 - n_1^2) - (m_2 n_2 - m_1 n_1)^2 \cos^2 \vartheta \leqslant 0$

i przytem zachodzi nierówność:

(114) $$\Phi(m_2, n_2) \neq \Phi(m_1, n_1),$$

to każdemu pierwiastkowi równania (110) odpowiadają związki (99), nie redukujące się do równań $\bar{x} = x'$, $\bar{y} = y'$ i nie przedstawiające homotetyczności. Jeżeli zaś przy spełnieniu warunku (113) zachodzi równość:

(115) $$\Phi(m_2, n_2) = \Phi(m_1, n_1),$$

to jednym z pierwiastków równania (110) jest dodatnia jedność, której odpowiadają związki (99) bądź sprowadzające się do równań $\bar{x} = x'$, $\bar{y} = y'$, bądź też określające homotetyczność. Jeżeli równość (115) zachodzi przy spełnieniu nierówności (113), to równaniu (110) czyni zadość prócz dodatniej jedności jeszcze inny pierwiastek rzeczywisty, któremu odpowiadają równania (99), nie należące do kategoryj przed chwilą wymienionych.

Rozważymy jeszcze własności równań, wynikających na podstawie wzorów (92) ze związków pierwszego wiersza wzorów (106). Równania te są:

(116) $\tau a + (1 - \tau) g - m = 0$, $\sigma b + (1 - \sigma) h - n = 0$.

Przy spełnieniu nierówności $\tau \neq 1$, $\sigma \neq 1$ równania te określają jednojednowartościową odpowiedniość pomiędzy punktami a, b i g, h. Jeżeli $\tau \neq 1$, $\sigma = 1$, to na podstawie równań (116) h można wybrać dowolnie, b ma wartość równą $n : \sigma$, a pomiędzy a i g zachodzi jednojednowartościowa odpowiedniość. Jeżeli $\tau = 1$, $\sigma \neq 1$ to na podstawie tychże równań (116) g można wybrać dowolnie, a ma wartość równą $m : \tau$, a pomiędzy b i h zachodzi jednojednowartościowa odpowiedniość. Jeżeli wreszcie $\tau = 1$, $\sigma = 1$, to obie spółrzędne g i h można wybrać dowolnie, a spółrzędne a i b muszą być odpowiednio równe $m : \tau$ i $n : \sigma$.

W paragrafie bieżącym zajmiemy się jeszcze kwestją, jak zmienia się krzywa stopnia drugiego, gdy punkty jej poddajemy przekształceniu linjowemu (101). Widoczne naprzód, że każda krzywa stopnia drugiego przechodzi naskutek takiego przekształcenia w krzywą stopnia drugiego. Zauważymy, że krzywa stopnia drugiego, określona w spółrzędnych x, y równaniem:

$$(117)\quad f(x,y) = A\,x^2 + 2\,B\,xy + C\,y^2 + 2\,D\,x + 2\,E\,y + F = 0$$

i krzywa stopnia drugiego, określona w spółrzędnych $\overline{x}, \overline{y}$ równaniem:

$$(118)\quad \overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{A}\,\overline{x}^2 + 2\,\overline{B}\,\overline{x}\,\overline{y} + \overline{C}\,\overline{y}^2 + 2\,\overline{D}\,\overline{x} + 2\,\overline{E}\,\overline{y} + \overline{F} = 0$$

przechodzą wtedy i tylko wtedy jedna w drugą przez przekształcenie (101), gdy istnieje taki różny od zera czynnik ρ, że ze związków (101) wynika pomiędzy zmiennemi $x, y, \overline{x}, \overline{y}$ związek:

$$(119)\qquad \overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = \rho\, f(x,y).$$

Podobnie jak w §§ 6 i 7 dostrzeżemy łatwo, że pomiędzy spółczynnikami równań (117) i (118) zachodzić wtedy muszą równości następujące:

$$(120)\quad \begin{cases} \rho A = \overline{A}\,m_1^2 + 2\,\overline{B}\,m_1 n_1 + \overline{C}\,n_1^2, \\ \rho B = \overline{A}\,m_1 m_2 + \overline{B}\,(m_1 n_2 + n_1 m_2) + \overline{C}\,n_1 n_2, \\ \rho C = \overline{A}\,m_2^2 + 2\,\overline{B}\,m_2 n_2 + \overline{C}\,n_2^2, \\ \rho D = (\overline{A}\,m + \overline{B}\,n + \overline{D})\,m_1 + (\overline{B}\,m + \overline{C}\,n + \overline{E})\,n_1, \\ \rho E = (\overline{A}\,m + \overline{B}\,n + \overline{D})\,m_2 + (\overline{B}\,m + \overline{C}\,n + \overline{E})\,n_2, \\ \rho F = \overline{A}\,m^2 + 2\,\overline{B}\,m\,n + \overline{C}\,n^2 + 2\,\overline{D}\,m + 2\,\overline{E}\,n + \overline{F}. \end{cases}$$

Z pierwszych trzech z tych równości wynika, że jeżeli zastosujemy oznaczenia:

$$(121)\quad \begin{cases} \varphi(\xi,\eta) = A\,\xi^2 + 2\,B\,\xi\,\eta + C\,\eta^2, \\ \overline{\varphi}(\overline{\xi},\overline{\eta}) = \overline{A}\,\overline{\xi}^2 + 2\,\overline{B}\,\overline{\xi}\,\overline{\eta} + \overline{C}\,\overline{\eta}^2, \end{cases}$$

gdzie $\xi, \eta, \overline{\xi}, \overline{\eta}$ oznaczają wielkości zmienne, to naskutek związków:

$$(122)\qquad \overline{\xi} = m_1\,\xi + m_2\,\eta, \quad \overline{\eta} = n_1\,\xi + n_2\,\eta$$

zachodzić będzie związek:

$$(123)\qquad \overline{\varphi}(\overline{\xi},\overline{\eta}) = \rho\,\varphi(\xi,\eta).$$

Jeżeli następnie dla wyznaczników związanych z wielomianem $f(x, y)$ przyjmiemy wiadome oznaczenia $\Delta, \delta, \delta', \delta'', k, k', k''$ (zob. tom I, § 33), a dla odpowiednich wyznaczników, związanych z wielomianem $f(\bar{x}, \bar{y})$, oznaczenia $\bar{\Delta}, \bar{\delta}, \bar{\delta}', \bar{\delta}'', \bar{k}, \bar{k}', \bar{k}''$, to naprzód mieć będziemy związki:

$$(124) \quad \begin{cases} \rho^2 \delta = (m_1 n_2 - n_1 m_2)^2 \bar{\delta}, \\ \rho^3 \Delta = (m_1 n_2 - n_1 m_2)^2 \bar{\Delta}, \end{cases}$$

które łatwo wyprowadzimy rachunkami analogicznemi do pewnych rachunków §§ 6 i 7, a następnie będziemy mogli na podstawie równości (120) wyprowadzić dalsze związki.

W tym celu wyprowadzimy naprzód pewien wzór pomocniczy. Niech będą dwie pary zmiennych x, y i ξ, η i powyżej uważane wielomiany $f(x, y)$ i $\varphi(\xi, \eta)$. Mnożenie macierzy:

$$\begin{vmatrix} A, & B, & D \\ B, & C, & E \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ \xi, & \eta, & 0 \end{vmatrix}$$

prowadzi do równości:

$$(125) \quad (A x + B y + D)(B \xi + C \eta) - (B x + C y + E)(A \xi + B \eta) = \\ = \delta (x \eta - y \xi) - k'' \eta + k' \xi.$$

Podobnież mnożenie macierzy:

$$\begin{vmatrix} B, & C, & E \\ D, & E, & F \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ \xi, & \eta, & 0 \end{vmatrix}$$

prowadzi do równości:

$$(126) \quad (B x + C y + E)(D \xi + E \eta) - (D x + E y + F)(B \xi + C \eta) = \\ = k'' (x \eta - y \xi) - \delta' \eta + k \xi,$$

a mnożenie macierzy:

$$\begin{vmatrix} D, & E, & F \\ A, & B, & D \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ \xi, & \eta, & 0 \end{vmatrix}$$

do równości:

$$(127)\quad (D\,x+E\,y+F)(A\,\xi+B\,\eta)-(A\,x+B\,y+D)(D\,\xi+E\,\eta)=$$
$$=k'(x\,\eta-y\,\xi)-k\,\eta+\delta''\,\xi.$$

Zauważmy także, że taką samą drogą przez mnożenie macierzy:

$$\begin{vmatrix} A\,x+B\,y+D, & B\,x+C\,y+E, & D\,x+E\,y+F \\ A\,\xi+B\,\eta\ , & B\,\xi+C\,\eta\ , & D\,\xi+E\,\eta \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ \xi, & \eta, & 0 \end{vmatrix}$$

otrzymamy równość:

$$(128)\quad \varphi(\xi,\eta)\,f(x,y)-[\xi(A\,x+B\,y+D)+\eta(B\,x+C\,y+E)]^2=$$
$$=[(A\,x+B\,y+D)(B\,\xi+C\,\eta)-(B\,x+C\,y+E)(A\,\xi+B\,\eta)](x\,\eta-y\,\xi)-$$
$$-[(B\,x+C\,y+E)(D\,\xi+E\,\eta)-(D\,x+E\,y+F)(B\,\xi+C\,\eta)]\,\eta+$$
$$+[(D\,x+E\,y+F)(A\,\xi+B\,\eta)-(A\,x+B\,y+D)(D\,\xi+E\,\eta)]\,\xi.$$

Jeżeli teraz zastosujemy równości (125), (126) i (127), to na podstawie równości (128) dojdziemy do wzoru:

$$(129)\quad \varphi(\xi,\eta)\,f(x,y)-[\xi(A\,x+B\,y+D)+\eta(B\,x+C\,y+E)]^2=$$
$$=\delta(x\,\eta-y\,\xi)^2+\delta'\,\eta^2+\delta''\,\xi^2-$$
$$-2\,k\,\xi\,\eta+2\,k'\,\xi(x\,\eta-y\,\xi)-2\,k''\,\eta(x\,\eta-y\,\xi),$$

który posłuży nam do wyprowadzenia dalszych związków, wynikających z równości (120).

Zauważymy, że jeżeli wszystkie litery, figurujące we wzorze (129), zaopatrzymy w poziome kreski górne, to otrzymamy prawdziwy wzór, odnoszący się do przekształconego układu uważanych powyżej wielkości. Ponieważ ze związków (120) wynikają związki:

$$\rho^2\,\delta'=\overline{\varphi}(m_2,n_2)\,\overline{f}(m,n)-$$
$$-[(\overline{A}\,m+\overline{B}\,n+\overline{D})\,m_2+(\overline{B}\,m+\overline{C}\,n+\overline{E})\,n_2]^2,$$
$$\rho^2\,\delta''=\overline{\varphi}(m_1,n_1)\,\overline{f}(m,n)-$$
$$-[(\overline{A}\,m+\overline{B}\,n+\overline{D})\,m_1+(\overline{B}\,m+\overline{C}\,n+\overline{E})\,n_1]^2,$$

przeto, korzystając, na mocy powyższej uwagi, ze wzoru (129), dojdziemy do związków następujących:

$$(130)\quad \begin{cases} \rho^2\,\delta' = \overline{\delta}\,(m\,n_2 - n\,m_2)^2 + \overline{\delta}'\,n_2^2 + \overline{\delta}''\,m_2^2 - \\ -\,2\,\overline{k}\,m_2\,n_2 + 2\,\overline{k}'\,m_2\,(m\,n_2 - n\,m_2) - 2\,\overline{k}''\,n_2\,(m\,n_2 - n\,m_2), \\ \rho^2\,\delta'' = \overline{\delta}\,(m\,n_1 - n\,m_1)^2 + \overline{\delta}'\,n_1^2 + \overline{\delta}''\,m_1^2 - \\ -\,2\,\overline{k}\,m_1\,n_1 + 2\,\overline{k}'\,m_1\,(m\,n_1 - n\,m_1) - 2\,\overline{k}''\,n_1\,(m\,n_1 - n\,m_1). \end{cases}$$

Ze związków (123), (124) i (130) odczytamy teraz szereg wniosków analitycznych. Zauważymy naprzód, że z równości (123) i z drugiej z równości (124) wynika równość:

$$(131)\qquad \rho^4\,\varphi(\xi,\eta)\,\Delta = (m_1\,n_2 - n_1\,m_2)^2\,\overline{\varphi}(\overline{\xi},\overline{\eta})\,\overline{\Delta}.$$

Następnie na podstawie równości (124) dostrzeżemy, że wyznaczniki δ i $\overline{\delta}$ są albo oba jednocześnie równe zeru, albo oba tego samego znaku, a wyznaczniki Δ i $\overline{\Delta}$ są albo oba jednocześnie równe zeru, albo oba jednocześnie różne od zera. Dalej z równości (131) wniesiemy, że jeżeli jeden z iloczynów $\varphi(\xi,\eta)\,\Delta$, $\overline{\varphi}(\overline{\xi},\overline{\eta})\,\overline{\Delta}$ jest różny od zera, to i drugi z nich jest różny od zera i że wtedy oba te iloczyny są tego samego znaku. W dalszym ciągu zauważymy, że dwie pary równości $\delta = 0$, $\Delta = 0$ i $\overline{\delta} = 0$, $\overline{\Delta} = 0$ zachodzą jednocześnie i że w takich przypadkach na podstawie własności minorów symetrycznego wyznacznika stopnia trzeciego (zob. tom I § 33) związki (130) redukują się do związków:

$$(132)\qquad \begin{cases} \rho^2\,\delta' = \overline{\delta}'\,n_2^2 + \overline{\delta}''\,m_2^2 - 2\,\overline{k}\,m_2\,n_2, \\ \rho^2\,\delta'' = \overline{\delta}'\,n_1^2 + \overline{\delta}''\,m_1^2 - 2\,\overline{k}\,m_1\,n_1. \end{cases}$$

Jeżeli przytem zwrócimy uwagę na to, że w uważanych przypadkach zachodzi równość $\overline{\delta}'\,\overline{\delta}'' - \overline{k}^2 = 0$, a także, że z minorów δ', δ'' nie może być jeden dodatni a drugi ujemny oraz, że z minorów $\overline{\delta}'$, $\overline{\delta}''$ nie może być jeden dodatni, a drugi ujemny, to na mocy związków (132) dostrzeżemy łatwo pewne własności odpowiadających sobie par minorów δ', δ'' i $\overline{\delta}'$, $\overline{\delta}''$. Mianowicie przypuszczenie, że z dwóch sum $\delta' + \delta''$, $\overline{\delta}' + \overline{\delta}''$ jedna jest zerem, a druga różną od zera, prowadzi do sprzeczności, a również przypuszczenie, że jedna z tych sum jest dodatnia a druga ujemna, prowadzi

do sprzeczności. Zatem odpowiadające sobie sumy $\delta' + \delta''$, $\overline{\delta}' + \overline{\delta}''$ są albo obie dodatnie, albo obie ujemne, albo też wreszcie obie równe zeru.

Jeżeli teraz przypomnimy wyniki, otrzymane w § 26, to będziemy mogli geometryczne znaczenie powyższych wniosków analitycznych sformułować jak następuje. Naskutek dowolnie wybranego przekształcenia linjowego: 1) każda istotna rzeczywista krzywa rodzaju elips (t.j. elipsa rzeczywista lub rzeczywiste koło) przechodzi w istotną rzeczywistą krzywą rodzaju elips; 2) każda istotna urojona krzywa rodzaju elips (t.j. elipsa urojona lub koło urojone samo ze sobą sprzężone) przechodzi w istotną urojoną krzywą rodzaju elips; 3) każda hiperbola przechodzi w hiperbolę; 4) każda parabola przechodzi w parabolę; 5) każda para spotykających się prostych urojonych ze sobą sprzężonych (nieizotropowych lub izotropowych) przechodzi w parę spotykających się prostych urojonych ze sobą sprzężonych; 6) każda para, spotykających się prostych rzeczywistych przechodzi w parę spotykających się prostych rzeczywistych; 7) każda para prostych równoległych urojonych ze sobą sprzężonych przechodzi w parę prostych równoległych urojonych ze sobą sprzężonych; 8) każda para różnych od siebie prostych równoległych rzeczywistych przechodzi w parę różnych od siebie prostych równoległych rzeczywistych; 9) każda prosta podwójna przechodzi w prostą podwójną.

§ 40. Pewne zadania niezmiennikowe, dotyczące przekształceń linjowych.

W § 45 tomu I zajmowaliśmy się pewnemi własnościami form stopnia drugiego i form dwulinjowych. Weźmy tutaj pod uwagę formę dwulinjową, określoną tam wzorem (99), t.j. wzorem:

$$(133)\quad F(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) = G\,\xi_1\,\xi_2 + H_1\,\xi_1\,\eta_2 + H_2\,\xi_2\,\eta_1 + K\,\eta_1\,\eta_2,$$

gdzie ξ_1, η_1 i ξ_2, η_2 oznaczają zmienne niezależne, a G, H_1, H_2, K stałe spółczynniki. Niech będzie w płaszczyźnie układ spółrzędnych prostolinjowych x, y, którego oś y tworzy z osią x kąt ϑ i przypuśćmy, że zmienne ξ_1, η_1 i zmienne ξ_2, η_2 są odpowiednio spółrzędnemi dwóch punktów w tym układzie. Jeżeli układ x, y zastąpimy przez inny układ spółrzędnych prostolinjowych $\overline{x}, \overline{y}$

o tym samym początku i spółrzędne rzeczonych dwóch punktów oznaczymy w tym układzie odpowiednio przez $\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1$ i $\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2$, to mieć będziemy związki:

$$(134)\qquad \begin{cases} \xi_1 = a_1 \bar{\xi}_1 + a_2 \bar{\eta}_1, & \eta_1 = b_1 \bar{\xi}_1 + b_2 \bar{\eta}_1, \\ \xi_2 = a_1 \bar{\xi}_2 + a_2 \bar{\eta}_2, & \eta_2 = b_1 \bar{\xi}_2 + b_2 \bar{\eta}_2, \end{cases}$$

gdzie a_1, b_1 i a_2, b_2 są spółczynnikami kierunkowemi osi $\bar{x}, \bar{y}$ w układzie x, y. Związki (134) są pewnemi szczególnemi przypadkami związków (100) i (101), które stosowaliśmy w § 45 tomu I. Jeżeli wyrażenia (134) podstawimy w formę (133), to otrzymamy formę dwulinjową:

$$\bar{F}(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1; \bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2) = \bar{G}\,\bar{\xi}_1\,\bar{\xi}_2 + \bar{H}_1\,\bar{\xi}_1\,\bar{\eta}_2 + \bar{H}_2\,\bar{\xi}_2\,\bar{\eta}_1 + \bar{K}\,\bar{\eta}_1\,\bar{\eta}_2,$$

której spółczynniki $\bar{G}, \bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{K}$ określają się systemem wzorów:

$$(135)\qquad \begin{cases} \bar{G} = G a_1^2 + (H_1 + H_2) a_1 b_1 + K b_1^2, \\ \bar{H}_1 = G a_1 a_2 + H_1 a_1 b_2 + H_2 a_2 b_1 + K b_1 b_2, \\ \bar{H}_2 = G a_1 a_2 + H_1 a_2 b_1 + H_2 a_1 b_2 + K b_1 b_2, \\ \bar{K} = G a_2^2 + (H_1 + H_2) a_2 b_2 + K b_2^2, \end{cases}$$

będącym przypadkiem szczególnym systemu wzorów (102) w § 45 tomu I. System (135) można przy zastosowaniu oznaczeń:

$$(136)\qquad H = \frac{H_1 + H_2}{2}, \quad \bar{H} = \frac{\bar{H}_1 + \bar{H}_2}{2}$$

zastąpić przez system:

$$(137)\qquad \begin{cases} \bar{H}_1 - \bar{H}_2 = (H_1 - H_2)(a_1 b_2 - b_1 a_2), \\ \bar{G} = G a_1^2 + 2 H a_1 b_1 + K b_1^2, \\ \bar{H} = G a_1 a_2 + H (a_1 b_2 + b_1 a_2) + K b_1 b_2, \\ \bar{K} = G a_2^2 + 2 H a_2 b_2 + K b_2^2. \end{cases}$$

Korzystając z tych równań można przez rugowanie spółczynników kierunkowych wyznaczyć niezmienniki formy dwulinjowej (133)

względem wszelkich zmian kierunków osi spółrzędnych prostolinjowych.

Z pierwszego z równań (137) wynika związek:

$$\frac{\overline{H}_1 - \overline{H}_2}{\sin \overline{\vartheta}} = \frac{H_1 - H_2}{\sin \vartheta}, \tag{138}$$

w którym $\overline{\vartheta}$ oznacza kąt osi $\overline{y}$ z osią $\overline{x}$; związek ten stanowi szczególny przypadek związku (103) w § 45 t. I. Z pozostałych trzech równań (137) wnosimy, że innemi niezmiennikami formy dwulinjowej (133) są niezmienniki formy stopnia drugiego:

$$F(\xi, \eta) = G\,\xi^2 + 2\,H\,\xi\,\eta + K\,\eta^2,$$

gdzie ξ, η oznaczają zmienne spółrzędne punktu. To znaczy, że związki (137) prowadzą, prócz związku (138), jeszcze do związków:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\overline{G}\,\overline{K} - \overline{H}^2}{\sin^2 \overline{\vartheta}} = \dfrac{G\,K - H^2}{\sin^2 \vartheta}, \\ \dfrac{\overline{G} + \overline{K} - 2\,\overline{H}\cos \overline{\vartheta}}{\sin^2 \overline{\vartheta}} = \dfrac{G + K - 2\,H\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta}. \end{array}\right. \tag{139}$$

Zwracając teraz uwagę na to, że:

$$G\,K - H^2 = G\,K - \frac{1}{4}(H_1 + H_2)^2 = G\,K - H_1\,H_2 - \frac{1}{4}(H_1 - H_2)^2,$$

dostrzeżemy na podstawie równości (138) i (139), że forma dwulinjowa (133) ma trzy bezwzględne niezmienniki przy wszelkich zmianach kierunków osi spółrzędnych prostolinjowych, mianowicie:

$$J = \frac{G\,K - H_1\,H_2}{\sin^2 \vartheta}, \quad J_1 = \frac{H_2 - H_1}{\sin \vartheta}, \quad J_2 = \frac{G + K - (H_1 + H_2)\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta}. \tag{140}$$

Zauważamy przytem, że dwa pierwsze z tych niezmienników są wynikiem równości (104) i (103), podanych w § 45 tomu I. Widoczne, że bezwzględne niezmienniki równania:

$$G\,\xi_1\,\xi_2 + H_1\,\xi_1\,\eta_2 + H_2\,\xi_2\,\eta_1 + K\,\eta_1\,\eta_2 = 0 \tag{141}$$

muszą być jednorodnemi wielkościami zerowego stopnia względem spółczynników G, H_1, H_2, K. To znaczy, że bezwzględnemi niezmiennikami równania (141) przy wszelkich zmianach kierunków osi spółrzędnych prostolinjowych są stosunki: $J : J_1^2 : J_2^2$. Przy spełnieniu warunku:

$$G K - H_1 H_2 \neq 0$$

równanie (141) ma dwa niezmienniki bezwzględne:

$$(142) \quad \begin{cases} I_1 = \dfrac{J_1^2}{J} = \dfrac{(H_2 - H_1)^2}{G K - H_1 H_2}, \\ I_2 = \dfrac{J_2^2}{J} = \dfrac{[G + K - (H_1 + H_2)\cos\vartheta]^2}{\sin^2\vartheta\,(G K - H_1 H_2)}. \end{cases}$$

Pierwszy z nich jest zarazem bezwzględnym niezmiennikiem równania (141) przy wszelkich jednorodnych przekształceniach linjowych.

Niech będzie teraz w układzie spółrzędnych x, y linjowe przekształcenie zmiennego punktu x_1, y_1 na punkt x_2, y_2, określone równaniami:

$$(143) \quad \begin{cases} x_2 = m + m_1 x_1 + m_2 y_1, \\ y_2 = n + n_1 x_1 + n_2 y_1, \end{cases}$$

w których m i n bez wskaźników i z wskaźnikami oznaczają wielkości stałe, a przytem spełniona jest nierówność:

$$m_1 n_2 - n_1 m_2 \neq 0.$$

Ażeby wielkości p, q były spółrzędnemi ewentualnie istniejącego niezmiennego punktu przekształcenia (143), muszą być spełnione równości:

$$(144) \quad \begin{cases} m + (m_1 - 1) p + m_2 q = 0, \\ n + n_1 p + (n_2 - 1) q = 0. \end{cases}$$

Przekształcenie (143) ma jeden i tylko jeden właściwy punkt niezmienny, gdy spełniona jest nierówność:

$$(145) \qquad (m_1 - 1)(n_2 - 1) - n_1 m_2 \neq 0.$$

Przekształcenie (143) niema żadnego właściwego punktu niezmiennego, gdy spełniona jest równość:

$$(146) \qquad (m_1 - 1)(n_2 - 1) - n_1 m_2 = 0,$$

ale nie wszystkie wyznaczniki drugiego stopnia macierzy:

$$(147) \qquad \begin{vmatrix} m, & m_1 - 1, & m_2 \\ n, & n_1 , & n_2 - 1 \end{vmatrix}$$

są zerami, albo też gdy wszystkie wyznaczniki drugiego stopnia tej macierzy są zerami i przytem wszystkie elementy drugiej i trzeciej kolumny, ale nie oba elementy pierwszej kolumny są zerami. Przekształcenie (143) ma jedną właściwą linję prostą, której wszystkie punkty są punktami niezmiennemi, wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wyznaczniki macierzy (147) są zerami, ale nie wszystkie elementy drugiej i trzeciej kolumny tej macierzy są zerami. Wreszcie wszystkie punkty płaszczyzny są punktami niezmiennemi przekształcenia (143) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie elementy macierzy (147) są zerami.

Łatwo dostrzec, w jaki sposób punkty niewłaściwe, a więc także dwukierunki, przekształcają się naskutek przekształcenia linjowego (143). Naprzód widać bezpośrednio, że przy tem przekształceniu każdy punkt niewłaściwy przechodzi w punkt niewłaściwy, a następnie przyjmując, że przy przejściu od punktów właściwych do niewłaściwych mamy:

$$(148) \qquad \lim \frac{y_1}{x_1} = \frac{\mu_1}{\lambda_1}, \quad \lim \frac{y_2}{x_2} = \frac{\mu_2}{\lambda_2},$$

dojdziemy bez trudności do związku:

$$(149) \qquad n_1 \lambda_1 \lambda_2 - m_1 \lambda_1 \mu_2 + n_2 \lambda_2 \mu_1 - m_2 \mu_1 \mu_2 = 0.$$

Jeżeli spółczynnik niezmiennego dwukierunku oznaczymy przez $\mu : \lambda$ to mieć będziemy dla niego równanie:

$$(150) \qquad n_1 \lambda^2 + (n_2 - m_1) \lambda \mu - m_2 \mu^2 = 0.$$

Wyróżnik tego równania jest:

$$(151) \qquad m_1 n_2 - m_2 n_1 - \frac{1}{4}(m_1 + n_2)^2.$$

Gdy wyróżnik ten jest dodatni, przekształcenie (143) posiada dwa dwukierunki niezmienne urojone ze sobą sprzężone, a gdy jest ujemny, dwa dwukierunki niezmienne rzeczywiste. Gdy wyróżnik jest zerem, ale nie są spełnione jednocześnie równości:

$$(152) \qquad n_1 = 0, \quad n_2 - m_1 = 0, \quad m_2 = 0,$$

wówczas przekształcenie ma jeden podwójny dwukierunek rzeczywisty niezmienny, gdy zaś równości (152) są spełnione jednocześnie, wówczas wszystkie dwukierunki nie zmieniają się przy przekształceniu (143). Wtedy przekształcenie to jest bądź homotetycznością, bądź też przesunięciem.

Niech będzie następnie właściwa linja prosta, określona uogólnionemi równaniami osiowemi:

$$(153) \qquad x_1 = \mathfrak{a} + u\,t, \quad y_1 = \mathfrak{b} + v\,t,$$

w których t oznacza zmienny parametr. Naskutek przekształcenia (143) prosta (153) przechodzi w prostą:

$$(154) \qquad \begin{cases} x_2 = m + m_1\,\mathfrak{a} + m_2\,\mathfrak{b} + (m_1\,u + m_2\,v)\,t, \\ y_2 = n + n_1\,\mathfrak{a} + n_2\,\mathfrak{b} + (n_1\,u + n_2\,v)\,t. \end{cases}$$

Przekształcenie (143) przeprowadza prostą (153) w prostą o tym samym dwukierunku, gdy stosunek $v : u$ spełnia równanie:

$$(155) \qquad n_1\,u^2 + (n_2 - m_1)\,u\,v - m_2\,v^2 = 0.$$

Prosta (153) jest niezmienną prostą przekształcenia (143), gdy spełniony jest warunek (155) i gdy dowolny właściwy punkt prostej (154) leży na prostej (153). Punkt $t = 0$ prostej (154) leży na prostej (153) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest równość:

$$(156) \qquad v\,(m + m_1\,\mathfrak{a} + m_2\,\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) - u\,(n + n_1\,\mathfrak{a} + n_2\,\mathfrak{b} - \mathfrak{b}) = 0.$$

Zatem warunki konieczne i wystarczające, żeby prosta (153) pozostawała bez zmiany przy przekształceniu (143) polegają na spełnieniu równości (155) i (156).

Wykonamy teraz w równaniach (143) zmianę spółrzędnych prostolinjowych x, y na spółrzędne prostolinjowe $\bar{x}, \bar{y}$ na podstawie wiadomych związków:

$$x = a + a_1\,\bar{x} + a_2\,\bar{y},$$

$$y = b + b_1\,\bar{x} + b_2\,\bar{y}.$$

Jeżeli spółrzędne punktów x_1, y_1 i x_2, y_2 oznaczymy w nowym układzie odpowiednio literami $\bar{x}_1, \bar{y}_1$ i $\bar{x}_2, \bar{y}_2$, to mieć będziemy równania:

$$(157) \qquad \begin{cases} x_1 = a + a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{y}_1, \\ y_1 = b + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{y}_1 \end{cases}$$

i równania:

$$(158) \qquad \begin{cases} x_2 = a + a_1 \bar{x}_2 + a_2 \bar{y}_2, \\ y_2 = b + b_1 \bar{x}_2 + b_2 \bar{y}_2. \end{cases}$$

Wykonywając przekształcenie równań (143), otrzymamy równania postaci:

$$(159) \qquad \begin{cases} \bar{x}_2 = \bar{m} + \bar{m}_1 \bar{x}_1 + \bar{m}_2 \bar{y}_1, \\ \bar{y}_2 = \bar{n} + \bar{n}_1 \bar{x}_1 + \bar{n}_2 \bar{y}_1, \end{cases}$$

w których $\bar{m}$ i $\bar{n}$ bez wskaźników i ze wskaźnikami oznaczają wielkości zależne od spółczynników równań (143) i od stałych zmiany spółrzędnych. W celu wyznaczenia tych zależności, zauważymy naprzód, że wyznaczając $\bar{x}_2$ i $\bar{y}_2$ z równań (158) otrzymujemy:

$$\bar{x}_2 = \frac{\sin \vartheta}{\sin \bar{\vartheta}} \left[b_2 (x_2 - a) - a_2 (y_2 - b) \right],$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\sin \vartheta}{\sin \bar{\vartheta}} \left[a_1 (y_2 - b) - b_1 (x_2 - a) \right].$$

Jeżeli podstawimy tutaj zamiast x_2, y_2 wyrażenia (143), to dojdziemy do równości:

$$\bar{x}_2 = \frac{\sin \vartheta}{\sin \bar{\vartheta}} \Big[b_2 (m - a) - a_2 (n - b) + (b_2 m_1 - a_2 n_1) x_1 + (b_2 m_2 - a_2 n_2) y_1 \Big],$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\sin \vartheta}{\sin \bar{\vartheta}} \Big[a_1 (n - b) - b_1 (m - a) + (a_1 n_1 - b_1 m_1) x_1 + (a_1 n_2 - b_1 m_2) y_1 \Big],$$

a podstawiając w nich zamiast x_1, y_1 wyrażenia (157), otrzymujemy związki:

$$(160)\quad \begin{cases} \bar{x}_2 = \dfrac{\sin\vartheta}{\sin\bar{\vartheta}}\Big[b_2(m+m_1a+m_2b-a)-a_2(n+n_1a+n_2b-b)+ \\ \quad +(b_2m_1-a_2n_1)(a_1\bar{x}_1+a_2\bar{y}_1)+(b_2m_2-a_2n_2)(b_1\bar{x}_1+b_2\bar{y}_1)\Big], \\ \bar{y}_2 = \dfrac{\sin\vartheta}{\sin\bar{\vartheta}}\Big[a_1(n+n_1a+n_2b-b)-b_1(m+m_1a+m_2b-a)+ \\ \quad +(a_1n_1-b_1m_1)(a_1\bar{x}_1+a_2\bar{y}_1)+(a_1n_2-b_1m_2)(b_1\bar{x}_1+b_2\bar{y}_1)\Big]. \end{cases}$$

Porównanie związków (159) i (160) prowadzi teraz do zależności:

$$(161)\quad \begin{cases} \bar{m} = \dfrac{\sin\vartheta}{\sin\bar{\vartheta}}\Big[b_2(m+m_1a+m_2b-a)-a_2(n+n_1a+n_2b-b)\Big], \\ \bar{n} = \dfrac{\sin\vartheta}{\sin\bar{\vartheta}}\Big[a_1(n+n_1a+n_2b-b)-b_1(m+m_1a+m_2b-a)\Big] \end{cases}$$

i do zależności:

$$(162)\quad \begin{cases} \bar{m}_1 = \dfrac{\sin\vartheta}{\sin\bar{\vartheta}}\Big[a_1(b_2m_1-a_2n_1)+b_1(b_2m_2-a_2n_2)\Big], \\ \bar{m}_2 = \dfrac{\sin\vartheta}{\sin\bar{\vartheta}}\Big[a_2(b_2m_1-a_2n_1)+b_2(b_2m_2-a_2n_2)\Big], \\ \bar{n}_1 = \dfrac{\sin\vartheta}{\sin\bar{\vartheta}}\Big[a_1(a_1n_1-b_1m_1)+b_1(a_1n_2-b_1m_2)\Big], \\ \bar{n}_2 = \dfrac{\sin\vartheta}{\sin\bar{\vartheta}}\Big[a_2(a_1n_1-b_1m_1)+b_2(a_1n_2-b_1m_2)\Big]. \end{cases}$$

Zajmiemy się naprzód drugiemi z tych zależności. Zauważymy, że jeżeli w związkach (135) podstawimy:

$$(163)\quad \begin{cases} G=n_1\sin\vartheta,\ H_1=-m_1\sin\vartheta,\ H_2=n_2\sin\vartheta,\ K=-m_2\sin\vartheta, \\ \bar{G}=\bar{n}_1\sin\bar{\vartheta},\ \bar{H}_1=-\bar{m}_1\sin\bar{\vartheta},\ \bar{H}_2=\bar{n}_2\sin\bar{\vartheta},\ \bar{K}=-\bar{m}_2\sin\bar{\vartheta}, \end{cases}$$

to przejdą one w związki:

$$(164)\quad \begin{cases} \overline{n}_1 \sin\overline{\vartheta} = \sin\vartheta\,[n_1 a_1^2 + (n_2 - m_1) a_1 b_1 - m_2 b_1^2], \\ -\overline{m}_1 \sin\overline{\vartheta} = \sin\vartheta\,[n_1 a_1 a_2 - m_1 a_1 b_2 + n_2 a_2 b_1 - m_2 b_1 b_2], \\ \overline{n}_2 \sin\overline{\vartheta} = \sin\vartheta\,[n_1 a_1 a_2 - m_1 a_2 b_1 + n_2 a_1 b_2 - m_2 b_1 b_2], \\ -\overline{m}_2 \sin\overline{\vartheta} = \sin\vartheta\,[n_1 a_2^2 + (n_2 - m_1) a_2 b_2 - m_2 b_2^2]. \end{cases}$$

Łatwo dostrzec, że związki (164) są tylko inną postacią związków (162). Stąd wynika, że wszystkie niezmienniki bezwzględne formy dwulinjowej:

$$(165)\qquad \sin\vartheta\,(n_1 \xi_1 \xi_2 - m_1 \xi_1 \eta_2 + n_2 \xi_2 \eta_1 - m_2 \eta_1 \eta_2)$$

przy wszelkich przekształceniach (134), t.j. przy wszelkich zmianach kierunków osi spółrzędnych, są zarazem niezmiennikami bezwzględnemi przekształcenia linjowego (143). Przyjmując więc dla tych niezmienników te same oznaczenia, co w przypadku formy (133), otrzymamy na podstawie wzorów (140) i wzorów (163) następujące niezmienniki bezwzględne przekształcenia linjowego (143):

$$(166)\quad J = m_1 n_2 - n_1 m_2,\quad J_1 = m_1 + n_2,\quad J_2 = \frac{n_1 - m_2 + (m_1 - n_2)\cos\vartheta}{\sin\vartheta},$$

z których pierwszy jest zawsze różny od zera. Podobnież, niezmienniki bezwzględne równania:

$$(167)\qquad n_1 \xi_1 \xi_2 - m_1 \xi_1 \eta_2 + n_2 \xi_2 \eta_1 - m_2 \eta_1 \eta_2 = 0$$

przy wszelkich zmianach kierunków osi spółrzędnych możemy przedstawić wzorami:

$$(168)\quad I_1 = \frac{(m_1 + n_2)^2}{m_1 n_2 - n_1 m_2},\quad I_2 = \frac{[n_1 - m_2 + (m_1 - n_2)\cos\vartheta]^2}{\sin^2\vartheta\,(m_1 n_2 - n_1 m_2)}.$$

Zauważymy tutaj, że jeżelibyśmy w związkach (135) podstawili zamiast wyrażeń (163) wyrażenia:

$$(169)\quad \begin{cases} G = n_1 \sin\vartheta,\quad H_1 = n_2 \sin\vartheta,\quad H_2 = -m_1 \sin\vartheta,\quad K = -m_2 \sin\vartheta, \\ \overline{G} = \overline{n}_1 \sin\overline{\vartheta},\quad \overline{H}_1 = \overline{n}_2 \sin\overline{\vartheta},\quad \overline{H}_2 = -\overline{m}_1 \sin\overline{\vartheta},\quad \overline{K} = -\overline{m}_2 \sin\overline{\vartheta}, \end{cases}$$

to otrzymalibyśmy układ związków tem tylko różniący się od układu związków (164), że drugi i trzeci z tych związków byłyby wypisane w innym porządku. Widzimy więc, że także wszystkie niezmienniki bezwzględne formy dwulinjowej:

$$\sin\vartheta\,(n_1\,\xi_1\,\xi_2 + n_2\,\xi_1\,\eta_2 - m_1\,\xi_2\,\eta_1 - m_2\,\eta_1\,\eta_2) \tag{170}$$

przy wszelkich zmianach kierunków osi spółrzędnych są zarazem niezmiennikami bezwzględnemi przekształcenia linjowego (143). Stosując w tym przypadku wzory (140) doszlibyśmy do wyrażeń na niezmienniki bezwzględne przekształcenia linjowego (143), tem tylko różniących się od wyrażeń (166), że J_1 byłoby równe $-m_1 - n_2$. W związku z tem zaznaczamy, że niezmienniki bezwzględne równania:

$$n_1\,\xi_1\,\xi_2 + n_2\,\xi_1\,\eta_2 - m_1\,\xi_2\,\eta_1 - m_2\,\eta_1\,\eta_2 = 0 \tag{171}$$

przy wszelkich zmianach kierunków osi spółrzędnych określają się także poprzedniemi wzorami (168). Zauważymy jeszcze, że formy dwulinjowe (165) i (170) można przedstawić w postaci wyrażeń, określających pola pewnych równoległoboków. Jeżeli mianowicie zastosujemy wektor o składowych ξ_3, η_3, określonych wzorami:

$$\xi_3 = m_1\,\xi_1 + m_2\,\eta_1\,, \quad \eta_3 = n_1\,\xi_1 + n_2\,\eta_1\,,$$

to forma (165) wyrazi się wzorem:

$$\sin\vartheta\,(\xi_2\,\eta_3 - \xi_3\,\eta_2),$$

a jeżeli zastosujemy wektor o składowych ξ_4, η_4, określonych wzorami:

$$\xi_4 = -n_2\,\xi_1 + m_2\,\eta_1\,, \quad \eta_4 = n_1\,\xi_1 - m_1\,\eta_1\,,$$

to forma (170) wyrazi się wzorem:

$$\sin\vartheta\,(\xi_2\,\eta_4 - \xi_4\,\eta_2).$$

Ewentualne dalsze niezmienniki przekształcenia linjowego względem zmian spółrzędnych prostolinjowych mogłyby otrzymać się przez rugowanie spółczynników a, b bez indeksów i z indeksami z układu równań (161) i (162). Jeżeli spełniona jest nierówność

(145), to rugowanie wielkości a, b z równań (161) jest niemożliwe. Założymy, że spełniona jest równość (146) i zważywszy, że można ją napisać w postaci:

$$J - J_1 + 1 = 0, \tag{172}$$

będącej związkiem pomiędzy niezmiennikami, widzimy, że spełniona jest także równość:

$$(\overline{m}_1 - 1)(\overline{n}_2 - 1) - \overline{n}_1 \overline{m}_2 = 0. \tag{173}$$

Jeżeliby równania (143) określały przesunięcie, t.j. miały postać:

$$x_2 = m + x_1, \quad y_2 = n + y_1, \tag{174}$$

to tą samą drogą, którą doszliśmy poprzednio do równań (159), otrzymalibyśmy teraz równania:

$$\overline{x}_2 = \overline{m} + \overline{x}_1, \quad \overline{y}_2 = \overline{n} + \overline{y}_1. \tag{175}$$

Stąd wynika, że system równości:

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 0, \quad n_1 = 0, \quad n_2 = 1 \tag{176}$$

i system równości:

$$\overline{m}_1 = 1, \quad \overline{m}_2 = 0, \quad \overline{n}_1 = 0, \quad \overline{n}_2 = 1 \tag{177}$$

mają własność, że jeżeli spełniony jest jeden z nich, to spełniony jest i drugi z nich. Pomiędzy wielkościami $m, n, \overline{m}, \overline{n}$, figurującemi w równaniach (174) i (175), zachodzą widocznie związki:

$$m = a_1 \overline{m} + a_2 \overline{n}, \quad n = b_1 \overline{m} + b_2 \overline{n}, \tag{178}$$

które są równoważne odpowiadającym temu przypadkowi związkom (161). Z równań (178) wynika, że wtedy $\Phi(m, n)$ jest niezmiennikiem przy zmianach spółrzędnych prostolinjowych, a zauważymy przytem, że niezmienniki (166) mają w tym przypadku wartości: $J = 1$, $J_1 = 2$, $J_2 = 0$.

Załóżmy teraz, że spełnione są równości (146) i (173), ale że nie są spełnione równości (176) i (177). Wtedy można wyznaczyć takie rzeczywiste wielkości $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, nie obie jednocześnie równe zeru, i takie rzeczywiste wielkości α, β, nie obie jednocześnie równe zeru, że spełnione są równości:

$$n_1 = \mathfrak{a}\alpha, \quad 1 - m_1 = \mathfrak{b}\alpha, \quad n_2 - 1 = \mathfrak{a}\beta, \quad -m_2 = \mathfrak{b}\beta, \tag{179}$$

oraz takie rzeczywiste wielkości $\overline{\mathfrak{a}}, \overline{\mathfrak{b}}$, nie obie jednocześnie równe zeru i takie rzeczywiste wielkości $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$, nie obie jednocześnie równe zeru, że spełnione są równości:

$$(180)\quad \overline{n_1} = \overline{\mathfrak{a}}\,\overline{\alpha}, \quad 1 - \overline{m_1} = \overline{\mathfrak{b}}\,\overline{\alpha}, \quad \overline{n_2} - 1 = \overline{\mathfrak{a}}\,\overline{\beta}, \quad -\overline{m_2} = \overline{\mathfrak{b}}\,\overline{\beta}.$$

Korzystając z równości (179) i (180), otrzymamy ze związków (164) równości:

$$\overline{\mathfrak{a}}\,\overline{\alpha}\sin\overline{\vartheta} = \sin\vartheta\,[\mathfrak{a}\,\alpha\,a_1^2 + (\mathfrak{a}\,\beta + \mathfrak{b}\,\alpha)\,a_1\,b_1 + \mathfrak{b}\,\beta\,b_1^2],$$

$$\overline{\mathfrak{b}}\,\overline{\alpha}\sin\overline{\vartheta} = \sin\vartheta\,[\mathfrak{a}\,\alpha\,a_1\,a_2 + \mathfrak{b}\,\alpha\,a_1\,b_2 + \mathfrak{a}\,\beta\,b_1\,a_2 + \mathfrak{b}\,\beta\,b_1\,b_2],$$

$$\overline{\mathfrak{a}}\,\overline{\beta}\sin\overline{\vartheta} = \sin\vartheta\,[\mathfrak{a}\,\alpha\,a_1\,a_2 + \mathfrak{a}\,\beta\,a_1\,b_2 + \mathfrak{b}\,\alpha\,b_1\,a_2 + \mathfrak{b}\,\beta\,b_1\,b_2],$$

$$\overline{\mathfrak{b}}\,\overline{\beta}\sin\overline{\vartheta} = \sin\vartheta\,[\mathfrak{a}\,\alpha\,a_2^2 + (\mathfrak{a}\,\beta + \mathfrak{b}\,\alpha)\,a_2\,b_2 + \mathfrak{b}\,\beta\,b_2^2],$$

które łatwo doprowadzić do postaci:

$$(181)\quad \begin{cases} \overline{\mathfrak{a}}\,\overline{\alpha}\sin\overline{\vartheta} = \sin\vartheta\,(\mathfrak{a}\,a_1 + \mathfrak{b}\,b_1)\,(\alpha\,a_1 + \beta\,b_1), \\ \overline{\mathfrak{b}}\,\overline{\alpha}\sin\overline{\vartheta} = \sin\vartheta\,(\mathfrak{a}\,a_2 + \mathfrak{b}\,b_2)\,(\alpha\,a_1 + \beta\,b_1), \\ \overline{\mathfrak{a}}\,\overline{\beta}\sin\overline{\vartheta} = \sin\vartheta\,(\mathfrak{a}\,a_1 + \mathfrak{b}\,b_1)\,(\alpha\,a_2 + \beta\,b_2), \\ \overline{\mathfrak{b}}\,\overline{\beta}\sin\overline{\vartheta} = \sin\vartheta\,(\mathfrak{a}\,a_2 + \mathfrak{b}\,b_2)\,(\alpha\,a_2 + \beta\,b_2). \end{cases}$$

Zauważmy, że nie jest możliwe, aby zarówno obie wielkości $\mathfrak{a}\,a_1 + \mathfrak{b}\,b_1$ i $\overline{\mathfrak{a}}$, jak i obie wielkości $\mathfrak{a}\,a_2 + \mathfrak{b}\,b_2$ i $\overline{\mathfrak{b}}$ były zerami, bo wtedy byłyby zerami cztery wielkości $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \overline{\mathfrak{a}}, \overline{\mathfrak{b}}$, co sprzeciwia się założeniom. Wobec tego widzimy, że z równości (181) wynika równość:

$$\begin{vmatrix} \overline{\alpha}, & \alpha\,a_1 + \beta\,b_1 \\ \overline{\beta}, & \alpha\,a_2 + \beta\,b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

t.j., że istnieje różny od zera czynnik T, spełniający związki:

$$(182)\qquad \alpha\,a_1 + \beta\,b_1 = T\,\overline{\alpha}, \quad \alpha\,a_2 + \beta\,b_2 = T\,\overline{\beta},$$

a zatem dochodzimy ze związków (181) także do równości:

$$(183)\quad \mathfrak{a}\,a_1 + \mathfrak{b}\,b_1 = \frac{\sin\overline{\vartheta}}{T\sin\vartheta}\,\overline{\mathfrak{a}}, \quad \mathfrak{a}\,a_2 + \mathfrak{b}\,b_2 = \frac{\sin\overline{\vartheta}}{T\sin\vartheta}\,\overline{\mathfrak{b}}.$$

Rugowanie spółczynników a, b ze wskaźnikami ze związków (182) prowadzi do równości:

$$\frac{\Phi(-\beta, \alpha)}{\sin^2 \vartheta} = T^2 \frac{\overline{\Phi}(-\overline{\beta}, \overline{\alpha})}{\sin^2 \vartheta}, \tag{184}$$

a rugowanie spółczynników a, b ze wskaźnikami ze związków (183) do równości:

$$T^2 \Phi(-\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \overline{\Phi}(-\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}). \tag{185}$$

Z równości (184) i (185) dochodzimy przez mnożenie stronami do równości:

$$\frac{\Phi(-\mathbf{b}, \mathbf{a})\,\Phi(-\beta, \alpha)}{\sin^2 \vartheta} = \frac{\overline{\Phi}(-\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}})\,\overline{\Phi}(-\overline{\beta}, \overline{\alpha})}{\sin^2 \vartheta},$$

t.j. konstatujemy, że wielkość:

$$Q = \frac{\Phi(-\mathbf{b}, \mathbf{a})\,\Phi(-\beta, \alpha)}{\sin^2 \vartheta} \tag{186}$$

jest niezmiennikiem przy zmianach spółrzędnych prostolinjowych. Zwrócimy uwagę na to, że niezmienniki (166) wyrażają się przez wielkości $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha, \beta$ zapomocą wzorów następujących:

$$\left\{\begin{aligned} J &= 1 + \mathbf{a}\,\beta - \mathbf{b}\,\alpha = 1 + \frac{\Psi(-\mathbf{b}, \mathbf{a}; -\beta, \alpha)}{\sin \vartheta}, \\ J_1 &= 2 + \mathbf{a}\,\beta - \mathbf{b}\,\alpha = 2 + \frac{\Psi(-\mathbf{b}, \mathbf{a}; -\beta, \alpha)}{\sin \vartheta}, \\ J_2 &= \frac{\mathbf{a}\,\alpha + \mathbf{b}\,\beta - (\mathbf{a}\,\beta + \mathbf{b}\,\alpha)\cos \vartheta}{\sin \vartheta} = \frac{\Phi(-\mathbf{b}, \mathbf{a}; -\beta, \alpha)}{\sin \vartheta}. \end{aligned}\right. \tag{187}$$

Z pierwszych dwóch z tych wzorów wynika zaznaczona poprzednio równość (172), a obecnie konstatujemy na podstawie wzoru (186) oraz drugiego i trzeciego ze wzorów (187) wzór:

$$Q = (J_1 - 2)^2 + J_2^2, \tag{188}$$

określający wielkość Q przez poprzednie niezmienniki.

Weźmy teraz pod uwagę związki (161), które przy obecnych założeniach można zastąpić związkami:

$$(189)\qquad \begin{cases} a_1 \bar{m} + a_2 \bar{n} = m - \mathfrak{b}\,(\alpha\, a + \beta\, b), \\ b_1 \bar{m} + b_2 \bar{n} = n + \mathfrak{a}\,(\alpha\, a + \beta\, b). \end{cases}$$

Stąd dochodzimy do równości:

$$(190)\qquad \mathfrak{a}\, m + \mathfrak{b}\, n = (\mathfrak{a}\, a_1 + \mathfrak{b}\, b_1)\,\bar{m} + (\mathfrak{a}\, a_2 + \mathfrak{b}\, b_2)\,\bar{n},$$

a jeżeli zastosujemy związki (183) i (185), to otrzymamy równość:

$$\frac{(\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{m} + \bar{\mathfrak{b}}\,\bar{n})\sin\bar{\vartheta}}{\sqrt{\bar{\Phi}\,(-\bar{\mathfrak{b}}, \bar{\mathfrak{a}})}} = \varepsilon\,\frac{(\mathfrak{a}\, m + \mathfrak{b}\, n)\sin\vartheta}{\sqrt{\Phi\,(-\mathfrak{b}, \mathfrak{a})}},$$

w której $\varepsilon = \pm 1$. Doszliśmy więc do wyniku, że przy obecnych założeniach wielkość:

$$(191)\qquad P = \frac{(\mathfrak{a}\, m + \mathfrak{b}\, n)\sin\vartheta}{\sqrt{\Phi\,(-\mathfrak{b}, \mathfrak{a})}}$$

jest względnym niezmiennikiem zmian spółrzędnych prostolinjowych.

§ 41. Zagadnienia o prostopadłych dwukierunkach.

Zajmiemy się naprzód zadaniem wyznaczenia dwukierunków, które naskutek przekształcenia linjowego (143) przechodzą w dwukierunki do nich prostopadłe. Jeżeli spółczynnik dwukierunku pierwotnego równa się stosunkowi $\mu_1 : \lambda_1$, a spółczynnik dwukierunku przekształconego stosunkowi $\mu_2 : \lambda_2$, to musi być spełniony związek (149) oraz związek:

$$\Phi\,(\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2) = 0.$$

Związki te napiszemy w postaci:

$$(192)\qquad \begin{cases} (n_1\,\lambda_1 + n_2\,\mu_1)\,\lambda_2 - (m_1\,\lambda_1 + m_2\,\mu_1)\,\mu_2 = 0, \\ (\lambda_1 + \mu_1\cos\vartheta)\,\lambda_2 + (\lambda_1\cos\vartheta + \mu_1)\,\mu_2 = 0. \end{cases}$$

Z nich wynika, że spółczynniki przy λ_2, μ_2 pierwszego z tych związków muszą być proporcjonalne do spółczynników przy λ_2, μ_2 drugiego z tych związków. Możemy wyrazić to równaniami:

$$(193)\qquad \begin{cases} m_1\lambda_1 + m_2\mu_1 = -\rho\dfrac{\lambda_1\cos\vartheta + \mu_1}{\sin\vartheta}, \\ n_1\lambda_1 + n_2\mu_1 = \rho\dfrac{\lambda_1 + \mu_1\cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \end{cases}$$

w których czynnik ρ jest nową wielkością niewiadomą. Równania te napiszemy także w postaci:

$$(194)\qquad \begin{cases} (m_1\sin\vartheta + \rho\cos\vartheta)\lambda_1 + (m_2\sin\vartheta + \rho)\mu_1 = 0, \\ (n_1\sin\vartheta - \rho)\lambda_1 + (n_2\sin\vartheta - \rho\cos\vartheta)\mu_1 = 0. \end{cases}$$

Stąd wynika, że czynnik ρ musi spełniać równanie drugiego stopnia:

$$\sin\vartheta\,\rho^2 - [n_1 - m_2 + (m_1 - n_2)\cos\vartheta]\rho + \sin\vartheta\,(m_1 n_2 - n_1 m_2) = 0,$$

które można przez zastosowanie niezmienników (166) przedstawić w formie:

$$(195)\qquad \rho^2 - J_2\rho + J = 0.$$

Rozważymy naprzód przypadek, w którym każdy dwukierunek przechodzi naskutek przekształcenia (143) w dwukierunek do niego prostopadły, t.j. przypadek, w którym wszystkie nawiasy równań (194) są zerami. Łatwo pokazać, że to zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki czynnik τ, że spełnione są równości:

$$(196)\qquad m_1 = -\tau\cos\vartheta, \quad m_2 = -\tau, \quad n_1 = \tau, \quad n_2 = \tau\cos\vartheta,$$

a czynnik ρ ma wartość:

$$(197)\qquad \rho = \tau\sin\vartheta.$$

Niezmienniki (166) mają przy spełnieniu warunków (196) wartości:

$$J = \tau^2\sin^2\vartheta, \quad J_1 = 0, \quad J_2 = 2\tau\sin\vartheta,$$

a stąd wynika, że jeżeli warunki (196) są spełnione, to równaniu (195) czyni zadość tylko wartość (197). Przy spełnieniu równości (196) przekształcenie linjowe (143) ma postać:

$$x_2 = m - \tau (\cos \vartheta\, x_1 + y_1),$$

$$y_2 = n + \tau (x_1 + \cos \vartheta\, y_1),$$

jest więc pewnem szczególnem przekształceniem podobieństwa, względnie pewnem szczególnem przemieszczeniem.

Równanie (195) ma jeden pierwiastek podwójny wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje czynnik τ, przy którym byłyby spełnione równości (196) i gdy zachodzi równość:

$$J = \frac{1}{4} J_2^2. \tag{198}$$

Wówczas pierwiastek ten jest:

$$\rho = \frac{1}{2} J_2 \tag{199}$$

i przy tej wartości na ρ otrzymamy z równości (194) jedyny w tym przypadku dwukierunek $\mu_1 : \lambda_1$, któremu odpowiada dwukierunek $\mu_2 : \lambda_2$ do niego prostopadły. Jeżeli zachodzi jedna z nierówności:

$$J \lessgtr \frac{1}{4} J_2^2 \tag{200}$$

to równanie (195) ma dwa różne od siebie pierwiastki:

$$\rho = \frac{1}{2} \left(J_2 \pm \sqrt{J_2^2 - 4J} \right), \tag{201}$$

które są rzeczywiste, gdy zachodzi górna nierówność (200), urojone zaś, gdy zachodzi dolna nierówność (200). Podstawiając te pierwiastki w równania (194), otrzymujemy z nich w pierwszym przypadku dwa dwukierunki rzeczywiste, w drugim dwa dwukierunki urojone o żądanej własności. Oznaczmy przez ρ' i ρ'' pierwiastki, otrzymujące się ze wzoru (201) odpowiednio przy górnym i przy dolnym znaku, a przez $\mu' : \lambda'$ i $\mu'' : \lambda''$ dwukierunki, wynikające dla tych pierwiastków z równań (194). Wtedy na mocy związków (193) mieć będziemy związki:

$$(202)\quad \begin{cases} -\sin\vartheta\,(m_1\lambda' + m_2\mu') = \rho'\,(\lambda'\cos\vartheta + \mu'), \\ \sin\vartheta\,(n_1\lambda' + n_2\mu') = \rho'\,(\lambda' + \mu'\cos\vartheta), \\ -\sin\vartheta\,(m_1\lambda'' + m_2\mu'') = \rho''\,(\lambda''\cos\vartheta + \mu''), \\ \sin\vartheta\,(n_1\lambda'' + n_2\mu'') = \rho''\,(\lambda'' + \mu''\cos\vartheta), \end{cases}$$

z których łatwo wyprowadzimy związki:

$$\rho'\,\Phi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'') = \sin\vartheta\,[(n_1\lambda' + n_2\mu')\lambda'' - (m_1\lambda' + m_2\mu')\mu''],$$

$$\rho''\,\Phi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'') = \sin\vartheta\,[(n_1\lambda'' + n_2\mu'')\lambda' - (m_1\lambda'' + m_2\mu'')\mu'].$$

Stąd przez odejmowanie dojdziemy do związku:

$$(\rho' - \rho'')\,\Phi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'') = -(m_1 + n_2)\,\Psi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu''),$$

z którego na podstawie drugiego ze wzorów (166) oraz wzoru (201) otrzymamy związek:

$$(203)\quad \frac{\Psi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'')}{\Phi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'')} = -\frac{\sqrt{J_2^2 - 4J}}{J_1},$$

który określa wspólną styczną kątów dwukierunku $\mu'' : \lambda''$ z dwukierunkiem $\mu' : \lambda'$. Ta styczna jest nieskończenie wielka, t.j. rzeczone dwukierunki są do siebie prostopadłe, gdy $J_1 = 0$, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy związek (149) określa inwolucję dwukierunków.

Rozważymy teraz inne zadanie. Postaramy się wyznaczyć w układzie pierwotnym takie dwukierunki do siebie prostopadłe, którym naskutek przekształcenia (143) odpowiadają w układzie przekształconym dwukierunki również do siebie prostopadłe. Jeżeli spółczynniki dwóch dwukierunków w układzie pierwotnym oznaczymy stosunkami $\mu' : \lambda'$ i $\mu'' : \lambda''$, to będziemy mogli zadanie, o które chodzi, sformułować analitycznie zapomocą równań:

$$(204)\quad \begin{cases} \Phi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'') = 0, \\ \Phi(m_1\lambda' + m_2\mu',\ n_1\lambda' + n_2\mu';\ m_1\lambda'' + m_2\mu'',\ n_1\lambda'' + n_2\mu'') = 0, \end{cases}$$

które można inaczej napisać w postaci:

$$\lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' + \cos\vartheta\,(\lambda'\mu'' + \mu'\lambda'') = 0,$$

$$\Phi(m_1, n_1)\,\lambda'\lambda'' + \Phi(m_2, n_2)\,\mu'\mu'' +$$

$$+ \Phi(m_1, n_1; m_2, n_2)\,(\lambda'\mu'' + \mu'\lambda'') = 0.$$

Widzimy więc, że rozważana kwestja jest zadaniem wyznaczenia dwukierunków głównych krzywej stopnia drugiego, której równanie ma wyrazy drugiego stopnia, zawarte w sumie:

$$(205)\quad \Phi(m_1, n_1)\,x^2 + 2\,\Phi(m_1, n_1; m_2, n_2)\,x\,y + \Phi(m_2, n_2)\,y^2.$$

Z rozważań § 24 wynika, że każdej parze dwukierunków do siebie prostopadłych w układzie pierwotnym odpowiada para dwukierunków do siebie prostopadłych w układzie przekształconym wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są jednocześnie równości:

$$(206)\quad \begin{cases} \Phi(m_2, n_2) = \Phi(m_1, n_1), \\ \Phi(m_1, n_1; m_2, n_2) = \Phi(m_1, n_1)\cos\vartheta = \Phi(m_2, n_2)\cos\vartheta. \end{cases}$$

Na podstawie rozważań §§ 36 i 38, a w szczególności na podstawie związków (56) i (64) wnosimy, że jeżeli zachodzi nierówność $m_1 n_2 - n_1 m_2 > 0$, to związki (206) spełnione są wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie (143) określa bądź przemieszczenie, bądź też przekształcenie podobieństwa. Korzystając zaś z rozważań tychże paragrafów i w szczególności ze wzorów (20) przy założeniach $\cos\bar{\vartheta} = \cos\vartheta$, $\sin\bar{\vartheta} = -\sin\vartheta$, dostrzeżemy bez trudności, że jeżeli zachodzi nierówność $m_1 n_2 - n_1 m_2 < 0$, to związki (206) spełnione są wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie (143) może być wytworzone przez wykonanie symetrji względem osi x, a następnie przez przemieszczenie, lub też przekształcenie podobieństwa. Przechodząc do innych przypadków, zastosujemy równanie na S:

$$(207)\quad \sin^2\vartheta\,S^2 - [\Phi(m_1, n_1) + \Phi(m_2, n_2) - 2\cos\vartheta\,\Phi(m_1, n_1; m_2, n_2)]\,S +$$

$$+ \Phi(m_1, n_1)\,\Phi(m_2, n_2) - [\Phi(m_1, n_1; m_2, n_2)]^2 = 0,$$

które ma przy założeniu, że nie są spełnione jednocześnie równości (206), dwa różne od siebie pierwiastki rzeczywiste tego samego znaku, bo zachodzi równość:

$$\Phi(m_1, n_1)\,\Phi(m_2, n_2) - [\Phi(m_1, n_1; m_2, n_2)]^2 = [\Psi(m_1, n_1; m_2, n_2)]^2.$$

Jeżeli pierwiastki te oznaczymy przez S' i S'', to odpowiadające im dwukierunki $\mu' : \lambda'$ i $\mu'' : \lambda''$ będziemy mogli wyznaczyć z równań:

$$(208)\quad \begin{cases} [\Phi(m_1, n_1) - S']\lambda' + [\Phi(m_1, n_1; m_2, n_2) - S'\cos\vartheta]\mu' = 0, \\ [\Phi(m_1, n_1; m_2, n_2) - S'\cos\vartheta]\lambda' + [\Phi(m_2, n_2) - S']\mu' = 0, \\ [\Phi(m_1, n_1) - S'']\lambda'' + [\Phi(m_1, n_1; m_2, n_2) - S''\cos\vartheta]\mu'' = 0, \\ [\Phi(m_1, n_1; m_2, n_2) - S''\cos\vartheta]\lambda'' + [\Phi(m_2, n_2) - S'']\mu'' = 0. \end{cases}$$

Równanie (207) łatwo przedstawić w formie związku pomiędzy wielkością S i niezmiennikami (166). Jeżeli mianowicie skonstatujemy rachunkiem równość:

$$J_1^2 + J_2^2 = \frac{1}{\sin^2\vartheta}[\Phi(m_1, n_1) + \Phi(m_2, n_2) -$$

$$- 2\cos\vartheta\,\Phi(m_1, n_1; m_2, n_2) + 2\sin\vartheta\,\Psi(m_1, n_1; m_2, n_2)],$$

to będziemy mogli równanie (207) doprowadzić do postaci:

$$(209)\qquad S^2 - (J_1^2 + J_2^2 - 2J)S + J^2 = 0.$$

Wyróżnik tego równania jest wielkością:

$$J^2 - \frac{1}{4}(J_1^2 + J_2^2 - 2J)^2,$$

którą łatwo przedstawić w formie:

$$(210)\qquad -\frac{1}{4}(J_1^2 + J_2^2)(J_1^2 + J_2^2 - 4J).$$

Ponieważ z teorji dwukierunków głównych wiadomo, że równanie na S posiada albo dwa rzeczywiste pierwiastki pojedyńcze, albo też jeden pierwiastek podwójny, przeto wyróżnik (210) jest albo wielkością ujemną albo też zerem. Z powyższego rozważania wynika, że ten ostatni przypadek zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są równości (206).

Rachunki, wykonane w tym paragrafie, zastosujemy jeszcze do przedstawienia przekształceń linjowych w pewnych szczególnych spółrzędnych prostolinjowych.

Niech będzie w układzie spółrzędnych prostolinjowych x, y przekształcenie linjowe punktu x_1, y_1 na punkt x_2, y_2, określone równaniami:

$$(143)\qquad \begin{cases} x_2 = m + m_1 x_1 + m_2 y_1, \\ y_2 = n + n_1 x_1 + n_2 y_1. \end{cases}$$

Jeżeli w tych równaniach wykonamy zmianę spółrzędnych prostolinjowych, określoną związkami:

$$(211)\qquad \begin{cases} x = a + \lambda' \bar{x} + \lambda'' \bar{y}, \\ y = b + \mu' \bar{x} + \mu'' \bar{y}, \end{cases}$$

gdzie λ', μ' i λ'', μ'' oznaczają odpowiednio spółczynniki kierunkowe nowych osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$, to otrzymamy równania postaci:

$$(212)\qquad \begin{cases} \bar{x}_2 = \bar{m} + \bar{m}_1 \bar{x}_1 + \bar{m}_2 \bar{y}_1, \\ \bar{y}_2 = \bar{n} + \bar{n}_1 \bar{x}_1 + \bar{n}_2 \bar{y}_1, \end{cases}$$

w których stałe $\bar{m}, \bar{n}$ określają się na podstawie związków (161) wzorami:

$$(213)\qquad \begin{cases} (\lambda' \mu'' - \mu' \lambda'') \bar{m} = \\ = \mu'' [m + (m_1 - 1) a + m_2 b] - \lambda'' [n + n_1 a + (n_2 - 1) b], \\ (\lambda' \mu'' - \mu' \lambda'') \bar{n} = \\ = \lambda' [n + n_1 a + (n_2 - 1) b] - \mu' [m + (m_1 - 1) a + m_2 b], \end{cases}$$

a stałe $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{n}_1, \bar{n}_2$ na podstawie związków (162) wzorami:

$$(214)\qquad \begin{cases} (\lambda' \mu'' - \mu' \lambda'') \bar{m}_1 = \mu'' (m_1 \lambda' + m_2 \mu') - \lambda'' (n_1 \lambda' + n_2 \mu'), \\ (\lambda' \mu'' - \mu' \lambda'') \bar{m}_2 = \mu'' (m_1 \lambda'' + m_2 \mu'') - \lambda'' (n_1 \lambda'' + n_2 \mu''), \\ (\lambda' \mu'' - \mu' \lambda'') \bar{n}_1 = \lambda' (n_1 \lambda' + n_2 \mu') - \mu' (m_1 \lambda' + m_2 \mu'), \\ (\lambda' \mu'' - \mu' \lambda'') \bar{n}_2 = \lambda' (n_1 \lambda'' + n_2 \mu'') - \mu' (m_1 \lambda'' + m_2 \mu''). \end{cases}$$

Przypuśćmy, że równanie (195) ma dwa różne od siebie pierwiastki, t.j. że zachodzi jedna z nierówności (200). Przy-

puśćmy nadto, że dwukierunki $\mu' : \lambda'$ i $\mu'' : \lambda''$, określone równaniami (202) są nieizotropowe, t.j. że kwadrat ilorazu (203) jest różny od -1, czyli, że zachodzi nierówność:

$$J_1^2 + J_2^2 - 4J \neq 0. \tag{215}$$

Przy tych założeniach można określić takie wielkości λ', μ' i λ'', μ'', czyniące zadość równaniom (202), które są spółczynnikami kierunkowemi, i łatwo dostrzec, że przyjmując tak określone spółczynniki λ', μ' i λ'', μ'' we wzorach (214) dochodzimy do wzorów:

$$\left\{\begin{aligned} &\Psi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'')\,\bar{m}_1 = -\rho'\,\Phi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu''),\\ &\Psi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'')\,\bar{m}_2 = -\rho'',\\ &\Psi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'')\,\bar{n}_1 = \rho',\\ &\Psi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'')\,\bar{n}_2 = \rho''\,\Phi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu''). \end{aligned}\right. \tag{216}$$

Związki te można napisać jeszcze w innej formie. Jeżeli mianowicie zwrócimy uwagę na to, że spełniona jest równość:

$$\Phi^2(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'') + \Psi^2(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'') = 1,$$

to na podstawie równości (203) otrzymamy równości:

$$\left\{\begin{aligned} &\Phi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'') = \frac{J_1}{\zeta\sqrt{J_1^2 + J_2^2 - 4J}},\\ &\Psi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'') = -\frac{\sqrt{J_2^2 - 4J}}{\zeta\sqrt{J_1^2 + J_2^2 - 4J}}, \end{aligned}\right. \tag{217}$$

w których $\zeta = \pm 1$. Korzystając z tych równości, możemy wzory (216) zastąpić wzorami:

$$\left\{\begin{aligned} &\bar{m}_1 = \frac{J_1\rho'}{\sqrt{J_2^2 - 4J}}, \quad \bar{m}_2 = \frac{\zeta\sqrt{J_1^2 + J_2^2 - 4J}\,\rho''}{\sqrt{J_2^2 - 4J}},\\ &\bar{n}_1 = -\frac{\zeta\sqrt{J_1^2 + J_2^2 - 4J}\,\rho'}{\sqrt{J_2^2 - 4J}}, \quad \bar{n}_2 = -\frac{J_1\rho''}{\sqrt{J_2^2 - 4J}}, \end{aligned}\right. \tag{218}$$

w których ρ' i ρ'' określają się wzorem (201). Jeżeli zachodzi nierówność $J < \frac{1}{4} J_2^2$, to uważane przekształcenie linjowe odniesione jest do rzeczywistych osi $\bar{x}, \bar{y}$ i wtedy ze wzorów (218) wynikają rzeczywiste wartości na spółczynniki $\bar{m}_1, \bar{n}_1$ i $\bar{m}_2, \bar{n}_2$, a ze wzorów (213) rzeczywiste wartości na stałe m i n. Jeżeli zachodzi nierówność $J > \frac{1}{4} J_2^2$, to uważane przekształcenie odniesione jest do urojonych osi $\bar{x}, \bar{y}$. W przypadkach spełnienia nierówności (145) przekształcenie (143) posiada jeden określony punkt niezmienny. Jeżeli umieścimy w nim początek a, b nowego układu spółrzędnych, to ze wzorów (213) otrzymamy $\bar{m} = 0$, $\bar{n} = 0$ i przekształcenie linjowe będzie w nowym układzie przekształceniem jednorodnem.

Zwrócimy się teraz do zastosowania kierunków λ', μ' i λ'', μ'', określonych związkami (208) przy założeniu, że wyróżnik (210) jest różny od zera. Zauważmy, że gdybyśmy przyjęli osie $\bar{x}, \bar{y}$, mające odpowiednio rzeczone kierunki i do tych osi odnieśli przekształcenie (143), to otrzymalibyśmy równania (212), naskutek których kierunki osi przechodziłyby w kierunki do siebie prostopadłe. To znaczy, że wtedy zachodziłyby równości:

$$\cos \bar{\vartheta} = 0, \quad \bar{m}_1 \bar{m}_2 + \bar{n}_1 \bar{n}_2 = 0. \tag{219}$$

Widoczne, że niezmienniki (166) wyrażałyby się przez spółczynniki $\bar{m}_1, \bar{n}_1, \bar{m}_2, \bar{n}_2$ zapomocą wzorów:

$$J = \bar{m}_1 \bar{n}_2 - \bar{n}_1 \bar{m}_2, \quad J_1 = \bar{m}_1 + \bar{n}_2, \quad J_2 = \varepsilon_1 (\bar{n}_1 - \bar{m}_2), \tag{220}$$

gdzie $\varepsilon_1 = \pm 1$, zależnie od tego, czy oś $\bar{y}$ tworzy z osią $\bar{x}$ kąt $+\frac{\pi}{2}$, czy też kąt $-\frac{\pi}{2}$. Postaramy się wyrazić spółczynniki $\bar{m}_1$, $\bar{n}_1, \bar{m}_2, \bar{n}_2$ przez niezmienniki J, J_1, J_2. W tym celu zauważmy, że drugą z równości (219) można spełnić najogólniej, wyrażając rzeczone spółczynniki przez trzy parametry r_1, r_2, ω zapomocą wzorów:

$$\begin{cases} \bar{m}_1 = r_1 \cos \omega, & \bar{n}_1 = r_1 \sin \omega, \\ \bar{m}_2 = -r_2 \sin \omega, & \bar{n}_2 = r_2 \cos \omega. \end{cases} \tag{221}$$

Dla wielkości r_1, r_2, ω otrzymujemy na podstawie wzorów (220) równania:

(222) $r_1 r_2 = J, \quad (r_1 + r_2)\cos\omega = J_1, \quad (r_1 + r_2)\sin\omega = \varepsilon_1 J_2.$

Na podstawie drugiego i trzeciego z tych równań mamy:

$$r_1 + r_2 = \eta \sqrt{J_1^2 + J_2^2}, \tag{223}$$

gdzie $\eta = \pm 1$, a ponieważ wyróżnik (210) jest różny od zera, więc i prawa strona równości (223) jest różna od zera, a stąd wynika, że na funkcje trygonometryczne kąta ω otrzymujemy wzory:

$$\cos\omega = \frac{J_1}{\eta\sqrt{J_1^2 + J_2^2}}, \quad \sin\omega = \frac{\varepsilon_1 J_2}{\eta\sqrt{J_1^2 + J_2^2}}. \tag{224}$$

Zauważymy przytem, że ω jest jednym z kątów z osią $\bar{x}$ linji prostej, otrzymującej się z tej osi naskutek uważanego przekształcenia. Wielkości r_1 i r_2 są pierwiastkami równania drugiego stopnia:

$$r^2 - \eta\sqrt{J_1^2 + J_2^2}\, r + J = 0, \tag{225}$$

którego wyróżnik jest:

$$-\frac{1}{4}(J_1^2 + J_2^2 - 4J), \tag{226}$$

a więc jest mniejszy od zera na mocy założenia, że wyróżnik (210) jest mniejszy od zera. Wobec tego dochodzimy do wyników:

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{1}{2}\left(\eta\sqrt{J_1^2 + J_2^2} + \zeta\sqrt{J_1^2 + J_2^2 - 4J}\right), \\ r_2 = \dfrac{1}{2}\left(\eta\sqrt{J_1^2 + J_2^2} - \zeta\sqrt{J_1^2 + J_2^2 - 4J}\right), \end{cases} \tag{227}$$

gdzie $\zeta = \pm 1$. Zwrócimy przytem uwagę na znaczenie geometryczne wielkości r_1 i r_2. Jeżelibyśmy wzięli pod uwagę na każdej z osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ parę punktów odległych jeden od drugiego o jednostkę długości, to łatwo byłoby udowodnić, że kwadrat odległości punktów, odpowiadających punktom pary naskutek uważanego przekształcenia, jest równy r_1^2 dla pary na osi $\bar{x}$ i r_2^2 dla pary na osi $\bar{y}$. Na podstawie wzorów (224) i (227) otrzymujemy na spółczynniki m_1, n_1, m_2, n_2 wyrażenia:

$$(228)\quad \begin{cases} \bar{m}_1 = \dfrac{J_1}{2\eta\sqrt{J_1^2+J_2^2}}\left(\eta\sqrt{J_1^2+J_2^2}+\zeta\sqrt{J_1^2+J_2^2-4J}\right), \\ \bar{n}_1 = \dfrac{\varepsilon_1 J_2}{2\eta\sqrt{J_1^2+J_2^2}}\left(\eta\sqrt{J_1^2+J_2^2}+\zeta\sqrt{J_1^2+J_2^2-4J}\right), \\ \bar{m}_2 = -\dfrac{\varepsilon_1 J_2}{2\eta\sqrt{J_1^2+J_2^2}}\left(\eta\sqrt{J_1^2+J_2^2}-\zeta\sqrt{J_1^2+J_2^2-4J}\right), \\ \bar{n}_2 = \dfrac{J_1}{2\eta\sqrt{J_1^2+J_2^2}}\left(\eta\sqrt{J_1^2+J_2^2}-\zeta\sqrt{J_1^2+J_2^2-4J}\right). \end{cases}$$

Zauważymy tutaj, że równanie drugiego stopnia (225) można otrzymać przez przekształcenie równania (209). Jeżeli mianowicie w tem ostatniem podstawimy:

$$S = \eta\sqrt{J_1^2+J_2^2}\, r - J,$$

to po wykonaniu działań i opuszczeniu różnego od zera wspólnego czynnika wszystkich wyrazów $J_1^2+J_2^2$, otrzymamy równanie (225). Podobnie jak w poprzednim przypadku można przy spełnieniu nierówności (145) wyprowadzone wzory zastosować do redukowania przekształcenia (143) do postaci jednorodnej.

ROZDZIAŁ SIÓDMY.

Zagadnienia dotyczące niektórych elementarnych tworów urojonych.

§ 42. Zbiory pewnych par punktów rzeczywistych, położonych na elipsach względnie hiperbolach.

Niech będzie na płaszczyźnie ustalony kierunek rachowania kątów oraz układ spółrzędnych prostokątnych p, q, którego oś q tworzy z osią p kąt $+\frac{\pi}{2}$. Weźmy pod uwagę równanie:

$$\varepsilon p^2 + \eta q^2 = 1, \tag{1}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$, $\eta = \pm 1$ i znaki te wybrane są w taki sposób, że równanie (1) przedstawia krzywą rzeczywistą. Zajmiemy się parami punktów rzeczywistych, których spółrzędne p_1, q_1 i p_2, q_2 spełniają warunki następujące. Spółrzędne p_1, q_1 spełniają równanie (1), t.j. warunek:

$$\varepsilon p_1^2 + \eta q_1^2 = 1; \tag{2}$$

spółrzędne p_2, q_2 spełniają warunek:

$$\bar{\varepsilon} p_2^2 + \bar{\eta} q_2^2 = 1, \tag{3}$$

gdzie $\bar{\varepsilon} = \pm 1$, $\bar{\eta} = \pm 1$ i znaki te czynią zadość wymaganiu, żeby warunkowi temu czyniły zadość pary spółrzędnych rzeczywistych; wreszcie jedne i drugie spółrzędne spełniają warunek:

$$\sigma p_1 p_2 + \tau q_1 q_2 = 0, \tag{4}$$

gdzie $\sigma = \pm 1$, $\tau = \pm 1$. Z równości (2) i (3) wynika, że ani spółrzędne p_1, q_1 nie mogą być obie jednocześnie zerami, ani spółrzędne p_2, q_2 nie mogą być obie jednocześnie zerami. Wobec tego równość (4) można zastąpić dwiema równościami:

$$p_2 = -\sigma \zeta q_1, \quad q_2 = \tau \zeta p_1, \tag{5}$$

w których ζ jest czynnikiem rzeczywistym, różnym od zera i narazie nieoznaczonym. Jeżeli wyrażenia (5) podstawimy w związek (3), to otrzymamy równość:

$$(\bar{\varepsilon} q_1^2 + \bar{\eta} p_1^2) \zeta^2 = 1.$$

Ograniczymy się do przypadków, w których nawias, zachodzący w tej równości, jest stałą dodatnią przy wszelkich rzeczywistych wartościach wielkości p_1, q_1, które spełniają równość (2). Przypadki te zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są równości:

$$\bar{\varepsilon} = \eta, \quad \bar{\eta} = \varepsilon,$$

a stąd wnosimy, że ζ musi być w tych przypadkach równe ± 1. Ograniczenie, które wprowadziliśmy, redukuje warunki dla rozważanych par punktów do współczesnego zachodzenia czterech równości:

$$\begin{cases} \varepsilon p_1^2 + \eta q_1^2 = 1, \quad \eta p_2^2 + \varepsilon q_2^2 = 1, \\ p_2 = -\sigma \zeta q_1, \quad q_2 = \tau \zeta p_1, \end{cases} \tag{6}$$

w których $\varepsilon = \pm 1$, $\eta = \pm 1$, $\sigma = \pm 1$, $\tau = \pm 1$, $\zeta = \pm 1$, ale znaki ε, η poddane są zastrzeżeniu, że nie mogą być oba jednocześnie równe -1.

Rozważymy naprzód znaczenie geometryczne warunków (6). Jeżeli $\varepsilon = +1$, $\eta = +1$, to punkty o spółrzędnych p_1, q_1; p_2, q_2 są oba położone na kole o promieniu 1 ze środkiem w początku spółrzędnych. Jeżeli $\varepsilon = +1$, $\eta = -1$, to punkty p_1, q_1; p_2, q_2 leżą na dwóch hiperbolach równobocznych ze sobą sprzężonych o wspólnym środku w początku spółrzędnych i przytem punkt p_1, q_1 leży na hiperboli, której oś rzeczywista jest osią p, a długość połowy osi rzeczywistej równa się 1, punkt zaś p_2, q_2 leży na hiperboli, której oś rzeczywista jest osią q, a długość połowy osi rzeczy-

wistej także równa się 1. Jeżeli wreszcie $\varepsilon = -1$, $\eta = +1$, to punkty p_1, q_1; p_2, q_2 leżą na tych samych dwóch hiperbolach ze sobą sprzężonych, ale punkt p_1, q_1 położony jest na drugiej z nich, punkt zaś p_2, q_2 położony jest na pierwszej z nich. Ażeby określić znaczenie geometryczne warunków podanych w drugim wierszu wzorów (6), oznaczmy przez w_1 wektor, którego początek leży w początku spółrzędnych, a koniec w punkcie p_1, q_1, a przez w_2 wektor, którego początek leży w początku spółrzędnych, a koniec w punkcie p_2, q_2. Naprzód z równości drugiego wiersza wzorów (6) wynika, że przy wszystkich możliwościach zawartych w podwójnych znakach σ, τ, ζ wektory w_1 i w_2 mają tę samą długość. Następnie, jeżeli założymy, że $\sigma\tau = +1$, to przyjmując $\zeta = \sigma$, mieć będziemy związki:

$$p_2 = -q_1, \quad q_2 = p_1, \tag{7}$$

t.j. wektor w_2 tworzyć będzie z wektorem w_1 kąt $+\frac{\pi}{2}$, przyjmując zaś $\zeta = -\sigma$ mieć będziemy:

$$p_2 = q_1, \quad q_2 = -p_1, \tag{8}$$

t.j. wektor w_2 tworzyć będzie z wektorem w_1 kąt $+\frac{3\pi}{2}$. Jeżeli natomiast założymy, że $\sigma\tau = -1$, to przyjmując $\zeta = -\sigma$, mieć będziemy:

$$p_2 = q_1, \quad q_2 = p_1, \tag{9}$$

t.j. dwusieczna kąta wektorów w_1 i w_2 będzie dwusieczną kątów osi spółrzędnych, położoną w obszarach, którym odpowiadają spółrzędne o tych samych znakach, przyjmując zaś $\zeta = \sigma$, mieć będziemy:

$$p_2 = -q_1, \quad q_2 = -p_1, \tag{10}$$

t.j. dwusieczna kąta wektorów w_1 i w_2 będzie dwusieczną kątów osi spółrzędnych, położoną w obszarach, którym odpowiadają spółrzędne o różnych znakach.

Narysujmy koło o promieniu 1 ze środkiem w początku spółrzędnych (fig. 65). Oznaczmy punkty, w których koło to spotyka osie spółrzędnych p, q przez A, B, C, D tak jak naznaczono na figurze. Przeprowadźmy dwusieczne kątów osi i oznaczmy punkty spotkania tych dwusiecznych z kołem przez K, L, M, N tak jak

naznaczono na figurze. Przypuśćmy, że P, Q oznaczają dwa punkty obwodu koła, nie leżące na tej samej średnicy. Wtedy przez $\overset{\frown}{PQ}$ oznaczać będziemy mniejszy łuk koła, łączący te punkty i obiegany od P do Q. Posługując się temi oznaczeniami, będziemy mogli łatwo opisać, jak porusza się na kole punkt p_2, q_2 określony kolejno

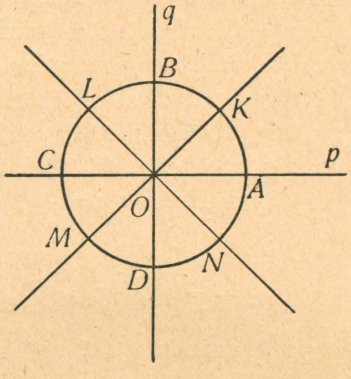

Fig. 65.

równościami (7), (8), (9), (10), gdy punkt p_1, q_1 obiega całkowity obwód koła w kierunku powiększania się kątów. Gdy punkt p_1, q_1 obiega kolejno łuki:

$$\overset{\frown}{AB},\ \overset{\frown}{BC},\ \overset{\frown}{CD},\ \overset{\frown}{DA},$$

wówczas punkt p_2, q_2, określony wzorami (7), obiega kolejno łuki:

$$\overset{\frown}{BC},\ \overset{\frown}{CD},\ \overset{\frown}{DA},\ \overset{\frown}{AB},$$

a punkt p_2, q_2, określony wzorami (8), obiega kolejno łuki:

$$\overset{\frown}{DA},\ \overset{\frown}{AB},\ \overset{\frown}{BC},\ \overset{\frown}{CD}.$$

W przypadkach zachodzenia wzorów (9) i (10) ta zależność obiegów punktów p_1, q_1 i p_2, q_2 ma inny charakter. Gdy mianowicie punkt p_1, q_1 obiega na kole kolejno łuki:

$$\overset{\frown}{AK},\ \overset{\frown}{KB},\ \overset{\frown}{BL},\ \overset{\frown}{LC},\ \overset{\frown}{CM},\ \overset{\frown}{MD},\ \overset{\frown}{DN},\ \overset{\frown}{NA},$$

wówczas punkt p_2, q_2, określony wzorami (9), obiega kolejno łuki:

$$\overset{\frown}{BK},\ \overset{\frown}{KA},\ \overset{\frown}{AN},\ \overset{\frown}{ND},\ \overset{\frown}{DM},\ \overset{\frown}{MC},\ \overset{\frown}{CL},\ \overset{\frown}{LB},$$

a punkt p_2, q_2, określony wzorami (10), obiega kolejno łuki:

$$\overset{\frown}{DM},\ \overset{\frown}{MC},\ \overset{\frown}{CL},\ \overset{\frown}{LB},\ \overset{\frown}{BK},\ \overset{\frown}{KA},\ \overset{\frown}{AN},\ \overset{\frown}{ND}.$$

Obiegi punktów p_1, q_1 i p_2, q_2 odbywają się w przypadkach wzorów (7) i (8) w tym samym kierunku, a w przypadkach wzorów (9) i (10) w kierunkach wprost przeciwnych.

Niech będą teraz dwie hiperbole równoboczne ze sobą sprzężone, których osie rzeczywiste są odpowiednio osiami p i q, a długości połów osi rzeczywistych są równe 1 (fig. 66). Jedna z tych hiperbol naznaczona jest na figurze linją ciągłą, druga

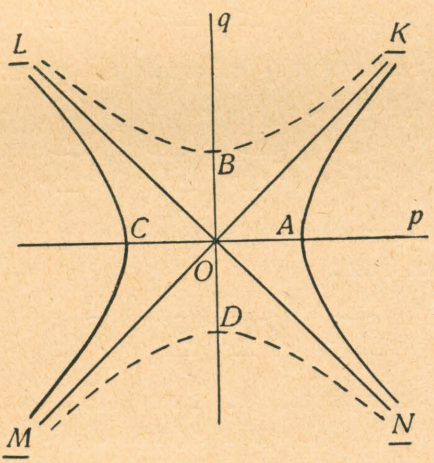

Fig. 66.

zaś linją przerywaną. Oznaczmy literami A, B, C, D wierzchołki tych dwóch hiperbol tak jak wskazano na figurze. Hiperbole uważane mają wspólne asymptoty, z których każda dzieli się w początku spółrzędnych na dwa ramiona. Oznaczmy punkty nieskończenie odległe tych ramion literami K, L, M, N tak jak wskazano na figurze. Ażeby opisać, jak porusza się punkt p_2, q_2, określony kolejno równościami (7), (8), (9), (10), gdy punkt p_1, q_1 wykonywa obiegi na uważanych hiperbolach, posługiwać się będziemy poprzedniem oznaczeniem $\overset{\frown}{PQ}$, stosując je w obecnym przypadku do nieskończonych łuków na hiperbolach. Gdy mianowicie punkt p_1, q_1 obiega kolejno łuki:

$$\overset{\frown}{NA},\ \overset{\frown}{AK},\ \overset{\frown}{MC},\ \overset{\frown}{CL}$$

hiperboli o osi rzeczywistej p, wówczas punkt p_2, q_2, określony wzorami (7), obiega kolejno łuki:

$$\overset{\frown}{KB},\ \overset{\frown}{BL},\ \overset{\frown}{ND},\ \overset{\frown}{DM}$$

hiperboli o osi rzeczywistej q, a punkt p_2, q_2, określony wzorami (8), obiega kolejno łuki:

$$\overset{\frown}{MD},\ \overset{\frown}{DN},\ \overset{\frown}{LB},\ \overset{\frown}{BK}$$

hiperboli o osi rzeczywistej q. Gdy punkt p_1, q_1 obiega kolejno łuki:

$$\overset{\frown}{KB},\ \overset{\frown}{BL},\ \overset{\frown}{ND},\ \overset{\frown}{DM}$$

hiperboli o osi rzeczywistej q, wówczas punkt p_2, q_2, określony wzorami (7), obiega kolejno łuki:

$$\overset{\frown}{LC},\ \overset{\frown}{CM},\ \overset{\frown}{KA},\ \overset{\frown}{AN},$$

hiperboli o osi rzeczywistej p, a punkt p_2, q_2, określony wzorami (8), obiega kolejno łuki:

$$\overset{\frown}{NA},\ \overset{\frown}{AK},\ \overset{\frown}{MC},\ \overset{\frown}{CL},$$

hiperboli o osi rzeczywistej p. Przy stosowaniu związków (9) i (10) zależności tych obiegów są inne. Gdy mianowicie punkt p_1, q_1 obiega kolejno łuki:

$$\overset{\frown}{NA},\ \overset{\frown}{AK},\ \overset{\frown}{MC},\ \overset{\frown}{CL}$$

hiperboli o osi rzeczywistej p, wówczas punkt p_2, q_2 określony wzorami (9) obiega łuki:

$$\overset{\frown}{LB},\ \overset{\frown}{BK},\ \overset{\frown}{MD},\ \overset{\frown}{DN}$$

hiperboli o osi rzeczywistej q, a punkt p_2, q_2, określony wzorami (10) obiega łuki:

$$\overset{\frown}{ND},\ \overset{\frown}{DM},\ \overset{\frown}{KB},\ \overset{\frown}{BL}$$

hiperboli o osi rzeczywistej q. Gdy punkt p_1, q_1 obiega kolejno łuki:

$$\overset{\frown}{KB},\ \overset{\frown}{BL},\ \overset{\frown}{ND},\ \overset{\frown}{DM}$$

hiperboli o osi rzeczywistej q, wówczas punkt p_2, q_2, określony wzorami (9), obiega kolejno łuki:

$$\overset{\frown}{KA},\ \overset{\frown}{AN},\ \overset{\frown}{LC},\ \overset{\frown}{CM}$$

hiperboli o osi rzeczywistej p, a punkt p_2, q_2, określony wzorami (10), obiega kolejno łuki:

$$\overset{\frown}{MC},\ \overset{\frown}{CL},\ \overset{\frown}{NA},\ \overset{\frown}{AK}$$

hiperboli o osi rzeczywistej p.

Niech będzie teraz na płaszczyźnie wogóle różnej od poprzednio uważanej płaszczyzny ustalony kierunek rachowania kątów i układ spółrzędnych prostolinjowych x, y, którego oś y tworzy z osią x kąt ϑ. W tym układzie weźmy pod uwagę dwa wektory rzeczywiste: jeden o składowych u', v', drugi o składowych u'', v'' i załóżmy, że wektory te mają różne od siebie dwukierunki, t.j. że spełniona jest nierówność:

$$u'v'' - v'u'' \neq 0.$$

Płaszczyznę p, q odwzorujemy na płaszczyznę x, y na podstawie równań:

$$(11) \qquad x = u'p + u''q, \quad y = v'p + v''q$$

i zajmiemy się punktami x_1, y_1 i x_2, y_2 tej płaszczyzny, otrzymującemi się odpowiednio z punktów p_1, q_1 i p_2, q_2 przez to odwzorowanie. To znaczy, że spółrzędne pierwszego z tych punktów określone są wzorami:

$$(12) \qquad x_1 = u'p_1 + u''q_1, \quad y_1 = v'p_1 + v''q_1,$$

a spółrzędne drugiego z nich określone są wzorami:

$$(13) \qquad x_2 = u'p_2 + u''q_2, \quad y_2 = v'p_2 + v''q_2.$$

Zadanie nasze polegać będzie na zbadaniu, jakie własności pary punktów x_1, y_1 i x_2, y_2 odpowiadają rozważanym poprzednio własnościom pary punktów p_1, q_1 i p_2, q_2.

Wobec założenia $u'v'' - v'u'' \neq 0$ można równania (12) rozwiązać względem p_1, q_1, a równania (13) rozwiązać względem v_2, q_2. W ten sposób dochodzimy do wzorów:

$$(14) \qquad p_1 = \frac{v''x_1 - u''y_1}{u'v'' - v'u''}, \quad q_1 = \frac{u'y_1 - v'x_1}{u'v'' - v'u''}$$

oraz do wzorów:

$$(15) \qquad p_2 = \frac{v''x_2 - u''y_2}{u'v'' - v'u''}, \quad q_2 = \frac{u'y_2 - v'x_2}{u'v'' - v'u''}.$$

Podstawiając wyrażenia (14) w pierwsze z równań pierwszego wiersza wzorów (6), otrzymujemy równanie:

$$(16) \qquad \varepsilon (v''x_1 - u''y_1)^2 + \eta (u'y_1 - v'x_1)^2 = (u'v'' - v'u'')^2,$$

a podstawiając wyrażenia (15) w drugie z równań pierwszego wiersza wzorów (6), otrzymujemy równanie:

$$(17) \qquad \eta (v''x_2 - u''y_2)^2 + \varepsilon (u'y_2 - v'x_2)^2 = (u'v'' - v'u'')^2.$$

Jeżeli jeszcze wyrażenia (14) i (15) podstawimy w równanie (4), to otrzymamy:

$$(18) \qquad \sigma (v''x_1 - u''y_1)(v''x_2 - u''y_2) + \tau (u'y_1 - v'x_1)(u'y_2 - v'x_2) = 0,$$

a podstawiając też same wyrażenia w równania drugiego wiersza wzorów (6), mieć będziemy równania:

$$(19) \qquad \begin{cases} v''x_2 - u''y_2 = -\sigma\zeta (u'y_1 - v'x_1), \\ u'y_2 - v'x_2 = \tau\zeta (v''x_1 - u''y_1). \end{cases}$$

Zauważmy, że można równanie (16) przez wykonanie działań doprowadzić do postaci:

$$(20) \qquad (\eta v'^2 + \varepsilon v''^2) x_1^2 + (\eta u'^2 + \varepsilon u''^2) y_1^2 - \\ - 2 (\eta u'v' + \varepsilon u''v'') x_1 y_1 = (u'v'' - v'u'')^2,$$

a równanie (17) do postaci:

$$(21) \qquad (\varepsilon v'^2 + \eta v''^2) x_2^2 + (\varepsilon u'^2 + \eta u''^2) y_2^2 - \\ - 2 (\varepsilon u'v' + \eta u''v'') x_2 y_2 = (u'v'' - v'u'')^2.$$

Podobnież można równaniu (18) nadać postać:

$$(22)\qquad (\tau v'^2 + \sigma v''^2) x_1 x_2 + (\tau u'^2 + \sigma u''^2) y_1 y_2 - \\ - (\tau u'v' + \sigma u'' v'') (x_1 y_2 + y_1 x_2) = 0.$$

Równania (20) i (21) mają ten sam wyróżnik δ, określający się wzorem:

$$(23)\qquad \delta = \varepsilon \eta (u'v'' - v'u'')^2.$$

Gdy $\varepsilon = +1$, $\eta = +1$, wówczas równania (16) i (17) orzekają, że oba punkty x_1, y_1 i x_2, y_2 leżą na tej samej elipsie rzeczywistej:

$$(24)\qquad (v''x - u''y)^2 + (u'y - v'x)^2 = (u'v'' - v'u'')^2.$$

Gdy zaś $\varepsilon\eta = -1$, wówczas równania (16) i (17) orzekają, że jeden z punktów x_1, y_1 i x_2, y_2 leży na jednej, drugi zaś na drugiej z hiperbol ze sobą sprzężonych, określonych równaniami:

$$(25)\qquad \begin{cases} (v''x - u''y)^2 - (u'y - v'x)^2 = (u'v'' - v'u'')^2, \\ (u'y - v'x)^2 - (v''x - u''y)^2 = (u'v'' - v'u'')^2. \end{cases}$$

Pierwsza z tych hiperbol ma z elipsą (24) dwa punkty wspólne, mianowicie:

$$x = u',\ y = v' \quad \text{i} \quad x = -u',\ y = -v',$$

a druga z nich ma z elipsą (24) dwa punkty wspólne, mianowicie:

$$x = u'',\ y = v'' \quad \text{i} \quad x = -u'',\ y = -v''.$$

Gdy $\sigma\tau = 1$, wówczas równanie (18) jest:

$$(26)\quad (v''x_1 - u''y_1)(v''x_2 - u''y_2) + (u'y_1 - v'x_1)(u'y_2 - v'x_2) = 0,$$

gdy zaś $\sigma\tau = -1$, wówczas równanie (18) jest:

$$(27)\quad (v''x_1 - u''y_1)(v''x_2 - u''y_2) - (u'y_1 - v'x_1)(u'y_2 - v'x_2) = 0.$$

Dwukierunki $y_1 : x_1$ i $y_2 : x_2$, spełniające równanie (26), są dwukierunkami ze sobą sprzężonemi względem elipsy (24). Dwukierunki $y_1 : x_1$ i $y_2 : x_2$, spełniające równanie (27), są dwukierunkami ze sobą sprzężonemi względem każdej z hiperbol (25). W szczególności dwukierunki $v' : u'$ i $v'' : u''$ są dwukierunkami ze sobą sprzężonemi i względem elipsy (24) i względem każdej z hiperbol (25). Biorąc

pod uwagę zaznaczone własności uważanych linij krzywych, dostrzegamy, że połączenie tych krzywych na jednym rysunku daje figurę 67. Figura ta jest odwzorowaniem obu figur 65 i 66 na płaszczyznę x, y, przyczem temi samemi literami, co na tamtych figurach, oznaczyliśmy na tej figurze punkty, będące odwzorowaniem tamtych punktów. Kołu figury 65 odpowiada na figurze 67 elipsa, hiperboli, narysowanej linją ciągłą na figurze 66, odpowiada hiperbola także narysowana linją ciągłą na figurze 67, wreszcie hiperboli, narysowanej linją przerywaną na figurze 66, odpowiada hiperbola także narysowana linją przerywaną na figurze 67.

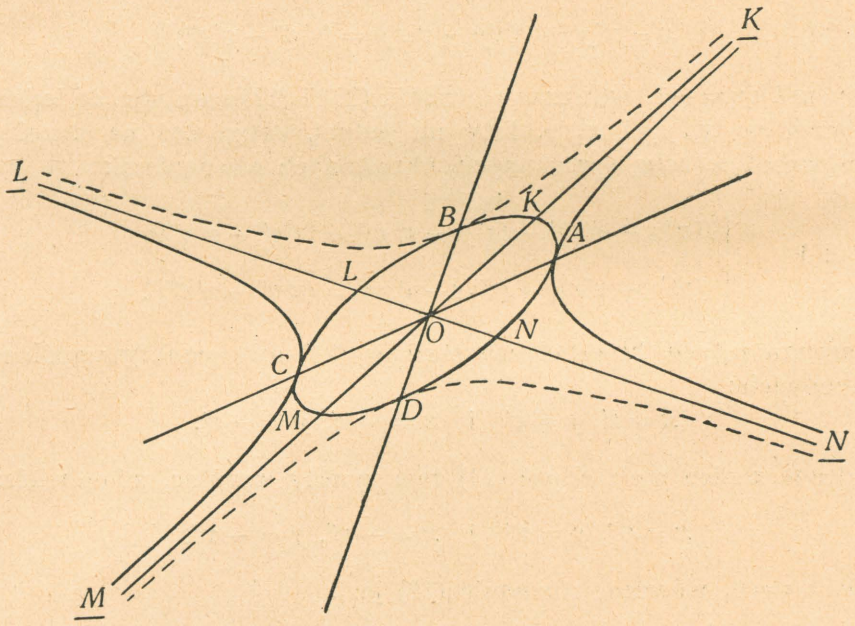

Fig. 67.

Równania, odnoszące się do tworów na płaszczyźnie x, y, odniesiemy do nowych spółrzędnych $\bar{x}, \bar{y}$, wybranych w taki sposób, żeby wektory u', v' i u'', v'' leżały odpowiednio na osiach $\bar{x}, \bar{y}$ i miały z niemi te same kierunki. Na podstawie wzorów (67) § 21 tomu I wniesiemy łatwo, że nowe spółrzędne $\bar{x}, \bar{y}$, czyniące zadość tym warunkom, określone będą wyrażeniami:

$$(28) \qquad \bar{x} = \frac{r'(v''x - u''y)}{u'v'' - v'u''}, \quad \bar{y} = \frac{r''(u'y - v'x)}{u'v'' - v'u''},$$

w których przyjęto oznaczenia:

$$r' = \sqrt{u'^2 + v'^2 + 2u'v'\cos\vartheta},$$

$$r'' = \sqrt{u''^2 + v''^2 + 2u''v''\cos\vartheta}.$$

Łatwo przytem sprawdzić, że we wzorach (28) niema błędów co do znaków, bo podstawiając w nich $x = u'$, $y = v'$, otrzymujemy $\bar{x} = r'$, $\bar{y} = 0$, a podstawiając w nich $x = u''$, $y = v''$, otrzymujemy $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = r''$. Jeżeli teraz przez $\bar{x}_1, \bar{y}_1$ i $\bar{x}_2, \bar{y}_2$ oznaczymy odpowiednio nowe spółrzędne punktów x_1, y_1 i x_2, y_2, to na podstawie wzorów (14) mieć będziemy związki:

$$\bar{x}_1 = r'p_1, \quad \bar{y}_1 = r''q_1,$$

a na podstawie wzorów (15) mieć będziemy związki:

$$\bar{x}_2 = r'p_2, \quad \bar{y}_2 = r''q_2.$$

W tych nowych spółrzędnych równanie (16) mieć będzie postać:

$$\varepsilon \frac{\bar{x}_1^2}{r'^2} + \eta \frac{\bar{y}_1^2}{r''^2} = 1, \tag{29}$$

a równanie (17) postać:

$$\eta \frac{\bar{x}_2^2}{r'^2} + \varepsilon \frac{\bar{y}_2^2}{r''^2} = 1. \tag{30}$$

Związki te są spełnione bądź dla punktów elipsy, bądź też dla punktów sprzężonych ze sobą hiperbol. Są one równaniami odniesionemi do osi spółrzędnych, będących średnicami ze sobą sprzężonemi względem wszystkich trzech rozważanych tutaj linij krzywych. Warunek (18) otrzymuje w nowych spółrzędnych postać:

$$\sigma \frac{\bar{x}_1 \bar{x}_2}{r'^2} + \tau \frac{\bar{y}_1 \bar{y}_2}{r''^2} = 0, \tag{31}$$

a warunki (19) postać:

$$\frac{\bar{x}_2}{r'} = -\sigma\zeta \frac{\bar{y}_1}{r''}, \quad \frac{\bar{y}_2}{r''} = \tau\zeta \frac{\bar{x}_1}{r'}. \tag{32}$$

Zajmiemy się własnościami przekształcenia punktu $\bar{x}_1, \bar{y}_1$ na punkt $\bar{x}_2, \bar{y}_2$, określonego równaniami (32). Przy studjowaniu tych własności będziemy zakładali, że punkt $\bar{x}_1, \bar{y}_1$ może przyjmować wszelkie położenia na płaszczyźnie. Wzory (32) pociągają za sobą równość:

$$\frac{\bar{x}_2^2}{r'^2} + \frac{\bar{y}_2^2}{r''^2} = \frac{\bar{x}_1^2}{r'^2} + \frac{\bar{y}_1^2}{r''^2}. \tag{33}$$

Elipsa figury 67 określa się w spółrzędnych $\bar{x}, \bar{y}$ równaniem:

$$\frac{\bar{x}^2}{r'^2} + \frac{\bar{y}^2}{r''^2} = 1. \tag{34}$$

Z równości (33) wynika, że jeżeli jeden z punktów $\bar{x}_1, \bar{y}_1$ i $\bar{x}_2, \bar{y}_2$ leży na elipsie (34), to i drugi z tych punktów leży na elipsie (34). Przyjmijmy następnie środek elipsy (34) za środek homotetyczności i weźmy pod uwagę wszystkie elipsy homotetyczne z elipsą (34). Widoczne, że przez każdy punkt płaszczyzny różny od rzeczonego środka przechodzi jedna określona z tych elips homotetycznych. Otóż z równości (33) wynika, że punkty $\bar{x}_1, \bar{y}_1$ i $\bar{x}_2, \bar{y}_2$, odpowiadające sobie na mocy przekształcenia (32), różne od rzeczonego środka, położone są oba na tej samej z rzeczonych elips homotetycznych.

Następnie oznaczmy przez $\bar{w}_1$ i $\bar{w}_2$ wektory, których wspólny początek leży w początku spółrzędnych, a końce położone są odpowiednio w punktach $\bar{x}_1, \bar{y}_1$ i $\bar{x}_2, \bar{y}_2$. Zauważmy, że oznaczając przez $\bar{\vartheta}$ kąt, który dodatnie ramię osi $\bar{y}$ tworzy z dodatniem ramieniem osi $\bar{x}$, mamy widocznie wzory:

$$\cos\bar{\vartheta} = \frac{1}{r'r''}\left[u'u'' + v'v'' + (u'v'' + v'u'')\cos\vartheta\right],$$

$$\sin\bar{\vartheta} = \frac{u'v'' - v'u''}{r'r''}\sin\vartheta.$$

Jeżeli następnie przez $\bar{\psi}$ oznaczymy kąt, który wektor $\bar{w}_2$ tworzy z wektorem $\bar{w}_1$, to mieć będziemy wzór:

$$\sin\bar{\psi} = \frac{1}{\rho_1\rho_2}(\bar{x}_1\bar{y}_2 - \bar{y}_1\bar{x}_2)\sin\vartheta, \tag{35}$$

w którym przyjęto oznaczenia:

$$\bar{\rho}_1 = \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2 + 2\bar{x}_1\bar{y}_1\cos\bar{\vartheta}},$$

$$\bar{\rho}_2 = \sqrt{\bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2 + 2\bar{x}_2\bar{y}_2\cos\bar{\vartheta}}.$$

Rozważymy rozmaite przypadki przekształcenia (32).

Jeżeli przyjmiemy naprzód, że $\sigma\tau = +1$, a $\zeta = \sigma$, to przekształcenie (32) będzie:

$$\frac{\bar{x}_2}{r'} = -\frac{\bar{y}_1}{r''}, \quad \frac{\bar{y}_2}{r''} = \frac{\bar{x}_1}{r'}, \tag{36}$$

a ze wzoru (35) otrzymamy:

$$\sin\bar{\psi} = \frac{r'r''}{\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2}\left(\frac{\bar{x}_1^2}{r'^2} + \frac{\bar{y}_1^2}{r''^2}\right)\sin\bar{\vartheta}.$$

W przypadku tym dwukierunki odnośnych wektorów $\bar{w}_1$ i $\bar{w}_2$ są ze sobą sprzężone względem elipsy (34), kierunki ich zaś są takie, że $\sin\bar{\psi}$ jest tego samego znaku, co $\sin\bar{\vartheta}$. Jeżeli przyjmiemy następnie, że $\sigma\tau = +1$, a $\zeta = -\sigma$, to przekształcenie (32) będzie:

$$\frac{\bar{x}_2}{r'} = \frac{\bar{y}_1}{r''}, \quad \frac{\bar{y}_2}{r''} = -\frac{\bar{x}_1}{r'}, \tag{37}$$

a ze wzoru (35) otrzymamy:

$$\sin\bar{\psi} = -\frac{r'r''}{\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2}\left(\frac{\bar{x}_1^2}{r'^2} + \frac{\bar{y}_1^2}{r''^2}\right)\sin\bar{\vartheta}.$$

W tym przypadku dwukierunki odnośnych wektorów $\bar{w}_1$ i $\bar{w}_2$ są także sprzężone względem elipsy (34), kierunki ich zaś są takie, że $\sin\bar{\psi}$ ma znak różny od znaku $\sin\bar{\vartheta}$.

Przechodząc teraz do założeń $\sigma\tau = -1$ i $\zeta = -\sigma$, widzimy, że w tym przypadku równania (32) są:

$$\frac{\bar{x}_2}{r'} = \frac{\bar{y}_1}{r''}, \quad \frac{\bar{y}_2}{r''} = \frac{\bar{x}_1}{r'}, \tag{38}$$

a ze wzoru (35) wynika równość:

$$\sin\bar{\psi} = \frac{r'r''}{\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2}\left(\frac{\bar{x}_1^2}{r'^2} - \frac{\bar{y}_1^2}{r''^2}\right)\sin\bar{\vartheta}.$$

Jeżeli zaś przyjmiemy, że $\sigma\tau = -1$, a $\zeta = \sigma$, to równania (32) będą:

$$\frac{\bar{x}_2}{r'} = -\frac{\bar{y}_1}{r''}, \quad \frac{\bar{y}_2}{r''} = -\frac{\bar{x}_1}{r'} \tag{39}$$

i na mocy wzoru (35) mieć będziemy równość:

$$\sin\bar{\psi} = -\frac{r'r''}{\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2}\left(\frac{\bar{x}_1^2}{r'^2} - \frac{\bar{y}_1^2}{r''^2}\right)\sin\bar{\vartheta}.$$

W przypadkach związków (38) lub też związków (39) dwukierunki wektorów $\bar{w}_1, \bar{w}_2$ są dwukierunkami ze sobą sprzężonemi względem każdej z dwóch hiperbol ze sobą sprzężonych:

$$\frac{\bar{x}^2}{r'^2} - \frac{\bar{y}^2}{r''^2} = 1, \tag{40}$$

$$\frac{\bar{y}^2}{r''^2} - \frac{\bar{x}^2}{r'^2} = 1. \tag{41}$$

Ażeby zaś określić, w jakiej zależności są w tych przypadkach kierunki wektorów $\bar{w}_1$ i $\bar{w}_2$, uwzględnimy trzy możliwości następujące:

$$\frac{\bar{x}_1^2}{r'^2} - \frac{\bar{y}_1^2}{r''^2} > 0, \tag{42}$$

$$\frac{\bar{x}_1^2}{r'^2} - \frac{\bar{y}_1^2}{r''^2} < 0, \tag{43}$$

$$\frac{\bar{x}_1^2}{r'^2} - \frac{\bar{y}_1^2}{r''^2} = 0. \tag{44}$$

W przypadku przekształcenia (38) kierunki wektorów $\bar{w}_1$ i $\bar{w}_2$ są takie, że przy spełnieniu nierówności (42) $\sin\bar{\psi}$ i $\sin\bar{\vartheta}$ mają te same znaki, a przy spełnieniu nierówności (43) $\sin\bar{\psi}$ i $\sin\bar{\vartheta}$ mają różne znaki. W przypadku przekształcenia (39) kierunki wektorów $\bar{w}_1$ i $\bar{w}_2$ są takie, że przy spełnieniu nierówności (42) $\sin\bar{\psi}$ i $\sin\bar{\vartheta}$ mają różne znaki, a przy spełnieniu nierówności

(43) $\sin\bar{\varphi}$ i $\sin\bar{\vartheta}$ mają te same znaki. Pozostają jeszcze do rozważenia możliwości objęte równością (44). Wówczas mamy:

$$\frac{\bar{y}_1}{r''} = \omega \frac{\bar{x}_1}{r'},$$

gdzie $\omega = \pm 1$ i wtedy ze związków (38) wynikają równości:

$$\bar{x}_2 = \omega \bar{x}_1, \quad \bar{y}_2 = \omega \bar{y}_1,$$

a ze związków (39) równości:

$$\bar{x}_2 = -\omega \bar{x}_1, \quad \bar{y}_2 = -\omega \bar{y}_1.$$

Stąd wynika, że przy spełnieniu równości (44) i $\omega = +1$, wektory $\bar{w}_1$ i $\bar{w}_2$, należące do związków (38), całkowicie nakrywają się, a wektory $\bar{w}_1$ i $\bar{w}_2$, należące do związków (39), mają tę samą długość, ale wprost przeciwne sobie kierunki. Stąd wynika także, że przy spełnieniu równości (44) i $\omega = -1$, wektory $\bar{w}_1$ i $\bar{w}_2$, należące do związków (38), mają tę samą długość, ale wprost przeciwne sobie kierunki, a wektory $\bar{w}_1$ i $\bar{w}_2$, należące do związków (39), całkowicie nakrywają się.

Zauważmy tutaj, że na początku tego paragrafu podaliśmy szereg uwag, odnoszących się do przekształceń (7), (8), (9), (10). Przez rozważania, które teraz przeprowadziliśmy odnośnie do przekształceń (36), (37), (38), (39), doszliśmy do szeregu wniosków, odpowiadających rzeczonym uwagom naskutek odwzorowania płaszczyzn, określonego równaniami (11).

Wreszcie zauważmy, że poprzednio zajmowaliśmy się zależnościami obiegów punktu p_2, q_2 od obiegów punktu p_1, q_1 na łukach figur 65 i 66. Naskutek równań (11) łukom na figurach 65 i 66 odpowiadają określone łuki na figurze 67, a także obiegom łuków na figurach 65 i 66 odpowiadają określone obiegi łuków na figurze 67. Wobec tego można sformułowanie zależności obiegów punktu x_2, y_2 (lub punktu $\bar{x}_2, \bar{y}_2$ w układzie $\bar{x}, \bar{y}$) na łukach figury 67 od obiegów punktu x_1, y_1 (lub punktu $\bar{x}_1, \bar{y}_1$ w układzie $\bar{x}, \bar{y}$) na łukach figury 67 oprzeć na uzyskanem poprzednio sformułowaniu zależności obiegów na łukach figur 65 i 66. Ponieważ przytem oznaczyliśmy temi samemi literami punkty sobie odpowiadające na figurach 65 i 66 z jednej, a na figurze 67 z drugiej strony, przeto otrzymanie odpowiednich sformułowań, odnoszących się do figury 67, nie może przedstawiać trudności i bliżej nie będziemy tem zajmować się.

§ 43. Wektory zespolone i twory rzeczywiste związane z ich interpretacją.

Przyjmijmy na płaszczyźnie P określony kierunek rachowania kątów i układ spółrzędnych prostolinjowych x, y, którego oś y tworzy z osią x kąt ϑ. Niech będzie na tej płaszczyźnie wektor zespolony swobodny o składowych na osiach, określonych odpowiednio liczbami zespolonemi:

$$u = u' + i\,u'', \quad v = v' + i\,v'', \tag{45}$$

gdzie u', v', u'', v'' oznaczają liczby rzeczywiste, które nie są wszystkie jednocześnie zerami.

Zajmiemy się rozważeniem ogółu wektorów zespolonych, które otrzymują się z danego wektora (45) drogą mnożenia obu jego składowych przez ten sam czynnik zespolony różny od zera. Napiszmy ten czynnik w postaci $\rho\, e^{i\omega}$, gdzie ρ oznacza moduł tego czynnika, a ω jego amplitudę zasadniczą. Jeżeli przez $\underline{u}, \underline{v}$ oznaczymy składowe wektora, otrzymującego się w ten sposób z wektora u, v, to mieć będziemy równości:

$$\underline{u} = \rho\, e^{i\omega}\, u, \quad \underline{v} = \rho\, e^{i\omega}\, v, \tag{46}$$

a jeżeli składowe $\underline{u}, \underline{v}$ przedstawimy w postaci:

$$\underline{u} = \underline{u}' + i\,\underline{u}'', \quad \underline{v} = \underline{v}' + i\,\underline{v}'', \tag{47}$$

gdzie $\underline{u}', \underline{v}', \underline{u}'', \underline{v}''$ oznaczają liczby rzeczywiste, to równania (46) będziemy mogli zastąpić przez układ równań, składający się z równań:

$$\begin{cases} \underline{u}' = \rho\,(u' \cos\omega - u'' \sin\omega), \\ \underline{v}' = \rho\,(v' \cos\omega - v'' \sin\omega) \end{cases} \tag{48}$$

i z równań:

$$\begin{cases} \underline{u}'' = \rho\,(u' \sin\omega + u'' \cos\omega), \\ \underline{v}'' = \rho\,(v' \sin\omega + v'' \cos\omega). \end{cases} \tag{49}$$

Rozważymy naprzód szczególny przypadek tego układu równań, otrzymujący się przy wartości $\rho = 1$. Mamy wtedy równania:

$$\begin{cases} \underline{u}' = u' \cos\omega - u'' \sin\omega, \\ \underline{v}' = v' \cos\omega - v'' \sin\omega \end{cases} \tag{50}$$

i równania:

$$(51)\qquad \begin{cases} \underline{u''} = u' \sin\omega + u'' \cos\omega, \\ \underline{v''} = v' \sin\omega + v'' \cos\omega. \end{cases}$$

Załóżmy z początku, że wektor u, v ma rzeczywisty dwukierunek, t.j. że spełniona jest r ó w n o ś ć:

$$(52)\qquad u'v'' - v'u'' = 0.$$

Jeżeli liczby u', v' nie są obie jednocześnie zerami, to istnieje taka liczba l', że spełnione są równości:

$$u'' = l'u', \quad v'' = l'v'$$

i wtedy równania (50) można napisać w postaci:

$$(53)\qquad \underline{u'} = r'u', \quad \underline{v'} = r'v',$$

gdzie przyjęto oznaczenie:

$$(54)\qquad r' = \cos\omega - l' \sin\omega,$$

a równania (51) w postaci:

$$(55)\qquad \underline{u''} = r''u', \quad \underline{v''} = r''v',$$

gdzie przyjęto oznaczenie:

$$(56)\qquad r'' = \sin\omega + l' \cos\omega.$$

Jeżeli z równości (54) i (56) wyrugujemy kąt ω, to otrzymamy związek:

$$(57)\qquad r'^2 + r''^2 = 1 + l'^2.$$

Stąd wynika, że w przypadku uważanym ślady R i A wektorów zespolonych, otrzymujących się z wektora u, v drogą mnożenia obu jego składowych przez tę samą liczbę zespoloną o module równym jedności, mają składowe, wynikające z równań (53) i (55) przy zachodzeniu równości (57).

Jeżeli liczby u'', v'' nie są obie jednocześnie równe zeru, to z równości (52) wnosimy, że istnieje taki czynnik l'', że zachodzą równości:

$$u' = l''u'', \quad v' = l''v''.$$

Wówczas można równania (50) napisać w postaci:

$$\underline{u'} = s'u'', \quad \underline{v'} = s'v'', \tag{58}$$

gdzie zastosowano oznaczenie:

$$s' = l'' \cos\omega - \sin\omega, \tag{59}$$

a równania (51) w postaci:

$$\underline{u''} = s''u'', \quad \underline{v''} = s''v'', \tag{60}$$

gdzie zastosowano oznaczenie:

$$s'' = l'' \sin\omega + \cos\omega. \tag{61}$$

Rugowanie kąta ω z równości (59) i (61) prowadzi do związku:

$$s'^2 + s''^2 = 1 + l''^2. \tag{62}$$

Zatem w rozważanym obecnie przypadku ślady R i A wektorów zespolonych, które otrzymują się z wektora u, v drogą mnożenia obu jego składowych przez ten sam czynnik zespolony o module równym jedności, mają składowe, wynikające z równań (58) i (60) przy spełnieniu równości (62).

Niech będzie teraz spełniona n i e r ó w n o ś ć:

$$u'v'' - v'u'' \neq 0. \tag{63}$$

Przy tem założeniu zwrócimy się do niektórych rozważań § 42. Jeżeli przyjmiemy mianowicie:

$$\begin{cases} p_1 = \cos\omega, & q_1 = -\sin\omega, \\ p_2 = \sin\omega, & q_2 = \cos\omega, \end{cases} \tag{64}$$

to spełnione będą związki:

$$\begin{cases} p_1^2 + q_1^2 = 1, & p_2^2 + q_2^2 = 1, \\ p_2 = -q_1, & q_2 = p_1, \end{cases} \tag{65}$$

które są równościami (6) przy wartościach: $\varepsilon = +1$, $\eta = +1$, $\sigma\zeta = +1$, $\tau\zeta = +1$. Z drugiej strony, jeżeli w równaniach (12)

i (13) zastąpimy wielkości x_1, y_1; x_2, y_2 odpowiednio przez wielkości $\underline{u}', \underline{v}'$; $\underline{u}'', \underline{v}''$, wielkości zaś p_1, q_1, p_2, q_2 przez funkcje kąta ω, określone wzorami (64), to otrzymamy z tych równań równania (50) i (51). Stąd widzimy, że niektóre wyniki geometryczne, otrzymane w § 42, można zastosować do zbioru wektorów urojonych, którym teraz zajmujemy się. W szczególności wnosimy na podstawie równań (16), (17) i (19), podanych w § 42, że z równań (50) i (51) wynikają równania:

$$(66)\quad \begin{cases} (v''\underline{u}' - u''\underline{v}')^2 + (u'\underline{v}' - v'\underline{u}')^2 = (u'v'' - v'u'')^2, \\ (v''\underline{u}'' - u''\underline{v}'')^2 + (u'\underline{v}'' - v'\underline{u}'')^2 = (u'v'' - v'u'')^2 \end{cases}$$

i równania:

$$(67)\quad \begin{cases} v''\underline{u}'' - u''\underline{v}'' = -(u'\underline{v}' - v'\underline{u}'), \\ u'\underline{v}'' - v'\underline{u}'' = v''\underline{u}' - u''\underline{v}'. \end{cases}$$

Równania (66) orzekają, że końce boków węgła wektora $\underline{u}, \underline{v}$, określonych wzorami (50) i (51), położone są przy wszelkich wartościach kąta ω na elipsie, określonej następującemi warunkami: 1) środek tej elipsy leży w początku spółrzędnych; 2) elipsa ta przechodzi przez końce boków węgła wektora u, v; 3) dwukierunki boków węgła tego wektora są względem tej elipsy dwukierunkami ze sobą sprzężonemi. Jeżeli teraz zwrócimy uwagę na geometryczne znaczenie równań (26) i (36), to dostrzeżemy łatwo, że z równań (67) wynikają wnioski: 1) dwa wektory, określone składowemi $\underline{u}', \underline{v}'$ i składowemi $\underline{u}'', \underline{v}''$, mają przy dowolnej wartości kąta ω dwukierunki ze sobą sprzężone względem elipsy, o której mówiliśmy przed chwilą; 2) kierunki tych wektorów mają własność następującą: wstawa kąta wektora $\underline{u}'', \underline{v}''$ z wektorem $\underline{u}', \underline{v}'$ jest przy wszelkiem ω tego samego znaku, co wstawa kąta wektora u'', v'' z wektorem u', v'.

Równania (66) i (67) możemy jeszcze przedstawić w innej formie. Weźmy pod uwagę macierz:

$$(68)\quad \begin{vmatrix} u', u'', \underline{u}', \underline{u}'' \\ v', v'', \underline{v}', \underline{v}'' \end{vmatrix}.$$

Łatwo sprawdzić, że wyznaczniki drugiego stopnia tej macierzy spełniają tożsamość:

$$(69)\qquad (u'v''-v'u'')(\underline{u}'\underline{v}''-\underline{v}'\underline{u}'')-(u'\underline{v}'-v'\underline{u}')(u''\underline{v}''-v''\underline{u}'')+$$
$$+(u'\underline{v}''-v'\underline{u}'')(u''\underline{v}'-v''\underline{u}')=0.$$

Jeżeli którykolwiek z wyznaczników drugiego stopnia macierzy (68) pomnożymy przez $\frac{1}{2}\sin\vartheta$, to otrzymamy wyrażenie pola pewnego trójkąta. Wprowadzimy dla takich pól krótsze oznaczenia. Wyrażenia:

$$(70)\qquad \begin{cases} T=\frac{1}{2}(u'v''-v'u'')\sin\vartheta, \\ \underline{T}=\frac{1}{2}(\underline{u}'\underline{v}''-\underline{v}'\underline{u}'')\sin\vartheta \end{cases}$$

określają odpowiednio pole węgła wektora u, v i pole węgła wektora $\underline{u}, \underline{v}$. Wyrażenia:

$$(71)\qquad \begin{cases} T'=\frac{1}{2}(u'\underline{v}'-v'\underline{u}')\sin\vartheta, \\ T''=\frac{1}{2}(u''\underline{v}''-v''\underline{u}'')\sin\vartheta, \\ T_1=\frac{1}{2}(u'\underline{v}''-v'\underline{u}'')\sin\vartheta, \\ T_2=\frac{1}{2}(u''\underline{v}'-v''\underline{u}')\sin\vartheta \end{cases}$$

określają pola czterech trójkątów, które mają wszystkie tę własność wspólną, że dwoma bokami każdego z tych trójkątów są boki dwóch węgłów dwóch wektorów u, v i $\underline{u}, \underline{v}$. Niema potrzeby objaśniać bliżej kierunków obiegów tych trójkątów, bo kierunki te są bezpośrednio widoczne ze wzorów (71). Tożsamość (69) można zapomocą sześciu pól (70) i (71) napisać w postaci:

$$(72)\qquad T\underline{T}-T'T''+T_1T_2=0.$$

Zapomocą tychże wyrażeń równania (66) otrzymują postać:

$$T'^2 + T_2^2 = T^2, \quad T''^2 + T_1^2 = T^2, \tag{73}$$

a równania (67) postać:

$$T'' = T', \quad T_1 + T_2 = 0 \tag{74}$$

i właśnie związki (73) i (74) są równaniami, które chcieliśmy wyprowadzić. Zauważmy przytem, że jeżeli ze związków (72) i (74) wyrugujemy wielkości T'' i T_1, to otrzymamy:

$$T\,\underline{T} = T'^2 + T_2^2,$$

a jeżeli z tychże związków wyrugujemy wielkości T' i T_2, to otrzymamy:

$$T\,\underline{T} = T''^2 + T_1^2.$$

Z pierwszego z dwóch ostatnich związków dochodzimy na podstawie pierwszego z równań (73) do wyniku:

$$\underline{T} = T, \tag{75}$$

a z drugiego z dwóch ostatnich związków dochodzimy na podstawie drugiego z równań (73) do tego samego wyniku (75). Widoczne przytem, że równość (75) można wyprowadzić wprost z równań (50) i (51) drogą mnożenia pewnych wyznaczników, albo też podać ją bezpośrednio na podstawie jednego z twierdzeń Apollonjusza dla elipsy i wniosku 2), wyprowadzonego powyżej z równań (67).

Widzieliśmy, że końce boków węgła wektora zespolonego u, v, określone wzorami (50) i (51), opisują przy zmianie kąta ω pewne miejsca geometryczne. Zajmiemy się zapytaniem, jak poruszają się rzeczone końce boków węgła na tych miejscach geometrycznych, gdy kąt ω zmienia się od 0 do 2π.

W przypadkach, określonych równością (52), możemy postąpić drogą następującą. Gdy nie obie składowe u', v' są zerami, wówczas możemy zastosować kąt α', określony równością:

$$l' = \operatorname{tg} \alpha',$$

zapomocą którego wielkości r' i r'' można wyrazić wzorami:

$$(76) \qquad r' = \frac{\cos(\alpha' + \omega)}{\cos \alpha'}, \quad r'' = \frac{\sin(\alpha' + \omega)}{\cos \alpha'}.$$

Podobnież, gdy nie obie składowe u'', v'' są zerami, możemy zastosować kąt α'', określony równością:

$$l'' = \operatorname{tg} \alpha''$$

i zapomocą tego kąta wyrazić wielkości s' i s'' wzorami:

$$(77) \qquad s' = \frac{\sin(\alpha'' - \omega)}{\cos \alpha''}, \quad s'' = \frac{\cos(\alpha'' - \omega)}{\cos \alpha''}.$$

Ponieważ ze wzorów (76) i (77) widać bezpośrednio, jak zmieniają się wielkości r', r'', s', s'' przy zmianach kąta ω, więc na podstawie tych wzorów możemy wnosić, jak przy tych zmianach końce boków, określonych wzorami (53), (55), (58), (60), opisują pewne odcinki prostolinjowe i na tem dłużej zatrzymywać się nie będziemy.

Założymy teraz, że spełniona jest nierówność (63) i zajmiemy się zapytaniem, jak przy zmianie kąta ω od 0 do 2π poruszają się na odnośnej elipsie końce wektorów rzeczywistych, określonych wzorami (50) i (51). Dla punktów p_1, q_1 i p_2, q_2, określonych wzorami (64), zachodzą związki (65), a więc zależność pary punktów, położonych na kole, określona jest związkami (7). Korzystając z figury 65, możemy powiedzieć, że gdy parametr ω zmienia się w sposób ciągły od 0 do 2π, wówczas punkt p_1, q_1 opisuje na kole tej figury kolejno łuki:

$$\overset{\frown}{AD}, \quad \overset{\frown}{DC}, \quad \overset{\frown}{CB}, \quad \overset{\frown}{BA},$$

a punkt p_2, q_2 opisuje w taki sposób kolejno na temże kole łuki:

$$\overset{\frown}{BA}, \quad \overset{\frown}{AD}, \quad \overset{\frown}{DC}, \quad \overset{\frown}{CB},$$

że łuk, którego początkiem jest punkt p_1, q_1, a końcem punkt p_2, q_2, stale równa się $+\frac{\pi}{2}$. Wektory $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ na fig. 68 są odpowiednio śladami R i A wektora urojonego u, v. Opierając się na rozważaniach paragrafu bieżącego i rozważaniach paragrafu

poprzedniego odnoszących się do fig. 67 możemy powiedzieć, że gdy parametr ω zmienia się w sposób ciągły od 0 do 2π, wówczas koniec śladu R wektora $\underline{u}, \underline{v}$ opisuje na elipsie figury 68 kolejno łuki:

$$\overset{\frown}{AD},\ \overset{\frown}{DC},\ \overset{\frown}{CB},\ \overset{\frown}{BA}$$

przy zastosowaniu oznaczeń analogicznych do poprzednich, a koniec śladu A wektora $\underline{u}, \underline{v}$ opisuje na tej elipsie w taki sposób kolejno łuki:

$$\overset{\frown}{BA},\ \overset{\frown}{AD},\ \overset{\frown}{DC},\ \overset{\frown}{CB},$$

że dwukierunki rzeczonych śladów R i A są dwukierunkami sprzężonemi względem tej elipsy, a wstawa kąta śladu A wektora

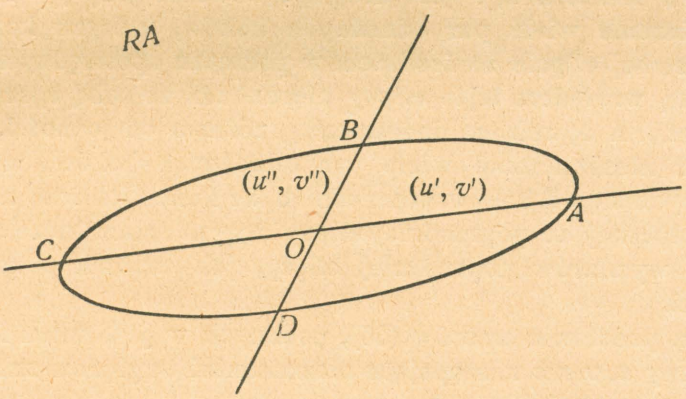

Fig. 68.

$\underline{u}, \underline{v}$ ze śladem R tego wektora ma ten sam znak, co wstawa kąta śladu A ze śladem R wektora u, v.

Zależność uważanych tutaj boków węgła wektora $\underline{u}, \underline{v}$ od parametru ω określa także zależność jednego boku od drugiego boku węgła tego wektora. W przypadkach, w których spełniona jest równość (52), zależność ta jest tego rodzaju, że do wybranego odpowiednio boku $\underline{u}', \underline{v}'$ należą wogóle dwa boki $\underline{u}'', \underline{v}''$ oraz, że do wybranego odpowiednio boku $\underline{u}'', \underline{v}''$ należą wogóle dwa boki $\underline{u}', \underline{v}'$. W przypadkach, w których spełniona jest nierówność (63), zależność ta ma tę własność, że do wybranego odpowiednio boku $\underline{u}', \underline{v}'$ należy zawsze jeden określony bok $\underline{u}'', \underline{v}''$ i że do wybranego odpowiednio boku $\underline{u}'', \underline{v}''$ należy zawsze jeden określony bok $\underline{u}', \underline{v}'$.

Łatwo teraz scharakteryzować geometrycznie boki węgłów wektorów $\underline{u}, \underline{v}$, z których każdy wynika z wektora u, v drogą mnożenia obu jego składowych przez ten sam czynnik zespolony $\rho e^{i\omega}$ przy dowolnem dodatniem ρ. Gdy dwukierunek wektora u, v jest rzeczywisty, wówczas przy $\rho = 1$ istnieje nieskończenie wiele par odnośnych boków, które wszystkie położone są na tej samej linji prostej, przechodzącej przez początek spółrzędnych. Widoczne, że przy każdem dowolnem dodatniem ρ, różnem od jedności, istnieje także nieskończenie wiele par odnośnych boków, leżących na tej samej linji prostej i różniących się od poprzednich boków tylko ich długościami bezwzględnemi. Te długości bezwzględne mają się tak do bezwzględnych długości poprzednich boków, jak dodatni czynnik ρ ma się do jedności. Gdy dwukierunek wektora u, v jest urojony, wówczas przy $\rho = 1$ istnieje nieskończenie wiele par odnośnych boków, których końce leżą na tej samej elipsie ze środkiem w początku spółrzędnych, a kierunki są względem tejże elipsy kierunkami ze sobą sprzężonemi. Przy każdem dowolnem dodatniem ρ, różnem od jedności, istnieje również nieskończenie wiele par odnośnych boków, tem tylko różniących się od boków poprzednich, że końce ich leżą na elipsie homotetycznej do poprzedniej elipsy o wymiarach, które tak mają się do wymiarów poprzedniej elipsy, jak czynnik ρ ma się do jedności.

Na podstawie wzorów (35), podanych w § 48 tomu I, wektor zespolony u, v ma następujące niezmienniki względem zmian spółrzędnych prostolinjowych:

$$(78)\qquad \begin{cases} \Phi' = \Phi(u', v'), \quad \Phi'' = \Phi(u'', v''), \\ \Phi = \Phi(u', v'; u'', v''), \quad \Psi = \Psi(u', v'; u'', v''). \end{cases}$$

Niezmienniki te spełniają związek:

$$(79)\qquad \Phi^2 + \Psi^2 = \Phi' \Phi''.$$

Podobnież, wektor zespolony $\underline{u}, \underline{v}$ ma następujące niezmienniki względem zmian spółrzędnych prostolinjowych:

$$(80)\qquad \begin{cases} \underline{\Phi}' = \Phi(\underline{u}', \underline{v}'), \quad \underline{\Phi}'' = \Phi(\underline{u}'', \underline{v}''), \\ \underline{\Phi} = \Phi(\underline{u}', \underline{v}'; \underline{u}'', \underline{v}''), \quad \underline{\Psi} = \Psi(\underline{u}', \underline{v}'; \underline{u}'', \underline{v}''), \end{cases}$$

związane równością:

$$\underline{\Phi}^2 + \underline{\Psi}^2 = \underline{\Phi'}\,\underline{\Phi''}. \tag{81}$$

Ponieważ składowe boków węgłów u, v i $\underline{u}, \underline{v}$ spełniają równości (48) i (49), przeto niezmienniki (80) wyrażają się przez niezmienniki (78) zapomocą równości:

$$\left\{\begin{aligned}
\underline{\Phi'} &= \rho^2 (\Phi' \cos^2\omega + \Phi'' \sin^2\omega - 2\,\Phi \sin\omega \cos\omega),\\
\underline{\Phi''} &= \rho^2 (\Phi' \sin^2\omega + \Phi'' \cos^2\omega + 2\,\Phi \sin\omega \cos\omega),\\
\underline{\Phi} &= \rho^2 [(\Phi' - \Phi'') \sin\omega \cos\omega + \Phi (\cos^2\omega - \sin^2\omega)],\\
\underline{\Psi} &= \rho^2 \Psi.
\end{aligned}\right. \tag{82}$$

Równości te można zastąpić równościami:

$$\left\{\begin{aligned}
\underline{\Phi'} + \underline{\Phi''} &= \rho^2 (\Phi' + \Phi''),\\
\underline{\Phi'} - \underline{\Phi''} &= \rho^2 [(\Phi' - \Phi'') \cos 2\omega - 2\,\Phi \sin 2\omega],\\
\underline{\Phi} &= \rho^2 \left[\frac{1}{2} (\Phi' - \Phi'') \sin 2\omega + \Phi \cos 2\omega\right],\\
\underline{\Psi} &= \rho^2 \Psi.
\end{aligned}\right. \tag{83}$$

Ale rugowanie kąta 2ω z drugiego i trzeciego z tych związków prowadzi do równości:

$$\frac{1}{4} (\underline{\Phi'} - \underline{\Phi''})^2 + \underline{\Phi}^2 = \rho^4 \left[\frac{1}{4} (\Phi' - \Phi'')^2 + \Phi^2\right],$$

a stąd przy uwzględnieniu pierwszego ze związków (83) wynika równość:

$$\underline{\Phi'}\,\underline{\Phi''} - \underline{\Phi}^2 = \rho^4 (\Phi' \Phi'' - \Phi^2).$$

Ponieważ naskutek związków (79) i (81) równość ta jest wynikiem czwartego ze związków (83), przeto rezultatem rugowania kąta 2ω ze związków (82) są związki:

$$\underline{\Phi'} + \underline{\Phi''} = \rho^2 (\Phi' + \Phi''), \quad \underline{\Psi} = \rho^2 \Psi. \tag{84}$$

Jeżeli w związkach (84) przyjmiemy $\rho = 1$, to otrzymamy z nich związki:

$$\underline{\Phi' + \Phi''} = \Phi' + \Phi'', \quad \underline{\Psi} = \Psi.$$

Z nich wynika twierdzenie następujące. Wektor zespolony swobodny u, v ma dwa bezwzględne niezmienniki przy zmianach spółrzędnych prostolinjowych i mnożeniu obu składowych wektora przez ten sam dowolny czynnik zespolony o module równym jedności, mianowicie niezmienniki:

$$(85) \quad \Phi' + \Phi'' = \Phi(u', v') + \Phi(u'', v''), \quad \Psi = \Psi(u', v'; u'', v'').$$

Zauważymy tutaj, że na podstawie poprzednich rozważań bieżącego paragrafu oraz twierdzeń Apollonjusza dla elipsy moglibyśmy niezmienniki (85) podać bez wykonania ostatniego rugowania. Nadmieniamy przytem, że poprzednia równość (75) wyraża to samo, co niezmienność wielkości Ψ przy wymienionych w twierdzedzeniu przekształceniach.

Jeżeli ze związków (84) wyrugujemy wielkość ρ^2, to dojdziemy do związku:

$$\frac{\underline{\Psi}}{\underline{\Phi' + \Phi''}} = \frac{\Psi}{\Phi' + \Phi''}.$$

Ze związku tego wynika twierdzenie następujące. Wektor swobodny zespolony u, v, którego nie obie składowe są zerami, ma jeden bezwzględny niezmiennik przy zmianach spółrzędnych prostolinjowych i mnożeniu obu składowych wektora przez ten sam dowolny czynnik zespolony różny od zera, mianowicie niezmiennik:

$$(86) \quad \frac{\Psi}{\Phi' + \Phi''} = \frac{\Psi(u', v'; u'', v'')}{\Phi(u', v') + \Phi(u'', v'')}.$$

Gdy wektor u, v ma urojony dwukierunek, wówczas stosować będziemy oznaczenie:

$$(87) \quad I = \frac{\Phi(u', v') + \Phi(u'', v'')}{\Psi(u', v'; u'', v'')},$$

przyczem zwracamy uwagę na wzór (46) w § 56 tomu I i na zamieszczone tam uzasadnienie tego wzoru. Niezmiennik I jest wielkością dodatnią dla wektorów górnych, ujemną zaś dla wektorów dolnych.

Przejdziemy teraz do studjowania dalszych własności interpretacji geometrycznej wektora urojonego. Równanie elipsy, na której przy spełnieniu warunku (63) położone są końce boków węgła wektora u, v, określonych wzorami (50) i (51), można w spółrzędnych bieżących x, y napisać w postaci:

$$(88) \qquad (v''x - u''y)^2 + (u'y - v'x)^2 = (u'v'' - v'u'')^2 .$$

Równanie to przekształcimy przez zastosowanie spółrzędnych $\bar{x}, \bar{y}$, określonych wzorami (28). Stosując oznaczenia (78), napiszemy naprzód wzory (28) w postaci:

$$(89) \qquad \bar{x} = \frac{\sqrt{|\Phi'|}}{\Psi}(v''x - u''y)\sin\vartheta , \quad \bar{y} = \frac{\sqrt{|\Phi''|}}{\Psi}(u'y - v'x)\sin\vartheta ,$$

a następnie, korzystając z nich, doprowadzimy równanie (88) do formy:

$$(90) \qquad \frac{\bar{x}^2}{\Phi'} + \frac{\bar{y}^2}{\Phi''} = 1 .$$

Jeżeli składowe śladów R i A wektora u, v oznaczymy w układzie $\bar{x}, \bar{y}$ odpowiednio przez $\bar{u}', \bar{v}'$ i $\bar{u}'', \bar{v}''$, to, stosując wzory (89), otrzymamy na podstawie wzorów (50) i (51) dla rzeczonych składowych śladu R wyrażenia:

$$(91) \qquad \bar{u}' = \sqrt{|\Phi'|}\cos\omega , \quad \bar{v}' = -\sqrt{|\Phi''|}\sin\omega ,$$

a dla składowych śladu A wyrażenia:

$$(92) \qquad \bar{u}'' = \sqrt{|\Phi'|}\sin\omega , \quad \bar{v}'' = \sqrt{|\Phi''|}\cos\omega .$$

W łączności ze związkami (91) i (92) zwracamy uwagę na to, że oś $\bar{y}$ tworzy z osią $\bar{x}$ kąt $\bar{\vartheta}$, którego dostawa i wstawa określają się wzorami:

$$(93) \qquad \cos\bar{\vartheta} = \frac{\Phi}{\sqrt{|\Phi'\Phi''|}} , \quad \sin\bar{\vartheta} = \frac{\Psi}{\sqrt{|\Phi'\Phi''|}} .$$

Na podstawie warunków (94) § 36 tomu I wnosimy, że równanie (90), a więc, co na jedno wychodzi, równanie (88) przedsta-

wia koło wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są jednocześnie warunki:

$$\Phi' = \Phi'', \quad \Phi = 0,$$

t.j. gdy wektor u, v jest wektorem izotropowym.

Założymy teraz, że tak nie jest, t.j. że ta degeneracja elipsy nie zachodzi, i zajmiemy się wyznaczeniem przypadków, w których wektory, określone wzorami (91) i (92), są do siebie prostopadłe, t.j. zadaniem, które pokrywa się z zadaniem wyznaczenia kierunków i długości osi elipsy (90). Warunek prostopadłości wektorów $\underline{u}', \underline{v}'; \underline{u}'', \underline{v}'$ można na podstawie trzeciego ze wzorów (83) napisać w postaci:

$$(94) \qquad (\Phi' - \Phi'') \cos\omega \sin\omega + \Phi(\cos^2\omega - \sin^2\omega) = 0.$$

Równanie to można zastąpić dwoma równaniami:

$$(95) \qquad \begin{cases} \Phi'' \cos\omega + \Phi \sin\omega = \Psi S \cos\omega, \\ \Phi \cos\omega + \Phi' \sin\omega = \Psi S \sin\omega, \end{cases}$$

gdzie S oznacza nową niewiadomą. Ta niewiadoma musi czynić zadość równaniu:

$$(\Phi'' - \Psi S)(\Phi' - \Psi S) - \Phi^2 = 0,$$

które po wykonaniu działań oraz zastosowaniu związku (79) i oznaczenia (87) można napisać w postaci:

$$(96) \qquad S^2 - I S + 1 = 0.$$

Równanie to ma dwa różne od siebie pierwiastki tego samego znaku, które oznaczymy przez S' i S'' w ten sposób, żeby spełniona była nierówność $|S'| < |S''|$. Pierwiastki te określają się wzorami:

$$(97) \qquad S' = \frac{1}{2}\left(I - \varepsilon\sqrt{I^2 - 4}\right), \quad S'' = \frac{1}{2}\left(I + \varepsilon\sqrt{I^2 - 4}\right),$$

gdzie $\varepsilon = +1$ dla wektorów urojonych górnych, a $\varepsilon = -1$ dla wektorów urojonych dolnych i zwracamy uwagę na to, że o własnościach tych wzorów była już mowa w § 58 tomu I. Zaznaczamy przytem, że w każdym przypadku ε jest wspólnym znakiem wszystkich czterech wielkości Ψ, I, S', S''. Oznaczmy teraz przez

ω_1 jedną z takich wartości kąta ω, która czyni zadość równaniom (95) przy $S = S'$, a przez ω_2 jedną z takich wartości kąta ω, która czyni zadość równaniom (95) przy $S = S''$. Wtedy spełnione będą równości:

$$(98) \qquad \begin{cases} \Phi'' \cos \omega_1 + \Phi \sin \omega_1 = \Psi S' \cos \omega_1, \\ \Phi \cos \omega_1 + \Phi' \sin \omega_1 = \Psi S' \sin \omega_1 \end{cases}$$

oraz równości:

$$(99) \qquad \begin{cases} \Phi'' \cos \omega_2 + \Phi \sin \omega_2 = \Psi S'' \cos \omega_2, \\ \Phi \cos \omega_2 + \Phi' \sin \omega_2 = \Psi S'' \sin \omega_2. \end{cases}$$

Jeżeli obie strony pierwszej z równości (98) pomnożymy przez $\cos \omega_1$, a obie strony drugiej z równości (98) pomnożymy przez $\sin \omega_1$ i otrzymane w ten sposób wyniki dodamy stronami, to dojdziemy do związku:

$$(100) \qquad \Phi'' \cos^2 \omega_1 + \Phi' \sin^2 \omega_1 + 2 \Phi \sin \omega_1 \cos \omega_1 = \Psi S'.$$

Podobnież, jeżeli obie strony pierwszej z równości (99) pomnożymy przez $\cos \omega_2$, a obie strony drugiej z równości (99) pomnożymy przez $\sin \omega_2$ i otrzymane rezultaty dodamy stronami, to otrzymamy związek:

$$(101) \qquad \Phi'' \cos^2 \omega_2 + \Phi' \sin^2 \omega_2 + 2 \Phi \sin \omega_2 \cos \omega_2 = \Psi S''.$$

Pomnóżmy następnie obie strony pierwszej z równości (98) przez $\cos \omega_2$, obie strony drugiej z równości (98) przez $\sin \omega_2$, obie strony pierwszej z równości (99) przez $-\cos \omega_1$, a wreszcie obie strony drugiej z równości (99) przez $-\sin \omega_1$ i wszystkie otrzymane w ten sposób wyniki dodajmy stronami. Wtedy dojdziemy do równości:

$$\Psi (S' - S'') (\cos \omega_1 \cos \omega_2 + \sin \omega_1 \sin \omega_2) = 0,$$

którą zastąpić można równościami:

$$(102) \qquad \cos \omega_2 = -\eta_1 \sin \omega_1, \quad \sin \omega_2 = \eta_1 \cos \omega_1,$$

gdzie $\eta_1 = \pm 1$.

Oznaczmy teraz przez $\underline{u_1}', \underline{v_1}'$ i $\underline{u_1}'', \underline{v_1}''$ składowe wektorów, otrzymujących się ze składowych wektorów (91) i (92) przez przyjęcie $\omega = \omega_1$. Wtedy mieć będziemy wzory:

$$(103) \qquad \underline{u_1}' = \sqrt{\Phi'}\cos\omega_1, \quad \underline{v_1}' = -\sqrt{\Phi''}\sin\omega_1$$

oraz wzory:

$$(104) \qquad \underline{u_1}'' = \sqrt{\Phi'}\sin\omega_1, \quad \underline{v_1}'' = \sqrt{\Phi''}\cos\omega_1.$$

Oznaczmy przez $\underline{\Phi_1}'$ i $\underline{\Phi_1}''$ kwadraty długości tych wektorów. Wtedy mieć będziemy wzory:

$$(105) \quad \begin{cases} \underline{\Phi_1}' = \Phi'\cos^2\omega_1 + \Phi''\sin^2\omega_1 - 2\,\Phi\sin\omega_1\cos\omega_1, \\ \underline{\Phi_1}'' = \Phi'\sin^2\omega_1 + \Phi''\cos^2\omega_1 + 2\,\Phi\sin\omega_1\cos\omega_1. \end{cases}$$

Oznaczmy wreszcie spółczynniki kierunkowe wektorów (103) i (104) w układzie x, y odpowiednio przez $\overline{\lambda_1}', \overline{\mu_1}'$ i $\overline{\lambda_1}'', \overline{\mu_1}''$. Wtedy mieć będziemy wzory:

$$(106) \qquad \overline{\lambda_1}' = \frac{\sqrt{\Phi'}}{\sqrt{\underline{\Phi_1}'}}\cos\omega_1, \quad \overline{\mu_1}' = -\frac{\sqrt{\Phi''}}{\sqrt{\underline{\Phi_1}'}}\sin\omega_1$$

i wzory:

$$(107) \qquad \overline{\lambda_1}'' = \frac{\sqrt{\Phi'}}{\sqrt{\underline{\Phi_1}''}}\sin\omega_1, \quad \overline{\mu_1}'' = \frac{\sqrt{\Phi''}}{\sqrt{\underline{\Phi_1}''}}\cos\omega_1.$$

Jeżeli podobnież oznaczymy przez $\underline{u_2}', \underline{v_2}'$ i $\underline{u_2}'', \underline{v_2}''$ składowe wektorów, otrzymujących się ze składowych wektorów (91) i (92) przez przyjęcie $\omega = \omega_2$, to mieć będziemy wzory:

$$(108) \qquad \underline{u_2}' = \sqrt{\Phi'}\cos\omega_2, \quad \underline{v_2}' = -\sqrt{\Phi''}\sin\omega_2$$

oraz wzory:

$$(109) \qquad \underline{u_2}'' = \sqrt{\Phi'}\sin\omega_2, \quad \underline{v_2}'' = \sqrt{\Phi''}\cos\omega_2.$$

Jeżeli przez $\underline{\Phi}_2'$ i $\underline{\Phi}_2''$ oznaczymy kwadraty długości tych wektorów, to mieć będziemy wzory:

$$(110)\quad \begin{cases} \underline{\Phi}_2' = \Phi' \cos^2 \omega_2 + \Phi'' \sin^2 \omega_2 - 2\,\Phi \sin \omega_2 \cos \omega_2, \\ \underline{\Phi}_2'' = \Phi' \sin^2 \omega_2 + \Phi'' \cos^2 \omega_2 + 2\,\Phi \sin \omega_2 \cos \omega_2. \end{cases}$$

A jeżeli wreszcie przez $\bar{\lambda}_2'$, $\bar{\mu}_2'$ i $\bar{\lambda}_2''$, $\bar{\mu}_2''$ oznaczymy odpowiednio spółczynniki kierunkowe wektorów (108) i (109), to mieć będziemy wzory:

$$(111)\quad \bar{\lambda}_2' = \frac{\sqrt{\Phi'}}{\sqrt{\underline{\Phi}_2'}} \cos \omega_2, \quad \bar{\mu}_2' = -\frac{\sqrt{\Phi''}}{\sqrt{\underline{\Phi}_2'}} \sin \omega_2$$

i wzory:

$$(112)\quad \bar{\lambda}_2'' = \frac{\sqrt{\Phi'}}{\sqrt{\underline{\Phi}_2''}} \sin \omega_2, \quad \bar{\mu}_2'' = \frac{\sqrt{\Phi''}}{\sqrt{\underline{\Phi}_2''}} \cos \omega_2.$$

Zauważmy naprzód, że korzystając ze związków (100) i (101) oraz uwzględniając związki (102), mieć będziemy związki:

$$(113)\quad \begin{cases} \underline{\Phi}_1' = \underline{\Phi}_2'' = \Psi S'', \\ \underline{\Phi}_1'' = \underline{\Phi}_2' = \Psi S'. \end{cases}$$

Wielkość $\Psi S''$ jest kwadratem połowy wielkiej osi elipsy, a wielkość $\Psi S'$ jest kwadratem połowy małej osi elipsy. Zatem dla spółczynników kierunkowych (106) otrzymujemy wyrażenia:

$$(114)\quad \begin{cases} \bar{\lambda}_1' = \dfrac{\sqrt{\Phi'}}{\sqrt{\Psi S''}} \cos \omega_1 = \eta_1 \dfrac{\sqrt{\Phi'}}{\sqrt{\Psi S''}} \sin \omega_2, \\ \bar{\mu}_1' = -\dfrac{\sqrt{\Phi''}}{\sqrt{\Psi S''}} \sin \omega_1 = \eta_1 \dfrac{\sqrt{\Phi''}}{\sqrt{\Psi S''}} \cos \omega_2, \end{cases}$$

a dla spółczynników kierunkowych (107) wyrażenia:

$$(115)\quad \begin{cases} \bar{\lambda}_1'' = \dfrac{\sqrt{\Phi'}}{\sqrt{\Psi S'}} \sin \omega_1 = -\eta_1 \dfrac{\sqrt{\Phi'}}{\sqrt{\Psi S'}} \cos \omega_2, \\ \bar{\mu}_1'' = \dfrac{\sqrt{\Phi''}}{\sqrt{\Psi S'}} \cos \omega_1 = \eta_1 \dfrac{\sqrt{\Phi''}}{\sqrt{\Psi S'}} \sin \omega_2. \end{cases}$$

Podobnież dla spółczynników kierunkowych (111) otrzymujemy wyrażenia:

$$(116)\quad \begin{cases} \bar{\lambda}_2' = \dfrac{\sqrt{\Phi'}}{\sqrt{\Psi S'}} \cos\omega_2 = -\eta \dfrac{\sqrt{\Phi'}}{\sqrt{\Psi S'}} \sin\omega_1, \\ \bar{\mu}_2' = -\dfrac{\sqrt{\Phi''}}{\sqrt{\Psi S'}} \sin\omega_2 = -\eta \dfrac{\sqrt{\Phi''}}{\sqrt{\Psi S'}} \cos\omega_1, \end{cases}$$

a dla spółczynników kierunkowych (112) wyrażenia:

$$(117)\quad \begin{cases} \bar{\lambda}_2'' = \dfrac{\sqrt{\Phi'}}{\sqrt{\Psi S''}} \sin\omega_2 = \eta \dfrac{\sqrt{\Phi'}}{\sqrt{\Psi S''}} \cos\omega_1, \\ \bar{\mu}_2'' = \dfrac{\sqrt{\Phi''}}{\sqrt{\Psi S''}} \cos\omega_2 = -\eta \dfrac{\sqrt{\Phi''}}{\sqrt{\Psi S''}} \sin\omega_1. \end{cases}$$

Z wyrażeń (114) i (117) wynikają związki:

$$(118)\qquad \bar{\lambda}_2'' = \eta \bar{\lambda}_1', \quad \bar{\mu}_2'' = \eta \bar{\mu}_1',$$

a z wyrażeń (115) i (116) wynikają związki:

$$(119)\qquad \bar{\lambda}_1'' = -\eta \bar{\lambda}_2', \quad \bar{\mu}_1'' = -\eta \bar{\mu}_2'.$$

Kierunki, określone spółczynnikami (114), (115), (116) i (117), należą do dwukierunków głównych elipsy (90), a związki (118) i (119) wyrażają zależności zachodzące pomiędzy temi kierunkami. Łatwo byłoby określić spółczynniki kierunkowe tych kierunków względem układu spółrzędnych x, y. Widoczne, że związki (118) i (119) przeszłyby wówczas w związki, określające te same zależności geometryczne pomiędzy rozważanemi kierunkami.

Zajmiemy się tu jeszcze bliższem rozważeniem przypadków, w których węgieł danego wektora u, v jest **węgłem prostokątnym**, w których przeto zachodzi równość:

$$(120)\qquad \Phi = \Phi(u', v'; u'', v'') = 0.$$

Wtedy ze związku (79) otrzymamy:

$$(121)\qquad \Psi = \varepsilon \sqrt{\Phi' \Phi''},$$

a na I mieć będziemy wyrażenie:

$$I = \varepsilon\left(\sqrt{\left|\frac{\Phi'}{\Phi''}\right|} + \sqrt{\left|\frac{\Phi''}{\Phi'}\right|}\right).$$

Na podstawie tego wzoru łatwo podać wartości pierwiastków równania (96), dla których przyjęliśmy poprzednio oznaczenia S' i S'', zakładając, że $|S'| < |S''|$. Gdy $\Phi' > \Phi''$, wówczas otrzymujemy dla S' i S'' wyrażenia:

$$S' = \varepsilon\sqrt{\left|\frac{\Phi''}{\Phi'}\right|}, \quad S'' = \varepsilon\sqrt{\left|\frac{\Phi'}{\Phi''}\right|}. \tag{122}$$

Gdy zaś $\Phi' < \Phi''$, wówczas dla S' i S'' wynikają wyrażenia:

$$S' = \varepsilon\sqrt{\left|\frac{\Phi'}{\Phi''}\right|}, \quad S'' = \varepsilon\sqrt{\left|\frac{\Phi''}{\Phi'}\right|}. \tag{123}$$

Łatwo skonstatować, że przy wartościach (122) spełnione są równości następujące:

$$\Phi'' - \Psi S' = 0, \quad \Phi' - \Psi S' = \Phi' - \Phi'',$$

$$\Phi'' - \Psi S'' = \Phi'' - \Phi', \quad \Phi' - \Psi S'' = 0.$$

To znaczy, że przy założeniu $\Phi' > \Phi''$ równaniom (98) i (99) czynią zadość wartości:

$$\sin \omega_1 = 0, \quad \cos \omega_2 = 0.$$

Podobnież przy wartościach (123) spełnione są równości następujące:

$$\Phi'' - \Psi S' = \Phi'' - \Phi', \quad \Phi' - \Psi S' = 0,$$

$$\Phi'' - \Psi S'' = 0, \quad \Phi' - \Psi S'' = \Phi' - \Phi'',$$

a stąd wynika, że przy założeniu $\Phi' < \Phi''$ równaniom (98) i (99) czynią zadość wartości:

$$\cos \omega_1 = 0, \quad \sin \omega_2 = 0.$$

Pierwszy z tych przypadków zachodzi wtedy, gdy wektor u', v' jest połową wielkiej osi elipsy (88), a wektor u'', v'' połową ma-

łej osi tej elipsy. Drugi z tych przypadków zachodzi wtedy, gdy wektor u', v' jest połową małej osi elipsy (88), a wektor u'', v'' połową wielkiej osi tej elipsy. Z równań (98) i (99) łatwo dostrzec, że prócz przypadków, objętych tem rozważaniem, niema żadnych innych przypadków, w którychby bądź wstawa, bądź dostawa któregokolwiek z kątów ω_1 i ω_2 była zerem.

§ 44. Własności kołowej ósemki wektorów urojonych.

Oznaczmy przez l' i l'' dwie liczby rzeczywiste, obie różne od zera i utwórzmy liczby zespolone określone wyrażeniami:

$$\varepsilon' l' + \varepsilon'' i\, l'', \quad \varepsilon'' l'' + \varepsilon' i\, l', \tag{124}$$

gdzie $\varepsilon' = \pm 1$, $\varepsilon'' = \pm 1$. Liczb tych jest osiem i można je wypisać w wielu rozmaitych porządkach. Utworzymy z nich tabelkę, składającą się z dwóch wierszy. Każdy z tych wierszy zawierać będzie liczby, odpowiadające kolejno wartościom znaków:

$$\varepsilon' = +1,\ \varepsilon'' = +1;\ \varepsilon' = +1,\ \varepsilon'' = -1;\ \varepsilon' = -1,\ \varepsilon'' = +1;\ \varepsilon' = -1,\ \varepsilon'' = -1,$$

przyczem w pierwszym wierszu znajdować się będą liczby określone pierwszem z wyrażeń (124), w drugim zaś liczby określone drugiem z wyrażeń (124). W ten sposób otrzymamy tabelkę:

$$\begin{cases} l' + i\, l'', & l' - i\, l'', & -l' + i\, l'', & -l' - i\, l'', \\ l'' + i\, l', & -l'' + i\, l', & l'' - i\, l', & -l'' - i\, l'. \end{cases} \tag{125}$$

Cztery liczby, znajdujące się w jednym którymkolwiek wierszu tej tabelki, są względem siebie w takich stosunkach, że w tymże wierszu znajdują się liczby różniące się tylko znakiem od każdej z tych liczb i liczby, sprzężone z każdą z tych liczb. Możemy powiedzieć także, że z każdej liczby, zawartej w jednym z tych wierszy, można otrzymać wszystkie inne liczby tego wiersza przez działania następujące: mnożenie jednocześnie obu części liczby zespolonej przez -1, mnożenie spółczynnika przy i przez -1, mnożenie rzeczywistej części liczby zespolonej przez -1. Ostatnie z tych działań jest równoważne dwóm działaniom poprzednim,

wykonanym jedno po drugiem w dowolnym porządku. Ale zapomocą tych działań nie można przejść od liczb jednego wiersza do liczb drugiego wiersza. Każda liczba jednego z tych wierszy przechodzi w liczbę, znajdującą się na takiem samem miejscu drugiego z tych wierszy, przez przestawienie jej części rzeczywistej i jej spółczynnika przy i. Przestawienie to nazywać będziemy działaniem W, mnożenie zaś przez -1 spółczynnika przy i działaniem K. Możemy teraz przekonać się, że jeżeli stosować będziemy odpowiednio działania K i W, to z którejkolwiek jednej z liczb tabelki otrzymamy wszystkie inne liczby tej tabelki. Wykonajmy naprzód te działania na liczbie $l' + i\,l''$. Rezultaty tych działań przedstawimy zapomocą symbolicznych równości:

$$K(l' + i\,l'') = l' - i\,l'', \quad W(l' + i\,l'') = l'' + i\,l'.$$

Mamy zatem już trzy liczby i widzimy, że dla otrzymania dalszych liczb, różnych wogóle od trzech liczb poprzednich, musimy na liczbie $l' - i\,l''$ wykonać działanie W, a na liczbie $l'' + i\,l'$ działanie K. Tą drogą dojdziemy do wyników, które przedstawimy zapomocą równości:

$$W(l' - i\,l'') = -l'' + i\,l', \quad K(l'' + i\,l') = l'' - i\,l'.$$

Dalsze stosowanie tego postępowania prowadzi do wyników:

$$K(-l'' + i\,l') = -l'' - i\,l', \quad W(l'' - i\,l') = -l' + i\,l'',$$

a wreszcie, wykonywając działanie W na pierwszej z dwóch ostatnich liczb, a działanie K na drugiej z nich, dochodzimy do rezultatu:

$$W(-l'' - i\,l') = -l' - i\,l'', \quad K(-l' + i\,l'') = -l' - i\,l'',$$

t.j. do jednej i tej samej liczby $-l' - i\,l''$. Otrzymaliśmy więc z liczby $l' + i\,l''$ przez wykonanie działań K i W wszystkie inne liczby tabelki (125). Taką samą drogą z każdej dowolnej liczby tej tabelki moglibyśmy otrzymać wszystkie inne liczby, do niej należące. Z innej strony widoczne także, że z liczb tabelki (125) nie można tą drogą otrzymać żadnych innych liczb prócz liczb w tejże tabelce zawartych.

Zauważmy, że jeżeli zastosujemy oznaczenia:

$$l = l' + i\,l'', \quad \overset{*}{l} = l' - i\,l'',$$

to będziemy mogli liczby tabelki (125) napisać w formie:

$$(126) \qquad \begin{cases} l, & \overset{*}{l}, & -\overset{*}{l}, & -l, \\ i\overset{*}{l}, & il, & -il, & -i\overset{*}{l}, \end{cases}$$

przyczem zachowany jest ten sam porządek, co w tabelce (125).

Postaramy się teraz osiem liczb, któremi zajmujemy się, przedstawić na płaszczyźnie Gaussa. Niech z' i z'' oznaczają na tej

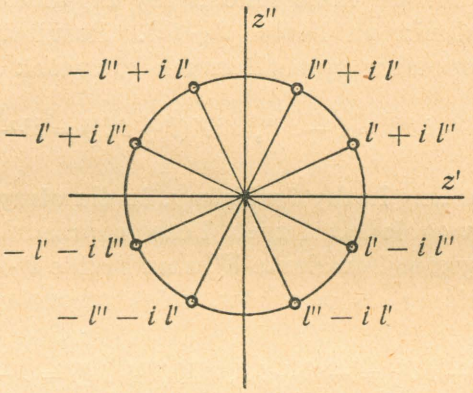

Fig. 69.

płaszczyźnie osie do siebie prostopadłe, będące odpowiednio osią liczb rzeczywistych i osią liczb urojonych fig. 69. Zatoczmy z początku spółrzędnych koło o promieniu $\sqrt{l'^2 + l''^2}$. Wszystkie liczby tabelki (125) przedstawione będą punktami, położonemi na tem kole. Zauważymy przytem, co następuje. Liczbom różniącym się tylko znakami i części rzeczywistych i części urojonych odpowiadają punkty, leżące na tej samej średnicy koła. Liczbom ze sobą sprzężonym odpowiadają punkty symetryczne względem osi rzeczywistych. Liczbom różniącym się tylko znakiem części rzeczywistych odpowiadają punkty symetrycznie położone względem osi urojonych. Dwie liczby, mające tę własność, że z każdej z nich otrzymuje się druga z nich przez działanie W, charakteryzują się własnością, że suma ich amplitud równa się $+\frac{\pi}{2} + 2m\pi$, gdzie m jest albo zerem, albo liczbą całkowitą dodatnią lub ujemną. Zauważymy przytem, że pozycje punktów, naznaczone na fig. 69, odpowiadają

założeniu, że obie liczby l' i l'' są dodatnie i że $l'' < l'$. Przy tem założeniu liczbom pierwszego wiersza tabelki (125) odpowiadają punkty, położone bliżej osi rzeczywistych, a liczbom drugiego wiersza tej tabelki punkty położone bliżej osi urojonych.

Rozważymy jeszcze inne uporządkowanie ośmiu liczb zespolonych, któremi tutaj zajmowaliśmy się. Niech będzie koło i dwie strzałki wskazujące dwa przeciwne sobie kierunki obrotu (fig. 70). Niech jedna z tych strzałek leży wewnątrz obwodu koła, druga zaś zewnątrz obwodu koła. Naznaczmy na obwodzie koła cztery punkty i umieśćmy przy nich kolejno w kierunku wskazanym wewnętrzną strzałką liczby: $l', l'', -l', -l''$. Utworzymy naprzód cztery liczby zespolone w taki sposób, żeby ich części rzeczy-

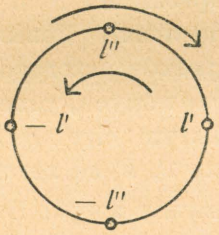

Fig. 70.

wiste były kolejno, począwszy od l', liczbami następującemi po sobie w kierunku wewnętrznej strzałki, a ich spółczynniki przy i były kolejno, począwszy od l'', liczbami następującemi po sobie także w kierunku wewnętrznej strzałki. Liczby te są następujące:

$$(127) \qquad l' + i\,l'', \quad l'' - i\,l', \quad -l' - i\,l'', \quad -l'' + i\,l',$$

a punkty, które odpowiadają im na fig. 69, mają takie pozycje jedne względem drugich, że każda następna liczba ma amplitudę mniejszą o $\frac{\pi}{2}$ od amplitudy liczby poprzedniej. Utworzymy następnie cztery liczby zespolone w taki sposób, żeby ich części rzeczywiste były kolejno, począwszy od l', liczbami następującemi po sobie w kierunku zewnętrznej strzałki fig. 70, a ich spółczynniki przy i były kolejno, począwszy od $-l''$, liczbami następującemi po sobie także w kierunku zewnętrznej strzałki tej figury. Liczby te są następujące:

$$(128) \qquad l' - i\,l'', \quad -l'' - i\,l', \quad -l' + i\,l'', \quad l'' + i\,l',$$

a punkty im odpowiadające na fig. 69 mają takie pozycje, że każda następna liczba ma amplitudę mniejszą o $\frac{\pi}{2}$ od amplitudy liczby poprzedniej. Zauważmy, że przy kołowych przestawieniach liczb $l', l'', -l', -l''$ w kierunku wewnętrznej strzałki liczby zespolone (127) przestawiają się kołowo i że przy przestawieniach kołowych liczb $l', -l'', -l', l''$ w kierunku zewnętrznej strzałki liczby zespolone (128) przestawiają się kołowo. Umówmy się uważać zespoły liczb, powstające przez takie kołowe przestawiania, jako identyczne z zespołami, z których one powstają.

Zauważmy, że gdyby jedna z liczb l' i l'' była zerem, to w własnościach zespołów liczb, o których tutaj mowa, zaszłyby znaczne uproszczenia. Uproszczenia te są widoczne i dlatego pominiemy zajmowanie się niemi. Ponieważ jednak przy zachodzeniu rzeczonych przypadków szczególnych niema przeszkód w działaniach tutaj wykonywanych, przeto rozważania powyższe stosować będziemy w dalszym ciągu przy ogólnem założeniu, że nie obie liczby rzeczywiste l', l'' są zerami.

Nazwijmy uporządkowany zespół liczb:

$$(129) \qquad k' + i\,k'', \quad k'' - i\,k', \quad -k' - i\,k'', \quad -k'' + i\,k',$$

gdzie k' i k'' oznaczają liczby rzeczywiste, nie będące obie jednocześnie zerami, czwórką kołową liczb zespolonych, odpowiadającą uporządkowanej parze liczb rzeczywistych k', k'' i przyjmijmy dla tego zespołu symboliczne oznaczenie $C(k', k'')$. Wtedy zespół (127) będzie $C(l', l'')$ i mieć będziemy dla niego szereg symbolicznych równości:

$$(130) \quad C(l', l'') = C(l'', -l') = C(-l', -l'') = C(-l'', l').$$

Podobnież zespół (128) będzie $C(l', -l'')$ i mieć będziemy dla niego szereg symbolicznych równości:

$$(131) \quad C(l', -l'') = C(-l'', -l') = C(-l', l'') = C(l'', l').$$

Zauważmy, że pierwsze liczby zespołów $C(l', l'')$ i $C(l', -l'')$ są ze sobą sprzężone, że trzecie liczby tych zespołów są ze sobą sprzężone, i wreszcie, że druga liczba każdego z tych zespołów jest sprzężona z czwartą liczbą drugiego z nich. Te zespoły nazwiemy czwórkami kołowemi liczb ze sobą sprzę-

żonemi. Jeżeli stosować będziemy gwiazdkę dla oznaczenia tej sprzężoności, to mieć będziemy symboliczne równości:

$$(132) \qquad \overset{*}{C}(l', l'') = C(l', -l''), \quad \overset{*}{C}(l', -l'') = C(l', l'').$$

Wreszcie zespół dwóch czwórek kołowych, z których jedna jest czwórką kołową liczb zespolonych, odpowiadającą uporządkowanej parze liczb rzeczywistych l', l'', druga zaś jest czwórką kołową z nią sprzężoną, nazwiemy ósemką kołową liczb zespolonych, odpowiadającą uporządkowanej parze liczb rzeczywistych l', l''. Jeżelibyśmy dla oznaczenia tej ósemki przyjęli symbol $O(l', l'')$, to moglibyśmy określić ją także równością symboliczną:

$$(133) \qquad O(l', l'') = C(l', l'') + \overset{*}{C}(l', l'').$$

Z równości (130), (131), (132) wynika, że dla symbolu $O(l', l'')$ można napisać rozmaite równości symboliczne. Na tem zatrzymywać się nie będziemy.

Niech będzie teraz płaszczyzna P i na tej płaszczyźnie układ spółrzędnych prostolinjowych x, y. W tym układzie uważać będziemy swobodny wektor urojony, określony składowemi:

$$(134) \qquad u = u' + i\,u'', \quad v = v' + i\,v'',$$

gdzie u', v', u'', v'' oznaczają liczby rzeczywiste, spełniające warunek:

$$(135) \qquad u'v'' - v'u'' \neq 0.$$

W zależności od liczb u', v', u'', v'' określimy wektory zespolone, przyjmując dla ich składowych na osiach x i y wyrażenia:

$$(136) \qquad \varepsilon' u' + \varepsilon'' i\,u'', \quad \varepsilon'' u'' + \varepsilon' i\,u',$$

$$(137) \qquad \varepsilon' v' + \varepsilon'' i\,v'', \quad \varepsilon'' v'' + \varepsilon' i\,v',$$

w których $\varepsilon' = \pm 1$, $\varepsilon'' = \pm 1$. Dane te rozumieć należy w ten sposób, że do każdej składowej na osi x, określonej jednem z wyrażeń (136), należy składowa na osi y, określona tem z wyrażeń (137), które znajduje się bezpośrednio pod rzeczonem wyrażeniem (136) i odpowiada tym samym co ono wartościom wielkości ε' i ε''. Widoczne, że jest osiem wektorów, objętych temi założeniami. Każde dwa z wektorów, otrzymujących się w ten sposób ze wzo-

rów (136) i (137) przy tych samych wartościach wielkości ε' i ε'', nazwiemy wektorami wzajemnemi. Podzielimy osiem rzeczonych wektorów na dwa zespoły po cztery wektory.

Niech będą naprzód wektory swobodne, określone składowemi:

$$(138)\quad \begin{cases} u_1 = u' + i\,u'' = u; & v_1 = v' + i\,v'' = v; \\ u_2 = u'' - i\,u' = -i\,u; & v_2 = v'' - i\,v' = -i\,v; \\ u_3 = -u' - i\,u'' = -u; & v_3 = -v' - i\,v'' = -v; \\ u_4 = -u'' + i\,u' = i\,u; & v_4 = -v'' + i\,v' = i\,v, \end{cases}$$

a następnie wektory swobodne, określone składowemi:

$$(139)\quad \begin{cases} u_5 = u' - i\,u'' = \overset{*}{u}; & v_5 = v' - i\,v'' = \overset{*}{v}; \\ u_6 = -u'' - i\,u' = -i\,\overset{*}{u}; & v_6 = -v'' - i\,v' = -i\,\overset{*}{v}; \\ u_7 = -u' + i\,u'' = -\overset{*}{u}; & v_7 = -v' + i\,v'' = -\overset{*}{v}; \\ u_8 = u'' + i\,u' = i\,\overset{*}{u}; & v_8 = v' + i\,v'' = i\,\overset{*}{v}. \end{cases}$$

Składowe tych ośmiu wektorów na osiach x i y są tak samo kolejno utworzone z liczb u', u'' i odpowiednio z liczb v', v'', jak liczby zespolone czwórek (127) i (128) są utworzone kolejno z liczb l' i l''. Łatwo narysować węgły tych ośmiu wektorów na płaszczyźnie RA (fig. 71). Boki tych węgłów leżą odpowiednio na dwóch odcinkach, będących przekątnemi tego samego równoległoboku, a końce tych boków są jego wierzchołkami. Węgły naznaczone są na fig. 71 zapomocą krzywych strzałek, zaopatrzonych w te same numery, które są w tabelkach (138) i (139) wskaźnikami składowych odnośnych wektorów. Początek każdej strzałki znajduje się na pierwszym boku odnośnego węgła, koniec zaś na drugim boku tego węgła. Węgły dwóch wektorów wzajemnych mają te same boki, ale boki te są przeciwnie uporządkowane, t.j. odnośne strzałki są przeciwnie skierowane. Strzałki węgłów, należących do wektorów tabelki (138), mają wszystkie ten sam kierunek i w taki sposób następują jedne po drugich, że obejmują razem cztery kąty proste. Strzałki węgłów, które należą do wektorów tabelki (139), mają także wszystkie ten sam kierunek i tak następują jedne po drugich, że obejmują cztery kąty proste, ale kierunek ten jest wprost przeciwny kierunkowi poprzednich

strzałek. Zauważymy przytem, że wynikiem jednoczesnych kołowych przestawień liczb $u', u'', -u', -u''$ i liczb $v', v'', -v', -v''$ są kołowe przestawienia wektorów tabelki (138). Podobnież wyni-

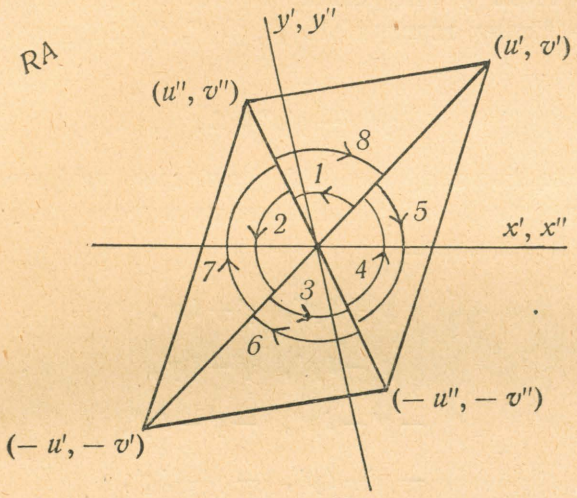

Fig. 71.

kiem jednoczesnych kołowych przestawień liczb $u', -u'', -u', u''$ i liczb $v', -v'', -v', v''$ są kołowe przestawienia wektorów tabelki (139). Umówimy się uważać zespoły wektorów, które powstają przez rzeczone kołowe przestawienia za identyczne z zespołami, z których one powstają.

Wektory tabelki (138) mają wszystkie wspólny dwukierunek, który określa się wartością stosunku $v : u$. Podobnież, wektory tabelki (139) mają wszystkie wspólny dwukierunek, który określa się wartością stosunku $\overset{*}{v} : \overset{*}{u}$. Wspólny dwukierunek wektorów tabelki (138) i wspólny dwukierunek wektorów tabelki (139) są dwukierunkami ze sobą sprzężonemi. Jeżeli spółczynniki tych dwukierunków oznaczymy odpowiednio literami $m, \overset{*}{m}$ i nadto zastosujemy oznaczenia:

$$(140) \qquad m' = \frac{u'v' + u''v''}{u'^2 + u''^2}, \quad m'' = \frac{u'v'' - v'u''}{u'^2 + u''^2},$$

to mieć będziemy dla wektorów tabelki (138) wzór:

$$(141) \qquad m = m' + i\, m'',$$

a dla wektorów tabelki (139) wzór:

$$\overset{*}{m} = m' - i\,m''. \tag{142}$$

Przyjmiemy teraz pewną nazwę i pewien symbol. Niech będą cztery takie liczby rzeczywiste p', q', p'', q'', żeby spełniona była nierówność:

$$p'q'' - q'p'' \neq 0. \tag{143}$$

Zespół uporządkowanej czwórki wektorów urojonych, których składowe na osiach x i y umieszczamy odpowiednio w czterech następujących wierszach:

$$\left\{\begin{array}{ll} p' + i\,p'', & q' + i\,q'', \\ p'' - i\,p', & q'' - i\,q', \\ -p' - i\,p'', & -q' - i\,q'', \\ -p'' + i\,p', & -q'' + i\,q', \end{array}\right. \tag{144}$$

nazwiemy czwórką kołową wektorów urojonych, odpowiadającą uporządkowanej czwórce liczb rzeczywistych p', q', p'', q'', czyniących zadość warunkowi (143), i oznaczymy symbolem $Q(p', q'; p'', q'')$.

Według tej nazwy i tego symbolu zespół (138) będzie czwórką kołową wektorów, do której należy symbol $Q(u', v'; u'', v'')$, i na podstawie uwag o kołowych przestawieniach wektorów tego zespołu mieć będziemy równości:

$$\begin{aligned} Q(u', v'; u'', v'') &= Q(u'', v''; -u', -v') = \\ &= Q(-u', -v'; -u'', -v'') = Q(-u'', -v''; u', v'). \end{aligned} \tag{145}$$

Zespół (139) będzie także czwórką kołową wektorów, mianowicie czwórką, do której należy symbol $Q(u', v'; -u'', -v'')$, i podobnie, jak dla poprzedniej czwórki, mieć będziemy równości:

$$\begin{aligned} Q(u', v'; -u'', -v'') &= Q(-u'', -v''; -u', -v') = \\ &= Q(-u', -v'; u'', v'') = Q(u'', v''; u', v'). \end{aligned} \tag{146}$$

Pierwsze wektory czwórek $Q(u', v'; u'', v'')$ i $Q(u', v'; -u'', -v'')$ są ze sobą sprzężone, trzecie wektory tych czwórek są także ze

sobą sprzężone, a wreszcie drugi wektor każdej z tych czwórek jest sprzężony z czwartym wektorem drugiej z nich. Czwórki te nazwiemy **czwórkami kołowemi wektorów ze sobą sprzężonemi**. Oznaczając i tę sprzężoność zapomocą gwiazdki, mieć będziemy symboliczne równości:

$$(147)\qquad \begin{cases} \overset{*}{Q}(u', v'; u'', v'') = Q(u', v'; -u'', -v''), \\ \overset{*}{Q}(u', v'; -u'', -v'') = Q(u', v'; u'', v''). \end{cases}$$

Wreszcie zespół dwóch ze sobą sprzężonych czwórek kołowych $Q(u', v'; u'', v'')$ i $\overset{*}{Q}(u', v'; u'', v'')$ nazwiemy **ósemką kołową wektorów urojonych, odpowiadającą uporządkowanej czwórce liczb rzeczywistych** u', v', u'', v'' i możemy przytem do czwórek $Q(u', v'; u'', v'')$ i $\overset{*}{Q}(u', v'; u'', v'')$ stosować odpowiednio nazwy **pierwszej czwórki i drugiej czwórki** tej ósemki. Dla tej ósemki wektorów przyjmiemy symbol $S(u', v'; u'', v'')$ i zauważymy, że możemy określić ją także symboliczną równością:

$$(148)\qquad S(u', v'; u'', v'') = Q(u', v'; u'', v'') + \overset{*}{Q}(u', v'; u'', v'').$$

Dla symbolu $S(u', v'; u'', v'')$ można na mocy równości (145), (146), (147) podać szereg równości następujących:

$$(149)\qquad \begin{cases} S(u', v'; u'', v'') = S(u'', v''; -u', -v') = \\ = S(-u', -v'; -u'', -v'') = S(-u'', -v''; u', v') = \\ = S(u', v'; -u'', -v'') = S(-u'', -v''; -u', -v') = \\ = S(-u', -v'; u'', v'') = S(u'', v''; u', v'). \end{cases}$$

Symbol ósemki możemy rozumieć w ten sposób, że w nim naprzód podane są składowe śladu R, a następnie składowe śladu A pierwszego wektora ósemki. Zatem równości (149) orzekają, że każdy wektor, należący do ósemki, może być wybrany jako pierwszy wektor ósemki. Inaczej możemy powiedzieć, że ósemka nie zmienia się, gdy przestawiamy pary składowych, umieszczone w symbolu przed średnikiem i po średniku, oraz, gdy mnożymy przez -1 bądź obie składowe umieszczone w symbolu przed

średnikiem, bądź obie składowe umieszczone w symbolu po średniku, bądź też składowe i jednej i drugiej pary.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że na figurze 71 znajduje się równoległobok, którego wierzchołkami są końce boków węgłów, należących do wektorów ósemki $S(u', v'; u'', v'')$. Równoległobok ten nazwiemy r ó w n o l e g ł o b o k i e m ó s e m k i k o ł o w e j w e k t o r ó w u r o j o n y c h, o d p o w i a d a j ą c y c h u p o r z ą d k o w a n e j c z w ó r c e l i c z b r z e c z y w i s t y c h $u', v'; u'', v''$.

§ 45. O pewnym szczególnym zespole wektorów urojonych.

Niech będą znowu liczby rzeczywiste $u', v', u'' v''$. Określmy w zależności od nich wektory zespolone, przyjmując dla ich składowych na osiach x, y wyrażenia:

$$\varepsilon' u' + \varepsilon'' i\, u'', \quad \varepsilon'' u'' + \varepsilon' i\, u', \tag{150}$$

$$\eta' v' + \eta'' i\, v'', \quad \eta'' v'' + \eta' i\, v', \tag{151}$$

w których $\varepsilon' = \pm 1$, $\varepsilon'' = \pm 1$, $\eta' = \pm 1$, $\eta'' = \pm 1$. Dane te rozumiemy w ten sposób, że składową na osi x jest jedna z liczb (150), a składową wektora na osi y jest jedna z liczb (151). Ponieważ wyrażenia (150) określają osiem liczb, które są wogóle różne jedna od drugiej, a wyrażenia (151) określają także osiem liczb, które są wogóle różne jedna od drugiej, przeto dane, które tutaj przyjmujemy, określają wogóle 64 wektory. Celem tego paragrafu jest rozważenie pewnych własności zespołu tych 64 wektorów.

Zauważmy, że z pośród tych wektorów zajmowaliśmy się w § 44 ósemką wektorów, określoną symbolem $S(u', v'; u'', v'')$. Będziemy się starali z dalszych wektorów tworzyć ósemki analogiczne. W tym celu zauważmy, że odpowiednie równości (149) zastosować można do każdej ósemki kołowej wektorów urojonych. Z zamieszczonych powyżej uwag, odnoszących się do tych równości, wnosimy, że każda ósemka kołowa wektorów urojonych, mających składowe wyszczególnione wyrażeniami (150) i (151), może być określona odnośnym symbolem, w którym na pierwszem miejscu znajduje się litera u', a na trzeciem miejscu litera u''. Naskutek tego wystarczy, dla wytworzenia wszystkich ósemek kołowych rozważanego zbioru wektorów, wykonać zmiany znaków i przestawie-

nia liczb rzeczywistych, należących do składowych osi y. Napiszmy te składowe w porządku:

$$(152)\quad \begin{cases} v'+iv'', & v'-iv'', & -v'+iv'', & -v'-iv'', \\ v''+iv', & -v''+iv', & v''-iv', & -v''-iv', \end{cases}$$

t.j. w takim samym porządku, w jakim napisane są liczby zespolone tabelki (125). Pierwszej ze składowych (152) odpowiada ósemka kołowa $S(u', v'; u'', v'')$. Jeżeli zaś teraz osiem ósemek, które odpowiadają wszystkim składowym, oznaczymy przy uwzględnieniu naprzód kolejno składowych pierwszego wiersza, a potem kolejno składowych drugiego wiersza symbolami:

$$(153)\quad S^{(k)}(u', v'; u'', v''), \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8),$$

to mieć będziemy wzory:

$$(154)\quad \begin{cases} S^{(1)}(u', v'; u'', v'') = S(u', v'; u'', v''), \\ S^{(2)}(u', v'; u'', v'') = S(u', v'; u'', -v''), \\ S^{(3)}(u', v'; u'', v'') = S(u', -v'; u'', v''), \\ S^{(4)}(u', v'; u'', v'') = S(u', -v'; u'', -v''), \\ S^{(5)}(u', v'; u'', v'') = S(u', v''; u'', v'), \\ S^{(6)}(u', v'; u'', v'') = S(u', -v''; u'', v'), \\ S^{(7)}(u', v'; u'', v'') = S(u', v''; u'', -v'), \\ S^{(8)}(u', v'; u'', v'') = S(u', -v''; u'', -v'). \end{cases}$$

Korzystając z tych wzorów można na podstawie tabelek (138) i (139) podać składowe wszystkich wektorów, należących do ośmiu ósemek (154). W tym celu wystarczy podstawić w tabelkach (138) i (139) zamiast v' i v'' kolejno liczby, stojące na miejscach drugiem i czwartem w symbolach, znajdujących się po prawej stronie równości (154). Otrzymamy wtedy wektory, należące do każdej z tych ośmiu ósemek, uporządkowane w taki sposób jak czwórki liczb (127) i (128). Wektory z wskaźnikami 1, 2, 3, 4 tworzyć będą kołową czwórkę wektorów, a także wektory z wskaźnikami 5, 6, 7, 8 tworzyć będą kołową czwórkę wektorów. Te czwórki wektorów będą czwórkami

wektorów ze sobą sprzężonemi i dogodnie będzie stosować do nich odpowiednio nazwy pierwszej czwórki i drugiej czwórki odnośnej ósemki. W przypadkach ogólnych każdej ósemce kołowej wektorów odpowiadać będzie na płaszczyźnie RA równoległobok ósemki, którego wierzchołkami będą końce boków węgłów, należących do wektorów tej ósemki. Odnośne rozważania przeprowadzone są w szczegółach dla ósemki $S^{(1)}(u', v'; u'', v'')$ w § 44. Zauważmy, że jeżeli-

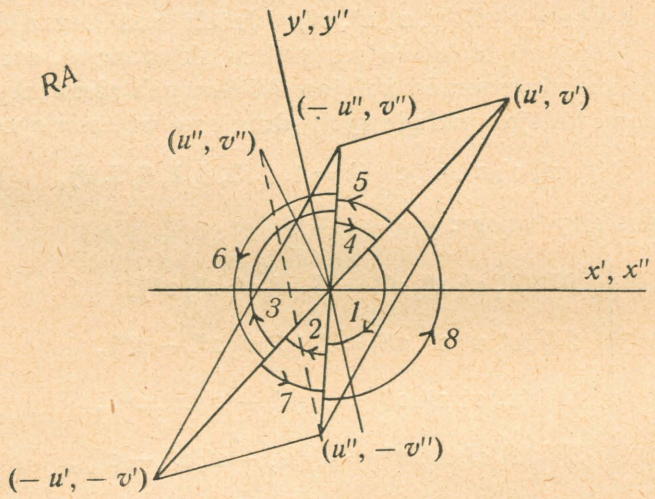

Fig. 72.

byśmy węgieł wektora u, v uważali jako dany na płaszczyźnie RA, to konstrukcja węgła wektora u_1, v_1 każdej z siedmiu dalszych ósemek ułatwiona byłaby okolicznością, że końce śladów R wektorów u_1, v_1 i u, v położone są oba na tej samej prostej, mającej dwukierunek osi y', y'', oraz okolicznością, że końce śladów A wektorów u_1, v_1 i u, v położone są oba na tej samej prostej, mającej dwukierunek tejże osi y', y''. Po tych uwagach przystąpimy do tego, aby każdą z uważanych siedmiu ósemek rozważyć osobno, ograniczając się do najważniejszych szczegółów analitycznych oraz do konstrukcji węgłów wektorów tych ósemek według danego węgła u, v.

Ósemka $S^{(2)}$ składa się z wektorów o urojonych dwukierunkach wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest nierówność:

(155) $$u'v'' + v'u'' \neq 0.$$

Jeżeli zastosujemy oznaczenia:

$$(156) \qquad n' = \frac{u'v' - u''v''}{u'^2 + u''^2}, \quad n'' = -\frac{u'v'' + v'u''}{u'^2 + u''^2},$$

to spółczynnik wspólnego dwukierunku wektorów pierwszej czwórki ósemki $S^{(2)}$ równy będzie liczbie:

$$(157) \qquad n = n' + i\,n'',$$

a spółczynnik wspólnego dwukierunku wektorów drugiej czwórki

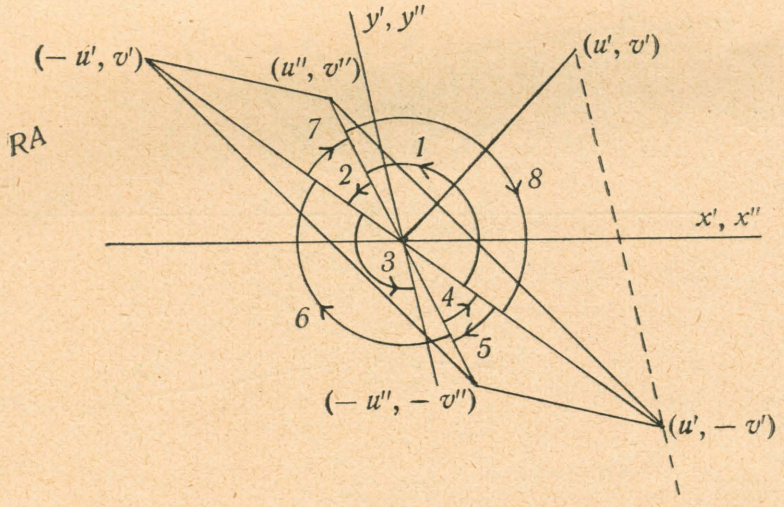

Fig. 73.

ósemki $S^{(2)}$ równy będzie liczbie:

$$(158) \qquad \overset{*}{n} = n' - i\,n''.$$

Na fig. 72 według danego końca boku u'', v'' skonstruowany jest koniec boku $u'', -v''$. Wierzchołki równoległoboku ósemki $S^{(2)}$ mają spółrzędne u', v'; $u'', -v''$; $-u', -v'$; $-u'', v''$. Te spółrzędne wypisane są w porządku, odpowiadającym pierwszej czwórce ósemki $S^{(2)}$. Zapomocą strzałek zaopatrzonych numerami naznaczone są na fig. 72 węgły wektorów ósemki $S^{(2)}$.

Warunek konieczny i wystarczający, aby wektory ósemki $S^{(3)}$ miały urojone dwukierunki, polega także na spełnieniu nierówności

(155). Spółczynnik wspólnego dwukierunku wektorów pierwszej czwórki ósemki $S^{(3)}$ równa się liczbie:

$$(159) \qquad -n = -n' - i\,n'',$$

a spółczynnik wspólnego dwukierunku wektorów drugiej czwórki ósemki $S^{(3)}$ równa się liczbie:

$$(160) \qquad -\overset{*}{n} = -n' + i\,n''.$$

Na fig. 73 skonstruowany jest koniec boku $u', -v'$ według danego końca boku u', v'. Wierzchołki równoległoboku ósemki $S^{(3)}$ mają

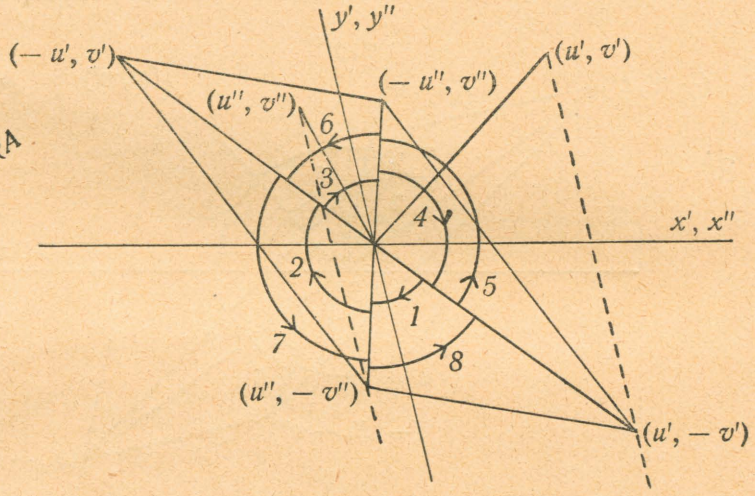

Fig. 74.

spółrzędne $u', -v'$; u'', v''; $-u', v'$; $-u'', -v''$ podane tutaj w porządku odpowiadającym pierwszej czwórce tej ósemki. Wreszcie zastosowany jest na fig. 73 poprzedni sposób naznaczania kolejno po sobie następujących węgłów wektorów ósemki $S^{(3)}$.

Wektory ósemki $S^{(4)}$ mają urojone dwukierunki wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (135). Spółczynnik wspólnego dwukierunku wektorów pierwszej czwórki ósemki $S^{(4)}$ równa się liczbie:

$$(161) \qquad -m = -m' - i\,m'',$$

a spółczynnik wspólnego dwukierunku wektorów drugiej czwórki tej ósemki równa się liczbie:

$$(162) \qquad -\overset{*}{m} = -m' + i\,m''.$$

Według końców boków u', v' i u'', v'' konstruujemy na fig. 74 końce boków $u', -v'$ i $u'', -v''$. Spółrzędne wierzchołków równoległoboku ósemki $S^{(4)}$ podane w porządku, odpowiadającym następstwu wektorów pierwszej czwórki tej ósemki, są: $u', -v'$; $u'', -v''$; $-u', v'$; $-u'', v''$. Wreszcie węgły wektorów tej ósemki naznaczone są na fig. 74 w taki sam sposób jak w przypadkach poprzednich.

Warunek konieczny i wystarczający, aby wektory ósemki $S^{(5)}$ miały urojone dwukierunki, polega na spełnieniu nierówności:

$$u'v' - u''v'' \neq 0. \tag{163}$$

Spółczynnik wspólnego dwukierunku wektorów pierwszej czwórki

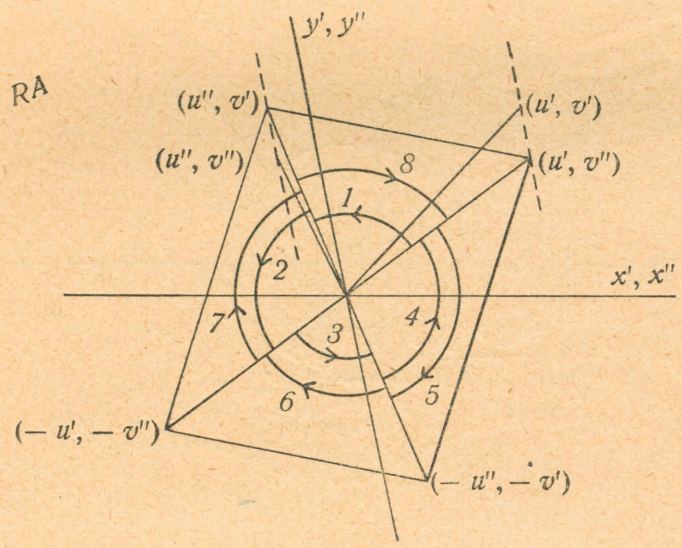

Fig. 75.

tej ósemki równa się liczbie:

$$i\,n = -n'' + i\,n', \tag{164}$$

a spółczynnik wspólnego dwukierunku wektorów drugiej czwórki tej ósemki równa się liczbie:

$$-i\,\overset{*}{n} = -n'' - i\,n'. \tag{165}$$

Konstrukcja równoległoboku ósemki $S^{(5)}$ według danych boków u', v' i u'', v'' może być także wykonana przy zastosowaniu równoległych do osi y', y''. Otrzymujemy wtedy na fig. 75 równoległobok

ósemki $S^{(5)}$, którego wierzchołki określone są spółrzędnemi u', v''; u'', v'; $-u', -v''$; $-u'', -v'$, podanemi tutaj w porządku, odpowiadającym następstwu wektorów pierwszej czwórki. Węgły wektorów ósemki $S^{(5)}$ oznaczone są na fig. 75 strzałkami i odpowiedniemi liczbami porządkowemi, jak w przypadkach poprzednich.

Wektory ósemki $S^{(6)}$ mają urojone dwukierunki wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest nierówność:

$$u'v' + u''v'' \neq 0. \tag{166}$$

Spółczynnik wspólnego dwukierunku wektorów pierwszej czwórki

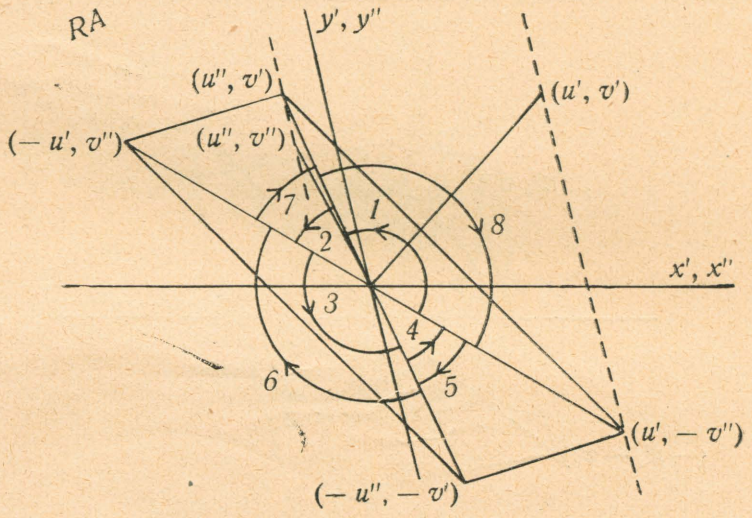

Fig. 76.

tej ósemki równa się liczbie:

$$i\,m = -\,m'' + i\,m', \tag{167}$$

a spółczynnik wspólnego dwukierunku wektorów drugiej czwórki tej ósemki równa się liczbie:

$$-\,i\,\overset{*}{m} = -\,m'' - i\,m'. \tag{168}$$

Z pomocą odpowiednio obranych prostych równoległych do osi y', y'' można według danych boków u', v' i u'', v'' wykreślić wierzchołki równoległoboku ósemki $S^{(6)}$. Temi wierzchołkami na fig. 76 są punkty o spółrzędnych $u', -v''$; u'', v'; $-u', v''$; $-u'', -v'$, które

wyszczególniamy tutaj w porządku, odpowiadającym następstwu wektorów pierwszej czwórki ósemki $S^{(6)}$. Węgły wektorów tej ósemki naznaczamy przytem na fig. 76 takim samym sposobem, jak w poprzednich przypadkach.

Warunek konieczny i wystarczający, żeby wektory ósemki $S^{(7)}$ miały urojone dwukierunki, polega na spełnieniu nierówności (166). Spółczynnik wspólnego dwukierunku wektorów pierwszej czwórki tej ósemki równa się liczbie:

$$-i\,m = m'' - i\,m', \tag{169}$$

a spółczynnik wspólnego dwukierunku wektorów drugiej czwórki

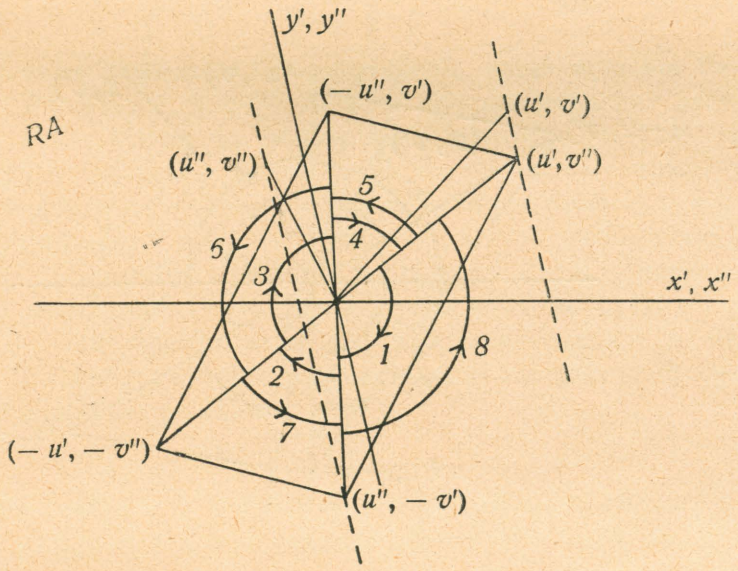

Fig. 77.

tej ósemki równa się liczbie:

$$i\overset{*}{m} = m'' + i\,m'. \tag{170}$$

Konstrukcja równoległoboku ósemki $S^{(7)}$ i węgłów wektorów tej ósemki może być wykonana analogicznie do odpowiednich konstrukcyj w przypadkach poprzednich. Punkty o spółrzędnych u', v''; $u'', -v'$; $-u', -v''$; $-u'', v'$ są wierzchołkami rzeczonego równoległoboku i wierzchołki te podane są tutaj w porządku, odpowiadającym następstwu wektorów w pierwszej czwórce. Węgły wektorów

ósemki $S^{(7)}$ naznaczone są na fig. 77 z pomocą takich samych znaków jak w poprzednich przypadkach.

Przechodząc wreszcie do ósemki $S^{(8)}$ widzimy, że wektory tej ósemki są wtedy i tylko wtedy wektorami o urojonych dwukierunkach, gdy spełniona jest nierówność (163). Spółczynnik wspólnego dwukierunku wektorów pierwszej czwórki tej ósemki równa się liczbie:

$$-in = n'' - in', \tag{171}$$

a spółczynnik wspólnego dwukierunku drugiej czwórki tej ósemki

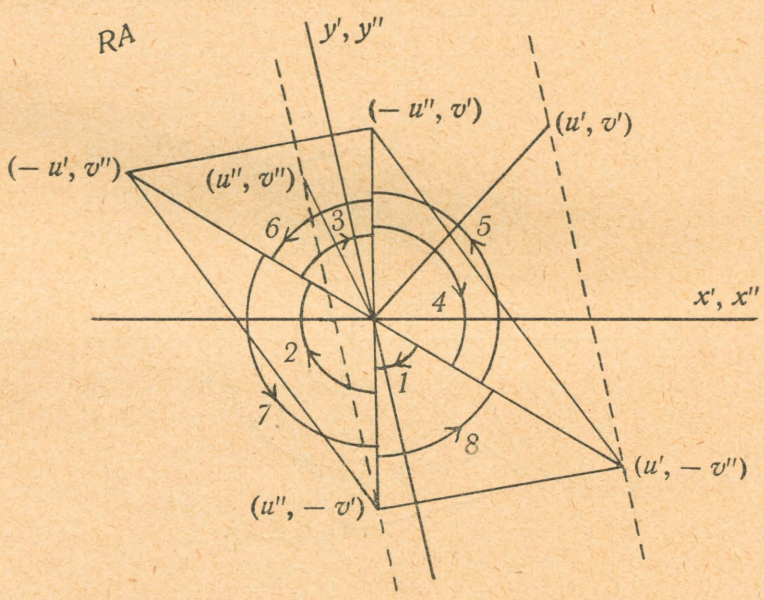

Fig. 78.

równa się liczbie:

$$i\overset{*}{n} = n'' + in'. \tag{172}$$

Za pomocą konstrukcji analogicznej do konstrukcyj w przypadkach poprzednich, otrzymujemy równoległobok o wierzchołkach $u', -v''; u'', -v'; -u', v''; -u'', v'$ (fig. 78), wymienionych tutaj w porządku zgodnym z następstwem wektorów w pierwszej czwórce ósemki $S^{(8)}$. Węgły wektorów tej ósemki naznaczone są na figurze 78 takim samym sposobem, jak w przypadkach poprzednich.

Płaszczyzny ośmiu figur 71—78 można tak nałożyć jedne na drugie, że osie x', x'' i y', y'' wszystkich tych płaszczyzn nakryją odpowiednio jedne drugie. Przy takiem nałożeniu wektory u', v' i u'', v'' wszystkich tych ośmiu płaszczyzn także nakryją odpowiednio jedne drugie i otrzymamy na tej samej płaszczyźnie osiem równoległoboków, należących do ośmiu rozważanych tutaj ósemek kołowych wektorów oraz 64 węgły tych wektorów.

Przy rozważaniu każdej ósemki wektorów obliczaliśmy spółczynniki dwukierunków jej wektorów. Spółczynniki te zależą bądź od liczb rzeczywistych m', m'' bądź też od liczb rzeczywistych n', n''. Łatwo sprawdzić, że te cztery liczby rzeczywiste spełniają związek:

$$m'^2 + m''^2 = n'^2 + n''^2. \tag{173}$$

Wreszcie zauważmy, że rozważania, odnoszące się do par ósemek $S^{(1)}, S^{(4)}$; $S^{(2)}, S^{(3)}$; $S^{(5)}, S^{(8)}$; $S^{(6)}, S^{(7)}$ prowadziliśmy przy założeniu, że spełnione są odpowiednio nierówności (135), (155), (163), (166). Widoczne, że przy zachodzeniu tych warunków pola węgłów wektorów, należących do odnośnych par ósemek, są wszystkie różne od zera. Gdyby którekolwiek z tych założeń nie było spełnione, t.j. gdyby wyrażenie stojące po lewej stronie odpowiedniej nierówności było równe zeru, wówczas byłyby zerami wszystkie pola węgłów szesnastu wektorów odnośnych dwóch ósemek. Bliższe rozważenie przypadków, w których mają miejsce takie degeneracje, pomijamy.

§ 46. Dalsze własności zespołów wektorów urojonych, rozważanych w §§ 44 i 45.

Założymy znowu, że wektory urojone, któremi zajmowaliśmy się w §§ 44 i 45 mają węgły, których pola są wszystkie różne od zera. Zajmiemy się zastosowaniem własności, rozważanych w § 43, do rzeczonych wektorów urojonych §§ 44 i 45.

Rozpoczynając od ósemki $S^{(1)}$, zauważymy, że wierzchołki równoległoboku tej ósemki położone są wszystkie na elipsie (zob. § 43):

$$(v''x - u''y)^2 + (u'y - v'x)^2 = (u'v'' - v'u'')^2, \tag{88}$$

która z każdym z wektorów tej ósemki związana jest, prócz innych, własnością następującą. Końce boków węgła zmiennego wektora

urojonego, którego składowe otrzymują się ze składowych rzeczonego wektora ósemki $S^{(1)}$ drogą mnożenia ich przez ten sam zmienny czynnik urojony o module równym jedności, opisują oba rzeczoną elipsę. Tę elipsę nazwiemy elipsą ósemki $S^{(1)}$. Równanie tej elipsy możemy napisać w postaci:

$$(v'^2 + v''^2)\, x^2 - 2\,(u'v' + u''v'')\, x\, y + (u'^2 + u''^2)\, y^2 = (u'v'' - v'u'')^2,$$

albo, stosując oznaczenia (140), w postaci:

$$(174) \qquad (m'^2 + m''^2)\, x^2 - 2\, m' x\, y + y^2 = m''^2\,(u'^2 + u''^2).$$

W rachunkach § 43 zachodziły między innemi wielkości $\Phi' + \Phi''$ i Ψ. Przy zastosowaniu oznaczeń (140) otrzymują się dla tych wielkości wyrażenia:

$$(175) \qquad \begin{cases} \Phi' + \Phi'' = [\Phi\,(1, m') + m''^2]\,(u'^2 + u''^2), \\ \Psi = m'' \sin\vartheta\,(u'^2 + u''^2). \end{cases}$$

W dalszym ciągu stosować będziemy oznaczenia:

$$(176) \qquad T(r, s) = \frac{\Phi\,(1, r) + s^2}{s \sin\vartheta}.$$

Zatem dla niezmiennika dwukierunku $v : u$ mieć będziemy wzór:

$$I = T(m', m'').$$

A jeżeli umówimy się teraz niezmiennik wspólnego dwukierunku wektorów pierwszej czwórki ósemki $S^{(1)}$ oznaczać literą $I^{(1)}$, a niezmiennik wspólnego dwukierunku wektorów drugiej czwórki ósemki $S^{(1)}$ oznaczać literą $\overset{*}{I}{}^{(1)}$, to mieć będziemy widoczne wzory:

$$(177) \qquad I^{(1)} = T(m', m''),\ \overset{*}{I}{}^{(1)} = T(m', -m'').$$

Przechodząc teraz do ósemek $S^{(k)}$ $(k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$, wyprowadzimy dla każdej z nich równanie elipsy ze środkiem w początku spółrzędnych, określonej warunkiem, żeby wszystkie wierzchołki równoległoboku ósemki położone były na tej elipsie. Przytem elipsę zdefinjowaną w ten sposób dla ósemki $S^{(k)}$, nazwiemy elipsą ósemki $S^{(k)}$, zaznaczając, że prócz innych jej własności w stosunku do wektorów tej ósemki ma ona własność następującą. Końce boków węgła zmiennego wektora urojonego, którego skła-

dowe otrzymują się ze składowych dowolnie wybranego wektora ósemki $S^{(k)}$ drogą mnożenia ich przez ten sam zmienny czynnik urojony o module równym jedności, opisują oba elipsę ósemki $S^{(k)}$. Nadto umówimy się niezmiennik wspólnego dwukierunku wektorów pierwszej czwórki ósemki $S^{(k)}$ oznaczać literą $I^{(k)}$, a niezmiennik wspólnego dwukierunku wektorów drugiej czwórki ósemki $S^{(k)}$ oznaczać literą $\overset{*}{I}{}^{(k)}$.

Elipsa ósemki $S^{(2)}$ określa się równaniem:

$$(178) \qquad (v''x + u''y)^2 + (u'y - v'x)^2 = (u'v'' + v'u'')^2,$$

które, przy zastosowaniu oznaczeń (156), można przedstawić w postaci:

$$(179) \qquad (n'^2 + n''^2)\, x^2 - 2\, n'x\, y + y^2 = n''^2\, (u'^2 + u''^2)\,.$$

Niezmienniki dwukierunków wektorów pierwszej i drugiej czwórki ósemki $S^{(2)}$ wyrażają się wzorami:

$$(180) \qquad I^{(2)} = T(n', n''), \quad \overset{*}{I}{}^{(2)} = T(n', -n'')\,.$$

Elipsa ósemki $S^{(3)}$ określa się równaniem:

$$(181) \qquad (v''x - u''y)^2 + (u'y + v'x)^2 = (u'v'' + v'u'')^2,$$

które, przy zastosowaniu oznaczeń (156), można także napisać w postaci:

$$(182) \qquad (n'^2 + n''^2)\, x^2 + 2\, n'x\, y + y^2 = n''^2\, (u'^2 + u''^2)\,.$$

Niezmienniki dwukierunków wektorów pierwszej i drugiej czwórki $S^{(3)}$ wyrażają się wzorami:

$$(183) \qquad I^{(3)} = T(-n', -n''), \quad \overset{*}{I}{}^{(3)} = T(-n', n'')\,.$$

Dla elipsy ósemki $S^{(4)}$ otrzymuje się równanie:

$$(184) \qquad (v''x + u''y)^2 + (u'y + v'x)^2 = (u'v'' - v'u'')^2,$$

które na podstawie oznaczeń (140) można także napisać w formie:

$$(185) \qquad (m'^2 + m''^2)\, x^2 + 2\, m'x\, y + y^2 = m''^2\, (u'^2 + u''^2)\,.$$

Dla niezmienników dwukierunków wektorów pierwszej i drugiej czwórki ósemki $S^{(4)}$ mają miejsce wzory:

$$(186) \qquad I^{(4)} = T(-m', -m''), \quad \overset{*}{I}{}^{(4)} = T(-m', m'')\,.$$

Elipsa ósemki $S^{(5)}$ określa się równaniem:

$$(v'x - u''y)^2 + (u'y - v''x)^2 = (u'v' - u''v'')^2, \tag{187}$$

które przez zastosowanie oznaczeń (156) można przedstawić w postaci:

$$(n'^2 + n''^2)\, x^2 + 2\, n''x\, y + y^2 = n'^2\,(u'^2 + u''^2). \tag{188}$$

Niezmienniki dwukierunków czwórek tej ósemki określają się wzorami:

$$I^{(5)} = T(-n'', n'), \quad \overset{*}{I}{}^{(5)} = T(-n'', -n'). \tag{189}$$

Dla ósemki $S^{(6)}$ otrzymuje się elipsa, określona równaniem:

$$(v'x - u''y)^2 + (u'y + v''x)^2 = (u'v' + u''v'')^2, \tag{190}$$

które na podstawie oznaczeń (140) można także napisać w postaci:

$$(m'^2 + m''^2)\, x^2 + 2\, m''x\, y + y^2 = m'^2\,(u'^2 + u''^2). \tag{191}$$

Dla dwukierunków czwórek tej ósemki mają miejsce wzory:

$$I^{(6)} = T(-m'', m'), \quad \overset{*}{I}{}^{(6)} = T(-m'', -m'). \tag{192}$$

Elipsa ósemki $S^{(7)}$ określa się równaniem:

$$(v'x + u''y)^2 + (u'y - v''x)^2 = (u'v' + u''v'')^2, \tag{193}$$

które, przy zastosowaniu oznaczeń (140), można także przedstawić w formie:

$$(m'^2 + m''^2)\, x^2 - 2\, m''x\, y + y^2 = m'^2\,(u'^2 + u''^2). \tag{194}$$

Niezmienniki wspólnego dwukierunku wektorów pierwszej czwórki i wspólnego dwukierunku wektorów drugiej czwórki ósemki $S^{(7)}$ określają się wzorami:

$$I^{(7)} = T(m'', -m'), \quad \overset{*}{I}{}^{(7)} = T(m'', m'). \tag{195}$$

Wreszcie elipsa ósemki $S^{(8)}$ określona jest równaniem:

$$(v'x + u''y)^2 + (u'y + v''x)^2 = (u'v' - u''v'')^2, \tag{196}$$

które na podstawie oznaczeń (156) można także przedstawić w postaci:

$$(n'^2 + n''^2)\, x^2 - 2\, n''x\, y + y^2 = n'^2\,(u'^2 + u''^2). \tag{197}$$

Dla niezmienników dwukierunków wektorów pierwszej czwórki i wektorów drugiej czwórki ósemki $S^{(8)}$ zachodzą wzory:

$$(198) \qquad I^{(8)} = T(n'', -n'), \quad \overset{*}{I}{}^{(8)} = T(n'', n').$$

Odnośnie do podziału uważanego zespołu 64 wektorów na ósemki kołowe a także odnośnie do własności ośmiu elips tych ósemek, zaznaczamy tutaj co następuje. Jeżeli uważać będziemy cztery pary tych ósemek według schematu:

$$S^{(1)}, S^{(4)}; \; S^{(2)}, S^{(3)}; \; S^{(5)}, S^{(8)}; \; S^{(6)}, S^{(7)},$$

to dostrzeżemy łatwo, że każda para ma własności następujące: spółczynniki dwukierunków wektorów pierwszych czwórek tych ósemek różnią się jeden od drugiego tylko znakiem; spółczynniki dwukierunków wektorów drugich czwórek tych ósemek różnią się jeden od drugiego tylko znakiem; równania elips ósemek tej samej pary przechodzą jedno w drugie i drogą zamiany x przez $-x$, i również drogą zamiany y przez $-y$; elipsy ósemek tej samej pary spotykają się w czterech punktach, z których dwa położone są na osi x symetrycznie do początku spółrzędnych, a dwa inne położone są na osi y także symetrycznie do początku spółrzędnych.

Elipsy ósemek $S^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ można zapomocą odpowiednio dobranych przekształceń linjowych przeprowadzać jedne w drugie. Z pośród tych przekształceń postaramy się wyprowadzić takie przekształcenia linjowe postaci:

$$(199) \qquad x = \xi, \quad y = p\,\xi + q\,\eta,$$

gdzie x, y oznaczają spółrzędne pierwotnego punktu, ξ, η spółrzędne przekształconego punktu, a p, q spółczynniki rzeczywiste, spełniające warunek $q \neq 0$, żeby naskutek tych przekształceń elipsa ósemki $S^{(1)}$ przechodziła kolejno w elipsy innych ósemek $S^{(k)}$.

Zapytamy naprzód, w jaki sposób i przy spełnieniu jakich warunków można wyznaczyć takie spółczynniki p, q, żeby równanie elipsy ósemki $S^{(1)}$, t.j. równanie:

$$(174) \qquad (m'^2 + m''^2)\,x^2 - 2\,m'\,x\,y + y^2 = m''^2\,(u'^2 + u''^2)$$

przechodziło w równanie:

$$(200) \qquad P\,\xi^2 + 2\,Q\,\xi\,\eta + \eta^2 = R,$$

gdzie P, Q, R oznaczają spółczynniki rzeczywiste. Podstawiając wyrażenia na x, y, określone wzorami (199), w równanie (174), otrzymujemy równanie:

$$(m'^2 + m''^2)\,\xi^2 - 2\,m'\,\xi\,(p\,\xi + q\,\eta) + (p\,\xi + q\,\eta)^2 = m''^2\,(u'^2 + u''^2),$$

które łatwo doprowadzić do formy:

$$[(m' - p)^2 + m''^2]\,\xi^2 + 2\,(p - m')\,q\,\xi\,\eta + q^2\,\eta^2 = m''^2\,(u'^2 + u''^2).$$

Dochodzimy przeto do następujących równań na spółczynniki p, q:

$$(201)\qquad \begin{cases} \dfrac{(m' - p)^2 + m''^2}{q^2} = P, \\ \dfrac{p - m'}{q} = Q, \quad \dfrac{m''^2\,(u'^2 + u''^2)}{q^2} = R. \end{cases}$$

Z ostatniego z tych równań wynika, że spółczynnik R musi być wielkością dodatnią. Przy spełnieniu tego warunku otrzymujemy z dwóch ostatnich z równań (201) następujące wartości na spółczynniki p, q:

$$(202)\qquad \begin{cases} p = m' + Q\,\sigma\sqrt{\dfrac{m''^2\,(u'^2 + u''^2)}{R}}, \\ q = \sigma\sqrt{\dfrac{m''^2\,(u'^2 + u''^2)}{R}}, \end{cases}$$

gdzie $\sigma = \pm 1$. Wartości te czynią zadość pierwszemu z równań (201) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest równość:

$$(203)\qquad (u'^2 + u''^2)\,(P - Q^2) = R.$$

W ten sposób odpowiedź na nasze zapytanie jest uzyskana.

Niech teraz równanie (200) określa elipsę ósemki $S^{(2)}$, t.j. niech będzie w tem równaniu:

$$P = n'^2 + n''^2, \quad Q = -n', \quad R = n''^2\,(u'^2 + u''^2).$$

Ponieważ R jest wielkością dodatnią i równość (203) jest spełniona tożsamościowo, przeto ze wzorów (202) istotnie otrzymują się spółczynniki przekształceń (199), które przeprowadzają elipsę

ósemki $S^{(1)}$ w elipsę ósemki $S^{(2)}$. Przekształcenia te wyrażają się związkami:

$$(204) \qquad x = \xi, \quad y = \frac{m'n'' - \tau\, n'm''}{n''}\xi + \tau\frac{m''}{n''}\eta,$$

gdzie $\tau = \pm 1$.

Gdy równanie (200) określa elipsę ósemki $S^{(3)}$, t.j. gdy mamy:

$$P = n'^2 + n''^2, \quad Q = n', \quad R = n''^2\,(u'^2 + u''^2),$$

wówczas warunki możliwości zadania są także spełnione i otrzymujemy przekształcenia:

$$(205) \qquad x = \xi, \quad y = \frac{m'n'' - \tau\, n'm''}{n''}\xi - \tau\frac{m''}{n''}\eta,$$

gdzie $\tau = \pm 1$. Przekształcenia te przeprowadzają elipsę ósemki $S^{(1)}$ w elipsę ósemki $S^{(3)}$.

Gdy równanie (200) określa elipsę ósemki $S^{(4)}$, wówczas mamy:

$$P = m'^2 + m''^2, \quad Q = m', \quad R = m''^2\,(u'^2 + u''^2)$$

i warunki możliwości zadania są spełnione. Wtedy otrzymują się przekształcenia:

$$(206) \qquad x = \xi, \quad y = m'(1 - \tau)\,\xi - \tau\,\eta,$$

gdzie $\tau = \pm 1$. Przekształcenia te przeprowadzają elipsę ósemki $S^{(1)}$ w elipsę ósemki $S^{(4)}$.

Elipsa ósemki $S^{(5)}$ określona jest równaniem (200) przy wartościach:

$$P = n'^2 + n''^2, \quad Q = n'', \quad R = n'^2\,(u'^2 + u''^2).$$

Warunki możliwości zadania są wtedy także spełnione, a przekształcenia, które przeprowadzają elipsę ósemki $S^{(1)}$ w elipsę ósemki $S^{(5)}$, określają się wzorami:

$$(207) \qquad x = \xi, \quad y = \frac{m'n' + \tau\, m''n''}{n'}\xi + \tau\frac{m''}{n'}\eta,$$

gdzie $\tau = \pm 1$.

Gdy równanie (200) określa elipsę ósemki $S^{(6)}$, wówczas mamy:

$$P = m'^2 + m''^2, \quad Q = m'', \quad R = m'^2\,(u'^2 + u''^2)$$

i warunki możliwości zadania są spełnione. Wtedy dochodzimy do przekształceń, przedstawionych związkami:

$$(208) \qquad x = \xi, \quad y = \frac{m'^2 + \tau\, m''^2}{m'}\,\xi + \tau\,\frac{m''}{m'}\,\eta,$$

gdzie $\tau = \pm 1$. Przekształcenia te przeprowadzają elipsę ósemki $S^{(1)}$ w elipsę ósemki $S^{(6)}$.

Elipsa ósemki $S^{(7)}$ określona jest równaniem (200) przy wartościach:

$$P = m'^2 + m''^2, \quad Q = -m'', \quad R = m'^2\,(u'^2 + u''^2).$$

Warunki stosowalności metody są spełnione i otrzymujemy następujące przekształcenia, przeprowadzające elipsę ósemki $S^{(1)}$ w elipsę ósemki $S^{(7)}$:

$$(209) \qquad x = \xi, \quad y = \frac{m'^2 + \tau m''^2}{m'}\,\xi - \tau\,\frac{m''}{m'}\,\eta,$$

gdzie $\tau = \pm 1$.

Wreszcie równanie (200) określa elipsę ósemki $S^{(8)}$ przy wartościach:

$$P = n'^2 + n''^2, \quad Q = -n'', \quad R = n'^2\,(u'^2 + u''^2)$$

i wtedy także warunki rozwiązalności zadania są spełnione. Przekształcenia, przeprowadzające elipsę ósemki $S^{(1)}$ w elipsę ósemki $S^{(8)}$, są następujące:

$$(210) \qquad x = \xi, \quad y = \frac{m'n' + \tau m''n''}{n'}\,\xi - \tau\,\frac{m''}{n'}\,\eta,$$

gdzie $\tau = \pm 1$.

Zastosujemy jeszcze inną metodę wyznaczenia przekształceń postaci (199), które elipsę ósemki $S^{(1)}$ przeprowadzają w elipsy ósemek $S^{(k)}$ $(k = 2, 3, \ldots, 8)$. Możemy mianowicie przekształcenia postaci (199), własności te posiadające, określić z warunków, żeby naskutek tych przekształceń składowe v', v'' przechodziły w składowe, wskazane wzorami (154). Postępując tą drogą otrzymamy zamiast równań (204) równania:

$$(211) \qquad x = \xi, \quad y = \frac{2\,v'\,v''}{u'\,v'' + v'\,u''}\,\xi - \frac{u'\,v'' - v'\,u''}{u'\,v'' + v'\,u''}\,\eta,$$

zamiast równań (205) równania:

$$(212)\qquad x=\xi,\quad y=\frac{2\,v'\,v''}{u'\,v''+v'\,u''}\,\xi+\frac{u'\,v''-v'\,u''}{u'\,v''+v'\,u''}\,\eta,$$

zamiast równań (206) równania:

$$(213)\qquad x=\xi,\quad y=-\eta,$$

zamiast równań (207) równania:

$$(214)\qquad x=\xi,\quad y=\frac{v'^2-v''^2}{u'\,v'-u''\,v''}\,\xi+\frac{u'\,v''-v'\,u''}{u'\,v'-u''\,v''}\,\eta,$$

zamiast równań (208) równania:

$$(215)\qquad x=\xi,\quad y=\frac{v'^2+v''^2}{u'\,v'+u''\,v''}\,\xi+\frac{u'\,v''-v'\,u''}{u'\,v'+u''\,v''}\,\eta,$$

zamiast równań (209) równania:

$$(216)\qquad x=\xi,\quad y=\frac{v'^2+v''^2}{u'\,v'+u''\,v''}\,\xi-\frac{u'\,v''-v'\,u''}{u'\,v'+u''\,v''}\,\eta$$

i wreszcie zamiast równań (210) równania:

$$(217)\qquad x=\xi,\quad y=\frac{v'^2-v''^2}{u'\,v'-u''\,v''}\,\xi-\frac{u'\,v''-v'\,u''}{u'\,v'-u''\,v''}\,\eta.$$

Jeżeli zwrócimy uwagę na to, że na podstawie wzorów (140) i (156) zachodzą związki:

$$\frac{m''}{n''}=-\frac{u'\,v''-v'\,u''}{u'\,v''+v'\,u''},$$

$$\frac{m''}{n'}=\frac{u'\,v''-v'\,u''}{u'\,v'-u''\,v''},$$

$$\frac{m''}{m'}=\frac{u'\,v''-v'\,u''}{u'\,v'+u''\,v''}$$

i związki:

$$\frac{m'\,n''-\tau\,n'\,m''}{n''}=\frac{(1+\tau)\,(u'^2+u''^2)\,v'\,v''+(1-\tau)\,u'\,u''\,(v'^2+v''^2)}{(u'^2+u''^2)\,(u'\,v''+v'\,u'')},$$

$$\frac{m' n' + \tau m'' n''}{n'} = \frac{(u'^2 + \tau u''^2)(v'^2 - \tau v''^2)}{(u'^2 + u''^2)(u' v' - u'' v'')},$$

$$\frac{m'^2 + \tau m''^2}{m'} = \frac{(u'^2 + \tau u''^2)(v'^2 + \tau v''^2) + 2(1 - \tau) u' u'' v' v''}{(u'^2 + u''^2)(u' v' + u'' v'')},$$

to sprawdzimy bez trudności, że przy założeniu $\tau = +1$ równania (204), (205), ..., (210) określają te same przekształcenia, co odpowiednio równania (211), (212), ..., (217). Dostrzeżemy przytem łatwo, że w przypadku $\tau = -1$ równania (204), (205), ..., (210) określają przekształcenia różne od przekształceń określonych równaniami (211), (212), ..., (217).

§ 47. O pewnych własnościach linij prostych zespolonych.

W §§ 28, 54 i 55 tomu I zajmowaliśmy się rozważaniami, które dotyczyły bądź bezpośrednio, bądź też pośrednio nici prostolinjowych, wchodzących w skład linij prostych zespolonych. Obecnie rozważać będziemy pewne jednowymiarowe zbiory punktów zespolonych, należące także do prostych zespolonych, ale różne od rzeczonych nici prostolinjowych.

Niech będzie w prostolinjowym układzie spółrzędnych x, y równanie właściwej linji prostej zespolonej:

$$Ax + By + C = 0, \tag{218}$$

gdzie A, B, C oznaczają spółczynniki zespolone, z których A, B nie są oba jednocześnie zerami. Każde równanie (218) możemy zastąpić uogólnionemi równaniami osiowemi:

$$x = a + u t, \quad y = b + v t, \tag{219}$$

w których wielkość t jest zmiennym zespolonym parametrem, wielkości a, b są spółrzędnemi jednego z punktów zespolonych, położonych na prostej (218), a wielkości u, v są nieznikającemi jednocześnie składowemi jednego z wektorów zespolonych, położonych na prostej (218). Jeżeli parametr t przedstawimy w postaci:

$$t = \rho e^{i\omega},$$

gdzie ρ oznacza moduł liczby t, a ω jej amplitudę zasadniczą, to będziemy mogli równania (219) napisać w formie:

$$x = a + u\,\rho\,e^{i\omega}, \quad y = b + v\,\rho\,e^{i\omega}. \tag{220}$$

Zajmiemy się własnościami zbiorów punktów zespolonych, otrzymujących się z równań (220), gdy zmieniamy w nich wielkość ω, a wielkości a, b, u, v, ρ pozostawiamy bez zmiany. Zauważymy przytem, że przy użyciu stosowanego w tej książce sposobu oznaczania, będziemy mogli równania (220) zastąpić przez równania, określające ślady R i A punktów zespolonych odnośnego zbioru. W ten sposób otrzymamy równania następujące:

$$\left\{\begin{aligned} x' &= a' + \rho\,(u'\cos\omega - u''\sin\omega),\\ y' &= b' + \rho\,(v'\cos\omega - v''\sin\omega),\\ x'' &= a'' + \rho\,(u'\sin\omega + u''\cos\omega),\\ y'' &= b'' + \rho\,(v'\sin\omega + v''\cos\omega). \end{aligned}\right. \tag{221}$$

Rozważymy naprzód przypadki, w których równanie (218) określa prostą zespoloną o rzeczywistym dwukierunku. Wtedy składowe śladów R i A każdego wektora, położonego na prostej (218), spełniają związek:

$$u'\,v'' - v'\,u'' = 0,$$

a więc pole węgła każdego wektora, położonego na prostej (218), równa się zeru. Wtedy zbiór punktów zespolonych, określony równaniami (220), można scharakteryzować na podstawie rozważań § 43, korzystając ze wzorów (53), (54), ..., (62) oraz ze wzorów (76) i (77). Punkt a', b' leży na prostej śladów R, a punkt a'', b'' na prostej śladów A uważanej prostej zespolonej o rzeczywistym dwukierunku. Z przytoczonych wzorów wynika, że na prostych śladów R i śladów A położone są odcinki ze środkami w rzeczonych punktach a', b' i a'', b'', będące w takim stosunku do naszego zapytania, że punkty x', y' i x'', y'', określone wzorami (221), opisują przy zmiennem ω odpowiednio te odcinki. Rozważenie bliższych szczegółów, odnoszących się do tego nieskończonego zbioru punktów zespolonych, pomijamy. Zwrócimy przytem uwagę na to, że punkty zespolone nici prostolinjowych, wchodzących w skład prostej zespolonej o rzeczywistym dwukierunku i roz-

ważanych w § 28 tomu I, mają swoje ślady także na prostej śladów R i na prostej śladów A, ale że ślady, należące do tej samej nici prostolinjowej, znajdują się we wzajemnej zależności innego rodzaju, niż ślady, opisujące rozważane powyżej odcinki.

Załóżymy teraz, że prosta zespolona (218) jest prostą o urojonym dwukierunku. Wtedy składowe śladu R i składowe śladu A każdego wektora, leżącego na prostej (218), spełniają nierówność:

$$u' v'' - v' u'' \neq 0,$$

a zatem pole węgła każdego wektora, leżącego na tej prostej, jest różne od zera. Wtedy rugowanie kąta ω z równań (221) możemy wykonać tak samo, jak wykonaliśmy rugowanie tego kąta z równań (50) i (51) w § 43. Tą drogą otrzymujemy równania:

$$(222)\quad \begin{cases} [v''(x' - a') - u''(y' - b')]^2 + [u'(y' - b') - v'(x' - a')]^2 = \\ \qquad = \rho^2 (u' v'' - v' u'')^2, \\ [v''(x'' - a'') - u''(y'' - b'')]^2 + [u'(y'' - b'') - v'(x'' - a'')]^2 = \\ \qquad = \rho^2 (u' v'' - v' u'')^2 \end{cases}$$

i równania:

$$(223)\quad \begin{cases} v''(x'' - a'') - u''(y'' - b'') = -[u'(y' - b') - v'(x' - a')], \\ u'(y'' - b'') - v'(x'' - a'') = v''(x' - a') - u''(y' - b'). \end{cases}$$

Nim przystąpimy do interpretacji geometrycznej tych równań, napiszemy je naprzód w formie, zbliżonej do rachunków, wykonanych w § 55 tomu I. W tym celu zauważymy, że przez wykonanie działań po lewych stronach równań (222), otrzymujemy z nich równania:

$$(224)\quad \begin{cases} (v'^2 + v''^2)(x' - a')^2 - 2(u' v' + u'' v'')(x' - a')(y' - b') + \\ \qquad + (u'^2 + u''^2)(y' - b')^2 = \rho^2 (u' v'' - v' u'')^2, \\ (v'^2 + v''^2)(x'' - a'')^2 - 2(u' v' + u'' v'')(x'' - a'')(y'' - b'') + \\ \qquad + (u'^2 + u''^2)(y'' - b'')^2 = \rho^2 (u' v'' - v' u'')^2, \end{cases}$$

a przez rozwiązanie równań (223) względem $x'' - a''$, $y'' - b''$ otrzymujemy z nich równania:

$$(225)\quad \begin{cases} x''-a''=\dfrac{(u'v'+u''v'')(x'-a')-(u'^2+u''^2)(y'-b')}{u'v''-v'u''}, \\ y''-b''=\dfrac{(v'^2+v''^2)(x'-a')-(u'v'+u''v'')(y'-b')}{u'v''-v'u''}. \end{cases}$$

Przypomnijmy teraz równania (115) w § 59 tomu I, określające wielkości l, m, n linji prostej o urojonym dwukierunku przez różnice odpowiednich spółrzędnych śladów R i A dwóch różnych od siebie punktów zespolonych, położonych na tej linji prostej. Jeżeli wzory te zastosujemy do punktów a, b i $a+u$, $b+v$, położonych na prostej, to otrzymamy na wielkości l, m, n wyrażenia:

$$(226)\quad l=\frac{v'^2+v''^2}{u'v''-v'u''},\quad m=-\frac{u'v'+u''v''}{u'v''-v'u''},\quad n=\frac{u'^2+u''^2}{u'v''-v'u''}.$$

Korzystając z tych wyrażeń można równania (224) przedstawić w postaci:

$$l(x'-a')^2+2m(x'-a')(y'-b')+n(y'-b')^2=\rho^2(u'v''-v'u''),$$

$$l(x''-a'')^2+2m(x''-a'')(y''-b'')+n(y''-b'')^2=\rho^2(u'v''-v'u''),$$

a więc przy zastosowaniu oznaczenia:

$$(227)\qquad M(\xi,\eta)=l\xi^2+2m\xi\eta+n\eta^2$$

i oznaczenia:

$$\Psi=\Psi(u',v';u'',v'')=(u'v''-v'u'')\sin\vartheta,$$

w postaci:

$$(228)\quad \begin{cases} \sin\vartheta\, M(x'-a', y'-b')=\rho^2\Psi, \\ \sin\vartheta\, M(x''-a'', y''-b'')=\rho^2\Psi. \end{cases}$$

Na podstawie tychże wyrażeń (226) można równania (225) zastąpić przez równania:

$$(229)\quad \begin{cases} x''-a''=-m(x'-a')-n(y'-b'), \\ y''-b''=l(x'-a')+m(y'-b'), \end{cases}$$

które są związkami (33) w § 55 tomu I.

Rachunki te pozwalają podać teraz dalsze szczegóły, dotyczące odwzorowania płaszczyzn R i A, rozważanego w § 55 tomu I. Odwzorowanie to, będące w stosowanej tutaj interpretacji geometrycznym równoważnikiem prostej urojonej o urojonym dwukierunku, można opisać jak następuje. Niech będzie na prostej o urojonym dwukierunku punkt zespolony, którego ślady R i A mają odpowiednio spółrzędne a', b' i a'', b''. Niech będzie na tejże prostej wektor, mający na płaszczyznach R i A ślady, których składowe są określone odpowiednio wielkościami u', v' i u'', v''.

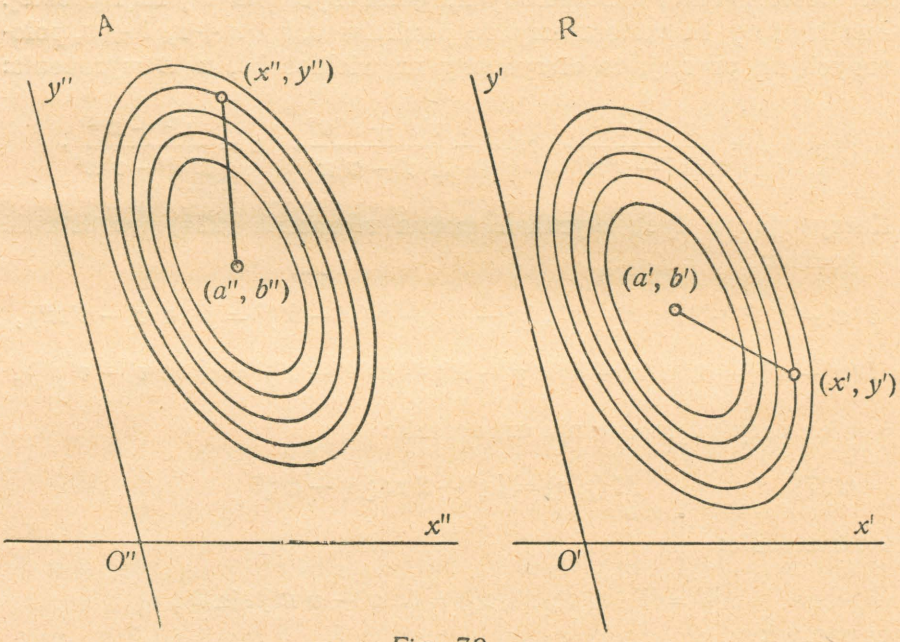

Fig. 79.

Przy tych danych wszystkie spółczynniki równań (229) mieć będą wartości zupełnie określone, a ze spółczynników równań (228) tylko dodatni czynnik ρ nie będzie miał tej własności. Jeżeli przyjmiemy, że czynnik ρ jest zmiennym parametrem, to pierwsze z równań (228) określi na płaszczyźnie R nieskończenie wiele elips, mających wspólny środek w punkcie a', b' i homotetycznych względem tego punktu jako środka homotetyczności (Fig. 79) Przy takiem samem znaczeniu wielkości ρ drugie z równań (228) określi na płaszczyźnie A nieskończenie wiele elips, mających wspólny środek w punkcie a'', b'', homotetycznych względem tego

punktu jako środka homotetyczności i znajdujących się w takim stosunku do rzeczonych elips płaszczyzny R, że na płaszczyźnie RA otrzymałyby się z tych ostatnich przez wykonanie na ich zbiorze odpowiednio obranej translacji. Przez dany punkt x', y', różny od punktu a', b', przechodzi jedna określona elipsa płaszczyzny R. Obierzmy elipsę na nią nakładalną z pośród elips płaszczyzny A i na tej ostatniej punkt x'', y'', znajdujący się w takim stosunku do punktu x', y', że wektory: jeden o początku w a', b', a końcu w x', y', drugi zaś o początku w a'', b'', a końcu w x'', y'' — mają na płaszczyźnie RA względem rzeczonych elips kierunki ze sobą sprzężone, a wstawa kąta drugiego z tych kierunków z pierwszym jest na płaszczyźnie RA tego samego znaku, co wstawa kąta na tejże płaszczyźnie wektora u'', v'' z wektorem u', v'. Punkt x'', y'' płaszczyzny A, wyznaczony w ten sposób dla danego punktu x', y' płaszczyzny R, jest punktem, odpowiadającym punktowi x', y' w uważanem odwzorowaniu tych płaszczyzn. Widoczne przytem, jak nawzajem według danego punktu x'', y'' płaszczyzny A wyznaczyć odpowiadający mu w tem odwzorowaniu punkt x', y' płaszczyzny R. W ten sposób przez zastosowanie dwóch zbiorów nieskończonych elips: jednego na płaszczyźnie R, drugiego zaś na płaszczyźnie A, uzupełniony został opis odwzorowania tych płaszczyzn, rozważanego w § 55 tomu I. Zauważymy przytem, że wybór punktów a', b' i a'', b'' na płaszczyznach R i A jest skrępowany tylko okolicznością, żeby punkt a, b był punktem uważanej prostej o urojonym dwukierunku. W ten sposób można otrzymać nieskończenie wiele takich opisów uważanej odpowiedniości. W szczególności można wybrać jako punkt a, b rzeczywisty punkt tej linji prostej, t.j. punkt, dla którego $a''= 0$, $b''= 0$.

Łatwo dostrzec, jakiem będzie odwzorowanie płaszczyzn R i A, odpowiadające prostej sprzężonej z prostą o urojonym dwukierunku, gdy dane jest odwzorowanie, odpowiadające tej ostatniej. Widoczne, że dla określenia szukanego odwzorowania można rysunek na płaszczyźnie R pozostawić bez zmiany, ale przytem trzeba na systemie elips płaszczyzny A wykonać taką translację, żeby wspólny środek tych elips znalazł się w punkcie, określonym spółrzędnemi $-a''$, $-b''$. Wtedy ślad A, odpowiadający punktowi x', y' na płaszczyźnie R, będzie leżał na elipsie, która powstała przez przesunięcie elipsy poprzedniego śladu, ale będzie miał na tej elipsie położenie średnicowo przeciwległe do punktu, który powstał przez przesunięcie poprzedniego śladu.

§ 48. Hiperbole związane z interpretacją wektorów urojonych i kół urojonych.

W §§ 43, 46 i 47 niniejszego rozdziału stosowaliśmy rachunki i rozważania paragrafu 42 tegoż rozdziału, odnoszące się do elips. Obecnie zajmiemy się pewnemi własnościami wektorów urojonych i pewnemi własnościami kół urojonych, będącemi w bliskiej łączności z temi rachunkami paragrafu 42 tego rozdziału, które odnoszą się do hiperboli.

Niech będą dwa wektory rzeczywiste, których długości są różne od zera, a dwukierunki są różne jeden od drugiego i oznaczmy składowe tych wektorów odpowiednio przez u_1, v_1 i u_2, v_2. Założenia powyższe są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest nierówność:

$$u_1 v_2 - v_1 u_2 \neq 0 .$$

Zajmiemy się wyznaczeniem dwóch hiperbol ze sobą sprzężonych, które czynią zadość warunkom następującym: 1) wspólny środek tych hiperbol leży w początku spółrzędnych; 2) jeżeli początki rzeczonych wektorów znajdują się w tymże początku spółrzędnych, to koniec pierwszego z nich leży na jednej, a koniec drugiego na drugiej z tych hiperbol; 3) dwukierunki uważanych wektorów są sprzężone względem każdej z tych hiperbol. Gdyby równania tych hiperbol były:

$$(230) \qquad \begin{cases} A x^2 + 2 B x y + C y^2 = 1 , \\ A x^2 + 2 B x y + C y^2 = -1 , \end{cases}$$

to warunki powyższe możnaby analitycznie sformułować zapomocą równań:

$$(231) \qquad \begin{cases} A u_1^2 + 2 B u_1 v_1 + C v_1^2 = 1 , \\ A u_2^2 + 2 B u_2 v_2 + C v_2^2 = -1 , \\ A u_1 u_2 + B (u_1 v_2 + v_1 u_2) + C v_1 v_2 = 0 . \end{cases}$$

Rozwijając wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} u_1^2, & 2 u_1 v_1, & v_1^2 \\ u_2^2, & 2 u_2 v_2, & v_2^2 \\ u_1 u_2, & u_1 v_2 + v_1 u_2, & v_1 v_2 \end{vmatrix}$$

według elementów trzeciego wiersza, otrzymujemy:

$$2\,u_1\,u_2\,v_1\,v_2\,(u_1\,v_2 - v_1\,u_2) - (u_1\,v_2 + v_1\,u_2)\,(u_1^2\,v_2^2 - v_1^2\,u_2^2) +$$
$$+ 2\,v_1\,v_2\,u_1\,u_2\,(u_1\,v_2 - v_1\,u_2),$$

skąd łatwo dochodzimy do wyniku, że wyznacznik ten równa się wyrażeniu:

$$-(u_1\,v_2 - v_1\,u_2)^3.$$

Ponieważ wyrażenie to jest różne od zera, przeto istnieje jeden układ spółczynników, spełniających warunki (231). Jeżeli przypomnimy własności hiperbol (25) w § 42 tego rozdziału, to dojdziemy do wniosku, że hiperbole ze sobą sprzężone, których szukamy, określają się równaniami:

$$(232)\quad \begin{cases} (v_2\,x - u_2\,y)^2 - (u_1\,y - v_1\,x)^2 = (u_1\,v_2 - v_1\,u_2)^2, \\ (u_1\,y - v_1\,x)^2 - (v_2\,x - u_2\,y)^2 = (u_1\,v_2 - v_1\,u_2)^2. \end{cases}$$

Przypomnimy teraz twierdzenia Apollonjusza, odnoszące się do hiperbol. Jeżeli kwadrat połowy rzeczywistej osi pierwszej z tych hiperbol oznaczymy przez r_1^2, a kwadrat połowy rzeczywistej osi drugiej z tych hiperbol oznaczymy przez r_2^2, to na podstawie rzeczonych twierdzeń Apollonjusza będziemy mogli napisać równości:

$$(233)\quad \begin{cases} r_1^2 - r_2^2 = \Phi(u_1, v_1) - \Phi(u_2, v_2), \\ r_1^2\,r_2^2 = \Psi^2(u_1, v_1;\ u_2, v_2). \end{cases}$$

Równości te można wyprowadzić także drogą, zapomocą której dochodzi się do wyznaczenia długości połów osi krzywych (232). Zastosowanie tego postępowania bezpośrednio do równań (232) pozostawimy czytelnikowi.

Niech teraz będzie wektor zespolony o składowych:

$$(234)\qquad u = u' + i\,u'',\quad v = v' + i\,v'',$$

gdzie u', v', u'', v'' oznaczają wielkości rzeczywiste. Zakładamy, że wektor ten ma dwukierunek urojony, t.j. że spełniona jest nierówność:

$$u'\,v'' - v'\,u'' \neq 0.$$

W § 26 tomu I długością wektora zespolonego nazwaliśmy wielkość r określoną równością:

$$r = \sqrt{\Phi(u, v)}. \tag{235}$$

Stąd wynika, że jeżeli r napiszemy w postaci:

$$r = r' + i\,r'', \tag{236}$$

gdzie r' i r'' oznaczają wielkości rzeczywiste, to r'' będzie wielkością nieujemną, a jeżeli przytem r'' jest zerem, to r' będzie wielkością nieujemną. W § 49 tomu I mieliśmy równości (50), które możemy napisać w postaci:

$$\begin{cases} r'^2 - r''^2 = \Phi(u', v') - \Phi(u'', v''), \\ r'\,r'' = \Phi(u', v';\ u'', v''). \end{cases} \tag{237}$$

Oznaczmy przez $\underline{u}''$, $\underline{v}''$ wektor prostopadły do wektora u'', v'' i mający tę samą długość co wektor u'', v''. Dla wektora $\underline{u}''$, $\underline{v}''$ mieć będziemy wzory:

$$\underline{u}'' = -\tau\,\frac{v'' + u''\cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \quad \underline{v}'' = \tau\,\frac{u'' + v''\cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \tag{238}$$

gdzie $\tau = \pm 1$. Zachodzą widocznie równości:

$$\Phi(u'', v'') = \Phi(\underline{u}'', \underline{v}''), \quad \Phi(u', v';\ u'', v'') = \tau\,\Psi(u', v';\ \underline{u}'', \underline{v}''),$$

wskutek których można równości (237) zastąpić równościami:

$$\begin{cases} r'^2 - r''^2 = \Phi(u', v') - \Phi(\underline{u}'', \underline{v}''), \\ r'\,r'' = \tau\,\Psi(u', v';\ \underline{u}'', \underline{v}''). \end{cases} \tag{239}$$

Przyjmiemy teraz, że u, v jest wektorem urojonym, którego kwadrat długości jest wielkością urojoną. Łatwo dostrzec, że jeżeli w równościach (233) położymy:

$$u_1 = u', v_1 = v'; \quad u_2 = \underline{u}'', v_2 = \underline{v}''; \quad r_1 = r', r_2 = r'',$$

to otrzymamy równości równoważne z równościami (239). Stąd wynika następujące twierdzenie. Wektor urojony u, v, którego kwadrat długości nie jest wielkością rzeczywistą, ma włas-

ność następującą. Jeżeli skonstruujemy dwie hiperbole ze sobą sprzężone, czyniące zadość warunkom następującym: 1) wspólny środek tych hiperbol leży w początku spółrzędnych; 2) jedna z tych hiperbol przechodzi przez koniec pierwszego boku węgła wektora u, v, t.j. przez koniec boku o składowych u', v', druga zaś przez koniec wektora o składowych u'', v'', otrzymującego się z boku u'', v'' obrotem około początku spółrzędnych o kąt prosty bądź w kierunku dodatnim, bądź też w kierunku ujemnym; 3) dwukierunki wektorów u', v' i u'', v'' są sprzężone względem tych hiperbol, — to długość połowy osi rzeczywistej pierwszej z wymienionych hiperbol będzie równa $|r'|$, a długość połowy osi rzeczywistej drugiej z wymienionych hiperbol będzie równa r''.

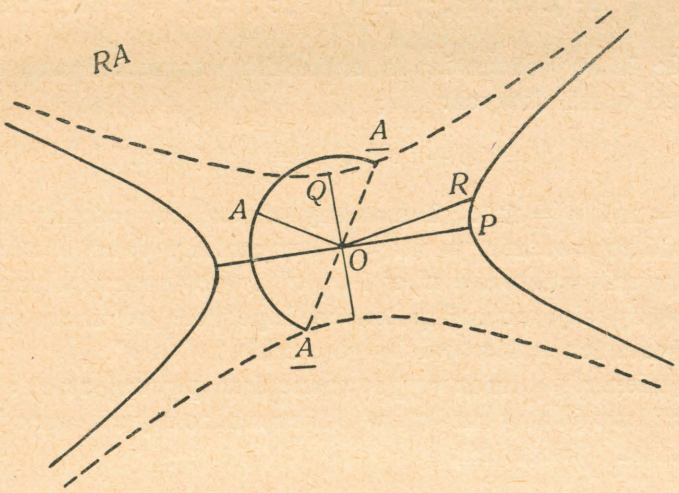

Fig. 80.

Na fig. 80 twierdzenie to zilustrowane jest w sposób następujący. Dany jest na płaszczyźnie RA węgieł, którego pierwszy bok jest OR, a drugi bok OA. Obracamy bok OA naokoło punktu O o kąt prosty w jednym lub drugim kierunku i dochodzimy do pozycji $O\underline{A}$. Hiperbole figury są ze sobą sprzężone, przyczem hiperbola ciągła przechodzi przez punkt R, hiperbola przerywana przez punkt $\underline{A}$, a dwukierunki wektorów OR i $O\underline{A}$ są dwukierunkami ze sobą sprzężonemi względem obu tych hiperbol. Udowodnione twierdzenie orzeka, że w tych warunkach długość OP (połowy osi rzeczywistej ciągłej hiperboli) jest równa wielkości

$|r'|$, a długość OQ (połowy osi rzeczywistej hiperboli przerywanej) jest równa wielkości r''.

Korzystając z równań (232) możemy równania hiperbol, o których była mowa, napisać w formie:

$$(\underline{v}''x - \underline{u}''y)^2 - (u'y - v'x)^2 = (u'\underline{v}'' - v'\underline{u}'')^2,$$

$$(u'y - v'x)^2 - (\underline{v}''x - \underline{u}''y)^2 = (u'\underline{v}'' - v'\underline{u}'')^2,$$

a jeżeli zastosujemy wzory (238), to równania te doprowadzimy do postaci:

$$(240)\quad \begin{cases} \Phi^2(u'', v''; x, y) - \Psi^2(u', v'; x, y) = \Phi^2(u', v'; u'', v''), \\ \Psi^2(u', v'; x, y) - \Phi^2(u'', v''; x, y) = \Phi^2(u', v'; u'', v''). \end{cases}$$

Hiperbole te są widocznie te same dla wszystkich wektorów zespolonych o składowych:

$$u = \varepsilon' u' + i\,\varepsilon'' u'', \quad v = \varepsilon' v' + i\,\varepsilon'' v'',$$

gdzie $\varepsilon' = \pm 1$, $\varepsilon'' = \pm 1$. Zauważmy nadto, że moglibyśmy przeprowadzić rozważanie, w którem bez zmiany danego wektora zespolonego rola wektorów u', v' i u'', v'' byłaby przestawiona. Wtedy otrzymałyby się inaczej położone hiperbole ze sobą sprzężone, ale długości ich połów osi byłyby także $|r'|$ i r''.

Zajmiemy się teraz wyprowadzeniem pewnej szczególnej postaci spółczynników kierunkowych urojonego kierunku. Wielkości:

$$(241)\qquad \lambda = \lambda' + i\,\lambda'', \quad \mu = \mu' + i\,\mu'',$$

gdzie λ', μ', λ'', μ'' oznaczają liczby rzeczywiste, są spółczynnikami urojonego kierunku wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są związki:

$$(242)\qquad \Phi(\lambda', \mu') - \Phi(\lambda'', \mu'') = 1, \quad \Phi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'') = 0$$

i gdy przytem liczby λ'', μ'' nie są obie jednocześnie zerami. Przy spełnieniu tych warunków oba wektory rzeczywiste o składowych λ', μ' i λ'', μ'' mają długości różne od zera i są do siebie prostopadłe. Jeżeli spółczynniki kierunkowe tych wektorów oznaczymy odpowiednio przez λ_0', μ_0' i λ_0'', μ_0'', to będą spełnione warunki:

$$(243)\qquad \Phi(\lambda_0', \mu_0') = 1, \quad \Phi(\lambda_0'', \mu_0'') = 1, \quad \Phi(\lambda_0', \mu_0'; \lambda_0'', \mu_0'') = 0,$$

a jeżeli bezwzględne długości tych wektorów oznaczymy przez C i S, to mieć będziemy wzory:

$$(244) \qquad \lambda' = C\lambda_0', \quad \mu' = C\mu_0'; \quad \lambda'' = S\lambda_0'', \quad \mu'' = S\mu_0'',$$

a więc na mocy związków (242) i (243) dojdziemy do wniosku, że musi zachodzić równość:

$$(245) \qquad C^2 - S^2 = 1.$$

To znaczy, że spółczynniki kierunkowe urojonego kierunku można napisać w postaci:

$$(246) \qquad \lambda = C\lambda_0' + iS\lambda_0'', \quad \mu = C\mu_0' + iS\mu_0'',$$

gdzie liczby rzeczywiste λ_0', μ_0'; λ_0'', μ_0'' spełniają związki (243), a dodatnie liczby rzeczywiste C i S spełniają związek (245). Zauważymy tutaj, że wzory (246) stosować można także w przypadkach rzeczywistego kierunku λ, μ, przyczem wtedy można także przyjmować, że spółczynniki λ_0', μ_0' i λ_0'', μ_0'' określają kierunki wzajemnie prostopadłe, ale wtedy $C = 1$, $S = 0$.

Spółczynniki kierunkowe urojonego kierunku można także przedstawić wzorami:

$$(247) \qquad \lambda = \frac{\sin(\vartheta - \varphi)}{\sin\vartheta}, \quad \mu = \frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta},$$

gdzie φ oznacza liczbę urojoną. Tę liczbę można napisać w postaci:

$$(248) \qquad \varphi = \varphi' + i\varphi'',$$

gdzie φ' i φ'' są liczbami rzeczywistemi, z których druga jest różna od zera. Jeżeli uwzględnimy wzory:

$$(249) \qquad \begin{cases} \cos(i\varphi'') = \dfrac{1}{2}(e^{\varphi''} + e^{-\varphi''}) = \cosh\varphi'', \\ \dfrac{\sin(i\varphi'')}{i} = \dfrac{1}{2}(e^{\varphi''} - e^{-\varphi''}) = \sinh\varphi'', \end{cases}$$

określające dostawę hiperboliczną i wstawę hiperboliczną, które spełniają związek:

$$(250) \qquad \cosh^2\varphi'' - \sinh^2\varphi'' = 1,$$

to będziemy mogli spółczynniki kierunkowe λ, μ przedstawić w postaci:

$$(251)\quad \begin{cases} \lambda = \cosh\varphi'' \dfrac{\sin(\vartheta-\varphi')}{\sin\vartheta} - i\sinh\varphi'' \dfrac{\cos(\vartheta-\varphi')}{\sin\vartheta}, \\ \mu = \cosh\varphi'' \dfrac{\sin\varphi'}{\sin\vartheta} + i\sinh\varphi'' \dfrac{\cos\varphi'}{\sin\vartheta}. \end{cases}$$

Zauważmy teraz, że zachodzą nierówności:

$$\cosh\varphi'' > 0, \quad \sigma\sinh\varphi'' > 0,$$

gdzie $\sigma = \pm 1$, zależnie od tego, czy φ'' jest liczbą dodatnią, czy też ujemną. Zatem ze wzorów (251) wynika, że bezwzględne długości wektorów λ', μ' i λ'', μ'' określają się wzorami:

$$(252)\qquad C = \cosh\varphi'', \quad S = \sigma\sinh\varphi'',$$

a ich spółczynniki kierunkowe wzorami:

$$(253)\quad \begin{cases} \lambda_0' = \dfrac{\sin(\vartheta-\varphi')}{\sin\vartheta}, \quad \mu_0' = \dfrac{\sin\varphi'}{\sin\vartheta}, \\ \lambda_0'' = -\sigma\dfrac{\cos(\vartheta-\varphi')}{\sin\vartheta} = \dfrac{\sin\left(\vartheta-\varphi'-\sigma\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sin\vartheta}, \\ \mu_0'' = \sigma\dfrac{\cos\varphi'}{\sin\vartheta} = \dfrac{\sin\left(\varphi'+\sigma\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sin\vartheta}. \end{cases}$$

Wektor λ'', μ'' tworzy z wektorem λ', μ' kąt $\sigma\dfrac{\pi}{2}$, a stąd wynika, że pomiędzy spółczynnikami kierunkowemi tych dwóch wektorów zachodzą związki:

$$(254)\qquad \lambda_0'' = -\sigma\frac{\mu_0'+\lambda_0'\cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \quad \mu_0'' = \sigma\frac{\lambda_0'+\mu_0'\cos\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Niech będzie teraz koło zespolone, którego równania napiszemy w postaci:

$$(255)\qquad x = \mathfrak{a} + r\lambda, \quad y = \mathfrak{b} + r\mu.$$

Liczby zespolone:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' + i\,\mathfrak{a}'', \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{b}' + i\,\mathfrak{b}''$$

są spółrzędnemi środka koła, a liczba zespolona:

$$r = r' + i\,r''$$

jest promieniem koła i przytem r'' jest liczbą nieujemną, a jeżeli $r'' = 0$, to r' jest liczbą dodatnią. Założymy tutaj, że kwadrat promienia koła nie jest liczbą rzeczywistą, t.j. że obie liczby r', r'' są różne od zera. Wielkości λ, μ są zmiennemi spółczynnikami kierunkowemi, do których możemy stosować wzory (241). Wtedy równania koła (255) będziemy mogli zastąpić układem czterech równań, mianowicie równaniami:

$$(256) \qquad x' = \mathfrak{a}' + r'\lambda' - r''\lambda'', \quad y' = \mathfrak{b}' + r'\mu' - r''\mu''$$

dla punktów płaszczyzny R i równaniami:

$$(257) \qquad x'' = \mathfrak{a}'' + r''\lambda' + r'\lambda'', \quad y'' = \mathfrak{b}'' + r''\mu' + r'\mu''$$

dla punktów płaszczyzny A. Jeżeli zaś dla zmiennych spółczynników kierunkowych λ, μ przyjmiemy wzory (246), to równania (256) dla punktów płaszczyzny R mieć będą postać:

$$(258) \quad x' = \mathfrak{a}' + r'\lambda_0' C - r''\lambda_0'' S, \quad y' = \mathfrak{b}' + r'\mu_0' C - r''\mu_0'' S,$$

a równania (257) dla punktów płaszczyzny A mieć będą postać:

$$(259) \quad x'' = \mathfrak{a}'' + r''\lambda_0' C + r'\lambda_0'' S, \quad y'' = \mathfrak{b}'' + r''\mu_0' C + r'\mu_0'' S.$$

W układzie równań (256) i (257) wielkości λ', μ', λ'', μ'' są zmiennemi parametrami, poddanemi tylko warunkom, by λ, μ były spółczynnikami kierunkowemi. Równania (256) i (257) określają odwzorowanie płaszczyzn R i A, przedstawiające zbiór zespolonych punktów koła. Równania (258) i (259) określają to samo odwzorowanie, ale w tych równaniach zmiennemi parametrami są wielkości λ_0', μ_0' i λ_0'', μ_0'', które spełniają związki (243), i wielkości C i S, które spełniają związek (245). Zauważymy przytem, że łatwym rachunkiem wyprowadzić można z równań (258) i (259) równości:

$$\Phi(x' - \mathfrak{a}', y' - \mathfrak{b}') = r'^2 C^2 + r''^2 S^2,$$

$$\Phi(x'' - \mathfrak{a}'', y'' - \mathfrak{b}'') = r''^2 C^2 + r'^2 S^2,$$

$$\Phi(x' - \mathfrak{a}', y' - \mathfrak{b}'; x'' - \mathfrak{a}'', y'' - \mathfrak{b}'') = r' r'',$$

$$\Psi(x' - \mathfrak{a}', y' - \mathfrak{b}'; x'' - \mathfrak{a}'', y'' - \mathfrak{b}'') = \sigma (r'^2 + r''^2) C S$$

i że z pierwszych trzech z tych równości wynikają równania (2) § 67 tomu I, którym czynią zadość spółrzędne śladów R i A punktów zespolonych koła zespolonego.

Założymy teraz, że w równaniach (258) i (259) wielkości λ_0', μ_0' i λ_0'', μ_0'' mają obrane dowolnie, określone wartości stałe, czyniące zadość związkom (243). Przyjmiemy natomiast, że C i S są zmiennemi wielkościami, spełniającemi równość (245). Zajmiemy się wykonaniem rugowania tych parametrów z równań (258) i (259) oraz interpretacją geometryczną rezultatów rachunku. Rozwiążemy naprzód układ (258) względem C i S, a następnie układ (259) względem C i S. Z pierwszego z nich otrzymamy widocznie wyniki:

$$C = -\frac{\sigma}{r'} [\lambda_0''(y' - \mathfrak{b}') - \mu_0''(x' - \mathfrak{a}')] \sin \vartheta,$$

$$S = -\frac{\sigma}{r''} [\lambda_0'(y' - \mathfrak{b}') - \mu_0'(x' - \mathfrak{a}')] \sin \vartheta,$$

które można także napisać w postaci:

$$(260) \quad \begin{cases} C = -\dfrac{\sigma}{r'} \Psi(\lambda_0'', \mu_0''; x' - \mathfrak{a}', y' - \mathfrak{b}'), \\ S = -\dfrac{\sigma}{r''} \Psi(\lambda_0', \mu_0'; x' - \mathfrak{a}', y' - \mathfrak{b}'), \end{cases}$$

z drugiego zaś wyniki:

$$C = -\frac{\sigma}{r''} [\lambda_0''(y'' - \mathfrak{b}'') - \mu_0''(x'' - \mathfrak{a}'')] \sin \vartheta,$$

$$S = \frac{\sigma}{r'} [\lambda_0'(y'' - \mathfrak{b}'') - \mu_0'(x'' - \mathfrak{a}'')] \sin \vartheta,$$

które można także napisać w postaci:

$$(261)\quad \begin{cases} C = -\dfrac{\sigma}{r''}\,\Psi(\lambda_0'', \mu_0''; x''-\mathfrak{a}'', y''-\mathfrak{b}''), \\ S = \dfrac{\sigma}{r'}\,\Psi(\lambda_0', \mu_0'; x''-\mathfrak{a}'', y''-\mathfrak{b}''). \end{cases}$$

Na podstawie związku (245) dochodzimy z wyrażeń (260) do związku:

$$(262)\quad \frac{1}{r'^2}\Psi^2(\lambda_0'', \mu_0''; x'-\mathfrak{a}', y'-\mathfrak{b}') - \frac{1}{r''^2}\Psi^2(\lambda_0', \mu_0'; x'-\mathfrak{a}', y'-\mathfrak{b}') = 1,$$

który jest równaniem hiperboli, położonej na płaszczyźnie R. Podobnież na podstawie związku (245) otrzymujemy z wyrażeń (261) równość:

$$(263)\quad \frac{1}{r''^2}\Psi^2(\lambda_0'', \mu_0''; x''-\mathfrak{a}'', y''-\mathfrak{b}'') - \frac{1}{r'^2}\Psi^2(\lambda_0', \mu_0'; x''-\mathfrak{a}'', y''-\mathfrak{b}'') = 1,$$

która jest równaniem hiperboli, leżącej na płaszczyźnie A. W dalszym ciągu dogodnie będzie nazywać hiperbole (262) i (263) parą hiperbol skojarzonych. Z wyrażeń (260) i (261) dochodzimy jeszcze do równości:

$$(264)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{r'}\Psi(\lambda_0', \mu_0'; x''-\mathfrak{a}'', y''-\mathfrak{b}'') = -\dfrac{1}{r''}\Psi(\lambda_0', \mu_0'; x'-\mathfrak{a}', y'-\mathfrak{b}'), \\ \dfrac{1}{r''}\Psi(\lambda_0'', \mu_0''; x''-\mathfrak{a}'', y''-\mathfrak{b}'') = \dfrac{1}{r'}\Psi(\lambda_0'', \mu_0''; x'-\mathfrak{a}', y'-\mathfrak{b}'), \end{cases}$$

które są związkami pomiędzy śladami punktu x, y na płaszczyznach R i A.

W celu bliższego zbadania równań od (258) do (264) wprowadzimy na płaszczyznach R i A nowe układy spółrzędnych. Na płaszczyźnie R przyjmiemy układ spółrzędnych prostokątnych ξ', η', określonych równaniami:

$$(265)\quad \begin{cases} x' = \mathfrak{a}' + \lambda_0'\,\xi' + \lambda_0''\eta', \\ y' = \mathfrak{b}' + \mu_0'\,\xi' + \mu_0''\eta', \end{cases}$$

a na płaszczyźnie A układ spółrzędnych prostokątnych ξ'', η'', określonych równaniami:

$$(266)\qquad \begin{cases} x''= \mathfrak{a}''+ \lambda_0' \xi''+ \lambda_0''\eta'', \\ y''= \mathfrak{b}''+ \mu_0' \xi''+ \mu_0''\eta''. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że wtedy będzie:

$$(267)\qquad \begin{cases} \Psi(\lambda_0', \mu_0'; x'- \mathfrak{a}', y'- \mathfrak{b}') = \sigma \eta', \\ \Psi(\lambda_0'', \mu_0''; x'- \mathfrak{a}', y'- \mathfrak{b}') = -\sigma \xi', \\ \Psi(\lambda_0', \mu_0'; x''- \mathfrak{a}'', y''- \mathfrak{b}'') = \sigma \eta'', \\ \Psi(\lambda_0'', \mu_0''; x''- \mathfrak{a}'', y''- \mathfrak{b}'') = -\sigma \xi''. \end{cases}$$

Stąd wynika, że wyrażenia (260) zastąpione będą wzorami:

$$(268)\qquad C= \frac{\xi'}{r'}, \quad S= -\frac{\eta'}{r''},$$

a wyrażenia (261) wzorami:

$$(269)\qquad C= \frac{\xi''}{r''}, \quad S= \frac{\eta''}{r'}.$$

W układzie spółrzędnych ξ', η' hiperbola (262) przedstawiona będzie równaniem:

$$(270)\qquad \frac{\xi'^2}{r'^2} - \frac{\eta'^2}{r''^2} = 1,$$

a w układzie spółrzędnych ξ'', η'' hiperbola (263) przedstawiona będzie równaniem:

$$(271)\qquad \frac{\xi''^2}{r''^2} - \frac{\eta''^2}{r'^2} = 1.$$

Związki (264) otrzymają w nowych układach postać:

$$(272)\qquad r''\xi' - r'\xi''= 0, \quad r'\eta' + r''\eta''= 0.$$

Także i równania (258) i (259) można napisać w nowych układach. Tą drogą z równań (258) otrzymamy równania:

$$(273)\qquad \xi'= r'C, \quad \eta'= -r''S,$$

a z równań (259) równania:

$$\xi'' = r''C, \quad \eta'' = r'S. \tag{274}$$

Przypuśćmy naprzód, że równania (270) i (271) określają dwie hiperbole na tej samej płaszczyźnie i w tym samym układzie spółrzędnych prostokątnych. Jeżeli spółrzędne punktu bieżącego hiperboli sprzężonej z hiperbolą (270) oznaczymy przez ξ, η, to mieć będziemy równanie:

$$\frac{\eta^2}{r''^2} - \frac{\xi^2}{r'^2} = 1. \tag{275}$$

Porównywając to równanie z równaniem (271), dostrzegamy łatwo, że hiperbola (271) otrzymuje się z hiperboli (275) obrotem tej ostatniej o kąt prosty około jej środka. Z tej uwagi wynika, że na rzeczonej wspólnej płaszczyźnie można hiperbole (270) i (271) przedstawić jak na fig. 81.

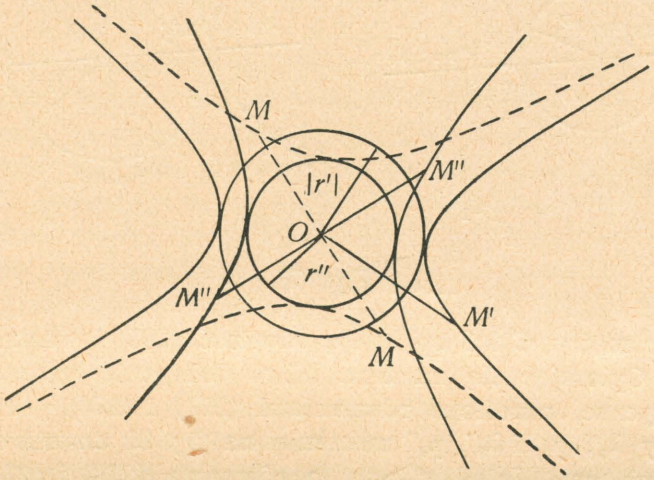

Fig. 81.

Na fig. tej narysowane są dwa koła spółśrodkowe, jedno o promieniu $|r'|$, drugie o promieniu r''. Hiperbola (270) jest narysowana linją ciągłą i ma w wierzchołkach wspólne styczne z kołem o promieniu $|r'|$. Hiperbola (275) jest narysowana linją przerywaną i ma w wierzchołkach wspólne styczne z kołem o promieniu r''. Wreszcie hiperbola (271) jest narysowana linją ciągłą i ma wspólne styczne z temże kołem o promieniu r''.

Niech teraz będą płaszczyzny R i A (fig. 82). Na pierwszej z nich narysujemy koło graniczne o promieniu $|r'|$, naznaczymy literą Ω' środek tego koła i przez ten środek przeprowadzimy prostą o dwukierunku $\mu_0' : \lambda_0'$ i prostą o dwukierunku $\mu_0'' : \lambda_0''$. Na drugiej narysujemy koło graniczne o promieniu r'', środek tego koła naznaczymy literą Ω'' i przeprowadzimy przez ten środek proste o dwukierunkach $\mu_0' : \lambda_0'$ i $\mu_0'' : \lambda_0''$. Jeżeli nowe układy spółrzędnych określone są związkami (265) i (266), to osie spółrzędnych ξ', η' i ξ'', η'' leżeć będą odpowiednio na rzeczonych prostych płaszczyzn R i A i będą zarazem osiami hiperbol (270) i (271), których wierzchołki oznaczymy odpowiednio literami w_1', w_2', w_1'', w_2''.

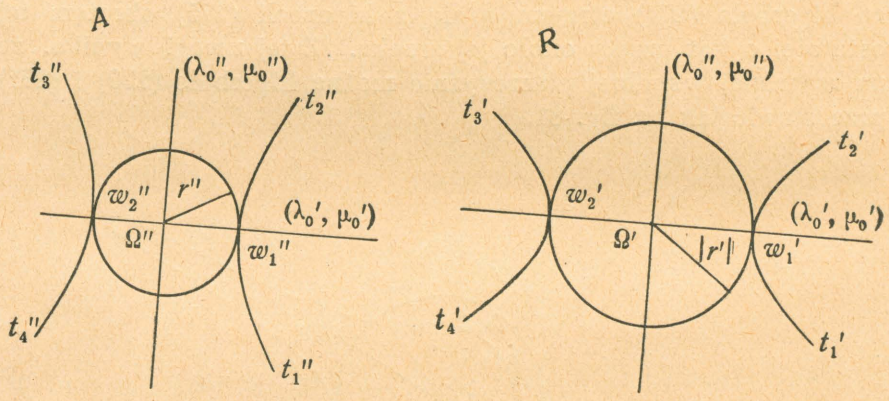

Fig. 82.

Parametry C i S spełniają równość (245) i warunki $C > 0$, $S \geqslant 0$. Opierając się na tem, łatwo scharakteryzować miejsca geometryczne, określone równaniami (273) i (274). Przyjmiemy, że litery λ_0', μ_0' i λ_0'', μ_0'' wskazują na fig. 82 dodatnie kierunki odnośnych osi. Jeżeli $r' > 0$, to równania (273) i (274) wyznaczają na płaszczyznach R i A nieskończone łuki $w_1' t_1'$ i $w_1'' t_2''$. Jeżeli zaś $r' < 0$, to równania (273) i (274) wyznaczają na tychże płaszczyznach nieskończone łuki $w_2' t_4'$ i $w_1'' t_1''$.

Równania (273) i (274) nie są zależne od wyboru układu parametrów λ_0', μ_0', λ_0'', μ_0'', spełniających związki (243). Ale przy różnych wyborach tych parametrów one określają różne nieskończone łuki hiperboliczne. W szczególności rozważymy wyniki podane w poniższej tabelce:

ξ', ξ''	η', η''	$r' > 0$		$r' < 0$	
		R	A	R	A
$\lambda_0', \quad \mu_0'$	$\lambda_0'', \quad \mu_0''$	$w_1' t_1'$	$w_1'' t_2''$	$w_2' t_4'$	$w_1'' t_1''$
$-\lambda_0', -\mu_0'$	$-\lambda_0'', -\mu_0''$	$w_2' t_3'$	$w_2'' t_4''$	$w_1' t_2'$	$w_2'' t_3''$
$-\lambda_0', -\mu_0'$	$\lambda_0'', \quad \mu_0''$	$w_2' t_4'$	$w_2'' t_3''$	$w_1' t_1'$	$w_2'' t_4''$
$\lambda_0', \quad \mu_0'$	$-\lambda_0'', -\mu_0''$	$w_1' t_2'$	$w_1'' t_1''$	$w_2' t_3'$	$w_1'' t_2''$

Tabelka ta określa łuki hiperboliczne, wyznaczone równaniami (273) i (274) i odpowiadające obu kierunkom osi ξ', ξ'', należącym do dwukierunku $\mu_0' : \lambda_0'$ i obu kierunkom osi η', η'', należącym do dwukierunku $\mu_0'' : \lambda_0''$. Wyniki pierwszego wiersza już poprzednio były uzasadnione. Wyniki trzech następnych wierszy łatwo uzasadnić analogicznie. W każdej kolumnie pod literą R wymienione są cztery łuki nieskończone, należące do hiperboli płaszczyzny R. Tak samo w każdej kolumnie pod literą A wymienione są cztery łuki nieskończone, należące do hiperboli płaszczyzny A. Łuki każdej z tych kolumn zawierają łącznie wszystkie punkty odnośnej hiperboli, przyczem każdy jej punkt zachodzi w każdej kolumnie tylko raz jeden z wyjątkiem wierzchołków hiperboli, które odpowiadają wartościom $C = 1$, $S = 0$ i zachodzą w każdej kolumnie po dwa razy.

Ażeby zinterpretować geometrycznie stosunek związków (272) do rozważanych hiperbol, weźmy pod uwagę na fig. 81 połowę średnicy $O M'$ oraz połowy średnic z nią sprzężonych $O M$. Jeżeli te ostatnie obrócimy o kąt prosty około punktu O, to otrzymamy połowy średnic $O M''$ trzeciej hiperboli fig. 81. Przy użyciu stosowanych tutaj oznaczeń możemy na podstawie równań (38) i (39) podanych w § 42 tego rozdziału dla składowych wektorów $\overline{O M}$ napisać wzory:

$$\frac{\xi}{r'} = \chi \frac{\eta'}{r''}, \quad \frac{\eta}{r''} = \chi \frac{\xi'}{r'}, \quad (\chi = \pm 1). \tag{276}$$

Ponieważ zaś dla składowych wektorów $\overline{O M''}$, otrzymujących się z wektorów $\overline{O M}$ obrotami o kąt prosty około punktu O, zachodzą wzory:

$$\xi'' = \nu \eta, \quad \eta'' = -\nu \xi, \quad (\nu = \pm 1), \tag{277}$$

przeto, eliminując z równości (276) i (277) wielkości ξ i η, dojdziemy do związków:

$$(278) \qquad r''\xi' - \nu\chi\, r'\xi'' = 0, \quad r'\eta' + \nu\chi\, r''\eta'' = 0.$$

A więc przy wartości $\nu\chi = +1$ związki (278) są te same, co związki (272), przy wartości zaś $\nu\chi = -1$ związki (278) są te same, co związki (272) zastosowane do koła urojonego o tym samym środku i o promieniu równym $-r' + ir''$. Zauważamy przytem, że punkty ξ', η' i ξ'', η'', do siebie należące naskutek związków (272), mają przy $r' > 0$ odcięte tych samych znaków, a rzędne albo obie równe zeru, albo różnych znaków, a przy $r' < 0$ odcięte różnych znaków, a rzędne albo obie równe zeru, albo tych samych znaków.

Przy danym układzie spółczynników $\lambda_0', \mu_0', \lambda_0'', \mu_0''$, spełniających związki (243), uważaliśmy hiperbolę (262) na płaszczyźnie R i hiperbolę (263) na płaszczyźnie A. Obecnie zajmiemy się rozważaniem hiperbol (262), przechodzących przez dany punkt x', y' płaszczyzny R i hiperbol (263), przechodzących przez dany punkt x'', y'' płaszczyzny A. Równanie (262) można zastąpić równaniem:

$$(279) \qquad \frac{1}{r'^2}\Phi^2(\lambda_0', \mu_0'; x' - \mathfrak{a}', y' - \mathfrak{b}') - \frac{1}{r''^2}\Psi^2(\lambda_0', \mu_0'; x' - \mathfrak{a}', y' - \mathfrak{b}') = 1.$$

Zapytujemy o dwukierunki $\mu_0' : \lambda_0'$, czyniące zadość równaniu (279), w którem spółrzędne x', y' są dane. Przyjmując krótsze oznaczenia:

$$u' = x' - \mathfrak{a}', \quad v' = y' - \mathfrak{b}',$$

możemy nadać mu postać:

$$\frac{1}{r'^2}\Phi^2(\lambda_0', \mu_0'; u', v') - \frac{1}{r''^2}\Psi^2(\lambda_0', \mu_0'; u', v') = 1;$$

a jeżeli zastosujemy oznaczenie:

$$h' = \sqrt{\Phi(u', v')}$$

i uwzględnimy równość:

$$\Phi^2(\lambda_0', \mu_0'; u', v') + \Psi^2(\lambda_0', \mu_0'; u', v') = h'^2,$$

to będziemy mogli równanie to przedstawić w formie:

$$(280)\qquad \left(\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}\right)\Psi^2(\lambda_0', \mu_0'; u', v') - \frac{h'^2}{r'^2} + 1 = 0.$$

Stąd dojdziemy łatwo do postaci:

$$(281)\qquad \left[\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}\right)v'^2 + 1 - \frac{h'^2}{r'^2}\right]\lambda_0'^2 -$$

$$-2\left[\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}\right)v'u' - \cos\vartheta\left(1-\frac{h'^2}{r'^2}\right)\right]\lambda_0'\mu_0' +$$

$$+\left[\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}\right)u'^2 + 1 - \frac{h'^2}{r'^2}\right]\mu_0'^2 = 0,$$

która jest równaniem stopnia drugiego na spółczynnik dwukierunku $\mu_0' : \lambda_0'$. Własności tego równania łatwo można zbadać, postępując drogą stosowaną w § 31 i § 32 tomu I-go do jednorodnych równań stopnia drugiego o dwóch wielkościach zmiennych. Dla równania (281) oznaczymy przez δ', ω' i Ω' wielkości analogiczne do wielkości rozważanych w wymienionych paragrafach. Na δ' otrzymamy wyrażenie:

$$\delta' = \sin^2\vartheta\left(\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}\right)\left(1-\frac{h'^2}{r'^2}\right)(u'^2+v'^2) + \left(1-\frac{h'^2}{r'^2}\right)^2 +$$

$$+2\cos\vartheta\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}\right)\left(1-\frac{h'^2}{r'^2}\right)u'v' - \cos^2\vartheta\left(1-\frac{h'^2}{r'^2}\right)^2,$$

z którego dojdziemy łatwo do wyniku:

$$\delta' = \sin^2\vartheta\left(\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}\right)\left(1-\frac{h'^2}{r'^2}\right)h'^2 + \sin^2\vartheta\left(1-\frac{h'^2}{r'^2}\right)^2$$

i wreszcie do wyniku:

$$(282)\qquad \delta' = \sin^2\vartheta\left(1-\frac{h'^2}{r'^2}\right)\left(1+\frac{h'^2}{r''^2}\right).$$

Na ω' otrzymujemy wyrażenie:

$$\omega' = \sin^2 \vartheta \left(\frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r''^2} \right) h'^2 + 2 \sin^2 \vartheta \left(1 - \frac{h'^2}{r'^2} \right),$$

z którego dochodzimy do wyniku:

$$\omega' = \sin^2 \vartheta \left(2 - \frac{h'^2}{r'^2} + \frac{h'^2}{r''^2} \right). \tag{283}$$

A ponieważ zachodzi związek:

$$\Omega'^2 = \omega'^2 - 4 \delta' \sin^2 \vartheta,$$

przeto na Ω'^2 otrzymujemy wyrażenie:

$$\Omega'^2 = \sin^4 \vartheta \left[\left(1 - \frac{h'^2}{r'^2} + 1 + \frac{h'^2}{r''^2} \right)^2 - 4 \left(1 - \frac{h'^2}{r'^2} \right) \left(1 + \frac{h'^2}{r''^2} \right) \right],$$

które można napisać w postaci:

$$\Omega'^2 = \sin^4 \vartheta \left(\frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r''^2} \right)^2 h'^4,$$

a więc dochodzimy do wyniku:

$$\Omega' = \sin^2 \vartheta \left(\frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r''^2} \right) h'^2. \tag{284}$$

Gdy dany punkt x', y' leży na kole granicznem płaszczyzny R, wówczas $\delta' = 0$, a więc równanie (279) określa tylko jeden dwukierunek $\mu_0' : \lambda_0'$. Z równania (280) wynika, że w tym przypadku tym dwukierunkiem jest dwukierunek wektora, którego początek jest w środku koła granicznego, a koniec w punkcie x', y'. Prócz tego przypadku wchodzą tutaj w grę tylko punkty x', y', leżące poza obszarem pustym płaszczyzny R. Dla każdego takiego punktu zachodzi nierówność $\delta' < 0$, t.j. równaniu czynią zadość dwa różne jeden od drugiego dwukierunki rzeczywiste $\mu_0' : \lambda_0'$. Na podstawie wzorów (282), (283) i (284) możemy obliczyć funkcje trygonometryczne kątów, które tworzą ze sobą kierunki, należące do tych dwukierunków. Jeżeli kąt kierunku jednego z tych dwu-

kierunków z kierunkiem drugiego z nich oznaczymy przez ψ', to na podstawie wzorów (25) w § 32 tomu I będziemy mogli napisać równości:

$$(285)\quad \begin{cases} \cos\psi' = \dfrac{2 - \dfrac{h'^2}{r'^2} + \dfrac{h'^2}{r''^2}}{\sigma'\left(\dfrac{1}{r'^2} + \dfrac{1}{r''^2}\right) h'^2}, \quad (\sigma' = \pm 1), \\ \sin\psi' = \dfrac{2\nu' \sqrt{\left(\dfrac{h'^2}{r'^2} - 1\right)\left(1 + \dfrac{h'^2}{r''^2}\right)}}{\sigma'\left(\dfrac{1}{r'^2} + \dfrac{1}{r''^2}\right) h'^2}, \quad (\sigma' = \pm 1,\ \nu' = \pm 1), \end{cases}$$

ale pominiemy przytem bliższe rozważenie znaczenia znaków podwójnych σ' i ν', bo wystarczyłoby w tym celu bądź oprzeć się na odnośnych uwagach rzeczonego § 32, bądź też poczynić uwagi analogiczne. Zwrócimy natomiast uwagę na to, że łatwo wyznaczyć granice, do których dążą te funkcje, gdy punkt x', y' oddala się do nieskończoności. Możemy mianowicie napisać wzory:

$$\cos\psi' \to \frac{r'^2 - r''^2}{\sigma'(r'^2 + r''^2)}, \quad (\sigma' = \pm 1); \quad \sin\psi' \to \frac{2\chi' r' r''}{r'^2 + r''^2}, \quad (\chi' = \pm 1).$$

Zwrócimy się teraz do równania (263), które można zastąpić równaniem:

$$(286)\quad \frac{1}{r''^2}\Phi^2(\lambda_0', \mu_0'; x'' - \mathfrak{a}'', y'' - \mathfrak{b}'') - \frac{1}{r'^2}\Psi^2(\lambda_0', \mu_0'; x'' - \mathfrak{a}'', y'' - \mathfrak{b}'') = 1.$$

Zajmiemy się wyznaczeniem dwukierunków $\mu_0' : \lambda_0'$, które spełniają równanie (286) przy danych spółrzędnych x'', y''. Jeżeli zastosujemy oznaczenia:

$$u'' = x'' - \mathfrak{a}'', \quad v'' = y'' - \mathfrak{b}''$$

i oznaczenie:

$$h'' = \sqrt{\Phi(u'', v'')},$$

oraz zwrócimy uwagę na to, że równanie (279) przechodzi w równanie (286) przez zastąpienie liter $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', r', r'', x', y'$ odpowiednio literami $\mathfrak{a}'', \mathfrak{b}'', r'', r', x'', y''$, to korzystając z równania (281), dojdziemy do wniosku, że można równanie (286) przedstawić w postaci:

$$(287)\qquad \left[\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}\right)v''^2+1-\frac{h''^2}{r''^2}\right]\lambda_0'^2-$$

$$-2\left[\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}\right)v''u''-\cos\vartheta\left(1-\frac{h''^2}{r''^2}\right)\right]\lambda_0'\mu_0'+$$

$$+\left[\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}\right)u''^2+1-\frac{h''^2}{r''^2}\right]\mu_0'^2=0.$$

Na tej podstawie można z wyników, otrzymanych dla równania (281), otrzymać odpowiednie wyniki dla równania (287) przez zastąpienie liter r', r'', h' literami r'', r', h''. Jeżeli wielkości analogiczne do δ', ω' i Ω' oznaczymy w przypadku obecnie rozważanym przez δ'', ω'' i Ω'', to mieć będziemy wzory:

$$(288)\qquad \begin{cases} \delta''=\sin^2\vartheta\left(1-\dfrac{h''^2}{r''^2}\right)\left(1+\dfrac{h''^2}{r'^2}\right), \\ \omega''=\sin^2\vartheta\left(2-\dfrac{h''^2}{r''^2}+\dfrac{h''^2}{r'^2}\right), \\ \Omega''=\sin^2\vartheta\left(\dfrac{1}{r'^2}+\dfrac{1}{r''^2}\right)h''^2. \end{cases}$$

Gdy punkt x'', y'' położony jest na kole granicznem płaszczyzny A, wówczas równanie (286) określa jeden tylko dwukierunek $\mu_0' : \lambda_0'$, którym jest dwukierunek wektora, prowadzącego od punktu $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$ do punktu x'', y''. Gdy zaś punkt x'', y'' leży nazewnątrz koła granicznego płaszczyzny A, wówczas równaniu (286) czynią zadość dwa różne dwukierunki rzeczywiste. Jeżeli kąt kierunku jednego z tych dwukierunków z kierunkiem drugiego z nich oznaczymy przez ψ'', to będziemy mogli napisać równości:

$$(289)\qquad \begin{cases} \cos\psi''=\dfrac{2-\dfrac{h''^2}{r''^2}+\dfrac{h''^2}{r'^2}}{\sigma''\left(\dfrac{1}{r'^2}+\dfrac{1}{r''^2}\right)h''^2}, \quad (\sigma''=\pm 1), \\ \sin\psi''=\dfrac{2\nu''\sqrt{\left(\dfrac{h''^2}{r''^2}-1\right)\left(1+\dfrac{h''^2}{r'^2}\right)}}{\sigma''\left(\dfrac{1}{r'^2}+\dfrac{1}{r''^2}\right)h''^2}, \quad (\sigma''=\pm 1,\ \nu''=\pm 1). \end{cases}$$

Granice, do których dążą te funkcje, gdy punkt x'', y'' oddala się do nieskończoności, określają się wzorami:

$$\cos\psi'' \to \frac{r''^2 - r'^2}{\sigma''(r'^2 + r''^2)}, \quad (\sigma'' = \pm 1); \quad \sin\psi'' \to \frac{2\chi'' r' r''}{r'^2 + r''^2}, \quad (\chi'' = \pm 1).$$

Zauważymy przytem, że granice te mają te same wartości bezwzględne co granice, do których dążą wielkości $\cos\psi'$ i $\sin\psi'$.

Obliczymy wzór na wyznacznik:

$$W = \begin{vmatrix} 1, & -\cos\vartheta, & 1 \\ v'^2, & v'u', & u'^2 \\ v''^2, & v''u'', & u''^2 \end{vmatrix}. \tag{290}$$

Jeżeli zastosujemy wielkości:

$$\begin{cases} \alpha = -u'(u'\cos\vartheta + v'), \\ \beta = v'^2 - u'^2, \\ \gamma = v'(v'\cos\vartheta + u'), \end{cases} \tag{291}$$

to mieć będziemy równość:

$$W = \alpha v''^2 + \beta v''u'' + \gamma u''^2 \tag{292}$$

a przytem spełnione będą równości:

$$\begin{cases} \alpha - \beta\cos\vartheta + \gamma = 0, \\ \alpha v'^2 + \beta v'u' + \gamma u'^2 = 0. \end{cases} \tag{293}$$

Ale łatwo sprawdzić, że można równość (292) doprowadzić do postaci:

$$W = -(u'v'' - v'u'')[u'u'' + v'v'' + \cos\vartheta(u'v'' + v'u'')],$$

a zatem otrzymujemy na wyznacznik W wzór:

$$W = -\frac{1}{\sin\vartheta}\Psi(u', v'; u'', v'')\,\Phi(u', v'; u'', v''). \tag{294}$$

Zapytamy teraz, w jakich przypadkach w uważanej odpowiedniości płaszczyzn R i A równania (281) i (287) określają te same pary dwukierunków $\mu_0' : \lambda_0'$. To zachodziłoby wtedy i tylko wtedy, gdyby istniał taki czynnik ρ różny od zera, że spełnione byłyby równości:

$$\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}\right)v''^2+1-\frac{h''^2}{r''^2}=\rho\left[\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}\right)v'^2+1-\frac{h'^2}{r'^2}\right],$$

$$\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}\right)v''u''-\cos\vartheta\left(1-\frac{h''^2}{r''^2}\right)=$$

$$=\rho\left[\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}\right)v'u'-\cos\vartheta\left(1-\frac{h'^2}{r'^2}\right)\right],$$

$$\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}\right)u''^2+1-\frac{h''^2}{r''^2}=\rho\left[\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}\right)u'^2+1-\frac{h'^2}{r'^2}\right].$$

Jeżeli równości te pomnożymy kolejno przez α, β, γ i dodamy stronami, to na podstawie równości (292), (293) i (294) dojdziemy do wyniku:

$$\Psi(u', v';\ u'', v'')\,\Phi(u', v';\ u'', v'') = 0,$$

a ponieważ drugi czynnik lewej strony jest równy $r'r''$, a więc jest różny od zera, przeto dojdziemy do wyniku:

$$\Psi(u', v';\ u'', v'') = 0.$$

To znaczy, że w uważanej odpowiedniości żądana własność zachodzi tylko wtedy, gdy dwukierunki $v' : u'$ i $v'' : u''$ są te same. Ale wtedy ślady x', y' i x'', y'' położone są na odnośnych kołach granicznych i każde z równań (281) i (287) określa jeden tylko dwukierunek. Dla śladów x', y' i x'', y'' punktu koła zespolonego, leżących nazewnątrz kół granicznych, każde z równań (281) i (287) określa dwa różne dwukierunki $\mu_0' : \lambda_0'$. Ale jeden z dwukierunków $\mu_0' : \lambda_0'$ równania (281) i jeden z dwukierunków $\mu_0' : \lambda_0'$ równania (287), są temi samemi dwukierunkami. Wynika to z rozważań poprzednio przeprowadzonych, bo ślady x', y' i x'', y'' muszą być położone na hiperbolach, należących do tej samej pary hiperbol skojarzonych.

Fakt, że równania (281) i (287) mają jedno rozwiązanie wspólne na stosunek $\mu_0' : \lambda_0'$ można także sprawdzić rachunkiem. Oznaczając kąt kierunku λ_0', μ_0' z osią x' przez φ', a kąt wektora u', v' z osią x' przez ζ', będziemy mogli równanie (280) napisać w formie:

$$\sin^2(\zeta' - \varphi') = a', \tag{295}$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenie:

$$a' = \frac{r''^2 (h'^2 - r'^2)}{(r'^2 + r''^2) h'^2}. \tag{296}$$

Podobnież równanie (287) jest równoważne z równaniem:

$$\left(\frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r''^2}\right) \Psi^2(\lambda_0', \mu_0'; u'', v'') - \frac{h''^2}{r''^2} + 1 = 0,$$

a oznaczając przez ζ'' kąt wektora u'', v'' z osią x'' i zważywszy że kąt kierunku λ_0', μ_0' z osią x'' jest także φ', będziemy mogli ostatnie równanie przedstawić w postaci:

$$\sin^2(\zeta'' - \varphi') = a'', \tag{297}$$

gdzie zastosowaliśmy oznaczenie:

$$a'' = \frac{r'^2 (h''^2 - r''^2)}{(r'^2 + r''^2) h''^2}. \tag{298}$$

Równania (295) i (297) możemy zastąpić równaniami:

$$\cos 2(\zeta' - \varphi') = 1 - 2a', \quad \cos 2(\zeta'' - \varphi') = 1 - 2a'',$$

które napiszemy w postaci:

$$\begin{cases} \cos 2\zeta' \cos 2\varphi' + \sin 2\zeta' \sin 2\varphi' = 1 - 2a', \\ \cos 2\zeta'' \cos 2\varphi' + \sin 2\zeta'' \sin 2\varphi' = 1 - 2a''. \end{cases} \tag{299}$$

Równania (281) i (287) mają jedno rozwiązanie wspólne na stosunek $\mu_0' : \lambda_0'$ wtedy i tylko wtedy, gdy z równań (299) wynika

jeden układ niesprzecznych wartości na dostawę i wstawę kąta $2\varphi'$. Przez rozwiązanie równań (299) otrzymujemy:

$$\cos 2\varphi' = \frac{(1-2a')\sin 2\zeta'' - (1-2a'')\sin 2\zeta'}{\sin 2(\zeta''-\zeta')},$$

$$\sin 2\varphi' = \frac{(1-2a'')\cos 2\zeta' - (1-2a')\cos 2\zeta''}{\sin 2(\zeta''-\zeta')}$$

i wartości te są niesprzeczne wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:

$$(300)\quad (1-2a')^2 + (1-2a'')^2 - 2(1-2a')(1-2a'')\cos 2(\zeta''-\zeta') = \sin^2 2(\zeta''-\zeta').$$

Jeżeli zastosujemy krótsze oznaczenie:

$$\Phi = \Phi(u', v'; u'', v''),$$

to mieć będziemy wzory:

$$\cos 2(\zeta''-\zeta') = \frac{2\Phi^2 - h'^2 h''^2}{h'^2 h''^2},$$

$$\sin^2 2(\zeta''-\zeta') = \frac{4\Phi^2(h'^2 h''^2 - \Phi^2)}{h'^4 h''^4}.$$

Na podstawie tych wzorów łatwo doprowadzić równość (300) do postaci:

$$[1-a'-a'']^2 - 2(1-a'-a''+2a'a'')\frac{\Phi^2}{h'^2 h''^2} + \frac{\Phi^4}{h'^4 h''^4} = 0,$$

lub też do postaci:

$$(301)\qquad \left[1-a'-a''-\frac{\Phi^2}{h'^2 h''^2}\right]^2 - 4a'a''\frac{\Phi^2}{h'^2 h''^2} = 0.$$

Równość (301) jest warunkiem, któremu muszą czynić zadość spółrzędne x', y' i spółrzędne x'', y'', żeby istniała jedna para hiperbol skojarzonych (279) i (286), przechodzących odpowiednio przez pierwszy i przez drugi z tych punktów. Sprawdzimy teraz, że jeżeli wielkości $x = x' + i\,x'', y = y' + i\,y''$ określają punkt rozważanego koła zespolonego, t.j. jeżeli zachodzą równości:

$$(302)\qquad h'^2 - h''^2 = r'^2 - r''^2, \quad \Phi = r'r'',$$

to warunek (301) jest spełniony. Zastosujemy oznaczenia:

$$(303) \qquad g' = \frac{h'^2}{r'^2}, \quad g'' = \frac{h''^2}{r''^2}$$

i skonstatujemy, że wtedy z równości (302) wynikają równości:

$$(304) \qquad \frac{r'^2}{r''^2} = \frac{g''-1}{g'-1}, \quad \frac{\Phi^2}{h'^2 h''^2} = \frac{1}{g' g''},$$

a korzystając ze wzorów (303) i z pierwszej z równości (304), otrzymamy łatwo dla wielkości (296) i (298) wyrażenia:

$$(305) \qquad a' = \frac{(g'-1)^2}{g'(g'+g''-2)}, \quad a'' = \frac{(g''-1)^2}{g''(g'+g''-2)}.$$

Jeżeli teraz podstawimy w lewą stronę warunku (301) wartość na $\Phi^2 : h'^2 h''^2$, określoną drugim z wzorów (304), oraz wartości na a' i a'', określone wzorami (305), to otrzymamy wyrażenie:

$$\left\{1 - \frac{1}{g'+g''-2}\left[\frac{(g'-1)^2}{g'} + \frac{(g''-1)^2}{g''}\right] - \frac{1}{g'g''}\right\}^2 - \frac{4}{g'^2 g''^2} \frac{(g'-1)^2 (g''-1)^2}{(g'+g''-2)^2},$$

a jeżeli oba jego wyrazy pomnożymy przez iloczyn:

$$g'^2 g''^2 (g'+g''-2)^2,$$

to mieć będziemy:

$$[(g'g''-1)(g'+g''-2) - g''(g'-1)^2 - g'(g''-1)^2]^2 - 4(g'-1)^2(g''-1)^2.$$

Ale, wykonywając działania w wielkim nawiasie pierwszego wiersza tego wyrażenia, przekonywamy się, że suma wyrazów tam zawartych równa się:

$$2(g'-1)(g''-1),$$

t.j. że powyższe wyrażenie jest zerem. Sprawdziliśmy więc, że przy zachodzeniu równości (302) warunek (301) jest spełniony.

Streścimy teraz otrzymane tutaj wyniki, odnoszące się do interpretacji zbioru punktów zespolonych koła urojonego, którego

kwadrat promienia jest wielkością urojoną. Hiperbole, położone na płaszczyźnie R, mające wspólny środek w punkcie Ω' oraz długości połów osi rzeczywistych równe $|r'|$, a wreszcie długości połów osi urojonych równe r'', nazwiemy hiperbolami M. Wszystkie te hiperbole mają w swych wierzchołkach wspólne styczne z kołem granicznem płaszczyzny R. Podobnież hiperbole, leżące na płaszczyźnie A i mające ten sam środek w punkcie Ω'' oraz te same długości połów osi rzeczywistych równe r'', a także te same długości połów osi urojonych równe $|r'|$, nazwiemy hiperbolami N. Hiperbole N mają w swych wierzchołkach wspólne styczne z kołem granicznem płaszczyzny A. Dla dwóch hiperbol M i N, których osie rzeczywiste mają na płaszczyznach R i A te same dwukierunki $\mu'_0 : \lambda'_0$, przyjęliśmy nazwę pary hiperbol skojarzonych. Każdemu punktowi, leżącemu na jednej z hiperbol pary, odpowiada na drugiej z nich jeden taki punkt, że te dwa punkty są odpowiedniemi śladami zespolonego punktu koła urojonego. Zajmowaliśmy się powyżej określeniem tej odpowiedniości, opierając się na związkach (264). Następnie wyznaczaliśmy hiperbole M, przechodzące przez dany punkt x', y', leżący na płaszczyźnie R nazewnątrz koła granicznego, oraz hiperbole N, przechodzące przez dany punkt x'', y'', leżący na płaszczyźnie A nazewnątrz odnośnego koła granicznego. W każdym z tych przypadków są dwie hiperbole, mające powyższe własności i oznaczymy je w pierwszym przypadku przez M_1', M_2', a w drugim przypadku przez N_1'', N_2''. Do każdej z tych hiperbol możemy dołączyć hiperbolę, która tworzy z nią parę hiperbol skojarzonych. Jeżeli te hiperbole dołączone oznaczymy odpowiednio przez N_1', N_2'; M_1'', M_2'', to mieć będziemy wogóle cztery pary hiperbol skojarzonych. Dla danego punktu x', y' mamy dwie pary hiperbol skojarzonych:

$$M_1', N_1' \text{ i } M_2', N_2', \tag{306}$$

a dla danego punktu x'', y'' dwie pary hiperbol skojarzonych:

$$N_1'', M_1'' \text{ i } N_2'', M_2''. \tag{307}$$

Jeżeli punkty x', y' i x'', y'' są odpowiednio śladami R i A tego samego punktu zespolonego, leżącego na uważanem kole urojonem, to wśród par hiperbol skojarzonych (306) i (307) znajdują się trzy i tylko trzy pary różne jedna od drugiej, a mianowicie jedna z par (307) jest ta sama, co jedna z par (306).

§ 49. Wykonywanie przekształceń linjowych na tworach urojonych elementarnych.

Niech będzie w płaszczyźnie P układ spółrzędnych prostolinjowych x, y, którego oś y tworzy z osią x kąt ϑ. Niech punkt o spółrzędnych ξ, η przechodzi w punkt o spółrzędnych $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, określonych wzorami:

$$\bar{\xi} = m + m_1 \xi + m_2 \eta, \quad \bar{\eta} = n + n_1 \xi + n_2 \eta, \tag{308}$$

gdzie m, n, m_1, m_2, n_1, n_2 oznaczają stałe rzeczywiste. Przyjmiemy oznaczenie:

$$w = m_1 n_2 - n_1 m_2 \tag{309}$$

i założymy, że wyznacznik w jest różny od zera. Przy spełnieniu tego założenia równania (308) określają linjowe przekształcenie punktu ξ, η na punkt $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$. Przykładem linjowego przekształcenia jest przekształcenie podobieństwa określone związkami:

$$\begin{cases} \bar{\xi} = a + \tau \left[\dfrac{\sin(\vartheta - \varphi)}{\sin \vartheta} \xi - \dfrac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \eta \right], \\ \bar{\eta} = b + \tau \left[\dfrac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \xi + \dfrac{\sin(\varphi + \vartheta)}{\sin \vartheta} \eta \right], \end{cases} \tag{310}$$

gdzie liczby a, b, φ są wszystkie rzeczywiste, a τ jest czynnikiem rzeczywistym różnym od zera. Gdy $\tau^2 = 1$ wówczas równania (310) określają przemieszczenie płaszczyzny w samej sobie. W przypadku związków (310) zachodzi równość:

$$w = \frac{\tau^2}{\sin^2 \vartheta} [\sin(\vartheta - \varphi) \sin(\vartheta + \varphi) + \sin^2 \varphi],$$

z której łatwo wynika wzór:

$$w = \tau^2. \tag{311}$$

Innym przykładem przekształcenia (308) są związki:

$$\begin{cases} \bar{\xi} = \xi - 2 \dfrac{g - h \cos \vartheta}{G^2} (g \xi + h \eta + k), \\ \bar{\eta} = \eta - 2 \dfrac{h - g \cos \vartheta}{G^2} (g \xi + h \eta + k), \end{cases} \tag{312}$$

gdzie g, h, k są stałemi rzeczywistemi, z których dwie pierwsze nie są obie jednocześnie zerami, a liczba G^2 określa się równością:

$$G^2 = \Phi(-h, g). \tag{313}$$

Wyznacznik w związków (312) określa się równością:

$$w = \left[1 - 2\frac{g(g - h\cos\vartheta)}{G^2}\right]\left[1 - 2\frac{h(h - g\cos\vartheta)}{G^2}\right] - 4\frac{g\,h(g - h\cos\vartheta)(h - g\cos\vartheta)}{G^4},$$

z której łatwo dochodzimy do wzoru:

$$w = -1. \tag{314}$$

Związki (312) określają przekształcenie symetrji względem prostej:

$$g\,x + h\,y + k = 0, \tag{315}$$

jako osi symetrji.

Niech będzie teraz właściwy punkt zespolony:

$$\xi = \xi' + i\,\xi'', \quad \eta = \eta' + i\,\eta'' \tag{316}$$

i niech wielkości:

$$\overline{\xi} = \overline{\xi}' + i\,\overline{\xi}'', \quad \eta = \overline{\eta}' + i\,\overline{\eta}'' \tag{317}$$

oznaczają spółrzędne punktu, w który przechodzi punkt (316) przez przekształcenie (308). Wtedy ślad R punktu (316) przechodzi w ślad R punktu (317) przez przekształcenie:

$$\overline{\xi}' = m + m_1\,\xi' + m_2\,\eta', \quad \overline{\eta}' = n + n_1\,\xi' + n_2\,\eta', \tag{318}$$

a ślad A punktu (316) przechodzi w ślad A punktu (317) przez przekształcenie:

$$\overline{\xi}'' = m_1\,\xi'' + m_2\,\eta'', \quad \overline{\eta}'' = n_1\,\xi'' + n_2\,\eta''. \tag{319}$$

To znaczy, że spółrzędne śladu R przekształcają się według tych samych związków, co spółrzędne punktu zespolonego, a spółrzędne śladu A przekształcają się według związków, które tem różnią się od związków przekształcenia spółrzędnych punktu zespolonego,

że nie mają wyrazów wolnych od spółrzędnych. Jeżeli w szczególności w związkach (310) czynnik τ równa się $+1$, to równania te określają przemieszczenie płaszczyzny P w samej sobie i wtedy odnośne równania (318), t.j. równania:

$$(320)\qquad \begin{cases} \bar{\xi}' = a + \dfrac{\sin(\vartheta - \varphi)}{\sin\vartheta}\,\xi' - \dfrac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\,\eta', \\ \bar{\eta}' = b + \dfrac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\,\xi' + \dfrac{\sin(\varphi + \vartheta)}{\sin\vartheta}\,\eta' \end{cases}$$

określają to samo przemieszczenie płaszczyzny R w samej sobie, a odnośne równania (319), t.j. równania:

$$(321)\qquad \begin{cases} \bar{\xi}'' = \dfrac{\sin(\vartheta - \varphi)}{\sin\vartheta}\,\xi'' - \dfrac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\,\eta'', \\ \bar{\eta}'' = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\,\xi'' + \dfrac{\sin(\varphi + \vartheta)}{\sin\vartheta}\,\eta'', \end{cases}$$

określają należący do tegoż przemieszczenia obrót płaszczyzny A w samej sobie naokoło początku spółrzędnych. Gdyby kąt φ był równy zeru, to przemieszczenie płaszczyzny P w samej sobie byłoby przesunięciem (translacją) i równania (320) zredukowałyby się do równań:

$$\bar{\xi}' = a + \xi', \quad \bar{\eta}' = b + \eta',$$

a równania (321) do równań:

$$\bar{\xi}'' = \xi'', \quad \bar{\eta}'' = \eta'',$$

t.j. płaszczyzna R uległaby temu samemu przesunięciu, co płaszczyzna P, a wszystkie punkty płaszczyzny A pozostałyby na miejscu. Zastosujemy równania (318) i (319) jeszcze w przypadku przekształcenia symetrji, określonego równaniami (312). Wtedy mieć będziemy dla śladu R punktu zespolonego równania:

$$(322)\qquad \begin{cases} \bar{\xi}' = \xi' - 2\,\dfrac{g - h\cos\vartheta}{G^2}\,(g\,\xi' + h\,\eta' + k), \\ \bar{\eta}' = \eta' - 2\,\dfrac{h - g\cos\vartheta}{G^2}\,(g\,\xi' + h\,\eta' + k), \end{cases}$$

a dla śladu A punktu zespolonego równania:

$$(323)\qquad \begin{cases} \bar{\xi}'' = \xi'' - 2\dfrac{g - h\cos\vartheta}{G^2}(g\,\xi'' + h\,\eta''), \\ \bar{\eta}'' = \eta'' - 2\dfrac{h - g\cos\vartheta}{G^2}(g\,\xi'' + h\,\eta''). \end{cases}$$

Prosta śladów R i prosta śladów A osi symetrji (315) określają się odpowiednio równaniami:

$$(324)\qquad g\,x' + h\,y' + k = 0, \quad g\,x'' + h\,y'' = 0.$$

Równania (322) i (323) orzekają, że ślady R i A punktów zespolonych podlegają przekształceniom symetrji odpowiednio względem pierwszej i drugiej z prostych (324), jako osi symetrji.

Weźmy teraz pod uwagę wektor zespolony o składowych:

$$(325)\qquad u = u' + i\,u'', \quad v = v' + i\,v''$$

i przyjmijmy, że wykonywając na nim przekształcenie (308), otrzymamy wektor o składowych:

$$(326)\qquad \bar{u} = \bar{u}' + i\,\bar{u}'', \quad \bar{v} = \bar{v}' + i\,\bar{v}''.$$

Przyjęcie to jest równoważne z zachodzeniem związków:

$$(327)\qquad \bar{u} = m_1 u + m_2 v, \quad \bar{v} = n_1 u + n_2 v,$$

które można zastąpić przez związki:

$$(328)\qquad \begin{cases} \bar{u}' = m_1 u' + m_2 v', \quad \bar{v}' = n_1 u' + n_2 v', \\ \bar{u}'' = m_1 u'' + m_2 v'', \quad \bar{v}'' = n_1 u'' + n_2 v''. \end{cases}$$

Widzimy więc, że składowe każdego z boków węgła wektora zespolonego przekształcają się na mocy tych samych związków, co składowe tego wektora. Ze związków (328) łatwo wyprowadzić równość:

$$(329)\qquad \bar{u}'\bar{v}'' - \bar{v}'\bar{u}'' = w\,(u'\,v'' - v'\,u''),$$

w której w określone jest wzorem (309). Równość (329) prowadzi do wniosków następujących. Każdy wektor o rzeczywistym

dwukierunku przechodzi w wektor o rzeczywistym dwukierunku, każdy zaś wektor o urojonym dwukierunku przechodzi w wektor o urojonym dwukierunku. Jeżeli przytem zachodzi nierówność $w > 0$, to każdy wektor górny przechodzi w wektor górny, a każdy wektor dolny przechodzi w wektor dolny; jeżeli zaś spełniona jest nierówność $w < 0$, to każdy wektor górny przechodzi w wektor dolny, a każdy wektor dolny przechodzi w wektor górny. Widoczne, że takie same wnioski odnoszą się odpowiednio do dwukierunków rzeczywistych, dwukierunków urojonych górnych i dwukierunków urojonych dolnych, do punktów niewłaściwych rzeczywistych, punktów niewłaściwych urojonych górnych i punktów niewłaściwych urojonych dolnych, wreszcie do prostych o dwukierunkach rzeczywistych, prostych urojonych górnych i prostych urojonych dolnych. W szczególności przekształcenia podobieństwa i przemieszczenia płaszczyzny w samej sobie mają te z rzeczonych własności, które zachodzą przy spełnieniu nierówności $w > 0$, a przekształcenia symetrji mają te z rzeczonych własności, które zachodzą przy spełnieniu nierówności $w < 0$.

Zapytujemy teraz o przekształcenia (308), które przeprowadzają każdy wektor izotropowy w wektor izotropowy. Ze związków (327) wynika równość:

$$(330)\quad \Phi(\bar{u}, \bar{v}) = \Phi(m_1, n_1)\, u^2 + 2\,\Phi(m_1, n_1;\ m_2, n_2)\, u\, v + \Phi(m_2, n_2)\, v^2.$$

Przekształcenie linjowe (308) ma żądaną własność wtedy i tylko wtedy, gdy przy dowolnych wartościach wielkości u, v zachodzi równość:

$$(331)\qquad \Phi(\bar{u}, \bar{v}) = \tau^2\, \Phi(u, v),$$

gdzie τ oznacza czynnik rzeczywisty różny od zera. Ze związków (330) i (331) wynikają dla przekształcenia (308) o rzeczonej własności warunki:

$$(332)\qquad \begin{cases} \Phi(m_1, n_1) = \Phi(m_2, n_2) = \tau^2, \\ \Phi(m_1, n_1;\ m_2, n_2) = \tau^2 \cos\vartheta, \end{cases}$$

które są widocznie równoważne warunkom (206), rozważanym w § 41. W tymże paragrafie wyszczególnione są przekształcenia linjowe, które czynią zadość tym warunkom. Podamy je tutaj w co-

kolwiek innem sformułowaniu. Warunki (332) spełnione są w dwóch przypadkach. Wtedy, gdy spełnione są równości:

$$(333)\quad \begin{cases} \Phi(m_1, n_1) = \Phi(m_2, n_2) = \tau^2, \\ \Phi(m_1, n_1; m_2, n_2) = \tau^2 \cos\vartheta, \quad \Psi(m_1, n_1; m_2, n_2) = \tau^2 \sin\vartheta, \end{cases}$$

które rozważaliśmy już w § 38 pod numerem (64), oraz wtedy, gdy spełnione są równości:

$$(334)\quad \begin{cases} \Phi(m_1, n_1) = \Phi(m_2, n_2) = \tau^2, \\ \Phi(m_1, n_1; m_2, n_2) = \tau^2 \cos\vartheta, \quad \Psi(m_1, n_1; m_2, n_2) = -\tau^2 \sin\vartheta. \end{cases}$$

Równości (333) spełnione są tylko w przypadku związków postaci (310), które przy $\tau^2 = 1$ przedstawiają przemieszczenie płaszczyzny w samej sobie, a przy $\tau^2 \neq 1$ przekształcenie podobieństwa. Warunki (334) spełnione są tylko dla związków formy:

$$(335)\quad \begin{cases} \bar{\xi} = a + \tau \left[\dfrac{\sin(\vartheta - \varphi)}{\sin\vartheta}\,\xi + \dfrac{\sin(2\vartheta - \varphi)}{\sin\vartheta}\,\eta \right], \\ \bar{\eta} = b + \tau \left[\dfrac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\,\xi - \dfrac{\sin(\vartheta - \varphi)}{\sin\vartheta}\,\eta \right], \end{cases}$$

które są rezultatem rugowania wielkości $\underline{\xi}$, $\underline{\eta}$ z pośród związków:

$$(336)\quad \begin{cases} \bar{\xi} = a + \tau \left[\dfrac{\sin(\vartheta - \varphi)}{\sin\vartheta}\,\underline{\xi} - \dfrac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\,\underline{\eta} \right], \\ \bar{\eta} = b + \tau \left[\dfrac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\,\underline{\xi} + \dfrac{\sin(\varphi + \vartheta)}{\sin\vartheta}\,\underline{\eta} \right], \end{cases}$$

i związków:

$$(337)\qquad \underline{\xi} = \xi + 2\cos\vartheta\,\eta, \quad \underline{\eta} = -\eta.$$

Związki (337) określają przekształcenie symetrji punktu ξ, η na punkt $\underline{\xi}$, $\underline{\eta}$ względem osi x-ów, jako osi symetrji. Związki (336) określają przekształcenie podobieństwa, względnie przemieszczenie płaszczyzny w samej sobie. Widzimy więc, że przekształcenie

(335) może być wytworzone w sposób następujący: naprzód przekształcenie symetrji względem osi x-ów jako osi symetrji, a następnie w przypadku $\tau^2 = 1$ przemieszczenie płaszczyzny w samej sobie, a w przypadku $\tau^2 \neq 1$ przekształcenie podobieństwa.

Każdy dwukierunek izotropowy jest niezmiennym dwukierunkiem przekształcenia (310), a każdy niewłaściwy punkt kołowy jest niezmiennym punktem tego przekształcenia. Każdy wektor izotropowy przechodzi naskutek przekształcenia (310) w wektor izotropowy o tym samym dwukierunku, a każda prosta izotropowa przechodzi naskutek przekształcenia (310) w prostą izotropową o tym samym dwukierunku. Każdy dwukierunek izotropowy przechodzi naskutek przekształcenia (335) w dwukierunek izotropowy z nim sprzężony, a każdy niewłaściwy punkt kołowy przechodzi naskutek przekształcenia (335) w niewłaściwy punkt kołowy z nim sprzężony. Każdy wektor izotropowy przechodzi naskutek przekształcenia (335) w wektor izotropowy o sprzężonym dwukierunku, a każda prosta izotropowa w prostą izotropową o sprzężonym dwukierunku.

Wszystkie te wnioski wynikają stąd, że dla przekształceń (310) i (335) zachodzi równość (331) i że w przypadku przekształcenia (310) spełniona jest nierówność $w > 0$, a w przypadku przekształcenia (335) spełniona jest nierówność $w < 0$.

Zajmiemy się sprawdzeniem tych wniosków inną drogą. Przy przekształceniu (310) wektor o składowych u, v przechodzi w wektor o składowych $\bar{u}$, $\bar{v}$, określonych równaniami:

$$(338)\qquad \begin{cases} \bar{u} = \dfrac{\tau}{\sin\vartheta}\,[u \sin(\vartheta - \varphi) - v \sin\varphi], \\ \bar{v} = \dfrac{\tau}{\sin\vartheta}\,[u \sin\varphi + v \sin(\varphi + \vartheta)], \end{cases}$$

a przy przekształceniu (335) wektor o składowych u, v przechodzi w wektor o składowych $\bar{u}$, $\bar{v}$, określonych równaniami:

$$(339)\qquad \begin{cases} \bar{u} = \dfrac{\tau}{\sin\vartheta}\,[u \sin(\vartheta - \varphi) + v \sin(2\vartheta - \varphi)], \\ \bar{v} = \dfrac{\tau}{\sin\vartheta}\,[u \sin\varphi - v \sin(\vartheta - \varphi)]. \end{cases}$$

Związki (338) i (339) przedstawimy teraz w innej formie. W tym celu zauważmy, że zachodzą równości:

$$(340)\quad \begin{cases} \sin\varphi + \cos\vartheta \sin(\vartheta-\varphi) = \sin\vartheta\cos(\vartheta-\varphi), \\ \sin(\varphi+\vartheta) - \cos\vartheta\sin\varphi = \sin\vartheta\cos\varphi, \\ -\sin(\vartheta-\varphi) + \cos\vartheta\sin(2\vartheta-\varphi) = \sin\vartheta\cos(2\vartheta-\varphi). \end{cases}$$

Korzystając z pierwszych dwóch z tych równości, otrzymamy ze związków (338) związki:

$$\bar{v} + e^{-i\vartheta}\bar{u} = \tau\{u\cos(\vartheta-\varphi) + v\cos\varphi - i[u\sin(\vartheta-\varphi) - v\sin\varphi]\},$$

$$\bar{v} + e^{i\vartheta}\bar{u} = \tau\{u\cos(\vartheta-\varphi) + v\cos\varphi + i[u\sin(\vartheta-\varphi) - v\sin\varphi]\},$$

które łatwo doprowadzić do postaci:

$$(341)\quad \begin{cases} \bar{v} + e^{-i\vartheta}\bar{u} = \tau e^{i\varphi}(v + e^{-i\vartheta}u), \\ \bar{v} + e^{i\vartheta}\bar{u} = \tau e^{-i\varphi}(v + e^{i\vartheta}u). \end{cases}$$

Korzystając zaś z pierwszej i trzeciej z równości (340), otrzymamy z równań (339) równania:

$$\bar{v} + e^{-i\vartheta}\bar{u} = \tau\{u\cos(\vartheta-\varphi) + v\cos(2\vartheta-\varphi) - i[u\sin(\vartheta-\varphi) + v\sin(2\vartheta-\varphi)]\},$$

$$\bar{v} + e^{i\vartheta}\bar{u} = \tau\{u\cos(\vartheta-\varphi) + v\cos(2\vartheta-\varphi) + i[u\sin(\vartheta-\varphi) + v\sin(2\vartheta-\varphi)]\},$$

które można napisać w formie:

$$(342)\quad \begin{cases} \bar{v} + e^{-i\vartheta}\bar{u} = \tau e^{-i(2\vartheta-\varphi)}(v + e^{i\vartheta}u), \\ \bar{v} + e^{i\vartheta}\bar{u} = \tau e^{i(2\vartheta-\varphi)}(v + e^{-i\vartheta}u). \end{cases}$$

Według wzoru (40) w § 26 tomu I-go spółczynniki dwukierunków izotropowych są liczbami $-e^{-\varepsilon i\vartheta}$, $(\varepsilon = \pm 1)$. Zatem ze związków (341) wynika, że każdy dwukierunek izotropowy pozostaje bez zmiany przy przekształceniach (310), a ze związków (342) wynika, że przekształcenia (335) zmieniają każdy dwukierunek izotropowy

na dwukierunek z nim sprzężony. W ten sposób otrzymaliśmy ponowne udowodnienie rzeczonych wniosków.

Niech będzie wreszcie koło zespolone, określone równaniem:

$$\Phi(\xi - a,\ \eta - b) = r^2, \tag{343}$$

gdzie a, b oznaczają spółrzędne środka koła, a r oznacza promień koła. Zapytujemy o twory geometryczne, powstające z koła (343) przez przekształcenia (310) i (335). Jeżeli weźmiemy pod uwagę jakiekolwiek przekształcenie, należące do jednej lub drugiej z tych kategoryj, i jeżeli przez $\bar{a}$, $\bar{b}$ oznaczymy spółrzędne punktu, powstającego przez to przekształcenie z punktu o spółrzędnych a, b, to wektor o składowych $\xi - a$, $\eta - b$ przejdzie naskutek tego przekształcenia w wektor o składowych $\bar{\xi} - \bar{a}$, $\bar{\eta} - \bar{b}$, spełniających równość:

$$\Phi(\bar{\xi} - \bar{a},\ \bar{\eta} - \bar{b}) = \tau^2\, \Phi(\xi - a,\ \eta - b).$$

Stąd wynika, że przez przekształcenie, należące do jednej lub drugiej z kategoryj, objętych równaniami (310) i (335), koło zespolone (343) przechodzi w koło zespolone, określone równaniem:

$$\Phi(\bar{\xi} - \bar{a},\ \bar{\eta} - \bar{b}) = \tau^2 r^2. \tag{344}$$

To znaczy, że przekształcenie, należące do którejkolwiek z rzeczonych kategoryj, przeprowadza koło zespolone o promieniu r i środku w punkcie a, b w koło zespolone o promieniu $|\tau|\, r$ i środku w punkcie $\bar{a}$, $\bar{b}$, otrzymującym się przez to przekształcenie z punktu a, b.

ROZDZIAŁ ÓSMY.

Dziedzina zespolona istotnych krzywych stopnia drugiego.

§ 50. Wyrażenia spółrzędnych śladu A przez spółrzędne śladu R punktu zespolonego istotnej krzywej stopnia drugiego.

Niech będzie równanie stopnia drugiego:

$$(1) \quad f(x,y) = A\,x^2 + 2\,B\,x\,y + C\,y^2 + 2\,D\,x + 2\,E\,y + F = 0,$$

gdzie A, B, C, D, E, F oznaczają spółczynniki rzeczywiste, z których A, B, C nie są wszystkie trzy jednocześnie zerami. Przy założeniu, że wyznacznik:

$$(2) \quad \Delta = \begin{vmatrix} A, & B, & D \\ B, & C, & E \\ D, & E, & F \end{vmatrix}$$

równa się zeru, rozważaliśmy w § 66 tomu I zbiór punktów zespolonych, których spółrzędne czynią zadość równaniu (1). Obecnie zajmiemy się zbiorami punktów zespolonych, których spółrzędne spełniają równanie (1), przy założeniu, że wyznacznik (2) jest różny od zera.

Jeżeli podstawimy w równanie (1) wyrażenia:

$$x = x' + i\,x'', \quad y = y' + i\,y'',$$

to na mocy wzoru (6) § 6 otrzymamy związek:

$$f(x', y') - \varphi(x'', y'') + 2i(\alpha' x'' + \beta' y'') = 0, \tag{3}$$

gdzie zastosowaliśmy oznaczenia:

$$\alpha' = A x' + B y' + D, \quad \beta' = B x' + C y' + E. \tag{4}$$

Związek (3) prowadzi do równań:

$$f(x', y') - \varphi(x'', y'') = 0, \quad \alpha' x'' + \beta' y'' = 0. \tag{5}$$

Zwrócimy się naprzód do wyprowadzenia ogólnych wyrażeń na spółrzędne x'', y'', wynikających z równań (5).

Jeżeli założymy, że wielkości α' i β' nie są obie jednocześnie zerami, t.j. że punkt o spółrzędnych x', y' nie jest środkiem krzywej określonej równaniem (1), to drugie z równań (5) można będzie zastąpić przez równania:

$$x'' = -\rho \beta', \quad y'' = \rho \alpha', \tag{6}$$

gdzie ρ oznacza czynnik na razie nieokreślony. Podstawiając następnie wyrażenia (6) w pierwsze z równań (5), otrzymamy związek:

$$f(x', y') - \rho^2 (C \alpha'^2 - 2 B \alpha' \beta' + A \beta'^2) = 0,$$

a zważywszy, że na mocy równości (115) § 10 mamy:

$$\Delta = f(x', y') \delta - (C \alpha'^2 - 2 B \alpha' \beta' + A \beta'^2), \tag{7}$$

będziemy mogli związek ten napisać w postaci:

$$f(x', y') - \rho^2 [f(x', y') \delta - \Delta] = 0. \tag{8}$$

Jeżeli teraz założymy, że zachodzi nierówność:

$$f(x', y') \delta - \Delta \neq 0,$$

która w przypadkach $\delta = 0$ spełniona jest naskutek założenia $\Delta \neq 0$, a w przypadkach $\delta \neq 0$ spełniona jest zawsze wtedy, gdy punkt o spółrzędnych x', y' nie leży na żadnej z asymptot uważanej linji krzywej, to otrzymamy na ρ wzór:

$$\rho = \eta \sqrt{\left| \frac{f(x', y')}{f(x', y') \delta - \Delta} \right|}, \tag{9}$$

w którym $\eta = \pm 1$, a więc na mocy równań (6) otrzymamy na x'', y'' wyrażenia:

$$(10)\quad x'' = -\eta\beta'\sqrt{\frac{f(x',y')}{f(x',y')\,\delta - \Delta}},\qquad y'' = \eta\alpha'\sqrt{\frac{f(x',y')}{f(x',y')\,\delta - \Delta}}.$$

Pierwiastek kwadratowy, figurujący w tych wyrażeniach, jest zerem, gdy punkt o spółrzędnych x', y', położony jest na uważanej linji krzywej. We wszystkich innych przypadkach, czyniących zadość podanym wyżej zastrzeżeniom, pierwiastek ten ma jedną określoną wartość skończoną różną od zera. Zauważmy tutaj, że w równaniu (3) wielkości x', y', x'', y'' są wszystkie rzeczywiste, skąd wynika, że rzeczywiste wielkości x', y' mają być we wzorach (10) wybierane w taki sposób, żeby wyrażenie, znajdujące, się pod pierwiastkiem kwadratowym, miało wartość nieujemną. Zbadanie warunków koniecznych i wystarczających, przy spełnieniu których to zachodzi, wykonamy w dalszym ciągu.

Zajmiemy się tutaj wyprowadzeniem pewnych własności pary wielkości x'', y'', określonych wzorami (10), jako funkcyj wielkości x', y'. Przytem wyłączymy z rozważania wartości wielkości x', y', dla których $f(x', y')$ równa się zeru. Nadto dla skrócenia stosować będziemy oznaczenie:

$$f = f(x', y'),$$

skąd wynika, że dla ρ mieć będziemy wzór:

$$(11)\qquad \rho = \eta\sqrt{\frac{f}{f\,\delta - \Delta}}.$$

Na podstawie wzorów (6) otrzymujemy następujące wyrażenia pochodnych funkcyj x'', y'' względem zmiennych x', y':

$$\frac{\partial x''}{\partial x'} = -B\rho - \beta'\frac{\partial \rho}{\partial x'},\quad \frac{\partial x''}{\partial y'} = -C\rho - \beta'\frac{\partial \rho}{\partial y'},$$

$$\frac{\partial y''}{\partial x'} = A\rho + \alpha'\frac{\partial \rho}{\partial x'},\quad \frac{\partial y''}{\partial y'} = B\rho + \alpha'\frac{\partial \rho}{\partial y'},$$

a jeżeli uwzględnimy wzory:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x'} = 2\alpha'\frac{d\rho}{df},\quad \frac{\partial \rho}{\partial y'} = 2\beta'\frac{d\rho}{df},$$

to otrzymamy wyrażenia:

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x''}{\partial x'} = -B\rho - 2\alpha'\beta'\dfrac{d\rho}{df}, \\ \dfrac{\partial x''}{\partial y'} = -C\rho - 2\beta'^2\dfrac{d\rho}{df}, \\ \dfrac{\partial y''}{\partial x'} = A\rho + 2\alpha'^2\dfrac{d\rho}{df}, \\ \dfrac{\partial y''}{\partial y'} = B\rho + 2\alpha'\beta'\dfrac{d\rho}{df}. \end{cases}$$

Ze wzorów (12) wynika, że funkcje x'', y'' spełniają związek:

$$(13)\qquad \frac{\partial x''}{\partial x'} + \frac{\partial y''}{\partial y'} = 0.$$

Obliczmy następnie na podstawie wzorów (12) wyznacznik funkcyjny funkcyj x'', y'' względem zmiennych x', y'. Otrzymujemy:

$$\frac{\partial x''}{\partial x'}\frac{\partial y''}{\partial y'} - \frac{\partial x''}{\partial y'}\frac{\partial y''}{\partial x'} =$$

$$= \left(A\rho + 2\alpha'^2\frac{d\rho}{df}\right)\left(C\rho + 2\beta'^2\frac{d\rho}{df}\right) - \left(B\rho + 2\alpha'\beta'\frac{d\rho}{df}\right)^2,$$

skąd wynika:

$$\frac{\partial x''}{\partial x'}\frac{\partial y''}{\partial y'} - \frac{\partial x''}{\partial y'}\frac{\partial y''}{\partial x'} = \rho^2\delta + 2\rho\frac{d\rho}{df}(C\alpha'^2 - 2B\alpha'\beta' + A\beta'^2),$$

a więc na podstawie równości (7) dochodzimy do wzoru:

$$\frac{\partial x''}{\partial x'}\frac{\partial y''}{\partial y'} - \frac{\partial x''}{\partial y'}\frac{\partial y''}{\partial x'} = \rho^2\delta + 2\rho\frac{d\rho}{df}(f\delta - \Delta).$$

Ale przez różniczkowanie wyrażenia (11) dochodzimy łatwo do wzoru:

$$(14)\qquad 2\rho\frac{d\rho}{df} = -\frac{\Delta}{(f\delta - \Delta)^2},$$

zapomocą którego otrzymuje się rezultat:

$$\frac{\partial x''}{\partial x'}\frac{\partial y''}{\partial y'} - \frac{\partial x''}{\partial y'}\frac{\partial y''}{\partial x'} = 1. \tag{15}$$

Z równości (13) wynika, że istnieją funkcje U zmiennych x', y', zapomocą których można wyrażenia (10) przedstawić w postaci:

$$x'' = -\frac{\partial U}{\partial y'}, \quad y'' = \frac{\partial U}{\partial x'}. \tag{16}$$

Na podstawie równości (15) widzimy, że te funkcje U spełniają równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x'^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y'^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x'\,\partial y'}\right)^2 = 1. \tag{17}$$

Opierając się na równaniach (16) i poprzednich wzorach (6) i (11) można wyznaczyć funkcję U. Równania (16) można zastąpić równaniem:

$$dU = y''dx' - x''dy', \tag{18}$$

a zatem na podstawie związków (6) otrzymamy wzór:

$$dU = \rho(\alpha' dx' + \beta' dy'),$$

t.j. dojdziemy do różniczki:

$$dU = \frac{1}{2}\rho\, df = \frac{\eta}{2}\sqrt{\frac{f}{f\delta - \Delta}}\, df,$$

a wynik ten określi się także wzorem:

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\, df = \frac{\eta}{2}\int \sqrt{\frac{f}{f\delta - \Delta}}\, df, \tag{19}$$

w którym figuruje całka nieokreślona. Kwadraturę tę można wykonać we wszystkich możliwych przypadkach.

Jeżeli $\delta > 0$, to można funkcję U przedstawić w postaci:

$$U = \frac{\eta}{2\sqrt{\delta}}\int \sqrt{\frac{\frac{f\delta}{\Delta}}{\frac{f\delta}{\Delta} - 1}}\, df,$$

albo, wprowadzając nową zmienną:

$$z = \frac{f\delta}{\Delta}, \tag{20}$$

w postaci:

$$U = \frac{\eta\Delta}{2\sqrt{\delta^3}} \int \sqrt{\frac{z}{z-1}}\, dz. \tag{21}$$

Zastosujemy oznaczenie:

$$g = \sqrt{\frac{z}{z-1}} \tag{22}$$

i zwrócimy uwagę na to, że w tem rozważaniu licznik i mianownik wyrażenia pod pierwiastkiem nie mogą być różnych znaków. Stosując wielkość $\nu = \pm 1$, zależnie od tego, czy wyrażenia te są dodatnie, czy też ujemne, będziemy mogli wielkość g przedstawić w postaci:

$$g = \frac{\sqrt{\nu z}}{\sqrt{\nu(z-1)}}$$

i można sprawdzić przez różniczkowanie, że zachodzi równość:

$$\int g\, dz = \nu\sqrt{\nu z}\sqrt{\nu(z-1)} + \log\left[\sqrt{\nu z} + \sqrt{\nu(z-1)}\right] + \text{const.},$$

gdzie log jest symbolem rzeczywistego naturalnego logarytmu. Równość tę można zastąpić równością, w której figuruje jeden tylko pierwiastek kwadratowy g. Otrzymujemy mianowicie równość:

$$\int g\, dz = (z-1)\, g + \frac{1}{2}\log\left[\nu(z-1)\right] + \log(1+g) + \text{const.}, \tag{23}$$

z której wynika na U wzór następujący:

$$U = \frac{\eta\Delta}{2\sqrt{\delta^3}}\left\{\left(\frac{f\delta}{\Delta} - 1\right)g + \frac{1}{2}\log\left[\nu\left(\frac{f\delta}{\Delta} - 1\right)\right] + \right. \tag{24}$$

$$\left. + \log(1+g)\right\} + \text{const.},$$

gdzie $\nu = \pm 1$, zależnie od tego, czy wspólny znak wielkości $\frac{f\delta}{\Delta}$

i $\frac{f\delta}{\Delta} - 1$ jest dodatni, czy też ujemny, a przez g oznaczona jest wielkość:

$$g = \sqrt{\frac{f\delta}{f\delta - \Delta}}.$$

Jeżeli teraz przyjmiemy, że $\delta < 0$, to można będzie funkcję U przedstawić w postaci:

$$U = \frac{\eta}{2\sqrt{-\delta}} \int \sqrt{\frac{\frac{f\delta}{\Delta}}{1 - \frac{f\delta}{\Delta}}}\, df,$$

a wprowadzając zmienną z określoną wzorem (20), w postaci:

$$U = \frac{\eta\,\Delta}{2\,\delta\sqrt{-\delta}} \int \sqrt{\frac{z}{1-z}}\, dz. \tag{25}$$

Zastosujemy oznaczenie:

$$h = \sqrt{\frac{z}{1-z}} \tag{26}$$

i zwrócimy uwagę na to, że w rozważanych tutaj przypadkach ułamek, stojący pod pierwiastkiem, musi być wielkością dodatnią, skąd łatwo wywnioskować, że z spełniać musi warunki: $0 < z < 1$. Przyjmując, że warunki te są spełnione, przedstawimy h w postaci:

$$h = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1-z}}$$

i sprawdzimy przez różniczkowanie, że zachodzi równość:

$$\int h\, dz = -\sqrt{z}\,\sqrt{1-z} + \frac{1}{2}\arcsin(2z-1) + \text{const.},$$

w której bezwzględna wartość wielkości, stojącej pod znakiem arc sin, jest mniejsza od jedności, a znak ten oznacza łuk większy od $-\frac{\pi}{2}$ i mniejszy od $+\frac{\pi}{2}$. Równość tę można zastąpić wzorem:

$$(27)\qquad \int h\,dz = (z-1)\,h + \frac{1}{2}\arcsin(2z-1) + \text{const.},$$

z którego na mocy równości (20) i (25) wynika wzór:

$$(28)\qquad U = -\frac{\eta\,\Delta}{2\sqrt{-\delta^3}}\left\{\left(\frac{f\delta}{\Delta}-1\right)h + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2f\delta}{\Delta}-1\right)\right\} + \text{const.},$$

gdzie h oznacza wyrażenie:

$$h = \sqrt{\frac{f\delta}{\Delta - f\delta}}.$$

Wreszcie przy założeniu $\delta = 0$ mamy:

$$(29)\qquad U = \frac{\eta}{2}\int \sqrt{-\frac{f}{\Delta}}\,df,$$

gdzie wielkość, stojąca pod całką, jest rzeczywista przy spełnieniu nierówności $f\Delta < 0$. Ze wzoru (29) wynika wzór:

$$(30)\qquad U = -\frac{\nu\,\eta}{3}\sqrt{-\frac{f^3}{\Delta}} + \text{const.},$$

gdzie $\nu = \pm 1$ zależnie od tego, czy Δ jest wielkością dodatnią, czy też ujemną.

§ 51. Wyrażenia spółrzędnych śladu R przez spółrzędne śladu A punktu zespolonego istotnej krzywej stopnia drugiego.

Zajmiemy się teraz rozwiązaniem równań:

$$(5)\qquad f(x', y') - \varphi(x'', y'') = 0,\quad \alpha' x'' + \beta' y'' = 0$$

względem wielkości x' i y'. W tym celu można zastosować postępowanie, którem określaliśmy w § 22 punkty spotkania krzywej stopnia drugiego z jej średnicą sprzężoną z danym dwukierunkiem. Równania (5) można przy zastosowaniu oznaczeń (4) oraz oznaczenia:

(31) $$\gamma' = D x' + E y' + F$$

napisać w postaci:

$$\alpha' x' + \beta' y' + \gamma' - \varphi(x'', y'') = 0, \ \alpha' x'' + \beta' y'' = 0,$$

a więc przy założeniu, że wielkości x'', y'' nie są obie jednocześnie zerami, można równania (5) zastąpić przez równania:

(32) $$\alpha' = y'' \sigma, \ \beta' = -x'' \sigma, \ (y'' x' - x'' y') \sigma + \gamma' - \varphi(x'', y'') = 0,$$

gdzie σ oznacza czynnik na razie nieokreślony. Równania (32) można inaczej napisać w formie:

(33) $$\begin{cases} A x' + B y' + D - y'' \sigma = 0, \\ B x' + C y' + E + x'' \sigma = 0, \\ (D + y'' \sigma) x' + (E - x'' \sigma) y' + F - \varphi(x'', y'') = 0. \end{cases}$$

Załóżmy naprzód, że $\delta \neq 0$. Wtedy można z dwóch pierwszych z równań (33) wyznaczyć x', y', a wstawiając otrzymane wyrażenia w trzecie z tych równań, dojść do równania, któremu musi czynić zadość czynnik σ. Ale równanie to można otrzymać prościej przez zastosowanie tożsamości (7), z której na podstawie pierwszego z równań (5) i dwóch pierwszych z równań (32) wynika:

(34) $$\Delta = \varphi(x'', y'') \delta - \sigma^2 \varphi(x'', y'').$$

Z tego równania można wyznaczyć σ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(x'', y'')$ jest różne od zera, t.j. gdy dwukierunek $y'' : x''$ nie jest dwukierunkiem asymptotycznym. Zakładając to, otrzymujemy:

(35) $$\sigma = \zeta \sqrt{\frac{\varphi(x'', y'') \delta - \Delta}{\varphi(x'', y'')}},$$

gdzie $\zeta = \pm 1$, a na podstawie tego wzoru i pierwszych dwóch z równań (32) wynikają na α' i β' wyrażenia:

(36) $$\alpha' = \zeta y'' \sqrt{\frac{\varphi(x'', y'') \delta - \Delta}{\varphi(x'', y'')}}, \ \beta' = -\zeta x'' \sqrt{\frac{\varphi(x'', y'') \delta - \Delta}{\varphi(x'', y'')}}.$$

Pierwiastek kwadratowy, zachodzący w tych wyrażeniach, jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest równość:

$$\varphi(x'', y'') - \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{37}$$

Zauważmy, że równość ta otrzymuje się z równania:

$$\varphi(\xi, \eta) + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

jeżeli w niem zamiast ξ, η podstawimy odpowiednio $i x'', i y''$. Równanie na ξ, η jest równaniem danej krzywej, odniesionej do spółrzędnych prostolinjowych, których początek znajduje się w środku krzywej, a kierunki są odpowiednio te same co kierunki osi x, y. Bliższe określenie geometrycznego znaczenia równości (37) podamy dopiero w dalszym ciągu. We wszystkich innych przypadkach, różnych od przypadków, w których dwukierunek $y'' : x''$ jest dwukierunkiem asymptotycznym, pierwiastek kwadratowy, zachodzący w wyrażeniach (35) i (36), ma wartość skończoną, różną od zera. Zaznaczamy przytem, że przez wielkości x', y', x'', y'' rozumiemy wielkości rzeczywiste, a więc wielkości x'', y'' mogą być wybierane tylko w taki sposób, żeby wyrażenie stojące pod pierwiastkiem miało wartość nieujemną. Dopiero w dalszym ciągu rozważymy warunki geometryczne, przy spełnieniu których fakt ten istotnie zachodzi. Zauważymy tu jeszcze, że na mocy pierwszego ze związków (5) wielkości ρ i σ, określone wzorami (9) i (35), spełniają równość $\rho\sigma = \eta\zeta$.

Rozwiążmy teraz pierwsze dwa z równań (32) względem x', y'. Wtedy otrzymamy wzory:

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{k''}{\delta} + (B x'' + C y'')\frac{\sigma}{\delta}, \\ y' &= \frac{k'}{\delta} - (A x'' + B y'')\frac{\sigma}{\delta}, \end{aligned}\right. \tag{38}$$

w których σ określone jest wzorem (35). Zauważamy przytem, że pierwsze wyrazy, figurujące po prawych stronach tych równości, są spółrzędnemi środka uważanej krzywej stopnia drugiego.

Niech będzie teraz $\delta = 0$. Wtedy oprzemy rachunki bezpośrednio na równaniach (5), które możemy w tym przypadku napisać w postaci:

$$(39)\quad \begin{cases} \varepsilon(\mathfrak{a}x' + \mathfrak{b}y')^2 + 2Dx' + 2Ey' + F - \varphi(x'', y'') = 0, \\ \varepsilon(\mathfrak{a}x'' + \mathfrak{b}y'')(\mathfrak{a}x' + \mathfrak{b}y') + Dx'' + Ey'' = 0. \end{cases}$$

Zajmiemy się rozwiązaniem tych równań względem x', y' i w tym celu zastąpimy je naprzód przez równania:

$$(40)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}x' + \mathfrak{b}y' + P = 0, \\ 2Dx' + 2Ey' + Q = 0, \end{cases}$$

w których zastosowaliśmy oznaczenia:

$$(41)\quad \begin{cases} P = \varepsilon \dfrac{Dx'' + Ey''}{\mathfrak{a}x'' + \mathfrak{b}y''}, \\ Q = \varepsilon P^2 + F - \varphi(x'', y''). \end{cases}$$

Z równań (40) wynikają na x', y' wyrażenia następujące:

$$(42)\quad x' = \frac{\mathfrak{b}Q - 2EP}{2(\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}D)}, \quad y' = -\frac{\mathfrak{a}Q - 2DP}{2(\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}D)},$$

a jeżeli zwrócimy uwagę na to, że zachodzi równość:

$$\Delta = -\varepsilon(\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}D)^2,$$

to będziemy mogli wyrażenia (42) inaczej napisać w formie:

$$x' = -\frac{\varepsilon\mathfrak{b}(\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}D)}{2\Delta}Q + \frac{\varepsilon E(\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}D)}{\Delta}P,$$

$$y' = \frac{\varepsilon\mathfrak{a}(\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}D)}{2\Delta}Q - \frac{\varepsilon D(\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}D)}{\Delta}P.$$

Ale zachodzą równości:

$$\varepsilon\mathfrak{a}(\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}D) = AE - BD = -k',$$

$$\varepsilon\mathfrak{b}(\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}D) = BE - CD = k''$$

i wynikająca z nich równość:

$$(43) \qquad (\mathfrak{a}\, x'' + \mathfrak{b}\, y'')(\mathfrak{a}\, E - \mathfrak{b}\, D) = -\varepsilon (k' x'' - k'' y''),$$

z pomocą której otrzymamy łatwo równość:

$$\varepsilon (\mathfrak{a}\, E - \mathfrak{b}\, D) P = -\frac{(D x'' + E y'')(k' x'' - k'' y'')}{\varphi (x'', y'')}.$$

Na podstawie tych równości dochodzimy do wzorów:

$$x' = -\frac{k'' Q}{2\Delta} - \frac{E (D x'' + E y'')(k' x'' - k'' y'')}{\varphi (x'', y'')\, \Delta},$$

$$y' = -\frac{k' Q}{2\Delta} + \frac{D (D x'' + E y'')(k' x'' - k'' y'')}{\varphi (x'', y'')\, \Delta}.$$

Jeżeli zaś zwrócimy uwagę na to, że:

$$P^2 = \frac{(D x'' + E y'')^2}{\varepsilon \varphi (x'', y'')},$$

to mieć będziemy dla Q wyrażenie:

$$Q = F - \varphi (x'', y'') + \frac{(D x'' + E y'')^2}{\varphi (x'', y'')},$$

na podstawie którego wynikną na x', y' wzory:

$$x' = \frac{k''}{2\Delta} [\varphi (x'', y'') - F] -$$

$$- \frac{D x'' + E y''}{2 \varphi (x'', y'')\, \Delta} [k'' (D x'' + E y'') + 2 E (k' x'' - k'' y'')],$$

$$y' = \frac{k'}{2\Delta} [\varphi (x'', y'') - F] -$$

$$- \frac{D x'' + E y''}{2 \varphi (x'', y'')\, \Delta} [k' (D x'' + E y'') - 2 D (k' x'' - k'' y'')].$$

Jeżeli zaś uwzględnimy równość:

$$\Delta = E k' + D k'',$$

to wzory te można będzie napisać w formie:

$$(44)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{k''}{2\Delta}[\varphi(x'', y'') - F] - \\ \qquad - \dfrac{D x'' + E y''}{2\varphi(x'', y'')\Delta}[\Delta x'' + E(k' x'' - k'' y'')], \\ y' = \dfrac{k'}{2\Delta}[\varphi(x'', y'') - F] - \\ \qquad - \dfrac{D x'' + E y''}{2\varphi(x'', y'')\Delta}[\Delta y'' - D(k' x'' - k'' y'')]. \end{cases}$$

Zwrócimy się teraz do wyprowadzenia pewnych różniczkowych własności pary funkcyj x', y', określonych wzorami (38). Stosować będziemy przytem krótsze oznaczenie:

$$\varphi = \varphi(x'', y''),$$

a więc na σ mieć będziemy wzór:

$$(45)\quad \sigma = \zeta \sqrt{\left|\frac{\varphi\delta - \Delta}{\varphi}\right|}.$$

Wyłączamy tutaj te układy wartości zmiennych x'', y'', przy których bądź licznik bądź mianownik wyrażenia, stojącego pod pierwiastkiem we wzorze (45), równa się zeru. Jeżeli uwzględnimy wzory:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x''} = 2(A x'' + B y''), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y''} = 2(B x'' + C y''),$$

to przez różniczkowanie wzorów (38) otrzymamy:

$$\frac{\partial x'}{\partial x''} = \frac{B\sigma}{\delta} + \frac{2}{\delta}(A x'' + B y'')(B x'' + C y'')\frac{d\sigma}{d\varphi},$$

$$\frac{\partial x'}{\partial y''} = \frac{C\sigma}{\delta} + \frac{2}{\delta}(B x'' + C y'')^2\frac{d\sigma}{d\varphi},$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x''} = -\frac{A\sigma}{\delta} - \frac{2}{\delta}(A x'' + B y'')^2\frac{d\sigma}{d\varphi},$$

$$\frac{\partial y'}{\partial y''} = -\frac{B\sigma}{\delta} - \frac{2}{\delta}(A x'' + B y'')(B x'' + C y'')\frac{d\sigma}{d\varphi}.$$

Z tych wzorów wynika związek:

$$\frac{\partial x'}{\partial x''}+\frac{\partial y'}{\partial y''}=0. \tag{46}$$

Następnie łatwo otrzymać z nich związek:

$$\frac{\partial x'}{\partial x''}\frac{\partial y'}{\partial y''}-\frac{\partial x'}{\partial y''}\frac{\partial y'}{\partial x''}=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\delta}+2\,\frac{\sigma\dfrac{d\sigma}{d\varphi}}{\delta^2}\,[C(Ax''+By'')^2+A(Bx''+Cy'')^2-$$

$$-2B(Ax''+By'')(Bx''+Cy'')],$$

który przez wykonanie działań w nawiasie można doprowadzić do postaci:

$$\frac{\partial x'}{\partial x''}\frac{\partial y'}{\partial y''}-\frac{\partial x'}{\partial y''}\frac{\partial y'}{\partial x''}=\frac{\sigma^2}{\delta}+2\,\frac{\varphi\sigma\dfrac{d\sigma}{d\varphi}}{\delta}.$$

Ponieważ zaś przez różniczkowanie wzoru (45) otrzymuje się równość:

$$2\sigma\frac{d\sigma}{d\varphi}=\frac{\Delta}{\varphi^2},$$

przeto dochodzimy do wyniku:

$$\frac{\partial x'}{\partial x''}\frac{\partial y'}{\partial y''}-\frac{\partial x'}{\partial y''}\frac{\partial y'}{\partial x''}=1. \tag{47}$$

Analogiczne rachunki możemy wykonać także w przypadku $\delta=0$. Przez różniczkowanie równości (42) otrzymujemy:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial x'}{\partial x''}=\dfrac{\mathfrak{b}\dfrac{\partial Q}{\partial x''}-2E\dfrac{\partial P}{\partial x''}}{2(\mathfrak{a}E-\mathfrak{b}D)},\quad \dfrac{\partial x'}{\partial y''}=\dfrac{\mathfrak{b}\dfrac{\partial Q}{\partial y''}-2E\dfrac{\partial P}{\partial y''}}{2(\mathfrak{a}E-\mathfrak{b}D)}, \\ \dfrac{\partial y'}{\partial x''}=-\dfrac{\mathfrak{a}\dfrac{\partial Q}{\partial x''}-2D\dfrac{\partial P}{\partial x''}}{2(\mathfrak{a}E-\mathfrak{b}D)},\quad \dfrac{\partial y'}{\partial y''}=-\dfrac{\mathfrak{a}\dfrac{\partial Q}{\partial y''}-2D\dfrac{\partial P}{\partial y''}}{2(\mathfrak{a}E-\mathfrak{b}D)}, \end{array}\right. \tag{48}$$

a przez różniczkowanie równości (41) dochodzimy do wzorów:

$$(49)\qquad \frac{\partial P}{\partial x''} = -\frac{(\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}D)y''}{\varphi},\quad \frac{\partial P}{\partial y''} = \frac{(\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}D)x''}{\varphi},$$

oraz do wzorów:

$$(50)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x''} = -2\varepsilon\dfrac{(\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}D)Py''}{\varphi} - 2\varepsilon\mathfrak{a}(\mathfrak{a}x'' + \mathfrak{b}y''), \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y''} = 2\varepsilon\dfrac{(\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}D)Px''}{\varphi} - 2\varepsilon\mathfrak{b}(\mathfrak{a}x'' + \mathfrak{b}y''). \end{cases}$$

Zauważmy naprzód, że zachodzą równości:

$$-2E\frac{\partial P}{\partial x''} + 2D\frac{\partial P}{\partial y''} = 2\frac{(\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}D)(Dx'' + Ey'')}{\varphi},$$

$$\mathfrak{b}\frac{\partial Q}{\partial x''} - \mathfrak{a}\frac{\partial Q}{\partial y''} = -2\frac{(\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}D)(Dx'' + Ey'')}{\varphi},$$

z których wynika r ó w n o ś ć:

$$(51)\qquad \frac{\partial x'}{\partial x''} + \frac{\partial y'}{\partial y''} = 0.$$

Zauważmy następnie, że wykonywając mnożenie wyznaczników:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b} \\ D, & E \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial x''}, & \dfrac{\partial Q}{\partial y''} \\ -2\dfrac{\partial P}{\partial x''}, & -2\dfrac{\partial P}{\partial y''} \end{vmatrix}$$

kolumnami, dochodzimy do wyniku:

$$4(\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}D)^2 \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial y'}{\partial x''}, & -\dfrac{\partial y'}{\partial y''} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial x''}, & \dfrac{\partial x'}{\partial y''} \end{vmatrix}$$

skąd otrzymuje się wzór:

$$\frac{\partial x'}{\partial x''}\frac{\partial y'}{\partial y''}-\frac{\partial x'}{\partial y''}\frac{\partial y'}{\partial x''}=\frac{\frac{\partial P}{\partial x''}\frac{\partial Q}{\partial y''}-\frac{\partial P}{\partial y''}\frac{\partial Q}{\partial x''}}{2(\mathfrak{a}E-\mathfrak{b}D)}.$$

Ponieważ zaś na podstawie wzorów (49) i (50) łatwo sprawdzić równość:

$$\frac{\partial P}{\partial x''}\frac{\partial Q}{\partial y''}-\frac{\partial P}{\partial y''}\frac{\partial Q}{\partial x''}=2(\mathfrak{a}E-\mathfrak{b}D),$$

przeto dochodzimy do r ó w n o ś c i:

$$\frac{\partial x'}{\partial x''}\frac{\partial y'}{\partial y''}-\frac{\partial x'}{\partial y''}\frac{\partial y'}{\partial x''}=1. \tag{52}$$

Para funkcyj x', y', określona wzorami (38), spełnia związki (46) i (47), a para funkcyj x', y', określona wzorami (44), spełnia związki (51) i (52), które są temi samemi związkami, co (46) i (47). Fakt, że w rozważanych tutaj rachunkach zachodzą w rozmaitych przypadkach te same związki, jest wynikiem okoliczności, że rzeczone związki są charakterystycznemi własnościami linij krzywych analitycznych wogóle. Ta sama uwaga stosuje się do związków (13) i (15). Nadto związki (13) i (15) z jednej strony, a związki (46) i (47), względnie (51) i (52), z drugiej strony mają tę własność, że przechodzą jedne w drugie przez przestawienie zmiennych x', x'' i jednoczesne przestawienie zmiennych y', y''. Fakt ten także jest ogólną własnością wszelkich krzywych analitycznych. Obecnie jednak zajmować się będziemy tylko rachunkami, odnoszącemi się do krzywych stopnia drugiego, a dopiero w dalszych częściach tych wykładów rozważać będziemy te związki w zastosowaniu do krzywych analitycznych wogóle. Przypominamy przytem, że własności takie konstatowaliśmy dla pewnych tworów już w tomie I tych wykładów, a mianowicie w § 55 tomu I dla linij prostych o urojonych dwukierunkach, a w § 72 tomu I dla kół zespolonych.

Ze związku (46), względnie (51), wynika, że zarówno przy założeniu $\delta \neq 0$, jak przy założeniu $\delta = 0$, istnieją takie funkcje V zmiennych x'', y'', zapomocą których można wyrażenia (38), względnie wyrażenia (44), przedstawić w postaci:

(53) $$x' = \frac{\partial V}{\partial y''}, \quad y' = -\frac{\partial V}{\partial x''}.$$

Ze związków (47), względnie (52), wnosimy, że funkcje te we wszystkich uważanych tutaj przypadkach spełniają równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych:

(54) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x''^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x''\,\partial y''}\right)^2 = 1.$$

Zauważmy, że równania (53) można zastąpić jednem równaniem:

(55) $$d V = x'\,d y'' - y'\,d x''.$$

Porównywając wzory (53), (54) i (55) z wzorami (16), (17) i (18) można łatwo skonstatować analogje pomiędzy temi wzorami zachodzące. Na tem nie będziemy zatrzymywać się, a zauważymy, że przy obranem tutaj formułowaniu naszych rachunków, dla każdej z uważanych krzywych zachodzi związek:

(56) $$d U + d V = d(x' y'' - y' x'').$$

Związki (16), (17), (18) oraz (53), (54), (55), (56) są prawdziwe dla krzywych analitycznych wogóle.

Zajmiemy się teraz wyznaczeniem funkcji V zmiennych x'', y'', która spełnia równanie (55), gdzie x', y' określone są wzorami (38). Łatwo dostrzec, że równanie (55) można wtedy napisać w postaci:

(57) $$d V = -\frac{k'\,d x'' - k''\,d y''}{\delta} + \frac{\sigma}{2\delta} d\varphi$$

i że z równania tego wynikają funkcje V określone wzorem:

$$V = -\frac{k' x'' - k'' y''}{\delta} + \frac{1}{2\delta}\int \sigma\, d\varphi,$$

albo inaczej wzorem:

(58) $$V = -\frac{k' x'' - k'' y''}{\delta} + \frac{\zeta}{2\delta}\int \sqrt{\frac{\varphi\,\delta - \Delta}{\varphi}}\, d\varphi,$$

w których zachodzi całka nieokreślona, zawierająca stałą dowolną. Obliczenie tej całki można wykonać analogicznie do obliczenia całek, które zachodziły w paragrafie poprzednim.

Przyjmijmy oznaczenie:

$$W=\frac{\zeta}{2\delta}\int\sqrt{\left|\frac{\varphi\delta-\Delta}{\varphi}\right|}\,d\varphi \tag{59}$$

i załóżmy naprzód, że $\delta>0$. Wtedy można tę całkę napisać w postaci:

$$W=\frac{\zeta}{2\sqrt{\delta}}\int\sqrt{\left|\frac{\frac{\varphi\delta}{\Delta}-1}{\frac{\varphi\delta}{\Delta}}\right|}\,d\varphi,$$

a wprowadzając nową zmienną:

$$z=1-\frac{\varphi\delta}{\Delta}, \tag{60}$$

w postaci:

$$W=-\frac{\zeta\Delta}{2\sqrt{\delta^3}}\int\sqrt{\left|\frac{z}{z-1}\right|}\,dz. \tag{61}$$

Można następnie, tak samo jak w poprzednim paragrafie, zastosować oznaczenie (22) i wzór (23). Tą drogą dojdziemy do wzoru:

$$W=-\frac{\zeta\Delta}{2\sqrt{\delta^3}}\left\{-\frac{\varphi\delta}{\Delta}g+\frac{1}{2}\log\left(-\frac{\nu\varphi\delta}{\Delta}\right)+\right. \tag{62}$$

$$\left.+\log(1+g)\right\}+\text{const.},$$

w którym przez g oznaczona jest wielkość:

$$g=\sqrt{\left|\frac{\varphi\delta-\Delta}{\varphi\delta}\right|},$$

a $\nu=\pm 1$, zależnie od tego, czy wspólny znak wielkości $1-\frac{\varphi\delta}{\Delta}$ i $-\frac{\varphi\delta}{\Delta}$ jest dodatni, czy też ujemny. Na podstawie wzorów (58), (59) i (62) dochodzimy do wzoru na funkcję V:

$$(63)\qquad V = -\frac{k'x'' - k''y''}{\delta} -$$

$$-\frac{\zeta\Delta}{2\sqrt{\delta^3}}\left\{-\frac{\varphi\delta}{\Delta}g + \frac{1}{2}\log\left(-\frac{\nu\varphi\delta}{\Delta}\right) + \log(1+g)\right\} + \text{const.}$$

Niech będzie teraz $\delta < 0$. Wtedy wielkość W, określoną wzorem (59), można przedstawić w postaci:

$$W = -\frac{\zeta}{2\sqrt{-\delta}}\int\sqrt{\frac{\frac{\varphi\delta}{\Delta} - 1}{-\frac{\varphi\delta}{\Delta}}}\,d\varphi,$$

a więc, wprowadzając nową zmienną na podstawie wzoru (60), mieć będziemy:

$$(64)\qquad W = \frac{\zeta\Delta}{2\delta\sqrt{-\delta}}\int\sqrt{\frac{z}{1-z}}\,dz.$$

Jeżeli tak samo, jak w poprzednim paragrafie, przyjmiemy oznaczenie (26), to będziemy mieć wzór (27) i na podstawie równości (64) otrzymamy równość:

$$(65)\quad W = \frac{\zeta\Delta}{2\sqrt{-\delta^3}}\left\{\frac{\varphi\delta}{\Delta}h - \frac{1}{2}\arcsin\left(1 - 2\frac{\varphi\delta}{\Delta}\right)\right\} + \text{const.},$$

gdzie przez h oznaczona jest wielkość:

$$h = \sqrt{\frac{\Delta - \varphi\delta}{\varphi\delta}}.$$

Na podstawie wzorów (58), (59) i (65) dochodzimy do wzoru na funkcję V:

$$(66)\qquad V = -\frac{k'x'' - k''y''}{\delta} +$$

$$+\frac{\zeta\Delta}{2\sqrt{-\delta^3}}\left\{\frac{\varphi\delta}{\Delta}h - \frac{1}{2}\arcsin\left(1 - 2\frac{\varphi\delta}{\Delta}\right)\right\} + \text{const.}$$

Zajmiemy się teraz obliczeniem funkcji V przy założeniu $\delta = 0$. Na podstawie wzorów (42) i (55) mamy:

$$(67) \qquad dV = \frac{1}{2(\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}D)} \{Q(\mathfrak{a}\,dx'' + \mathfrak{b}\,dy'') - 2P(D\,dx'' + E\,dy'')\},$$

a jeżeli zastosujemy oznaczenia:

$$u = \mathfrak{a}x'' + \mathfrak{b}y'', \quad v = Dx'' + Ey'',$$

to, korzystając ze wzorów (41), mieć będziemy:

$$P = \varepsilon\frac{v}{u}, \quad Q = \varepsilon\frac{v^2}{u^2} + F - \varepsilon u^2$$

i różniczkę dV można będzie przedstawić w postaci:

$$dV = \frac{1}{2(\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}D)}\left\{(F - \varepsilon u^2)\,du + \varepsilon\left(\frac{v^2}{u^2}\,du - 2\frac{v}{u}\,dv\right)\right\}.$$

Przez całkowanie otrzymujemy:

$$V = \frac{1}{2(\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}D)}\left(Fu - \frac{\varepsilon}{3}u^3 - \varepsilon\frac{v^2}{u}\right) + \text{const.},$$

albo też:

$$V = \frac{1}{2\varepsilon(\mathfrak{a}E - \mathfrak{b}D)u}\left(\varepsilon Fu^2 - \frac{u^4}{3} - v^2\right) + \text{const.},$$

a mając na uwadze przyjęte tutaj oznaczenia oraz wzór (43), będziemy mogli otrzymany rezultat przedstawić w postaci:

$$(68) \qquad V = \frac{1}{2(k'x'' - k''y'')}\left\{\frac{1}{3}[\varphi(x'', y'')]^2 - F\varphi(x'', y'') + (Dx'' + Ey'')^2\right\} + \text{const}.$$

Można przez różniczkowanie tej funkcji otrzymać wyrażenia (44) i wykonanie tych działań byłoby poniekąd sprawdzeniem, że w odnośnych rachunkach niema błędów.

§ 52. Geometryczne znaczenie przekształceń, określających punkty zespolone istotnych krzywych stopnia drugiego.

W § 50 wyprowadziliśmy z równania istotnej krzywej stopnia drugiego związki (10), określające przekształcenie zmiennych x', y' na zmienne x'', y'', a w § 51 związki (36) i (44), określające w różnych przypadkach przekształcenie odwrotne. Przekształcenia te charakteryzują analitycznie zbiór punktów zespolonych istotnej krzywej stopnia drugiego. Łącznie z rzeczonem wyprowadzeniem wykonaliśmy szereg rachunków, zapomocą których przedstawiliśmy te przekształcenia w rozmaitych postaciach. W paragrafie niniejszym zajmiemy się geometryczną interpretacją tych przekształceń. Przypominamy przytem, że rzeczone wzory i rachunki podlegają pewnym ograniczeniom. W celu ułatwienia rozważań, dotyczących geometrycznej interpretacji, zajmiemy się naprzód znaczeniem rzeczonych ograniczeń.

Zbiór właściwych punktów linji krzywej stopnia drugiego, określa się wszystkiemi możliwemi skończonemi rzeczywistemi wartościami zmiennych x', y', x'', y'', czyniącemi zadość równaniom (5), które napiszemy w postaci:

$$(69)\quad \begin{cases} f(x', y') - \varphi(x'', y'') = 0, \\ (A x' + B y' + D) x'' + (B x' + C y' + E) y'' = 0. \end{cases}$$

Ograniczenia, o których mówiliśmy, można sformułować w ten sposób, że niema zachodzić żadna z czterech równości:

$$(70)\quad \begin{cases} f(x', y') = 0, & \varphi(x'', y'') = 0, \\ f(x', y')\,\delta - \Delta = 0, & \varphi(x'', y'')\,\delta - \Delta = 0. \end{cases}$$

Istotnie, sformułowanie to obejmuje wszystkie ograniczenia rachunków §§ 50 i 51, bo gdyby wielkości x', y' były spółrzędnemi środka krzywej, to spełnioną byłaby pierwsza z równości drugiego wiersza wzorów (70), a gdyby wielkości x'', y'' były obie jednocześnie zerami, to spełnioną byłaby druga z równości pierwszego wiersza wzorów (70). Na podstawie pierwszego z równań (69) wnosimy, że równości pierwszego wiersza wzorów (70) zachodzą jednocześnie. Jeżeli spełnione są te równości, to równaniom (69) może

stać się zadość tylko w ten sposób, że $x''=0$, $y''=0$, a x', y' jest rzeczywistym punktem krzywej stopnia drugiego $f(x', y')=0$. Istotnie, jeżeliby wielkości x'', y'' nie były obie jednocześnie zerami, to dwukierunek $y'':x''$ byłby dwukierunkiem asymptotycznym, a drugie z równań (69) określałoby w spółrzędnych x', y' asymptotę, nie mającą z linją krzywą $f(x', y')=0$ żadnych właściwych punktów wspólnych. Dalej zauważymy, że żadna z równości drugiego wiersza związków (70) widocznie nie jest spełniona w przypadku paraboli. W przypadkach istotnych krzywych stopnia drugiego ze środkiem, równości drugiego wiersza wzorów (70) zachodzić mogą na podstawie pierwszego z równań (69) tylko obie jednocześnie. Ale pierwsza z równości drugiego wiersza wzorów (70) określa asymptoty krzywej, a z drugiej wynika, że wielkości x'', y'' nie są obie jednocześnie zerami i że dwukierunek $y'':x''$ nie jest asymptotyczny. Zatem drugie z równań (69) określa wtedy w spółrzędnych x', y' średnicę sprzężoną z dwukierunkiem nieasymptotycznym, a stąd wynika, że pierwsze z równań drugiego wiersza wzorów (70) i drugie z równań (69) spełnione być mogą jednocześnie tylko dla środka danej krzywej stopnia drugiego. Widzimy więc, że jeżeli spełnione są równości drugiego wiersza związków (70), to równaniom (69) stać się może zadość tylko w ten sposób, że wielkości x', y' są spółrzędnemi środka danej linji krzywej, a wielkości x'', y'' są spółrzędnemi rzeczywistego punktu linji krzywej, określonej drugiem z równań drugiego wiersza wzorów (70).

Po tych uwagach zwrócimy się do rozważenia geometrycznej interpretacji równań §§ 50 i 51 w rozmaitych przypadkach.

Założymy naprzód, że $\delta > 0$, t.j. że krzywa jest rodzaju elips, i zwrócimy uwagę na to, że wtedy wyrażenie:

$$f(x', y')\,\delta - \Delta$$

jest różne od zera i tego samego znaku dla każdego rzeczywistego punktu x', y', różnego od środka krzywej, a jest zerem dla punktu x', y', będącego środkiem krzywej. Rozważymy osobno dwa przypadki. Jeżeli ξ, η oznaczają wielkości rzeczywiste, nie będące jednocześnie zerami, to warunek, aby istotna krzywa rodzaju elips była rzeczywistą, można sformułować zapomocą nierówności:

$$\frac{\varphi(\xi, \eta)}{\Delta} < 0, \tag{71}$$

warunek zaś, aby była urojoną, zapomocą nierówności:

$$\frac{\varphi(\xi, \eta)}{\Delta} > 0. \tag{72}$$

Łatwo dostrzec, że w pierwszym z tych przypadków dla każdej pary wielkości rzeczywistych x'', y'', nie będących jednocześnie zerami, wyrażenie, znajdujące się pod pierwiastkiem w równaniach (36), jest dodatnie i że na mocy tych równań każdej parze rzeczonych wielkości x'', y'' odpowiadają dwie pary wielkości rzeczywistych x', y'. W tymże pierwszym przypadku wielkościom x', y', spełniającym równanie: $f(x', y') = 0$, odpowia-

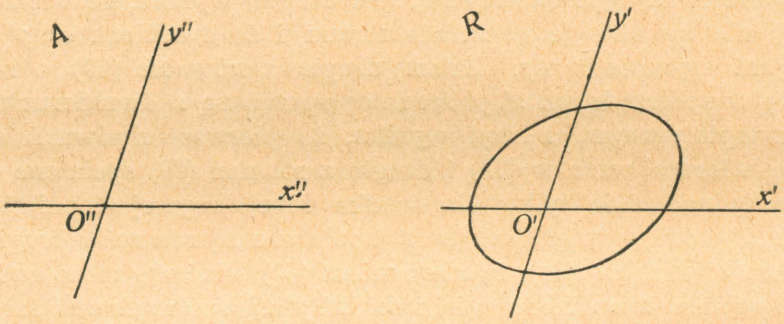

Fig. 83.

dają wartości $x'' = 0$, $y'' = 0$, a wyrażenie, znajdujące się w równaniach (10) pod pierwiastkiem, jest dodatnie, gdy spełniona jest nierówność:

$$\frac{f(x', y')}{\Delta} < 0,$$

t.j. gdy punkt x', y' jest zewnętrznym punktem rzeczywistej krzywej rodzaju elips. Wyniki te można zilustrować zapomocą figury 83. Na płaszczyźnie R rzeczonej figury leży elipsa rzeczywista. Każdemu punktowi x', y' położonemu na tej elipsie rzeczywistej odpowiada na płaszczyźnie A początek spółrzędnych O''. Każdemu punktowi płaszczyzny R, położonemu nazewnątrz rzeczonej elipsy, odpowiadają dwa punkty płaszczyzny A i nawzajem każdemu punktowi płaszczyzny A, różnemu od początku spółrzędnych, odpowiadają dwa punkty płaszczyzny R, leżące nazewnątrz uważanej elipsy. Punktom, położonym wewnątrz tej elipsy,

nie odpowiadają na płaszczyźnie A żadne punkty rzeczywiste. Dlatego też zbiór punktów, znajdujących się wewnątrz elipsy płaszczyzny R, nazwiemy o b s z a r e m p u s t y m.

Przechodząc do przypadku, określonego nierównością (72), zauważamy, że w tym przypadku równanie:

$$\varphi(x'', y'') - \frac{\Delta}{\delta} = 0 \tag{73}$$

określa elipsę rzeczywistą i że jej punktom rzeczywistym odpowiada środek danej krzywej stopnia drugiego. Jeżeli spełniona jest nierówność:

$$\frac{\varphi(x'', y'')}{\Delta} - \frac{1}{\delta} > 0,$$

t.j. jeżeli punkt x'', y'' jest zewnętrznym punktem elipsy, określonej równaniem (73), to z równań (36) wynikają dwie pary rzeczywistych wartości wielkości x', y'. Jeżeli wreszcie spełniona jest nierówność:

$$\frac{\varphi(x'', y'')}{\Delta} - \frac{1}{\delta} < 0,$$

t.j. punkt x'', y'' jest wewnętrznym punktem elipsy (73), to ze wzorów (36) wynikają na x', y' wartości urojone. Z drugiej strony łatwo dostrzec, że wielkość, znajdująca się pod pierwiastkiem w równaniach (10), ma skończoną wartość dodatnią przy wszelkich rzeczywistych wartościach wielkości x', y', nie będących spółrzędnemi środka danej linji krzywej, że więc wartościom tym odpowiadają dwie pary rzeczywistych wartości wielkości x'', y''. Wyniki te można zilustrować zapomocą figury 84. Na płaszczyźnie R naznaczony jest punkt S, będący środkiem danej krzywej urojonej, a na płaszczyźnie A narysowana jest elipsa (73). Każdemu punktowi x'', y'', położonemu na tej elipsie, odpowiada punkt S. Każdemu punktowi x'', y'', leżącemu nazewnątrz rzeczonej elipsy, odpowiadają dwa, różne od siebie i różne od środka S, punkty płaszczyzny R i nawzajem każdemu punktowi płaszczyzny R, różnemu od punktu S, odpowiadają na płaszczyźnie A dwa punkty, leżące nazewnątrz rzeczonej elipsy. Punktom wewnętrznym tej elipsy nie odpowiadają na płaszczyźnie R żadne punkty rzeczywiste. Dlatego też zbiór punktów, leżących wewnątrz tej elipsy, nazwiemy o b s z a r e m p u s t y m.

Przypuśćmy teraz, że $\delta < 0$, t.j., że dana krzywa stopnia drugiego jest h i p e r b o l ą. Jeżeli spełniona jest nierówność:

$$\frac{f(x', y')}{\Delta} > 0,$$

to punkt x', y' jest wewnętrznym punktem hiperboli. Wtedy wielkość, stojąca pod pierwiastkiem kwadratowym wzorów (10), ma wartość

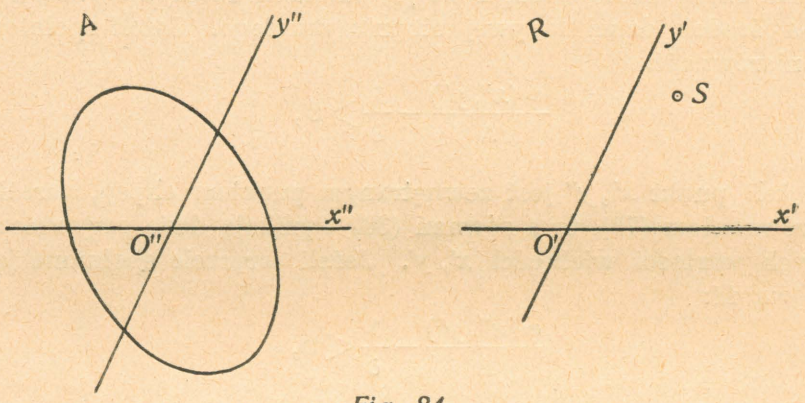

Fig. 84.

ujemną, a więc ze wzorów tych wynikają urojone wartości na x'', y''. Gdy natomiast spełniona jest nierówność:

$$\frac{f(x', y')}{\Delta} < 0,$$

wówczas punkt x', y' jest zewnętrznym punktem hiperboli. Jeżeli wtedy spełniona jest nierówność:

$$\frac{f(x', y')}{\Delta}\,\delta - 1 < 0,$$

to punkt zewnętrzny x', y' leży wewnątrz tych samych kątów wierzchołkowych pomiędzy asymptotami, co gałęzie hiperboli, i dla każdego punktu tego obszaru wzory (10) określają dwie pary rzeczywistych wartości na x'', y''. Jeżeli zaś punkt x', y' jest zewnętrznym punktem hiperboli, dla którego spełniona jest nierówność:

$$\frac{f(x', y')}{\Delta}\,\delta - 1 > 0,$$

a więc punktem, położonym wewnątrz dwóch innych kątów wierzchołkowych pomiędzy asymptotami, to wzory (10) określają dla tego punktu urojone wartości na x'', y''. Przypadki, w których bądź licznik, bądź mianownik ilorazu stojącego pod pierwiastkiem wzorów (10) jest zerem, rozważyliśmy już na początku tego paragrafu. Zwracając się teraz do wzorów (36), zauważymy naprzód, że równanie:

$$\varphi(x'', y'') - \frac{\Delta}{\delta} = 0 \tag{74}$$

określa hiperbolę, sprzężoną z hiperbolą:

$$\varphi(x'', y'') + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \tag{75}$$

która otrzymuje się przez przesunięcie danej hiperboli. Jeżelibyśmy mianowicie daną hiperbolę tak przesunęli w płaszczyźnie RA, żeby jej środek zeszedł się z początkiem spółrzędnych, to otrzymalibyśmy hiperbolę (75). Punkt x'', y'' jest wewnętrznym punktem hiperboli (74) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest nierówność:

$$\frac{\varphi(x'', y'')}{\Delta}\,\delta - 1 > 0.$$

Ponieważ stąd wynika nierówność:

$$\frac{\varphi(x'', y'')}{\Delta} < \frac{1}{\delta},$$

więc na podstawie tych nierówności dochodzimy do wniosku, że dla wewnętrznych punktów x'', y'' hiperboli (74) wielkość stojąca pod pierwiastkiem w równaniach (36) jest ujemna, t.j. że wtedy z tych równań otrzymują się na spółrzędne x', y' wartości urojone. Warunek, aby punkt x'', y'' był zewnętrznym punktem hiperboli (74), polega na spełnieniu nierówności:

$$\frac{\varphi(x'', y'')}{\Delta}\,\delta - 1 < 0.$$

Jeżeli przytem spełniona jest nierówność:

$$\frac{\varphi(x'', y'')}{\Delta} < 0,$$

to x'', y'' jest zewnętrznym punktem hiperboli (74), położonym wewnątrz tych samych kątów wierzchołkowych pomiędzy asymp-

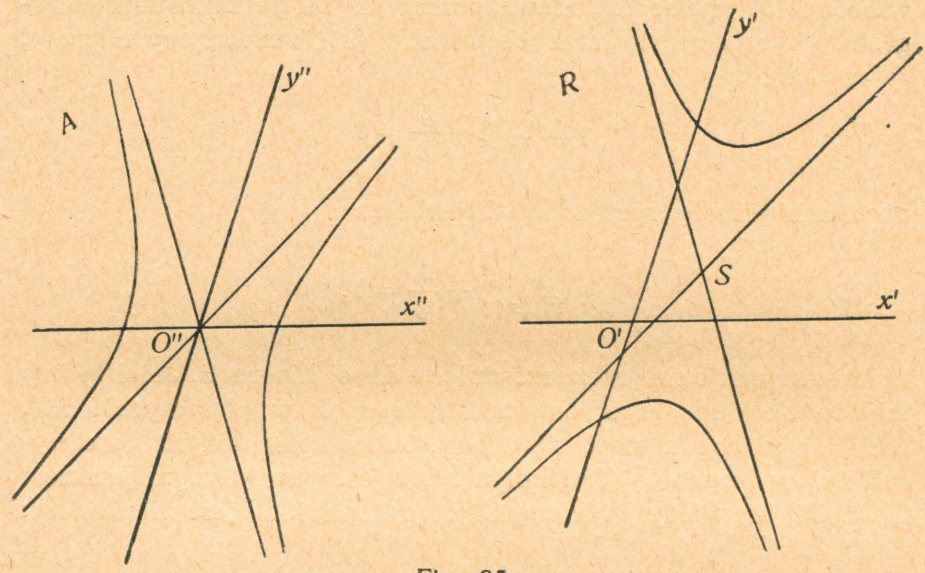

Fig. 85.

totami, co gałęzie hiperboli i wówczas wzory (36) określają na x', y' dwie pary wartości rzeczywistych. Jeżeli zaś spełniona jest nierówność:

$$\frac{\varphi(x'', y'')}{\Delta} > 0,$$

to x'', y'' jest zewnętrznym punktem hiperboli (74), znajdującym się wewnątrz drugiej pary kątów wierzchołkowych pomiędzy asymptotami, i wtedy ze wzorów (36) wynikają na wielkości x', y' wartości urojone. O przypadkach, w których bądź licznik, bądź mianownik wyrażenia, znajdującego się pod pierwiastkiem wzorów (36), równa się zeru, była już mowa na początku tego paragrafu. Wyniki przeprowadzonych rozważań zilustrowane są na fig. 85. Na płaszczyźnie R narysowana jest dana hiperbola i jej asymptoty, spotykające się w jej środku S. Na płaszczyźnie A narysowana

jest wraz z odnośnemi asymptotami hiperbola sprzężona z hiperbolą, otrzymującą się przez takie przesunięcie danej hiperboli w płaszczyźnie RA, że środek S schodzi się z początkiem spółrzędnych. Z przeprowadzonych powyżej rozważań wynika, że odpowiedniość zachodząca pomiędzy punktami płaszczyzn R i A ma własności następujące. Punktowi O'' płaszczyzny A odpowiadają wszystkie punkty hiperboli płaszczyzny R. Punktowi S płaszczyzny R odpowiadają wszystkie punkty hiperboli płaszczyzny A. Obszar zewnętrznych punktów hiperboli płaszczyzny R, zawartych w tych samych kątach wierzchołkowych pomiędzy asymptotami, co gałęzie hiperboli płaszczyzny R, i obszar zewnętrznych punktów

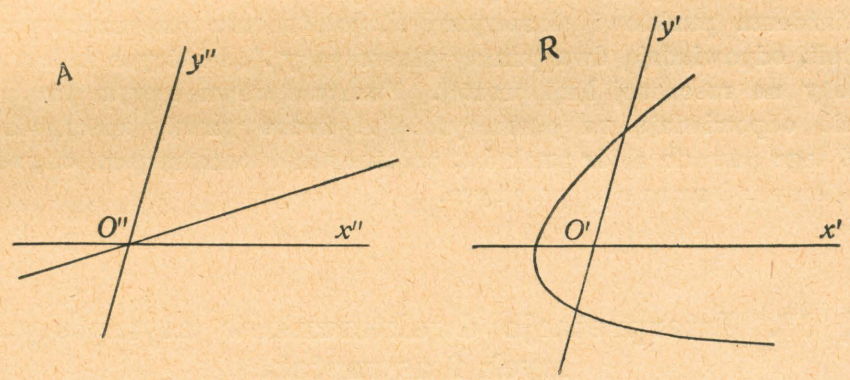

Fig. 86.

hiperboli płaszczyzny A, zawartych w tych samych kątach wierzchołkowych pomiędzy asymptotami, co gałęzie hiperboli płaszczyzny A, znajdują się w takiej wzajemnej odpowiedniości, że każdemu punktowi pierwszego z tych obszarów odpowiadają dwa punkty drugiego z nich i każdemu punktowi drugiego z tych obszarów odpowiadają dwa punkty pierwszego z nich. Punktom wszystkich innych obszarów na każdej z płaszczyzn R i A nie odpowiadają na drugiej z tych płaszczyzn żadne punkty rzeczywiste. Dlatego też obszary te nazwiemy obszarami pustemi.

Załóżmy wreszcie, że dana linja krzywa jest parabolą. Jeżeli punkt x', y' jest zewnętrznym punktem paraboli, to ze wzorów (10) wynikają na wielkości x'', y'' dwie pary wartości rzeczywistych. Jeżeli punkt x', y' jest wewnętrznym punktem paraboli, to z tychże wzorów (10) wynikają na x'', y'' wartości urojone. Je-

żeli x'', y'' są spółrzędnemi punktu, który nie leży na prostej, mającej dwukierunek asymptotyczny i przechodzącej przez początek spółrzędnych, to ze wzorów (44) wynika jedna para skończonych wartości na spółrzędne x', y'. Na podstawie tych uwag i rozważań podanych na początku tego paragrafu możemy zbiór punktów zespolonych paraboli zilustrować zapomocą figury 86. Na płaszczyźnie R narysowana jest parabola, a na płaszczyźnie A linja prosta, przechodząca przez początek spółrzędnych i mająca dwukierunek asymptotyczny tejże paraboli, narysowanej na płaszczyźnie RA. Początkowi spółrzędnych płaszczyzny A odpowiadają na płaszczyźnie R wszystkie punkty paraboli. Każdemu punktowi płaszczyzny A, nie leżącemu na rzeczonej linji prostej, odpowiada jeden właściwy zewnętrzny punkt paraboli na płaszczyźnie R. Każdemu punktowi płaszczyzny R, położonemu nazewnątrz paraboli, odpowiadają dwa punkty płaszczyzny A, z których żaden nie leży na rzeczonej linji prostej. Punktom wewnętrznym paraboli nie odpowiadają na płaszczyźnie A żadne punkty rzeczywiste. Z tego powodu zbiór punktów, położonych wewnątrz paraboli, nazwiemy o b s z a r e m p u s t y m.

§ 53. Interpretacje dwukierunków asymptotycznych i asymptot.

Spółczynnik $\mu : \lambda$ każdego d w u k i e r u n k u a s y m p t o t y c z n e g o krzywej stopnia drugiego spełnia równanie:

$$\varphi(\lambda, \mu) = A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 = 0. \tag{76}$$

Dwukierunki asymptotyczne każdej krzywej r o d z a j u k ó ł są dwukierunkami izotropowemi. Do każdego dwukierunku izotropowego należy nieskończenie wiele pseudokierunków i przytem do dwukierunku izotropowego górnego należą pseudokierunki górne, a do dwukierunku izotropowego dolnego pseudokierunki dolne. Boki węgła pseudokierunku mają oba tę samą długość i są do siebie prostopadłe. Przytem drugi bok węgła pseudokierunku górnego tworzy z pierwszym bokiem tego węgła kąt $+\frac{\pi}{2}$, a drugi bok węgła pseudokierunku dolnego tworzy z pierwszym bokiem

tego węgła kąt $-\frac{\pi}{2}$. Nawzajem każdy węgieł o takich własnościach należy do określonego pseudokierunku bądź górnego, bądź też dolnego.

Dwukierunki asymptotyczne każdej krzywej stopnia drugiego rodzaju elips, nie będącej krzywą rodzaju kół, są urojonemi nieizotropowemi sprzężonemi ze sobą dwukierunkami. Jeżeli spółczynniki kierunku asymptotycznego takiej linji krzywej oznaczymy przez λ, μ i jeżeli spółczynniki te napiszemy w postaci:

$$\lambda = \lambda' + i\lambda'', \quad \mu = \mu' + i\mu'', \tag{77}$$

gdzie $\lambda', \mu', \lambda'', \mu''$ są wielkościami rzeczywistemi, to te wielkości rzeczywiste będą spełniały równania:

$$\begin{cases} \Phi(\lambda', \mu') - \Phi(\lambda'', \mu'') = 1, \ \Phi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'') = 0, \\ \varphi(\lambda', \mu') - \varphi(\lambda'', \mu'') = 0, \ \varphi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'') = 0, \end{cases} \tag{78}$$

a przytem wielkości λ'', μ'' nie będą obie jednocześnie zerami. Porównywając równania (78) z równaniami (79) i (80), podanemi w § 58 tomu I, dostrzeżemy łatwo, że do równań (78) można zastosować rozważania tego paragrafu i dojść do wyników następujących. Jeżeli jeden z systemów wielkości $\lambda', \mu', \lambda'', \mu''$, czyniących zadość równaniom (78), oznaczymy odpowiednio literami $\lambda'_0, \mu'_0, \lambda''_0, \mu''_0$, to wszystkie systemy, czyniące zadość równaniom (78), będziemy mogli przedstawić zapomocą tabelki:

$$\begin{cases} \lambda'_0, \mu'_0, \lambda''_0, \mu''_0; \ -\lambda'_0, -\mu'_0, -\lambda''_0, -\mu''_0, \\ \lambda'_0, \mu'_0, -\lambda''_0, -\mu''_0; \ -\lambda'_0, -\mu'_0, \lambda''_0, \mu''_0. \end{cases} \tag{79}$$

Widoczne, że system $\lambda'_0, \mu'_0, \lambda''_0, \mu''_0$ można zawsze wybrać w taki sposób, żeby było:

$$\Psi(\lambda'_0, \mu'_0; \lambda''_0, \mu''_0) > 0.$$

Wtedy pierwszy system pierwszego wiersza tabelki (79) określać będzie boki węgła jednego z kierunków asymptotycznych górnych, drugi system pierwszego wiersza boki węgła kierunku asymptotycznego górnego przeciwnego z poprzednim, pierwszy system drugiego wiersza boki węgła kierunku asymptotycznego dolnego, sprzężonego z pierwszym z powyższych kierunków, wreszcie drugi

system drugiego wiersza boki węgła kierunku sprzężonego z drugim z rzeczonych kierunków. Położenie tych węgłów na płaszczyźnie RA można przedstawić rysunkiem podanym na fig. 87, przyczem liczby 1, 2, 3, 4 odnoszą się do czterech rzeczonych węgłów w takiej kolei, jak one zostały powyżej wymienione, a strzałki prowadzą od pierwszych boków do drugich boków tych węgłów. Jeżeli połączymy prostolinjowemi odcinkami końce boków każdego z tych węgłów, to otrzymamy na figurze romb, dla którego przyjmiemy nazwę rombu dwukierunków asymptotycznych krzywej rodzaju elips, nie należącej do rodzaju

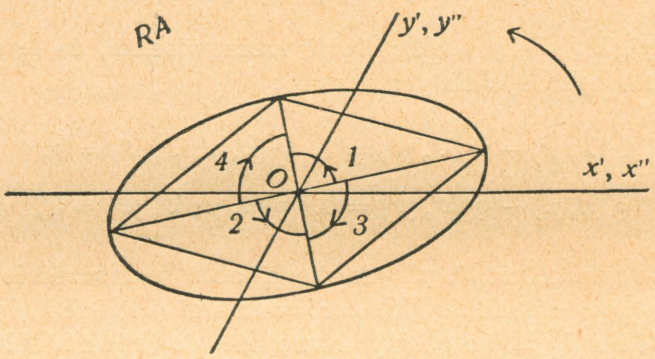

Fig. 87.

kół. Zauważymy przytem, że rombowi temu odpowiadałoby w przypadku krzywej rodzaju kół nieskończenie wiele kwadratów.

Można łatwo podać wzory na kwadraty długości boków węgłów figury 87. W § 24 mieliśmy równanie (51):

$$\sin^2\vartheta\, S^2 - \omega\, S + \delta = 0, \tag{80}$$

którego pierwiastki S_1 i S_2 określają się wzorami:

$$S_1 = \frac{\omega - \zeta\,\Omega}{2\sin^2\vartheta}, \quad S_2 = \frac{\omega + \zeta\,\Omega}{2\sin^2\vartheta}, \tag{81}$$

gdzie $\zeta = +1$, gdy $\omega > 0$, zaś $\zeta = -1$, gdy $\omega < 0$. Pierwiastki te mają te same znaki i spełniają nierówność $|S_1| < |S_2|$. Korzystając z rachunków § 58 tomu I, łatwo przyjdziemy do wniosku, że z równań (78) wynikają wzory:

$$\Phi(\lambda', \mu') = \frac{S_2}{S_2 - S_1}, \quad \Phi(\lambda'', \mu'') = \frac{S_1}{S_2 - S_1}, \tag{82}$$

a więc na podstawie wzorów (81) otrzymamy na kwadraty długości boków węgłów kierunków asymptotycznych wzory:

$$(83) \qquad \Phi(\lambda', \mu') = \frac{\zeta\omega + \Omega}{2\Omega}, \quad \Phi(\lambda'', \mu'') = \frac{\zeta\omega - \Omega}{2\Omega}.$$

Wyprowadzimy jeszcze równanie elipsy, której wierzchołkami są końce boków węgłów kierunków asymptotycznych. W tym celu zauważymy, że z równań (78) wynikają równości:

$$\varphi(\lambda', \mu') = \varphi(\lambda'', \mu'') = S_1 \Phi(\lambda', \mu') = S_2 \Phi(\lambda'', \mu''),$$

z których na podstawie wzorów (82) otrzymują się równości:

$$\varphi(\lambda', \mu') = \varphi(\lambda'', \mu'') = \frac{S_1 S_2}{S_2 - S_1}.$$

Równości te prowadzą na podstawie równania (80) i wzorów (81) do równości:

$$\varphi(\lambda', \mu') = \varphi(\lambda'', \mu'') = \zeta\frac{\delta}{\Omega}.$$

Jeżeli spółrzędne punktu na płaszczyźnie RA oznaczymy w stosowanym tutaj układzie odpowiednio literami x, y, to elipsa, której wierzchołki są końcami boków węgłów kierunków asymptotycznych, określona będzie równaniem:

$$(84) \qquad \varphi(x, y) = \zeta\frac{\delta}{\Omega}.$$

Elipsa ta wykreślona jest na fig. 87.

Zwrócimy się teraz do krzywych rodzaju hiperbol. Każda linja krzywa, należąca do tej kategorji, ma dwa rzeczywiste różne jeden od drugiego dwukierunki asymptotyczne. Oznaczając przez λ, μ spółczynniki kierunków tych dwukierunków, mieć będziemy równania:

$$(85) \qquad \Phi(\lambda, \mu) = 1, \quad \varphi(\lambda, \mu) = 0,$$

które spełnione będą przez cztery układy wielkości rzeczywistych. Te układy napiszemy w postaci tabelki:

(86) $\lambda_1, \mu_1; -\lambda_1, -\mu_1; \lambda_2, \mu_2; -\lambda_2, -\mu_2$

i zauważymy, że węgieł każdego z rzeczonych kierunków jest wektorem, którego koniec leży na kole opisanem z początku spółrzędnych jako ze środka promieniem równym jedności. Widoczne, że położenie na płaszczyźnie RA wektorów, określonych tabelką (86), można przedstawić figurą 88, na której znaczki 1 i 2 odnoszą się do pierwszego i trzeciego z wektorów tej tabelki. Jeżeli końce czterech wektorów połączymy odcinkami, nie leżącemi na

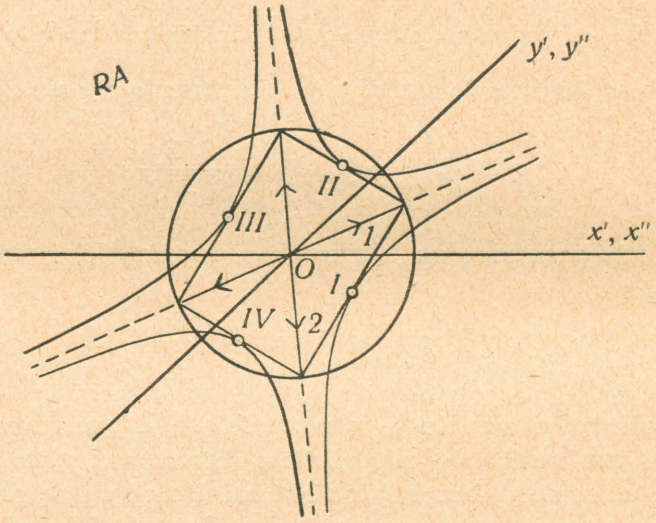

Fig. 88.

rzeczonych wektorach, to utworzą one prostokąt, wpisany w koło o promieniu równym jedności. Naznaczmy środki boków tego prostokąta cyframi I, II, III, IV i zauważmy, że spółrzędne tych środków określone są wyrażeniami postaci:

$$(87) \qquad x_0 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \lambda_1 + \varepsilon_2 \lambda_2), \; y_0 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \mu_1 + \varepsilon_2 \mu_2),$$

w których ε_1 i ε_2 mają wartości następujące. Dla środka I: $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = +1$; dla środka II: $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = -1$; dla środka III: $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = -1$; wreszcie dla środka IV: $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = +1$. Łatwo dostrzec, że zachodzi równość:

$$\varphi(x_0, y_0) = \frac{1}{4}[\varphi(\lambda_1, \mu_1) + 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varphi(\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2) + \varphi(\lambda_2, \mu_2)],$$

a ponieważ wielkości λ_1, μ_1 i wielkości λ_2, μ_2 spełniają drugą z równości (85), przeto zachodzi równość:

$$\varphi(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varphi(\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2). \tag{88}$$

Podobnie jak w § 14 możemy skonstatować równość:

$$-[\varphi(\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2)]^2 = \delta(\lambda_1\,\mu_2 - \mu_1\,\lambda_2)^2,$$

a opierając się na drugim ze wzorów (25), podanych w § 32 tomu I, dojdziemy z niej do równości:

$$[\varphi(\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2)]^2 = \frac{4\,\delta^2}{\Omega^2}. \tag{89}$$

Przypuśćmy, że $\eta = \pm 1$ zależnie od tego, czy $\varphi(\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2)$ ma wartość dodatnią, czy też ujemną. Wtedy na podstawie wzoru (89) wniesiemy, że zachodzi równość:

$$\varphi(\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2) = -2\,\eta\,\frac{\delta}{\Omega},$$

a więc otrzymamy dla punktów x_0, y_0 wzór:

$$\varphi(x_0, y_0) = -\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\eta\,\frac{\delta}{\Omega}. \tag{90}$$

Opierając się na nim, możemy podać równanie hiperboli o rozważanych powyżej dwukierunkach asymptotycznych, która przechodzi przez punkt x_0, y_0 i ma środek w początku spółrzędnych. Równanie to napiszemy w postaci:

$$\varphi(x, y) = \zeta\,\frac{\delta}{\Omega}, \tag{91}$$

gdzie $\zeta = \pm 1$, a mianowicie ma wartość $\zeta = -\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\eta$. Gdy $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 = +1$, równanie to określa hiperbolę, której wierzchołki leżą w punktach I i III. Gdy zaś $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 = -1$, równanie (91) określa hiperbolę, której wierzchołki leżą w punktach II i IV.

W przypadku krzywej rodzaju parabol istnieje jeden rzeczywisty dwukierunek asymptotyczny. Węgły kierunków tego dwukierunku są dwoma przeciwnie skierowanemi wektorami o długościach równych jedności.

Przechodzimy teraz do rozważenia interpretacji asymptot. Każda krzywa rodzaju elips ma dwie asymptoty urojone ze sobą sprzężone, każda zaś krzywa rodzaju hiperbol dwie asymptoty rzeczywiste. Z pośród krzywych rodzaju parabol tylko w przypadku prostej podwójnej istnieje prosta właściwa, mająca własność asymptoty, a prostą tą jest taż sama prosta podwójna. Oczywiście, że tylko dla krzywych rodzaju elips i krzywych rodzaju hiperbol może zachodzić potrzeba bliższego rozważenia interpretacji. Zakładamy przeto, że $\delta \neq 0$ i przypominamy, że na podstawie związku (38) § 14 asymptoty określają się równaniem:

$$f(x, y) = \frac{\Delta}{\delta}. \tag{92}$$

Zajmiemy się naprzód przypadkiem $\delta > 0$ i zauważymy, że na podstawie związków (280) i (281) § 66 tomu I, można asymptoty przedstawić równaniami:

$$\begin{cases} x'' = -\dfrac{1}{\tau\sqrt{\delta}}(B x' + C y' + E), \\ y'' = \dfrac{1}{\tau\sqrt{\delta}}(A x' + B y' + D), \end{cases} \tag{93}$$

lub też równaniami, otrzymującemi się z nich przez rozwiązanie względem x', y':

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\tau\sqrt{\delta}}(B x'' + C y'') + p', \\ y' = -\dfrac{1}{\tau\sqrt{\delta}}(A x'' + B y'') + q', \end{cases} \tag{94}$$

gdzie p', q' oznaczają spółrzędne środka krzywej. W równaniach (93) i (94) $\tau = \pm 1$ i jeżeli ε jest znakiem formy $\varphi(x, y)$, to przekształcenie (93), lub jego przekształcenie odwrotne (94), określa,

przy spełnieniu nierówności $\tau\,\varepsilon \sin\vartheta > 0$, asymptotę, będącą prostą górną, albo jak powiemy a s y m p t o t ą g ó r n ą, a przy spełnieniu nierówności $\tau\,\varepsilon \sin\vartheta < 0$ asymptotę, będącą prostą dolną, albo jak powiemy a s y m p t o t ą d o l n ą. Interpretacja tych dwóch asymptot ze sobą sprzężonych wynika z rozważań § 55 tomu I i § 47 tomu II. Jeżeli punkt zespolony o spółrzędnych $a' + i\,a''$, $b' + i\,b''$ położony jest na asymptocie, to na podstawie równań (35) § 55 tomu I i równań (228) § 47 tomu II wnosimy, że dla asymptoty tej zachodzą równania:

$$(95)\quad \begin{cases} \varphi(x'-a', y'-b') = \varepsilon\,\sigma^2, \quad \varphi(x''-a'', y''-b'') = \varepsilon\,\sigma^2, \\ \varphi(x'-a', y'-b';\ x''-a'', y''-b'') = 0, \\ \Psi(x'-a', y'-b';\ x''-a'', y''-b'') = \varepsilon\,\tau \sin\vartheta \dfrac{\sigma^2}{\sqrt{\delta}}, \end{cases}$$

w których σ oznacza parametr rzeczywisty. W równaniach tych zawarte są wszystkie szczegóły interpretacji geometrycznej, o którą chodzi. Ponieważ szczegóły te omawiane już były przy sformułowaniach, które podaliśmy w rzeczonych paragrafach, przeto możemy wogóle poprzestać tutaj na tem powołaniu się. Natomiast ze względu na ciąg dalszy, rozważymy tu bliżej pewien przypadek szczególny geometrycznej interpretacji asymptot krzywych rodzaju elips. Jeżeli mianowicie punkt o spółrzędnych $a' + i\,a''$, $b' + i\,b''$ jest środkiem krzywej, t.j. jeżeli zachodzą równości: $a' = p'$, $b' = q'$, $a'' = 0$, $b'' = 0$, to równania (95) mieć będą prostszą postać, mianowicie:

$$(96)\quad \begin{cases} \varphi(x'-p', y'-q') = \varepsilon\,\sigma^2, \quad \varphi(x'', y'') = \varepsilon\,\sigma^2, \\ \varphi(x'-p', y'-q';\ x'', y'') = 0, \\ \Psi(x'-p', y'-q';\ x'', y'') = \varepsilon\,\tau \sin\vartheta \dfrac{\sigma^2}{\sqrt{\delta}}. \end{cases}$$

Pierwsze z równań pierwszego wiersza tych wzorów określa przy zmiennem σ nieskończenie wiele elips, położonych na płaszczyźnie R, posiadających wspólny środek p', q' i homotetycznych względem p', q', jako środka homotetyczności. Drugie z równań pierwszego wiersza tych wzorów określa nieskończenie wiele elips na płaszczyźnie A, mających wspólny środek w początku spółrzędnych i homotetycznych względem początku spółrzędnych, jako

środka homotetyczności. Elipsy dwóch tych zbiorów, odpowiadające tej samej wartości parametru σ, są na siebie nakładalne, a zbiory te mają własność, że rozważane na płaszczyźnie RA otrzymują się jeden z drugiego przez przesunięcie. Punkty sobie odpowiadające x', y' i x'', y'', różne od środka krzywej, względnie od początku spółrzędnych, leżą na odnośnych elipsach na siebie nakładalnych, a na podstawie drugiego wiersza wzorów (96) punkt x'', y'', odpowiadający danemu punktowi x', y', położony jest przytem na średnicy, sprzężonej z dwukierunkiem $(y' - q') : (x' - p')$, a punkt x', y', odpowiadający danemu punktowi x'', y'', położony na

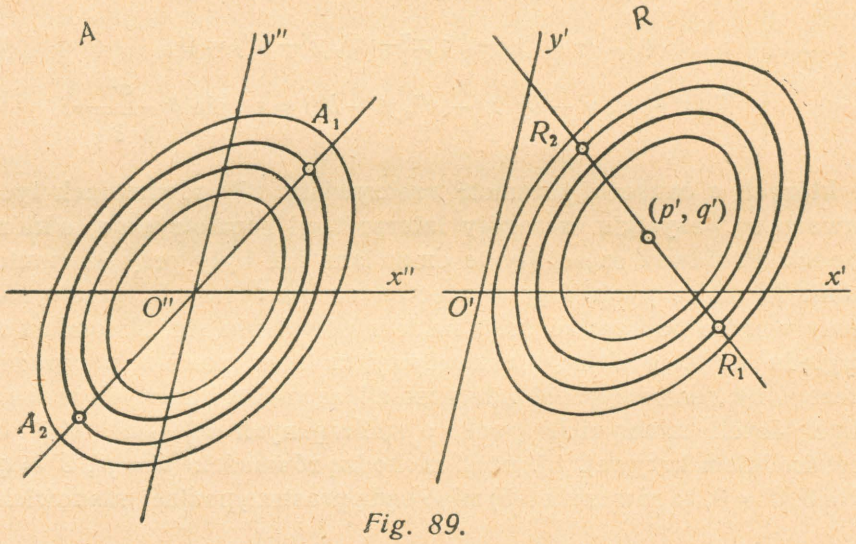

Fig. 89.

średnicy, sprzężonej z dwukierunkiem $y'' : x''$. Naskutek tych własności rozważanej odpowiedniości każdemu punktowi x', y', różnemu od środka krzywej, odpowiadają dwa punkty x'', y'', a każdemu punktowi x'', y'', różnemu od początku spółrzędnych, odpowiadają dwa punkty x', y'. Ale odwzorowanie, określające jedną z dwóch asymptot, jest jednojednowartościowe. Do asymptoty górnej należą na podstawie równości trzeciego wiersza wzorów (96) takie pary punktów x', y' i x'', y'', dla których kierunek wektora o składowych x'', y'' tworzy z kierunkiem wektora o składowych $x' - p'$, $y' - q'$ kąt dodatni mniejszy od π, a do asymptoty dolnej takie pary punktów, że kierunek wektora o składowych x'', y'' tworzy z kierunkiem wektora o składowych $x' - p', y' - q'$ kąt ujemny,

którego bezwzględna wartość jest mniejsza od π. Te własności uważanych odwzorowań można zilustrować zapomocą figury 89. Jeżeli rozważamy łącznie odwzorowania, określające obie asymptoty, to każdemu z punktów R_1, R_2 odpowiadają oba punkty A_1, A_2, a każdemu z punktów A_1, A_2, odpowiadają oba punkty R_1, R_2. Przyjmijmy teraz, że kąty powiększają się na płaszczyźnie w kierunku przeciwnym ruchowi skazówki zegara. Wtedy przy odwzorowaniu, określającem asymptotę górną, R_1, A_1 stanowią parę punktów sobie odpowiadających, a także R_2, A_2 są parą punktów sobie odpowiadających, przy odwzorowaniu zaś określającem asymptotę dolną, R_1, A_2 stanowią parę punktów sobie odpowiadających, a także R_2, A_1 są parą punktów sobie odpowiadających. Rozważania powyższe mogą być także stosowane do przypadków, w których asymptotami są proste izotropowe, ale wówczas zamiast zbiorów elips zachodzą zbiory kół.

W przypadkach $\delta < 0$ asymptoty są prostemi rzeczywistemi i odnośnie do ich interpretacji można powołać się na § 66 tomu I i w szczególności na fig. 65 tego paragrafu.

§ 54. Dalsze rozważania dotyczące interpretacji zbiorów punktów zespolonych istotnych krzywych stopnia drugiego.

Przy założeniu $\Delta \neq 0$ wykonaliśmy w §§ 50 i 51 szereg rachunków, opierając się na równaniach (5). Równania te możemy zastąpić przez równania:

$$(97)\quad \begin{cases} f(x', y') = w, \ \varphi(x'', y'') = w, \\ (A x' + B y' + D) x'' + (B x' + C y' + E) y'' = 0, \end{cases}$$

w których w oznacza parametr rzeczywisty. Pierwszy wiersz wzorów (97) zawiera dwa równania; pierwsze z nich określa nieskończenie wiele krzywych stopnia drugiego na płaszczyźnie R, drugie zaś nieskończenie wiele krzywych stopnia drugiego na płaszczyźnie A. Drugi wiersz zawiera warunek, który jest spełniony dla każdego rzeczywistego punktu x, y, natomiast dla urojonego punktu x, y spełniony jest wtedy i tylko wtedy, gdy jego ślad R leży na średnicy, sprzężonej z dwukierunkiem $y'' : x''$.

Założymy naprzód, że $\delta \neq 0$ i przedstawimy przy tem założeniu równania (97) w innej postaci. Jeżeli spółrzędne środka krzywej oznaczymy przez p', q', to, uwzględniając związki:

$$A p' + B q' + D = 0, \quad B p' + C q' + E = 0$$

i tożsamość:

$$f(x', y') - \frac{\Delta}{\delta} = \varphi(x' - p', y' - q'),$$

będziemy mogli równania (97) napisać w formie:

$$(98) \quad \begin{cases} \varphi(x' - p', y' - q') = w - \dfrac{\Delta}{\delta}, \ \varphi(x'', y'') = w, \\ \varphi(x' - p', y' - q'; x'', y'') = 0. \end{cases}$$

Jeżeli dana linja krzywa należy do rodzaju elips, to forma $\varphi(\xi, \eta)$ ma stały znak przy wszelkich rzeczywistych wartościach wielkości ξ, η, nie będących jednocześnie zerami. Wówczas równaniom (98) czynią zadość wielkości x', y', x'', y'', które są wszystkie rzeczywiste, gdy spełnione są jednocześnie oba warunki:

$$(99) \quad \left(w - \frac{\Delta}{\delta}\right) \varphi(\xi, \eta) \geqq 0, \ w \varphi(\xi, \eta) \geqq 0.$$

Krzywa rodzaju elips jest rzeczywista przy spełnieniu nierówności:

$$\Delta \varphi(\xi, \eta) < 0.$$

Wtedy warunki (99) redukują się widocznie do drugiego z nich. Linje krzywe, określone równaniami pierwszego wiersza związków (97), przedstawione są odpowiednio na płaszczyznach R i A fig. 90. Na płaszczyźnie R leży dana elipsa i nieskończenie wiele elips położonych nazewnątrz danej elipsy i z nią homotetycznych względem środka homotetyczności, będącego środkiem S danej elipsy. Na płaszczyźnie A znajdują się elipsy, posiadające wspólny środek w punkcie O'' i wszystkie wzajemnie homotetyczne względem tegoż punktu O'' jako środka homotetyczności oraz mające własność, która polega na tem, że gdybyśmy płaszczyznę A tak nałożyli na płaszczyznę R, żeby punkt O'' nakrył środek S i żeby osie x'', y'' miały te same kierunki co odpowiednio osie x', y', to rzeczone

elipsy płaszczyzny A byłyby homotetyczne względem punktu S jako środka homotetyczności z rzeczonemi elipsami płaszczyzny R. Opis uważanej odpowiedniości, który mieliśmy w § 52 (fig. 83), można teraz uzupełnić podaniem prawidła, określającego punkty sobie odpowiadające na płaszczyznach R i A. Jeżeli narysujemy na płaszczyźnie R dowolnie wybraną średnicę elips tej płaszczyzny, a na płaszczyźnie A taką średnicę elips tej płaszczyzny, że dwukierunki tych średnic są na płaszczyźnie RA dwukierunkami ze sobą sprzężonemi, to średnice te przetną elipsy, należące do tej samej wartości parametru w, różnej od zera, w punktach sobie odpowiadających, przyczem każdemu punktowi przecięcia na jednej

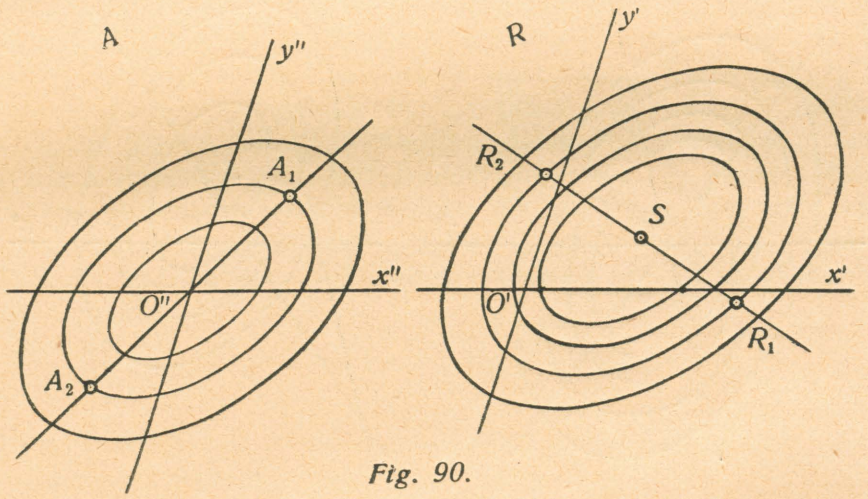

Fig. 90.

płaszczyźnie odpowiadają na drugiej z nich dwa punkty przecięcia drugiej z rzeczonych średnic. W ten sposób np. każdemu z punktów R_1, R_2 odpowiadają oba punkty A_1, A_2, a każdemu z punktów A_1, A_2 oba punkty R_1, R_2. Zauważamy przytem, że wartości $w = 0$ odpowiadają na płaszczyźnie R wszystkie punkty danej elipsy, a na płaszczyźnie A początek spółrzędnych.

Krzywa rodzaju elips jest u r o j o n a przy spełnieniu nierówności:

$$\Delta\varphi(\xi, \eta) > 0.$$

Wtedy warunki (99) redukują się do pierwszego z nich. W tym przypadku uważana odpowiedniość przedstawiona jest na fig. 91.

Krzywa o najmniejszym obwodzie na płaszczyźnie A jest elipsą, określoną równaniem:

$$\varphi(x'', y'') = \frac{\Delta}{\delta}. \tag{100}$$

Prócz niej bierzemy pod uwagę na płaszczyźnie A wszystkie elipsy homotetyczne z elipsą (100) względem początku spółrzędnych i mające większe obwody od obwodu elipsy (100). Jedną z krzywych płaszczyzny R jest elipsa, która otrzymuje się przez takie

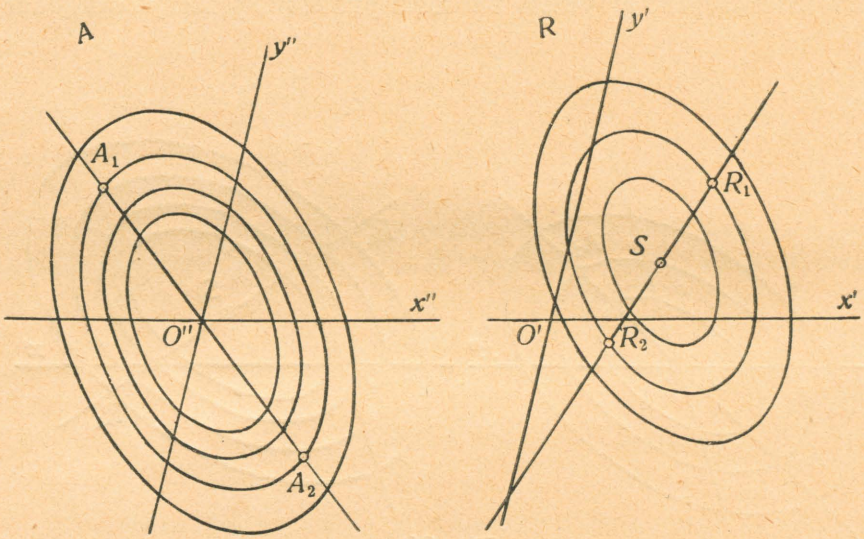

Fig. 91.

przesunięcie elipsy (100) w płaszczyźnie RA, żeby jej środek zeszedł się ze środkiem S danej elipsy urojonej. Na płaszczyźnie R rozważamy prócz rzeczonej elipsy rzeczywistej wszystkie elipsy do niej homotetyczne względem środka S. Niech będą dwie średnice: średnica elips płaszczyzny R i średnica elips płaszczyzny A i przypuśćmy, że średnice te mają na płaszczyźnie RA dwukierunki ze sobą sprzężone. Średnice te przecinają elipsy, należące do tej samej wartości parametru w różnej od $\frac{\Delta}{\delta}$, w punktach sobie odpowiadających przyczem każdemu punktowi przecięcia na jednej płaszczyźnie odpowiadają dwa punkty przecięcia na drugiej

z nich. Każdemu z punktów R_1, R_2 naznaczonych na płaszczyźnie R odpowiadają oba punkty A_1, A_2 na płaszczyźnie A, a każdemu z punktów A_1, A_2 płaszczyzny A odpowiadają oba punkty R_1, R_2 płaszczyzny R. Wartości $w = \frac{\Delta}{\delta}$ odpowiadają na płaszczyźnie A wszystkie punkty elipsy (100), a na płaszczyźnie R środek S.

Przypuśćmy teraz, że dana krzywa stopnia drugiego jest h i p e r b o l ą. W przypadkach, gdy ani różnice $x' - p'$, $y' - q'$ nie są obie jednocześnie zerami, ani też wielkości x'', y'' nie są obie jednocześnie zerami, równanie drugiego wiersza wzorów (98) orzeka, że dwukierunki $(y' - q') : (x' - p')$ i $y'' : x''$ są na płaszczyźnie RA dwukierunkami ze sobą sprzężonemi względem danej hiperboli. Przy danem w pierwsze z równań pierwszego wiersza wzorów (98) określa krzywą rodzaju hiperbol na płaszczyźnie R, a drugie z tych równań krzywą rodzaju hiperbol na płaszczyźnie A. Te krzywe mają na płaszczyźnie RA wspólne dwukierunki asymptotyczne. Z własności krzywych rodzaju hiperbol wynika, że prawe strony równań pierwszego wiersza wzorów (98) nie mogą być przy rzeczywistych wartościach wielkości x', y', x'', y'' obie jednocześnie dodatnie, ani też obie jednocześnie ujemne. Dochodzimy zatem do warunku:

$$w\left(w - \frac{\Delta}{\delta}\right) \leqslant 0,$$

który w przypadku $\Delta > 0$ spełniony jest wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

$$0 \geqslant w \geqslant \frac{\Delta}{\delta}, \tag{101}$$

w przypadkach zaś $\Delta < 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

$$0 \leqslant w \leqslant \frac{\Delta}{\delta}. \tag{102}$$

Odnośna odpowiedniość przedstawiona jest na płaszczynach R i A figury 92. Na płaszczyźnie R znajduje się dana hiperbola, jej asymptoty oraz hiperbole położone pomiędzy asymptotami i daną hiperbolą, a przytem homotetyczne z nią względem jej środka S jako środka homotetyczności. Na płaszczyźnie A podany jest rysunek, będący w bliskim związku z rysunkiem płaszczyzny R

Jeżeli mianowicie daną hiperbolę płaszczyzny R tak przesuniemy w płaszczyźnie $R\,A$, że jej środek S zejdzie się z początkiem

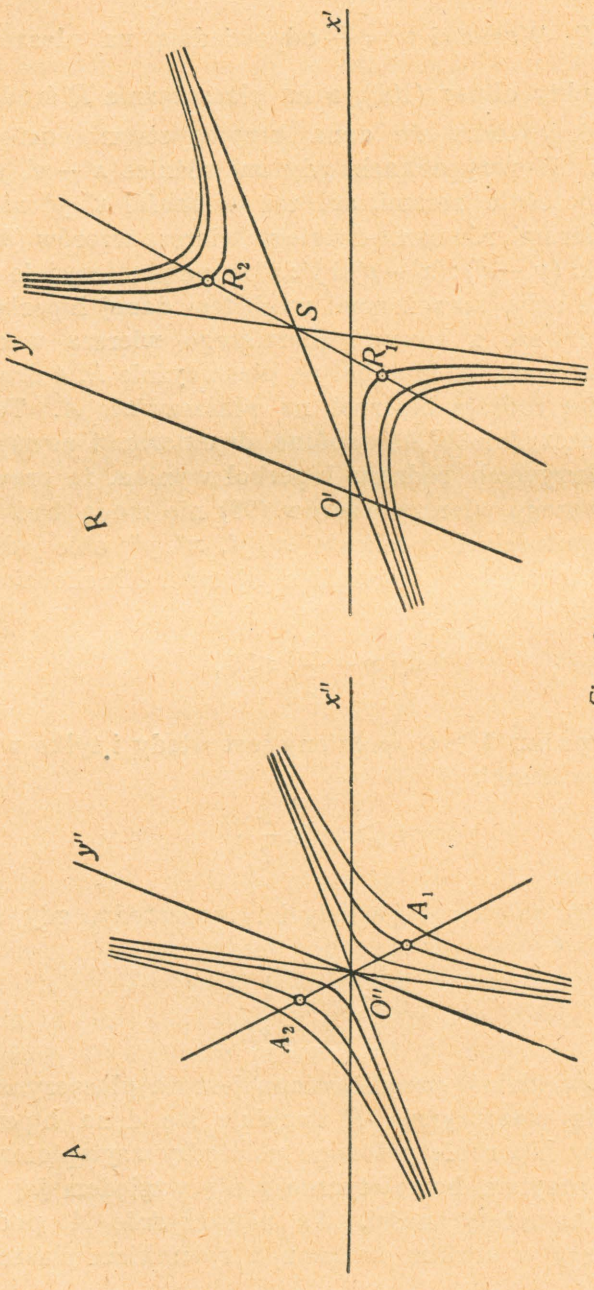

Fig. 92.

spółrzędnych i hiperbolę tę zastąpimy przez hiperbolę z nią sprzężoną oraz skonstruujemy szereg odpowiednich hiperbol z nią homotetycznych względem punktu O'', to otrzymamy rysunek płaszczyzny A. Niech będą teraz na płaszczyznach R i A dwie średnice, które, narysowane na płaszczyźnie RA, mają dwukierunki ze sobą sprzężone. Jeżeli jedna z tych średnic przecina hiperbole, leżące w jej płaszczyźnie, w punktach właściwych rzeczywistych, to druga z nich ma tę samą własność. Rzeczone punkty przecięcia z hiperbolami, otrzymującemi się na płaszczyznach R i A przy tej samej wartości parametru w, która czyni zadość nierównościom warunków (101), względnie nierównościom warunków (102), są odpowiadającemi sobie punktami w rozważanem obecnie odwzorowaniu. Przytem każdemu z dwóch punktów przecięcia na jednej płaszczyźnie odpowiadają oba punkty przecięcia na drugiej z nich. Np. każdemu z punktów R_1, R_2 płaszczyzny R odpowiadają oba punkty A_1, A_2 płaszczyzny A i nawzajem każdemu z punktów A_1, A_2 płaszczyzny A odpowiadają oba punkty R_1, R_2 płaszczyzny R. Przy wartości $w = 0$ pierwsze z równań (98) określa na płaszczyźnie R daną hiperbolę, a z dwóch innych z równań (98) wynika, że wartości $w = 0$ odpowiada na płaszczyźnie A początek spółrzędnych. Podobnież przy wartości $w = \frac{\Delta}{\delta}$ drugie z równań pierwszego wiersza związków (98) określa hiperbolę, sprzężoną z hiperbolą, otrzymującą się przez takie przesunięcie danej hiperboli w płaszczyźnie RA, że środek S schodzi się z początkiem spółrzędnych, a z dwóch innych z równań (98) wynika, że wartości $w = \frac{\Delta}{\delta}$ odpowiada na płaszczyźnie R środek S.

W założeniu, że dana linja krzywa jest parabolą, napiszemy równania (97) w postaci:

$$(103)\quad \begin{cases} \varepsilon(\mathfrak{a}x' + \mathfrak{b}y')^2 + 2Dx' + 2Ey' + F = w, \quad \varepsilon(\mathfrak{a}x'' + \mathfrak{b}y'')^2 = w, \\ \varepsilon(\mathfrak{a}x'' + \mathfrak{b}y'')(\mathfrak{a}x' + \mathfrak{b}y') + Dx'' + Ey'' = 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania pierwszego wiersza tych związków wynika dla rzeczywistego parametru w warunek:

$$(104)\qquad \varepsilon w \geqq 0.$$

Ponieważ zaś w danym przypadku zachodzi równość:

$$\Delta = -\varepsilon (\mathfrak{a} E - \mathfrak{b} D)^2,$$

przeto można warunek (104) przedstawić także w formie:

$$w \Delta \leqslant 0. \tag{105}$$

Pierwsze z równań (103) określa na płaszczyźnie R przy wartości $w = 0$ daną parabolę, a przy innych wartościach parametru w, spełniających warunek (105), parabole, do danej paraboli przystające, mające z nią wspólną oś symetrji i położone po jej stronie zewnętrznej. Drugie z równań pierwszego wiersza związków (103) określa na płaszczyźnie A przy wartości $w = 0$ prostą, przechodzącą przez początek spółrzędnych i mającą dwukierunek asymptotyczny, a przy każdej innej wartości parametru w, spełniającej warunek (104), parę prostych równoległych rzeczywistych, w stosunku do których rzeczona prosta, przechodząca przez początek spółrzędnych, jest prostą środków. Równanie drugiego wiersza związków (103) spełnione jest przy wszelkich wartościach wielkości x', y', gdy obie wielkości x'', y'' są zerami. Jeżeli w równaniu tem podstawimy za iloraz $y'' : x''$ spółczynniki dwukierunku asymptotycznego, to dojdziemy do sprzeczności. We wszystkich innych przypadkach równanie to orzeka, że punkt x', y' leży na średnicy sprzężonej z dwukierunkiem, określonym stosunkiem $y'' : x''$. Na płaszczyźnie R fig. 93 narysowano szereg parabol, o których powyżej była mowa, a na płaszczyźnie A tej figury szereg rzeczonych par linij prostych do siebie równoległych. Przez dowolnie wybrany punkt zewnętrzny danej paraboli na płaszczyźnie R przechodzi jedna z rzeczonych parabol, należąca do określonej wartości parametru w, spełniającej nierówność warunku (105). Jeżeli przez ten punkt przeprowadzimy średnicę paraboli, a na płaszczyźnie A narysujemy linję prostą, która przechodzi przez początek spółrzędnych i ma w płaszczyźnie RA dwukierunek z którym rzeczona średnica jest sprzężona, to linja ta przetnie parę prostych równoległych, należącą do tej samej wartości parametru w, w dwóch punktach płaszczyzny A, odpowiadających wybranemu punktowi płaszczyzny R. Nawzajem każdemu punktowi płaszczyzny A, nie leżącemu na prostej, przechodzącej przez początek spółrzędnych i mającej dwukierunek asymptotyczny, odpowiada jeden określony punkt płaszczyzny R, leżący

nazewnątrz danej paraboli. Punkt ten można otrzymać, stosując postępowanie, które możnaby nazwać odwrotnem do tego, o którem przed chwilą była mowa. Np. na figurze 93 punktowi R_0 płaszczyzny R odpowiadają punkty A_1 i A_2 płaszczyzny A, a nawzajem każdemu z nich odpowiada punkt R_0 płaszczyzny R. Wresz-

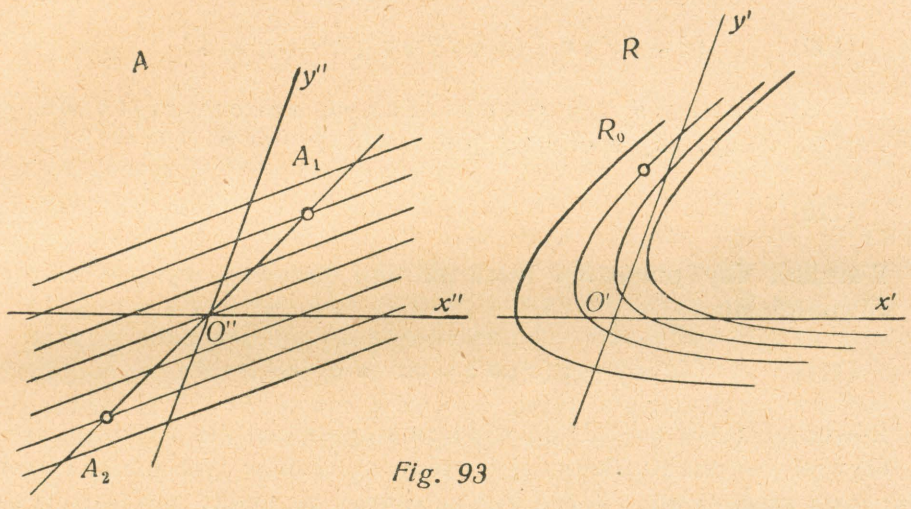

Fig. 93

cie zauważamy, że wartości $w = 0$ odpowiadają na płaszczyźnie R wszystkie punkty danej paraboli, a na płaszczyźnie A początek spółrzędnych.

§ 55. Styczne w urojonych punktach istotnych krzywych stopnia drugiego.

Styczna do krzywej stopnia drugiego w jej właściwym zespolonym punkcie a, b określa się równaniem:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0. \tag{106}$$

Jeżeli spółrzędne tego punktu przedstawimy w postaci:

$$a = a' + i\,a'', \quad b = b' + i\,b'', \tag{107}$$

gdzie a', b', a'', b'' oznaczają liczby rzeczywiste i przyjmiemy oznaczenia:

$$(108)\quad \begin{cases} \alpha' = A\,a' + B\,b' + D, & \alpha'' = A\,a'' + B\,b'', \\ \beta' = B\,a' + C\,b' + E, & \beta'' = B\,a'' + C\,b'', \\ \gamma' = D\,b' + E\,b' + F, & \gamma'' = D\,a'' + E\,b'', \end{cases}$$

to będziemy mogli równanie rzeczywistej stycznej napisać w formie:

$$(109)\quad (\alpha' + i\,\alpha'')\,x + (\beta' + i\,\beta'')\,y + \gamma' + i\,\gamma'' = 0.$$

Styczna ta ma dwukierunek rzeczywisty wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest równość:

$$(110)\quad \alpha'\,\beta'' - \beta'\,\alpha'' = 0.$$

Warunki, aby punkt a, b leżał na linji krzywej, wyrazić można równościami:

$$(111)\quad f(a', b') - \varphi(a'', b'') = 0, \quad \alpha'\,a'' + \beta'\,b'' = 0.$$

Równości (110) i (111) są widocznie spełnione dla każdego rzeczywistego punktu krzywej i wtedy styczna w tym punkcie jest prostą rzeczywistą. Jeżeli zaś założymy, że punkt a, b jest urojony, t.j. że wielkości a'', b'' nie są obie jednocześnie zerami, to będziemy mogli drugą z równości (111) zastąpić przez równości:

$$(112)\quad \alpha' = \sigma\,b'', \quad \beta' = -\sigma\,a'',$$

w których σ jest czynnikiem nieoznaczonym. Jeżeliby czynnik ten był różny od zera, to podstawienie wyrażeń (112) w warunek (110) doprowadziłoby do równości:

$$(113)\quad \varphi(a'', b'') = 0.$$

Ale łatwo dostrzec, że dla żadnej istotnej krzywej stopnia drugiego równości (111) i (113) nie mogą zachodzić jednocześnie, gdy wielkości a'', b'' nie są obie jednocześnie zerami. W samej rzeczy, jednoczesne zachodzenie równości (111) i 113) znaczyłoby, że punkt właściwy o spółrzędnych a', b' położony jest i na krzywej i na jej asymptocie, a takie właściwe punkty nie istnieją. Zatem czynnik σ w równościach (112) musi być równy zeru, co jednak widocznie nie może zachodzić w przypadku paraboli, która nie ma właściwego środka. Lecz w przypadku istotnej krzywej stopnia drugiego

rodzaju elips lub rodzaju hiperbol można przy zerowej wartości czynnika σ zastąpić warunki (110) i (111) równościami:

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = \varphi(a'', b''). \tag{114}$$

Rugując z równości tych a', b', otrzymujemy:

$$\varphi(a'', b'') = \frac{\Delta}{\delta} \tag{115}$$

i zauważamy przytem, że w przypadku, gdy dana krzywa jest rzeczywistą istotną krzywą rodzaju elips, równaniu (115) nie czynią zadość żadne rzeczywiste wartości wielkości a'', b''. W przypadkach zaś, gdy dana linja krzywa jest bądź urojoną istotną krzywą rodzaju elips, bądź też hiperbolą, istnieją rzeczywiste wartości wielkości a'', b'', czyniące zadość równaniu (115). W tych przypadkach rozważaliśmy już w poprzednich paragrafach tego rozdziału miejsce geometryczne punktów na płaszczyźnie A, określone równaniem (115). Widzimy więc, że prócz stycznych w punktach rzeczywistych jeszcze styczne w punktach urojonych pewnej szczególnej kategorji mają dwukierunki rzeczywiste. Jeżeli mianowicie linja krzywa jest bądź istotną urojoną krzywą rodzaju elips, bądź też hiperbolą, to jej styczna ma dwukierunek rzeczywisty w każdym jej punkcie, którego ślad R jest jej środkiem, a ślad A jest jednym z punktów miejsca geometrycznego (115). Ze związków (114) i (115) wynika, że równanie stycznej można wtedy napisać w postaci:

$$\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' - i\frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{116}$$

t.j. że rzeczona styczna w punkcie wymienionej kategorji jest prostą urojoną o rzeczywistym dwukierunku. Prosta śladów R uważanej stycznej określa się równaniem:

$$\alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' = 0,$$

które można także napisać w formie:

$$a''(A x' + B y' + D) + b''(B x' + C y' + E) = 0. \tag{117}$$

Z równania (117) wynika, że prosta śladów R stycznej (116) jest

średnicą krzywej, sprzężoną z dwukierunkiem $b'' : a''$. Prosta śladów A stycznej (116) określa się równaniem:

$$\alpha'' x'' + \beta'' y'' = \frac{\Delta}{\delta}, \tag{118}$$

z którego wnosimy, że prosta śladów A jest styczną do krzywej (115) w jej punkcie a'', b''. Wyniki tutaj uzyskane łatwo porównać z rozważaniami dotyczącemi stycznych do kół zespolonych, które podaliśmy w § 69 tomu I.

Załóżymy teraz, że spółczynniki równania stycznej do istotnej krzywej stopnia drugiego spełniają nierówność:

$$\alpha' \beta'' - \beta' \alpha'' \neq 0, \tag{119}$$

t.j. że dwukierunek stycznej jest urojony. Wtedy na stycznej leży jeden określony punkt rzeczywisty. Oznaczając spółrzędne tego punktu przez p', q', mieć będziemy dla wyznaczenia tych spółrzędnych warunki:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha' p' + \beta' q' + \gamma' = 0, \\ \alpha'' p' + \beta'' q' + \gamma'' = 0, \end{array} \right. \tag{120}$$

z których wynikają wartości:

$$p' = \frac{\beta' \gamma'' - \gamma' \beta''}{\alpha' \beta'' - \beta' \alpha''}, \quad q' = \frac{\gamma' \alpha'' - \alpha' \gamma''}{\alpha' \beta'' - \beta' \alpha''}.$$

Jeżeli przypomnimy określenie biegunowej punktu, podane w § 17, to znaczenie geometryczne pierwszego z równań (120) będziemy mogli wysłowić w ten sposób, że punkt p', q' musi leżeć na biegunowej punktu a', b'. Drugie z równań (120) można napisać w postaci:

$$a'' (A p' + B q' + D) + b'' (B p' + C q' + E) = 0,$$

a więc równanie to wyraża, że punkt p', q' musi leżeć na średnicy, sprzężonej z dwukierunkiem $b'' : a''$, co można także sformułować w ten sposób, że punkt p', q' musi leżeć na biegunowej punktu niewłaściwego, do którego prowadzi dwukierunek, określony stosunkiem $b'' : a''$. Zaznaczamy tu przytem, że ogólne rozważania o biegunowych uwzględnione będą dopiero w dalszych częściach tych wykładów.

Zwrócimy się teraz do obliczenia niezmiennika I stycznej o urojonym dwukierunku. Opierając się na rachunkach, podanych w § 56 tomu I, łatwo dostrzec, że niezmiennik ten można określić wzorem:

$$I = \frac{\Phi(-\beta', \alpha') + \Phi(-\beta'', \alpha'')}{\Psi(-\beta', \alpha'; -\beta'', \alpha'')}. \tag{121}$$

Obliczając funkcje figurujące po prawej stronie tego wzoru, otrzymujemy:

$$\left\{\begin{aligned}
&\Phi(-\beta', \alpha') = \Phi(-B, A)\, a'^2 + \Phi(-C, B)\, b'^2 + \\
&+ 2\,\Phi(-B, A; -C, B)\, a'\, b' + \Phi(-E, D) + \\
&+ 2\,\Phi(-B, A; -E, D)\, a' + 2\,\Phi(-C, B; -E, D)\, b', \\
&\Phi(-\beta'', \alpha'') = \Phi(-B, A)\, a''^2 + \Phi(-C, B)\, b''^2 + \\
&+ 2\,\Phi(-B, A; -C, B)\, a''\, b'', \\
&\Psi(-\beta', \alpha'; -\beta'', \alpha'') = (A\,C - B^2)(a'\, b'' - b'\, a'')\sin\vartheta + \\
&+ [D(B\, a'' + C\, b'') - E(A\, a'' + B\, b'')]\sin\vartheta.
\end{aligned}\right. \tag{122}$$

Jeżeli zwrócimy uwagę na to, że zachodzą równości:

$$\Phi(-B, A) = A^2 + B^2 - 2\,A\,B\cos\vartheta = A\,\omega - \delta,$$

$$\Phi(-C, B) = C^2 + B^2 - 2\,C\,B\cos\vartheta = C\,\omega - \delta,$$

$$\Phi(-B, A; -C, B) = (A + C)\,B - (A\,C + B^2)\cos\vartheta = B\,\omega - \delta\cos\vartheta,$$

$$\Phi(-B, A; -E, D) = A\,D + B\,E - (A\,E + B\,D)\cos\vartheta =$$

$$= D\,\omega + B\,E - C\,D + (D\,B - A\,E)\cos\vartheta,$$

$$\Phi(-C, B; -E, D) = C\,E + B\,D - (C\,D + B\,E)\cos\vartheta =$$

$$= E\,\omega + D\,B - A\,E + (B\,E - C\,D)\cos\vartheta$$

i przypomnimy oznaczenia:

$$k' = D\,B - E\,A,\quad k'' = B\,E - D\,C,$$

to dojdziemy do wzorów:

$$\Phi(-\beta', \alpha') = \omega f(a', b') - \delta \Phi(a', b') + 2(k'' + k' \cos\vartheta) a' +$$

$$+ 2(k' + k'' \cos\vartheta) b' + \Phi(-E, D) - \omega F,$$

$$\Phi(-\beta'', \alpha'') = \omega \varphi(a'', b'') - \delta \Phi(a'', b''),$$

$$\Psi(-\beta', \alpha'; -\beta'', \alpha'') = \delta \Psi(a', b'; a'' b'') + (k' a'' - k'' b'') \sin\vartheta.$$

Gdy $\delta \neq 0$, wówczas wzory (122) można zastąpić przez wzory:

$$(123) \quad \begin{cases} \Phi(-\beta', \alpha') = \omega \varphi(a' - p', b' - q') - \delta \Phi(a' - p', b' - q'), \\ \Phi(-\beta'', \alpha'') = \omega \varphi(a'', b'') - \delta \Phi(a'', b''), \\ \Psi(-\beta', \alpha'; -\beta'', \alpha'') = \delta \Psi(a' - p', b' - q'; a'', b''), \end{cases}$$

gdzie p', q' oznaczają spółrzędne środka krzywej. Gdy zaś $\delta = 0$, wówczas wzory (122) można napisać w postaci:

$$(124) \quad \begin{cases} \Phi(-\beta', \alpha') = \omega f(a', b') + \Phi(-E, D) - \omega F + \\ + 2(k'' + k' \cos\vartheta) a' + 2(k' + k'' \cos\vartheta) b', \\ \Phi(-\beta'', \alpha'') = \omega \varphi(a'', b''), \\ \Psi(-\beta', \alpha'; -\beta'', \alpha'') = (k' a'' - k'' b'') \sin\vartheta, \end{cases}$$

albo także w postaci:

$$(125) \quad \begin{cases} \Phi(-\beta', \alpha') = \varepsilon \Phi(-\mathbf{b}, \mathfrak{a}) [f(a', b') - F] + \Phi(-E, D) + \\ + 2\varepsilon (D\,\mathbf{b} - E\,\mathfrak{a}) [(\mathfrak{a} \cos\vartheta - \mathbf{b}) a' + (\mathfrak{a} - \mathbf{b} \cos\vartheta) b'], \\ \Phi(-\beta'', \alpha'') = \varepsilon \Phi(-\mathbf{b}, \mathfrak{a}) \varphi(a'', b''), \\ \Psi(-\beta', \alpha'; -\beta'', \alpha'') = \varepsilon (D\,\mathbf{b} - E\,\mathfrak{a}) (\mathfrak{a} a'' + \mathbf{b} b'') \sin\vartheta. \end{cases}$$

Korzystając ze wzorów (122) — (125), można w każdym przypadku obliczyć niezmiennik (121). Zauważymy przytem, że rachunki te stosują się nietylko do stycznych o urojonych dwukierunkach, ale także do biegunowych o urojonych dwukierunkach.

Na podstawie trzeciego ze wzorów (123) i trzeciego ze wzorów (124) możemy wypowiedzieć pewne wnioski, dotyczące zapytania, czy styczna o urojonym dwukierunku jest górna, czy też dolna. Niech będzie $\delta \neq 0$ i weźmy pod uwagę wektor,

którego początek leży w środku krzywej, a koniec w punkcie $a' + i\,a''$, $b' + i\,b''$. Widoczne, że wektor ten ma składowe:

$$a' - p' + i\,a'', \quad b' - q' + i\,b''. \tag{126}$$

Z trzeciego ze wzorów (123) wynika, że styczna w punkcie $a' + i\,a''$, $b' + i\,b''$ krzywej rodzaju elips jest prostą górną, gdy wektor o składowych (126) jest wektorem górnym oraz, że styczna ta jest prostą dolną, gdy rzeczony wektor jest wektorem dolnym. Z tegoż wzoru wynika, że styczna w punkcie $a' + i\,a''$, $b' + i\,b''$ hiperboli jest prostą górną, gdy wektor o składowych (126) jest wektorem dolnym, jest zaś prostą dolną, gdy wektor ten jest wektorem górnym. Przechodząc do paraboli, zauważymy naprzód, że wektor rzeczywisty o składowych $-k''$, $-k'$ ma jeden z dwóch przeciwnych sobie kierunków asymptotycznych i w celu określenia tego kierunku wybierzemy na paraboli dowolny rzeczywisty punkt x_0, y_0 i zapytamy, jak położony jest względem tej krzywej punkt o spółrzędnych $x_0 - k''$, $y_0 - k'$. Mamy widocznie równość:

$$f(x_0 - k'', y_0 - k') = f(x_0, y_0) + \varphi(-k'', -k') -$$

$$- 2\,[k''(A\,x_0 + B\,y_0 + D) + k'(B\,x_0 + C\,y_0 + E)],$$

a ponieważ zachodzą równości:

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad \varphi(-k'', -k') = 0,$$

$$A\,k'' + B\,k' = 0, \quad B\,k'' + C\,k' = 0, \quad D\,k'' + E\,k' = \Delta,$$

przeto dochodzimy do równości:

$$f(x_0 - k'', y_0 - k') = -2\,\Delta,$$

z której w szczególności wynika nierówność:

$$f(x_0 - k'', y_0 - k')\,\Delta < 0.$$

Widzimy więc, że punkt $x_0 - k''$, $y_0 - k'$ leży nazewnątrz paraboli, a to określa geometrycznie kierunek wektora o składowych $-k''$, $-k'$. Jeżelibyśmy teraz utworzyli wektor urojony o składowych:

$$-k'' + i\,a'', \quad -k' + i\,b'', \tag{127}$$

to dostrzeglibyśmy na podstawie powyższego rozważania, że jest on wektorem górnym, gdy wektor rzeczywisty o składowych a'', b''

tworzy z kierunkiem asymptotycznym, prowadzącym nazewnątrz paraboli, kąt dodatni mniejszy od π, jest zaś wektorem dolnym, gdy wektor o składowych a'', b'' tworzy z kierunkiem asymptotycznym, prowadzącym nazewnątrz paraboli, kąt ujemny bezwzględnie mniejszy od π. Na podstawie trzeciego ze wzorów (124) wnosimy, że styczna do paraboli w punkcie $a' + i\,a''$, $b' + i\,b''$ jest prostą górną, gdy wektor o składowych (127) jest górny, jest natomiast prostą dolną, gdy rzeczony wektor jest dolny. Zauważymy przytem tutaj, że analogiczne zależności zachodzą pomiędzy biegunowemi o urojonych dwukierunkach i odnośnemi wektorami (126), względnie (127).

W założeniu, że punkt urojony a, b położony jest na istotnej krzywej stopnia drugiego, wyprowadzimy jeszcze inne wzory na wielkości:

$$(128) \qquad \Phi(-\beta', \alpha'), \quad \Phi(-\beta'', \alpha''), \quad \Psi(-\beta', \alpha'; -\beta'', \alpha'').$$

Przy rzeczonem założeniu istnieje taki czynnik rzeczywisty σ, że zachodzą równości:

$$(129) \qquad \alpha' = \sigma\, b'', \quad \beta' = -\sigma\, a''$$

i wtedy można pierwszą i trzecią z wielkości (128) przedstawić w postaci:

$$(130) \qquad \begin{cases} \Phi(-\beta', \alpha') = \sigma^2\, \Phi(a'', b''), \\ \Psi(-\beta', \alpha'; -\beta'', \alpha'') = \sigma \sin\vartheta\, \varphi(a'', b''). \end{cases}$$

Możemy skorzystać z rachunków wykonanych w § 51 i w paragrafie bieżącym oraz zastosować parametr w, którym posługiwaliśmy się w § 54. Jeżeli wartość tego parametru w punkcie krzywej o spółrzędnych $a' + i\,a''$, $b' + i\,b''$ oznaczymy przez w_0, to, opierając się na rzeczonych rachunkach, łatwo wyprowadzimy wzory:

$$(131) \qquad \begin{cases} \Phi(-\beta', \alpha') = \dfrac{w_0\,\delta - \Delta}{w_0}\,\Phi(a'', b''), \\ \Phi(-\beta'', \alpha'') = \omega\, w_0 - \delta\, \Phi(a'', b''), \\ \Psi(-\beta', \alpha'; -\beta'', \alpha'') = \tau \sin\vartheta \sqrt{w_0\,(w_0\,\delta - \Delta)}, \end{cases}$$

gdzie $\tau = \pm 1$. Dla stycznej, która jest prostą górną, τ spełnia nie-

równość $\tau \sin \vartheta > 0$, a dla stycznej, która jest prostą dolną, τ spełnia nierówność $\tau \sin \vartheta < 0$. Zauważymy przytem, że wzory (131) mogą być stosowane zarówno w przypadkach, gdy $\delta \neq 0$, jak i w przypadkach, gdy $\delta = 0$.

Styczną o urojonym dwukierunku można także określić przekształceniem jednej z par spółrzędnych x', y' i x'', y'' na drugą. Związki, określające to przekształcenie, otrzymają się z równania (109) przez podstawienie w niem zamiast x, y odpowiednio wielkości $x' + i\,x'', y' + i\,y''$ i przyrównanie do zera części rzeczywistej i części urojonej. Tą drogą dochodzimy do równań:

$$(132)\qquad \begin{cases} \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' - (\alpha'' x'' + \beta'' y'') = 0, \\ \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' + \alpha' x'' + \beta' y'' = 0. \end{cases}$$

W łączności z pierwszem z tych równań zwracamy uwagę na to, że prosta:

$$(133)\qquad \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' - w_0 = 0$$

jest styczną w punkcie a', b' do krzywej $f(x', y') = w_0$ i że prosta:

$$(134)\qquad \alpha'' x'' + \beta'' y'' = w_0$$

jest styczną w punkcie a'', b'' do krzywej $\varphi(x'', y'') = w_0$. W łączności z drugiem z równań (132) zauważamy, że prosta:

$$(135)\qquad \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' = 0$$

jest średnicą każdej z krzywych $f(x', y') = w$, sprzężoną z dwukierunkiem $b'' : a''$ i że prosta:

$$(136)\qquad \alpha' x'' + \beta' y'' = 0$$

ma dwukierunek stycznej (133).

Związki (132) można także wyprowadzić przez różniczkowanie równań, określających ślady punktów zespolonych krzywej stopnia drugiego. Równania te są:

$$(69)\qquad \begin{cases} f(x', y') - \varphi(x'', y'') = 0, \\ (A x' + B y' + D) x'' + (B x' + C y' + E) y'' = 0 \end{cases}$$

i przez różniczkowanie otrzymujemy z nich związki:

$$(137)\quad \begin{cases} (A x' + B y' + D)\,dx' + (B x' + C y' + E)\,dy' - \\ \quad - (A x'' + B y'')\,dx'' - (B x'' + C y'')\,dy'' = 0, \\ (A x'' + B y'')\,dx' + (B x'' + C y'')\,dy' + \\ + (A x' + B y' + D)\,dx'' + (B x' + C y' + E)\,dy'' = 0. \end{cases}$$

Weźmy pod uwagę węgieł, którego pierwszy bok ma składowe $x' - a'$, $y' - b'$, a drugi bok ma składowe $x'' - a''$, $y'' - b''$. Na podstawie równań (137) łatwo napisać warunki, którym muszą czynić zadość rzeczone składowe, ażeby punkt $x' + i\,x'', y' + i\,y''$ był bieżącym punktem stycznej do krzywej stopnia drugiego. W tym celu trzeba w nawiasach równań (137) spółrzędne x', y', x'', y'' zastąpić odpowiednio spółrzędnemi a', b', a'', b'', a zamiast różniczek dx', dy', dx'', dy'' wstawić odpowiednio różnice $x' - a', y' - b'$, $x'' - a'', y'' - b''$. Tą drogą otrzymamy równania:

$$(138)\quad \begin{cases} \alpha'(x' - a') + \beta'(y' - b') - \alpha''(x'' - a'') - \beta''(y'' - b'') = 0, \\ \alpha''(x' - a') + \beta''(y' - b') + \alpha'(x'' - a'') + \beta'(y'' - b'') = 0. \end{cases}$$

A jeżeli zwrócimy uwagę na to, że na podstawie równań (69) zachodzą równości:

$$\alpha' a' + \beta' b' + \gamma' - \alpha'' a'' - \beta'' b'' = 0,$$

$$\alpha' a'' + \beta' b'' = \alpha'' a' + \beta'' b' + \gamma'' = 0,$$

to z równań (138) otrzymamy równania (132).

Zajmiemy się tu jeszcze odniesieniem krzywej stopnia drugiego i jej stycznej w punkcie $a' + i\,a'', b' + i\,b''$ do pewnego szczególnego układu spółrzędnych. Niech osią x tego układu będzie średnica krzywej, sprzężona z dwukierunkiem $b'' : a''$, t.j. prosta:

$$\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' = 0,$$

a osią y styczna do krzywej:

$$f(x, y) - w_0 = 0$$

w punkcie o spółrzędnych a', b', t.j. prosta:

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' - w_0 = 0.$$

Jeżeli zastosujemy oznaczenia:

$$(139) \qquad R' = \sqrt{\Phi(-\beta', \alpha')}, \quad R'' = \sqrt{\Phi(-\beta'', \alpha'')},$$

to można będzie na podstawie wzorów (67) § 21 tomu I nowe spółrzędne $\bar{x}, \bar{y}$ wyrazić przez dawne zapomocą równości:

$$(140) \qquad \begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\varepsilon'' R'' (\alpha' x + \beta' y + \gamma' - w_0)}{\alpha' \beta'' - \beta' \alpha''}, \\ \bar{y} = \dfrac{\varepsilon' R' (\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'')}{\alpha' \beta'' - \beta' \alpha''}, \end{cases}$$

w których $\varepsilon' = \pm 1$, $\varepsilon'' = \pm 1$. Początek nowych spółrzędnych leży w punkcie a', b', a dwukierunki osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ określają się odpowiednio stosunkami $-\alpha'' : \beta''$ i $b'' : a''$. Stąd wynika, że można uważaną zmianę spółrzędnych przedstawić także związkami:

$$(141) \qquad \begin{cases} x = a' - \dfrac{\beta''}{\varepsilon_1 R''} \bar{x} + \dfrac{a''}{\varepsilon_2 \sqrt{\Phi(a'', b'')}} \bar{y}, \\ y = b' + \dfrac{\alpha''}{\varepsilon_1 R''} \bar{x} + \dfrac{b''}{\varepsilon_2 \sqrt{\Phi(a'', b'')}} \bar{y}, \end{cases}$$

w których $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$. Porównamy jeszcze układy związków (140) i (141) przez bezpośrednie podstawienie. Z równań (141) wynikają wyrażenia:

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' - w_0 = -\frac{\alpha' \beta'' - \beta' \alpha''}{\varepsilon_1 R''} \bar{x},$$

$$\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' = \frac{w_0}{\varepsilon_2 \sqrt{\Phi(a'', b'')}} \bar{y}.$$

Podstawiając pierwsze z tych wyrażeń w pierwszy ze wzorów (140) dochodzimy do wyniku, że pomiędzy znakami ε'' i ε_1 zachodzi związek $\varepsilon_1 \varepsilon'' = -1$. Podstawiając zaś drugie z tych wyrażeń w drugi ze wzorów (140) oraz stosując pierwszy i trzeci ze wzorów (131) otrzymamy związek $\varepsilon_2 \varepsilon' = \tau \zeta$, gdzie $\zeta = +1$, gdy wielkość w_0 jest dodatnia, a $\zeta = -1$, gdy wielkość w_0 jest ujemna. Jeżeli teraz oznaczymy spółrzędne urojonego punktu

$a' + i\,a''$, $b' + i\,b''$ w układzie $\bar{x}, \bar{y}$ przez $\bar{a}, \bar{b}$, to korzystając ze wzorów (140) i (131) a także z powyższych uwag co do znaków, dojdziemy do równości:

$$\bar{a} = 0, \quad \bar{b} = \varepsilon_2\, i \sqrt{\Phi(a'', b'')}. \tag{142}$$

Podstawimy następnie w wielomian $f(x, y)$ wyrażenia (141). Wtedy otrzymamy równość postaci:

$$f(x, y) = \bar{A}\,\bar{x}^2 + 2\,\bar{B}\,\bar{x}\,\bar{y} + \bar{C}\,\bar{y}^2 + 2\,\bar{D}\,\bar{x} + 2\,\bar{E}\,\bar{y} + \bar{F}, \tag{143}$$

gdzie spółczynniki $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{E}, \bar{F}$ można obliczyć przez zastosowanie wzorów (16) § 6 do zmiany spółrzędnych, określonej związkami (141). Tą drogą dochodzimy naprzód do wyrażeń następujących:

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{A} = \dfrac{\varphi(-\beta'', \alpha'')}{R''^2}, \quad \bar{B} = \dfrac{\varphi(-\beta'', \alpha''; a'', b'')}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,R''\sqrt{\Phi(a'', b'')}}, \quad \bar{C} = \dfrac{\varphi(a'', b'')}{\Phi(a'', b'')}, \\ \bar{D} = -\dfrac{\alpha'\beta'' - \beta'\alpha''}{\varepsilon_1 R''}, \quad \bar{E} = \dfrac{a''\alpha' + b''\beta'}{\varepsilon_2\sqrt{\Phi(a'', b'')}}, \quad \bar{F} = f(a', b'). \end{array}\right. \tag{144}$$

Dalej możemy sprawdzić, że tożsamościowo spełniona jest równość:

$$\varphi(-\beta'', \alpha'') = \varphi(a'', b'')\,\delta,$$

i jeżeli uwzględnimy jeszcze związki, któremi połączone są wielkości, zachodzące w danych rozważanego zadania, to otrzymamy łatwo na spółczynniki (144) wartości:

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{A} = \dfrac{w_0\,\delta}{\omega\,w_0 - \Phi(a'', b'')\,\delta}, \quad \bar{B} = 0, \quad \bar{C} = \dfrac{w_0}{\Phi(a'', b'')}, \\ \bar{D} = -\dfrac{\tau\sqrt{w_0\,(w_0\,\delta - \Delta)}}{\varepsilon_1\sqrt{\omega\,w_0 - \Phi(a'', b'')\,\delta}}, \quad \bar{E} = 0, \quad \bar{F} = w_0. \end{array}\right. \tag{145}$$

Z wartości tych wynika, że w nowych spółrzędnych $\bar{x}, \bar{y}$ dana krzywa stopnia drugiego przedstawiona będzie równaniem:

$$\bar{y}^2 = 2\,\bar{p}\,\bar{x} + \bar{q}\,\bar{x}^2 - \bar{b}''^2, \tag{146}$$

w którem przyjęto oznaczenia:

$$(147)\quad \begin{cases} \bar{p} = \dfrac{\varepsilon_1 \tau \zeta \Phi(a'', b'')}{\sqrt{\omega w_0 - \Phi(a'', b'')\delta}} \sqrt{\dfrac{w_0 \delta - \Delta}{w_0}}, \\ \bar{q} = -\dfrac{\Phi(a'', b'')\delta}{\omega w_0 - \Phi(a'', b'')\delta}, \quad \bar{b}'' = \varepsilon_2 \sqrt{\Phi(a'', b'')}. \end{cases}$$

Weźmy teraz pod uwagę styczną do krzywej w punkcie (142). Równanie jej będziemy mogli napisać w postaci:

$$(148)\qquad \bar{y} + i\left(\frac{\bar{p}}{\bar{b}''}\bar{x} - \bar{b}''\right) = 0.$$

Jeżeli w tych równaniach wstawimy zamiast $\bar{x}, \bar{y}$ odpowiednio sumy $\bar{x}' + i\bar{x}'', \bar{y}' + i\bar{y}''$, to dla krzywej (146) otrzymamy związki:

$$(149)\quad \begin{cases} \bar{y}'^2 - \bar{y}''^2 = 2\bar{p}\bar{x}' + \bar{q}(\bar{x}'^2 - \bar{x}''^2) - \bar{b}''^2, \\ \bar{y}'\bar{y}'' = (\bar{p} + \bar{q}\bar{x}')\bar{x}'', \end{cases}$$

a dla stycznej (148) związki:

$$(150)\qquad \bar{y}' = \frac{\bar{p}}{\bar{b}''}\bar{x}'', \quad \bar{y}'' - \bar{b}'' = -\frac{\bar{p}}{\bar{b}''}\bar{x}'.$$

Ażeby rachunki te zilustrować geometrycznie uważajmy na płaszczyźnie P układ spółrzędnych prostolinjowych $\bar{x}, \bar{y}$, określony wzorami (140) lub (141) i weźmy pod uwagę płaszczyzny $\bar{R}$ i $\bar{A}$, przyjmując na nich odnośne układy spółrzędnych $\bar{x}', \bar{y}'$ i $\bar{x}'', \bar{y}''$. Równania (149) określają odwzorowanie, należące do odwzorowań, któremi zajmowaliśmy się w §§ 50, 51, 52 i 54. Równania (150) określają odwzorowanie, które należy do kategorji odwzorowań, rozważanej w § 55 tomu I i w § 47 tomu II. Rachunki, które wykonaliśmy w paragrafie bieżącym, odnoszą się do wszelkich istotnych krzywych stopnia drugiego. Ograniczymy się do rozważenia odnośnego rysunku w przypadku elipsy rzeczywistej. Na figurze 94 daną elipsą rzeczywistą jest elipsa płaszczyzny $\bar{R}$, mająca najmniejszy obwód. Oś $\bar{x}'$ tej płaszczyzny przechodzi przez wspólny środek położo-

nych na niej elips, a oś $\bar{y}'$ jest styczną do jednej z tych elips w początku spółrzędnych $\bar{O}'$. Punkty $\bar{O}'$ i $\bar{B}$ należą zarówno w odwzorowaniu (149), jak w odwzorowaniu (150), do punktów sobie odpowiadających. Punkty te są śladami na płaszczyznach

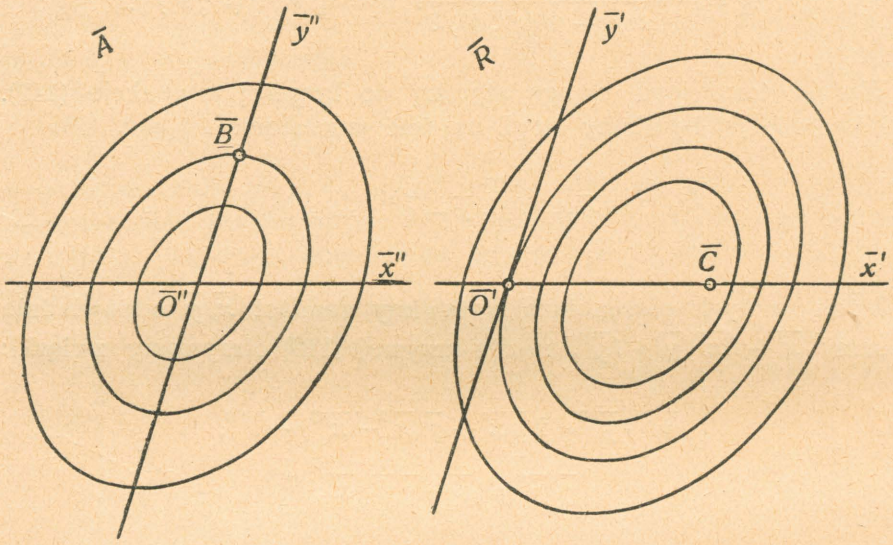

Fig. 94.

$\bar{R}$ i $\bar{A}$ punktu styczności krzywej (146) z prostą (148). Prócz tego zauważymy, że ślad $\bar{R}$ rzeczywistego punktu styczności stycznej (148) określa się spółrzędnemi:

$$\bar{x}' = \frac{\bar{b}''^2}{\bar{p}}, \quad \bar{y}' = 0,$$

a więc położony jest na osi $\bar{x}'$. Na fig. 94 ślad ten oznaczony jest literą $\bar{C}$; w odwzorowaniu, określonem równaniami (150), punkty $\bar{C}$ i $\bar{O}''$ są punktami sobie odpowiadającemi. Zwróćmy wreszcie uwagę na to, że w przypadkach elipsy urojonej, hiperboli i paraboli odnośne figury byłyby w analogicznym stosunku do figur 91, 92, 93, jak figura 94 do figury 90.

§ 56. O dwukierunkach urojonych skojarzonych inwolucyjnie.

Niech będzie związek:

$$A\,u_1\,u_2 + B\,(u_1\,v_2 + v_1\,u_2) + C\,v_1\,v_2 = 0, \tag{151}$$

w którym A, B, C oznaczają spółczynniki rzeczywiste, nie będące wszystkie jednocześnie zerami, a u_1, v_1 i u_2, v_2 oznaczają składowe dwóch wektorów zespolonych. Dwukierunki wektorów, których składowe spełniają związek (151), nazywamy dwukierunkami skojarzonemi inwolucyjnie. Stosownie do oznaczeń, przyjętych w tej książce, związek (151) można napisać w postaci:

$$\varphi\,(u_1, v_1; u_2, v_2) = 0. \tag{152}$$

Gdy $\delta = 0$, wówczas na mocy tego związku do dwukierunku rzeczywistego, będącego przy odpowiedniej interpretacji naszych wzorów dwukierunkiem asymptotycznym, należą wszelkie dowolne dwukierunki rzeczywiste i urojone. Założymy w dalszym ciągu, że przypadek ten nie zachodzi, t.j. że $\delta \neq 0$. Przy tem założeniu na mocy związku (151) lub (152) każdemu określonemu dwukierunkowi $v_1 : u_1$ odpowiada jeden określony dwukierunek $v_2 : u_2$ i nawzajem. Wtedy z rozważań § 20 wnosimy, że w tej odpowiedniości dwukierunkowi rzeczywistemu odpowiada zawsze dwukierunek rzeczywisty. Stąd wynika, że przy tem założeniu każdemu dwukierunkowi urojonemu odpowiada dwukierunek urojony. Zajmiemy się tutaj pewnemi własnościami par dwukierunków urojonych, skojarzonych inwolucyjnie. Jeżeli przyjmiemy:

$$\frac{v_1}{u_1} = m_1' + i\,m_1'', \quad \frac{v_2}{u_2} = m_2' + i\,m_2'', \tag{153}$$

gdzie m_1', m_1'', m_2', m_2'' oznaczają liczby rzeczywiste, to dla rzeczonych par odpowiadających sobie dwukierunków liczby m_1'' i m_2'' będą obie różne od zera. Związek (151) lub (152) możemy na podstawie równości (153) napisać w postaci:

$$A + B\,(m_1' + i\,m_1'' + m_2' + i\,m_2'') + \\ + C\,(m_1' + i\,m_1'')\,(m_2' + i\,m_2'') = 0, \tag{154}$$

a stąd dochodzimy przez rozwiązanie do wzoru:

$$m_2' + i\,m_2'' = -\frac{A + B\,(m_1' + i\,m_1'')}{B + C\,(m_1' + i\,m_1'')},$$

który można zastąpić wzorem:

$$(155)\quad m_2' + i\,m_2'' = \frac{-(A + B\,m_1')\,(B + C\,m_1') - B\,C\,m_1''^2 + i\,\delta\,m_1''}{(B + C\,m_1')^2 + C^2\,m_1''^2}.$$

Z tego wzoru wynika, że liczby m_1'' i m_2'' są tych samych znaków, gdy odnośna inwolucja jest eliptyczna, są zaś różnych znaków, gdy odnośna inwolucja jest hiperboliczna. Jeżeli $\operatorname{tg}\varphi_1$ jest styczną kątów pierwszego z tych dwukierunków z osią x-ów, a $\operatorname{tg}\varphi_2$ styczną kątów drugiego z tych dwukierunków z osią x-ów, to na podstawie wzoru (27), podanego w § 26 tomu I, łatwo wyprowadzimy wzory:

$$(156)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{[m_1' + (m_1'^2 + m_1''^2)\cos\vartheta + i\,m_1'']\sin\vartheta}{1 + 2\,m_1'\cos\vartheta + (m_1'^2 + m_1''^2)\cos^2\vartheta}, \\ \operatorname{tg}\varphi_2 = \dfrac{[m_2' + (m_2'^2 + m_2''^2)\cos\vartheta + i\,m_2'']\sin\vartheta}{1 + 2\,m_2'\cos\vartheta + (m_2'^2 + m_2''^2)\cos^2\vartheta}. \end{cases}$$

Ale ze wzoru (29), podanego w § 26 tomu I, wynika, że dwukierunek urojony jest górny, gdy spółczynnik przy i jego stycznej z osią x-ów jest dodatni, że natomiast dwukierunek jest dolny, gdy spółczynnik przy i jego stycznej z osią x-ów jest ujemny. Korzystając przeto ze wzorów (156) i z poprzednich wyników co do znaków wielkości m_1'' i m_2'', dojdziemy do t w i e r d z e ń następujących. Dwa dwukierunki urojone skojarzone inwolucyjnie są bądź oba górne, bądź też oba dolne, gdy odnośna inwolucja jest eliptyczna. Z dwóch dwukierunków urojonych skojarzonych inwolucyjnie jeden jest górny, a drugi dolny, gdy odnośna inwolucja jest hiperboliczna.

Niech teraz wielkości:

$$(157)\qquad \lambda_1 = \lambda_1' + i\,\lambda_1'',\quad \mu_1 = \mu_1' + i\,\mu_1''$$

będą spółczynnikami jednego z kierunków, względnie jednego z pseudokierunków dwukierunku urojonego, określonego wielkością $m_1' + i\,m_1''$. Założymy, że wielkości (157) są dane, i zajmiemy się z a d a n i e m wyznaczenia wielkości:

$$(158)\qquad \lambda_2 = \lambda_2' + i\,\lambda_2'',\quad \mu_2 = \mu_2' + i\,\mu_2'',$$

będących spółczynnikami jednego z kierunków, względnie pseudokierunków dwukierunku urojonego $m_2' + i\, m_2''$ spełniającego związek (154), w którym spółczynniki A, B, C są dane, a odnośny wyznacznik δ jest różny od zera. Szukane wielkości (158) muszą wtedy spełniać związek:

$$\varphi(\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2) = 0 \tag{159}$$

i być spółczynnikami kierunkowemi, względnie spółczynnikami pseudokierunkowemi. Związek (159) można napisać w postaci:

$$(A\lambda_1 + B\mu_1)\lambda_2 + (B\lambda_1 + C\mu_1)\mu_2 = 0, \tag{160}$$

skąd wynika, że w celu rozwiązania uważanego zadania można użyć metodę, stosowaną do linij prostych o urojonym dwukierunku w § 58 tomu I. Na podstawie równości (157) mamy:

$$A\lambda_1 + B\mu_1 = A\lambda_1' + B\mu_1' + i(A\lambda_1'' + B\mu_1''),$$

$$B\lambda_1 + C\mu_1 = B\lambda_1' + C\mu_1' + i(B\lambda_1'' + C\mu_1'')$$

i przytem zauważamy, że zachodzi równość:

$$(A\lambda_1' + B\mu_1')(B\lambda_1'' + C\mu_1'') - (A\lambda_1'' + B\mu_1'')(B\lambda_1' + C\mu_1') = \\ = \delta(\lambda_1'\mu_1'' - \mu_1'\lambda_1'').$$

Przyjmiemy oznaczenia następujące:

$$\left\{\begin{array}{l} l = \dfrac{(A\lambda_1' + B\mu_1')^2 + (A\lambda_1'' + B\mu_1'')^2}{\delta(\lambda_1'\mu_1'' - \mu_1'\lambda_1'')}, \\ m = \dfrac{(A\lambda_1' + B\mu_1')(B\lambda_1' + C\mu_1') + (A\lambda_1'' + B\mu_1'')(B\lambda_1'' + C\mu_1'')}{\delta(\lambda_1'\mu_1'' - \mu_1'\lambda_1'')}, \\ n = \dfrac{(B\lambda_1' + C\mu_1')^2 + (B\lambda_1'' + C\mu_1'')^2}{\delta(\lambda_1'\mu_1'' - \mu_1'\lambda_1'')} \end{array}\right. \tag{161}$$

i zwrócimy uwagę na to, że formy $M(p, q)$ i $M(p', q'; p'', q'')$, określone wzorami:

$$\left\{\begin{array}{l} M(p, q) = l p^2 + 2 m p q + n q^2, \\ M(p', q'; p'', q'') = l p' p'' + m(p' q'' + q' p'') + n q' q'' \end{array}\right. \tag{162}$$

wyrazić można na podstawie wzorów (161) w sposób następujący:

$$(163)\quad \begin{cases} M(p,q) = \dfrac{\sin\vartheta\,[\varphi^2(\lambda_1', \mu_1'; p, q) + \varphi^2(\lambda_1'', \mu_1''; p, q)]}{\delta\,\Psi(\lambda_1', \mu_1'; \lambda_1'', \mu_1'')}, \\ M(p', q'; p'', q'') = \\ = \dfrac{\sin\vartheta\,\varphi(\lambda_1', \mu_1'; p', q')\,\varphi(\lambda_1', \mu_1'; p'', q'')}{\delta\,\Psi(\lambda_1', \mu_1'; \lambda_1'', \mu_1'')} + \\ + \dfrac{\sin\vartheta\,\varphi(\lambda_1'', \mu_1''; p', q')\,\varphi(\lambda_1'', \mu_1''; p'', q'')}{\delta\,\Psi(\lambda_1', \mu_1'; \lambda_1'', \mu_1'')}. \end{cases}$$

Niezmiennik dwukierunku $\mu_2 : \lambda_2$ oznaczymy przez I_2. Łatwo dostrzec, że niezmiennik ten określi się wzorem:

$$(164)\quad I_2 = \frac{\Phi(-B\lambda_1' - C\mu_1', A\lambda_1' + B\mu_1') + \Phi(-B\lambda_1'' - C\mu_1'', A\lambda_1'' + B\mu_1'')}{\delta\,\Psi(\lambda_1', \mu_1'; \lambda_1'', \mu_1'')}.$$

z którego, przy uwzględnieniu wiadomego związku pomiędzy niezmiennikami dwóch wektorów rzeczywistych, można łatwo wyprowadzić równość:

$$(165)\quad \delta^2\,\Psi^2(\lambda_1', \mu_1'; \lambda_1'', \mu_1'')\,(I_2^2 - 4) =$$

$$= [\Phi(-B\lambda_1' - C\mu_1', A\lambda_1' + B\mu_1') - \Phi(-B\lambda_1'' - C\mu_1'', A\lambda_1'' + B\mu_1'')]^2 +$$

$$+ 4\,\Phi^2(-B\lambda_1' - C\mu_1', A\lambda_1' + B\mu_1'; -B\lambda_1'' - C\mu_1'', A\lambda_1'' + B\mu_1'').$$

Jeżeli wyrażenie znajdujące się po prawej stronie tej równości jest zerem, t.j. jeżeli zachodzą jednocześnie obie równości:

$$(166)\quad \begin{cases} \Phi(-B\lambda_1' - C\mu_1', A\lambda_1' + B\mu_1') - \Phi(-B\lambda_1'' - C\mu_1'', A\lambda_1'' + B\mu_1'') = 0, \\ \Phi(-B\lambda_1' - C\mu_1', A\lambda_1' + B\mu_1'; -B\lambda_1'' - C\mu_1'', A\lambda_1'' + B\mu_1'') = 0, \end{cases}$$

to dwukierunek $\mu_2 : \lambda_2$ jest izotropowy.

Związki (164), (165), (166) można także przedstawić w innej formie. Rachunkiem, który doprowadził do drugiego ze wzorów (123), skonstatować można wzory:

$$\Phi(-B\lambda_1' - C\mu_1', A\lambda_1' + B\mu_1') = \omega\,\varphi(\lambda_1', \mu_1') - \delta\,\Phi(\lambda_1', \mu_1'),$$

$$\Phi(-B\lambda_1'' - C\mu_1'', A\lambda_1'' + B\mu_1'') = \omega\,\varphi(\lambda_1'', \mu_1'') - \delta\,\Phi(\lambda_1'', \mu_1''),$$

a więc można wzór (164) zastąpić wzorem:

$$(167)\quad I_2 = \frac{\omega\,[\varphi(\lambda_1', \mu_1') + \varphi(\lambda_1'', \mu_1'')] - \delta\,[\Phi(\lambda_1', \mu_1') + \Phi(\lambda_1'', \mu_1'')]}{\delta\,\Psi(\lambda_1', \mu_1'; \lambda_1'', \mu_1'')}.$$

Jeżeli oznaczymy niezmiennik dwukierunku $\mu_1 : \lambda_1$ przez I_1 i zauważymy, że niezmiennik ten określa się wzorem:

$$(168)\quad I_1 = \frac{\Phi(\lambda_1', \mu_1') + \Phi(\lambda_1'', \mu_1'')}{\Psi(\lambda_1', \mu_1'; \lambda_1'', \mu_1'')},$$

to na podstawie wzoru (167) będziemy mogli skonstatować związek:

$$(169)\quad I_1 + I_2 = \frac{\omega\,[\varphi(\lambda_1', \mu_1') + \varphi(\lambda_1'', \mu_1'')]}{\delta\,\Psi(\lambda_1', \mu_1'; \lambda_1'', \mu_1'')}.$$

Gdy $\omega = 0$, co zachodzić może tylko w przypadku $\delta < 0$, wówczas mamy:

$$(170)\quad I_1 + I_2 = 0,$$

t.j. niezmienniki dwukierunków urojonych skojarzonych inwolucyjnie różnią się jeden od drugiego tylko znakiem. Gdy $\omega \neq 0$, wówczas na podstawie uwagi, że lewa strona równości (169) nie zmienia się przy przestawieniu wskaźników 1 i 2, otrzymujemy dla dwukierunków urojonych $\mu_1 : \lambda_1$ i $\mu_2 : \lambda_2$, skojarzonych inwolucyjnie, związek:

$$(171)\quad \frac{\varphi(\lambda_1', \mu_1') + \varphi(\lambda_1'', \mu_1'')}{\Psi(\lambda_1', \mu_1'; \lambda_1'', \mu_1'')} = \frac{\varphi(\lambda_2', \mu_2') + \varphi(\lambda_2'', \mu_2'')}{\Psi(\lambda_2', \mu_2'; \lambda_2'', \mu_2'')}.$$

Następnie możemy łatwo sprawdzić tożsamość:

$$\Phi(-B\lambda_1' - C\mu_1', A\lambda_1' + B\mu_1'; -B\lambda_1'' - C\mu_1'', A\lambda_1'' + B\mu_1'') =$$

$$= \omega\,\varphi(\lambda_1', \mu_1'; \lambda_1'', \mu_1'') - \delta\,\Phi(\lambda_1', \mu_1'; \lambda_1'', \mu_1''),$$

a zważywszy, że zachodzą równości:

$$\Phi(\lambda_1', \mu_1') - \Phi(\lambda_1'', \mu_1'') = \eta, \quad \Phi(\lambda_1', \mu_1'; \lambda_1'', \mu_1'') = 0,$$

gdzie $\eta = +1$, gdy dwukierunek $\mu_1 : \lambda_1$ jest nieizotropowy, a $\eta = 0$,

gdy dwukierunek ten jest izotropowy, możemy równość (165) zastąpić równością:

$$(172)\qquad \delta^2 \Psi^2(\lambda_1', \mu_1'; \lambda_1'', \mu_1'')(I_2^2 - 4) =$$

$$= \{\omega[\varphi(\lambda_1', \mu_1') - \varphi(\lambda_1'', \mu_1'')] - \delta\eta\}^2 + 4\omega^2\varphi^2(\lambda_1', \mu_1'; \lambda_1'', \mu_1'').$$

Gdy $\omega = 0$, co jak zauważyliśmy powyżej zachodzić może tylko wówczas, gdy inwolucja jest hiperboliczna, prawa strona równości (172) jest zerem tylko wtedy, gdy $\eta = 0$, t.j. gdy dwukierunek $\mu_1 : \lambda_1$ jest izotropowy. W każdym takim przypadku izotropowemu dwukierunkowi $\mu_1 : \lambda_1$ odpowiada izotropowy dwukierunek $\mu_2 : \lambda_2$, i przytem jeden z tych dwukierunków jest górny, a drugi dolny. Gdy $\omega \neq 0$, wówczas waruki, by dwukierunek $\mu_2 : \lambda_2$ był izotropowy, można przedstawić równościami:

$$(173)\qquad \omega[\varphi(\lambda_1', \mu_1') - \varphi(\lambda_1'', \mu_1'')] - \delta\eta = 0,\ \varphi(\lambda_1', \mu_1'; \lambda_1'', \mu_1'') = 0$$

i przytem izotropowemu dwukierunkowi $\mu_1 : \lambda_1$ odpowiada izotropowy dwukierunek $\mu_2 : \lambda_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest równość $\varphi(\lambda_1, \mu_1) = 0$, co może być tylko wtedy, gdy zachodzą równości:

$$A = C,\quad B = A\cos\vartheta = C\cos\vartheta$$

i wówczas stosunki $\mu_1 : \lambda_1$ i $\mu_2 : \lambda_2$ określają ten sam dwukierunek izotropowy.

Założymy w dalszym ciągu, że przypadek, w którym dwukierunek $\mu_2 : \lambda_2$ jest izotropowy, nie zachodzi. Wtedy dla wyznaczenia składowych λ_2', μ_2' mieć będziemy równania:

$$(174)\quad \begin{cases} (l\sin\vartheta - S_2')\lambda_2' + (m\sin\vartheta - S_2'\cos\vartheta)\mu_2' = 0, \\ (m\sin\vartheta - S_2'\cos\vartheta)\lambda_2' + (n\sin\vartheta - S_2')\mu_2' = 0, \end{cases}$$

a dla wyznaczenia składowych λ_2'', μ_2'' równania:

$$(175)\quad \begin{cases} (l\sin\vartheta - S_2'')\lambda_2'' + (m\sin\vartheta - S_2''\cos\vartheta)\mu_2'' = 0, \\ (m\sin\vartheta - S_2''\cos\vartheta)\lambda_2'' + (n\sin\vartheta - S_2'')\mu_2'' = 0. \end{cases}$$

Wielkości S_2' i S_2'', figurujące w tych równaniach, są pierwiastkami równania na S_2:

$$(176)\qquad S_2^2 - I_2 S_2 + 1 = 0$$

i przytem zachodzi nierówność:

$$|S_2'| < |S_2''|. \tag{177}$$

Niech będzie teraz $\varepsilon_1 = \pm 1$, zależnie od tego, czy dwukierunek $\mu_1 : \lambda_1$ jest górny, czy też dolny. Podobnież niech będzie $\varepsilon_2 = \pm 1$, zależnie od tego, czy dwukierunek $\mu_2 : \lambda_2$ jest górny, czy też dolny. Z poprzedniego rozważania o dwukierunkach skojarzonych inwolucyjnie wynika, że gdy $\delta > 0$, wówczas $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = +1$ oraz, że gdy $\delta < 0$, wówczas $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$. Zwracamy przytem uwagę na to, że ta sama konkluzja wypływa ze wzoru (164) na niezmiennik I_2. Dla wyznaczenia składowych λ_2', μ_2' mamy, prócz równań (174), jeszcze równanie:

$$\Phi(\lambda_2', \mu_2') = \frac{I_2 + \varepsilon_2 \sqrt{I_2^2 - 4}}{2\varepsilon_2 \sqrt{I_2^2 - 4}}, \tag{178}$$

a dla wyznaczenia składowych λ_2'', μ_2'', prócz równań (175), jeszcze równanie:

$$\Phi(\lambda_2'', \mu_2'') = \frac{I_2 - \varepsilon_2 \sqrt{I_2^2 - 4}}{2\varepsilon_2 \sqrt{I_2^2 - 4}}. \tag{179}$$

Podane tutaj równania określają węgły kierunków dwukierunku nieizotropowego, skojarzonego inwolucyjnie z dwukierunkiem $\mu_1 : \lambda_1$, i przytem równania (174) i (178) określają pierwsze boki tych węgłów, a równania (175) i (179) określają drugie boki tych węgłów.

W celu rozważenia dalszych konsekwencyj tych rachunków zastosujemy jeszcze prostokątny układ spółrzędnych $\bar{x}, \bar{y}$, którego początek leży w początku układu x, y, a osie mają odpowiednio kierunki pierwszego i drugiego boku węgła kierunku, względnie pseudokierunku λ_1, μ_1. Pomiędzy spółrzędnemi punktu w jednym i drugim z tych układów zachodzą związki:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\lambda_1'}{\sqrt{\Phi(\lambda_1', \mu_1')}}\,\bar{x} + \dfrac{\lambda_1''}{\sqrt{\Phi(\lambda_1'', \mu_1'')}}\,\bar{y}, \\ y = \dfrac{\mu_1'}{\sqrt{\Phi(\lambda_1', \mu_1')}}\,\bar{x} + \dfrac{\mu_1''}{\sqrt{\Phi(\lambda_1'', \mu_1'')}}\,\bar{y}. \end{cases} \tag{180}$$

Jeżeli składowe wektora λ_2', μ_2' oznaczymy w układzie $\bar{x}, \bar{y}$ przez $\bar{\lambda}_2', \bar{\mu}_2'$, to na podstawie związków (180) otrzymamy z równań (174) równania:

$$[(l\lambda_1' + m\mu_1')\sin\vartheta - (\lambda_1' + \mu_1'\cos\vartheta)S_2']\frac{\bar{\lambda}_2'}{\sqrt{\Phi(\lambda_1', \mu_1')}} +$$

$$+ [(l\lambda_1'' + m\mu_1'')\sin\vartheta - (\lambda_1'' + \mu_1''\cos\vartheta)S_2']\frac{\bar{\mu}_2'}{\sqrt{\Phi(\lambda_1'', \mu_1'')}} = 0,$$

$$[(m\lambda_1' + n\mu_1')\sin\vartheta - (\lambda_1'\cos\vartheta + \mu_1')S_2']\frac{\bar{\lambda}_2'}{\sqrt{\Phi(\lambda_1', \mu_1')}} +$$

$$+ [(m\lambda_1'' + n\mu_1'')\sin\vartheta - (\lambda_1''\cos\vartheta + \mu_1'')S_2']\frac{\bar{\mu}_2'}{\sqrt{\Phi(\lambda_1'', \mu_1'')}} = 0.$$

Pomnożymy teraz lewe strony tych równań odpowiednio przez λ_1' i μ_1' i dodamy; podobnież pomnożymy lewe strony tych równań odpowiednio przez λ_1'' i μ_1'' i dodamy. Tą drogą otrzymamy równania:

$$(181)\quad \begin{cases} [M(\lambda_1', \mu_1')\sin\vartheta - \Phi(\lambda_1', \mu_1')S_2']\dfrac{\bar{\lambda}_2'}{\sqrt{\Phi(\lambda_1', \mu_1')}} + \\ + M(\lambda_1', \mu_1'; \lambda_1'', \mu_1'')\sin\vartheta\dfrac{\bar{\mu}_2'}{\sqrt{\Phi(\lambda_1'' \mu_1'')}} = 0, \\ M(\lambda_1', \mu_1'; \lambda_1'', \mu_1'')\sin\vartheta\dfrac{\bar{\lambda}_2'}{\sqrt{\Phi(\lambda_1', \mu_1')}} + \\ + [M(\lambda_1'', \mu_1'')\sin\vartheta - \Phi(\lambda_1'', \mu_1'')S_2']\dfrac{\bar{\mu}_2'}{\sqrt{\Phi(\lambda_1'', \mu_1'')}} = 0. \end{cases}$$

Jeżeli następnie składowe wektora λ_2'', μ_2'' oznaczymy w układzie $\bar{x}, \bar{y}$ przez $\bar{\lambda}_2'', \bar{\mu}_2''$, to podobnież otrzymamy z równań (175) równania:

$$(182)\quad \begin{cases} [M(\lambda_1', \mu_1')\sin\vartheta - \Phi(\lambda_1', \mu_1')S_2'']\dfrac{\bar{\lambda}_2''}{\sqrt{\Phi(\lambda_1', \mu_1')}} + \\ + M(\lambda_1', \mu_1'; \lambda_1'', \mu_1'')\sin\vartheta\dfrac{\bar{\mu}_2''}{\sqrt{\Phi(\lambda_1'', \mu_1'')}} = 0, \\ M(\lambda_1', \mu_1'; \lambda_1'', \mu_1'')\sin\vartheta\dfrac{\bar{\lambda}_2''}{\sqrt{\Phi(\lambda_1', \mu_1')}} + \\ + [M(\lambda_1'', \mu_1'')\sin\vartheta - \Phi(\lambda_1'', \mu_1'')S_2'']\dfrac{\bar{\mu}_2''}{\sqrt{\Phi(\lambda_1'', \mu_1'')}} = 0. \end{cases}$$

Oznaczmy przez τ kąt, który wektor λ_2', μ_2' tworzy z wektorem λ_1', μ_1'. Łatwo dostrzec, że zachodzą wzory następujące:

$$(183)\quad \begin{cases} \bar{\lambda}_2' = \sqrt{\Phi(\lambda_2', \mu_2')}\cos\tau, & \bar{\mu}_2' = \varepsilon_1\sqrt{\Phi(\lambda_2', \mu_2')}\sin\tau, \\ \bar{\lambda}_2'' = -\varepsilon_2\sqrt{\Phi(\lambda_2'', \mu_2'')}\sin\tau, & \bar{\mu}_2'' = \varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{\Phi(\lambda_2'', \mu_2'')}\cos\tau. \end{cases}$$

Jeżeli wyrażenia (183) podstawimy w równania (181) i (182), to otrzymamy warunki, którym musi czynić zadość kąt τ. Z poprzednich rozważań wynika, że warunki te są ze sobą niesprzeczne i redukują się do jednego linjowego jednorodnego równania względem $\cos\tau$ i $\sin\tau$. W ten sposób zadanie, którem zajmujemy się, rozwiązane jest w tej postaci, że według danych boków węgła kierunku urojonego λ_1, μ_1, nie czyniącego zadość równościom (166), wzorami (178) i (179) określone są długości boków węgłów kierunków dwukierunku $\mu_2 : \lambda_2$, związkami zaś (181) i (182) nachylenia tych boków względem węgła kierunku λ_1, μ_1.

Zajmiemy się tu jeszcze zadaniem wyznaczenia inwolucji, która przeprowadza jeden w drugi dwa dane urojone dwukierunki. Jeżeli stosunki, określające dwa urojone dwukierunki, są $c_1' + i c_1''$ i $c_2' + i c_2''$, gdzie c_1', c_2', c_1'', c_2'' oznaczają liczby rzeczywiste, z których dwie ostatnie są różne od zera, to na podstawie równania (154) spółczynniki A, B, C szukanej inwolucji spełniać muszą warunek:

$$(184)\quad A + B(c_1' + i c_1'' + c_2' + i c_2'') + C(c_1' + i c_1'')(c_2' + i c_2'') = 0.$$

Stąd wynika, że rzeczone rzeczywiste wielkości A, B, C wyznaczyć trzeba z warunków:

$$(185)\quad \begin{cases} A + B(c_1' + c_2') + C(c_1' c_2' - c_1'' c_2'') = 0, \\ B(c_1'' + c_2'') + C(c_1' c_2'' + c_2' c_1'') = 0. \end{cases}$$

Założymy naprzód, że $c_1'' + c_2'' \neq 0$. Wtedy z równań (185) otrzymamy:

$$(186)\quad \begin{cases} B = -\dfrac{C}{c_1'' + c_2''}(c_1' c_2'' + c_2' c_1''), \\ A = \dfrac{C}{c_1'' + c_2''}[c_1'^2 c_2'' + c_2'^2 c_1'' + c_1'' c_2''(c_1'' + c_2'')]. \end{cases}$$

Dla wyróżnika inwolucji, określonej wzorami (186), mieć będziemy naprzód wyrażenie:

$$A\,C - B^2 = \frac{C^2}{(c_1'' + c_2'')^2}\{(c_1'^2\,c_2'' + c_2'^2\,c_1'')\,(c_1'' + c_2'') + \\ + c_1''c_2''(c_1'' + c_2'')^2 - (c_1'\,c_2'' + c_2'\,c_1'')^2\},$$

z którego łatwo otrzymamy wzór:

$$(187)\qquad A\,C - B^2 = \frac{C^2\,c_1''c_2''}{(c_1'' + c_2'')^2}[(c_2' - c_1')^2 + (c_1'' + c_2'')^2].$$

Stąd wynika, że przy spełnieniu nierówności $c_1''c_2'' > 0$ inwolucja jest eliptyczna, a przy spełnieniu nierówności $c_1''c_2'' < 0$ inwolucja jest hiperboliczna. Ten wynik był do przewidzenia na podstawie rozważań podanych na początku niniejszego paragrafu, według których w inwolucji eliptycznej dwa dwukierunki urojone skojarzone inwolucyjnie są albo oba górne, albo oba dolne, a w hiperbolicznej jeden z nich jest górny, a drugi dolny. Przypuśćmy teraz, że $c_1'' + c_2'' = 0$ i że $c_1'\,c_2'' + c_2'\,c_1'' \neq 0$. Wtedy z warunków (185) wynika:

$$(188)\qquad C = 0, \quad A = -B\,(c_1' + c_2')$$

i widać bezpośrednio, że inwolucja określona temi wzorami jest hiperboliczna. Jednym z dwukierunków niezmiennych tej inwolucji jest dwukierunek osi y-ów, drugim zaś dwukierunek, którego spółczynnik równa się $\frac{1}{2}(c_1' + c_2')$. Jeżeli wreszcie zachodzą jednocześnie obie równości: $c_1'' + c_2'' = 0$, $c_1'\,c_2'' + c_2'\,c_1'' = 0$, to drugie z równań (185) spełnione jest przy wszelkich B i C. Rzeczone równości można zastąpić równościami: $c_2' = c_1'$, $c_1'' + c_2'' = 0$, a to znaczy, że przy ich spełnieniu dane urojone dwukierunki są ze sobą sprzężone. Wtedy warunki (185) redukują się do warunku:

$$(189)\qquad A + 2\,B\,c_1' + C\,(c_1'^2 + c_1''^2) = 0.$$

Warunek ten określa nieskończenie wiele inwolucyj, w których dane urojone dwukierunki są ze sobą skojarzone inwolucyjnie. Wszystkie te inwolucje są hiperboliczne, bo jeden z tych dwukierunków jest górny, a drugi dolny. Można wniosek ten oprzeć także na równości:

$$A\,C - B^2 = -(B + C\,c_1')^2 - C^2\,c_1''^2,$$

wynikającej z warunku (189).

Napiszemy jeszcze w rozmaitych przypadkach związek inwolucyjny (151) o danych odpowiadających sobie urojonych dwukierunkach: $c_1' + i\,c_1''$, $c_2' + i\,c_2''$. Jeżeli $c_1'' + c_2'' \neq 0$, to mamy związek:

$$(190)\qquad [c_1'^2\,c_2'' + c_2'^2\,c_1'' + c_1''c_2''(c_1'' + c_2'')]\,u_1\,u_2 -$$

$$-\,(c_1'\,c_2'' + c_2'\,c_1'')\,(u_1\,v_2 + v_1\,u_2) + (c_1'' + c_2'')\,v_1\,v_2 = 0\,.$$

Jeżeli $c_1'' + c_2'' = 0$, a przytem $c_1'\,c_2'' + c_2'\,c_1'' \neq 0$, to żądany związek jest:

$$(191)\qquad (c_1' + c_2')\,u_1\,u_2 - (u_1\,v_2 + v_1\,u_2) = 0$$

i łatwo sprawdzić, że związek ten wynika ze związku (190) przez przyjęcie w nim założeń rozważanego obecnie przypadku. Jeżeli wreszcie zachodzą obie równości $c_2' = c_1'$, $c_1'' + c_2'' = 0$, to otrzymujemy związek:

$$(192)\quad B\,(u_1\,v_2 + v_1\,u_2 - 2\,c_1'\,u_1\,u_2) + C\,[v_1\,v_2 - (c_1'^2 + c_1''^2)\,u_1\,u_2] = 0\,,$$

w którym B i C są liczbami rzeczywistemi, które mogą być wybrane dowolnie, byleby nie były obie jednocześnie zerami.

§ 57. Niezmienniki formy stopnia drugiego i dwóch wektorów zespolonych oraz uogólnienie pewnych twierdzeń o średnicach istotnych krzywych stopnia drugiego rodzaju elips i rodzaju hiperbol.

Niech będzie w spółrzędnych prostolinjowych ξ, η forma stopnia drugiego:

$$(193)\qquad \varphi(\xi, \eta) = A\,\xi^2 + 2\,B\,\xi\,\eta + C\,\eta^2,$$

gdzie A, B, C oznaczają spółczynniki rzeczywiste, które nie wszystkie jednocześnie są zerami. Przy zmianie spółrzędnych prostolinjowych ξ, η na spółrzędne prostolinjowe $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ na podstawie związków:

$$(194)\qquad \xi = a_1\,\bar{\xi} + a_2\,\bar{\eta}, \quad \eta = b_1\,\bar{\xi} + b_2\,\bar{\eta}$$

wielkości:

$$(195) \qquad (\delta) = \frac{\delta}{\sin^2 \vartheta}, \quad (\omega) = \frac{\omega}{\sin^2 \vartheta}$$

są bezwzględnemi niezmiennikami, jak to widzieliśmy w § 7. Niech będą dwa wektory zespolone swobodne, określone w spółrzędnych ξ, η składowemi u_1, v_1 i u_2, v_2. Z rozważań, podanych w § 40 tomu I-go wynika, że wektory te mają względem zmian (194) niezmienniki bezwzględne:

$$(196) \qquad \begin{cases} \Phi_1 = \Phi(u_1, v_1), \quad \Phi_2 = \Phi(u_2, v_2), \\ \Phi = \Phi(u_1, v_1; u_2, v_2), \quad \Psi = \Psi(u_1, v_1; u_2, v_2), \end{cases}$$

spełniające związek:

$$(197) \qquad \Phi^2 + \Psi^2 = \Phi_1 \Phi_2.$$

Prócz niezmienników (195) i (196) zachodzą jeszcze niezmienniki bezwzględne, zależne jednocześnie od spółczynników formy (193) i od składowych u_1, v_1 i u_2, v_2. Z rozważań cytowanego powyżej § 7 wynika, że wielkości:

$$(198) \qquad \varphi_1 = \varphi(u_1, v_1), \quad \varphi = \varphi(u_1, v_1; u_2, v_2), \quad \varphi_2 = \varphi(u_2, v_2)$$

są takiemi niezmiennikami. Liczba spółczynników formy (193) wraz z liczbą składowych dwóch wektorów jest 7, a więc forma stopnia drugiego i dwa wektory mają 6 algebraicznie niezależnych od siebie niezmienników. Ponieważ zaś liczba wielkości (195), (196) i (198) jest 9, przeto pomiędzy niemi istnieć muszą 3 związki. Jednym z tych związków jest równość (197). Ażeby podać drugi z nich, zauważymy, że na podstawie rachunków § 45 tomu I łatwo dostrzec, że zachodzi równość:

$$\varphi_1 \varphi_2 - \varphi^2 = \delta (u_1 v_2 - v_1 u_2)^2,$$

którą można widocznie napisać w postaci:

$$(199) \qquad \varphi_1 \varphi_2 - \varphi^2 = (\delta) \Psi^2.$$

W celu wyprowadzenia trzeciego związku skonstatujemy mnożeniem wyznaczników związek:

$$(200) \qquad \begin{vmatrix} u_1 + v_1 \cos\vartheta, & u_1 \cos\vartheta + v_1 \\ A u_2 + B v_2, & B u_2 + C v_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1, v_1 \\ u_2, v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Phi_1, \Phi \\ \varphi, \varphi_2 \end{vmatrix},$$

z którego przez przestawienie znaczków 1 i 2 otrzymamy związek:

$$(201)\qquad \begin{vmatrix} u_2 + v_2\cos\vartheta, & u_2\cos\vartheta + v_2 \\ A\,u_1 + B\,v_1, & B\,u_1 + C\,v_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_2, & v_2 \\ u_1, & v_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Phi_2, & \Phi \\ \varphi, & \varphi_1 \end{vmatrix}.$$

Ale łatwo dostrzec, że zachodzą równości:

$$\begin{vmatrix} u_1 + v_1\cos\vartheta, & u_1\cos\vartheta + v_1 \\ A\,u_2 + B\,v_2, & B\,u_2 + C\,v_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_2 + v_2\cos\vartheta, & u_2\cos\vartheta + v_2 \\ A\,u_1 + B\,v_1, & B\,u_1 + C\,v_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 + v_1\cos\vartheta, & u_2 + v_2\cos\vartheta \\ B\,u_1 + C\,v_1, & B\,u_2 + C\,v_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_1\cos\vartheta + v_1, & u_2\cos\vartheta + v_2 \\ A\,u_1 + B\,v_1, & A\,u_2 + B\,v_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} 1, & \cos\vartheta \\ B, & C \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cos\vartheta, & 1 \\ A, & B \end{vmatrix} \right\} \begin{vmatrix} u_1, & v_1 \\ u_2, & v_2 \end{vmatrix}$$

i, że opierając się na nich, dojdziemy ze związków (200) i (201), przez dodanie stronami do równości:

$$\omega \begin{vmatrix} u_1, & v_1 \\ u_2, & v_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \Phi_1, & \Phi \\ \varphi, & \varphi_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Phi_2, & \Phi \\ \varphi, & \varphi_1 \end{vmatrix}.$$

Jeżeli zaś równość tę napiszemy w postaci:

$$(202)\qquad \Phi_1\,\varphi_2 + \Phi_2\,\varphi_1 - 2\,\Phi\,\varphi = (\omega)\,\Psi^2,$$

to będziemy mieli związek, który chcieliśmy wyprowadzić.

Założymy, że $\delta \neq 0$ i uważać będziemy związki:

$$(203)\qquad \varphi_1 = \varphi\,(u_1, v_1) = k_1, \quad \varphi_2 = \varphi\,(u_2, v_2) = k_2,$$

w których przez k_1 i k_2 oznaczone są stałe rzeczywiste, obie różne od zera. Jeżeli przyjmiemy, że wektory o składowych u_1, v_1 i u_2, v_2, spełniających związki (203), mają wspólny początek w początku spółrzędnych, to końce ich leżeć będą na krzywych stopnia drugiego, mających wspólny środek w tymże początku oraz wspólne asymptoty. Przypuśćmy teraz, że dwukierunki wektorów u_1, v_1 i u_2, v_2 są ze sobą sprzężone względem krzywych $\varphi\,(\xi, \eta) = \text{const.}$,

lub, jak mówiliśmy w poprzednim paragrafie, skojarzone inwolucyjnie na podstawie związku:

$$\varphi = \varphi(u_1, v_1; u_2, v_2) = 0. \tag{204}$$

Wtedy ze związków (199), (202) i (203) otrzymamy równości:

$$\Psi^2 = \frac{k_1 k_2}{(\delta)}, \quad k_2 \Phi_1 + k_1 \Phi_2 = \frac{(\omega) k_1 k_2}{(\delta)}. \tag{205}$$

Prawe strony tych równości są stałe, t.j. niezależne od wyboru wektorów zespolonych, których składowe spełniają równania (203) i (204). Możemy w szczególności te wektory wybrać w taki sposób, żeby ich dwukierunki były dwukierunkami głównemi względem krzywych $\varphi(\xi, \eta) = \text{const.}$, t.j. żeby prócz związku (204) spełniony był jeszcze związek:

$$\Phi = \Phi(u_1, v_1; u_2, v_2) = 0. \tag{206}$$

Jeżeli w tych przypadkach niezmienniki Φ_1, Φ_2 i Ψ oznaczymy odpowiednio przez Φ_{01}, Φ_{02} i Ψ_0, to mieć będziemy równości:

$$\Psi_0^2 = \frac{k_1 k_2}{(\delta)}, \quad k_2 \Phi_0 + k_1 \Phi_{02} = \frac{(\omega) k_1 k_2}{(\delta)}, \tag{207}$$

a korzystając z nich, będziemy mogli równości (205) przedstawić w postaci:

$$\Psi^2 = \Psi_0^2, \quad k_2 \Phi_1 + k_1 \Phi_2 = k_2 \Phi_{01} + k_1 \Phi_{02}. \tag{208}$$

Treść tych związków można wypowiedzieć w t w i e r d z e n i a c h następujących.

Jeżeli dwa wektory zespolone mają własności następujące: ich początki leżą we wspólnym środku dwóch istotnych krzywych stopnia drugiego, mających wspólne asymptoty; ich dwukierunki są różnemi od siebie dwukierunkami ze sobą sprzężonemi względem tych linij krzywych; wreszcie koniec jednego z nich leży na jednej, drugiego zaś na drugiej linji krzywej — to kwadrat pola równoległoboku, którego wektory te są bokami, jest wielkością niezależną od wyboru rzeczonych sprzężonych ze sobą dwukierunków i równa się kwadratowi pola prostokąta, będącego szczególnym przypadkiem rzeczonego równoległoboku, zachodzącym wtedy, gdy jego boki mają dwukierunki główne.

Jeżeli krzywe, o których mowa w poprzedniem twierdzeniu, określone są równaniami:

$$\varphi(\xi, \eta) = k_1, \quad \varphi(\xi, \eta) = k_2, \tag{209}$$

gdzie k_1 i k_2 są liczbami rzeczywistemi różnemi od zera, jeżeli kwadraty długości wektorów tego twierdzenia oznaczone są odpowiednio literami Φ_1, Φ_2 i Φ_{01}, Φ_{02}, to zachodzi równość:

$$k_2 \Phi_1 + k_1 \Phi_2 = k_2 \Phi_{01} + k_1 \Phi_{02}.$$

Zauważmy teraz, że wielkość Ψ, określona pierwszym ze wzorów (205), jest rzeczywista przy spełnieniu nierówności:

$$\frac{k_1 k_2}{\delta} > 0, \tag{210}$$

jest zaś urojona bez rzeczywistej części przy spełnieniu nierówności:

$$\frac{k_1 k_2}{\delta} < 0. \tag{211}$$

Widzimy stąd, że jeżeli krzywe (209) należą do rodzaju elips, to pole równoległoboku, o którem mowa w pierwszem z powyższych twierdzeń, jest rzeczywiste, gdy stałe k_1, k_2 są tych samych znaków, jest zaś urojone bez rzeczywistej części, gdy stałe k_1, k_2 są różnych znaków. Natomiast, jeżeli krzywe (209) są hiperbolami, to pole rzeczonego równoległoboku jest rzeczywiste, gdy stałe k_1, k_2 są różnych znaków, jest zaś urojone bez rzeczywistej części, gdy stałe k_1, k_2 są tych samych znaków. Warunki rzeczywistości, względnie urojoności pola Ψ można także wypowiedzieć w sposób następujący. Jeżeli krzywe (209) są rodzaju elips, to pole Ψ jest rzeczywiste, gdy krzywe te są homotetyczne (k_1 i k_2 tych samych znaków i przytem $k_1 \neq k_2$), lub gdy krzywe te nakrywają się ($k_1 = k_2$), jest zaś urojone, gdy jedna z tych krzywych jest rzeczywista, a druga urojona (k_1 i k_2 różnych znaków). Jeżeli krzywe (209) są hiperbolami, to pole Ψ jest rzeczywiste, gdy jedna z tych hiperbol jest sprzężona z hiperbolą homotetyczną z drugą (k_1 i k_2 różnych znaków i przytem $k_1 + k_2 \neq 0$) lub gdy hiperbole te są sprzężone ($k_1 + k_2 = 0$), jest zaś urojone, gdy hiperbole są homotetyczne (k_1 i k_2 tych samych znaków i przytem $k_1 \neq k_2$), lub też, gdy one nakrywają się ($k_1 = k_2$). Zauważymy tutaj, że przypadki

rzeczywistości pola Ψ bynajmniej nie ograniczają się do przypadków, w których boki równoległoboku są oba rzeczywiste, ale natomiast wśród wektorów, o których mowa w powyższych twierdzeniach, istnieją pary wektorów rzeczywistych tylko wtedy, gdy pole Ψ jest wielkością rzeczywistą i gdy obie krzywe (209) są krzywemi rzeczywistemi. Zatem wśród rzeczonych par wektorów istnieją pary wektorów rzeczywistych tylko w przypadkach następujących: 1) gdy krzywe (209) są homotetycznemi rzeczywistemi krzywemi rodzaju elips; 2) gdy krzywe (209) są pokrywającemi się rzeczywistemi krzywemi rodzaju elips; 3) gdy krzywe (209) są hiperbolami, z których jedna jest sprzężona z hiperbolą homotetyczną z drugą; 4) gdy krzywe (209) są hiperbolami ze sobą sprzężonemi. Twierdzenia Apollonjusza odnoszą się do par wektorów rzeczywistych w przypadkach 2) i 4). Widzimy więc, że dwa powyższe twierdzenia są dwojakiego rodzaju uogólnieniami twierdzeń Apollonjusza. Rzeczone powyższe twierdzenia odnoszą się bowiem nietylko do par wektorów rzeczywistych w przypadkach rzeczywistych krzywych stopnia drugiego ze środkiem, ale także do par wektorów urojonych w przypadkach wszelkich istotnych krzywych stopnia drugiego ze środkiem, zarówno rzeczywistych jak urojonych. Odnoszą się one nadto nietylko do przypadków zachodzenia równości $k_1 = k_2$, względnie równości $k_1 + k_2 = 0$, ale także przy każdym dowolnym wyborze dwóch różnych od zera liczb rzeczywistych k_1 i k_2.

Zwrócimy jeszcze uwagę na to, że przy spełnieniu równości $k_1 = k_2$ drugi ze związków (208) jest:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_{01} + \Phi_{02}. \tag{212}$$

Odnośne pary wektorów, dla których związek ten zachodzi w przypadku rzeczywistej krzywej rodzaju elips, składają się albo z wektorów rzeczywistych, albo z wektorów urojonych. Natomiast w przypadku bądź urojonej krzywej rodzaju elips, bądź też hiperboli, istnieje także nieskończenie wiele par wektorów zespolonych, dla których spełniony jest ten związek, ale żadna z tych par nie składa się z dwóch wektorów rzyczywistych. Dalej zauważymy jeszcze, że przy spełnieniu równości $k_1 + k_2 = 0$ drugi ze związków (208) jest:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \Phi_{01} - \Phi_{02}. \tag{213}$$

Pary wektorów, dla których zachodzi ten związek w przypadku hiperbol ze sobą sprzężonych, składają się albo z wektorów rzeczywistych, albo z wektorów urojonych. W przypadku zaś, gdy z odnośnych krzywych rodzaju elips jedna jest rzeczywista, a druga urojona istnieją także pary wektorów zespolonych, dla których spełniony jest ten związek, ale żadna z nich nie składa się z dwóch wektorów rzeczywistych.

Związkom (205) lub (208) nadamy jeszcze przypadkach $\Omega \neq 0$ inną postać. Oznaczmy przez u_{01}, v_{01} i u_{02}, v_{02} składowe wektorów, mających początek we wspólnym środku krzywych (209), końce odpowiednio na pierwszej i drugiej z tych krzywych, wreszcie dwukierunki do siebie prostopadłe, będące dwukierunkami głównemi względem uważanych linij krzywych. Wtedy spełnione będą związki:

$$(214)\quad \begin{cases} A\,u_{01} + B\,v_{01} = S_1\,(u_{01} + v_{01}\cos\vartheta), \\ B\,u_{01} + C\,v_{01} = S_1\,(u_{01}\cos\vartheta + v_{01}), \\ A\,u_{02} + B\,v_{02} = S_2\,(u_{02} + v_{02}\cos\vartheta), \\ B\,u_{02} + C\,v_{02} = S_2\,(u_{02}\cos\vartheta + v_{02}), \end{cases}$$

w których S_1 i S_2 są różnemi od siebie pierwiastkami równania na S:

$$(215)\qquad S^2 - (\omega)\,S + (\delta) = 0.$$

Korzystając ze związków (214), łatwo wyprowadzić równości:

$$(216)\qquad k_1 = S_1\,\Phi_{01}, \quad k_2 = S_2\,\Phi_{02}.$$

Na podstawie tych równości można związki (205) lub (208) przedstawić w postaci:

$$(217)\quad \Psi^2 = \Phi_{01}\,\Phi_{02}, \quad S_2\,\Phi_{02}\,(\Phi_1 - \Phi_{01}) + S_1\,\Phi_{01}\,(\Phi_2 - \Phi_{02}) = 0.$$

Druga z równości (217) jest w przypadkach objętych równością:

$$(218)\qquad S_1^2\,\Phi_{01}^2 = S_2^2\,\Phi_{02}^2$$

jednym ze związków (212) i (213).

Zajmiemy się teraz wyprowadzeniem związków, charakteryzujących węgły wektorów, do których odnoszą się twierdzenia wyżej podane. Składowe tych wektorów napiszemy w postaci:

$$(219)\qquad \begin{cases} v_1 = u_1' + i\,u_1'', & v_1 = v_1' + i\,v_1'', \\ u_2 = u_2' + i\,u_2'', & v_2 = v_2' + i\,v_2'', \end{cases}$$

gdzie po stronach prawych litery u i v z rozmaitemi wskaźnikami oznaczają wielkości rzeczywiste. Dla kwadratów boków węgłów uważanych wektorów stosować będziemy następujące skrócone oznaczenia:

$$(220)\qquad \begin{cases} \Phi_1' = \Phi(u_1', v_1'), & \Phi_1'' = \Phi(u_1'', v_1''), \\ \Phi_2' = \Phi(u_2', v_2'), & \Phi_2'' = \Phi(u_2'', v_2''). \end{cases}$$

Sformułowanie własności rzeczonych węgłów może być ułatwione przez użycie osobnych oznaczeń dla pól pewnych równoległoboków, lub dla pól pewnych trójkątów. Rozważać będziemy tutaj pola trójkątów. Jeżeli drugi bok węgła wektora u_1, v_1 obrócimy o kąt $+\frac{\pi}{2}$ naokoło początku tego boku, to otrzymamy wektor rzeczywisty, którego składowe są:

$$(221)\qquad \underline{u_1''} = -\frac{u_1'' \cos\vartheta + v_1''}{\sin\vartheta}, \quad \underline{v_1''} = \frac{u_1'' + v_1'' \cos\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Jeżeli koniec pierwszego boku węgła u_1, v_1 i koniec otrzymanego wektora o składowych (221) połączymy odcinkiem linji prostej, to odcinek ten i wektory u_1', v_1' i $\underline{u_1''}, \underline{v_1''}$ utworzą trójkąt. Oznaczając przez $\underline{T_1}$ pole tego trójkąta, obiegane bądź zgodnie z kierunkiem wektora u_1', v_1', bądź też niezgodnie z kierunkiem wektora $\underline{u_1''}, \underline{v_1''}$, mieć będziemy wzór:

$$\underline{T_1} = \frac{1}{2}\sin\vartheta\,(u_1'\,\underline{v_1''} - v_1'\,\underline{u_1''}),$$

a więc na podstawie wzorów (221), otrzymamy równość:

$$(222)\qquad \underline{T_1} = \frac{1}{2}\Phi(u_1', v_1'; u_1'', v_1'').$$

Podobnież, jeżeli drugi bok węgła wektora u_2, v_2 obrócimy naokoło początku o kąt $+\frac{\pi}{2}$, to otrzymamy wektor o składowych $\underline{u_2''}, \underline{v_2''}$,

dla których zachodzą wzory analogiczne do wzorów (221). Łącząc koniec tego wektora odcinkiem prostolinjowym z końcem pierwszego boku węgła, otrzymamy trójkąt i jeżeli pole tego trójkąta, obiegane bądź zgodnie z kierunkiem wektora u_2', v_2', bądź też niezgodnie z kierunkiem wektora u_2'', v_2'' oznaczymy przez T_2, to mieć będziemy równość:

$$(223) \qquad T_2 = \frac{1}{2} \Phi (u_2', v_2'; u_2'', v_2'').$$

Ze wzorów (220), (222) i (223) wynikają równości:

$$(224) \quad \Phi_1 = \Phi_1' - \Phi_1'' + 4 i T_1, \quad \Phi_2 = \Phi_2' - \Phi_2'' + 4 i T_2.$$

Jeżeli następnie zastosujemy dalsze oznaczenia pól trójkątów:

$$(225) \begin{cases} T' = \frac{1}{2} \Psi (u_1', v_1'; u_2', v_2'), \quad T'' = \frac{1}{2} \Psi (u_1'', v_1''; u_2'', v_2''), \\ T_{12} = \frac{1}{2} \Psi (u_1', v_1'; u_2'', v_2''), \quad T_{21} = \frac{1}{2} \Psi (u_2', v_2'; u_1'', v_1''), \end{cases}$$

to mieć będziemy równość:

$$(226) \qquad \Psi = 2 [T' - T'' + i (T_{12} - T_{21})].$$

Na podstawie równości (224) można drugi ze związków (205) zastąpić związkami:

$$(227) \; k_2 (\Phi_1' - \Phi_1'') + k_1 (\Phi_2' - \Phi_2'') = \frac{(\omega) k_1 k_2}{(\delta)}, \quad k_2 T_1 + k_1 T_2 = 0.$$

Zwracając się teraz do pierwszego ze związków (205) zauważymy, że przy spełnieniu nierówności (210), wynikają z niego na Ψ wartości:

$$\Psi = \zeta' \sin \vartheta \sqrt{\frac{k_1 k_2}{\delta}},$$

gdzie $\zeta' = \pm 1$, a więc pierwszy ze związków (205) można przy spełnieniu tej nierówności zastąpić związkami:

$$(228) \qquad T' - T'' = \frac{1}{2} \zeta' \sin \vartheta \sqrt{\frac{k_1 k_2}{\delta}}, \quad T_{12} - T_{21} = 0.$$

Przy spełnieniu zaś nierówności (211) z pierwszego ze związków (205) wynikają na Ψ wartości:

$$\Psi = \zeta'' i \sin\vartheta \sqrt{-\frac{k_1 k_2}{\delta}},$$

gdzie $\zeta'' = \pm 1$, a zatem widzimy, że pierwszy ze związków (205) można w tym przypadku zastąpić związkami:

$$(229)\quad T' - T'' = 0, \quad T_{12} - T_{21} = \frac{1}{2}\zeta'' \sin\vartheta \sqrt{-\frac{k_1 k_2}{\delta}}.$$

Wielkości, zachodzące w powyższych związkach, rozważymy jeszcze w przypadkach, gdy dwukierunki wektorów u_1, v_1 i u_2, v_2 są główne. W tym celu zauważymy, że jeżeli wektor o składowych u, v ma rzeczywisty dwukierunek i rzeczywisty kwadrat długości, to jego składowe są albo obie liczbami rzeczywistemi, albo też obie liczbami urojonemi bez rzeczywistych części. Ażeby to uzasadnić, napiszemy składowe u, v w postaci:

$$u = u' + i u'', \quad v = v' + i v'',$$

gdzie litery z akcentami po stronach prawych oznaczają liczby rzeczywiste. Warunki, którym ma podlegać wektor u, v, wyrazić można w ten sposób, że nie obie jego składowe są zerami i że zachodzą współcześnie dwie równości następujące:

$$\Psi(u', v'; u'', v'') = 0, \quad \Phi(u', v'; u'', v'') = 0.$$

Ponieważ stąd wynika, że wtedy musi zachodzić jedna z równości:

$$\Phi(u'', v'') = 0, \quad \Phi(u', v') = 0,$$

przeto powyższa uwaga jest udowodniona, t.j. składowe u, v są albo obie liczbami rzeczywistemi, albo obie liczbami urojonemi bez rzeczywistych części. Widoczne przytem, że w pierwszym przypadku $\Phi(u, v)$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią, w drugim zaś liczbą rzeczywistą ujemną. Napiszemy teraz rozważane powyżej wektory o składowych u_{01}, v_{01} i u_{02}, v_{02} w postaci:

$$(230)\quad \begin{cases} u_{01} = u_{01}' + i u_{01}'', & v_{01} = v_{01}' + i v_{01}'', \\ u_{02} = u_{02}' + i u_{02}'', & v_{02} = v_{02}' + i v_{02}'' \end{cases}$$

i stosować będziemy dla kwadratów długości wektorów u_{01}', v_{01}'; u_{01}'', v_{01}''; u_{02}', v_{02}'; u_{02}'', v_{02}'' i pól pewnych związanych z niemi trójkątów oznaczenia, tem tylko różniące się od oznaczeń (220), (222), (223) i (225), że przy każdej z liter Φ i T umieścimy na dole, ewentualnie przed innemi znaczkami, znaczek 0. Po tych uwagach zwrócimy się do rozważenia odnośnych własności rzeczonych wektorów o składowych u_{01}, v_{01} i u_{02}, v_{02}. Naprzód wnosimy z równości (224), że dla tych wektorów mamy zawsze:

$$(231) \qquad \underline{T}_{01} = 0, \quad \underline{T}_{02} = 0.$$

Gdy następnie założymy, że zachodzą obie nierówności $k_1 S_1 > 0$ i $k_2 S_2 > 0$, wówczas oba uważane wektory będą rzeczywiste i mieć będą własności następujące:

$$(232) \qquad T_0' = \frac{1}{2}\tau_1 \sqrt{\Phi_{01}' \Phi_{02}'}, \quad T_0'' = 0, \quad T_{012} = 0, \quad T_{021} = 0,$$

gdzie $\tau_1 = \pm 1$. Jeżeli $\delta > 0$, to w uważanym przypadku krzywe (209) są bądź homotetycznemi, bądź nakrywającemi się elipsami rzeczywistemi, jeżeli zaś $\delta < 0$, to są one albo hiperbolami ze sobą sprzężonemi, albo też takiemi hiperbolami, że każda z nich jest sprzężona z hiperbolą homotetyczną z drugą. Gdy założymy teraz, że zachodzą obie nierówności $k_1 S_1 < 0$ i $k_2 S_2 < 0$, to wektory u_{01}, v_{01} i u_{02}, v_{02} będą oba urojone i składowe śladów tych wektorów spełniać będą równości następujące:

$$(233) \qquad T_0' = 0, \quad T_0'' = \frac{1}{2}\tau_2 \sqrt{\Phi_{01}'' \Phi_{02}''}, \quad T_{012} = 0, \quad T_{021} = 0,$$

gdzie $\tau_2 = \pm 1$. Jeżeli zachodzi nierówność $\delta > 0$, to w przypadku, którym zajmujemy się, krzywe (209) są elipsami urojonemi, które są bądź homotetyczne, bądź też nakrywają się. Jeżeli zaś zachodzi nierówność $\delta < 0$, to krzywe (209) są tak samo jak w przypadku poprzednim albo hiperbolami ze sobą sprzężonemi, albo też hiperbolami, z których każda jest sprzężona z hiperbolą homotetyczną z drugą. Gdy przyjmiemy, że zachodzą nierówności $k_1 S_1 > 0$ i $k_2 S_2 < 0$, wówczas wektor u_{01}, v_{01} będzie rzeczywisty, a wektor u_{02}, v_{02} będzie urojony i składowe śladów tych wektorów spełniać będą równości:

$$(234) \qquad T_0' = 0, \quad T_0'' = 0, \quad T_{012} = \frac{1}{2}\tau_3 \sqrt{\Phi_{01}' \Phi_{02}''}, \quad T_{021} = 0,$$

gdzie $\tau_3 = \pm 1$. Przy zachodzeniu nierówności $\delta > 0$ pierwsza z krzywych (209) jest w uważanym przypadku elipsą rzeczywistą, druga zaś elipsą urojoną, a przy zachodzeniu nierówności $\delta < 0$ krzywe (209) są hiperbolami bądź homotetycznemi, bądź też nakrywającemi się. Gdy wreszcie założymy, że zachodzą nierówności $k_1 S_1 < 0$ i $k_2 S_2 > 0$, wówczas wektor u_{01}, v_{01} będzie urojony, a wektor u_{02}, v_{02} będzie rzeczywisty. Wtedy składowe śladów tych wektorów spełniać będą równości:

$$(235) \qquad T_0' = 0, \quad T_0'' = 0, \quad T_{012} = 0, \quad T_{021} = \frac{1}{2} \tau_4 \sqrt{\Phi_{01}'' \Phi_{02}'},$$

gdzie $\tau_4 = \pm 1$. Zauważymy tutaj, że dla wektorów u_{01}, v_{01} i u_{02}, v_{02} powinny być spełnione związki (227) oraz odpowiednie ze związków (228), (229). Szczegóły bezpośredniego stwierdzenia tego faktu na podstawie równości: (216), (231), (232), ..., (235) oraz uzgodnienia znaków $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ ze znakami ζ', ζ'' pomijamy.

Związki (197) i (202) pomiędzy niezmiennikami dwóch wektorów zespolonych i formy stopnia drugiego prowadzą jeszcze do pewnego twierdzenia o średnicach istotnych krzywych stopnia drugiego rodzaju elips i rodzaju hiperbol. Jeżeli w związkach tych przyjmiemy $\Phi = 0$, to otrzymamy równości:

$$\Psi^2 = \Phi_1 \Phi_2, \quad \Phi_1 \varphi_2 + \Phi_2 \varphi_1 = (\omega) \Psi^2,$$

a rugując z nich Ψ, dojdziemy do równości:

$$(236) \qquad \Phi_1 \varphi_2 + \Phi_2 \varphi_1 = (\omega) \Phi_1 \Phi_2.$$

Niech będzie teraz $\delta \neq 0$ i przypuśćmy, że wektory zespolone o składowych u_1, v_1 i u_2, v_2 są oba wektorami nieizotropowemi i że czynią odpowiednio zadość rozważanym poprzednio związkom (203). Wtedy, korzystając z równości (236), dojdziemy do równości:

$$(237) \qquad \frac{k_1}{\Phi_1} + \frac{k_2}{\Phi_2} = (\omega).$$

Warunki, z których wynika równość (237), spełnione są w szczególności dla rozważanych powyżej wektorów $u_{01}, v_{01}, u_{02}, v_{02}$, mających dwa różne od siebie dwukierunki główne względem krzywych (209). Wnosimy więc, że dla tych wektorów zachodzi także

równość (237), t.j. że używając stosowanych powyżej oznaczeń mamy równość:

$$\frac{k_1}{\Phi_{01}} + \frac{k_2}{\Phi_{02}} = (\omega). \tag{238}$$

Na podstawie równości (237) i (238) możemy wypowiedzieć twierdzenie następujące.

Jeżeli końce dwóch nieizotropowych prostopadłych wektorów zespolonych położone są odpowiednio na krzywych rodzaju elips, lub rodzaju hiperbol, określonych równaniami:

$$\varphi(\xi, \eta) = k_1, \quad \varphi(\xi, \eta) = k_2, \tag{209}$$

gdzie k_1 i k_2 są liczbami rzeczywistemi, różnemi od zera, a początki rzeczonych wektorów leżą we wspólnym środku tych krzywych, to spełniona jest równość:

$$\frac{k_1}{\Phi_1} + \frac{k_2}{\Phi_2} = \frac{k_1}{\Phi_{01}} + \frac{k_2}{\Phi_{02}}. \tag{239}$$

Gdy równania (209) przedstawiają jedną i tę samą elipsę rzeczywistą, wówczas $k_1 = k_2$ i równość (239) ma postać:

$$\frac{1}{\Phi_1} + \frac{1}{\Phi_2} = \frac{1}{\Phi_{01}} + \frac{1}{\Phi_{02}}. \tag{240}$$

Gdy równania (209) przedstawiają dwie hiperbole ze sobą sprzężone, wówczas $k_1 + k_2 = 0$ i równość (239) ma postać:

$$\frac{1}{\Phi_1} - \frac{1}{\Phi_2} = \frac{1}{\Phi_{01}} - \frac{1}{\Phi_{02}}. \tag{241}$$

Równości (240) i (241) wyrażają dostrzeżone przez Bobilier'a własności prostopadłych do siebie średnic istotnych rzeczywistych krzywych stopnia drugiego z właściwym środkiem. Wnosimy stąd, że twierdzenie wyżej podane można uważać, jako uogólnienie tych własności.

ROZDZIAŁ DZIEWIĄTY.

Równania zespolone stopnia pierwszego w spółrzędnych prostolinjowych pary punktów sprzężonych.

§ 58. Równanie zespolone równoważne jednemu związkowi rzeczywistemu.

Niech będzie równanie:

$$A x + B y + C \overset{*}{x} + D \overset{*}{y} + E = 0, \tag{1}$$

w którem x, y są spółrzędnemi prostolinjowemi punktu zespolonego, $\overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ spółrzędnemi prostolinjowemi punktu z nim sprzężonego, a A, B, C, D, E spółczynnikami zespolonemi, z których spółczynniki A, B, C, D nie są wszystkie cztery jednocześnie zerami. Przy użyciu stosowanego w tej książce sposobu oznaczania części rzeczywistej liczby zespolonej i spółczynnika przy i liczby zespolonej możemy związek (1) zastąpić związkami:

$$\left\{\begin{array}{l} (A'+C')x'+(B'+D')y'-(A''-C'')x''-(B''-D'')y''+E'=0, \\ (A''+C'')x'+(B''+D'')y'+(A'-C')x''+(B'-D')y''+E''=0. \end{array}\right. \tag{2}$$

W rozważaniach, które nastąpić mają, dogodnie będzie także stosować czasem moduły i amplitudy spółczynników równania (1). Z tego powodu umówimy się oznaczać moduły spółczynników A, B, C, D, E odpowiednio literami m, n, p, q, s a ich amplitudy zasadnicze odpowiednio literami $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$.

Zajmiemy się naprzód wyznaczeniem warunków, przy spełnieniu których równanie (1) nie zmienia się, gdy wykonywamy zmianę znaku przy i zarówno w wielkościach zmiennych jak i w wielkościach stałych. Zachodzi to wtedy i tylko wtedy, gdy równanie:

$$\overset{*}{C}x + \overset{*}{D}y + \overset{*}{A}\overset{*}{x} + \overset{*}{B}\overset{*}{y} + \overset{*}{E} = 0,$$

w którem gwiazdki zastosowano dla oznaczenia wielkości sprzężonych, określa tę samą zależność pomiędzy wielkościami $x, y, \overset{*}{x}, \overset{*}{y}$, co równanie (1). To zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wyznaczniki drugiego stopnia macierzy:

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A, & B, & C, & D, & E \\ \overset{*}{C}, & \overset{*}{D}, & \overset{*}{A}, & \overset{*}{B}, & \overset{*}{E} \end{vmatrix}$$

są zerami. W szczególności muszą zachodzić równości:

$$(4) \qquad A\overset{*}{A} = C\overset{*}{C}, \quad B\overset{*}{B} = D\overset{*}{D}.$$

Z równości tych wynika, że liczby A i C muszą mieć ten sam moduł, oraz że liczby B i D muszą mieć ten sam moduł, t.j. że muszą zachodzić równości:

$$m = p, \quad n = q.$$

Jeżeliby liczby B i D były zerami, to na podstawie założenia, odnoszącego się do liczb A, B, C, D, pierwszy z rzeczonych modułów byłby różny od zera i dla żądanej niezmienności musiałyby być jeszcze spełnione równości:

$$e^{i\alpha}\overset{*}{E} - e^{-i\gamma}E = 0, \quad e^{i\gamma}\overset{*}{E} - e^{-i\alpha}E = 0.$$

Obie te równości byłyby spełnione, gdyby była zerem liczba E. Jeżeliby zaś liczba E była różna od zera, to równości te byłyby spełnione, gdyby była spełniona równość:

$$(5) \qquad e^{(\alpha+\gamma)i} = e^{2\varepsilon i},$$

t.j. gdyby liczba $AC : E^2$ była liczbą rzeczywistą dodatnią. Jeżeliby zaś liczby A i C były zerami, to wspólny moduł liczb B i D

byłby różny od zera i dla żądanej niezmienności musiałyby prócz równości (4) być jeszcze spełnione równości:

$$e^{i\beta}\overset{*}{E} - e^{-i\delta}E = 0, \quad e^{i\delta}\overset{*}{E} - e^{-i\beta}E = 0.$$

Gdyby była zerem wielkość E, wówczas obie te równości byłyby także spełnione. Jeżeliby zaś liczba E była różną od zera, to ostatnie równości byłyby spełnione wtedy i tylko wtedy, gdyby była spełniona równość:

$$e^{(\beta+\delta)i} = e^{2\varepsilon i}, \tag{6}$$

t.j. gdyby liczba $BD : E^2$ była liczbą rzeczywistą dodatnią. Zatem pozostaje do rozważenia przypadek, w którym ani wspólny moduł liczb A i C nie jest zerem, ani też wspólny moduł liczb B i D nie jest zerem. Ażeby w tym przypadku równość (1) była niezmienną przy zmianie znaku przy i, potrzeba i wystarcza prócz spełnienia równości (4), żeby wszystkie wyznaczniki drugiego stopnia macierzy:

$$\begin{vmatrix} e^{i\alpha}, & e^{i\beta}, & e^{i\gamma}, & e^{i\delta}, & E \\ e^{-i\gamma}, & e^{-i\delta}, & e^{-i\alpha}, & e^{-i\beta}, & \overset{*}{E} \end{vmatrix}$$

były równe zeru. Jeżeli $E = 0$, zachodzi to wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest równość:

$$e^{(\alpha+\gamma)i} = e^{(\beta+\delta)i}. \tag{7}$$

Treść tego warunku wypowiedzieć można w ten sposób, że liczba $AC : BD$ musi być liczbą rzeczywistą dodatnią. W przypadkach zaś, gdy $E \neq 0$, warunki konieczne i wystarczające niezmienności związku (1) przy rzeczonej zmianie znaku polegają, prócz spełnienia równości (4), na spełnieniu równości:

$$e^{(\alpha+\gamma)i} = e^{(\beta+\delta)i} = e^{2\varepsilon i}. \tag{8}$$

Treść tych ostatnich równości można także wypowiedzieć w ten sposób, że obie liczby $AC : E^2$ i $BD : E^2$ muszą być liczbami rzeczywistemi dodatniemi.

Wyznaczenie warunków, aby równanie (1) było związkiem niezmiennym przy zmianie znaku przy i zarówno w wielkościach zmiennych jak i w wielkościach stałych, można oprzeć także na

związkach (2). W tej postaci wyznaczenie rzeczonych warunków sprowadza się do określenia przypadków, w których równania (2) nie są od siebie niezależne. Zachodzi to wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wyznaczniki drugiego stopnia macierzy:

$$(9)\qquad \left|\begin{array}{ccccc} A'+C', & B'+D', & -(A''-C''), & -(B''-D''), & E' \\ A''+C'', & B''+D'', & A'-C', & B'-D', & E'' \end{array}\right|$$

są zerami. Przyrównywając do zera wyznacznik, składający się z pierwszej i trzeciej kolumny tej macierzy, oraz wyznacznik, składający się z drugiej i czwartej kolumny tej macierzy, otrzymamy równości:

$$(10)\qquad A'^2+A''^2=C'^2+C''^2,\quad B'^2+B''^2=D'^2+D''^2.$$

Jeżeli wszystkie wielkości, figurujące w drugiej z tych równości, są zerami, to wielkości, figurujące w pierwszej z nich, nie mogą być wszystkie zerami i, żeby równania (2) nie były niezależnemi jedno od drugiego, muszą być, prócz równości (10), spełnione jeszcze równości:

$$(11)\qquad C'E'+C''E''=A'E'+A''E'',\quad C''E'-C'E''=-(A''E'-A'E'').$$

Gdy E jest równe zeru, wówczas obie te równości są spełnione. Gdy zaś E jest różne od zera, wówczas zwrócimy uwagę na to, że z równości (11) wynika równość:

$$(12)\qquad (A''E'-A'E'')(C'E'+C''E'')+(A'E'+A''E'')(C''E'-C'E'')=0.$$

Zobaczymy, że przy spełnieniu pierwszej z równości (10) można inaczej sformułować treść równości (11). Ponieważ wielkości E' i E'' nie są obie jednocześnie zerami, przeto dwumiany $A''E'-A'E''$ i $A'E'+A''E''$ także nie są oba jednocześnie zerami, bo wyznacznik tych dwumianów względem wielkości E' i E'' równa się sumie $A'^2+A''^2$ i jest różny od zera. Stąd wynika, że równość (12) można zastąpić równościami:

$$(13)\qquad \begin{cases} C'E'+C''E''=\tau(A'E'+A''E''), \\ C''E'-C'E''=\tau(A'E''-A''E'), \end{cases}$$

gdzie τ jest czynnikiem na razie nieoznaczonym. Ale rugowanie z tych równości wielkości E' i E'' prowadzi do równości:

$$\begin{vmatrix} C' - \tau A', & C'' - \tau A'' \\ C'' + \tau A'', & -(C' + \tau A') \end{vmatrix} = 0,$$

t.j. do równości:

$$C'^2 + C''^2 = \tau^2 (A'^2 + A''^2),$$

skąd, na podstawie pierwszej z równości (10), dochodzimy do wyniku $\tau^2 = 1$. Widzimy przeto, że przy spełnieniu pierwszej z równości (10) można równości (11) zastąpić równością (12) wraz z dołączonym do niej warunkiem, żeby bądź dwumiany, znajdujące się po obu stronach pierwszej z równości (13), nie były różnych znaków, bądź też dwumiany, znajdujące się po obu stronach drugiej z równości (13), nie były różnych znaków. Łatwo dostrzec, że te warunki w zupełności zgadzają się z wyprowadzonemi poprzednio warunkami niezmienności związku (1) w przypadku, gdy $B = D = 0$. Istotnie, mamy równość:

$$\frac{A\,C}{E^2} = \frac{A\overset{*}{E}\,C\overset{*}{E}}{E^2\,\overset{*}{E}^2},$$

a jeżeli zwrócimy uwagę na to, że zachodzą równości:

$$A\overset{*}{E} = A'E' + A''E'' + i(A''E' - A'E''),$$

$$C\overset{*}{E} = C'E' + C''E'' + i(C''E' - C'E''),$$

że więc wielkości $A\overset{*}{E}$ i $C\overset{*}{E}$ są liczbami ze sobą sprzężonemi, to skonstatujemy zupełną zgodność warunków wyprowadzonych dwiema różnemi drogami. Jeżeli następnie wszystkie wielkości, figurujące w pierwszej z równości (10), są zerami, to wielkości, znajdujące się w drugiej z nich, nie mogą być wszystkie jednocześnie zerami i dlatego, żeby równania (2) nie były równaniami niezależnemi jedno od drugiego, muszą być, prócz równości (10), spełnione jeszcze równości:

(14) $D'E' + D''E'' = B'E' + B''E'',\quad D''E' - D'E'' = -(B''E' - B'E'').$

W przypadku, gdy E jest równe zeru, równości te są spełnione, w przypadku zaś, gdy E jest różne od zera, można stosować tak samo, jak w przypadku poprzednim, inne analityczne formułowanie warunków, o które chodzi. Pomijamy to i przechodzimy do rozważenia żądanych warunków przy założeniu, że ani wielkości pierwszej z równości (10) nie są wszystkie zerami, ani wielkości drugiej z równości (10) nie są wszystkie zerami. Jeżeli przyjmiemy naprzód, że spółczynnik E jest zerem, to prócz równości (10) będą musiały być spełnione jeszcze równości:

$$(15)\quad \left|\begin{array}{l} (A'+C')(B'-D')+(A''+C'')(B''-D'')=0, \\ (A'-C')(B'+D')+(A''-C'')(B''+D'')=0, \\ (A'+C')(B''+D'')-(B'+D')(A''+C'')=0, \\ (A'-C')(B''-D'')-(B'-D')(A''-C'')=0. \end{array}\right.$$

Stosując zaś oznaczenia:

$$k_1' = A'B' + A''B'', \quad k_1'' = -(A'B'' - B'A''),$$
$$l_1' = C'D' + C''D'', \quad l_1'' = -(C'D'' - D'C''),$$
$$k_2' = A'D' + A''D'', \quad k_2'' = -(A'D'' - D'A''),$$
$$l_2' = C'B' + C''B'', \quad l_2'' = -(C'B'' - B'C''),$$

będziemy mogli równości te przedstawić w postaci:

$$k_1' - l_1' - (k_2' - l_2') = 0, \quad k_1' - l_1' + (k_2' - l_2') = 0,$$
$$k_1'' + l_1'' + (k_2'' + l_2'') = 0, \quad k_1'' + l_1'' - (k_2'' + l_2'') = 0.$$

Stąd wynika, że można równości (15) zastąpić równościami:

$$l_1' = k_1', \quad l_1'' = -k_1'',$$
$$l_2' = k_2', \quad l_2'' = -k_2'',$$

a ponieważ, jak łatwo dostrzec, zachodzą równości:

$$(16)\qquad A\overset{*}{B} = k_1' + ik_1'', \quad C\overset{*}{D} = l_1' + il_1''$$

oraz równości:

$$(17) \qquad A\overset{*}{D} = k_2' + i\,k_2'', \quad C\overset{*}{B} = l_2' + i\,l_2'',$$

przeto równości (15) orzekają, że liczby $A\overset{*}{B}$ i $C\overset{*}{D}$ są liczbami ze sobą sprzężonemi oraz, że liczby $A\overset{*}{D}$ i $C\overset{*}{B}$ są liczbami ze sobą sprzężonemi. Zarówno z jednego jak z drugiego z tych wniosków wynika warunek, który poznaliśmy już poprzednio, że stosunek $A\,C : B\,D$ musi być wielkością rzeczywistą dodatnią. Z drugiej strony spełnienie tego warunku przy zachodzeniu równości (10) pociąga za sobą jako konsekwencję fakt, że liczby (16) są liczbami ze sobą sprzężonemi i fakt, że liczby (17) są liczbami ze sobą sprzężonemi. Pozostaje do rozważenia przypadek, w którym wszystkie liczby A, B, C, D, E są różne od zera. Wtedy warunki niezmienności polegają na jednoczesnem spełnieniu równości (10), (11) i (14), przyczem widoczne, że można tak samo jak poprzednio stosować modyfikacje w formułowaniu warunków, zawartych w spełnieniu równości (11) i (14). I w tym ogólnym przypadku dochodzimy do warunków zgodnych z warunkami, które otrzymaliśmy przy stosowaniu poprzedniej metody postępowania.

Niech będzie teraz pomiędzy wielkościami x', y', x'', y'' związek linjowy:

$$(18) \qquad M'\,x' + N'\,y' - M''\,x'' - N''\,y'' + \frac{1}{2}\,P = 0,$$

gdzie M', N', M'', N'', P oznaczają spółczynniki rzeczywiste, z których cztery pierwsze nie są wszystkie jednocześnie zerami. Ze wzorów:

$$x = x' + i\,x'', \quad y = y' + i\,y'',$$

$$\overset{*}{x} = x' - i\,x'', \quad \overset{*}{y} = y' - i\,y''$$

wynikają wzory:

$$x' = \frac{1}{2}\,(x + \overset{*}{x}), \quad y' = \frac{1}{2}\,(y + \overset{*}{y}),$$

$$x'' = \frac{i}{2}\,(\overset{*}{x} - x), \quad y'' = \frac{i}{2}\,(\overset{*}{y} - y).$$

Korzystając z tych ostatnich i stosując oznaczenia:

$$M = M' + i M'', \quad N = N' + i N'',$$

$$\overset{*}{M} = M' - i M'', \quad \overset{*}{N} = N' - i N'',$$

będziemy mogli związek (18) napisać w postaci:

$$M x + N y + \overset{*}{M}\overset{*}{x} + \overset{*}{N}\overset{*}{y} + P = 0. \tag{19}$$

Każdy związek postaci (1), posiadający własność, że pozostaje bez zmiany, gdy we wszystkich figurujących w nim wielkościach wykonamy zmianę znaku przy i, t.j. związek równoważny jednemu rzeczywistemu związkowi linjowemu pomiędzy wielkościami x', y', x'', y'', przedstawić można w postaci (19), gdzie P oznacza liczbę rzeczywistą, a $M, N, \overset{*}{M}, \overset{*}{N}$ cztery takie liczby zespolone, że nie są wszystkie jednocześnie zerami i że pierwsza z nich jest sprzężona z trzecią z nich, a druga z nich jest sprzężona z czwartą z nich.

Związek (18) określa pewną odpowiedniość punktów na płaszczyznach R i A. Odpowiedniość tę można scharakteryzować w sposób następujący. Gdy $M'' = N'' = 0$, wówczas każdemu punktowi płaszczyzny A odpowiadają wszystkie punkty, położone na pewnej prostej płaszczyzny R. Gdy $M' = N' = 0$, wówczas każdemu punktowi płaszczyzny R odpowiadają wszystkie punkty, położone na pewnej prostej płaszczyzny A. Gdy ani liczby M' i N' nie są obie jednocześnie zerami, ani liczby M'' i N'' nie są obie jednocześnie zerami, wówczas odpowiedniość, o której mowa, może być opisana przez rozważanie pewnych nieskończenie wielu prostych równoległych na płaszczyźnie R i pewnych nieskończenie wielu prostych równoległych na płaszczyźnie A. Możemy mianowicie powiedzieć, że każdemu punktowi płaszczyzny R odpowiadają wszystkie punkty, położone na jednej z rzeczonych równoległych płaszczyzny A, a każdemu punktowi płaszczyzny A wszystkie punkty, położone na jednej z rzeczonych równoległych płaszczyzny R.

Podstawmy teraz w związek (19) zamiast x i y wyrażenia:

$$x = a + u t, \quad y = b + v t, \tag{20}$$

a zamiast $\overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ wyrażenia:

$$\overset{*}{x} = \overset{*}{a} + \overset{*}{u}\overset{*}{t}, \quad \overset{*}{y} = \overset{*}{b} + \overset{*}{v}\overset{*}{t},$$

w których oznaczyliśmy przez $\overset{*}{a}, \overset{*}{b}, \overset{*}{u}, \overset{*}{v}, \overset{*}{t}$ liczby sprzężone odpowiednio z liczbami a, b, u, v, t. Wtedy mieć będziemy równość:

$$(21) \qquad Ma + Nb + \overset{*}{M}\overset{*}{a} + \overset{*}{N}\overset{*}{b} + P + \\ + (Mu + Nv)\,t + (\overset{*}{M}\overset{*}{u} + \overset{*}{N}\overset{*}{v})\,\overset{*}{t} = 0,$$

z której skorzystamy przy wyznaczaniu takich linij prostych, że spółrzędne x, y każdego ich punktu czynią zadość równości (19).

Zauważymy naprzód, że jeżelibyśmy na spółrzędne x, y nałożyli warunek:

$$(22) \qquad Mx + Ny + \frac{1}{2}(P + Qi) = 0,$$

gdzie Q jest dowolnie wybraną liczbą rzeczywistą, to liczby $\overset{*}{x}, \overset{*}{y}$, odpowiednio sprzężone z liczbami x, y, spełniałyby warunek:

$$(23) \qquad \overset{*}{M}\overset{*}{x} + \overset{*}{N}\overset{*}{y} + \frac{1}{2}(P - Qi) = 0.$$

Dodając stronami równości (22) i (23) otrzymujemy równość (19). Równanie (22), w którem Q oznacza dowolny parametr rzeczywisty, określa nieskończenie wiele zespolonych linij prostych o wspólnym dwukierunku. W ten sposób przekonaliśmy się, że spółrzędne x, y wszystkich punktów linij prostych (22), podstawione w związek (19), spełniają ten związek. Przytem zauważymy, że równanie (23) określa w spółrzędnych $\overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ nieskończenie wiele prostych zespolonych, z których każda jest sprzężona z odpowiednią prostą (22).

Możemy łatwo przekonać się, że prócz prostych (22) niema żadnych innych prostych zespolonych, posiadających własność, że spółrzędne x, y wszystkich punktów tych prostych, podstawione w związek (19), spełniają ten związek. Dla każdej takiej prostej, określonej uogólnionemi równaniami osiowemi (20), musiałaby być spełniona równość (21) przy dowolnych wartościach zespolonego parametru t, t.j. musiałyby dla niej zachodzić równości:

$$(24) \qquad \begin{cases} Ma + Nb + \overset{*}{M}\overset{*}{a} + \overset{*}{N}\overset{*}{b} + P = 0, \\ Mu + Nv = 0, \quad \overset{*}{M}\overset{*}{u} + \overset{*}{N}\overset{*}{v} = 0. \end{cases}$$

Z pierwszej równości, znajdującej się w drugim wierszu równości (24), wynika, że każda taka prosta musiałaby mieć dwukierunek określony stosunkiem $-M:N$ i wtedy dla takiej prostej byłaby już spełniona i druga równość drugiego wiersza równości (24). Jeżelibyśmy równanie takiej prostej napisali w postaci:

$$M x + N y + L' + i L'' = 0,$$

gdzie L' i L'' oznaczają liczby rzeczywiste, to wielkości $a, b, \overset{*}{a}, \overset{*}{b}$ musiałyby spełnić równości:

$$M a + N b + L' + i L'' = 0,$$

$$\overset{*}{M}\overset{*}{a} + \overset{*}{N}\overset{*}{b} + L' - i L'' = 0,$$

a więc na podstawie pierwszej z równości (24) otrzymalibyśmy dla L' wartość $\frac{P}{2}$, a liczba rzeczywista L'' pozostałaby dowolną. Pisząc tę dowolną liczbę w postaci $\frac{Q}{2}$ otrzymalibyśmy równanie (22), a to właśnie było do udowodnienia.

Zauważmy, że gdybyśmy spółrzędne bieżącego punktu w każdem z równań (22) i (23) oznaczyli odpowiednio przez ξ i η, to mielibyśmy równania:

$$M \xi + N \eta + \frac{1}{2}(P + Q i) = 0,$$

$$\overset{*}{M} \xi + \overset{*}{N} \eta + \frac{1}{2}(P - Q i) = 0.$$

Mnożąc jedną przez drugą lewe strony tych równań, otrzymalibyśmy dla wszystkich punktów tych dwóch sprzężonych linij prostych równanie:

$$M \overset{*}{M} \xi^2 + (M \overset{*}{N} + N \overset{*}{M}) \xi \eta + N \overset{*}{N} \eta^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}(P - Q i)(M \xi + N \eta) + \frac{1}{2}(P + Q i)(\overset{*}{M} \xi + \overset{*}{N} \eta) +$$

$$+ \frac{1}{4}(P^2 + Q^2) = 0.$$

Jest to równanie drugiego stopnia w zmiennych ξ, η z rzeczywistemi spółczynnikami. Równanie to można także napisać w postaci:

$$(M'\xi + N'\eta + \frac{1}{2}P)^2 + (M''\xi + N''\eta + \frac{1}{2}Q)^2 = 0.$$

Przejdziemy teraz do wyznaczenia wszystkich nici prostolinjowych, które posiadają własność, że spółrzędne x, y każdego z punktów tych nici spełniają równość (19). Do tych nici należą wszystkie nici prostolinjowe, położone na prostych określonych równaniem (22), gdzie Q jest dowolną stałą rzeczywistą. Ale zobaczymy zaraz, że prócz nich istnieją jeszcze inne nici prostolinjowe, czyniące zadość naszemu wymaganiu. Równania:

$$x = a + u\rho, \quad y = b + v\rho, \tag{25}$$

w których liczby u, v nie są obie jednocześnie zerami, a ρ oznacza zmienny parametr rzeczywisty, określają nić prostolinjową, o żądanej własności w stosunku do równania (19), gdy spełnione są równości:

$$\begin{cases} Ma + Nb + \overset{*}{M}\overset{*}{a} + \overset{*}{N}\overset{*}{b} + P = 0, \\ Mu + Nv + \overset{*}{M}\overset{*}{u} + \overset{*}{N}\overset{*}{v} = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Równości te zaś są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie rzeczywiste liczby Q i R, że spełnione są jednocześnie równości:

$$\begin{cases} Ma + Nb + \frac{1}{2}(P + Qi) = 0, \\ \overset{*}{M}\overset{*}{a} + \overset{*}{N}\overset{*}{b} + \frac{1}{2}(P - Qi) = 0 \end{cases} \tag{27}$$

i równości:

$$\begin{cases} Mu + Nv = iR, \\ \overset{*}{M}\overset{*}{u} + \overset{*}{N}\overset{*}{v} = -iR. \end{cases} \tag{28}$$

Z pierwszej z równości (27) wynika, że punkt a, b musi być jednym z punktów linij prostych (22). Z pierwszej zaś z równości

(28) widzimy, że u, v muszą mieć wartości, dla których zachodzą wzory:

$$u = u_0 - l N, \quad v = v_0 + l M,$$

gdzie l jest dowolną liczbą zespoloną, a u_0, v_0 spełniają równanie:

$$M u_0 + N v_0 = i R. \tag{29}$$

To znaczy, że spółrzędne x, y punktów najogólniejszej nici prostolinjowej, spełniającej równanie (19), określają się wzorami:

$$\begin{cases} x = a + (u_0 - l N)\,\rho, \\ y = b + (v_0 + l M)\,\rho, \end{cases} \tag{30}$$

w których a, b czynią zadość pierwszemu z równań (27), a u_0, v_0 równaniu (29). Każda taka nić jest nicią prostolinjową jednej z prostych (22), gdy liczba R jest zerem, jest zaś nicią prostolinjową, nie należącą do żadnej z prostych (22), gdy liczba R jest różna od zera.

§ 59. Równanie zespolone równoważne dwóm niezależnym związkom rzeczywistym.

Niech będzie znowu równanie:

$$A x + B y + C \overset{*}{x} + D \overset{*}{y} + E = 0, \tag{1}$$

w którem nie wszystkie spółczynniki A, B, C, D są jednocześnie równe zeru i zajmiemy się teraz własnościami tego związku przy założeniu, że równanie:

$$\overset{*}{C} x + \overset{*}{D} y + \overset{*}{A}\,\overset{*}{x} + \overset{*}{B}\,\overset{*}{y} + \overset{*}{E} = 0 \tag{31}$$

nie określa tej samej zależności pomiędzy wielkościami $x, y, \overset{*}{x}, \overset{*}{y}$, co równanie (1). Zależności te są różne jedna od drugiej wtedy i tylko wtedy, gdy nie wszystkie wyznaczniki drugiego stopnia macierzy (3) są zerami, t.j. gdy nie zachodzi żaden z przypadków rozważanych w § 58.

Przyjmijmy dla modułów i amplitud spółczynników związku (1) te same oznaczenia co poprzednio. Rzeczone zależności są

różne jedna od drugiej i niesprzeczne jedna z drugą zawsze wtedy, gdy różnice:

$$m - p, \quad n - q \tag{32}$$

nie są obie jednocześnie zerami. Przy założeniu zaś, że różnice (32) są obie jednocześnie zerami, rozważymy osobno szereg przypadków. Jeżeli wspólny moduł liczb B i D jest zerem, to wspólny moduł liczb A i C nie jest zerem i wówczas, aby rzeczone zależności były różne jedna od drugiej, potrzeba i wystarcza, żeby liczba E była różna od zera i żeby różnica:

$$e^{(\alpha+\gamma)i} - e^{2\varepsilon i}$$

była różna od zera. Przy spełnieniu tych warunków rzeczone zależności są sprzeczne jedna z drugą. Podobnież, jeżeli wspólny moduł liczb A i C jest zerem, to wspólny moduł liczb B i D nie jest zerem i widoczne, że w tym przypadku rzeczone zależności są różne jedna od drugiej wtedy i tylko wtedy, gdy E jest różne od zera i gdy różnica:

$$e^{(\beta+\delta)i} - e^{2\varepsilon i}$$

jest różna od zera. Jeżeli warunki te są spełnione, to rzeczone zależności są sprzeczne jedna z drugą. Przypuśćmy wreszcie, że wspólny moduł liczb A i C jest różny od zera i że wspólny moduł liczb B i D jest różny od zera. Jeżeli przytem E jest równe zeru, to rzeczone zależności są różne jedna od drugiej wtedy i tylko wtedy, gdy różnica:

$$e^{(\alpha+\gamma)i} - e^{(\beta+\delta)i} \tag{33}$$

jest różną od zera i wtedy rzeczone zależności są niesprzeczne jedna z drugą. Jeżeli następnie E jest różne od zera i przytem różnica (33) jest różną od zera, to rzeczone zależności są także różne jedna od drugiej i niesprzeczne jedna z drugą. Jeżeli zaś E jest różne od zera i przytem różnica (33) jest równą zeru, to rzeczone zależności są różne jedna od drugiej wtedy i tylko wtedy, gdy różnice:

$$e^{(\alpha+\gamma)i} - e^{2\varepsilon i}, \quad e^{(\beta+\delta)i} - e^{2\varepsilon i}$$

nie są zerami i wówczas zależności te są sprzeczne jedna z drugą.

Z tego rozważania wynika twierdzenie następujące. Warunki konieczne i wystarczające, żeby równości (1) i (31) określały pomiędzy wielkościami $x, y, \overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ dwie zależności różne jedna od drugiej i niesprzeczne jedna z drugą, polegają na tem, żeby albo różnice (32) nie były obie jednocześnie zerami, albo też, żeby wówczas, gdy różnice te są obie jednocześnie zerami, żadna z liczb A, B, C, D nie była zerem, a różnica (33) była także różną od zera.

Warunki tego twierdzenia są równoważne z warunkami, żeby nie wszystkie wyznaczniki drugiego stopnia macierzy:

$$(34)\qquad \begin{vmatrix} A'+C', & B'+D', & -(A''-C''), & -(B''-D'') \\ A''+C'', & B''+D'', & A'-C', & B'-D' \end{vmatrix}$$

były jednocześnie zerami. Wtedy równania (2) są dwoma niezależnemi od siebie i niesprzecznemi ze sobą związkami pomiędzy x', y', x'', y'', wynikającemi ze związku (1). Nadamy tym równaniom pewną szczególną postać. Zwrócimy uwagę na to, że dwa związki (1) i (31) można zastąpić dwoma związkami:

$$(35)\qquad \begin{cases} (A+\overset{*}{C})x+(B+\overset{*}{D})y+(C+\overset{*}{A})\overset{*}{x}+(D+\overset{*}{B})\overset{*}{y}+E+\overset{*}{E}=0, \\ (A-\overset{*}{C})x+(B-\overset{*}{D})y+(C-\overset{*}{A})\overset{*}{x}+(D-\overset{*}{B})\overset{*}{y}+E-\overset{*}{E}=0. \end{cases}$$

Żaden z tych związków nie zmienia się, gdy wykonywamy w nim zmianę znaku przy i, zachodzącem w wielkościach zmiennych i w spółczynnikach. Wobec tego można każdy z tych związków napisać w formie analogicznej do równania (19). Przyjmując mianowicie oznaczenia:

$$(36)\qquad \begin{cases} M_1 = A+\overset{*}{C}, & N_1 = B+\overset{*}{D}, & P_1 = E+\overset{*}{E}, \\ M_2 = i(\overset{*}{C}-A), & N_2 = i(\overset{*}{D}-B), & P_2 = i(\overset{*}{E}-E), \end{cases}$$

i stosując gwiazdki przy oznaczaniu liczb sprzężonych, mieć będziemy związki:

$$(37)\qquad \begin{cases} M_1 x+N_1 y+\overset{*}{M}_1\overset{*}{x}+\overset{*}{N}_1\overset{*}{y}+P_1=0, \\ M_2 x+N_2 y+\overset{*}{M}_2\overset{*}{x}+\overset{*}{N}_2\overset{*}{y}+P_2=0. \end{cases}$$

Jeżeli zaś używać będziemy akcentów dla oznaczenia liczb rzeczywistych, to związki rzeczywiste, równoważne związkowi (37), można będzie napisać w postaci:

$$(38)\quad \begin{cases} M_1' x' + N_1' y' - M_1'' x'' - N_1'' y'' + \frac{1}{2} P_1 = 0, \\ M_2' x' + N_2' y' - M_2'' x'' - N_2'' y'' + \frac{1}{2} P_2 = 0, \end{cases}$$

i na podstawie wzorów (36) łatwo dostrzec, że związki te tylko oznaczeniami spółczynników różnią się od związków (2). Zauważmy przytem, że jeżelibyśmy na spółczynniki M, N, P ze znaczkami i akcentami przyjęli takie liczby rzeczywiste, żeby równości (38) były dwoma niezależnemi od siebie i niesprzecznemi ze sobą związkami pomiędzy wielkościami x', y', x'', y'', to moglibyśmy przy każdym takim wyborze rzeczonych liczb rzeczywistych wyznaczyć spółczynniki związku (1), który czyni zadość warunkom podanego powyżej twierdzenia i określa te same związki (38) pomiędzy wielkościami x', y', x'', y''.

Związki (2) albo równoważne z niemi związki (38) są analitycznem wyrażeniem pewnej odpowiedniości pomiędzy śladami R i A punktu zespolonego. Odpowiedniość ta jest tego rodzaju, że rzeczone ślady czynią jednocześnie zadość warunkom, określonym dwiema odpowiedniościami, z których każda należy do odpowiedniości, rozważanych w § 58. Przy współczesnem spełnieniu nierówności:

$$(39)\qquad M_1' N_2' - N_1' M_2' \neq 0, \quad M_1'' N_2'' - N_1'' M_2'' \neq 0$$

równania (38) określają dla każdego danego śladu A jeden określony ślad R i nawzajem dla każdego danego śladu R jeden określony ślad A. Gdy spełnione są warunki:

$$(40)\qquad M_1' N_2' - N_1' M_2' \neq 0, \quad M_1'' N_2'' - N_1'' M_2'' = 0,$$

i przytem nie wszystkie liczby $M_1'', N_1'', M_2'', N_2''$ są zerami, wówczas można zapomocą jednej określonej linji prostej płaszczyzny R i nieskończenie wielu linij prostych o wspólnym dwukierunku płaszczyzny A opisać odpowiedniość, wyznaczoną równaniami (38), w sposób następujący. Każdemu śladowi A odpowiada jeden określony ślad R, położony na rzeczonej prostej płaszczyzny R, a każ-

demu śladowi R, leżącemu na tej prostej, odpowiadają wszystkie ślady A, leżące na jednej z rzeczonych prostych płaszczyzny A. Gdy spełnione są warunki (40) i przytem wszystkie liczby M_1'', N_1'', M_2'', N_2'' są zerami, wówczas każdemu śladowi A odpowiada jeden określony ślad R i nawzajem temu śladowi R wszystkie możliwe ślady A. Jeżeli spełnione są warunki:

$$(41) \qquad M_1' N_2' - N_1' M_2' = 0, \quad M_1'' N_2'' - N_1'' M_2'' \neq 0$$

i jeżeli przytem nie wszystkie liczby M_1', N_1', M_2', N_2' są zerami, to można zapomocą nieskończenie wielu prostych o wspólnym dwukierunku, położonych na płaszczyźnie R i jednej określonej prostej, położonej na płaszczyźnie A, opisać odpowiedniość, którą zajmujemy się, w sposób następujący. Każdemu śladowi R odpowiada jeden określony ślad A, leżący na rzeczonej prostej płaszczyzny A, a każdemu śladowi A, położonemu na tej prostej, odpowiadają wszystkie punkty jednej z rzeczonych prostych płaszczyzny R. Jeżeli spełnione są warunki (41) i przytem wszystkie liczby M_1', N_1', M_2', N_2' są zerami, to każdemu śladowi R odpowiada jeden określony ślad A i nawzajem temu śladowi A odpowiadają wszystkie możliwe ślady R. Jeżeli wreszcie spełnione są równości:

$$(42) \qquad M_1' N_2' - N_1' M_2' = 0, \quad M_1'' N_2'' - N_1'' M_2'' = 0$$

i przytem liczby M_1', N_1', M_2', N_2' są nie wszystkie jednocześnie zerami, a także liczby M_1'', N_1'', M_2'', N_2'' są nie wszystkie jednocześnie zerami, to równania (38) można zastąpić dwoma równaniami, z których jedno określa prostą właściwą na płaszczyźnie R, drugie zaś prostą właściwą na płaszczyźnie A. Odpowiedniość określona temi równaniami polega na tem, że każdemu punktowi którejkolwiek z tych prostych odpowiadają wszystkie punkty drugiej z nich.

Niech będzie znów równanie:

$$(1) \qquad A x + B y + C \overset{*}{x} + D \overset{*}{y} + E = 0,$$

równoważne dwóm od siebie niezależnym i ze sobą niesprzecznym związkom rzeczywistym, i zajmijmy się zadaniem wyznaczenia ewentualnie istniejących zespolonych linij prostych, które posiadają własność, że spółrzędne wszystkich punktów tych prostych, podstawione zamiast x, y w równanie (1), spełniają to równa-

nie. Jeżeli przyjmiemy dla zespolonej linji prostej uogólnione równania osiowe (20), to dla wyznaczenia wielkości a, b, u, v otrzymamy równania:

$$(43)\qquad \begin{cases} A\,a + B\,b + C\overset{*}{a} + D\overset{*}{b} + E = 0, \\ A\,u + B\,v = 0, \quad C\overset{*}{u} + D\overset{*}{v} = 0. \end{cases}$$

W przypadku szczególnym $C = D = 0$ równanie (1) określa prostą zespoloną:

$$(44)\qquad A\,x + B\,y + E = 0$$

i do tego samego rezultatu prowadzą warunki (43). W przypadku szczególnym $A = B = 0$ można warunki (43) zastąpić warunkami:

$$\overset{*}{C}\,a + \overset{*}{D}\,b + \overset{*}{E} = 0, \quad \overset{*}{C}\,u + \overset{*}{D}\,v = 0,$$

a więc odpowiedzią na nasze zapytanie jest prosta zespolona, określona równaniem:

$$(45)\qquad \overset{*}{C}\,x + \overset{*}{D}\,y + \overset{*}{E} = 0.$$

Jeżeli ani liczby A i B nie są obie jednocześnie zerami, ani liczby C i D nie są obie jednocześnie zerami, to zastąpimy równania drugiego wiersza warunków (43) przez równania:

$$\overset{*}{A}\,\overset{*}{u} + \overset{*}{B}\,\overset{*}{v} = 0, \quad C\overset{*}{u} + D\overset{*}{v} = 0$$

i wyprowadzimy z nich wniosek, że dla istnienia szukanych linij prostych musi być spełniona równość:

$$(46)\qquad \overset{*}{A}\,D - \overset{*}{B}\,C = 0,$$

t.j. musi istnieć taki zespolony czynnik H różny od zera, że jednocześnie zachodzą równości:

$$(47)\qquad C = H\overset{*}{A}, \quad D = H\overset{*}{B}.$$

Jeżeli tak jest istotnie, to szukana linja prosta musi mieć dwukierunek określony stosunkiem — $A : B$, a pierwsze z równań (43) można napisać w postaci:

$$A\,a + B\,b + H(\overset{*}{A}\,\overset{*}{a} + \overset{*}{B}\,\overset{*}{b}) + E = 0.$$

Linje proste, o które chodzi, istnieją wtedy i tylko wtedy, gdy można wyznaczyć takie dwie liczby zespolone ze sobą sprzężone G i $\overset{*}{G}$, że zachodzi równość:

$$G + H\,\overset{*}{G} = E.$$

Ponieważ z równości tej przez zmianę znaku przy i wynika równość:

$$\overset{*}{H}\,G + \overset{*}{G} = \overset{*}{E},$$

przeto w przypadku, gdy moduł liczby H jest różny od jedności, otrzymujemy na liczby G i $\overset{*}{G}$ wartości:

$$(48) \qquad G = \frac{E - H\,\overset{*}{E}}{1 - H\,\overset{*}{H}}, \quad \overset{*}{G} = \frac{\overset{*}{E} - \overset{*}{H}\,E}{1 - H\,\overset{*}{H}}.$$

Jeżeliby zaś moduł liczby H był jednością, to dla istnienia liczb sprzężonych G i $\overset{*}{G}$, spełniających rzeczone warunki, musiałyby być spełnione równoważne ze sobą równości:

$$E - H\,\overset{*}{E} = 0, \quad \overset{*}{E} - \overset{*}{H}\,E = 0.$$

Ale, ponieważ na podstawie pierwszej z tych równości oraz równości (47) łatwo skonstatować, że elementy pierwszego wiersza macierzy:

$$\begin{vmatrix} A, B, C, D, E \\ \overset{*}{C}, \overset{*}{D}, \overset{*}{A}, \overset{*}{B}, \overset{*}{E} \end{vmatrix}$$

równają się pomnożonym przez czynnik H elementom, znajdującym się w tych samych kolumnach drugiego wiersza, przeto wnosimy, że założenie, iż moduł liczby H jest równy jedności, prowadzi do przypadku, o którym była już mowa w § 58. Widzimy więc, że jeżeli spełniona jest równość (46), ale przytem ani wielkości A i B nie są obie jednocześnie zerami, ani wielkości C i D nie są obie jednocześnie zerami, to związek (1) jest równoważny dwóm niezależnym od siebie i niesprzecznym ze sobą związkom rzeczy-

wistym, gdy moduł wielkości H jest różny od jedności. Wówczas istnieje jedna określona linja prosta, która posiada własność, że spółrzędne wszystkich jej punktów podstawione zamiast x, y w równanie (1), spełniają to równanie. Ta linja prosta określona jest analitycznie równaniem:

$$A x + B y + G = 0, \tag{49}$$

gdzie G jest wielkością wyznaczoną przez pierwszy ze wzorów (48).

Zwrócimy się teraz do wyznaczenia wszystkich takich nici prostolinjowych, że spółrzędne wszystkich punktów tych nici podstawione zamiast x, y w związek (1) spełniają ten związek. Widoczne, że w przypadku, gdy $C = D = 0$ temi nićmi prostolinjowemi są tylko nici prostolinjowe prostej (44). Podobnież widoczne, że gdy $A = B = 0$, temi nićmi prostolinjowemi są tylko nici prostolinjowe linji prostej (45). Jeżeli nie zachodzi żaden z tych przypadków, ale spełniona jest równość (46) i moduł wielkości H jest różny od jedności, to wśród nici prostolinjowych, o które chodzi, znajdują się wszystkie nici prostolinjowe prostej zespolonej (49). Można przytem pokazać, że prócz tych nici prostolinjowych niema żadnych innych, któreby w uważanym przypadku należały w sposób wyżej podany do związku (1). Jeżelibyśmy określili nić równaniami (25), to dla niej musiałyby być spełnione równości:

$$\begin{cases} A a + B b + H(\overset{*}{A}\,\overset{*}{a} + \overset{*}{B}\,\overset{*}{b}) + E = 0, \\ A u + B v + H(\overset{*}{A}\,\overset{*}{u} + \overset{*}{B}\,\overset{*}{v}) = 0, \end{cases} \tag{50}$$

ale ponieważ z drugiej z nich otrzymuje się przez przestawienie znaku przy i równość:

$$\overset{*}{A}\,\overset{*}{u} + \overset{*}{B}\,\overset{*}{v} + \overset{*}{H}(A u + B v) = 0,$$

więc na skutek założenia, że moduł wielkości H jest różny od jedności, dochodzimy do równości:

$$A u + B v = 0, \quad \overset{*}{A}\,\overset{*}{u} + \overset{*}{B}\,\overset{*}{v} = 0,$$

które wraz z pierwszą z równości (50) prowadzą do nici prostolinjowych, położonych na prostej (49). Pozostają do rozważenia przypadki, w których zachodzi nierówność:

$$\overset{*}{A}D-\overset{*}{B}C\neq 0. \tag{51}$$

Wtedy dla wyznaczenia szukanych nici prostolinjowych mieć będziemy równania:

$$\left\{\begin{array}{l} Aa+Bb+C\overset{*}{a}+D\overset{*}{b}+E=0, \\ Au+Bv+C\overset{*}{u}+D\overset{*}{v}=0. \end{array}\right. \tag{52}$$

Drugie z tych równań jest równoważne z dwoma równaniami:

$$Au+Bv=K,$$

$$C\overset{*}{u}+D\overset{*}{v}=-K,$$

gdzie K jest parametrem zespolonym różnym od zera. Równania te można zastąpić przez równania:

$$Au+Bv=K,\quad \overset{*}{C}u+\overset{*}{D}v=-\overset{*}{K}, \tag{53}$$

z których otrzymują się wartości na u, v zależne od dowolnego zespolonego parametru K. Podobnież pierwsze z równań (52) jest równoważne z dwoma równaniami:

$$Aa+Bb+L=0,\quad C\overset{*}{a}+D\overset{*}{b}+E-L=0,$$

gdzie L jest dowolnym zespolonym parametrem. Równania te można zastąpić przez równania:

$$Aa+Bb+L=0,\quad \overset{*}{C}a+\overset{*}{D}b+\overset{*}{E}-\overset{*}{L}=0, \tag{54}$$

z których wynikają wartości na a, b, zależne od dowolnego zespolonego parametru L. Jeżeli rozwiążemy równania (53) i (54) względem u, v, a, b oraz rezultaty wstawimy w równania (25), to otrzymamy dla spółrzędnych punktów szukanych nici prostolinjowych wzory:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{B(\overset{*}{E}-\overset{*}{L}+\rho\overset{*}{K})-\overset{*}{D}(L-\rho K)}{A\overset{*}{D}-B\overset{*}{C}}, \\ y=-\dfrac{A(\overset{*}{E}-\overset{*}{L}+\rho\overset{*}{K})-\overset{*}{C}(L-\rho K)}{A\overset{*}{D}-B\overset{*}{C}}. \end{array}\right. \tag{55}$$

Wybór parametrów zespolonych K i L określa nić prostolinjową, a wybór parametru rzeczywistego ρ określa punkt należący do tej nici.

§ 60. Własności linjowego równania zespolonego pewnej szczególnej kategorji.

Zajmiemy się tu bliższem zbadaniem własności równania:

$$A x + D \overset{*}{y} + E = 0, \tag{56}$$

w którem stałe zespolone A i D są obie różne od zera. Równanie (56) jest szczególnym przypadkiem równań, któremi zajmowaliśmy się w § 59, a więc jest równoważne dwóm związkom rzeczywistym. Spółczynniki tego równania spełniają nierówność (51), a zatem niema żadnej prostej zespolonej, która miałaby własność, że spółrzędne x, y wszystkich jej punktów spełniają to równanie. Umówmy się zbiór punktów zespolonych, których spółrzędne x, y spełniają równanie (56), nazywać tworem β. Widoczne, że ten sam zbiór punktów o spółrzędnych x, y spełnia także równanie:

$$\overset{*}{A}\,\overset{*}{x} + \overset{*}{D}\,\overset{*}{y} + \overset{*}{E} = 0.$$

Tworami β ze sobą sprzężonemi nazywać będziemy takie dwa twory β, że pomiędzy punktami zespolonemi o spółrzędnych x, y, należącemi do jednego i drugiego z tych tworów ustanowić można konjugjum, t.j. taką odpowiedniość, że każdemu punktowi zespolonemu jednego z tych tworów odpowiada punkt zespolony z nim sprzężony drugiego z nich. Widoczne, że twór β sprzężony z tworem β, którego równanie jest (56), określa się równaniem:

$$\overset{*}{A}\, x + \overset{*}{D}\,\overset{*}{y} + \overset{*}{E} = 0, \tag{57}$$

lub też równaniem:

$$A \overset{*}{x} + D y + E = 0.$$

W dalszym ciągu zajmiemy się śladami R i A punktów zespolonych o spółrzędnych x, y spełniają-

cych równanie (56). W tym celu przeprowadzimy naprzód rozważania analogiczne do pewnych rozważań, odnoszących się do linij prostych zespolonych i zamieszczonych w §§ 54 i 55 tomu I.

Jeżeli w równaniu (56) stosunek spółczynników $A:D$ jest liczbą rzeczywistą, t.j. jeżeli zachodzi równość:

$$A'D''-D'A''=0, \tag{58}$$

to równanie (56) można napisać w postaci:

$$g\,x+h\overset{*}{y}+k'+i\,k''=0, \tag{59}$$

gdzie g, h, k', k'' oznaczają liczby rzeczywiste, z których dwie pierwsze są obie różne od zera. Z równania (59) wynikają dla śladów R i A związki:

$$\begin{cases} g\,x'+h\,y'+k'=0, \\ g\,x''-h\,y''+k''=0. \end{cases} \tag{60}$$

Pierwszy z nich jest równaniem linji prostej właściwej o dwukierunku — $g:h$ na płaszczyźnie R, drugi zaś jest równaniem linji prostej właściwej o dwukierunku $g:h$ na płaszczyźnie A. Rozważając te linje proste na płaszczyźnie RA i oznaczając przez $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ spółrzędne ich punktu spotkania na tej płaszczyźnie mieć będziemy wzory:

$$\mathfrak{a}=-\frac{k'+k''}{2g},\quad \mathfrak{b}=\frac{k''-k'}{2h}.$$

Na fig. 95 pierwsza z prostych (60) oznaczona jest literami RR, druga zaś z nich oznaczona jest literami AA. Dostrzegamy przytem bezpośrednio, że każdy odcinek, którego końce znajdują się na tych prostych, a dwukierunek jest dwukierunkiem osi y', y'' dzieli się na części równe w punkcie położonym na prostej, mającej dwukierunek osi x', x'' i przechodzącej przez punkt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$. Jeżeli weźmiemy pod uwagę proste o dwukierunku osi x', x'' to także skonstatujemy bezpośrednio własność analogiczną. Wszystkie punkty zespolone x, y, należące do tworu (59), są wszystkiemi punktami, których ślady R położone są na prostej RR, a ślady A położone są na prostej AA. Twór β sprzężony z tworem (59) określa się równaniem:

$$g\,x + h\,y + k' - i\,k'' = 0,$$

a więc dla śladów punktów tego tworu zachodzą równania:

$$g\,x' + h\,y' + k' = 0,$$

$$g\,x'' - h\,y'' - k'' = 0.$$

Widzimy więc, że ślady R punktów tworu sprzężonego z tworem (59) leżą na prostej $R\,R$, a ich ślady A na prostej, mającej ten sam dwukierunek i tę samą prostopadłą odległość od początku

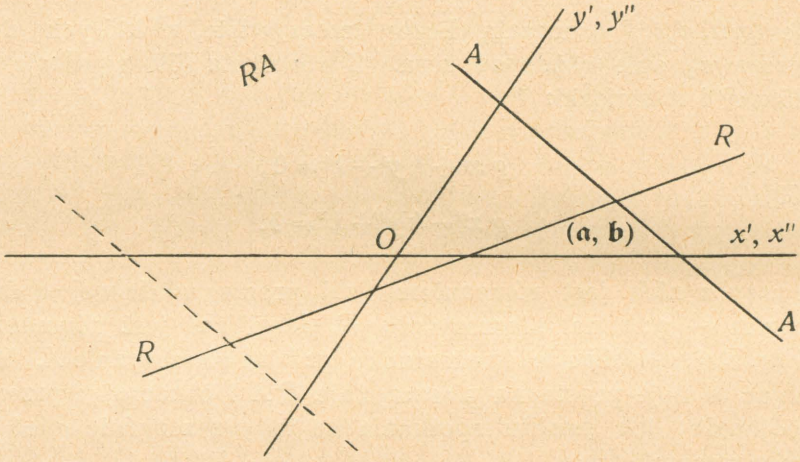

Fig. 95.

spółrzędnych, co prosta $A\,A$. Gdy przytem spełniona jest nierówność $k'' \neq 0$, wówczas rzeczona prosta śladów A leży po innej stronie początku spółrzędnych niż prosta $A\,A$, gdy zaś spełniona jest równość $k'' = 0$, wówczas rzeczona prosta śladów A pokrywa się z prostą $A\,A$. W pierwszym z tych przypadków prosta, na której leżą ślady A uważanego tworu sprzężonego, naznaczona jest na fig. 95 linją przerywaną. W drugim z tych przypadków powiemy, że odnośny twór β jest sam ze sobą sprzężony.

Przypuścimy teraz, że spełniona jest nierówność:

$$A'\,D'' - D'\,A'' \neq 0 \tag{61}$$

i napiszemy związki rzeczywiste, wynikające bezpośrednio z równania (56). One są:

$$(62)\qquad \begin{cases} A' x' + D' y' - A'' x'' + D'' y'' + E' = 0, \\ A'' x' + D'' y' + A' x'' - D' y'' + E'' = 0. \end{cases}$$

Porównywając je ze związkami (16) w § 55 tomu I, dojdziemy łatwo do wyniku, że zapomocą oznaczeń:

$$(63)\qquad l = \frac{A'^2 + A''^2}{A' D'' - D' A''},\quad m = \frac{A' D' + A'' D''}{A' D'' - D' A''},\quad n = \frac{D'^2 + D''^2}{A' D'' - D' A''}$$

oraz oznaczeń:

$$(64)\qquad \begin{cases} p' = \dfrac{D' E'' - E' D''}{A' D'' - D' A''},\quad q' = \dfrac{E' A'' - A' E''}{A' D'' - D' A''}, \\ p'' = -\dfrac{B' E' + B'' E''}{A' D'' - D' A''},\quad q'' = \dfrac{A' E' + A'' E''}{A' D'' - D' A''} \end{cases}$$

będziemy mogli przez rozwiązanie równań (62) względem wielkości x'', y'' otrzymać równania:

$$(65)\qquad \begin{cases} x'' = -m x' - n y' + p'', \\ y'' = -l x' - m y' - q'', \end{cases}$$

a przez rozwiązanie tychże równań (62) względem wielkości x', y' otrzymać równania:

$$(66)\qquad \begin{cases} x' = m x'' - n y'' + p', \\ y' = -l x'' + m y'' + q'. \end{cases}$$

Równania (65) określają pewne linjowe przekształcenie wielkości x', y' na wielkości x'', y'', a równania (66) pewne linjowe przekształcenie wielkości x'', y'' na wielkości x', y'. Przekształcenia te są wzajemnie odwrotne. Inaczej, równania (65) i równoważne z niemi równania (66) określają pewne jednojednowartościowe odwzorowanie płaszczyzn R i A. Ażeby wystudjować własności tego odwzorowania, przypuśćmy, że do punktów x, y uważanego tworu należy punkt o spółrzędnych:

$$a = a' + i a'',\quad b = b' + i b'',$$

t.j., że spełnione są równości:

$$a''= - m\,a' - n\,b' + p'', \quad b''= - l\,a' - m\,b' - q''$$

i równości:

$$a' = m\,a'' - n\,b'' + p', \quad b' = - l\,a'' + m\,b'' + q'.$$

Korzystając z pierwszych dwóch z tych równości, można równania (65) zastąpić równaniami:

$$(67) \qquad \begin{cases} x''- a''= - m(x' - a') - n\,(y' - b'), \\ y''- b''= - l\,(x' - a') - m\,(y' - b'), \end{cases}$$

a korzystając z drugich dwóch z rzeczonych równości, można równania (66) zastąpić przez równania:

$$(68) \qquad \begin{cases} x' - a' = m\,(x''- a'') - n\,(y''- b''), \\ y' - b' = - l\,(x''- a'') + m\,(y''- b''). \end{cases}$$

Zarówno z równań (67), jak i z równań (68) wynika związek:

$$(69) \qquad l\,(x' - a')\,(x''- a'') - n\,(y' - b')\,(y''- b'') -$$

$$- m\,[(x' - a')\,(y''- b'') - (y' - b')\,(x''- a'')] = 0.$$

Oznaczając przez λ', μ' spółczynniki kierunkowe wektora z początkiem w punkcie a', b' i końcem w punkcie x', y', różnym od punktu a', b', mieć będziemy wzory:

$$(70) \qquad \lambda' = \frac{x' - a'}{\sqrt{\Phi\,(x' - a',\ y' - b')}}, \quad \mu' = \frac{y' - b'}{\sqrt{\Phi\,(x' - a',\ y' - b')}},$$

a oznaczając przez λ'', μ'' spółczynniki wektora z początkiem w a'', b'' i końcem w punkcie x'', y'', różnym od punktu a'', b'', mieć będziemy wzory:

$$(71) \qquad \lambda''= \frac{x''- a''}{\sqrt{\Phi\,(x''- a'', y''- b'')}}, \quad \mu''= \frac{y''- b''}{\sqrt{\Phi\,(x''- a'', y''- b'')}}.$$

Stosując te oznaczenia, można będzie związek (69) napisać w postaci:

$$(72) \qquad l\,\lambda'\,\lambda''- m\,(\lambda'\,\mu''- \mu'\,\lambda'') - n\,\mu'\,\mu''= 0.$$

Takiemi związkami zajmowaliśmy się w § 51 tomu I. Obliczając dla związku (72) rozważane tam wyznaczniki w i W, mieć będziemy:

$$(73)\qquad \begin{cases} w = -(l\,n - m^2) = -1, \\ W = -1 - m^2 = -l\,n. \end{cases}$$

Ponieważ wielkość W jest ujemna, więc odpowiedniość dwóch dwukierunków, określona związkiem (72), ma dwa różne od siebie dwukierunki niezmienne rzeczywiste. Dla dwukierunku niezmiennego $\mu:\lambda$ mamy warunek:

$$l\,\lambda^2 - n\,\mu^2 = 0$$

i jeżeli ε ma wartość $+1$, gdy znaki wielkości l i n są dodatnie, a wartość -1, gdy znaki wielkości l i n są ujemne, to dla spółczynników kierunku niezmiennego mieć będziemy wyrażenia:

$$(74)\quad \lambda = -\frac{\tau\sqrt{\varepsilon n}}{\sqrt{\Phi(\sigma\sqrt{\varepsilon l}, -\tau\sqrt{\varepsilon n})}}, \qquad \mu = \frac{\sigma\sqrt{\varepsilon l}}{\sqrt{\Phi(\sigma\sqrt{\varepsilon l}, -\tau\sqrt{\varepsilon n})}},$$

gdzie $\sigma = \pm 1$, $\tau = \pm 1$. Z równań (67) dochodzimy do związku:

$$\sigma\sqrt{\varepsilon l}\,(x''-a'') + \tau\sqrt{\varepsilon n}\,(y''-b'') =$$

$$= -\left(\sigma\, m\sqrt{\varepsilon l} + \tau\, l\sqrt{\varepsilon n}\right)(x'-a') - \left(\sigma\, n\sqrt{\varepsilon l} + \tau\, m\sqrt{\varepsilon n}\right)(y'-b'),$$

który można łatwo doprowadzić do postaci:

$$(75)\qquad \sigma\sqrt{\varepsilon l}\,(x''-a'') + \tau\sqrt{\varepsilon n}\,(y''-b'') =$$

$$= -\left(\varepsilon\,\sigma\,\tau\sqrt{l n} + m\right)\left[\sigma\sqrt{\varepsilon l}\,(x'-a') + \tau\sqrt{\varepsilon n}\,(y'-b')\right].$$

Podobnież z równań (68) dochodzimy do związku:

$$\sigma\sqrt{\varepsilon l}\,(x'-a') + \tau\sqrt{\varepsilon n}\,(y'-b') =$$

$$= \left(\sigma\, m\sqrt{\varepsilon l} - \tau\, l\sqrt{\varepsilon n}\right)(x''-a'') + \left(\tau\, m\sqrt{\varepsilon n} - \sigma\, n\sqrt{\varepsilon l}\right)(y''-b''),$$

który można napisać w formie:

$$(76)\qquad \sigma\sqrt{\varepsilon l}\,(x'-a') + \tau\sqrt{\varepsilon n}\,(y'-b') =$$

$$= -\left(\varepsilon\,\sigma\,\tau\sqrt{|l\,n|} - m\right)\left[\sigma\sqrt{\varepsilon\,l}\,(x''-a'') + \tau\sqrt{\varepsilon\,n}\,(y''-b'')\right].$$

Równości (75) i (76) są dwiema różnemi formami tego samego związku. To wynika ze sposobu tworzenia tych równości i z faktu, że równania (67) i (68) określają przekształcenia wzajemnie odwrotne. Można to sprawdzić także mnożąc te równości stronami i uwzględniając równość:

$$\left(\varepsilon\,\sigma\,\tau\sqrt{|l\,n|} + m\right)\left(\varepsilon\,\sigma\,\tau\sqrt{|l\,n|} - m\right) = l\,n - m^2 = 1.$$

Przytem zauważmy, że znak wspólnego czynnika stałego, znajdującego się po prawej stronie równości (76) jest ten sam co znak wspólnego czynnika stałego, znajdującego się po prawej stronie równości (75). Stąd wynika, że wspólny znak tych czynników jest zarazem znakiem ich sumy, a więc jest ten sam, co znak iloczynu $-\varepsilon\,\sigma\,\tau$. Na podstawie wzorów (70), (71) i (74) łatwo dostrzec, że z każdego ze związków (75) i (76) wynika związek:

$$(77)\qquad (\lambda\,\mu'' - \mu\,\lambda'')\sin\vartheta = -K\,\varepsilon\,\sigma\,\tau\,(\lambda\,\mu' - \mu\,\lambda')\sin\vartheta,$$

gdzie K jest czynnikiem dodatnim, którego bliżej nie będziemy określać. Jeżeli przez λ_1, μ_1 oznaczymy spółczynniki kierunkowe, określone wzorami (74) przy założeniu $\sigma\,\tau = \varepsilon$, a przez λ_2, μ_2 spółczynniki kierunkowe, określone temiż wzorami przy założeniu $\sigma\,\tau = -\varepsilon$, to mieć będziemy związki:

$$(78)\qquad \begin{cases} (\lambda_1\,\mu'' - \mu_1\,\lambda'')\sin\vartheta = -K\,(\lambda_1\,\mu' - \mu_1\,\lambda')\sin\vartheta, \\ (\lambda_2\,\mu'' - \mu_2\,\lambda'')\sin\vartheta = K\,(\lambda_2\,\mu' - \mu_2\,\lambda')\sin\vartheta. \end{cases}$$

Dla odpowiadających sobie kierunków λ', μ' i λ'', μ'', spełniających związek (72) i nie będących jego kierunkami niezmiennemi, pierwszy ze związków (78) orzeka, że wstawa kierunku λ'', μ'' z kierunkiem λ_1, μ_1 jest różnego znaku od wstawy kierunku λ', μ' z kierunkiem λ_1, μ_1, drugi zaś z tych związków orzeka, że wstawa kierunku λ'', μ'' z kierunkiem λ_2, μ_2 jest tego samego znaku, co wstawa kierunku λ', μ' z kierunkiem λ_2, μ_2. Przekształcenie, określone równaniami (67) lub też równoważnemi z niemi równaniami (68), ustanawia jednojednowartościową odpowiedniość pomiędzy ramionami z początkiem w punkcie a', b' i ramionami z początkiem w punkcie

a'', b''. Otóż wzory (78) określają pewne własności kierunków ramion sobie odpowiadających.

Na podstawie równań (66) wielkości p', q' są spółrzędnemi śladu R punktu rzeczywistego, należącego do uważanego tworu β, Na podstawie równań (65) wielkości $p'', -q''$ są spółrzędnemi śladu A tego punktu tworu β, którego ślad R jest początkiem spółrzędnych.

Równania przekształcenia, które określają twór β sprzężony z tworem, określonym równaniami (65) lub (66), otrzymują się z tych ostatnich przez zastąpienie w nich wielkości l, m, n, p'', q'' odpowiednio wielkościami $-l, -m, -n, -p'', -q''$ oraz przez pozostawienie bez zmiany wielkości p', q'.

Możemy do tworów β zastosować także postępowanie analogiczne do postępowania, zapomocą którego badaliśmy zbiory punktów linij prostych w § 47. Zauważmy, że można równanie (56) na podstawie rozważań o zespolonych linjach prostych (§§ 28 i 29 tomu I) zastąpić przez równania:

$$x = a + u t, \quad \overset{*}{y} = \overset{*}{b} + v t, \tag{79}$$

w których wielkości u, v i $a, \overset{*}{b}$ spełniają równania:

$$A u + D v = 0, \quad A a + D \overset{*}{b} + E = 0, \tag{80}$$

a t jest zmiennym zespolonym parametrem. Równania (79) są równoważne z równaniami:

$$x = a + u t, \quad y = b + \overset{*}{v}\overset{*}{t}, \tag{81}$$

a podstawiając w nich zamiast t wielkości $\rho e^{i\omega}$, mieć będziemy równania:

$$x = a + u \rho e^{i\omega}, \quad y = b + \overset{*}{v} \rho e^{-i\omega}, \tag{82}$$

stąd zaś otrzymamy dla spółrzędnych śladów R i A punktów zespolonych, należących do tworu β, równania:

$$\left\{\begin{aligned} x' &= a' + \rho (u' \cos\omega - u'' \sin\omega), \\ y' &= b' + \rho (v' \cos\omega - v'' \sin\omega), \\ x'' &= a'' + \rho (u' \sin\omega + u'' \cos\omega), \\ y'' &= b'' - \rho (v' \sin\omega + v'' \cos\omega). \end{aligned}\right. \tag{83}$$

Załóżmy naprzód, że stosunek $A:D$ jest wielkością rzeczywistą, t.j. że spełniona jest równość (58). Wtedy składowe u, v, wynikające z pierwszego z równań (80), określają wektor o rzeczywistym dwukierunku. Bez zmniejszenia ogólności rozważania, które mamy przeprowadzić, możnaby w tym przypadku obrać na u, v liczby rzeczywiste, czyniące zadość pierwszemu z równań (80). Ale zastosujemy najogólniejszą postać odnośnych wzorów. Widoczne, że w uważanym przypadku istnieją takie liczby rzeczywiste u_0, v_0, nie będące obie jednocześnie zerami, i takie liczby rzeczywiste c' i c'', nie będące obie jednocześnie zerami, że zachodzą równości:

$$u' = c' u_0, \quad v' = c' v_0; \quad u'' = c'' u_0, \quad v'' = c'' v_0.$$

Naskutek tych równości można równania (83) w tym przypadku przedstawić w postaci:

$$(84) \quad \begin{cases} x' = a' + u_0 \rho (c' \cos \omega - c'' \sin \omega), \\ y' = b' + v_0 \rho (c' \cos \omega - c'' \sin \omega), \\ x'' = a'' + u_0 \rho (c' \sin \omega + c'' \cos \omega), \\ y'' = b'' - v_0 \rho (c' \sin \omega + c'' \cos \omega). \end{cases}$$

Z tych równań wynikają równania:

$$(85) \quad \begin{cases} v_0 (x' - a') - u_0 (y' - b') = 0, \\ v_0 (x'' - a'') + u_0 (y'' - b'') = 0. \end{cases}$$

Zatem wszystkie ślady R punktów tworu β położone są na prostej, określonej pierwszem z tych równań, a wszystkie ślady A punktów tworu β położone są na prostej, określonej drugiem z tych równań. Są to proste oznaczone odpowiednio literami $R\,R$ i $A\,A$ na figurze 95. Jeżeli w równaniach (82) wielkość ω ma wartość stałą, a wielkość ρ przyjmuje wszystkie możliwe wartości rzeczywiste, to równania te określają nić prostolinjową, położoną na uważanym tworze β. Ten twór β ma nieskończenie wiele nici prostolinjowych, ale wszystkie ślady R punktów tych nici leżą na pierwszej z prostych (85), a wszystkie ślady A punktów tych nici leżą na drugiej z prostych (85). Jeżeli w równaniach (82) wielkość ρ ma wartość stałą różną od zera, a wielkość ω przyjmuje wszystkie możliwe wartości rzeczywiste, to równania te określają nieskończony zbiór punktów zespolonych, których ślady R opisują

odcinek ze środkiem w punkcie a', b', położony na pierwszej z prostych (85), a ślady A opisują odcinek ze środkiem w punkcie a'', b'', położony na drugiej z prostych (85). Bliższe rozważenie dalszych własności par śladów punktów zespolonych, należących do rzeczonych zbiorów, pomijamy.

Załóżmy następnie, że stosunek $A:D$ jest wielkością urojoną, t.j. że spełniona jest nierówność (61). Wtedy z pierwszego z równań (80) wynikają wektory u, v o wspólnym dwukierunku, który jest urojony, a więc zachodzi nierówność $u' v'' - v' u'' \neq 0$. Przy stałem ω i zmiennem ρ równania (82) określają nici prostolinjowe, przechodzące przez punkt a, b. Ślady punktów każdej z tych nici prostolinjowych położone są na każdej z płaszczyzn R i A na linji prostej rzeczonej nici odpowiadającej i przytem prosta, leżąca na płaszczyźnie R przechodzi przez punkt a', b', prosta zaś, leżąca na płaszczyźnie A przez punkt a'', b''. Dla każdej danej wartości kąta ω można z równań (83) wyznaczyć kierunki odpowiadających sobie ramion tych linij prostych w rozważanem odwzorowaniu. Przez rugowanie kąta ω z równań (83) otrzymujemy równania:

$$(86)\quad \begin{cases} [v''(x'-a') - u''(y'-b')]^2 + [u'(y'-b') - v'(x'-a')]^2 = \\ \qquad = \rho^2 (u' v'' - v' u'')^2, \\ [v''(x''-a'') + u''(y''-b'')]^2 + [u'(y''-b'') + v'(x''-a'')]^2 = \\ \qquad = \rho^2 (u' v'' - v' u'')^2 \end{cases}$$

oraz równania:

$$(87)\quad \begin{cases} v''(x''-a'') + u''(y''-b'') = -[u'(y'-b') - v'(x'-a')], \\ u'(y''-b'') + v'(x''-a'') = -[v''(x'-a') - u''(y'-b')]. \end{cases}$$

Postępując taką samą drogą, jak w § 47, i stosując przytem oznaczenia (226) tegoż paragrafu zgodne z oznaczeniami (63) niniejszego paragrafu, możemy równania (86) doprowadzić do kształtu:

$$(88)\quad \begin{cases} l(x'-a')^2 + 2m(x'-a')(y'-b') + n(y'-b')^2 = \\ \qquad = \rho^2 (u' v'' - v' u''), \\ l(x''-a'')^2 - 2m(x''-a'')(y''-b'') + n(y''-b'')^2 = \\ \qquad = \rho^2 (u' v'' - v' u''), \end{cases}$$

a związki (87) napisać w postaci:

$$(67)\qquad \begin{cases} x''-a''=-m(x'-a')-n(y'-b'), \\ y''-b''=-l(x'-a')-m(y'-b'), \end{cases}$$

którą na innej drodze spotkaliśmy już poprzednio. Wtedy zajmowaliśmy się także geometrycznem znaczeniem tych równań. Obecnie podamy łączną interpretację układów równań (88) i (67).

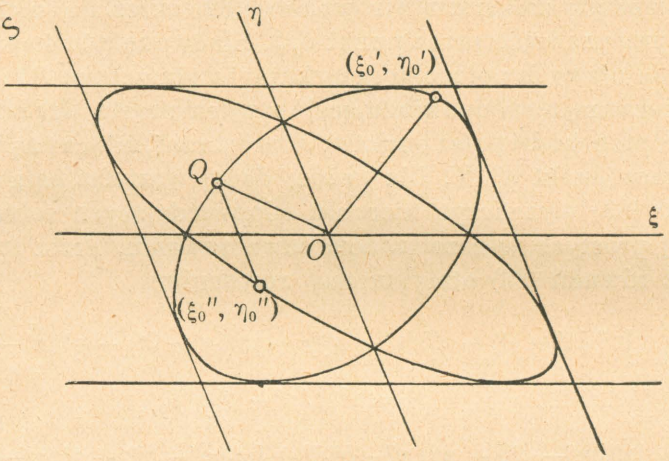

Fig. 96.

W tym celu narysujemy naprzód na płaszczyźnie, którą nazwiemy płaszczyzną S, układ spółrzędnych ξ, η, przyjmując, że oś η tworzy z osią ξ kąt ϑ, i rozważać będziemy w tym układzie dwa zmienne punkty o spółrzędnych ξ', η' i ξ'', η'', spełniających związki:

$$(89)\qquad \begin{cases} l\xi'^2+2m\xi'\eta'+n\eta'^2=\rho^2(u'v''-v'u''), \\ l\xi''^2-2m\xi''\eta''+n\eta''^2=\rho^2(u'v''-v'u'') \end{cases}$$

i związki:

$$(90)\qquad \xi''=-m\xi'-n\eta', \quad \eta''=-l\xi'-m\eta'.$$

Równania (89) określają w przypadku $m=0$ jednę i tę samą elipsę, względem której osie ξ i η są średnicami ze sobą sprzężonemi. W przypadku zaś $m \neq 0$ równania (87) określają dwie różne od siebie elipsy o wspólnym środku i czterech punktach spotkania

położonych na osiach spółrzędnych. Takie dwie elipsy narysowane są na fig. 96. Mają one własność, że przechodzą jedna w drugą przez przekształcenia:

$$\xi'' = k\,\xi', \quad \eta'' = -k\,\eta',$$

gdzie $k = \pm 1$. Z pomocą tych elips można zależność, zachodzącą pomiędzy punktami ξ', η' i ξ'', η'' opisać w sposób następujący. Na podstawie pierwszego z równań (89) można dla elipsy, określonej tem równaniem i przechodzącej przez dany punkt $\xi' = \xi_0'$, $\eta' = \eta_0'$, obliczyć należącą do niej wartość wielkości ρ. Odpowiadający temu punktowi punkt $\xi'' = \xi_0''$, $\eta'' = \eta_0''$ położony jest na elipsie, określonej drugiem z równań (89) przy tej samej wartości ρ. Gdyby w równaniach (89) i (90) zamiast η'' zachodziło wszędzie $-\eta''$, to elipsy (89) nakrywałyby się i zachodziłby szczególny przypadek odpowiedniości, którą rozważaliśmy w § 47. Wtedy punktem ξ'', η'', odpowiadającym punktowi ξ_0', η_0', byłby punkt Q, położony na pierwszej z elips (89) i wybrany w ten sposób, żeby wstawa kąta wektora o początku w punkcie O i końcu w punkcie Q z wektorem o początku w punkcie O i końcu w punkcie ξ_0', η_0' miała ten sam znak, co wyrażenie $(u'v'' - v'u'')\sin\vartheta$ i żeby wektory te były połowami średnic ze sobą sprzężonych pierwszej z elips (89). Mając obecnie punkt Q, można wyznaczyć punkt ξ_0'', η_0'' na podstawie uwagi, że ma on tę samą spółrzędną ξ, co punkt Q, i że jego spółrzędna η różni się od spółrzędnej η punktu Q tylko znakiem. Widoczne, że punkt ξ_0'', η_0'', w taki sposób otrzymany, leży na drugiej z elips (89). Widoczne także, że to postępowanie stosuje się również w przypadku, gdy $m = 0$, t.j. gdy elipsy nakrywają się, i że punkt ξ_0'', η_0'' jest wówczas drugim z punktów elipsy, mającym tę samą spółrzędną ξ, co punkt Q. Rozważając zastosowany sposób opisu, dostrzeżemy łatwo, jak według danego punktu $\xi = \xi_0''$, $\eta = \eta_0''$ otrzymać można w związku z figurą 96 punkt $\xi = \xi_0'$, $\eta = \eta_0'$ i bliższe rozważenie szczegółów tego odwrotnego postępowania pomijamy. Widoczne przytem, że odpowiedniość, określona w układzie spółrzędnych ξ, η równaniami (89) i (90) związana jest z nieskończenie wieloma elipsami homotetycznemi z pierwszą z elips figury 96 względem jej środka, jako środka homotetyczności i z nieskończenie wieloma elipsami homotetycznemi z drugą z elips figury 96 względem jej środka, jako środka homotetyczności. Jeżeli zważymy, że równania (88) i (67) przechodzą w równania (89) i (90) zapomocą podstawień:

$$(91)\qquad \begin{cases} x' = a' + \xi', \quad y' = b' + \eta', \\ x'' = a'' + \xi'', \quad y'' = b'' + \eta'', \end{cases}$$

to dostrzeżemy łatwo, że opis odpowiedniości płaszczyzn R i A, określonej równaniami (88) i (67) może być związany z rozważaniem dwóch systemów elips homotetycznych, położonych na płaszczyznach R i A (fig. 97). Na podstawie związków (91) można

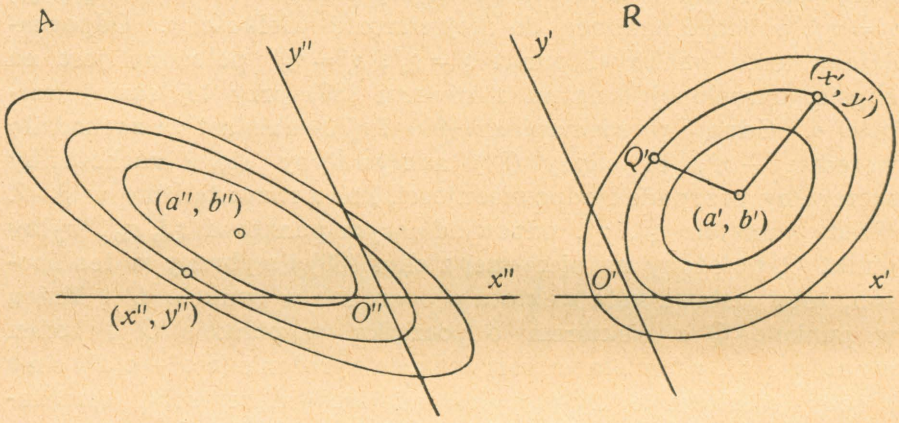

Fig. 97.

systemy te umieścić na płaszczyznach R i A w sposób następujący. Płaszczyznę S nakładamy tak na płaszczyznę R, żeby początek układu ξ, η leżał w punkcie a', b' płaszczyzny R i żeby osie ξ, η miały odpowiednio te same kierunki, co osie x', y', oraz rysujemy na płaszczyźnie R taki system elips homotetycznych, który nakrywa się z pierwszym z systemów elips homotetycznych płaszczyzny S. Następnie nakładamy płaszczyznę S tak na płaszczyznę A, żeby początek układu ξ, η leżał w punkcie a'', b'' płaszczyzny A i żeby osie ξ, η miały te same kierunki, co odpowiednio osie x'', y'', oraz kreślimy na płaszczyźnie A system elips homotetycznych, nakrywający się z drugim systemem elips homotetycznych płaszczyzny S. Punkty sobie odpowiadające na płaszczyznach R i A można określić z odpowiadających sobie punktów ξ_0', η_0', ξ_0'', η_0'' płaszczyzny S zapomocą wzorów (91) i na podstawie tychże wzorów oraz poprzedniego rozważania odpowiedniości na płaszczyźnie S można geometrycznie opisać odpowiedniość punktów na płasz-

czyznach R i A. Szczegóły tego opisu pomijamy. Zwrócimy natomiast uwagę na to, że wybór punktu zespolonego a, b skrępowany jest tylko tem, żeby należał on do punktów uważanego tworu β. Stąd wynika, że dla jednego i tego samego tworu β można wykonać nieskończenie wiele takich opisów odpowiadającego mu odwzorowania płaszczyzn R i A. W szczególności można przyjąć, że punkt a, b jest rzeczywistym punktem tworu β, t.j. że $a''=0$, $b''=0$.

Gdy opisane jest, jak powyżej, odwzorowanie płaszczyzn R i A, odpowiadające tworowi β, który czyni zadość warunkowi (61), to można łatwo podać także opis odwzorowania, odpowiadającego tworowi sprzężonemu z tworem β. Można przyjąć na płaszczyźnie R ten sam system elips homotetycznych, co na płaszczyźnie R figury 97, i trzeba przytem punkt Q' zastąpić przez punkt położony na tej samej elipsie, co punkt Q', ale średnicowo przeciwległy z tym punktem. Następnie trzeba dokonać takiej translacji systemu elips homotetycznych płaszczyzny A figury 97, żeby wspólny środek tych elips przeszedł w punkt określony spółrzędnemi $-a''$, $-b''$. Wtedy ślad A, odpowiadający punktowi x', y' na płaszczyźnie R, będzie położony na elipsie, która otrzymała się przez przesunięcie elipsy poprzedniego śladu, ale na tej elipsie będzie średnicowo przeciwległy z punktem, który powstał przez przesunięcie poprzedniego śladu.

§ 61. Jedno, dwu i trzyparametrowe systemy pierwszego stopnia punktów zespolonych i wektory zespolone, leżące na tych systemach.

Jeżeli a, b, u, v oznaczają cztery liczby zespolone, z których dwie ostatnie nie są jednocześnie zerami, to równania:

$$x = a + u\rho, \quad y = b + v\rho, \tag{92}$$

gdzie ρ jest zmiennym parametrem rzeczywistym, określają spółrzędne punktów, położonych na nici prostolinjowej. Zbiór tych punktów nazwiemy inaczej jednoparametrowym systemem pierwszego stopnia punktów zespolonych. Niech będą wartości c_1 i $c_2 \neq c_1$ rzeczywistego parametru ρ. Spółrzędne x, y wartościom tym odpowiadające, określają się wzorami:

$$x_1 = a + u\,c_1, \quad y_1 = b + v\,c_1,$$

$$x_2 = a + u\,c_2, \quad y_2 = b + v\,c_2,$$

z których otrzymują się równości:

$$(93) \qquad x_2 - x_1 = (c_2 - c_1)\,u, \quad y_2 - y_1 = (c_2 - c_1)\,v.$$

Biorąc pod uwagę wektor, którego początkiem jest punkt x_1, y_1, a końcem punkt x_2, y_2, widzimy, że składowe dowolnie wybranego wektora, położonego na jednoparametrowym systemie pierwszego stopnia (92), są iloczynami liczb zespolonych u, v przez ten sam czynnik rzeczywisty. Zauważymy przytem, że jednoparametrowy system pierwszego stopnia można przedstawić nieskończenie wieloma sposobami przez równania postaci (92). Jeżeli mianowicie obierzemy dowolną liczbę rzeczywistą c oraz dowolny czynnik rzeczywisty m różny od zera i wyznaczymy punkt systemu o spółrzędnych:

$$(94) \qquad \bar{a} = a + u\,c, \quad \bar{b} = b + v\,c$$

oraz składowe wektora, położonego na systemie o składowych:

$$(95) \qquad \bar{u} = m\,u, \quad \bar{v} = m\,v,$$

to będziemy mogli równości (92) zastąpić równościami:

$$(96) \qquad x = \bar{a} + \bar{u}\,\bar{\rho}, \quad y = \bar{b} + \bar{v}\,\bar{\rho},$$

gdzie $\bar{\rho}$ oznacza nowy parametr rzeczywisty, wyrażający się przez poprzedni parametr zapomocą wzoru:

$$(97) \qquad \bar{\rho} = \frac{\rho - c}{m}.$$

Weźmiemy teraz pod uwagę dwa wektory zespolone, z których żaden nie ma obu składowych równych zeru. Oznaczymy przez u_1, v_1 składowe jednego z nich, przez u_2, v_2 składowe drugiego z nich i założymy, że nie istnieją czynniki rzeczywiste k_1 i k_2, nie oba równe zeru, przy których zachodziłyby równości:

$$(98) \qquad k_1\,u_1 + k_2\,u_2 = 0, \quad k_1\,v_1 + k_2\,v_2 = 0.$$

Widoczne, że czynniki takie nie istnieją zawsze wtedy, gdy spełniona jest nierówność:

(99) $$u_1 v_2 - v_1 u_2 \neq 0,$$

t.j. gdy uważane wektory mają różne dwukierunki. Jeżeli zaś zachodzi równość:

(100) $$u_1 v_2 - v_1 u_2 = 0,$$

t.j. uważane wektory mają wspólny dwukierunek, wówczas istnieje liczba zespolona $l = l' + i\,l''$, przy której zachodzą równości:

$$u_2 = (l' + i\,l'')\,u_1, \quad v_2 = (l' + i\,l'')\,v_1.$$

Wtedy równości (98) redukują się do równości:

$$k_1 + (l' + i\,l'')\,k_2 = 0,$$

a więc rzeczone czynniki rzeczywiste k_1, k_2, nie oba równe zeru, nie istnieją wtedy i tylko wtedy, gdy $l'' \neq 0$, t.j. gdy odpowiednie składowe dwóch uważanych wektorów o wspólnym dwukierunku różnią się czynnikiem, będącym liczbą urojoną. Niech będą teraz równania:

(101) $$x = a + u_1 \rho_1 + u_2 \rho_2, \quad y = b + v_1 \rho_1 + v_2 \rho_2,$$

w których a, b są danemi liczbami zespolonemi, a ρ_1, ρ_2 rzeczywistemi zmiennemi parametrami. Zbiór punktów zespolonych, których spółrzędne wynikają przy powyższych założeniach z równań (101), gdy parametry ρ_1 i ρ_2 otrzymują wszelkie wartości rzeczywiste, nazywać będziemy dwuparametrowym systemem pierwszego stopnia punktów zespolonych. Łatwo dostrzec, że składowe każdego wektora zespolonego, położonego na tym systemie, mają wartości:

$$\sigma_1 u_1 + \sigma_2 u_2, \quad \sigma_1 v_1 + \sigma_2 v_2,$$

gdzie σ_1 i σ_2 oznaczają czynniki rzeczywiste, zależne od wyboru tego wektora. Dwuparametrowy system pierwszego stopnia punktów zespolonych można przedstawić nieskończenie wieloma sposobami przez równania formy (101). Obierając dowolnie liczby rzeczywiste c_1 i c_2, otrzymamy ze wzorów:

(102) $$\bar{a} = a + u_1 c_1 + u_2 c_2, \quad \bar{b} = b + v_1 c_1 + v_2 c_2$$

spółrzędne punktu, należącego do systemu, a obierając dowolnie czynniki rzeczywiste m_1, m_2, n_1, n_2 spełniające warunek:

(103) $$m_1 n_2 - n_1 m_2 \neq 0,$$

otrzymamy ze wzorów:

(104) $$\begin{cases} \bar{u}_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2, & \bar{v}_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \\ \bar{u}_2 = n_1 u_1 + n_2 u_2, & \bar{v}_2 = n_1 v_1 + n_2 v_2 \end{cases}$$

składowe wektorów, które leżą na systemie i jak łatwo uzasadnić czynią zadość warunkowi, aby nie istniały takie czynniki rzeczywiste $\bar{k}_1$ i $\bar{k}_2$, nie oba jednocześnie równe zeru, że spełnione są równości:

(105) $$\bar{k}_1 \bar{u}_1 + \bar{k}_2 \bar{u}_2 = 0, \quad \bar{k}_1 \bar{v}_1 + \bar{k}_2 \bar{v}_2 = 0.$$

Stosując wielkości $\bar{a}, \bar{b}, \bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{n}_1, \bar{n}_2$, można zbiór punktów, określonych równaniami (101), przedstawić równaniami:

(106) $$x = \bar{a} + \bar{u}_1 \bar{\rho}_1 + \bar{u}_2 \bar{\rho}_2, \quad y = \bar{b} + \bar{v}_1 \bar{\rho}_1 + \bar{v}_2 \bar{\rho}_2,$$

gdzie $\bar{\rho}_1$ i $\bar{\rho}_2$ oznaczają parametry rzeczywiste, które wyrażają się przez parametry ρ_1 i ρ_2 zapomocą wzorów:

(107) $$\bar{\rho}_1 = \frac{n_2(\rho_1 - c_1) - n_1(\rho_2 - c_2)}{m_1 n_2 - n_1 m_2}, \quad \bar{\rho}_2 = \frac{m_1(\rho_2 - c_2) - m_2(\rho_1 - c_1)}{m_1 n_2 - n_1 m_2}.$$

Niech będą teraz trzy wektory zespolone, z których każdy ma własność, że jego składowe nie są obie zerami. Składowe te oznaczymy u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3 i założymy, że nie istnieją czynniki rzeczywiste k_1, k_2, k_3, nie będące wszystkie jednocześnie zerami, które spełniałyby równości:

(108) $$k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = 0, \quad k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = 0.$$

Przy zastosowaniu oznaczeń przyjętych w tej książce, będziemy mogli założenie to wyrazić w ten sposób, że nie wszystkie wyznaczniki trzeciego stopnia macierzy:

(109) $$\begin{vmatrix} u_1', & v_1', & u_1'', & v_1'' \\ u_2', & v_2', & u_2'', & v_2'' \\ u_3', & v_3', & u_3'', & v_3'' \end{vmatrix}$$

są zerami, albo też w ten sposób, że nie wszystkie wyznaczniki trzeciego stopnia macierzy:

$$(110)\qquad \begin{vmatrix} u_1, & v_1, & \overset{*}{u}_1, & \overset{*}{v}_1 \\ u_2, & v_2, & \overset{*}{u}_2, & \overset{*}{v}_2 \\ u_3, & v_3, & \overset{*}{u}_3, & \overset{*}{v}_3 \end{vmatrix}$$

są zerami. Odnośnie do wyznaczników tej macierzy zauważymy przytem, że wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} u_1, & v_1, & \overset{*}{u}_1 \\ u_2, & v_2, & \overset{*}{u}_2 \\ u_3, & v_3, & \overset{*}{u}_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} u_1, & \overset{*}{u}_1, & \overset{*}{v}_1 \\ u_2, & \overset{*}{u}_2, & \overset{*}{v}_2 \\ u_3, & \overset{*}{u}_3, & \overset{*}{v}_3 \end{vmatrix}$$

są albo oba jednocześnie różne od zera, albo też oba jednocześnie równe zeru, a także, że wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} u_1, & v_1, & \overset{*}{v}_1 \\ u_2, & v_2, & \overset{*}{v}_2 \\ u_3, & v_3, & \overset{*}{v}_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} v_1, & \overset{*}{u}_1, & \overset{*}{v}_1 \\ v_2, & \overset{*}{u}_2, & \overset{*}{v}_2 \\ v_3, & \overset{*}{u}_3, & \overset{*}{v}_3 \end{vmatrix}$$

są albo oba jednocześnie różne od zera, albo też oba jednocześnie równe zeru. Weźmiemy pod uwagę równania:

$$(111)\qquad x = a + u_1\rho_1 + u_2\rho_2 + u_3\rho_3, \quad y = b + v_1\rho_1 + v_2\rho_2 + v_3\rho_3,$$

w których a, b oznaczają stałe zespolone, a ρ_1, ρ_2, ρ_3 zmienne parametry rzeczywiste. Przy powyższem założeniu co do wyznaczników macierzy (109), lub co do wyznaczników macierzy (110), nazywać będziemy zbiór punktów, określony równaniami (111), trzyparametrowym systemem pierwszego stopnia punktów zespolonych. Składowe każdego wektora zespolonego, położonego na tym systemie, mają wartości:

$$\sigma_1 u_1 + \sigma_2 u_2 + \sigma_3 u_3, \quad \sigma_1 v_1 + \sigma_2 v_2 + \sigma_3 v_3,$$

gdzie $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ oznaczają czynniki rzeczywiste. Rzeczony system trzyparametrowy można nieskończenie wieloma sposobami przedstawić równaniami postaci (111). Jeżeli dowolnie obierzemy liczby rzeczywiste c_1, c_2, c_3, to wzory:

$$(112)\qquad \bar{a} = a + u_1 c_1 + u_2 c_2 + u_3 c_3, \quad \bar{b} = b + v_1 c_1 + v_2 c_2 + v_3 c_3$$

określą spółrzędne punktu, należącego do systemu (111). Jeżeli dowolnie wybierzemy czynniki rzeczywiste m_1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3; p_1, p_2, p_3, czyniące zadość warunkowi, żeby wyznacznik:

$$w = \begin{vmatrix} m_1, & m_2, & m_3 \\ n_1, & n_2, & n_3 \\ p_1, & p_2, & p_3 \end{vmatrix}$$

był różny od zera, to wzory:

$$(113)\quad \begin{cases} \bar{u}_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3, & \bar{v}_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3, \\ \bar{u}_2 = n_1 u_1 + n_2 u_2 + n_3 u_3, & \bar{v}_2 = n_1 v_1 + n_2 v_2 + n_3 v_3, \\ \bar{u}_3 = p_1 u_1 + p_2 u_2 + p_3 u_3, & \bar{v}_3 = p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 \end{cases}$$

określą składowe wektorów, położonych na systemie (111) i czyniących zadość warunkowi, żeby nie istniały liczby rzeczywiste $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$, nie będące jednocześnie zerami, które spełniałyby równości:

$$(114)\quad \bar{k}_1 \bar{u}_1 + \bar{k}_2 \bar{u}_2 + \bar{k}_3 \bar{u}_3 = 0, \quad \bar{k}_1 \bar{v}_1 + \bar{k}_2 \bar{v}_2 + \bar{k}_3 \bar{v}_3 = 0.$$

System (111) można przedstawić równaniami:

$$(115)\quad x = \bar{a} + \bar{u}_1 \bar{\rho}_1 + \bar{u}_2 \bar{\rho}_2 + \bar{u}_3 \bar{\rho}_3, \quad y = \bar{b} + \bar{v}_1 \bar{\rho}_1 + \bar{v}_2 \bar{\rho}_2 + \bar{v}_3 \bar{\rho}_3,$$

w których $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3$ oznaczają nowe parametry rzeczywiste, będące w następujących zależnościach od poprzednich parametrów ρ_1, ρ_2, ρ_3:

$$(116)\quad \begin{cases} \bar{\rho}_1 = \dfrac{1}{w} \begin{vmatrix} \rho_1 - c_1, & \rho_2 - c_2, & \rho_3 - c_3 \\ n_1, & n_2, & n_3 \\ p_1, & p_2, & p_3 \end{vmatrix}, \\ \bar{\rho}_2 = \dfrac{1}{w} \begin{vmatrix} \rho_1 - c_1, & \rho_2 - c_2, & \rho_3 - c_3 \\ p_1, & p_2, & p_3 \\ m_1, & m_2, & m_3 \end{vmatrix}, \\ \bar{\rho}_3 = \dfrac{1}{w} \begin{vmatrix} \rho_1 - c_1, & \rho_2 - c_2, & \rho_3 - c_3 \\ m_1, & m_2, & m_3 \\ n_1, & n_2, & n_3 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Zajmiemy się teraz przedstawieniem rozważanych tutaj systemów punktów zespolonych zapomocą związków pomiędzy spółrzędnemi x, y i spółrzędnemi z niemi sprzężonemi $\overset{*}{x}, \overset{*}{y}$.

Rozpoczynając od nici prostolinjowej, określonej równaniami (92), zauważymy, że dla spółrzędnych $\overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ wynikają z nich równania:

$$\overset{*}{x} = \overset{*}{a} + \overset{*}{u}\rho, \quad \overset{*}{y} = \overset{*}{b} + \overset{*}{v}\rho. \tag{117}$$

Rugowanie ρ z pomiędzy równań (92) prowadzi do równania:

$$v(x-a) - u(y-b) = 0.$$

Podobnież rugowanie ρ z pomiędzy równań (117) prowadzi do równania:

$$\overset{*}{v}(\overset{*}{x} - \overset{*}{a}) - \overset{*}{u}(\overset{*}{y} - \overset{*}{b}) = 0.$$

Pomnożymy następnie obie strony pierwszego z równań (92) przez czynnik $\overset{*}{u} + \overset{*}{v}\cos\vartheta$, a drugiego z równań (92) przez czynnik $\overset{*}{u}\cos\vartheta + \overset{*}{v}$ i otrzymane wyniki dodamy stronami. Podobnież pomnożymy obie strony pierwszego z równań (117) przez czynnik $u + v\cos\vartheta$, a drugiego z równań (117) przez czynnik $u\cos\vartheta + v$ i otrzymane wyniki dodamy stronami. Tą drogą dojdziemy do związków:

$$\Phi(\overset{*}{u}, \overset{*}{v};\ x-a,\ y-b) = \rho\,\Phi(u, v;\ \overset{*}{u}, \overset{*}{v}),$$

$$\Phi(u, v;\ \overset{*}{x} - \overset{*}{a},\ \overset{*}{y} - \overset{*}{b}) = \rho\,\Phi(u, v;\ \overset{*}{u}, \overset{*}{v}),$$

a ponieważ na podstawie równości:

$$u = u' + i\,u'', \quad v = v' + i\,v''$$

łatwo sprawdzimy równość:

$$\Phi(u, v;\ \overset{*}{u}, \overset{*}{v}) = \Phi(u', v') + \Phi(u'', v''),$$

z której w szczególności wynika, że czynnik $\Phi(u, v;\ \overset{*}{u}, \overset{*}{v})$ jest dla każdego wektora zespolonego, którego nie obie składowe u, v są zerami, wielkością dodatnią, przeto dochodzimy do rezultatu, że z równań (92) i (117) przez rugowanie ρ wynika układ równań:

$$(118)\quad \begin{cases} v(x-a)-u(y-b)=0, \quad \overset{*}{v}(\overset{*}{x}-\overset{*}{a})-\overset{*}{u}(\overset{*}{y}-\overset{*}{b})=0, \\ \Phi(\overset{*}{u},\overset{*}{v};\ x-a, y-b)=\Phi(u,v;\ \overset{*}{x}-\overset{*}{a},\overset{*}{y}-\overset{*}{b}). \end{cases}$$

Łatwo możemy pokazać, że nawzajem z układu równań (118) wynika układ równań (92) i (117). Istotnie z pierwszego wiersza równań (118) wniesiemy, że istnieje liczba zespolona ρ, spełniająca równości:

$$x-a=u\rho, \quad y-b=v\rho,$$

$$\overset{*}{x}-\overset{*}{a}=\overset{*}{u}\overset{*}{\rho}, \quad \overset{*}{y}-\overset{*}{b}=\overset{*}{v}\overset{*}{\rho},$$

a na podstawie drugiego wiersza równań (118) dojdziemy do równości $\rho=\overset{*}{\rho}$, czyli do wyniku, że ρ jest liczbą rzeczywistą, a przeto do dowodu rzeczonej własności układu równań (118). Zauważymy przytem, że układ ten pozostaje bez zmiany, gdy zarówno w wielkościach zmiennych, jak w wielkościach stałych zmieniamy wszędzie znak przy i.

Dwuparametrowy system pierwszego stopnia punktów zespolonych określimy równaniami (101). Dla wielkości sprzężonych ze spółrzędnemi x, y mieć będziemy w tym przypadku równania:

$$(119)\qquad \overset{*}{x}=\overset{*}{a}+\overset{*}{u}_1\rho_1+\overset{*}{u}_2\rho_2, \quad \overset{*}{y}=\overset{*}{b}+\overset{*}{v}_1\rho_1+\overset{*}{v}_2\rho_2.$$

Jeżeli zachodzi nierówność (99), to rezultat rugowania parametrów ρ_1, ρ_2 z równań (101) i (119) można napisać w postaci:

$$(120)\quad \begin{cases} \dfrac{v_2(x-a)-u_2(y-b)}{u_1v_2-v_1u_2}=\dfrac{\overset{*}{v}_2(\overset{*}{x}-\overset{*}{a})-\overset{*}{u}_2(\overset{*}{y}-\overset{*}{b})}{\overset{*}{u}_1\overset{*}{v}_2-\overset{*}{v}_1\overset{*}{u}_2}, \\ \dfrac{u_1(y-b)-v_1(x-a)}{u_1v_2-v_1u_2}=\dfrac{\overset{*}{u}_1(\overset{*}{y}-\overset{*}{b})-\overset{*}{v}_1(\overset{*}{x}-\overset{*}{a})}{\overset{*}{u}_1\overset{*}{v}_2-\overset{*}{v}_1\overset{*}{u}_2}. \end{cases}$$

Nawzajem ze związków (120) wynikają równania (101) i (119), bo równe sobie stosunki, figurujące w związkach (120), mają widocznie wartości rzeczywiste. Jeżeli zaś zachodzi równość (100), to układ równań (101) i (119) można napisać w postaci:

$$(121)\quad \begin{cases} x = a + u_1(\rho_1 + l\rho_2), \quad y = b + v_1(\rho_1 + l\rho_2), \\ \overset{*}{x} = \overset{*}{a} + \overset{*}{u}_1(\rho_1 + \overset{*}{l}\rho_2), \quad \overset{*}{y} = \overset{*}{b} + \overset{*}{v}_1(\rho_1 + \overset{*}{l}\rho_2) \end{cases}$$

i wtedy rugowanie parametrów ρ_1, ρ_2 prowadzi do związków:

$$(122)\quad v_1(x-a) - u_1(y-b) = 0, \quad \overset{*}{v}_1(\overset{*}{x}-\overset{*}{a}) - \overset{*}{u}_1(\overset{*}{y}-\overset{*}{b}) = 0,$$

z których nawzajem wynikają związki (121). Układy związków (120) i (122) mają widocznie własność, że pozostają bez zmiany, gdy zmieniamy w nich zarówno w stałych, jak w zmiennych znak przy i. Związki (122) określają zbiór punktów, należących do linji prostej. Układami związków (120) i (122) zajmowaliśmy się w innej formie w § 59 tego rozdziału.

Zwracając się teraz do trzyparametrowego systemu pierwszego stopnia punktów zespolonych, określonego równaniami (111), wyrażamy naprzód liczby sprzężone ze spółrzędnemi zmiennego punktu wzorami:

$$(123)\quad \overset{*}{x} = \overset{*}{a} + \overset{*}{u}_1\rho_1 + \overset{*}{u}_2\rho_2 + \overset{*}{u}_3\rho_3, \quad \overset{*}{y} = \overset{*}{b} + \overset{*}{v}_1\rho_1 + \overset{*}{v}_2\rho_2 + \overset{*}{v}_3\rho_3,$$

a następnie wykonywamy rugowanie parametrów ρ_1, ρ_2, ρ_3 ze związków (111) i (123) i tą drogą otrzymujemy równanie:

$$(124)\quad \begin{vmatrix} x-a, & y-b, & \overset{*}{x}-\overset{*}{a}, & \overset{*}{y}-\overset{*}{b} \\ u_1, & v_1, & \overset{*}{u}_1, & \overset{*}{v}_1 \\ u_2, & v_2, & \overset{*}{u}_2, & \overset{*}{v}_2 \\ u_3, & v_3, & \overset{*}{u}_3, & \overset{*}{v}_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Widoczne, że nawzajem, gdy zachodzi to równanie, wówczas wielkości $x, y, \overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ wyrażają się wzorami (111) i (123) i przypuszczamy naprzód, że ρ_1, ρ_2, ρ_3 oznaczają w nich czynniki zespolone. Jeżeli jednak i w jednej i w drugiej kategorji tych wzorów zmienimy wszędzie znak przy i i otrzymany rezultat porównamy z pierwotnemi wzorami, to dojdziemy do wyniku, że czynniki ρ_1, ρ_2, ρ_3 są wszystkie rzeczywiste. To znaczy, że z równania (124) wynikają równania (111) i (123), w których ρ_1, ρ_2, ρ_3 oznaczają parametry rzeczywiste. Gdy zmieniamy w równaniu (124) znak

przy i, zachodzącem w wielkościach zmiennych i w wielkościach stałych, wówczas równanie to pozostaje bez zmiany. Związkami pierwszego stopnia, mającemi tę własność, zajmowaliśmy się w innej formie w § 58 tego rozdziału.

W łączności z powyższemi rozważaniami o systemach pierwszego stopnia punktów zespolonych zajmiemy się tu jeszcze zadaniami wyznaczenia systemów pierwszego stopnia, przechodzących przez pewne dane układy zespolonych punktów.

Równania nici prostolinjowej, przechodzącej przez dwa różne jeden od drugiego punkty zespolone x_1, y_1 i x_2, y_2, możemy napisać w postaci:

$$(125)\quad \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\,\rho, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)\,\rho, \\ \overset{*}{x} = \overset{*}{x}_1 + (\overset{*}{x}_2 - \overset{*}{x}_1)\,\rho, \quad \overset{*}{y} = \overset{*}{y}_1 + (\overset{*}{y}_2 - \overset{*}{y}_1)\,\rho, \end{cases}$$

gdzie ρ jest zmiennym parametrem rzeczywistym. Tę samą nić prostolinjową można na podstawie równań (118) przedstawić trzema równaniami wolnemi od parametru ρ, mianowicie:

$$(126)\quad \begin{cases} \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \overset{*}{x}, & \overset{*}{y}, & 1 \\ \overset{*}{x}_1, & \overset{*}{y}_1, & 1 \\ \overset{*}{x}_2, & \overset{*}{y}_2, & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ \Phi(\overset{*}{x}_2 - \overset{*}{x}_1, \overset{*}{y}_2 - \overset{*}{y}_1; x - x_1, y - y_1) = \Phi(x_2 - x_1, y_2 - y_1; \overset{*}{x} - \overset{*}{x}_1, \overset{*}{y} - \overset{*}{y}_1). \end{cases}$$

Zwrócimy się teraz do wyprowadzenia równań dwuparametrowego systemu pierwszego stopnia punktów zespolonych, przechodzącego przez trzy dane punkty, przypuszczając, że przez te punkty przechodzi jeden określony dwuparametrowy system stopnia pierwszego. Oznaczając spółrzędne rzeczonych punktów odpowiednio literami x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3, będziemy mogli żądane równania rzeczonego systemu napisać w postaci:

$$(127)\quad \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\,\rho_1 + (x_3 - x_1)\,\rho_2, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\,\rho_1 + (y_3 - y_1)\,\rho_2, \end{cases}$$

gdzie ρ_1 i ρ_2 oznaczają parametry rzeczywiste. Przyjęte powyżej przypuszczenie spełnione jest przy zachodzeniu nierówności:

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{128}$$

t.j. wtedy, gdy trzy dane punkty nie leżą wszystkie na jednej i tej samej zespolonej linji prostej. Z równań (120) wynika, że wtedy można równania rzeczonego dwuparametrowego systemu napisać także w postaci:

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} \overset{*}{x}_1, & \overset{*}{y}_1, & 1 \\ \overset{*}{x}_2, & \overset{*}{y}_2, & 1 \\ \overset{*}{x}_3, & \overset{*}{y}_3, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overset{*}{x}, & \overset{*}{y}, & 1 \\ \overset{*}{x}_1, & \overset{*}{y}_1, & 1 \\ \overset{*}{x}_3, & \overset{*}{y}_3, & 1 \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} \overset{*}{x}_1, & \overset{*}{y}_1, & 1 \\ \overset{*}{x}_2, & \overset{*}{y}_2, & 1 \\ \overset{*}{x}_3, & \overset{*}{y}_3, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overset{*}{x}, & \overset{*}{y}, & 1 \\ \overset{*}{x}_1, & \overset{*}{y}_1, & 1 \\ \overset{*}{x}_2, & \overset{*}{y}_2, & 1 \end{vmatrix}. \end{array}\right. \tag{129}$$

Ale przyjęte powyżej przypuszczenie spełnione jest jeszcze w pewnych przypadkach, gdy zachodzi równość:

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{130}$$

i przytem nie wszystkie minory drugiego stopnia wyznacznika tej równości są zerami. Założymy, że nie wszystkie wyznaczniki macierzy:

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix}$$

są zerami i zauważymy, że to założenie jest równoważne z założeniem, że różnice $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ nie są obie jednocześnie równe zeru. Równość (130) można inaczej napisać w postaci:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = 0,$$

a więc rzeczoną równość (130) można zastąpić związkami:

$$(131)\quad x_3 = x_1 + (l' + i\,l'')(x_2 - x_1),\quad y_3 = y_1 + (l' + i\,l'')(y_2 - y_1).$$

Otóż z poprzednich rozważań tego paragrafu wynika, że istnieje jeden określony system dwuparametrowy pierwszego stopnia, gdy $l'' \neq 0$. Interpretując geometrycznie znaczenie równości (130) i (131), możemy powiedzieć, że punkt x_3, y_3 leży na prostej, przechodzącej przez punkty x_1, y_1; x_2, y_2, ale nie leży na nici prostolinjowej, przechodzącej przez te punkty. Gdy to zachodzi, wówczas jedyny system dwuparametrowy pierwszego stopnia, przechodzący przez punkty x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3, określić można nietylko równaniami (127), ale także równaniami:

$$(132)\quad \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \overset{*}{x}, & \overset{*}{y}, & 1 \\ \overset{*}{x}_1, & \overset{*}{y}_1, & 1 \\ \overset{*}{x}_2, & \overset{*}{y}_2, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

System ten jest więc linją prostą zespoloną, określoną warunkiem; by przechodziła przez punkty x_1, y_1 i x_2, y_2.

Niech będą teraz cztery dane punkty x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4 i weźmy pod uwagę macierz:

$$(133)\quad \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & \overset{*}{x}_1, & \overset{*}{y}_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & \overset{*}{x}_2, & \overset{*}{y}_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & \overset{*}{x}_3, & \overset{*}{y}_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & \overset{*}{x}_4, & \overset{*}{y}_4, & 1 \end{vmatrix}.$$

Udowodnimy naprzód, że jeżeli są zerami wszystkie wyznaczniki czwartego stopnia macierzy (133), które zawierają ostatnią kolumnę

tej macierzy, to są zerami wszystkie wyznaczniki czwartego stopnia tej macierzy. Rzeczone wyznaczniki, zawierające ostatnią kolumnę tej macierzy, są równe odpowiednim wyznacznikom trzeciego stopnia macierzy:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1, & \overset{*}{x}_2 - \overset{*}{x}_1, & \overset{*}{y}_2 - \overset{*}{y}_1 \\ x_3 - x_1, & y_3 - y_1, & \overset{*}{x}_3 - \overset{*}{x}_1, & \overset{*}{y}_3 - \overset{*}{y}_1 \\ x_4 - x_1, & y_4 - y_1, & \overset{*}{x}_4 - \overset{*}{x}_1, & \overset{*}{y}_4 - \overset{*}{y}_1 \end{vmatrix}.$$

Ponieważ zaś pozostały wyznacznik czwartego stopnia macierzy (133) równa się wyznacznikowi:

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & \overset{*}{x}_1, & \overset{*}{y}_1 \\ x_2 - x_1, & y_2 - y_1, & \overset{*}{x}_2 - \overset{*}{x}_1, & \overset{*}{y}_2 - \overset{*}{y}_1 \\ x_3 - x_1, & y_3 - y_1, & \overset{*}{x}_3 - \overset{*}{x}_1, & \overset{*}{y}_3 - \overset{*}{y}_1 \\ x_4 - x_1, & y_4 - y_1, & \overset{*}{x}_4 - \overset{*}{x}_1, & \overset{*}{y}_4 - \overset{*}{y}_1 \end{vmatrix},$$

więc widzimy, że gdy są zerami wszystkie wyznaczniki czwartego stopnia macierzy (133), zawierające jej ostatnią kolumnę, to są zerami wszystkie jej wyznaczniki czwartego stopnia. Założymy, że nie wszystkie wyznaczniki czwartego stopnia macierzy (133) są zerami, lub, co na jedno wychodzi, nie wszystkie jej wyznaczniki czwartego stopnia, zawierające ostatnią jej kolumnę, są zerami. Przez cztery punkty x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4, czyniące zadość temu założeniu, przechodzi jeden określony trzyparametrowy system pierwszego stopnia punktów zespolonych. Równania tego systemu można napisać w postaci:

$$(134)\quad \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\,\rho_1 + (x_3 - x_1)\,\rho_2 + (x_4 - x_1)\,\rho_3, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\,\rho_1 + (y_3 - y_1)\,\rho_2 + (y_4 - y_1)\,\rho_3, \end{cases}$$

gdzie ρ_1, ρ_2, ρ_3 oznaczają zmienne parametry rzeczywiste. Ten system punktów zespolonych można także przedstawić związkiem pomiędzy spółrzędnemi x, y i $\overset{*}{x}, \overset{*}{y}$, mianowicie związkiem:

$$(135)\qquad \begin{vmatrix} x, & y, & \overset{*}{x}, & \overset{*}{y}, & 1 \\ x_1, & y_1, & \overset{*}{x}_1, & \overset{*}{y}_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & \overset{*}{x}_2, & \overset{*}{y}_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & \overset{*}{x}_3, & \overset{*}{y}_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & \overset{*}{x}_4, & \overset{*}{y}_4, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Równania pomiędzy spółrzędnemi punktów i spółrzędnemi punktów z niemi sprzężonych oraz pomiędzy składowemi wektorów i składowemi wektorów z niemi sprzężonych można zastępować przez równania pomiędzy śladami R i A rzeczonych punktów oraz składowemi boków węgłów rzeczonych wektorów. Jeżeli zastosujemy oznaczenia przyjęte w tej książce, to równania (92) jednoparametrowego systemu pierwszego stopnia będziemy mogli zastąpić równaniami:

$$(136)\qquad \begin{cases} x' = a' + u'\,\rho, & y' = b' + v'\,\rho, \\ x'' = a'' + u''\,\rho, & y'' = b'' + v''\,\rho. \end{cases}$$

Podobnież zamiast równań (101) dwuparametrowego systemu pierwszego stopnia możemy przyjąć równania:

$$(137)\qquad \begin{cases} x' = a' + u_1'\,\rho_1 + u_2'\,\rho_2, & y' = b' + v_1'\,\rho_1 + v_2'\,\rho_2, \\ x'' = a'' + u_1''\,\rho_1 + u_2''\,\rho_2, & y'' = b'' + v_1''\,\rho_1 + v_2''\,\rho_2, \end{cases}$$

a zamiast równań (111) trzyparametrowego systemu pierwszego stopnia równania:

$$(138)\qquad \begin{cases} x' = a' + u_1'\,\rho_1 + u_2'\,\rho_2 + u_3'\,\rho_3, & y' = b' + v_1'\,\rho_1 + v_2'\,\rho_2 + v_3'\,\rho_3, \\ x'' = a'' + u_1''\,\rho_1 + u_2''\,\rho_2 + u_3''\,\rho_3, & y'' = b'' + v_1''\,\rho_1 + v_2''\,\rho_2 + v_3''\,\rho_3. \end{cases}$$

W łączności z równaniami (136), (137) i (138) można w spółrzędnych śladów R i A oraz w składowych boków węgłów wykonać rachunki i rozważania, równoważne z treścią niniejszego paragrafu. Ale odnośnemi szczegółami zajmować się tu nie będziemy.

§ 62. Niezmienniki i geometryczne interpretacje nici prostolinjowych.

Niech będzie naprzód twór geometryczny, składający się z punktu zespolonego:

(139) $$a = a' + i\,a'', \quad b = b' + i\,b''$$

i ze swobodnego wektora zespolonego:

(140) $$u = u' + i\,u'', \quad v = v' + i\,v''.$$

Niezmienniki tego tworu zespolonego względem zmian spółrzędnych prostolinjowych są widocznie te same, co niezmienniki względem zmian spółrzędnych prostolinjowych układu trzech swobodnych wektorów rzeczywistych o składowych:

(141) $$a'', b''; \; u', v'; \; u'', v''.$$

Zadaniem o niezmiennikach trzech swobodnych wektorów rzeczywistych zajmowaliśmy się w § 41 tomu I i, stosując wyniki tego paragrafu do wektorów (141), napiszemy naprzód tabelkę niezmienników:

(142) $$\begin{cases} A = \Phi(a'', b''), \; \Phi = \Phi(u', v'; \; u'', v''), \; \Psi = \Psi(u', v'; \; u'', v''), \\ \Phi' = \Phi(u', v'), \; A'' = \Phi(u'', v''; \; a'', b''), \; B'' = \Psi(u'', v''; \; a'', b''), \\ \Phi'' = \Phi(u'', v''), \; A' = \Phi(a'', b''; \; u', v'), \; B' = \Psi(a'', b''; \; u', v'). \end{cases}$$

Tabelka ta zawiera wszystkie niezmienniki punktu (139) i wektora (140), ale niezależnych z pośród niezmienników (142) jest tylko pięć, to znaczy, że niezmienniki (142) połączone są ze sobą czterema związkami.

Weźmy pod uwagę nić prostolinjową, określoną równaniami:

(92) $$x = a + u\,\rho, \quad y = b + v\,\rho$$

i przypomnijmy, że można ją także przedstawić równaniami:

(96) $$\overline{x} = \overline{a} + \overline{u}\,\overline{\rho}, \quad \overline{y} = \overline{b} + \overline{v}\,\overline{\rho},$$

w których $\overline{\rho}$ oznacza nowy parametr rzeczywisty, a wielkości $\overline{a}, \overline{b}, \overline{u}, \overline{v}$ określają się wzorami:

$$(143)\qquad \begin{cases} \bar{a} = a + u\,c, \quad \bar{b} = b + v\,c, \\ \bar{u} = m\,u, \qquad \bar{v} = m\,v, \end{cases}$$

gdzie c jest dowolnym parametrem rzeczywistym, a m jest dowolnym parametrem rzeczywistym różnym od zera. Równości (143) można zastąpić równościami:

$$(144)\qquad \begin{cases} \bar{a}' = a' + u'\,c, \quad \bar{b}' = b' + v'\,c, \\ \bar{a}'' = a'' + u''\,c, \quad \bar{b}'' = b'' + v''\,c, \\ \bar{u}' = m\,u', \qquad \bar{v}' = m\,v', \\ \bar{u}'' = m\,u'', \qquad \bar{v}'' = m\,v''. \end{cases}$$

Niezmienniki punktu $\bar{a}, \bar{b}$ i wektora $\bar{u}, \bar{v}$ możemy obliczyć także według tabelki (142). Niezmienniki te oznaczymy odpowiednio temi samemi literami, co niezmienniki punktu a, b i wektora u, v, ale zaopatrzonemi w poziome kreski górne. Na podstawie równości (144) łatwo otrzymać wyrażenia następujące:

$$(145)\qquad \begin{cases} \bar{A} = A + 2\,c\,A'' + c^2\,\Phi'', \quad \bar{\Phi} = m^2\,\Phi, \quad \bar{\Psi} = m^2\,\Psi, \\ \bar{\Phi}' = m^2\,\Phi', \quad \bar{A}'' = m\,(A'' + c\,\Phi''), \quad \bar{B}'' = m\,B'', \\ \bar{\Phi}'' = m^2\,\Phi'', \quad \bar{A}' = m\,(A' + c\,\Phi), \quad \bar{B}' = m\,(B' - c\,\Psi). \end{cases}$$

Niezmienniki nici prostolinjowej przy zmianach spółrzędnych prostolinjowych otrzymają się drogą rugowania parametrów c i m ze związków (145). Założymy naprzód, że wielkości Φ' i Φ'' są obie różne od zera. Wtedy przez rugowanie czynnika m dojdziemy do równości:

$$(146)\qquad \begin{cases} \dfrac{\bar{\Phi}}{\sqrt{|\bar{\Phi}'|}\,\sqrt{|\bar{\Phi}''|}} = \dfrac{\Phi}{\sqrt{|\Phi'|}\,\sqrt{|\Phi''|}}, \quad \dfrac{\bar{\Psi}}{\sqrt{|\bar{\Phi}'|}\,\sqrt{|\bar{\Phi}''|}} = \dfrac{\Psi}{\sqrt{|\Phi'|}\,\sqrt{|\Phi''|}}, \\ \dfrac{\bar{\Phi}'}{\bar{\Phi}''} = \dfrac{\Phi'}{\Phi''}, \qquad \dfrac{\bar{B}''}{\sqrt{|\bar{\Phi}''|}} = \varepsilon\,\dfrac{B''}{\sqrt{|\Phi''|}}, \end{cases}$$

gdzie $\varepsilon = +1$, gdy $m > 0$, a $\varepsilon = -1$, gdy $m < 0$. Z równości (146) wynika, że nić prostolinjowa ma niezmienniki:

$$(147)\qquad \begin{cases} J = \dfrac{\Phi}{\sqrt{\Phi'}\,\sqrt{\Phi''}}, & K = \dfrac{\Psi}{\sqrt{\Phi'}\,\sqrt{\Phi''}}, \\ M = \dfrac{\Phi'}{\Phi''}, & N = \dfrac{B''}{\sqrt{\Phi''}}. \end{cases}$$

J i K są bezwzględnemi niezmiennikami, związanemi równością:

$$(148)\qquad J^2 + K^2 = 1.$$

M jest bezwzględnym niezmiennikiem, a N jest względnym niezmiennikiem, bo zmienia znak, gdy m jest czynnikiem ujemnym. Dalej, na podstawie drugiej równości drugiego wiersza i pierwszej równości trzeciego wiersza związków (145), dochodzimy do równości:

$$c = m\frac{\overline{A}''}{\overline{\Phi}''} - \frac{A''}{\Phi''},$$

a korzystając z niej, otrzymujemy z pierwszej równości pierwszego wiersza oraz z drugiej i trzeciej równości trzeciego wiersza związków (145) równości:

$$\overline{A} = \frac{A\,\Phi'' - A''^2}{\Phi''} + m^2\,\Phi''\,\frac{\overline{A}''^2}{\overline{\Phi}''^2},$$

$$\overline{A}' = m\,\frac{A'\,\Phi'' - A''\,\Phi}{\Phi''} + m^2\,\Phi\,\frac{\overline{A}''}{\overline{\Phi}''},$$

$$\overline{B}' = m\,\frac{B'\,\Phi'' + A''\,\Psi}{\Phi''} - m^2\,\Psi\,\frac{\overline{A}''}{\overline{\Phi}''}.$$

Jeżeli zaś z tych równości wyrugujemy czynnik m na podstawie pierwszej równości trzeciego wiersza związków (145), to dojdziemy do wyników:

$$\frac{\overline{A}\,\overline{\Phi}'' - \overline{A}''^2}{\overline{\Phi}''} = \frac{A\,\Phi'' - A''^2}{\Phi''},$$

$$\frac{\overline{A}'\,\overline{\Phi}'' - \overline{A}''\,\overline{\Phi}}{\sqrt{\overline{\Phi}''^3}} = \varepsilon\,\frac{A'\,\Phi'' - A''\,\Phi}{\sqrt{\Phi''^3}},$$

$$\frac{\overline{B}'\,\overline{\Phi}'' + \overline{A}''\,\overline{\Psi}}{\sqrt{\overline{\Phi}''^3}} = \varepsilon\,\frac{B'\,\Phi'' + A''\,\Psi}{\sqrt{\Phi''^3}}.$$

Otrzymaliśmy przeto trzy dalsze niezmienniki:

$$(149)\quad L_1 = \frac{A\,\Phi'' - A''^2}{\Phi''},\quad L_2 = \frac{A'\,\Phi'' - A''\,\Phi}{\sqrt{\Phi''^3}},\quad L_3 = \frac{B'\,\Phi'' + A''\,\Psi}{\sqrt{\Phi''^3}},$$

z których L_1 jest niezmiennikiem bezwzględnym, a L_2 i L_3 są niezmiennikami względnemi. Ponieważ jednak zachodzi tożsamość:

$$A''^2 + B''^2 = A\,\Phi'',$$

przeto dochodzimy do równości:

$$(150)\qquad L_1 = N^2.$$

Wykonywając zaś mnożenie:

$$(151)\quad \begin{vmatrix} a'', & b'' \\ u'', & v'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u' + v'\cos\vartheta, & u'\cos\vartheta + v' \\ u'' + v''\cos\vartheta, & u''\cos\vartheta + v'' \end{vmatrix},$$

otrzymujemy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} A', & A'' \\ \Phi, & \Phi'' \end{vmatrix},$$

a ponieważ drugi czynnik iloczynu (151) równa się wyrażeniu:

$$(u'\,v'' - v'\,u'')\sin^2\vartheta,$$

przeto dochodzimy do równości:

$$(152)\qquad L_2 = -\,K\,N\sqrt{M}.$$

Podobnież przez wykonanie mnożenia:

$$\begin{vmatrix} a'', & b'' \\ u'', & v'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v', & -u' \\ u'' + v''\cos\vartheta, & u''\cos\vartheta + v'' \end{vmatrix} \sin\vartheta$$

wynika wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} B', & -\Psi \\ A'', & \Phi'' \end{vmatrix},$$

a więc otrzymuje się równość:

$$L_3 = -JN\sqrt{M}. \tag{153}$$

Zauważmy, że związki (150), (152) i (153) wyprowadziliśmy przez zastosowanie tożsamości, które tylko oznaczeniami różnią się od tożsamości (23), (33) i (35), podanych w rzeczonym § 41 tomu I-go. Ze związków (150), (152) i (153) wynika, że niezmienniki (149) nie są niezależne od niezmienników (147). Zatem przy założeniu, że żadna z wielkości Φ' i Φ'' nie jest zerem, można jako układ niezmienników nici prostolinjowej przyjąć niezmienniki (147), zaznaczając przytem, że niezmienniki J i K spełniają związek (148).

Załóżmy teraz, że Φ'' nie jest zerem, ale że Φ' jest zerem. Wtedy w tabelce (142) mamy:

$$\Phi = 0, \quad \Psi = 0, \quad \Phi' = 0, \quad A' = 0, \quad B' = 0$$

oraz:

$$A = \Phi(a'', b''), \quad \Phi'' = \Phi(u'', v''),$$

$$A'' = \Phi(u'', v''; a'', b''), \quad B'' = \Psi(u'', v''; a'', b'')$$

i trzeba wykonać rugowanie czynników m i c tylko ze związków:

$$\bar{A} = A + 2cA'' + c^2\Phi'', \quad \bar{\Phi}'' = m^2\Phi'',$$

$$\bar{A}'' = m(A'' + c\Phi''), \quad \bar{B}'' = mB''.$$

Na podstawie poprzednich rachunków łatwo dostrzec, że to rugowanie prowadzi do niezmiennika:

$$N = \frac{B''}{\sqrt{\Phi''}} \tag{154}$$

i do niezmiennika:

$$L_1 = \frac{A\Phi'' - A''^2}{\Phi''},$$

który jest wynikiem niezmiennika (154). Zatem przy założeniu, że Φ'' nie jest zerem, a Φ' jest zerem, nić prostolinjowa ma niezmiennik (154) i niema żadnego niezmiennika niezależnego od niezmiennika (154).

Założymy wreszcie, że Φ' nie jest zerem, ale że Φ' jest zerem. Wtedy wielkości tabelki (142) będą:

$$\Phi = 0, \quad \Psi = 0, \quad \Phi'' = 0, \quad A'' = 0, \quad B'' = 0$$

oraz:

$$A = \Phi(a'', b''), \quad \Phi' = \Phi(u', v'),$$

$$A' = \Phi(a'', b''; u', v'), \quad B' = \Psi(a'', b''; u', v'),$$

a więc dla wyznaczenia niezmienników mieć będziemy związki:

$$\overline{A} = A, \quad \overline{\Phi'} = m^2 \Phi',$$

$$\overline{A'} = m A', \quad \overline{B'} = m B'.$$

Widzimy stąd, że A jest niezmiennikiem i że wielkości:

$$P = \frac{A'}{\sqrt{|\Phi'|}}, \quad Q = \frac{B'}{\sqrt{|\Phi'|}} \tag{155}$$

są niezmiennikami. Łatwo dostrzec, że zachodzi równość:

$$A = P^2 + Q^2,$$

że więc niezmiennik A jest wynikiem niezmienników P i Q. Jeżeli więc Φ'' jest zerem, a Φ' nie jest zerem, to układem niezmienników nici prostolinjowej są wielkości (155). Obie te wielkości są względnemi niezmiennikami.

Zwróćmy się teraz do geometrycznej interpretacji równań i niezmienników nici prostolinjowej.

Niech wielkości Φ' i Φ'' będą naprzód obie różne od zera. Ślady R i A punktów nici prostolinjowej określone są równaniami (136). Równania śladów R napiszemy w postaci:

$$x' = a' + \frac{u'}{\sqrt{|\Phi'|}} r', \quad y' = b' + \frac{v'}{\sqrt{|\Phi'|}} r', \tag{156}$$

gdzie r' oznacza zmienny parametr, a równania śladów A w postaci:

$$x'' = a'' + \frac{u''}{\sqrt{|\Phi''|}} r'', \quad y'' = b'' + \frac{v''}{\sqrt{|\Phi''|}} r'', \tag{157}$$

gdzie r'' oznacza także zmienny parametr. Równania (156) określają linję prostą na płaszczyźnie R, przechodzącą przez punkt a', b', a zmienny parametr r' jest długością wektora o początku w punkcie a', b' i końcu w punkcie x', y'. Podobnież równania (157) określają

linję prostą na płaszczyźnie A, przechodzącą przez punkt a'', b'', a zmienny parametr r'' jest długością wektora o początku w punkcie a'', b'' i końcu w punkcie x'', y''. Ponieważ mamy widocznie:

$$r' = \rho \sqrt{\Phi'}, \quad r'' = \rho \sqrt{\Phi''},$$

przeto zachodzi proporcja:

$$r' : r'' = \sqrt{\Phi'} : \sqrt{\Phi''}. \tag{158}$$

Ślady R i A punktu zespolonego nici prostolinjowej (92) są przy założeniach $\Phi' > 0$, $\Phi'' > 0$ odpowiednio punktami linji prostej (156) i punktami linji prostej (157) (zob. fig. 98), a przytem zachodzi proporcja (158). Niezmiennikami nici prostolinjowej są przy tych założeniach: 1) wstawa i dostawa kąta, utworzonego przez drugi bok węgła dowolnego wektora nici prostolinjowej z pierwszym

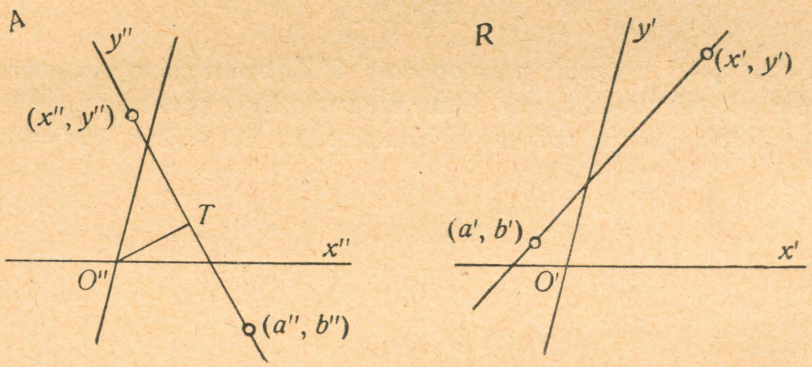

Fig. 98.

jego bokiem; 2) iloraz rzeczonej proporcji (158); 3) długość prostopadłej $O''T$, opuszczonej na płaszczyźnie A z początku spółrzędnych na prostą (157).

Przy założeniu $\Phi'' > 0$, $\Phi' = 0$ spółrzędne śladów punktów zespolonych nici prostolinjowej określają się równaniami:

$$\begin{cases} x' = a', & y' = b', \\ x'' = a'' + u''\rho, & y'' = b'' + v''\rho. \end{cases} \tag{159}$$

Równości pierwszego wiersza związków (159) orzekają, że wszystkie punkty nici prostolinjowej mają na płaszczyźnie R jeden i ten sam ślad, mianowicie punkt a', b' (fig. 99). Równości drugiego

wiersza związków (159) są równaniami linji prostej, na której leżą wszystkie ślady A punktów zespolonych nici prostolinjowej. W przypadku uważanym nić prostolinjowa ma jeden niezmiennik,

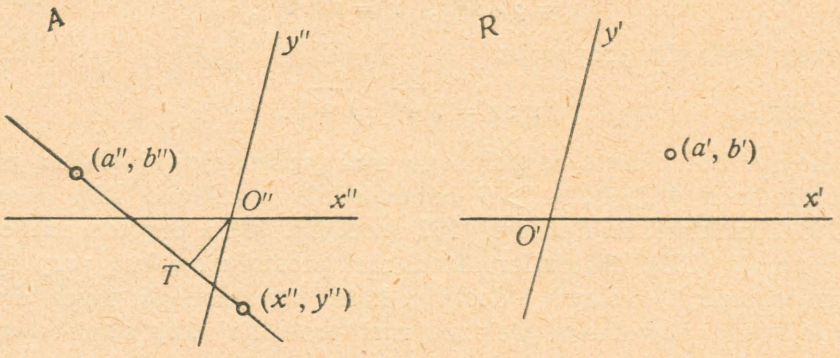

Fig. 99.

którym jest długość prostopadłej $O''T$, opuszczonej z początku spółrzędnych płaszczyzny A na rzeczoną linję prostą.

Jeżeli przyjmiemy wreszcie, że $\Phi' > 0$, $\Phi'' = 0$, to

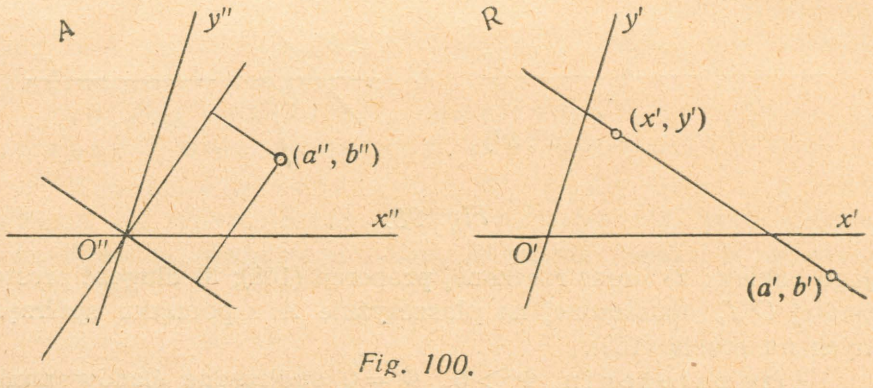

Fig. 100.

spółrzędne śladów punktów zespolonych nici prostolinjowej określone będą równaniami:

$$(160)\qquad \begin{cases} x' = a' + u'\rho, & y' = b' + v'\rho, \\ x'' = a'', & y'' = b''. \end{cases}$$

Równania te wyznaczają jeden punkt na płaszczyźnie A, a linję prostą na płaszczyźnie R. Przeprowadźmy na płaszczyźnie A przez początek spółrzędnych dwie linje proste, przecinające się pod kątami prostemi

(fig. 100) i wybrane w taki sposób, żeby jedna z nich miała ten sam dwukierunek na płaszczyźnie A, który na płaszczyźnie R ma rzeczona prosta tej płaszczyzny. Niezmiennikami nici prostolinjowej są w przypadku uważanym długości prostopadłych, opuszczonych z punktu a'', b'' na wspomniane linje proste, przecinające się pod kątami prostemi.

§ 63. Niezmienniki i geometryczne interpretacje dwuparametrowych systemów stopnia pierwszego.

Przypuśćmy, że ślady R i A zbioru punktów zespolonych określone są równaniami:

$$(137)\quad \begin{cases} x' = a' + u_1'\,\rho_1 + u_2'\,\rho_2, \quad y' = b' + v_1'\,\rho_1 + v_2'\,\rho_2, \\ x'' = a'' + u_1''\,\rho_1 + u_2''\,\rho_2, \quad y'' = b'' + v_1''\,\rho_1 + v_2''\,\rho_2, \end{cases}$$

w których ρ_1 i ρ_2 oznaczają parametry rzeczywiste. Równania te określają dwuparametrowy system pierwszego stopnia punktów zespolonych wtedy i tylko wtedy, gdy nie wszystkie wyznaczniki drugiego stopnia macierzy:

$$(161)\quad \begin{vmatrix} u_1', & v_1', & u_1'', & v_1'' \\ u_2', & v_2', & u_2'', & v_2'' \end{vmatrix}$$

są zerami. Przytem zauważymy, że wyznaczniki te spełniają związek:

$$(162)\quad (u_1'\,v_2' - v_1'\,u_2')\,(u_1''\,v_2'' - v_1''\,u_2'') =$$

$$= (u_1''\,u_2' - u_2''\,u_1')\,(v_1''\,v_2' - v_2''\,v_1') - (u_1'\,v_2'' - u_2'\,v_1'')\,(v_1'\,u_2'' - v_2'\,u_1'').$$

Jeżeli zachodzi nierówność:

$$(163)\quad u_1'\,v_2' - v_1'\,u_2' \neq 0,$$

to drogą rugowania parametrów ρ_1 i ρ_2 otrzymujemy z równań (137) równania:

$$(164)\quad \begin{vmatrix} x'' - a'', & u_1'', & u_2'' \\ x' - a', & u_1', & u_2' \\ y' - b', & v_1', & v_2' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} y'' - b'', & v_1'', & v_2'' \\ x' - a', & u_1', & u_2' \\ y' - b', & v_1', & v_2' \end{vmatrix} = 0,$$

które można przy zastosowaniu oznaczeń:

$$(165)\quad \begin{cases} l=\dfrac{v_1''v_2'-v_2''v_1'}{u_1'v_2'-v_1'u_2'}, & m'=\dfrac{v_1'u_2''-v_2'u_1''}{u_1'v_2'-v_1'u_2'}, \\ m''=\dfrac{u_1'v_2''-u_2'v_1''}{u_1'v_2'-v_1'u_2'}, & n=\dfrac{u_1''u_2'-u_2''u_1'}{u_1'v_2'-v_1'u_2'}, \\ p''=\dfrac{\begin{vmatrix} a'', & u_1'', & u_2'' \\ a', & u_1', & u_2' \\ b', & v_1', & v_2' \end{vmatrix}}{u_1'v_2'-v_1'u_2'}, & q''=\dfrac{\begin{vmatrix} b'', & v_1'', & v_2'' \\ a', & u_1', & u_2' \\ b', & v_1', & v_2' \end{vmatrix}}{u_1'v_2'-v_1'u_2'}, \end{cases}$$

napisać w postaci:

$$(166)\quad \begin{cases} x''=-m'x'-ny'+p'', \\ y''=lx'+m''y'+q'' \end{cases}$$

i wtedy przy użyciu oznaczenia:

$$(167)\qquad W=ln-m'm''$$

mamy na podstawie związku (162) równość:

$$(168)\qquad W=\frac{u_1''v_2''-v_1''u_2''}{u_1'v_2'-v_1'u_2'}.$$

Przy spełnieniu nierówności:

$$(169)\qquad u_1''v_2''-v_1''u_2''\neq 0$$

otrzymujemy z równań (137) przez rugowanie parametrów ρ_1 i ρ_2 równania:

$$(170)\quad \begin{vmatrix} x'-a', & u_1', & u_2' \\ x''-a'', & u_1'', & u_2'' \\ y''-b'', & v_1'', & v_2'' \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} y'-b', & v_1', & v_2' \\ x''-a'', & u_1'', & u_2'' \\ y''-b'', & v_1'', & v_2'' \end{vmatrix}=0,$$

które przy użyciu oznaczeń:

$$(171)\quad \begin{cases} \underline{l} = \dfrac{v_1''v_2' - v_2''v_1'}{u_1''v_2'' - v_1''u_2''}, & \underline{m'} = \dfrac{v_1'u_2'' - v_2'u_1''}{u_1''v_2'' - v_1''u_2''}, \\ \underline{m''} = \dfrac{u_1'v_2'' - u_2'v_1''}{u_1''v_2'' - v_1''u_2''}, & \underline{n} = \dfrac{u_1''u_2' - u_2''u_1'}{u_1''v_2'' - v_1''u_2''}, \\ p' = \dfrac{\begin{vmatrix} a', & u_1', & u_2' \\ a'', & u_1'', & u_2'' \\ b'', & v_1'', & v_2'' \end{vmatrix}}{u_1''v_2'' - v_1''u_2''}, & q' = \dfrac{\begin{vmatrix} b', & v_1', & v_2' \\ a'', & u_1'', & u_2'' \\ b'', & v_1'', & v_2'' \end{vmatrix}}{u_1''v_2'' - v_1''u_2''} \end{cases}$$

można doprowadzić do postaci:

$$(172)\quad \begin{cases} x' = \underline{m''}x'' + \underline{n}y'' + p', \\ y' = -\underline{l}x'' - \underline{m'}y'' + q'. \end{cases}$$

Jeżeli przytem zastosujemy oznaczenie:

$$(173)\quad \underline{W} = \underline{l}\,\underline{n} - \underline{m'}\,\underline{m''},$$

to na podstawie związku (162) mieć będziemy równość:

$$(174)\quad \underline{W} = \frac{u_1'v_2' - v_1'u_2'}{u_1''v_2'' - v_1''u_2''}.$$

W przypadkach spełnienia obu nierówności (163) i (169) wyznaczniki W i $\underline{W}$ są oba różne od zera i wtedy zachodzą równości:

$$(175)\quad \underline{l} = \frac{l}{W}, \quad \underline{m'} = \frac{m}{W}, \quad \underline{m''} = \frac{m''}{W}, \quad \underline{n} = \frac{n}{W}$$

oraz równości:

$$(176)\quad W\,\underline{W} = 1.$$

Równania (166) określają wówczas przekształcenie zmiennych x', y' na zmienne x'', y'', a równania (172) przekształcenie zmiennych x'', y'' na zmienne x', y' i przekształcenia te są wzajemnie odwrotne.

Założymy teraz, że spełniona jest nierówność (163) i że zachodzi równość:

$$u_1'' v_2'' - v_1'' u_2'' = 0, \tag{177}$$

ale że nie wszystkie cztery wielkości u_1'', v_1'', u_2'', v_2'' są zerami. Wtedy przez rugowanie parametrów ρ_1 i ρ_2 z równań (137) otrzymamy równania (166), których wyznacznik W jest zerem, ale przytem nie wszystkie cztery wielkości l, m', m'', n są zerami. Wówczas można wyznaczyć takie wielkości rzeczywiste α, β, nie obie równe zeru, i takie wielkości rzeczywiste $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, nie obie równe zeru, że spełnione są równości:

$$l = \alpha\,\mathfrak{a}, \quad m' = \alpha\,\mathfrak{b}, \quad m'' = \beta\,\mathfrak{a}, \quad n = \beta\,\mathfrak{b}. \tag{178}$$

Wtedy można równania (166) napisać w postaci:

$$\left\{\begin{aligned} x'' &= -\mathfrak{b}\,(\alpha x' + \beta y') + p'', \\ y'' &= \mathfrak{a}\,(\alpha x' + \beta y') + q'', \end{aligned}\right. \tag{179}$$

albo inaczej przez wprowadzenie zmiennego rzeczywistego parametru σ można zastąpić równania (166) przez równania:

$$\left\{\begin{aligned} \alpha x' + \beta y' &= \sigma, \\ x'' = -\mathfrak{b}\,\sigma + p'', &\quad y'' = \mathfrak{a}\,\sigma + q''. \end{aligned}\right. \tag{180}$$

Równanie pierwszego wiersza związków (180) określa na płaszczyźnie R nieskończenie wiele linij prostych o wspólnym dwukierunku, a równania drugiego wiersza związków (180) określają jednę linję prostą na płaszczyźnie A. Na podstawie związków (180) pomiędzy rzeczonemi prostemi płaszczyzny R i punktami rzeczonej prostej płaszczyzny A zachodzi widocznie jednojednowartościowa odpowiedniość.

Przyjmijmy następnie, że zachodzi nierówność (169) i równość:

$$u_1' v_2' - v_1' u_2' = 0, \tag{181}$$

ale że wielkości u_1', v_1', u_2', v_2', nie są wszystkie jednocześnie zerami. Z równań (137) wynikają wtedy przez rugowanie parametrów ρ_1 i ρ_2 równania (172) i wyznacznik $\underline{W}$ tych

równań jest równy zeru, ale nie wszystkie wielkości l, m', m'', n są zerami. Wówczas istnieją takie wielkości rzeczywiste α, β, nie obie równe zeru, i takie wielkości rzeczywiste $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, nie obie równe zeru, że zachodzą równości:

$$(182) \qquad l = \alpha\,\mathfrak{a}, \quad m' = \alpha\,\mathfrak{b}, \quad m'' = \beta\,\mathfrak{a}, \quad n = \beta\,\mathfrak{b}.$$

Równania (172) można wtedy przedstawić w formie:

$$(183) \qquad \begin{cases} x' = \beta\,(\mathfrak{a}\,x'' + \mathfrak{b}\,y'') + p', \\ y' = -\alpha\,(\mathfrak{a}\,x'' + \mathfrak{b}\,y'') + q', \end{cases}$$

a więc można równania (172) zastąpić przez równania:

$$(184) \qquad \begin{cases} x' = \beta\,\tau + p', \quad y' = -\alpha\,\tau + q', \\ \mathfrak{a}\,x'' + \mathfrak{b}\,y'' = \tau, \end{cases}$$

w których τ oznacza nowy parametr rzeczywisty. Równania pierwszego wiersza związków (184) określają linję prostą na płaszczyźnie R, a równanie drugiego wiersza związków (184) określa nieskończenie wiele linij prostych o wspólnym dwukierunku na płaszczyźnie A. Pomiędzy punktami rzeczonej prostej na płaszczyźnie R i rzeczonemi linjami prostemi o wspólnym dwukierunku na płaszczyźnie A zachodzi na mocy związków (184) jednojednowartościowa odpowiedniość.

Jeżeli zachodzi nierówność (163) i przytem wszystkie cztery składowe u_1'', v_1'', u_2'', v_2'' są zerami, to równania (137) określają przy wszelkich wartościach parametrów ρ_1, ρ_2 wszystkie punkty płaszczyzny R i jeden tylko punkt o spółrzędnych a'', b'' płaszczyzny A.

Jeżeli spełniona jest nierówność (169), a składowe u_1', v_1', u_2', v_2' są wszystkie cztery równe zeru, to przy wszelkich wartościach parametrów ρ_1, ρ_2 równania (137) określają jeden tylko punkt o spółrzędnych a', b' na płaszczyźnie R i wszystkie punkty na płaszczyźnie A.

Równania (137) określają dwuparametrowy system punktów zespolonych jeszcze tylko wtedy, gdy spełnione są jednocześnie obie równości (181) i (177) i gdy wyznaczniki drugiego stopnia macierzy (161) nie są wszystkie jednocześnie zerami. Wtedy równania pierwszego wiersza związków (137) określają na płaszczyźnie

R linję prostą, równania drugiego wiersza związków (137) określają na płaszczyźnie A linję prostą i każdy dowolny punkt pierwszej z tych prostych oraz każdy dowolny punkt drugiej z tych prostych są śladami R i A punktu zespolonego, należącego do uważanego dwuparametrowego systemu punktów.

Zwrócimy się teraz ponownie do przypadków, w których spełnione są n i e r ó w n o ś c i (163) i (169). Jeżeli w równaniach (166) wykonamy zmianę spółrzędnych prostolinjowych, t.j. przekształcimy spółrzędne śladów R i A na podstawie wzorów:

$$(185)\quad \begin{cases} x' = a + a_1 \bar{x}' + a_2 \bar{y}', \quad y' = b + b_1 \bar{x}' + b_2 \bar{y}', \\ x'' = a_1 \bar{x}'' + a_2 \bar{y}'', \quad y'' = b_1 \bar{x}'' + b_2 \bar{y}'', \end{cases}$$

to otrzymamy równania:

$$(186)\quad \begin{cases} \bar{x}'' = -\bar{m}' \bar{x}' - \bar{n} \bar{y}' + \bar{p}'', \\ \bar{y}'' = \bar{l} \bar{x}' + \bar{m}'' \bar{y}' + \bar{q}'', \end{cases}$$

w których stałe $\bar{l}$, $\bar{m}'$, $\bar{m}''$, $\bar{n}$ mieć będą wartości:

$$(187)\quad \begin{cases} \bar{l} = \dfrac{\sin\vartheta}{\sin\bar{\vartheta}} \left[l a_1^2 + (m' + m'') a_1 b_1 + n b_1^2 \right], \\ \bar{m}' = \dfrac{\sin\vartheta}{\sin\bar{\vartheta}} \left[l a_1 a_2 + m' a_1 b_2 + m'' a_2 b_1 + n b_1 b_2 \right], \\ \bar{m}'' = \dfrac{\sin\vartheta}{\sin\bar{\vartheta}} \left[l a_1 a_2 + m'' a_1 b_2 + m' a_2 b_1 + n b_1 b_2 \right], \\ \bar{n} = \dfrac{\sin\vartheta}{\sin\bar{\vartheta}} \left[l a_2^2 + (m' + m'') a_2 b_2 + n b_2^2 \right], \end{cases}$$

a stałe $\bar{p}'$, $\bar{q}''$ spełniać będą równania:

$$(188)\quad \begin{cases} a_1 \bar{p}'' + a_2 \bar{q}'' = -m' a - n b + p'', \\ b_1 \bar{p}'' + b_2 \bar{q}'' = l a + m'' b + q'', \end{cases}$$

przyczem zauważymy, że związki (187) napisać można bezpośrednio przez odpowiednią zmianę oznaczeń w związkach (164)

§ 40. Stąd widzimy, że w uważanych przypadkach dwuparametrowy system pierwszego stopnia ma niezmienniki:

$$(189)\quad W = l\,n - m'\,m'',\quad K = m'' - m',\quad I = \frac{l + n - (m' + m'')\cos\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Ponieważ przytem w tych przypadkach niezmiennik W nie jest zerem, więc system dwuparametrowy nie ma wtedy niezmienników zależnych od p'' i q'', bo rugowanie wielkości a, b ze związków (188) nie jest wtedy możliwe. Możemy także zadanie o niezmiennikach systemu traktować w tych przypadkach na podstawie równań (172). Wykonywając przekształcenie spółrzędnych śladów na podstawie wzorów (185), otrzymamy równania:

$$(190)\quad \begin{cases} \overline{x}' = \overline{m}''\,\overline{x}'' + \overline{n}\,\overline{y}'' + \overline{p}', \\ \overline{y}' = -\overline{l}\,\overline{x}'' - \overline{m}'\,\overline{y}'' + \overline{q}', \end{cases}$$

w których stałe $\overline{l}$, $\overline{m}'$, $\overline{m}''$, $\overline{n}$ określone będą wzorami:

$$(191)\quad \begin{cases} \overline{l} = \dfrac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta}\left[\underline{l}\,a_1^2 + (\underline{m}' + \underline{m}'')\,a_1\,b_1 + \underline{n}\,b_1^2\right], \\ \overline{m}' = \dfrac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta}\left[\underline{l}\,a_1\,a_2 + \underline{m}'\,a_1\,b_2 + \underline{m}''\,a_2\,b_1 + \underline{n}\,b_1^2\right], \\ \overline{m}'' = \dfrac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta}\left[\underline{l}\,a_1\,a_2 + \underline{m}''\,a_1\,b_2 + \underline{m}'\,a_2\,b_1 + \underline{n}\,b_1^2\right], \\ \overline{n} = \dfrac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta}\left[\underline{l}\,a_2^2 + (\underline{m}' + \underline{m}'')\,a_2\,b_2 + \underline{n}\,b_2^2\right], \end{cases}$$

a stałe $\overline{p}'$, $\overline{q}'$ spełniać będą równania:

$$(192)\quad \begin{cases} p' = a + a_1\overline{p}' + a_2\,\overline{q}', \\ q' = b + b_1\,\overline{p}' + b_2\,\overline{q}'. \end{cases}$$

Wtedy mieć będziemy niezmienniki:

$$(193)\quad \underline{W} = \underline{l}\,\underline{n} - \underline{m'}\,\underline{m''},\quad \underline{K} = \underline{m''} - \underline{m'},\quad \underline{I} = \frac{\underline{l} + \underline{n} - (\underline{m'} + \underline{m''})\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$$

i ponieważ rugowanie wielkości a, b ze związków (192) nie jest możliwe, więc nie będziemy mieli niezmienników zależnych od wielkości p', q'. Niezmienniki (193) wyrażają się przez niezmienniki (189) zapomocą wzorów:

$$(194)\qquad \underline{W} = \frac{1}{W},\quad \underline{K} = \frac{K}{W},\quad \underline{I} = \frac{I}{W}.$$

Dwuparametrowy system stopnia pierwszego nie może być w przypadkach określonych nierównościami (163) i (169) zespoloną linją prostą o rzeczywistym dwukierunku, ale może być zespoloną linją prostą o urojonym dwukierunku. To zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są równości:

$$(195)\qquad W = 1,\quad K = 0.$$

Wielkość I jest wtedy tym samym niezmiennikiem, który określony jest wzorem (46) w § 56 tomu I-go.

W przypadkach spełnienia obu nierówności (163) i (169) można znaczenie geometryczne niezmienników W, K, I, lub też niezmienników $\underline{W}$, $\underline{K}$, $\underline{I}$ określić rozważaniami i rachunkami, które przeprowadziliśmy w § 41. Figurujące tam niezmienniki J, J_1, J_2 tylko oznaczeniami różnią się od niezmienników obecnie uważanych.

Przyjmiemy teraz, że spełnione są warunki (163) i (177). Wtedy niezmiennik W będzie zerem i można będzie stosować wzory (178). Widzimy więc, że dla dwóch pozostałych niezmienników (189) można będzie wtedy napisać wzory:

$$(196)\quad K = \mathfrak{a}\,\beta - \mathfrak{b}\,\alpha,\quad I = \frac{\mathfrak{a}\,\alpha + \mathfrak{b}\,\beta - (\mathfrak{a}\,\beta + \mathfrak{b}\,\alpha)\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$$

i nadto, że wtedy możliwe będzie rugowanie wielkości a, b ze związków (188). Postępując tą samą drogą, którą wyprowadziliśmy w § 40 niezmienniki (186) i (191), dojdziemy teraz do niezmiennika względnego:

$$(197)\qquad M = \frac{(\mathfrak{a}\,p'' + \mathfrak{b}\,q'')\sin\vartheta}{\sqrt{\Phi(-\mathfrak{b}, \mathfrak{a})}}$$

i do niezmiennika bezwzględnego:

$$N = \frac{\Phi(-\mathbf{b}, \mathbf{a})\,\Phi(-\beta, \alpha)}{\sin^2 \vartheta}. \tag{198}$$

Ale łatwo dostrzec, że zachodzi związek:

$$N = I^2 + K^2, \tag{199}$$

t.j. że niezmiennik N nie jest niezależny od niezmienników I i K. Niezmiennik M jest długością prostopadłej opuszczonej z początku spółrzędnych płaszczyzny A na prostą tej płaszczyzny, określoną równaniami drugiego wiersza wzorów (180). Ażeby objaśnić znaczenie geometryczne niezmiennika N, weźmy pod uwagę dwie wartości różne od siebie σ_1 i σ_2 parametru σ w związkach (180). Na płaszczyźnie R mieć będziemy dwie proste o wspólnym dwukierunku:

$$\alpha x' + \beta y' = \sigma_1, \quad \alpha x' + \beta y' = \sigma_2, \tag{200}$$

a na płaszczyźnie A dwa punkty, których spółrzędne określone są wzorami:

$$\begin{cases} x_1'' = -\mathbf{b}\,\sigma_1 + p'', & y_1'' = \mathbf{a}\,\sigma_1 + q'', \\ x_2'' = -\mathbf{b}\,\sigma_2 + p'', & y_2'' = \mathbf{a}\,\sigma_2 + q''. \end{cases} \tag{201}$$

Kwadrat prostopadłej odległości prostych (200) określa się wyrażeniem:

$$\frac{(\sigma_2 - \sigma_1)^2 \sin^2 \vartheta}{\Phi(-\beta, \alpha)},$$

a kwadrat odległości punktów (201) wyrażeniem:

$$(\sigma_2 - \sigma_1)^2\,\Phi(-\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

Stosunek drugiego z tych kwadratów do pierwszego z nich jest niezależny od wyboru wartości różnych od siebie wielkości σ_1, σ_2 i równa się niezmiennikowi N. Ażeby jeszcze objaśnić geometryczne znaczenie niezmienników I i K, oznaczmy przez φ kąt, który jeden z kierunków dwukierunku $-\alpha : \beta$ tworzy z jednym z kierunków dwukierunku $-\mathbf{a} : \mathbf{b}$. Wtedy widocznie zachodzić będą wzory:

$$I = \eta \sqrt{|N|}\cos\varphi, \quad K = \eta \sqrt{|N|}\sin\varphi, \tag{202}$$

gdzie $\eta = \pm 1$. Wzory te wyjaśniają znaczenie tych niezmienników.

Jeżeli następnie założymy, że spełnione są warunki (169) i (181), to będzie $\overline{W} = 0$, a dwa pozostałe niezmienniki (194) można będzie na podstawie wzorów (182) przedstawić w formie:

$$(203) \qquad \underline{K} = \underline{\mathfrak{a}}\,\underline{\beta} - \underline{\mathfrak{b}}\,\underline{\alpha}, \quad \underline{I} = \frac{\underline{\mathfrak{a}}\,\underline{\alpha} + \underline{\mathfrak{b}}\,\underline{\beta} - (\underline{\mathfrak{a}}\,\underline{\beta} + \underline{\mathfrak{b}}\,\underline{\alpha})\cos\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

W przypadku obecnie rozważanym niema żadnego niezmiennika zależnego od wielkości p', q'. Ale podobnie, jak udowodniliśmy w § 40, że niezmiennikiem jest wielkość Q, możemy teraz udowodnić niezmienność wielkości:

$$(204) \qquad \underline{N} = \frac{\Phi(-\underline{\mathfrak{b}}, \underline{\mathfrak{a}})\,\Phi(-\underline{\beta}, \underline{\alpha})}{\sin^2\vartheta}.$$

Niezmiennik $\underline{N}$ związany jest z niezmiennikami (203) równością:

$$(205) \qquad \underline{N} = \underline{I}^2 + \underline{K}^2.$$

Biorąc następnie pod uwagę równania (184) przy dwóch dowolnie wybranych, różnych od siebie wartościach parametru τ, możemy udowodnić, że iloraz kwadratów dwóch długości jest niezależny od wyboru rzeczonych wartości parametru i jest równy niezmiennikowi $\underline{N}$. Długość, której kwadrat ma figurować w liczniku tego ilorazu, jest odległością dwóch punktów, określonych równaniami pierwszego wiersza wzorów (184) przy rzeczonych wartościach parametru, długość zaś, której kwadrat ma figurować w mianowniku tego ilorazu, jest prostopadłą odległością równoległych linij prostych, określonych równaniem drugiego wiersza wzorów (184) przy tychże wartościach parametru. Jeżeli teraz oznaczymy jeszcze przez $\underline{\varphi}$ kąt jednego z kierunków dwukierunku $-\underline{\alpha} : \underline{\beta}$ z jednym z kierunków $-\underline{\mathfrak{a}} : \underline{\mathfrak{b}}$, to mieć będziemy wzory:

$$(206) \qquad \underline{I} = \underline{\eta}\sqrt{|\underline{N}|}\cos\underline{\varphi}, \quad \underline{K} = \underline{\eta}\sqrt{|\underline{N}|}\sin\underline{\varphi},$$

gdzie $\underline{\eta} = \pm 1$. Wzory te wyjaśniają znaczenie geometryczne niezmienników (203).

W przypadkach, gdy spełniona jest nierówność (163) i wszystkie wielkości u_1'', v_1'', u_2'', v_2'' są zerami, system pierwszego stopnia ma tylko jeden niezmiennik, mianowicie:

$$\Phi'' = \Phi(a'', b''). \tag{207}$$

Jeżeli zaś spełniona jest nierówność (169) i wszystkie wielkości u_1', v_1', u_2', v_2' są zerami, to system pierwszego stopnia nie ma żadnego niezmiennika.

Gdy wreszcie spełnione są obie równości (177) i (181), ale przytem nie wszystkie wyznaczniki drugiego stopnia macierzy (161) są zerami, wówczas istnieją takie liczby rzeczywiste g', h', nie obie równe zeru, i takie liczby rzeczywiste r', s', nie obie równe zeru, że zachodzą równości:

$$u_1' = g' r', \quad v_1' = g' s', \quad u_2' = h' r', \quad v_2' = h' s', \tag{208}$$

a także takie liczby rzeczywiste g'', h'', nie obie równe zeru, i takie liczby rzeczywiste r'', s'', nie obie równe zeru, że zachodzą równości:

$$u_1'' = g'' r'', \quad v_1'' = g'' s'', \quad u_2'' = h'' r'', \quad v_2'' = h'' s''. \tag{209}$$

Wskutek równości (208) można równania pierwszego wiersza związków (137) napisać w postaci:

$$x' = a' + r'(g' \rho_1 + h' \rho_2), \quad y' = b' + s'(g' \rho_1 + h' \rho_2), \tag{210}$$

a równania drugiego wiersza związków (137) w postaci:

$$x'' = a'' + r''(g'' \rho_1 + h'' \rho_2), \quad y'' = b'' + s''(g'' \rho_1 + h'' \rho_2). \tag{211}$$

Równania (210) i (211) określają system dwuparametrowy przy spełnieniu nierówności:

$$g' h'' - h' g'' \neq 0 \tag{212}$$

i łatwo sprawdzić, że w przypadku uważanym warunek ten zgadza się z warunkiem, by nie wszystkie wyznaczniki drugiego stopnia macierzy (161) były zerami. Równania (210) określają na płaszczyźnie R linję prostą, którą inaczej przedstawić można równaniem:

$$s'(x'-a')-r'(y'-b')=0. \tag{213}$$

Równania (211) określają na płaszczyźnie A linję prostą, którą można także przedstawić równaniem:

$$s''(x''-a'')-r''(y''-b'')=0. \tag{214}$$

Niezmienniki systemu dwuparametrowego są przy obecnych założeniach niezmiennikami figury, składającej się z prostej (213) na płaszczyźnie R i z prostej (214) na płaszczyźnie A. Widoczne, że niezmienniki tej figury określają się wzorami:

$$\begin{cases} \cos\psi=\dfrac{\Phi(r',s';\,r'',s'')}{\varepsilon'\varepsilon''\sqrt{\Phi(r',s')}\,\sqrt{\Phi(r'',s'')}}, \\ \sin\psi=\dfrac{\Psi(r',s';\,r'',s'')}{\varepsilon'\varepsilon''\sqrt{\Phi(r',s')}\,\sqrt{\Phi(r'',s'')}}, \\ D=\dfrac{(s''a''-r''b'')\sin\vartheta}{\eta\sqrt{\Phi(r'',s'')}}, \end{cases} \tag{215}$$

gdzie ψ jest kątem jednego z kierunków dwukierunku $s'':r''$ z jednym z kierunków dwukierunku $s':r'$, gdzie D jest długością prostopadłej opuszczonej z początku spółrzędnych płaszczyzny A na prostą (214), a czynniki ε', ε'', η mają znaczenia $\varepsilon'=\pm 1$, $\varepsilon''=\pm 1$, $\eta=\pm 1$. Przy obecnych założeniach system dwuparametrowy może być linją prostą o rzeczywistym dwukierunku. Zachodzi to wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest równość:

$$\Psi(r',s';\,r'',s'')=0. \tag{216}$$

Zajmiemy się teraz rozważeniem pewnych systemów punktów zespolonych o jednym parametrze, położonych na dwuparametrowych systemach pierwszego stopnia. Przyjmując w równaniach (137):

$$\rho_1=\rho\cos\omega,\quad \rho_2=\rho\sin\omega, \tag{217}$$

mieć będziemy równania:

$$\begin{cases} x'=a'+(u_1'\cos\omega+u_2'\sin\omega)\rho,\ y'=b'+(v_1'\cos\omega+v_2'\sin\omega)\rho, \\ x''=a''+(u_1''\cos\omega+u_2''\sin\omega)\rho,\ y''=b''+(v_1''\cos\omega+v_2''\sin\omega)\rho. \end{cases} \tag{218}$$

Zakładamy, że wielkości ρ i ω oznaczają parametry rzeczywiste i zapytujemy o własności systemów jednoparametrowych, określonych równaniami (218) przy stałem ω i zmiennem ρ oraz przy stałem ρ i zmiennem ω.

Przypuścimy naprzód, że spełnione są obie nierówności (163) i (169) i zauważymy, że równania pierwszego wiersza związków (218) zastąpić można przez równania:

$$(219)\qquad \begin{cases} \rho\cos\omega = \dfrac{v_2'(x'-a') - u_2'(y'-b')}{u_1'v_2' - v_1'u_2'}, \\ \rho\sin\omega = \dfrac{u_1'(y'-b') - v_1'(x'-a')}{u_1'v_2' - v_1'u_2'}, \end{cases}$$

a równania drugiego wiersza związków (218) przez równania:

$$(220)\qquad \begin{cases} \rho\cos\omega = \dfrac{v_2''(x''-a'') - u_2''(y''-b'')}{u_1''v_2'' - v_1''u_2''}, \\ \rho\sin\omega = \dfrac{u_1''(y''-b'') - v_1''(x''-a'')}{u_1''v_2'' - v_1''u_2''}. \end{cases}$$

Przy stałem ω i zmiennem ρ równania (218) określają nić prostolinjową i widoczne, że ślady R punktów zespolonych tej nici są punktami prostej właściwej płaszczyzny R, a ślady A punktów zespolonych tej nici są punktami prostej właściwej płaszczyzny A. Oznaczmy przez λ', μ' spółczynniki kierunkowe jednego z kierunków pierwszej z tych prostych, a przez λ'', μ'' spółczynniki kierunkowe jednego z kierunków drugiej z tych prostych. Ponieważ ze związków (219) wynika równość:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{u_1'\mu' - v_1'\lambda'}{v_2'\lambda' - u_2'\mu'},$$

a ze związków (220) równość:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{u_1''\mu'' - v_1''\lambda''}{v_2''\lambda'' - u_2''\mu''},$$

przeto dwukierunki $\mu':\lambda'$ i $\mu'':\lambda''$ spełniają związek:

$$(u_1'\mu' - v_1'\lambda')(v_2''\lambda'' - u_2''\mu'') - (v_2'\lambda' - u_2'\mu')(u_1''\mu'' - v_1''\lambda'') = 0$$

i łatwo sprawdzić, że na podstawie czterech pierwszych ze wzorów (165) można związek ten napisać w postaci:

$$(221) \qquad l\,\lambda'\lambda'' + m'\lambda'\mu'' + m''\mu'\lambda'' + n\,\mu'\mu'' = 0,$$

a na podstawie czterech pierwszych ze wzorów (171) w postaci:

$$(222) \qquad \underline{l}\,\lambda'\lambda'' + \underline{m}'\lambda'\mu'' + \underline{m}''\mu'\lambda'' + \underline{n}\,\mu'\mu'' = 0.$$

W rozważanych obecnie przypadkach zachodzą nierówności:

$$(223) \qquad l\,n - m'\,m'' \neq 0, \quad \underline{l}\,\underline{n} - \underline{m}'\,\underline{m}'' \neq 0.$$

Zatem pomiędzy dwukierunkami rzeczonych linij prostych, należących do tej samej nici prostolinjowej, określonej równaniami (218) przy stałem ω i zmiennem ρ, zachodzi odpowiedniość, określona związkiem (221) lub, co na jedno wychodzi, związkiem (222), która wobec nierówności (223) jest odpowiedniością jednojednowartościową.

Przy stałem ρ różnem od zera i zmiennem ω równania (218) określają na płaszczyźnie R linję krzywą:

$$(224) \quad [v_2'(x' - a') - u_2'(y' - b')]^2 + [u_1'(y' - b') - v_1'(x' - a')]^2 = \\ = \rho^2 (u_1' v_2' - v_1' u_2')^2,$$

a na płaszczyźnie A linję krzywą:

$$(225) \quad [v_2''(x'' - a'') - u_2''(y'' - b'')]^2 + [u_1''(y'' - b'') - v_1''(x'' - a'')]^2 = \\ = \rho^2 (u_1'' v_2'' - v_1'' u_2'')^2.$$

Przy powyższych założeniach każda z krzywych (224) i (225) jest istotną rzeczywistą linją krzywą rodzaju elips, t.j. albo elipsą rzeczywistą, albo też kołem rzeczywistem. Jeżeli nadajemy ρ rozmaite wartości, to równanie (224) określa na płaszczyźnie R krzywe homotetyczne o wspólnym środku w punkcie a', b', będącym zarazem ich wspólnym środkiem homotetyczności, a równanie (225) określa na płaszczyźnie A krzywe homotetyczne, mające wspólny środek w punkcie a'', b'', który jest zarazem ich wspólnym środkiem homotetyczności.

Rozważane tutaj linje proste i linje krzywe mogą być zastosowane do opisu odwzorowania płaszczyzn R i A, charakteryzującego zbiór punktów zespolonych dwuparametrowego systemu

pierwszego stopnia. W tym celu zauważmy, że jeżeli przez ε oznaczymy odpowiednio $+1$, lub -1 zależnie od tego, czy wyznaczniki nierówności (223) są dodatnie, czy też ujemne, to na podstawie równań (219) i (220) dostrzeżemy, że wyrażenia:

$$(226)\qquad u_1'(y'-b')-v_1'(x'-a') \quad \text{i} \quad u_1''(y''-b'')-v_1''(x''-a'')$$

są albo oba równe zeru, albo też oba różne od zera i iloraz ich ma znak ε, oraz że wyrażenia:

$$(227)\qquad u_2'(y'-b')-v_2'(x'-a') \quad \text{i} \quad u_2''(y''-b'')-v_2''(x''-a'')$$

są albo oba równe zeru, albo też oba różne od zera i iloraz ich ma znak ε. Mówić będziemy w dalszym ciągu o punktach x', y' płaszczyzny R, różnych od punktu a', b', i o punktach x'', y'' płaszczyzny A, różnych od punktu a'', b''. Mając dany punkt jednej z tych płaszczyzn, uważamy na niej tę z rzeczonych linij prostych i tę z rzeczonych linij krzywych, które przechodzą przez dany punkt, a na drugiej z tych płaszczyzn bierzemy pod uwagę linję prostą i linję krzywą, które są odwzorowaniami tamtych linij naskutek rozważanego przekształcenia. Punkt drugiej płaszczyzny, odpowiadający punktowi danemu pierwszej, jest jednym z punktów przecięcia linij drugiej płaszczyzny i widoczne, że jest on tym z rzeczonych punktów przecięcia, dla którego spełnione są przytoczone powyżej własności wyrażeń (226) i (227). Można własności te sformułować geometrycznie i dla otrzymania tego sformułowania zwrócimy uwagę na wyrażenia:

$$(228)\quad \begin{cases} T' = \dfrac{1}{2}(u_1'v_2'-v_1'u_2')\sin\vartheta, \quad T''=\dfrac{1}{2}(u_1''v_2''-v_1''u_2'')\sin\vartheta, \\ T_1' = \dfrac{1}{2}[u_1'(y'-b')-v_1'(x'-a')]\sin\vartheta, \\ T_1''= \dfrac{1}{2}[u_1''(y''-b'')-v_1''(x''-a'')]\sin\vartheta, \\ T_2' = \dfrac{1}{2}[u_2'(y'-b')-v_2'(x'-a')]\sin\vartheta, \\ T_2''= \dfrac{1}{2}[u_2''(y''-b'')-v_2''(x''-a'')]\sin\vartheta, \end{cases}$$

które określają co do wartości bezwzględnej i co do znaku pola trzech trójkątów na płaszczyźnie R i pola trzech trójkątów na płaszczyźnie A. Pola T' i T'' są oba różne od zera; pola tabelki (228) o tym samym wskaźniku T_k' i T_k'' są albo oba równe zeru, albo oba różne od zera. Jeżeli kierunki obiegów pól T' i T'' są te same, a z pośród par pól o tym samym wskaźniku pola tabelki (228) T_k' i T_k'' są różne od zera, to kierunki obiegów pól T_k' i T_k'' nie są różne jeden od drugiego. Jeżeli kierunki obiegów pól T' i T'' są różne jeden od drugiego, a z pośród par pól tabelki (228) pola o tym samym wskaźniku T_k' i T_k'' są różne od zera, to kierunki obiegów pól T_k' i T_k'' są różne jeden od drugiego.

Załóżmy teraz, że spełnione są: nierówność (163) i równość (177), ale że nie wszystkie wielkości u_1'', v_1'', u_2'', v_2'' są zerami. Wtedy równania (218) określają przy stałem ω i zmiennem ρ nić prostolinjową. Ślady R punktów zespolonych tej nici położone są na linji prostej, przechodzącej przez punkt a', b' i, przyjmując na ω wszystkie możliwe wartości, otrzymujemy na płaszczyźnie R wszystkie możliwe linje proste, przechodzące przez punkt a', b'. W uważanym przypadku możemy zastosować wzory (209) i jeżeli wartość parametru ω spełnia równanie:

$$g'' \cos \omega + h'' \sin \omega = 0, \tag{229}$$

to wszystkie punkty odnośnej nici prostolinjowej mają jeden i ten sam ślad A, którym jest punkt a'', b''. Natomiast przy wartości ω, nie czyniącej zadość równaniu (229), ślady A punktów zespolonych nici prostolinjowej są punktami linji prostej, przechodzącej przez punkt a'', b'' i linja ta jest ta sama przy każdym wyborze wartości ω, która nie spełnia równania (229). Wprowadzając parametr τ'':

$$\tau'' = (g'' \cos \omega + h'' \sin \omega)\, \rho, \tag{230}$$

możemy tę linję prostą przedstawić równaniami:

$$x'' = a'' + r''\tau'', \quad y'' = b'' + s''\tau''. \tag{231}$$

Przy stałem ρ, różnem od zera, i zmiennem ω równania pierwszego wiersza związków (218) określają istotną krzywą rzeczywistą rodzaju elips ze środkiem w punkcie a', b'. Jeżeli parametr ρ przyjmuje rozmaite wartości rzeczywiste, to równania te określają krzywe homotetyczne o wspólnym środku homotetyczności w pun-

kcie a', b'. Zmienny punkt x'', y'', określony równaniami drugiego wiersza związków (218), opisuje przy stałem ρ, różnem od zera, i zmiennem ω odcinek prostej (231), którego środek leży w punkcie a'', b'', a bezwzględna długość określa się wyrażeniem: $2\,|\rho|\,\sqrt{\Phi(r'', s'')}\,\sqrt{g''^2 + h''^2}$.

W przypadkach, gdy spełnione są: nierówność (169) i równość (181), ale wielkości u_1', v_1', u_2', v_2' nie wszystkie jednocześnie są zerami, systemy jednoparametrowe punktów zespolonych, określone równaniami (218) przy stałem ω i zmiennem ρ oraz przy stałem ρ i zmiennem ω, mają własności, otrzymujące się z własności, które dopiero co rozważyliśmy, drogą zastąpienia wielkości z jednym akcentem przez odpowiednie wielkości z dwoma akcentami i nawzajem wielkości z dwoma akcentami przez odpowiednie wielkości z jednym akcentem. Ślady A punktów nici prostolinjowej, określone równaniami drugiego wiersza związków (218) przy stałem ω i zmiennem ρ, są punktami prostej, przechodzącej przez punkt a'', b'', i, przyjmując na wielkość ω wszystkie możliwe wartości, otrzymujemy wszystkie możliwe linje proste, przechodzące przez punkt a'', b''. Przy zastosowaniu wzorów (208) dostrzeżemy łatwo, że jeżeli wielkość ω spełnia równość:

$$g' \cos\omega + h' \sin\omega = 0, \tag{232}$$

to punkty odnośnej nici prostolinjowej mają wszystkie jeden i ten sam ślad R, którym jest punkt a', b'. Jeżeli zaś wielkość ω nie spełnia równości (232), to ślady R punktów odnośnej nici prostolinjowej są punktami linji prostej, która jest ta sama przy każdym wyborze wielkości ω, nie czyniącej zadość równości (232). Stosując parametr:

$$\tau' = (g' \cos\omega + h' \sin\omega)\,\rho, \tag{233}$$

można równania tej prostej napisać w postaci:

$$x' = a' + r'\tau', \quad y' = b' + s'\tau'. \tag{234}$$

Jeżeli ρ jest stałe, a ω jest zmienne, to równania drugiego wiersza związków (218) określają istotną krzywą rzeczywistą rodzaju elips ze środkiem w punkcie a'', b''. Przyjmując rozmaite wartości na stałą ρ, mieć będziemy krzywe homotetyczne ze wspólnym środkiem homotetyczności w punkcie a'', b''. Punkty, określone równaniami pierwszego wiersza związków (218), opisują przy stałem ρ

i zmiennem ω odcinek na prostej (234), którego środek leży w punkcie a', b', a bezwzględna długość ma wartość: $2|\rho|\sqrt{\Phi(r', s')}\sqrt{g'^2+h'^2}$.

Jeżeli spełniona jest nierówność (163) i wszystkie wielkości $u_1'', v_1'', u_2'', v_2''$ są zerami, to uważane tutaj linje śladów na płaszczyźnie R będą takie same jak w przypadkach, określonych nierównościami (163) i (169). Natomiast jedynym śladem A jest dla uważanego systemu dwuparametrowego punkt a'', b''.

W przypadkach, gdy spełniona jest nierówność (169) i wszystkie wielkości u_1', v_1', u_2', v_2' są zerami, uważany system dwuparametrowy ma na płaszczyźnie R jeden tylko ślad, mianowicie punkt a', b'. Natomiast odnośne linje śladów płaszczyzny A są takie same jak przy założeniach (163) i (169).

Pozostaje jeszcze rozważenie systemów jednoparametrowych, któremi zajmujemy się, w przypadkach, gdy spełnione są obie równości (177) i (181), ale przytem nie wszystkie wyznaczniki macierzy (161) są zerami. Wtedy na płaszczyźnie R mieć będziemy takie same fakty, jak w przypadku, gdy zachodzi nierówność (169) i równość (181), ale wielkości u_1', v_1', u_2', v_2' nie są wszystkie jednocześnie zerami, a na płaszczyźnie A takie same fakty, jak w przypadku, gdy zachodzi nierówność (163) i równość (177), ale nie wszystkie wielkości $u_1'', v_1'', u_2'', v_2''$ są zerami. Wtedy wszelkie ślady R znajdują się na prostej (234), a wszelkie ślady A na prostej (231). Zwracamy tu uwagę na to, że pomimo tej okoliczności system dwuparametrowy ma widocznie nieskończenie wiele systemów jednoparametrowych przy stałem ω i zmiennem ρ i nieskończenie wiele systemów jednoparametrowych przy stałem ρ i zmiennem ω.

§ 64. Niezmienniki i geometryczne interpretacje trzyparametrowych systemów pierwszego stopnia.

Niech będzie system punktów zespolonych, których ślady R i A określone są równaniami:

$$(138)\quad \begin{cases} x' = a' + u_1'\rho_1 + u_2'\rho_2 + u_3'\rho_3, \quad y' = b' + v_1'\rho_1 + v_2'\rho_2 + v_3'\rho_3, \\ x'' = a'' + u_1''\rho_1 + u_2''\rho_2 + u_3''\rho_3, \quad y'' = b'' + v_1''\rho_1 + v_2''\rho_2 + v_3''\rho_3, \end{cases}$$

gdzie ρ_1, ρ_2, ρ_3 oznaczają zmienne parametry rzeczywiste, a inne litery po stronach prawych oznaczają wielkości stałe. Warunki

konieczne i wystarczające, aby równania (138) przedstawiały trzyparametrowy system pierwszego stopnia polegają na tem, żeby nie wszystkie wyznaczniki trzeciego stopnia macierzy:

$$\begin{vmatrix} u_1', & v_1', & u_1'', & v_1'' \\ u_2', & v_2', & u_2'', & v_2'' \\ u_3', & v_3', & u_3'', & v_3'' \end{vmatrix} \tag{235}$$

były jednocześnie zerami. Rugując wtedy z równań (138) parametry ρ_1, ρ_2, ρ_3, otrzymamy związek:

$$\begin{vmatrix} x'-a', & y'-b', & x''-a'', & y''-b'' \\ u_1', & v_1', & u_1'', & v_1'' \\ u_2', & v_2', & u_2'', & v_2'' \\ u_3', & v_3', & u_3'', & v_3'' \end{vmatrix} = 0, \tag{236}$$

który możemy napisać w postaci:

$$M' x' + N' y' - M'' x'' - N'' y'' + \frac{1}{2} P = 0, \tag{18}$$

rozważanej już w § 58. Wielkości $M', N', M'' N'', P$ oznaczają tutaj stałe rzeczywiste, z których cztery pierwsze nie są wszystkie jednocześnie zerami. Na tejże postaci (18) oprzemy wyznaczenie niezmienników trzyparametrowego systemu pierwszego stopnia przy zmianach spółrzędnych prostolinjowych.

Niech będzie zmiana spółrzędnych, określona równaniami (185). Równanie:

$$\bar{M}' \bar{x}' + \bar{N}' \bar{y}' - \bar{M}'' \bar{x}'' - \bar{N}'' \bar{y}'' + \frac{1}{2} \bar{P} = 0 \tag{237}$$

jest wtedy i tylko wtedy związkiem, otrzymującym się ze związku (18) przez przekształcenie (185), gdy naskutek tego przekształcenia spełnia się równość:

$$\bar{M}' \bar{x}' + \bar{N}' \bar{y}' - \bar{M}'' \bar{x}'' - \bar{N}'' \bar{y}'' + \frac{1}{2} \bar{P} =$$

$$= h \left(M' x' + N' y' - M'' x'' - N'' y'' + \frac{1}{2} P \right),$$

w której h oznacza czynnik różny od zera. Stąd dochodzimy do równości:

$$(238)\quad \begin{cases} \overline{M}' = h(M' a_1 + N' b_1), \quad \overline{N}' = h(M' a_2 + N' b_2), \\ \overline{M}'' = h(M'' a_1 + N'' b_1), \quad \overline{N}'' = h(M'' a_2 + N'' b_2), \\ \frac{1}{2}\overline{P} = h(M' a + N' b + \frac{1}{2} P), \end{cases}$$

z których otrzymamy rzeczone niezmienniki przez rugowanie czynnika h i wielkości a, b bez wskaźników i ze wskaźnikami. Jeżeli obie wielkości M'', N'' są zerami, to i obie wielkości $\overline{M}''$, $\overline{N}''$ są zerami i wówczas system trzyparametrowy niema żadnego niezmiennika. Jeżeli obie wielkości M', N' są zerami, to i obie wielkości $\overline{M}'$, $\overline{N}'$ są zerami i wówczas względnym niezmiennikiem systemu jest wielkość:

$$(239)\qquad p = -\frac{P \sin \vartheta}{2\sqrt{\Phi(-N'', M'')}}.$$

Związek (18) jest przy tych założeniach równaniem prostej na płaszczyźnie A i niezmiennik p jest długością prostopadłej, opuszczonej z początku spółrzędnych na tę prostą. Jeżeli ani wielkości M', N' nie są obie zerami, ani wielkości M'', N'' nie są obie zerami, to również ani wielkości $\overline{M}'$, $\overline{N}'$ nie są obie zerami, ani też wielkości $\overline{M}''$, $\overline{N}''$ nie są obie zeremi. Wtedy z równań (238) wynikają związki:

$$(240)\quad \begin{cases} \dfrac{\overline{\Phi}(-\overline{N}', \overline{M}')}{\sin^2 \overline{\vartheta}} = h^2 \dfrac{\Phi(-N', M')}{\sin^2 \vartheta}, \\ \dfrac{\overline{\Phi}(-\overline{N}'', \overline{M}'')}{\sin^2 \overline{\vartheta}} = h^2 \dfrac{\Phi(-N'', M'')}{\sin^2 \vartheta}, \\ \dfrac{\overline{\Phi}(-\overline{N}', \overline{M}'; -\overline{N}'', \overline{M}'')}{\sin^2 \overline{\vartheta}} = h^2 \dfrac{\Phi(-N', M'; -N'', M'')}{\sin^2 \vartheta}, \\ \dfrac{\overline{\Psi}(-\overline{N}', \overline{M}'; -\overline{N}'', \overline{M}'')}{\sin^2 \overline{\vartheta}} = h^2 \dfrac{\Psi(-N', M'; -N'' M'')}{\sin^2 \vartheta}. \end{cases}$$

Jeżeli kąt jednego z kierunków dwukierunku $-M'':N''$ z jednym z kierunków dwukierunku $-M':N'$ oznaczymy przez φ, to wstawa i dostawa tego kąta wyznaczone będą wzorami:

$$(241)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\Phi(-N', M'; -N'' M'')}{\varepsilon\sqrt{\Phi(-N', M')}\,\sqrt{\Phi(-N'', M'')}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{\Psi(-N', M'; -N'', M'')}{\varepsilon\sqrt{\Phi(-N', M')}\,\sqrt{\Phi(-N'', M'')}}, \end{cases}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$. Na podstawie związków (240) skonstatujemy, że wielkości (241) są względnemi niezmiennikami uważanego systemu i widoczne przytem, że $\operatorname{tg}\varphi$ jest jego niezmiennikiem bezwzględnym. Z tychże związków (240) wynika jeszcze, że wielkość:

$$(242)\qquad K = \frac{\Phi(-N', M')}{\Phi(-N'', M'')}$$

jest niezmiennikiem bezwzględnym systemu, którym zajmujemy się.

Przy założeniu, że ani wielkości M', N' nie są obie jednocześnie zerami, ani też wielkości M'', N'' nie są obie jednocześnie zerami, przedstawimy związek (18) jeszcze w innej postaci. Możemy wyznaczyć nieskończenie wiele par liczb P', P'', spełniających równość:

$$(243)\qquad P' - P'' = \frac{1}{2} P$$

i dla każdej takiej pary napisać związek (18) w postaci równości:

$$(244)\qquad M'' x'' + N'' y'' + P'' = M' x' + N' y' + P'.$$

Weźmy pod uwagę linję prostą na płaszczyźnie R, określoną w spółrzędnych bieżących ξ', η' równaniem:

$$(245)\qquad M' \xi' + N' \eta' + P' = 0,$$

i prostą na płaszczyźnie A, określoną w spółrzędnych bieżących ξ'', η'' równaniem:

$$(246)\qquad M'' \xi'' + N'' \eta'' + P'' = 0.$$

Długość prostopadłej, opuszczonej z dowolnie wybranego punktu x', y' płaszczyzny R na prostą (245) można określić wzorem:

$$D' = \frac{(M' x' + N' y' + P') \sin \vartheta}{\sqrt{\Phi(-N', M')}}, \tag{247}$$

a długość prostopadłej, opuszczonej z dowolnie wybranego punktu x'', y'' płaszczyzny A na prostą (246), wzorem:

$$D'' = \frac{(M'' x'' + N'' y'' + P'') \sin \vartheta}{\sqrt{\Phi(-N'', M'')}}. \tag{248}$$

Na podstawie tych wzorów oraz wzoru (242) można związek (244) napisać w postaci:

$$D'' = \sqrt{K}\, D'. \tag{249}$$

Zatem przy obecnych założeniach można odpowiedniość punktów płaszczyzn R i A, określoną związkiem (18), scharakteryzować w sposób następujący. Obierając na płaszczyznach R i A którąkolwiek z par prostych o równaniach (245) i (246), gdzie spółczynniki P' i P'' spełniają równość (243), i uważając długości prostopadłych, opuszczonych ze śladów x', y' i x'', y'' na proste (245) i (246), możemy przy odpowiednim wyborze znaków tych długości powiedzieć, że dla śladów, których spółrzędne spełniają związek (18), stosunek tych długości jest stałą dodatnią, niezmienną przy zmianach spółrzędnych prostolinjowych i niezależną od wyboru rzeczonej pary prostych. Ta własność uzupełnia interpretację związku (18), podaną w § 58.

ROZDZIAŁ DZIESIĄTY

Zagadnienia dotyczące par punktów rzeczywistych i pewnych obrazów punktów zespolonych.

§ 65. Linjowe rzeczywiste przekształcenia par punktów rzeczywistych.

Niech będzie na płaszczyźnie P rzeczywisty prostolinjowy układ spółrzędnych x, y. Weźmy pod uwagę dwa punkty rzeczywiste: jeden o spółrzędnych x', y', drugi o spółrzędnych x'', y''. Zajmiemy się równaniami:

$$(1)\qquad \begin{cases} X' = p_1 + g_1' x' + h_1' y' + g_1'' x'' + h_1'' y'', \\ Y' = q_1 + r_1' x' + s_1' y' + r_1'' x'' + s_1'' y'', \\ X'' = p_2 + g_2' x' + h_2' y' + g_2'' x'' + h_2'' y'', \\ Y'' = q_2 + r_2' x' + s_2' y' + r_2'' x'' + s_2'' y'', \end{cases}$$

w których litery g, h, s, r, p, q z rozmaitemi znaczkami określają stałe rzeczywiste, czyniące zadość warunkowi, żeby wyznacznik:

$$(2)\qquad T = \begin{vmatrix} g_1', & h_1', & g_1'', & h_1'' \\ r_1', & s_1', & r_1'', & s_1'' \\ g_2', & h_2', & g_2'', & h_2'' \\ r_2', & s_2', & r_2'', & s_2'' \end{vmatrix}$$

był różny od zera. Wielkości X', Y' i wielkości X'', Y'', figurujące w tych równaniach, interpretować będziemy odpowiednio w tymże układzie x, y jako spółrzędne dwóch punktów. Ponieważ wyznacznik (2) jest różny od zera, przeto równania (1) można rozwiązać względem wielkości x', y', x'', y'' i otrzymamy wyrażenia postaci:

$$(3)\quad \begin{cases} x' = \bar{p}' + \bar{g}_1' X' + \bar{h}_1' Y' + \bar{g}_2' X'' + \bar{h}_2' Y'', \\ y' = \bar{q}' + \bar{r}_1' X' + \bar{s}_1' Y' + \bar{r}_2' X'' + \bar{s}_2' Y'', \\ x'' = \bar{p}'' + \bar{g}_1'' X' + \bar{h}_1'' Y' + \bar{g}_2'' X'' + \bar{h}_2'' Y'', \\ y'' = \bar{q}'' + \bar{r}_1'' X' + \bar{s}_1'' Y' + \bar{r}_2'' X'' + \bar{s}_2'' Y'', \end{cases}$$

w których litery g, h, s, r, p, q z rozmaitemi znaczkami oznaczają stałe rzeczywiste, zależne od stałych równań (1) i mające własność, że wyznacznik:

$$(4)\quad \bar{T} = \begin{vmatrix} \bar{g}_1', & \bar{h}_1', & \bar{g}_2', & \bar{h}_2' \\ \bar{r}_1', & \bar{s}_1', & \bar{r}_2', & \bar{s}_2' \\ \bar{g}_1'', & \bar{h}_1'', & \bar{g}_2'', & \bar{h}_2'' \\ \bar{r}_1'', & \bar{s}_1'', & \bar{r}_2'', & \bar{s}_2'' \end{vmatrix}$$

jest różny od zera. Mówić będziemy, że równania (1) określają linjowe przekształcenie pary punktów x', y' i x'', y'' na parę punktów X', Y' i X'', Y''. Podobnież równania (3) określają linjowe przekształcenie pary punktów X', Y' i X'', Y'' na parę punktów x', y' i x'', y''. Przytem przekształcenia, określone układami równań (1) i (3), nazywać będziemy przekształceniami odwrotnemi.

Przekształcenie (1) można zapomocą par wielkości zespolonych ze sobą sprzężonych przedstawić inaczej. Jeżeli utworzymy wielkości zespolone:

$$(5)\quad x = x' + i\,x'', \quad y = y' + i\,y'',$$

a także wielkości zespolone z niemi sprzężone:

$$(6)\quad \overset{*}{x} = x' - i\,x'', \quad \overset{*}{y} = y' - i\,y'',$$

to można będzie przez te wielkości x, y, $\overset{*}{x}$, $\overset{*}{y}$ wyrazić wielkości rzeczywiste x', y', x'', y'', mianowicie mieć będziemy wzory:

$$(7)\qquad \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + \overset{*}{x}), \quad y' = \frac{1}{2}(y + \overset{*}{y}), \\ x'' = \frac{i}{2}(\overset{*}{x} - x), \quad y'' = \frac{i}{2}(\overset{*}{y} - y). \end{cases}$$

Podobnież, jeżeli utworzymy wielkości zespolone:

$$(8)\qquad X = X' + i\,X'', \quad Y = Y' + i\,Y''$$

i wielkości zespolone z niemi sprzężone:

$$(9)\qquad \overset{*}{X} = X' - i\,X'', \quad \overset{*}{Y} = Y' - i\,Y'',$$

to mieć będziemy wzory:

$$(10)\qquad \begin{cases} X' = \frac{1}{2}(X + \overset{*}{X}), \quad Y' = \frac{1}{2}(Y + \overset{*}{Y}), \\ X'' = \frac{i}{2}(\overset{*}{X} - X), \quad Y'' = \frac{i}{2}(\overset{*}{Y} - Y). \end{cases}$$

Podstawiając wyrażenia (7) i (10) w równania (1) i obliczając wyrażenia X, Y, $\overset{*}{X}$, $\overset{*}{Y}$, otrzymamy równania:

$$(11)\qquad \begin{cases} X = p + g\,x + h\,y + \gamma\,\overset{*}{x} + \chi\,\overset{*}{y}, \\ Y = q + r\,x + s\,y + \rho\,\overset{*}{x} + \sigma\,\overset{*}{y}, \\ \overset{*}{X} = \overset{*}{p} + \overset{*}{\gamma}\,x + \overset{*}{\chi}\,y + \overset{*}{g}\,\overset{*}{x} + \overset{*}{h}\,\overset{*}{y}, \\ \overset{*}{Y} = \overset{*}{q} + \overset{*}{\rho}\,x + \overset{*}{\sigma}\,y + \overset{*}{r}\,\overset{*}{x} + \overset{*}{s}\,\overset{*}{y}, \end{cases}$$

w których przyjęto oznaczenia:

$$
(12)\quad \left\{\begin{array}{l}
p = p_1 + i\,p_2, \quad q = q_1 + i\,q_2, \\
g = \dfrac{g_1' + g_2''}{2} + i\,\dfrac{g_2' - g_1''}{2}, \quad h = \dfrac{h_1' + h_2''}{2} + i\,\dfrac{h_2' - h_1''}{2}, \\
\gamma = \dfrac{g_1' - g_2''}{2} + i\,\dfrac{g_2' + g_1''}{2}, \quad \chi = \dfrac{h_1' - h_2''}{2} + i\,\dfrac{h_2' + h_1''}{2}, \\
r = \dfrac{r_1' + r_2''}{2} + i\,\dfrac{r_2' - r_1''}{2}, \quad s = \dfrac{s_1' + s_2''}{2} + i\,\dfrac{s_2' - s_1''}{2}, \\
\rho = \dfrac{r_1' - r_2''}{2} + i\,\dfrac{r_2' + r_1''}{2}, \quad \sigma = \dfrac{s_1' - s_2''}{2} + i\,\dfrac{s_2' + s_1''}{2},
\end{array}\right.
$$

a przez $\overset{*}{p}, \overset{*}{q}, \overset{*}{g}, \overset{*}{h}, \overset{*}{\gamma}, \overset{*}{\chi}, \overset{*}{r}, \overset{*}{s}, \overset{*}{\rho}, \overset{*}{\sigma}$ oznaczono pokolei liczby sprzężone z wymienionemi liczbami. Wyznacznik:

$$
(13)\qquad W = \begin{vmatrix} g, & h, & \gamma, & \chi \\ r, & s, & \rho, & \sigma \\ \overset{*}{\gamma}, & \overset{*}{\chi}, & \overset{*}{g}, & \overset{*}{h} \\ \overset{*}{\rho}, & \overset{*}{\sigma}, & \overset{*}{r}, & \overset{*}{s} \end{vmatrix}
$$

jest różny od zera, bo równania (11) można rozwiązać względem $x, y, \overset{*}{x}, \overset{*}{y}$, co wynika stąd, że układy równań (1) i (11) przechodzą jeden w drugi na mocy związków (5), (6), (8), (9) lub związków z niemi równoważnych (7) i (10).

Zajmiemy się obliczeniem wyznaczników T i W. W tym celu zauważmy, że wyznacznik:

$$
(14)\qquad \Omega = \begin{vmatrix} u_1, & v_1, & w_1, & z_1 \\ u_2, & v_2, & w_2, & z_2 \\ U_1, & V_1, & W_1, & Z_1 \\ U_2, & V_2, & W_2, & Z_2 \end{vmatrix}
$$

przy zastosowaniu oznaczenia:

$$
(15)\qquad (\varphi, \psi) = \varphi_1 \psi_2 - \psi_1 \varphi_2
$$

można przedstawić zapomocą wzoru:

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} \Omega = (u, v)(W, Z) + (u, w)(Z, V) + (u, z)(V, W) + \\ \quad + (w, z)(U, V) + (z, v)(U, W) + (v, w)(U, Z). \end{array}\right.$$

Zauważmy przytem, że jeżeli przyjmiemy:

$$U_1 = u_1, \quad V_1 = v_1, \quad W_1 = w_1, \quad Z_1 = z_1,$$

$$U_2 = u_2, \quad V_2 = v_2, \quad W_2 = w_2, \quad Z_2 = z_2,$$

to z jednej strony wyznacznik Ω będzie równy zeru, z drugiej zaś minory drugiego stopnia (φ, ψ) zależne od wielkich liter będą równe minorom drugiego stopnia (φ, ψ) zależnym od małych liter. Stąd wynika, że wyznaczniki drugiego stopnia macierzy:

$$\left|\begin{array}{cccc} u_1, & v_1, & w_1, & z_1 \\ u_2, & v_2, & w_2, & z_2 \end{array}\right|$$

spełniają tożsamość:

$$(u, v)(w, z) + (u, w)(z, v) + (u, z)(v, w) = 0.$$

Zaznaczamy tutaj, że o tożsamości, łączącej wyznaczniki drugiego stopnia macierzy o dwóch wierszach i czterech kolumnach, była już mowa w § 43, wzory (68) i (69). Jeżeli w wyznaczniku T przestawimy wiersze drugi i trzeci, to na podstawie wzorów (15) i (16) będziemy mogli dla tego wyznacznika otrzymać wyrażenie:

$$(17)\quad \begin{aligned} T = -[&(g_1 h_2' - g_2' h_1')(r_1'' s_2'' - r_2'' s_1'') + \\ &+ (g_1' g_2'' - g_2' g_1'')(s_1'' s_2' - s_2'' s_1') + \\ &+ (g_1' h_2'' - g_2' h_1'')(s_1' r_2'' - s_2' r_1'') + \\ &+ (g_1'' h_2'' - g_2'' h_1'')(r_1' s_2' - r_2' s_1') + \\ &+ (h_1'' h_2' - h_2'' h_1')(r_1' r_2'' - r_2' r_1'') + \\ &+ (h_1' g_2'' - h_2' g_1'')(r_1' s_2'' - r_2' s_1'')]. \end{aligned}$$

Podobnież, przestawiając w wyznaczniku W wiersze drugi i trzeci oraz stosując poprzednie wzory, otrzymamy dla tego wyznacznika wyrażenie:

$$(18)\quad W = -[(g\overset{*}{\chi} - h\overset{*}{\gamma})(\rho\overset{*}{s} - \sigma\overset{*}{r}) + (g\overset{*}{g} - \gamma\overset{*}{\gamma})(\sigma\overset{*}{\sigma} - s\overset{*}{s}) + (g\overset{*}{h} - \chi\overset{*}{\gamma})(s\overset{*}{r} - \rho\overset{*}{\sigma}) + (\gamma\overset{*}{h} - \chi\overset{*}{g})(r\overset{*}{\sigma} - s\overset{*}{\rho}) + (\chi\overset{*}{\chi} - h\overset{*}{h})(r\overset{*}{r} - \rho\overset{*}{\rho}) + (h\overset{*}{g} - \gamma\overset{*}{\chi})(r\overset{*}{s} - \sigma\overset{*}{\rho})].$$

Wykonamy mnożenie pewnych wyznaczników. Niech będzie wyznacznik:

$$(19)\quad \begin{vmatrix} m, & 0, & n, & 0 \\ 0, & m, & 0, & n \\ m, & 0, & -n, & 0 \\ 0, & m, & 0, & -n \end{vmatrix}.$$

Jeżeli wyznacznik ten rozwiniemy, stosując wzór (16), to dojdziemy do wyniku, że równa się on liczbie $4m^2n^2$. Jeżelibyśmy w szczególności przyjęli, że $m = 1$, $n = -i$ to wyznacznik byłby równy -4; jeżelibyśmy zaś przyjęli, że $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{i}{2}$, to wyznacznik byłby równy $-\frac{1}{4}$. Wykonywając mnożenie wyznaczników:

$$\begin{vmatrix} g_1', & h_1', & g_1'', & h_1'' \\ r_1', & s_1', & r_1'', & s_1'' \\ g_2', & h_2', & g_2'', & h_2'' \\ r_2', & s_2', & r_2'', & s_2'' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1, & 0, & -i, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & -i \\ 1, & 0, & i, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & i \end{vmatrix}$$

wierszami, dochodzimy do wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} g_1' - i g_1'', & h_1' - i h_1'', & g_1' + i g_1'', & h_1' + i h_1'' \\ r_1' - i r_1'', & s_1' - i s_1'', & r_1' + i r_1'', & s_1' + i s_1'' \\ g_2' - i g_2'', & h_2' - i h_2'', & g_2' + i g_2'', & h_2' + i h_2'' \\ r_2' - i r_2'', & s_2' - i s_2'', & r_2' + i r_2'', & s_2' + i s_2'' \end{vmatrix},$$

a mnożąc ten wyznacznik przez wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{2}, & 0 \\ 0, & \frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2}, & 0, & -\frac{i}{2}, & 0 \\ 0, & \frac{i}{2}, & 0, & -\frac{i}{2} \end{vmatrix}$$

kolumnami, otrzymujemy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} g, & h, & \gamma, & \chi \\ r, & s, & \rho, & \sigma \\ \overset{*}{\gamma}, & \overset{*}{\chi}, & \overset{*}{g}, & \overset{*}{h} \\ \overset{*}{\rho}, & \overset{*}{\sigma}, & \overset{*}{r}, & \overset{*}{s} \end{vmatrix}.$$

Ponieważ zaś z zastosowanych w tym rachunku wyznaczników typu (19) jeden jest odwrotnością drugiego, przeto dochodzimy do rezultatu:

(20) $$W = T.$$

§ 66. Pewne szczególne kategorje linjowych rzeczywistych przekształceń par punktów rzeczywistych.

Dwie z czterech zmiennych $x, y, \overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ nazywać będziemy parą zmiennych różnoimiennych, jeżeli w oznaczeniach zmiennych pary figurują dwie różne z liter x, y. Można z rzeczonych zmiennych utworzyć cztery pary zmiennych różnoimiennych; są to pary następujące:

(21) $$x, y;\quad \overset{*}{x}, \overset{*}{y};\quad x, \overset{*}{y};\quad \overset{*}{x}, y.$$

Podobnież parą zmiennych różnoimiennych z układu zmiennych $X, Y, \overset{*}{X}, \overset{*}{Y}$ nazywać będziemy każdą parę tych zmiennych posiadającą własność, że w oznaczeniach zmiennych pary zachodzą dwie różne z liter X, Y. Tak samo jak poprzednio otrzymamy cztery pary zmiennych różnoimiennych; są to mianowicie pary następujące:

$$(22) \qquad X, Y; \quad \overset{*}{X}, \overset{*}{Y}; \quad X, \overset{*}{Y}; \quad \overset{*}{X}, Y.$$

Zajmiemy się zadaniem następującem. Wyznaczyć wszystkie takie przypadki przekształcenia (1), w których dwa z równań odpowiadającego mu przekształcenia (11), określają przekształcenie jednej z par zmiennych (21) na jedną z par zmiennych (22).

Rozwiązanie tego zadania możemy ująć w postaci wniosków następujących.

Jeżeli zachodzi jeden z faktów: 1) układ równań (11) zawiera przekształcenie pary zmiennych x, y na parę zmiennych X, Y; 2) układ równań (11) zawiera przekształcenie pary zmiennych $\overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ na parę zmiennych $\overset{*}{X}, \overset{*}{Y}$; — to zachodzi i drugi z nich. Warunki tych faktów można napisać albo w postaci:

$$1) \quad \gamma = 0, \quad \chi = 0, \quad \rho = 0, \quad \sigma = 0,$$

albo w postaci:

$$2) \quad \overset{*}{\gamma} = 0, \quad \overset{*}{\chi} = 0, \quad \overset{*}{\rho} = 0, \quad \overset{*}{\sigma} = 0.$$

Na podstawie wzorów (12) można je wypowiedzieć także w postaci równości:

$$g_1'' = -g_2', \quad h_1'' = -h_2', \quad r_1'' = -r_2', \quad s_1'' = -s_2',$$

$$g_2'' = g_1', \quad h_2'' = h_1', \quad r_2'' = r_1', \quad s_2'' = s_1',$$

z których wynika, że przekształcenie (1) mieć będzie wtedy postać:

$$X' = p_1 + g_1' x' + h_1' y' - g_2' x'' - h_2' y'',$$

$$Y' = q_1 + r_1' x' + s_1' y' - r_2' x'' - s_2' y'',$$

$$X'' = p_2 + g_2' x' + h_2' y' + g_1' x'' + h_1' y'',$$

$$Y'' = q_2 + r_2' x' + s_2' y' + r_1' x'' + s_1' y''.$$

Te przekształcenia zmiennych x', y', x'', y'' na zmienne X', Y', X'', Y'' nazwiemy przekształceniami kategorji A.

Jeżeli zachodzi jeden z faktów: 1) układ równań (11) zawiera przekształcenie pary zmiennych $\overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ na parę zmiennych X, Y; 2) układ równań (11) zawiera przekształcenie pary zmiennych x, y na parę zmiennych $\overset{*}{X}, \overset{*}{Y}$; — to zachodzi i drugi z nich. Fakty te mają miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są równości:

$$1)\quad g = 0,\quad h = 0,\quad r = 0,\quad s = 0,$$

lub co na jedno wychodzi równości:

$$2)\quad \overset{*}{g} = 0,\quad \overset{*}{h} = 0,\quad \overset{*}{r} = 0,\quad \overset{*}{s} = 0,$$

a każdy z tych układów równoważny jest z układem równości:

$$g_1'' = g_2',\quad h_1'' = h_2',\quad r_1'' = r_2',\quad s_1'' = s_2',$$

$$g_2'' = -g_1',\quad h_2'' = -h_1',\quad r_2'' = -r_1',\quad s_2'' = -s_1'.$$

Stąd wynika, że wtedy przekształcenia (1) mają postać:

$$X' = p_1 + g_1' x' + h_1' y' + g_2' x'' + h_2' y'',$$

$$Y' = q_1 + r_1' x' + s_1' y' + r_2' x'' + s_2' y'',$$

$$X'' = p_2 + g_2' x' + h_2' y' - g_1' x'' - h_1' y'',$$

$$Y'' = q_2 + r_2' x' + s_2' y' - r_1' x'' - s_1' y''.$$

Te przekształcenia zmiennych x', y', x'', y'' na zmienne X', Y', X'', Y'' nazwiemy przekształceniami kategorji $\overset{*}{A}$.

Jeżeli następnie zachodzi jeden z faktów: 1) układ równań (11) zawiera przekształcenie pary zmiennych $x, \overset{*}{y}$ na parę zmiennych $X, \overset{*}{Y}$; 2) układ równań (11) zawiera przekształcenie pary zmiennych $\overset{*}{x}, y$ na parę zmiennych $\overset{*}{X}, Y$; — to zachodzi i drugi z nich. Fakty te zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są równości:

$$1)\quad h = 0,\quad \gamma = 0,\quad \overset{*}{\sigma} = 0,\quad \overset{*}{r} = 0,$$

które są równoważne z równościami:

$$2)\quad \overset{*}{h}=0,\quad \overset{*}{\gamma}=0,\quad \sigma=0,\quad r=0.$$

Warunki te są równoważne z równościami:

$$g_1''=-g_2',\quad h_1''=h_2',\quad r_1''=r_2',\quad s_1''=-s_2',$$

$$g_2''=g_1',\quad h_2''=-h_1',\quad r_2''=-r_1',\quad s_2''=s_1',$$

a z równości tych wynika, że wtedy przekształcenie (1) określa się równaniami:

$$X'=p_1+g_1'x'+h_1'y'-g_2'x''+h_2'y'',$$

$$Y'=q_1+r_1'x'+s_1'y'+r_2'x''-s_2'y'',$$

$$X''=p_2+g_2'x'+h_2'y'+g_1'x''-h_1'y'',$$

$$Y''=q_2+r_2'x'+s_2'y'-r_1'x''+s_1'y''.$$

Przekształcenie zmiennych x', y', x'', y'' na zmienne X', Y', X'', Y'' określone temi równaniami nazwiemy przekształceniem kategorji B.

Jeżeli zachodzi jeden z faktów: 1) układ równań (11) zawiera przekształcenie pary zmiennych x, y na parę zmiennych $\overset{*}{X}, \overset{*}{Y}$; 2) układ równań (11) zawiera przekształcenie pary zmiennych $\overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ na parę zmiennych X, Y; — to zachodzi i drugi z tych faktów. Warunki tych faktów można wypowiedzieć albo równościami:

$$1)\quad g=0,\quad \chi=0,\quad \overset{*}{\rho}=0,\quad \overset{*}{s}=0,$$

albo też równościami:

$$2)\quad \overset{*}{g}=0,\quad \overset{*}{\chi}=0,\quad \rho=0,\quad s=0.$$

Warunki te można także wypowiedzieć zapomocą równości:

$$g_1''=g_2',\quad h_1''=-h_2',\quad r_1''=-r_2',\quad s_1''=s_2',$$

$$g_2''=-g_1',\quad h_2''=h_1',\quad r_2''=r_1',\quad s_2''=-s_1'.$$

Stąd wynika, że przekształcenie (1) można w tym przypadku przedstawić równaniami:

$$X' = p_1 + g_1' x' + h_1' y' + g_2' x'' - h_2' y'',$$

$$Y' = q_1 + r_1' x' + s_1' y' - r_2' x'' + s_2' y'',$$

$$X'' = p_2 + g_2' x' + h_2' y' - g_1' x'' + h_1' y'',$$

$$Y'' = q_2 + r_2' x' + s_2' y' + r_1' x'' - s_1' y''.$$

Przekształcenie zmiennych x', y', x'', y'' na zmienne X', Y', X'', Y'' określone temi równaniami, nazwiemy przekształceniem kategorji $\overset{*}{B}$.

Jeżeli zachodzi jeden z faktów: 1) układ równań (11) zawiera przekształcenie pary zmiennych x, y na parę zmiennych $X, \overset{*}{Y}$; 2) układ równań (11) zawiera przekształcenie pary zmiennych $\overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ na parę zmiennych $\overset{*}{X}, Y$; — to zachodzi i drugi z tych faktów. Fakty te mają miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

$$1)\quad \gamma = 0, \quad \chi = 0, \quad \overset{*}{r} = 0, \quad \overset{*}{s} = 0,$$

które są równoważne z warunkami:

$$2)\quad \overset{*}{\gamma} = 0, \quad \overset{*}{\chi} = 0, \quad r = 0, \quad s = 0.$$

Warunki te można także wyrazić równościami:

$$g_1'' = -g_2', \quad h_1'' = -h_2', \quad r_1'' = r_2', \quad s_1'' = s_2',$$

$$g_2'' = g_1', \quad h_2'' = h_1', \quad r_2'' = -r_1', \quad s_2'' = -s_1'.$$

To znaczy, że układ równań (1) w rozważanym przypadku jest następujący:

$$X' = p_1 + g_1' x' + h_1' y' - g_2' x'' - h_2' y'',$$

$$Y' = q_1 + r_1' x' + s_1' y' + r_2' x'' + s_2' y'',$$

$$X'' = p_2 + g_2' x' + h_2' y' + g_1' x'' + h_1' y'',$$

$$Y'' = q_2 + r_2' x' + s_2' y' - r_1' x'' - s_1' y''.$$

Przekształcenie zmiennych x', y', x'', y'' na zmienne X', Y', X'', Y'' określone temi równaniami, nazwiemy przekształceniem kategorji C.

Jeżeli zachodzi jeden z faktów: 1) układ równań (11) zawiera przekształcenie pary zmiennych $\overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ na parę zmiennych X, Y; 2) układ równań (11) zawiera przekształcenie pary zmiennych x, y na parę zmiennych $\overset{*}{X}, \overset{*}{Y}$; — to zachodzi i drugi z tych faktów. Warunkami tych faktów są równości:

$$1)\quad g = 0,\quad h = 0,\quad \overset{*}{\rho} = 0,\quad \overset{*}{\sigma} = 0,$$

które są równoważne z równościami:

$$2)\quad \overset{*}{g} = 0,\quad \overset{*}{h} = 0,\quad \rho = 0,\quad \sigma = 0.$$

Te równości są spełnione przy spełnieniu warunków:

$$g_1'' = g_2',\quad h_1'' = h_2',\quad r_1'' = -r_2',\quad s_1'' = -s_2',$$

$$g_2'' = -g_1',\quad h_2'' = -h_1',\quad r_2'' = r_1',\quad s_2'' = s_1',$$

a stąd wynika, że odnośne przekształcenie (1) określa się równaniami:

$$X' = p_1 + g_1' x' + h_1' y' + g_2' x'' + h_2' y'',$$

$$Y' = q_1 + r_1' x' + s_1' y' - r_2' x'' - s_2' y'',$$

$$X'' = p_2 + g_2' x' + h_2' y' - g_1' x'' - h_1' y'',$$

$$Y'' = q_2 + r_1' x' + s_2' y' + r_1' x'' + s_1' y''.$$

To przekształcenie zmiennych x', y', x'', y'' na zmienne X', Y', X'', Y'' nazwiemy przekształceniem kategorji $\overset{*}{C}$.

Jeżeli zachodzi jeden z faktów: 1) układ równań (11) zawiera przekształcenie pary zmiennych $x, \overset{*}{y}$ na parę zmiennych X, Y; 2) układ (11) zawiera przekształcenie pary zmiennych $\overset{*}{x}, y$ na parę zmiennych $\overset{*}{X}, \overset{*}{Y}$; — to zachodzi i drugi z tych faktów. Warunki tych faktów można wypowiedzieć albo zapomocą równości:

$$1)\quad h = 0,\quad \gamma = 0,\quad s = 0,\quad \rho = 0,$$

albo zapomocą równości:

$$2)\quad \overset{*}{h} = 0,\quad \overset{*}{\gamma} = 0,\quad \overset{*}{s} = 0,\quad \overset{*}{\rho} = 0.$$

Równości te są spełnione, gdy są spełnione równości następujące:

$$g_1'' = -g_2', \quad h_1'' = h_2', \quad r_1'' = -r_2', \quad s_1'' = s_2',$$

$$g_2'' = g_1', \quad h_2'' = -h_1', \quad r_2'' = r_1', \quad s_2'' = -s_1'.$$

Stąd wynika, że wtedy mamy następujący układ równań (1):

$$X' = p_1 + g_1' x' + h_1' y' - g_2' x'' + h_2' y'',$$

$$Y' = q_1 + r_1' x' + s_1' y' - r_2' x'' + s_2' y'',$$

$$X'' = p_2 + g_2' x' + h_2' y' + g_1' x'' - h_1' y'',$$

$$Y'' = q_2 + r_2' x' + s_2' y' + r_1' x'' - s_1' y''.$$

Przekształcenie zmiennych x', y', x'', y'' na zmienne X', Y', X'', Y'', określone tym układem równań, nazwiemy przekształceniem kategorji D.

Jeżeli wreszcie zachodzi jeden z faktów: 1) układ równań (11) zawiera przekształcenie pary zmiennych $\overset{*}{x}, y$ na parę zmiennych X, Y; 2) układ równań (11) zawiera przekształcenie pary zmiennych $\overset{*}{x}, y$ na parę zmiennych $\overset{*}{X}, \overset{*}{Y}$;—to zachodzi i drugi z nich. Fakty te zachodzą przy spełnieniu warunków:

$$1) \quad g = 0, \quad \chi = 0, \quad r = 0, \quad \sigma = 0,$$

równoważnych z warunkami:

$$2) \quad \overset{*}{g} = 0, \quad \overset{*}{\chi} - 0, \quad \overset{*}{r} = 0, \quad \overset{*}{\sigma} = 0.$$

Warunki te spełnione są przy zachodzeniu równości:

$$g_1'' = g_2', \quad h_1'' = -h_2', \quad r_1'' = r_2', \quad s_1'' = -s_2',$$

$$g_2'' = -g_1', \quad h_2'' = h_1', \quad r_2'' = -r_1', \quad s_2'' = s_1'.$$

Stąd wynika, że w przypadku uważanym mamy następujący układ równań (1):

$$X' = p_1 + g_1' x' + h_1' y' + g_2' x'' - h_2' y'',$$

$$Y' = q_1 + r_1' x' + s_1' y' + r_2' x'' - s_2' y'',$$

$$X'' = p_2 + g_2' x' + h_2' y' - g_1' x'' + h_1' y'',$$

$$Y'' = q_2 + r_2' x' + s_2' y' - r_1' x'' + s_1' y''.$$

Przekształcenie zmiennych x', y', x'', y'', na zmienne X', Y', X'', Y'', określone tym układem nazwiemy **przekształceniem kategorji** $\overset{*}{D}$.

Zajmiemy się tu jeszcze wyznacznikami T przekształceń otrzymanych tutaj kategoryj. W tym celu zauważmy, że wyznacznik T przekształcenia kategorji A jest:

$$(23) \qquad \begin{vmatrix} g_1', & h_1', & -g_2', & -h_2' \\ r_1', & s_1', & -r_2', & -s_2' \\ g_2', & h_2', & g_1', & h_1' \\ r_2', & s_2', & r_1', & s_1' \end{vmatrix}$$

i że na podstawie wzoru (18) można dla odpowiedniego wyznacznika W otrzymać wyrażenie:

$$(24) \qquad (g\,s - h\,r)\,(\overset{*}{g}\,\overset{*}{s} - \overset{*}{h}\,\overset{*}{r}).$$

Ponieważ zaś przy spełnieniu warunków przekształcenia kategorji A zachodzą na podstawie wzorów (12) równości:

$$g = g_1' + i\,g_2', \quad h = h_1' + i\,h_2',$$
$$r = r_1' + i\,r_2', \quad s = s_1' + i\,s_2',$$

przeto mamy równość:

$$g\,s - h\,r = g_1' s_1' - h_1' r_1' - (g_2' s_2' - h_2' r_2') +$$
$$+ i\,[g_2' s_1' - h_2' r_1' + g_1' s_2' - h_1' r_2'].$$

Jeżeli zważymy, że wyznacznik $\overset{*}{g}\,\overset{*}{s} - \overset{*}{h}\,\overset{*}{r}$ jest liczbą sprzężoną z liczbą $g\,s - h\,r$ i jeżeli uwzględnimy wzór (20) i wyrażenie (24), to dojdziemy do wyniku, że wyznacznik T przekształcenia kategorji A równa się sumie kwadratów:

$$(25) \qquad [g_1' s_1' - h_1' r_1' - (g_2' s_2' - h_2' r_2')]^2 +$$
$$+ [g_1' s_2' - h_1' r_2' + g_2' s_1' - h_2' r_1']^2.$$

Wyznacznik T przekształcenia kategorji $\overset{*}{A}$ jest:

$$\begin{vmatrix} g_1', & h_1', & g_2', & h_2' \\ r_1', & s_1', & r_2', & s_2' \\ g_2', & h_2', & -g_1', & -h_1' \\ r_2', & s_2', & -r_1', & -s_1' \end{vmatrix},$$

a stąd wynika, że wyraża się on także wzorem (25), bo mnożąc przez -1 wszystkie elementy trzeciej i czwartej kolumny tego wyznacznika, otrzymujemy poprzedni wyznacznik.

Wyznacznik T przekształcenia kategorji B jest:

$$\begin{vmatrix} g_1', & h_1', & -g_2', & h_2' \\ r_1', & s_1', & r_2', & -s_2' \\ g_2', & h_2', & g_1', & -h_1' \\ r_2', & s_2', & -r_1', & s_1' \end{vmatrix}.$$

Jeżeli pomnożymy wszystkie elementy trzeciej kolumny tego wyznacznika przez -1, a następnie w otrzymanym tą drogą wyznaczniku wszystkie elementy trzeciego wiersza przez -1, to otrzymamy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} g_1', & h_1', & g_2', & h_2' \\ r_1', & s_1', & -r_2', & -s_2' \\ -g_2', & -h_2', & g_1', & h_1' \\ r_2', & s_2', & r_1', & s_1' \end{vmatrix}, \tag{26}$$

który równa się wyznacznikowi T przekształcenia kategorji B. Ale wyznacznik (26) otrzymuje się z wyznacznika (23), jeżeli w tym ostatnim wielkości g_2', h_2' zastąpimy odpowiednio przez $-g_2', -h_2'$. Stąd wynika, że wyznacznik T przekształcenia kategorji B równa się sumie kwadratów:

$$[g_1' s_1' - h_1' r_1' + g_2' s_2' - h_2' r_2']^2 + \tag{27}$$
$$+ [g_1' s_2' - h_1' r_2' - (g_2' s_1' - h_2' r_1')]^2.$$

Łatwo utworzyć wyznacznik T przekształcenia kategorji $\overset{*}{B}$ i przekonać się, że otrzymuje się on z wyznacznika T przekształcenia kategorji B, drogą pomnożenia wszystkich elementów kolumn trzeciej i czwartej tego wyznacznika przez -1. Stąd wynika, że wyznacznik T przekształcenia kategorji $\overset{*}{B}$ równa się także sumie kwadratów (27).

Wyznacznik T przekształcenia kategorji C jest:

$$(28) \qquad \begin{vmatrix} g_1', & h_1', & -g_2', & -h_2' \\ r_1', & s_1', & r_2', & s_2' \\ g_2', & h_2', & g_1', & h_1' \\ r_2', & s_2', & -r_1', & -s_1' \end{vmatrix}.$$

Jeżeli wszystkie elementy ostatniego wiersza tego wyznacznika pomnożymy przez -1 to otrzymamy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} g_1', & h_1', & -g_2', & -h_2' \\ r_1', & s_1', & r_2', & s_2' \\ g_2', & h_2', & g_1', & h_1' \\ -r_2', & -s_2', & r_1', & s_1' \end{vmatrix},$$

który otrzyma się z wyznacznika T przekształcenia kategorji A, gdy w tym ostatnim wyznaczniku zastąpimy wielkości r_2', s_2' odpowiednio przez wielkości $-r_2'$, $-s_2'$. Stąd wnosimy na podstawie wzoru (25), że wyznacznik T przekształcenia kategorji C równa się wyrażeniu:

$$(29) \qquad -[g_1' s_1' - h_1' r_1' + g_2' s_2' - h_2' r_2']^2 - [g_1' s_2' - h_1' r_2' - (g_2' s_1' - h_2' r_1')]^2.$$

Odnośnie do wyznacznika T przekształcenia kategorji $\overset{*}{C}$ łatwo zauważyć, że otrzymuje się on z wyznacznika (28), drogą pomnożenia w tym ostatnim wszystkich elementów kolumn trzeciej i czwartej przez -1. Stąd wynika, że wyznacznik T przekształcenia kategorji $\overset{*}{C}$ równa się także wyrażeniu (29).

Wyznacznik T przekształcenia kategorji D jest:

$$(30) \qquad \begin{vmatrix} g_1', & h_1', & -g_2', & h_2' \\ r_1', & s_1', & -r_2', & s_2' \\ g_2', & h_2', & g_1', & -h_1' \\ r_2', & s_2', & r_1', & -s_1' \end{vmatrix}.$$

Jeżeli wszystkie elementy ostatniej kolumny tego wyznacznika pomnożymy przez -1, to otrzymamy wyznacznik (23). Stąd wynika, że wyznacznik T przekształcenia kategorji D równa się wyrażeniu:

$$(31) \qquad -[g_1' s_1' - h_1' r_1' - (g_2' s_2' - h_2' r_2')]^2 - [g_1' s_2' - h_1' r_2' + g_2' s_1' - h_2' r_1']^2 .$$

Wyznacznik T przekształcenia kategorji $\overset{*}{D}$ otrzymuje się z wyznacznika (30), jeżeli pomnożymy w nim wszystkie elementy trzeciej i czwartej kolumny przez -1. Stąd wynika, że wyznacznik T przekształcenia kategorji $\overset{*}{D}$ równa się także wyrażeniu (31).

Założenie, że wyznacznik T przekształcenia, należącego do uważanych tutaj ketegoryj nie równa się zeru, pokrywa się z założeniem, że nie obie sumy, znajdujące się w wielkich nawiasach odpowiedniego z wyrażeń (25), (27), (29), (31), równają się jednocześnie zeru.

Zauważamy, że w rozważaniach tego paragrafu wyczerpaliśmy wszystkie możliwe przypadki przekształceń linjowych jednej z par zmiennych (21) na jedną z par zmiennych (22). Fakty analityczne, określające każdą z ośmiu otrzymanych kategoryj, wymienione są wszędzie pod numerami 1) i 2). Gdybyśmy w tych sformułowaniach przestawili wszędzie litery x i X oraz litery y i Y, to otrzymalibyśmy sformułowania, które wyrażałyby także pewne fakty analityczne. Przekształcenia linjowe zmiennych X', Y', X'', Y'' na zmienne x', y', x'', y'', faktom tym odpowiadające, zaliczymy kolejno także do kategoryj A, $\overset{*}{A}$, B, $\overset{*}{B}$, C, $\overset{*}{C}$, D, $\overset{*}{D}$. Ale łatwo dostrzec, że wykonywając rzeczone przestawienie w sformułowaniach 1), 2) kategoryj A, $\overset{*}{A}$, B, $\overset{*}{B}$, otrzymamy fakty analityczne z poprzedniemi równoważne. Stąd wynika, że te przekształcenia linjowe zmiennych X', Y', X'', Y'' na zmienne x', y', x'', y'',

będące przekształceniami odwrotnemi poprzednich przekształceń kategoryj $A, \overset{*}{A}, B, \overset{*}{B}$ należą odpowiednio do tych samych kategoryj $A, \overset{*}{A}, B, \overset{*}{B}$. Podobnież, wykonywając rzeczone przestawienie w sformułowaniach 1), 2) kategoryj $C, \overset{*}{C}, D, \overset{*}{D}$, otrzymamy fakty analityczne równoważne faktom wymienionym w sformułowaniach 1), 2) odpowiednio kategoryj $D, \overset{*}{D}, C, \overset{*}{C}$. A zatem te przekształcenia linjowe zmiennych X', Y', X'', Y'' na zmiennne x', y', x'', y'', będące przekształceniami odwrotnemi poprzednich przekształceń kategoryj $C, \overset{*}{C}, D, \overset{*}{D}$ należą odpowiednio do kategoryj $D, \overset{*}{D}, C, \overset{*}{C}$.

W związku z kategorjami przekształceń linjowych, które rozważaliśmy w niniejszym paragrafie zwrócimy uwagę na pewne własności linij prostych zespolonych oraz badanych w § 60 tworów β. Jeżeli zarówno zmienne pierwotne x, y jak i zmienne przekształcone X, Y interpretować będziemy jako prostolinjowe spółrzędne punktów zespolonych płaszczyzny bądź w tym samym rzeczywistym układzie spółrzędnych prostolinjowych, bądź też w dwóch różnych rzeczywistych układach spółrzędnych prostolinjowych, to zapomocą związków linjowych wiadomych postaci będziemy mogli zarówno w zmiennych pierwotnych jak i w zmiennych przekształconych charakteryzować linje proste zespolone, oraz twory β, a także określać jedne i drugie związkami pomiędzy rzeczywistemi zmiennemi x', y', x'', y'' względnie rzeczywistemi zmiennemi X', Y' X'', Y'' i stosować do nich odpowiednie interpretacje w odnośnych płaszczyznach R i A. Jeżeli nazwy „linja prosta zespolona" i „twór β" stosować będziemy do odpowiednich związków pomiędzy zmiennemi rzeczywistemi, to będziemy mogli wypowiedzieć następujące cztery twierdzenia, które wynikają bezpośrednio z rozważań i rachunków niniejszego paragrafu. 1) Każda zespolona linja prosta przechodzi przez przekształcenie bądź kategorji A, bądź też kategorji $\overset{*}{A}$ w zespoloną linję prostą. 2) Każdy twór β przechodzi przez przekształcenie linjowe bądź kategorji B, bądź też kategorji $\overset{*}{B}$ w twór β. 3) Każda zespolona linja prosta układu x, y przechodzi przez przekształcenie linjowe bądź kategorji C, bądź też kategorji $\overset{*}{C}$ w twór β układu X, Y, a każdy twór β układu X, Y przechodzi przez przekształcenie linjowe bądź kategorji D, bądź też kategorji $\overset{*}{D}$ w zespoloną linję prostą układu x, y. 4) Każdy twór β układu x, y przechodzi przez przekształcenie bądź kate-

gorji D, bądź kategorji $\overset{*}{D}$ w zespoloną linję prostą układu X, Y a każda zespolona linja prosta układu X, Y przechodzi przez przekształcenie bądź kategorji C, bądź też kategorji $\overset{*}{C}$ w twór β układu x, y.

Zwrócimy się tu jeszcze do rozważenia pewnych przekształceń, będących szczególnemi przypadkami przekształceń kategoryj: $A, \overset{*}{A}, B, \overset{*}{B}, C, \overset{*}{C}, D, \overset{*}{D}$, o których tutaj była mowa. Postaramy się mianowicie z pośród tych przekształceń wyodrębnić wszystkie takie, które posiadają własność, że każda z wielkości $x, \overset{*}{x}$ połączona jest równaniem z jedną tylko z wielkości $X, \overset{*}{X}$, a każda z wielkości $y, \overset{*}{y}$ połączona jest równaniem z jedną tylko z wielkości $Y, \overset{*}{Y}$.

Łatwo dostrzec, że kategorje A i B prowadzą obie do przekształceń tego samego typu, posiadających żądaną własność. Przekształcenia te można w zmiennych zespolonych określić równaniami:

$$X = p + g\,x, \quad Y = q + s\,y,$$

$$\overset{*}{X} = \overset{*}{p} + \overset{*}{g}\,\overset{*}{x}, \quad \overset{*}{Y} = \overset{*}{q} + \overset{*}{s}\,\overset{*}{y},$$

a w zmiennych rzeczywistych równaniami:

$$X' = p_1 + g_1'\,x' - g_2'\,x'', \quad Y' = q_1 + s_1'\,y' - s_2'\,y'',$$

$$X'' = p_2 + g_2'\,x' + g_1'\,x'', \quad Y'' = q_2 + s_2'\,y' + s_1'\,y''.$$

Przekształcenia te nazwiemy dla krótkości przekształceniami typu I.

Podobnież z przekształceń obu kategoryj $\overset{*}{A}$ i $\overset{*}{B}$ otrzymamy przekształcenia tego samego typu, mające własność, o którą chodzi. W zmiennych zespolonych przekształcenia te określają się równaniami:

$$X = p + \gamma\,\overset{*}{x}, \quad Y = q + \sigma\,\overset{*}{y},$$

$$\overset{*}{X} = \overset{*}{p} + \overset{*}{\gamma}\,x, \quad \overset{*}{Y} = \overset{*}{q} + \overset{*}{\sigma}\,y,$$

a w zmiennych rzeczywistych równaniami:

$$X' = p_1 + g_1' x' + g_2' x'', \quad Y' = q_1 + s_1' y' + s_2' y'',$$

$$X'' = p_2 + g_2' x' - g_1' x'', \quad Y'' = q_2 + s_2' y' - s_1' y''.$$

Przekształcenia te nazwiemy przekształceniami typu II.

Także z przekształceń obu kategoryj C i D dojdziemy do przekształceń tego samego typu, mających rzeczoną własność. Otrzymujemy mianowicie w zmiennych zespolonych równania:

$$X = p + g x, \quad Y = q + \sigma \overset{*}{y},$$

$$\overset{*}{X} = \overset{*}{p} + \overset{*}{g}\,\overset{*}{x}, \quad \overset{*}{Y} = \overset{*}{q} + \overset{*}{\sigma}\, y,$$

a w zmiennych rzeczywistych równania:

$$X' = p_1 + g_1' x' - g_2' x'', \quad Y' = q_1 + s_1' y' + s_2' y'',$$

$$X'' = p_2 + g_2' x' + g_1' x'', \quad Y'' = q_2 + s_2' y' - s_1' y''.$$

Przyjmiemy dla tych przekształceń nazwę przekształceń typu III.

Wreszcie przekształcenia obu kategoryj $\overset{*}{C}$ i $\overset{*}{D}$ prowadzą także do tego samego typu przekształceń, posiadających żądaną własność. W zmiennych zespolonych dochodzimy mianowicie do równań:

$$X = p + \gamma \overset{*}{x}, \quad Y = q + s y,$$

$$\overset{*}{X} = \overset{*}{p} + \overset{*}{\gamma}\, x, \quad \overset{*}{Y} = \overset{*}{q} + \overset{*}{s}\,\overset{*}{y},$$

a w zmiennych rzeczywistych do równań:

$$X' = p_1 + g_1' x' + g_2' x'', \quad Y' = q_1 + s_1' y' - s_2' y'',$$

$$X'' = p_2 + g_2' x' - g_1' x'', \quad Y'' = q_2 + s_2' y' + s_1' y''.$$

Przekształcenia te nazwiemy przekształceniami typu IV.

W §§ 44—46 zajmowaliśmy się wektorami urojonemi, których wzajemne stosunki mogą być przedstawione jako przypadki szczególne przekształceń typów I—IV. Jeżelibyśmy w równaniach tych przekształceń wielkości p, q położyli równemi zeru, to przekształcenia te stałyby się wszystkie przekształceniami jednorodnemi. Gdybyśmy w tych przekształceniach wielkości $x, y, \overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ zastąpili odpowiednio przez wielkości $u, v, \overset{*}{u}, \overset{*}{v}$, interpretując te

ostatnie jako składowe wektorów, a wielkości X, Y, $\overset{*}{X}$, $\overset{*}{Y}$ zastąpili odpowiednio przez wielkości U, V, $\overset{*}{U}$, $\overset{*}{V}$, interpretując te ostatnie także jako składowe wektorów, to otrzymalibyśmy rozmaite przekształcenia jednorodne, którym podlegałyby składowe wektorów. Rozważymy bliżej niektóre z tych przekształceń jednorodnych. Oznaczmy przez c dowolną liczbę zespoloną różną od zera, a przez j jedną z liczb, spełniających równanie $j^4 = 1$ i weźmy pod uwagę system równań:

$$U = c\,u, \quad V = j\,c\,v \tag{32}$$

i system równań:

$$U = c\,\overset{*}{u}, \quad V = j\,c\,\overset{*}{v}. \tag{33}$$

Równania (32) określają przekształcenie, należące do typu I, a równania (33) przekształcenie, należące do typu II. Jeżeli w tych równaniach położymy $j = +1$, a na c przyjmiemy kolejno liczby: $+1, -i, -1, +i$, to równania (32) określą kolejno składowe wektorów pierwszej czwórki ósemki $S^{(1)}$, a równania (33) kolejno składowe wektorów drugiej czwórki ósemki $S^{(1)}$. Jeżeli następnie w równaniach (32) i (33) położymy $j = -1$, a na c przyjmiemy kolejno liczby $+1, -i, -1, +i$, to równania (32) określą kolejno wektory pierwszej czwórki ósemki $S^{(4)}$, a równania (33) kolejno wektory drugiej czwórki ósemki $S^{(4)}$. Gdy w dalszym ciągu przyjmiemy w równaniach (32) i (33) $j = +i$ i położymy w nich kolejno zamiast c liczby $+1, -i, -1, +i$, to równania (32) określą kolejno wektory pierwszej czwórki ósemki $S^{(6)}$, a równania (33) określą kolejno wektory drugiej czwórki ósemki $S^{(7)}$. Gdy wreszcie położymy w równaniach (32) i (33) $j = -i$ i przyjmiemy w nich zamiast c kolejno liczby $+1, -i, -1, +i$, to równania (32) określą kolejno wektory pierwszej czwórki ósemki $S^{(7)}$, a równania (33) określą kolejno wektory drugiej czwórki ósemki $S^{(6)}$.

Weźmy teraz pod uwagę system równań:

$$U = c\,u, \quad V = j\,c\,\overset{*}{v} \tag{34}$$

i system równań:

$$U = c\,\overset{*}{u}, \quad V = j\,c\,v, \tag{35}$$

rozumiejąc w tych równaniach przez c i j liczby o tych samych własnościach, co poprzednio. Równania (34) określają przekształcenia typu III, a równania (35) przekształcenia typu IV. Przyjmu-

jąc w tych równaniach $j = 1$, i kładąc w nich kolejno zamiast c liczby $+1, -i, -1, +i$, otrzymujemy z równań (34) kolejno wektory pierwszej czwórki ósemki $S^{(2)}$, a z równań (35) kolejno wektory drugiej czwórki ósemki $S^{(2)}$. Podobnież, przyjmując w tych równaniach $j = -1$ i kładąc w nich kolejno na c liczby $+1, -i, -1+i$, otrzymujemy z równań (34) kolejno wektory pierwszej czwórki ósemki $S^{(3)}$, a z równań (35) kolejno wektory drugiej czwórki ósemki $S^{(3)}$. Jeżeli następnie położymy w rzeczonych równaniach $j = +i$, to przyjmując w nich zamiast c kolejno liczby $+1, -i, -1, +i$, otrzymamy z równań (34) kolejno wektory pierwszej czwórki ósemki $S^{(5)}$, a z równań (35) kolejno wektory drugiej czwórki ósemki $S^{(8)}$. Jeżeli wreszcie przyjmiemy w tych równaniach $j = -i$, to kładąc w nich zamiast c kolejno $+1, -i, -1, +i$, otrzymamy z równań (34) kolejno wektory pierwszej czwórki ósemki $S^{(8)}$, a z równań (35) kolejno wektory drugiej czwórki ósemki $S^{(5)}$.

Przypuśćmy teraz, że wielkość c w równaniach (32), (33), (34), (35) oznacza zmienny parametr zespolony o module równym jedności. Wtedy rzeczone równania określać będą wektory zmienne i można będzie wypowiedzieć o nich szereg wniosków, które sformułujemy w sposób następujący. Końce boków węgłów wektorów urojonych, określonych równaniami (32), opisują przy $j = +1$ elipsę ósemki $S^{(1)}$, przy $j = -1$ elipsę ósemki $S^{(4)}$, przy $j = +i$ elipsę ósemki $S^{(6)}$, a przy $j = -i$ elipsę ósemki $S^{(7)}$. Końce boków węgłów wektorów urojonych, określonych równaniami (33), opisują przy $j = +1$ elipsę ósemki $S^{(1)}$, przy $j = -1$ elipsę ósemki $S^{(4)}$, przy $j = +i$ elipsę ósemki $S^{(7)}$, a przy $j = -i$ elipsę ósemki $S^{(6)}$. Końce boków węgłów wektorów urojonych, określonych równaniami (34), opisują przy $j = +1$ elipsę ósemki $S^{(2)}$, przy $j = -1$ elipsę ósemki $S^{(3)}$, przy $j = +i$ elipsę ósemki $S^{(5)}$, a przy $j = -i$ elipsę ósemki $S^{(8)}$. Wreszcie końce boków węgłów wektorów urojonych, określonych równaniami (35), opisują przy $j = +1$ elipsę ósemki $S^{(2)}$, przy $j = -1$ elipsę ósemki $S^{(3)}$, przy $j = +i$ elipsę ósemki $S^{(8)}$, a przy $j = -i$ elipsę ósemki $S^{(5)}$.

W tym spisie miejsc geometrycznych końców boków węgłów, każda z ośmiu elips występuje dwa razy. Pola węgłów, należących do jednego i tego samego z 16 wymienionych tutaj przypadków, mają wszystkie tę samą wartość. Pola dwóch węgłów, mających końce boków na tej samej z uważanych tutaj elips, ale należących do dwóch różnych z rzeczonych przypadków mają tę samą wartość bezwzględną, ale znaki wprost przeciwne.

§ 67. Linjowe obrazy właściwych punktów zespolonych.

W § 65 rozważaliśmy przekształcenie par punktów, określone równaniami:

$$(1)\quad \begin{cases} X' = p_1 + g_1' x' + h_1' y' + g_1'' x'' + h_1'' y'', \\ Y' = q_1 + r_1' x' + s_1' y' + r_1'' x'' + s_1'' y'', \\ X'' = p_2 + g_2' x' + h_2' y' + g_2'' x'' + h_2'' y'', \\ Y'' = q_2 + r_2' x' + s_2' y' + r_2'' x'' + s_2'' y'', \end{cases}$$

w których wszystkie litery oznaczają wielkości rzeczywiste, a wyznacznik T, określony wzorem (2), jest różny od zera. Niech będzie na płaszczyźnie P właściwy punkt zespolony o spółrzędnych:

$$x = x' + i\,x'', \quad y = y' + i\,y''.$$

Łącznie z płaszczyzną P rozważaliśmy poprzednio płaszczyzny R i A i nazywaliśmy śladem R punktu zespolonego punkt o spółrzędnych x', y' położony na pierwszej z nich, a śladem A punktu zespolonego punkt o spółrzędnych x'', y'' położony na drugiej z nich. Weźmiemy teraz pod uwagę dwie płaszczyzny, które oznaczymy literami S i B i wybierzemy na nich kierunki powiększania się kątów. Na płaszczyźnie S przyjmiemy osie spółrzędnych prostolinjowych X', Y', z których druga tworzy z pierwszą ten sam kąt, co oś y z osią x na płaszczyźnie P. Na płaszczyźnie B przyjmiemy osie spółrzędnych prostolinjowych X'', Y'', z których druga tworzy z pierwszą ten sam kąt, co oś y z osią x na płaszczyźnie P. Wielkości X', Y' i X'', Y'', określone równaniami (1), możemy interpretować jako spółrzędne pary punktów, z których pierwszy położony jest na płaszczyźnie S, drugi zaś na płaszczyźnie B. Tę parę punktów nazwiemy linjowym obrazem albo obrazem (Q) właściwego punktu zespolonego x, y. Przytem punkt X', Y' płaszczyzny S nazwiemy pierwszym śladem (Q) punktu zespolonego x, y, a punkt X'', Y'' płaszczyzny B nazwiemy drugim śladem (Q) punktu zespolonego x, y. Pierwszy z tych śladów (Q) oznaczać będziemy literą Q', drugi zaś literą Q''. Zauważamy przytem, że w celu porównywania figur na płaszczyznach S i B stosować będziemy

takie nałożenie tych płaszczyzn, przy którem zarówno osie X' i X'' jak osie Y' i Y'' nakrywają się i zespolenie tych płaszczyzn nałożonych nazywać będziemy p ł a s z c z y z n ą SB.

Zapytamy naprzód, jakim warunkom czynić zadość muszą spółrzędne X', Y' śladu Q' i spółrzędne X'', Y'' śladu Q'', żeby punkt zespolony był p u n k t e m r z e c z y w i s t y m. Właściwy punkt zespolony jest punktem rzeczywistym, gdy spełnione są równości:

$$x''=0\,,\quad y''=0\,. \tag{36}$$

Wtedy dla spółrzędnych X', Y', X'', Y'' śladów Q' i Q'' tego punktu zachodzą równości:

$$\left\{\begin{array}{ll} X'=p_1+g_1'\,x'+h_1'\,y', & Y'=q_1+r_1'\,x'+s_1'\,y', \\ X''=p_2+g_2'\,x'+h_2'\,y', & Y''=q_2+r_2'\,x'+s_2'\,y'. \end{array}\right. \tag{37}$$

Udowodnimy t w i e r d z e n i e następujące: warunki konieczne i wystarczające, żeby punkt zespolony, mający ślady (Q) pierwszy i drugi, określone odpowiednio spółrzędnemi X', Y' i X'', Y'', był punktem rzeczywistym, polegają na tem, żeby wszystkie wyznaczniki stopnia trzeciego macierzy:

$$\left|\begin{array}{cccc} X'-p_1, & Y'-q_1, & X''-p_2, & Y''-q_2 \\ g_1', & r_1', & g_2', & r_2' \\ h_1', & s_1', & h_2', & s_2' \end{array}\right| \tag{38}$$

były równe zeru. W celu udowodnienia tego twierdzenia zauważmy naprzód, że wszystkie wyznaczniki stopnia trzeciego macierzy (38) zawsze są zerami, gdy spełnione są równości (36) i (37). Następnie zaś zwróćmy uwagę na to, że wyznaczniki drugiego stopnia macierzy:

$$\left|\begin{array}{cccc} g_1'', & r_1'', & g_2'', & r_2'' \\ h_1'', & s_1'', & h_2'', & s_2'' \end{array}\right| \tag{39}$$

nie są wszystkie jednocześnie zerami i że wyznaczniki drugiego stopnia macierzy:

$$\left|\begin{array}{cccc} g_1', & r_1', & g_2', & r_2' \\ h_1', & s_1', & h_2', & s_2' \end{array}\right| \tag{40}$$

nie są wszystkie jednocześnie zerami. Jedna i druga z tych uwag wynika stąd, że wyznacznik T jest różny od zera. Stąd wnosimy, że jeżeli wszystkie wyznaczniki trzeciego stopnia macierzy (38) są zerami, to ze związków (37) otrzymują się określone wartości na x', y' i że przy tych wartościach wynikają z równań (1) na wielkości x'', y'' wartości (36). W ten sposób twierdzenie jest udowodnione.

Zapytamy w dalszym ciągu, jakie położenia na płaszczyznach S i B mogą mieć ślady Q' i Q'' punktów rzeczywistych. Aby odpowiedzieć na to zapytanie, trzeba odróżnić kilka przypadków. Jeżeli spełnione są warunki:

$$g_1' s_1' - h_1' r_1' \neq 0, \quad g_2' s_2' - h_2' r_2' \neq 0,$$

to można ślad Q' wybrać na płaszczyźnie S dowolnie i wówczas odpowiadać mu będzie określony ślad Q'' na płaszczyźnie B, albo można ślad Q'' wybrać na płaszczyźnie B dowolnie i wówczas odpowiadać mu będzie określony ślad Q' na płaszczyźnie S.

Jeżeli spełnione są warunki:

$$g_1' s_1' - h_1' r_1' \neq 0, \quad g_2' s_2' - h_2' r_2' = 0$$

i przytem nie wszystkie spółczynniki g_2', h_2', r_2', s_2' są zerami, to można ślad Q' wybrać na płaszczyźnie S dowolnie i wówczas odpowiadać mu będzie określony ślad Q'' na płaszczyźnie B. Ale wszystkim możliwym śladom Q' na płaszczyźnie S odpowiadać będą ślady Q'' na płaszczyźnie B, leżące na pewnej określonej prostej tej płaszczyzny. Gdybyśmy naprzód obrali ślad Q'', położony na tej linji prostej, to odpowiadający mu ślad Q' na płaszczyźnie S byłby nieokreślony, bo byłby skrępowany tylko warunkiem, by leżał na pewnej linji prostej tej płaszczyzny.

Analogicznie, przy spełnieniu warunków:

$$g_1' s_1' - h_1' r_1' = 0, \quad g_2' s_2' - h_2' r_2' \neq 0$$

oraz warunku, że nie wszystkie wielkości g_1', s_1', h_1', r_1' są zerami, można ślad Q'' wybrać na płaszczyźnie B dowolnie i otrzymać na płaszczyźnie S określony ślad Q'. Ale wszystkim możliwym śladom Q'' na płaszczyźnie B odpowiadają na płaszczyźnie S ślady Q', leżące wszystkie na pewnej określonej linji prostej tej płaszczyzny. Jeżelibyśmy wybrali ślad Q' na tej linji prostej, to odpowiadający mu ślad Q'' na płaszczyźnie B byłby nieokreślony, musiałby

mianowicie czynić zadość tylko warunkowi, żeby był położony na pewnej linji prostej.

Jeżeli spełnione są warunki:

$$g_1' s_1' - h_1' r_1' = 0, \quad g_2' s_2' - h_2' r_2' = 0$$

i przytem ani wielkości g_1', h_1', r_1', s_1' nie są wszystkie cztery równe zeru, ani wielkości g_2', h_2', r_2', s_2' nie są wszystkie cztery równe zeru, to wszystkie ślady Q' punktów rzeczywistych muszą leżeć na pewnej określonej linji prostej płaszczyzny S, a wszystkie ślady Q'' punktów rzeczywistych muszą leżeć na pewnej określonej linji prostej płaszczyzny B. Każda para punktów, z których jeden leży na jednej z tych linij prostych, a drugi na drugiej z nich, jest parą śladów Q' i Q'' punktu rzeczywistego.

Jeżeli następnie spełnione są warunki:

$$g_1' s_1' - h_1' r_1' \neq 0, \quad g_2' = 0, \quad h_2' = 0, \quad r_2' = 0, \quad s_2' = 0,$$

to ślad Q' może być na płaszczyźnie S wybrany dowolnie, a ślad Q'' jest stałym punktem płaszczyzny B dla wszystkich punktów rzeczywistych i określa się wzorami:

$$X'' = p_2, \quad Y'' = q_2.$$

Jeżeli wreszcie spełnione są warunki:

$$g_1' = 0, \quad h_1' = 0, \quad r_1' = 0, \quad s_1' = 0, \quad g_2' s_2' - h_2' r_2' \neq 0,$$

to ślad Q'' może być na płaszczyźnie B wybrany dowolnie, a ślad Q' jest stałym punktem płaszczyzny S dla wszystkich punktów rzeczywistych i określa się wzorami:

$$X' = p_1, \quad Y' = q_1.$$

W rozważaniu tem wyczerpaliśmy widocznie wszystkie możliwości, przy których nie wszystkie wyznaczniki drugiego stopnia macierzy (40) są jednocześnie równe zeru.

Zajmiemy się teraz śladami (Q) punktów zespolonych ze sobą sprzężonych:

$$x = x' + i x'', \quad y = y' + i y'',$$

$$\overset{*}{x} = x' - i x'', \quad \overset{*}{y} = y' - i y''.$$

Oznaczmy ślady (Q) pierwszego z tych punktów przez Q_1', Q_1'' a ich spółrzędne odpowiednio przez X_1', Y_1'; X_1'', Y_1''. Podobnież oznaczmy ślady (Q) drugiego z tych punktów przez Q_2', Q_2'' a ich spółrzędne odpowiednio przez X_2', Y_2'; X_2'', Y_2''. Wtedy mamy dla pierwszego z tych punktów równości:

$$X_1' = p_1 + g_1' x' + h_1' y' + g_1'' x'' + h_1'' y'',$$

$$Y_1' = q_1 + r_1' x' + s_1' y' + r_1'' x'' + s_1'' y'',$$

$$X_1'' = p_2 + g_2' x' + h_2' y' + g_2'' x'' + h_2'' y'',$$

$$Y_2'' = q_2 + r_2' x' + s_2' y' + r_2'' x'' + s_2'' y'',$$

a dla drugiego z nich równości:

$$X_2' = p_1 + g_1' x' + h_1' y' - g_1'' x'' - h_1'' y'',$$

$$Y_2' = q_1 + r_1' x' + s_1' y' - r_1'' x'' - s_1'' y'',$$

$$X_2'' = p_2 + g_2' x' + h_2' y' - g_2'' x'' - h_2'' y'',$$

$$Y_2'' = q_2 + r_2' x' + s_2' y' - r_2'' x'' - s_2'' y''.$$

Z jednych i z drugich otrzymują się równości:

$$(41)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}(X_1' + X_2') = p_1 + g_1' x' + h_1' y', \\ \frac{1}{2}(Y_1' + Y_2') = q_1 + r_1' x' + s_1' y', \\ \frac{1}{2}(X_1'' + X_2'') = p_2 + g_2' x' + h_2' y', \\ \frac{1}{2}(Y_1'' + Y_2'') = q_2 + r_2' x' + s_2' y', \end{cases}$$

oraz równości:

$$(42)\quad \begin{cases} X_1' - X_2' = 2(g_1'' x'' + h_1'' y''), \\ Y_1' - Y_2' = 2(r_1'' x'' + s_1'' y''), \\ X_1'' - X_2'' = 2(g_2'' x'' + h_2'' y''), \\ Y_1'' - Y_2'' = 2(r_2'' x'' + s_2'' y''). \end{cases}$$

Z równości (41) wynika, że wszystkie wyznaczniki trzeciego stopnia macierzy:

$$(43)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(X_1'+X_2')-p_1, & \frac{1}{2}(Y_1'+Y_2')-q_1, & \frac{1}{2}(X_1''+X_2'')-p_2, & \frac{1}{2}(Y_1''+Y_2'')-q_2 \\ g_1' & r_1' & g_2' & r_2' \\ h_1' & s_1' & h_2' & s_2' \end{vmatrix}$$

są równe zeru, a z równości (42) wynika, iż wszystkie wyznaczniki trzeciego stopnia macierzy:

$$(44)\qquad \begin{vmatrix} X_1'-X_2', & Y_1'-Y_2', & X_1''-X_2'', & Y_1''-Y_2'' \\ g_1'' & r_1'' & g_2'' & r_2'' \\ h_1'' & s_1'' & h_2'' & s_2'' \end{vmatrix}$$

są równe zeru. Ponieważ nie wszystkie wyznaczniki drugiego stopnia macierzy (40) są zerami i nie wszystkie wyznaczniki drugiego stopnia macierzy (39) są zerami, przeto z równań (41), (42) wynikają wtedy określone wartości na wielkości x', y', x'', y'', gdy wszystkie wyznaczniki trzeciego stopnia obu macierzy (43) i (44) są zerami. Udowodniliśmy przeto twierdzenie następujące. Warunki konieczne i wystarczające, żeby punkty Q_1', Q_2' o spółrzędnych X_1', Y_1'; X_2', Y_2' i punkty Q_1'', Q_2'' o spółrzędnych X_1'', Y_1''; X_2'', Y_2'' były odpowiednio śladami (Q) na płaszczyznach S i B punktów zespolonych ze sobą sprzężonych, polegają na tem, żeby wszystkie wyznaczniki trzeciego stopnia macierzy (43) i (44) były równe zeru.

Zastanowimy się teraz nad geometrycznem znaczeniem rozważania, które przeprowadziliśmy przed chwilą. Naprzód zauważymy, że na podstawie równań (41) i warunku, żeby wszystkie wyznaczniki trzeciego stopnia macierzy (43) były zerami, można wypowiedzieć wniosek następujący. Koniecznym warunkiem, żeby punkty Q_1', Q_2' o spółrzędnych X_1', Y_1'; X_2', Y_2' i punkty Q_1'', Q_2'' o spółrzędnych X_1'', Y_1''; X_2'', Y_2'' były odpowiednio śladami (Q) na płaszczyznach S i B punktów zespolonych ze sobą sprzężonych jest to, żeby punkty o spółrzędnych $\frac{1}{2}(X_1'+X_2')$, $\frac{1}{2}(Y_1'+Y_2')$, $\frac{1}{2}(X_1''+X_2'')$, $\frac{1}{2}(Y_1''+Y_2'')$ były odpowiednio na płaszczyznach

S i B śladami (Q) punktu rzeczywistego. Zauważymy przytem że ślad o spółrzędnych $\frac{1}{2}(X_1' + X_2')$, $\frac{1}{2}(Y_1' + Y_2')$ jest środkiem odcinka, łączącego ślad Q_1' ze śladem Q_2' i że ślad o spółrzędnych $\frac{1}{2}(X_1'' + X_2'')$, $\frac{1}{2}(Y_1'' + Y_2'')$ jest środkiem odcinka, łączącego ślad Q_1'' ze śladem Q_2''.

Zwrócimy się teraz do równań (42) przy spełnieniu warunku, że wszystkie wyznaczniki stopnia trzeciego macierzy (44) są równe zeru. Wielkości:

$$X_1' - X_2', \quad Y_1' - Y_2' \tag{45}$$

są składowemi na osiach X', Y' wektora $\overline{Q_2' Q_1'}$ na płaszczyźnie S a wielkości:

$$X_1'' - X_2'', \quad Y_1'' - Y_2'' \tag{46}$$

są składowemi na osiach X'', Y'' wektora $\overline{Q_2'' Q_1''}$ na płaszczyźnie B. Ponieważ nie wszystkie wyznaczniki drugiego stopnia macierzy (39) są zerami, przeto rzeczone składowe są jednocześnie wszystkie cztery równe zeru wtedy i tylko wtedy, gdy uważane punkty zespolone ze sobą sprzężone są jednym i tym samym punktem rzeczywistym. Wyłączymy tę możliwość z naszego rozważania i odróżnimy w niem szereg przypadków następujących.

Jeżeli spełnione są jednocześnie dwie nierówności:

$$g_1'' s_1'' - h_1'' r_1'' \neq 0, \quad g_2'' s_2'' - h_2'' r_2'' \neq 0,$$

to ani składowe (45) nie są obie jednocześnie zerami, ani składowe (46) nie są obie jednocześnie zerami, t.j. ani ślady Q_1', Q_2' na płaszczyźnie S nie nakrywają się, ani też ślady Q_1'', Q_2'' na płaszczyźnie B nie nakrywają się. Przytem, o ile spełnione są obie rzeczone nierówności, określonym składowym jednego z wektorów $\overline{Q_2' Q_1'}$ i $\overline{Q_2'' Q_1''}$ odpowiadają określone składowe drugiego z nich.

Jeżeli spełnione są warunki:

$$g_1'' s_1'' - h_1'' r_1'' \neq 0, \quad g_2'' s_2'' - h_2'' r_2'' = 0$$

i przytem wielkości g_2'', h_2'', r_2'', s_2'' nie są wszystkie jednocześnie zerami, to ślady Q_1', Q_2' na płaszczyźnie S nie są te same, ślady zaś Q_1'', Q_2'' na płaszczyźnie B mogą albo nie być te same, albo

też być te same. Przy tych warunkach określonym składowym wektora $\overline{Q_2' Q_1'}$ odpowiadają określone składowe wektora $\overline{Q_2'' Q_1''}$ Ale wszelkim wektorom $\overline{Q_2' Q_1'}$ na płaszczyźnie S odpowiadają na płaszczyźnie B bądź wektory o określonym stałym dwukierunku, bądź też wektor o składowych równych zeru. Nawzajem, gdybyśmy wybrali wektor na płaszczyźnie B, czyniący zadość tym warunkom, to składowe odpowiadającego mu wektora na płaszczyźnie S nie byłyby określone, a musiałyby tylko spełniać pewne określone równanie pierwszego stopnia.

Niech teraz będą spełnione warunki:

$$g_1'' s_1'' - h_1'' r_1'' = 0, \quad g_2'' s_2'' - h_2'' r_2'' \neq 0,$$

i załóżmy, że przytem nie wszystkie wielkości g_1'', h_1'', r_1'', s_1'' są jednocześnie równe zeru. Wówczas ślady Q_1'', Q_2'' na płaszczyźnie B nie są te same, a ślady Q_1', Q_2' na płaszczyźnie S mogą albo nie być te same, albo też być te same. Określonym składowym wektora $\overline{Q_2'' Q_1''}$ na płaszczyźnie B odpowiadają określone składowe wektora $\overline{Q_2' Q_1'}$ na płaszczyźnie S. Ale wektory na płaszczyźnie S, odpowiadające wszelkim wektorom na płaszczyźnie B, są albo wektorami o określonym stałym dwukierunku, albo też o obu składowych równych zeru. Obierając nawzajem wektor na płaszczyźnie S, spełniający te warunki, nie otrzymamy z uważanych równań wektora o określonych składowych na płaszczyźnie B, a dojdziemy tylko do określonego równania pierwszego stopnia na składowe tego wektora.

Przypuśćmy teraz, że spełnione są obie równości:

$$g_1'' s_1'' - h_1'' r_1'' = 0, \quad g_2'' s_2'' - h_2'' r_2'' = 0$$

i że przytem ani wszystkie cztery wielkości g_1'', h_1'', r_1'', s_1'' nie są jednocześnie zerami, ani też wszystkie cztery wielkości g_2'', h_2'', r_2'', s_2'' nie są jednocześnie zerami. Przy tych założeniach na płaszczyźnie S będzie wyszczególniony pewien określony dwukierunek, a na płaszczyźnie B będzie także wyszczególniony pewien określony dwukierunek. Wtedy wektor, łączący ślady Q' na płaszczyźnie S dwóch punktów urojonych ze sobą sprzężonych, musi być albo wektorem o rzeczonym wyszczególnionym dwukierunku płaszczyzny S, albo też wektorem o składowych równych zeru. Podobnież wektor, łączący ślady Q'' na płaszczyź-

nie B dwóch punktów urojonych ze sobą sprzężonych, musi być albo wektorem o wyszczególnionym powyżej dwukierunku płaszczyzny B, albo też wektorem o składowych równych zeru. Zauważamy przytem, że przypadek, w którym i wektor na płaszczyźnie S miałby obie składowe równe zeru i wektor na płaszczczyźnie B miałby obie składowe równe zeru jest niemożliwy, bo byłby sprzeczny z założeniem.

Jeżeli następnie spełnione są warunki:

$$g_1'' s_1'' - h_1'' r_1'' \neq 0, \quad g_2'' = 0, \; h_2'' = 0, \; r_2'' = 0, \; s_2'' = 0,$$

to wektor łączący ślady Q' na płaszczyźnie S dwóch punktów urojonych ze sobą sprzężonych może mieć każdą dowolną parę składowych, nie będących jednocześnie zerami. Natomiast ślady Q'' na płaszczyźnie B dwóch punktów urojonych ze sobą sprzężonych nakrywają się.

Jeżeli wreszcie spełnione są warunki:

$$g_1'' = 0, \quad h_1'' = 0, \quad r_1'' = 0, \quad s_1'' = 0, \quad g_2'' s_2'' - h_2'' r_2'' \neq 0,$$

to składowe wektora, który łączy ślady Q'' na płaszczyźnie B punktów urojonych ze sobą sprzężonych, mogą mieć wartości dowolne z wyłączeniem przypadku, w którym byłyby obie zerami. Ślady zaś Q' na płaszczyźnie S dwóch punktów urojonych ze sobą sprzężonych nakrywają się.

§ 68. Linjowe obrazy niewłaściwych punktów zespolonych.

Weźmy pod uwagę na płaszczyźnie P linję prostą zespoloną, przechodzącą przez punkt o spółrzędnych zespolonych:

$$g = g' + i\, g'', \quad h = h' + i\, h''$$

i czyniącą zadość warunkowi, by na niej leżał całkowicie wektor zespolony, którego początek znajduje się w tym punkcie, a składowe mają wartości zespolone:

$$u = u' + i\, u'', \quad v = v' + i\, v'',$$

nie będące obie jednocześnie zerami. Linja prosta, określona zapomocą tych danych, może być przedstawiona uogólnionemi równaniami osiowemi:

$$x = g + u\,t, \quad y = h + v\,t,$$

w których t oznacza dowolny parametr zespolony. Jeżeli moduł tego parametru oznaczymy przez ρ, a jego amplitudę zasadniczą przez σ, to mieć będziemy wzór:

$$t = \rho\, e^{i\sigma} = \rho\,(\cos\sigma + i \sin\sigma),$$

i będziemy mogli spółrzędne x', y' śladów R i spółrzędne x'', y'' śladów A punktów uważanej linji prostej przedstawić wzorami:

$$(47) \quad \begin{cases} x' = g' + (u' \cos\sigma - u'' \sin\sigma)\,\rho, \\ y' = h' + (v' \cos\sigma - v'' \sin\sigma)\,\rho, \\ x'' = g'' + (u' \sin\sigma + u'' \cos\sigma)\,\rho, \\ y'' = h'' + (v' \sin\sigma + v'' \cos\sigma)\,\rho. \end{cases}$$

Te wyrażenia wstawimy zamiast x', y', x'', y'' we wzory (1). Otrzymamy w ten sposób na spółrzędne X', Y' śladów Q' i na spółrzędne X'', Y'' śladów Q'' punktów tej linji prostej wyrażenia, które możemy przedstawić w postaci:

$$(48) \quad \begin{cases} X' = A' + (C' \cos\sigma + D' \sin\sigma)\,\rho, \\ Y' = B' + (E' \cos\sigma + F' \sin\sigma)\,\rho, \\ X'' = A'' + (C'' \cos\sigma + D'' \sin\sigma)\,\rho, \\ Y'' = B'' + (E'' \cos\sigma + F'' \sin\sigma)\,\rho, \end{cases}$$

gdzie zastosowaliśmy oznaczenia:

$$(49) \quad \begin{cases} A' = p_1 + g_1' g' + h_1' h' + g_1'' g'' + h_1'' h'', \\ B' = q_1 + r_1' g' + s_1' h' + r_1'' g'' + s_1'' h'', \\ A'' = p_2 + g_2' g' + h_2' h' + g_2'' g'' + h_2'' h'', \\ B'' = q_2 + r_2' g' + s_2' h' + r_2'' g'' + s_2'' h'' \end{cases}$$

i oznaczenia:

$$
(50)\quad \left\{\begin{aligned}
C' &= g_1' u' + h_1' v' + g_1'' u'' + h_1'' v'',\\
D' &= -g_1' u'' - h_1' v'' + g_1'' u' + h_1'' v',\\
E' &= r_1' u' + s_1' v' + r_1'' u'' + s_1'' v'',\\
F' &= -r_1' u'' - s_1' v'' + r_1'' u' + s_1'' v',\\
C'' &= g_2' u' + h_2' v' + g_2'' u'' + h_2'' v'',\\
D'' &= -g_2' u'' - h_2' v'' + g_2'' u' + h_2'' v',\\
E'' &= r_2' u' + s_2' v' + r_2'' u'' + s_2'' v'',\\
F'' &= -r_2' u'' - s_2' v'' + r_2'' u' + s_2'' v'.
\end{aligned}\right.
$$

Zajmiemy się pewnemi takiemi dążeniami parametru t do nieskończoności, przy których ślady Q' i Q'', określone równaniami (48), dążą do właściwych lub niewłaściwych punktów płaszczyzn S i B. Punkty właściwe lub niewłaściwe, do których zmierzają rzeczone ślady Q' i Q'', nazywać będziemy śladami (Q) niewłaściwego punktu zespolonego, określonego dwukierunkiem $v:u$ i w szczególności granicę punktu Q' nazywać będziemy pierwszym śladem (Q) tego punktu niewłaściwego i oznaczać będziemy literą $\underline{Q}'$, a granicę punktu Q'' nazywać będziemy drugim śladem (Q) tego punktu niewłaściwego i oznaczać będziemy literą $\underline{Q}''$. Nadto uporządkowaną parę punktów $\underline{Q}'$ i $\underline{Q}''$, otrzymujących się przy jednem i tem samem dążeniu parametru t do nieskończoności, nazwiemy obrazem (Q) niewłaściwego punktu zespolonego, określonego dwukierunkiem $v:u$.

W celu ułatwienia rozważań, które tutaj nastąpić mają, zajmiemy się naprzód wyznacznikami drugiego stopnia macierzy:

$$
(51)\quad \begin{vmatrix} C', & E', & C'', & E'' \\ D', & F', & D'', & F'' \end{vmatrix}.
$$

W § 43 widzieliśmy, że wyznaczniki drugiego stopnia macierzy o dwóch wierszach i czterech kolumnach spełniają pewną tożsamość. Stosując tę tożsamość do macierzy (51), mieć będziemy:

$$(C'F' - E'D')(C''F'' - E''D'') +$$
$$+ (C'D'' - D'C'')(F'E'' - E'F'') +$$
$$+ (C'F'' - D'E'')(E'D'' - F'C'') = 0,$$

a jeżeli przyjmiemy oznaczenia:

$$(52) \quad \begin{cases} \Omega_{11} = C'F' - D'E', & \Omega_{12} = C'F'' - D'E'', \\ \Omega_{21} = C''F' - D''E', & \Omega_{22} = C''F'' - D''E'', \\ (C, D) = C'D'' - D'C'', & (E, F) = E'F'' - F'E'', \end{cases}$$

to będziemy mogli tożsamość, odnoszącą się do macierzy (51), napisać w postaci:

$$(53) \qquad \Omega_{11}\Omega_{22} - \Omega_{12}\Omega_{21} = (C, D)(E, F).$$

Wyznaczniki (52) zależą od wielkości u', v', u'', v'' i od spółczynników przekształcenia (1). Stosując mnożenie pewnych macierzy, wyprowadzimy na wyznaczniki (52) wzory, które bezpośredniej określają zależność tych wyznaczników od rzeczonych parametrów. Iloczyn macierzy:

$$\begin{vmatrix} k_1, & l_1, & m_1, & n_1 \\ k_2, & l_2, & m_2, & n_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u', & v', & u'', & v'' \\ -u'', & -v'', & u', & v' \end{vmatrix}$$

można wyrazić albo w postaci:

$$(54) \quad (k_1 u' + l_1 v' + m_1 u'' + n_1 v'')(-k_2 u'' - l_2 v'' + m_2 u' + n_2 v') -$$
$$- (k_2 u' + l_2 v' + m_2 u'' + n_2 v'')(-k_1 u'' - l_1 v'' + m_1 u' + n_1 v'),$$

albo też w postaci:

$$(55) \quad (k, m)(u'^2 + u''^2) + (l, n)(v'^2 + v''^2) +$$
$$+ [(k, n) + (l, m)](u'v' + u''v'') - [(k, l) + (m, n)](u'v'' - v'u''),$$

gdzie do wyznaczników pierwszej z tych macierzy zastosowano oznaczenia (15). Korzystając z równości, która zachodzi pomiędzy wyrażeniami (54) i (55), będziemy mogli dla wyznaczników trzeciego wiersza wzorów (52) napisać wyrażenia:

$$(56)\quad \begin{cases} (C, D) = \alpha_1 (u'^2 + u''^2) + \alpha_2 (v'^2 + v''^2) + \\ + \alpha_3 (u' v' + u'' v'') - \alpha_4 (u' v'' - v' u''), \\ (E, F) = \beta_1 (u'^2 + u''^2) + \beta_2 (v'^2 + v''^2) + \\ + \beta_3 (u' v' + u'' v'') - \beta_4 (u' v'' - v' u''), \end{cases}$$

w których spółczynniki α i β ze znaczkami określają się równościami:

$$(57)\quad \begin{cases} \alpha_1 = g_1' g_2'' - g_2' g_1'', \quad \alpha_2 = h_1' h_2'' - h_2' h_1'', \\ \alpha_3 = g_1' h_2'' - g_2' h_1'' + h_1' g_2'' - h_2' g_1'', \\ \alpha_4 = g_1' h_2' - h_1' g_2' + g_1'' h_2'' - g_2'' h_1'', \\ \beta_1 = r_1' r_2'' - r_2' r_1'', \quad \beta_2 = s_1' s_2'' - s_2' s_1'', \\ \beta_3 = r_1' s_2'' - r_2' s_1'' + s_1' r_2'' - s_2' r_1'', \\ \beta_4 = r_1' s_2' - s_1' r_2' + r_1'' s_2'' - r_2'' s_1''. \end{cases}$$

Na tej samej drodze możemy dla wyznaczników pierwszego i drugiego wiersza wzorów (52) otrzymać wyrażenia:

$$(58)\quad \Omega_{kl} = \gamma_{kl,1}(u'^2 + u''^2) + \gamma_{kl,2}(v'^2 + v''^2) + \\ + \gamma_{kl,3}(u' v' + u'' v'') - \gamma_{kl,4}(u' v'' - v' u''), \quad (k, l = 1, 2),$$

w których spółczynniki $\gamma_{kl,m}$ $(k, l = 1, 2;\ m = 1, 2, 3, 4)$ mają wartości następujące:

$$(59)\quad \begin{cases} \gamma_{kl,1} = g_k' r_l'' - g_k'' r_l', \ \gamma_{kl,2} = h_k' s_l'' - h_k'' s_l', \\ \gamma_{kl,3} = g_k' s_l'' - g_k'' s_l' + h_k' r_l'' - h_k'' r_l', \\ \gamma_{kl,4} = g_k' s_l' - h_k' r_l' + g_k'' s_l'' - h_k'' r_l''. \end{cases}$$

Łatwo dostrzec, że niema niewłaściwego punktu zespolonego, którego ślady Q' i Q'' byłyby oba punktami właściwemi. Wynika to wprost stąd, że na podstawie równań (1) właściwym śladom Q' i Q'' odpowiadają określone skończone wartości wielkości x', y', x'', y''. Ale można wnioskować o tem także opierając się na równaniach (48). Ażeby z tych równań otrzymać ślady (Q) punktu niewłaściwego, określonego stosunkiem $v : u$, trzeba w nich

nieograniczenie powiększać moduł ρ. To znaczy, że ślady te mogłyby być oba skończone tylko wtedy, gdyby spełnione były jednocześnie cztery równości:

$$C' \cos\sigma + D' \sin\sigma = 0, \quad E' \cos\sigma + F' \sin\sigma = 0,$$

$$C'' \cos\sigma + D'' \sin\sigma = 0, \quad E'' \cos\sigma + F'' \sin\sigma = 0.$$

To jest jednak niemożliwe, bo wyznacznik T jest różny od zera, a więc w przypadku spełnienia tych czterech równości byłyby zerami wszystkie nawiasy we wzorach (47), które nie mogą mieć tej własności wobec założenia, że składowe u i v nie mogą obie jednocześnie być zerami.

Zajmiemy się teraz przypadkami, w których jeden ze śladów Q' i Q'' jest punktem właściwym. Aby ślad Q' był punktem właściwym, muszą być spełnione równości:

$$(60) \qquad C' \cos\sigma + D' \sin\sigma = 0, \quad E' \cos\sigma + F' \sin\sigma = 0.$$

Te równości mogą być ewentualnie spełnione przy wszelkich wartościach kąta σ, t.j. wtedy, gdy spełnione są równości:

$$(61) \qquad C' = 0, \quad E' = 0, \quad D' = 0, \quad F' = 0.$$

To jest możliwe przy wybranych odpowiednio wielkościach u', v', u'', v'', gdy zachodzi równość:

$$(62) \qquad \begin{vmatrix} g_1', & h_1', & g_1'', & h_1'' \\ r_1', & s_1', & r_1'', & s_1'' \\ g_1'', & h_1'', & -g_1', & -h_1' \\ r_1'', & s_1'', & -r_1', & -s_1' \end{vmatrix} = 0.$$

Jeżeli w wyznaczniku (23) zastąpimy wielkości:

$$g_2', \quad h_2', \quad r_2', \quad s_2'$$

odpowiednio przez wielkości:

$$g_1'', \quad h_1'', \quad r_1'', \quad s_1''$$

i pomnożymy wszystkie elementy trzeciej i czwartej kolumny tak otrzymanego wyznacznika przez -1, to otrzymamy wyznacznik,

stojący po lewej stronie równości (62). Ponieważ wyznacznik (23) równa się sumie kwadratów (25), przeto warunek (62) można zastąpić warunkami:

$$(63)\qquad \begin{cases} g_1' s_1' - h_1' r_1' - (g_1'' s_1'' - h_1'' r_1'') = 0, \\ g_1' s_1'' - h_1' r_1'' + g_1'' s_1' - h_1'' r_1' = 0. \end{cases}$$

Dochodzimy przeto do następującego wyniku: warunki konieczne i wystarczające na to, żeby istniały punkty niewłaściwe, których pierwsze ślady (Q) są punktami właściwemi przy każdem dążeniu parametru t do nieskończoności, polegają na zachodzeniu równości (63).

Podobnież, żeby ślad $\underline{Q}''$ był właściwym punktem, muszą zachodzić równości:

$$(64)\qquad C'' \cos\sigma + D'' \sin\sigma = 0, \quad E'' \cos\sigma + F'' \sin\sigma = 0.$$

Ażeby zaś ten ślad był właściwym punktem przy wszelkich wartościach kąta σ muszą być spełnione cztery równości:

$$(65)\qquad C'' = 0, \quad E'' = 0, \quad D'' = 0, \quad F'' = 0.$$

Rozważaniem analogicznem do przeprowadzonego przed chwilą rozważania dojdziemy do równości:

$$(66)\qquad \begin{cases} g_2' s_2' - h_2' r_2' - (g_2'' s_2'' - h_2'' r_2'') = 0, \\ g_2' s_2'' - h_2' r_2'' + g_2'' s_2' - h_2'' r_2' = 0, \end{cases}$$

t.j. mieć będziemy wynik następujący: warunki konieczne i wystarczające, by istniały punkty niewłaściwe, których drugie ślady (Q) są punktami właściwemi przy każdem dowolnem dążeniu parametru t do nieskończoności, polegają na zachodzeniu równości (66).

Może zdarzyć się, że dla tego samego przekształcenia (1) spełnione są i równości (63) i równości (66). To znaczyłoby, że istnieją punkty niewłaściwe, których ślady $\underline{Q}'$, określone przekształceniem (1), są przy każdem dążeniu t do nieskończoności punktami właściwemi oraz, że istnieją punkty niewłaściwe, których ślady $\underline{Q}''$, określone przekształceniem (1), są przy każdem dążeniu parametru t do nieskończoności punktami właściwemi. To nie znaczyłoby jednak, że istnieją punkty niewłaściwe, których oba

ślady Q' i Q'' są przy każdem dążeniu parametru t do nieskończoności punktami właściwemi, taki fakt bowiem, jak widzieliśmy już poprzednio, jest niemożliwy.

Ślad Q' może być ewentualnie tylko wtedy punktem właściwym, gdy t zmierza do nieskończoności przy określonem σ. Wtedy nie mogą być spełnione wszystkie równości (61), ale rzeczona wartość kąta σ musi czynić zadość obu równaniom (60), a więc dla istnienia takiego kąta σ musi być spełniona równość:

$$\Omega_{11} = C' F' - D' E' = 0, \tag{67}$$

którą na podstawie wzoru (58) można napisać w postaci:

$$\gamma_{11,1}(u'^2 + u''^2) + \gamma_{11,2}(v'^2 + v''^2) + \tag{68}$$
$$+ \gamma_{11,3}(u' v' + u'' v'') - \gamma_{11,4}(u' v'' - v' u'') = 0.$$

Tę równość można przedstawić jeszcze w innej formie. Jeżeli mianowicie zastosujemy spółczynnik m dwukierunku wektora u, v, t.j. iloraz:

$$m = \frac{v' + i v''}{u' + i u''},$$

to mieć będziemy:

$$m = \frac{u' v' + u'' v''}{u'^2 + u''^2} + i \frac{u' v'' - v' u''}{u'^2 + u''^2}.$$

To znaczy, że pisząc m w postaci:

$$m = m' + i m'',$$

mieć będziemy równości:

$$m' = \frac{u' v' + u'' v''}{u'^2 + u''^2}, \quad m'' = \frac{u' v'' - v' u''}{u'^2 + u''^2},$$

a jeżeli zwrócimy uwagę na to, że zachodzi tożsamość:

$$(u' v' + u'' v'')^2 + (u' v'' - v' u'')^2 = (u'^2 + u''^2)(v'^2 + v''^2),$$

to dojdziemy do równości:

$$\frac{v'^2 + v''^2}{u'^2 + u''^2} = m'^2 + m''^2.$$

Ze wzorów tych wynika, że można równość (68) przedstawić w formie:

$$\gamma_{11,1} + \gamma_{11,2}(m'^2 + m''^2) + \gamma_{11,3}\, m' - \gamma_{11,4}\, m'' = 0. \tag{69}$$

Równość (68) można zastąpić przez równość (69) zawsze wtedy, gdy $u \neq 0$, jeżeli zaś $u = 0$, to równość (68) redukuje się do warunku:

$$\gamma_{11,2} = h_1' s_1'' - h_1'' s_1' = 0. \tag{70}$$

Dochodzimy przeto do następującego wyniku. Ślad Q' punktu niewłaściwego, określonego dwukierunkiem $v : u$, wtedy i tylko wtedy nie jest punktem właściwym przy każdem dążeniu parametru t do nieskończoności, ale jest punktem właściwym przy dążeniu parametru t do nieskończoności, odbywającem się przy stałem określonem σ, gdy nie są spełnione jednocześnie równości (61), ale gdy jest spełniona równość (68) i gdy kąt σ czyni zadość równościom (60).

Analogicznie do rozważania, które przeprowadziliśmy przed chwilą, możemy wyprowadzić warunki, by ślad Q'' nie był punktem właściwym przy dowolnem zmierzaniu do nieskończoności parametru t, a był punktem właściwym, gdy t zmierza do nieskończoności przy określonem σ. Widoczne, że warunki te opierają się na równościach (64), z których wynika, że musi być spełniona równość:

$$\Omega_{22} = C'' F'' - D'' E'' = 0, \tag{71}$$

którą można napisać w postaci:

$$\gamma_{22,1}(u'^2 + u''^2) + \gamma_{22,2}(v'^2 + v''^2) + \tag{72}$$

$$+ \gamma_{22,3}(u' v' + u'' v'') - \gamma_{22,4}(u' v'' - v' u'') = 0.$$

Jeżeli postąpimy tak samo jak w przypadku poprzednim, to będziemy mogli przy spełnieniu warunku $u \neq 0$ równość (72) zastąpić równością:

$$\gamma_{22,1} + \gamma_{22,2}(m'^2 + m''^2) + \gamma_{22,3}\, m' - \gamma_{22,4}\, m'' = 0, \tag{73}$$

a przy spełnieniu warunku $u = 0$, zastąpić ją równością:

$$\gamma_{22,2} = h_2' s_2'' - h_2'' s_2' = 0. \tag{74}$$

Doszliśmy zatem do następującego wyniku. Warunki konieczne i wystarczające, żeby ślad Q'' punktu niewłaściwego, określonego dwukierunkiem $v : u$, nie był punktem właściwym przy każdem dążeniu parametru t do nieskończoności, ale był punktem właściwym przy dążeniu do nieskończoności parametru t, odbywającem się przy stałem określonem σ, polegają na tem, żeby nie były spełnione jednocześnie wszystkie równości (65), a była spełniona równość (72) i żeby kąt σ czynił zadość równaniom (64).

Zauważmy tutaj, że, jak wynika z poprzedniego rozważania, ślady Q' i Q'' punktu niewłaściwego, określonego dwukierunkiem $v : u$, nie mogą być oba jednocześnie punktami właściwemi przy nieograniczonem wzrastaniu t, odbywającem się przy tej samej wartości σ. Mogą być jednak punkty niewłaściwe, dla których istnieją ślady Q' i Q'', będące oba punktami właściwemi, otrzymującemi się naskutek dwóch różnych dążeń parametru t do nieskończoności, odbywających się mianowicie przy dwóch stałych wartościach kąta σ, które są różne jedna od drugiej. Dla takich punktów niewłaściwych muszą być spełnione obie równości (68) i (72).

Ponieważ prostą zespoloną o danym dwukierunku można przeprowadzić przez każdy właściwy zespolony punkt płaszczyzny, przeto stąd wynika, że w przypadkach, gdy którykolwiek ze śladów Q' i Q'' jest punktem właściwym, punkt ten może być wybrany dowolnie na odnośnej z płaszczyzn S i B.

Przechodząc teraz do rozważania warunków, przy spełnieniu których bądź jeden ze śladów Q' i Q'' jest punktem niewłaściwym, bądź też oba te ślady są punktami niewłaściwemi, zajmiemy się naprzód przypadkami, w których albo spełniona jest jedna z równości (68) i (72), albo też spełnione są obie te równości.

Gdy spełniona jest równość (68), ale nie są spełnione jednocześnie wszystkie cztery równości (61), wówczas przy każdem σ, nie czyniącem zadość równaniom (60) i przy dążeniu ρ do nieskończoności otrzymujemy:

$$\lim \frac{Y'}{X'} = \frac{\mathfrak{b}'}{\mathfrak{a}'}, \tag{75}$$

gdzie $\mathfrak{a}'$ i $\mathfrak{b}'$ są liczbami skończonemi, które nie są obie jednocześnie zerami. To znaczy, że punkt niewłaściwy, określony stosunkiem $v : u$, ma w tych warunkach na płaszczyźnie S jeden

taki ślad $\underline{Q}'$, który jest punktem niewłaściwym. Jeżeli spełniona jest równość (72), ale nie są spełnione jednocześnie wszystkie równości (65), to przy wszelkiem σ, nie czyniącem zadość równaniom (64) i przy dążeniu ρ do nieskończoności, otrzymujemy:

$$\lim \frac{Y''}{X''} = \frac{\mathfrak{b}''}{\mathfrak{a}''}, \tag{76}$$

gdzie $\mathfrak{a}''$ i $\mathfrak{b}''$ są liczbami skończonemi, które nie są obie jednocześnie zerami. Zatem punkt niewłaściwy ma na płaszczyźnie B przy spełnieniu tych warunków jeden taki ślad $\underline{Q}''$, który jest punktem niewłaściwym. Gdy wreszcie spełnione są i jedne i drugie z tych warunków, wówczas obie granice (75) i (76) mają wartości określone, t.j. punkt niewłaściwy, określony stosunkiem $v : u$ ma na każdej z płaszczyzn S i B po jednym takim śladzie $\underline{Q}'$ względnie $\underline{Q}''$, który jest punktem niewłaściwym.

Jeżeli następnie równość (68) nie zachodzi, t.j. jeżeli $\Omega_{11} \neq 0$, to na granicę (75) otrzymujemy wyrażenie:

$$\frac{\mathfrak{b}'}{\mathfrak{a}'} = \frac{E' \cos\sigma + F' \sin\sigma}{C' \cos\sigma + D' \sin\sigma}, \tag{77}$$

w którem $\cos\sigma$ i $\sin\sigma$ nie skracają się. To znaczy, że wtedy śladem $\underline{Q}'$ punktu niewłaściwego, określonego dwukierunkiem $v : u$ może być każdy dowolny niewłaściwy punkt płaszczyzny S. Podobnież, jeżeli nie jest spełniona równość (72), t.j. jeżeli $\Omega_{22} \neq 0$, to na granicę (76) otrzymuje się wyrażenie:

$$\frac{\mathfrak{b}''}{\mathfrak{a}''} = \frac{E'' \cos\sigma + F'' \sin\sigma}{C'' \cos\sigma + D'' \sin\sigma}, \tag{78}$$

a stąd wynika, że wtedy każdy niewłaściwy punkt płaszczyzny B może być śladem $\underline{Q}''$ punktu niewłaściwego, określonego stosunkiem $v : u$. Jeżeli $\Omega_{11} \neq 0$, ale $\Omega_{22} = 0$, a także jeżeli $\Omega_{22} \neq 0$, ale $\Omega_{11} = 0$, to na podstawie rozważań, które przeprowadziliśmy dotychczas, można we wszystkich przypadkach, objętych temi warunkami, podać ślady $\underline{Q}'$ i $\underline{Q}''$ punktu niewłaściwego. Jeżeli zaś $\Omega_{11} \neq 0$ i $\Omega_{22} \neq 0$, to śladami $\underline{Q}'$ i $\underline{Q}''$ są tylko punkty niewłaściwe płaszczyzn S i B, określone stosunkami (77) i (78), z których wtedy żaden nie jest niezależny od kąta σ. To znaczy, że przy założeniach $\Omega_{11} \neq 0$ i $\Omega_{22} \neq 0$ punkty niewłaściwe płaszczyzn S i B

są wtedy i tylko wtedy śladami $\underline{Q}'$ i $\underline{Q}''$ punktu niewłaściwego, należącemi do tego samego zmierzania parametru t do nieskończoności, gdy stosunki $\mathfrak{b}' : \mathfrak{a}'$ i $\mathfrak{b}'' : \mathfrak{a}''$, określające te punkty, spełniają związek, który otrzymuje się przez rugowanie kąta σ ze związków (77) i (78). Łatwo dostrzec, że związki te można napisać w postaci:

$$(C' \mathfrak{b}' - E' \mathfrak{a}') \cos\sigma + (D' \mathfrak{b}' - F' \mathfrak{a}') \sin\sigma = 0,$$

$$(C'' \mathfrak{b}'' - E'' \mathfrak{a}'') \cos\sigma + (D'' \mathfrak{b}'' - F'' \mathfrak{a}'') \sin\sigma = 0,$$

że więc przez rugowanie kąta σ wynika związek:

$$(C' \mathfrak{b}' - E' \mathfrak{a}')(D'' \mathfrak{b}'' - F'' \mathfrak{a}'') - (D' \mathfrak{b}' - F' \mathfrak{a}')(C'' \mathfrak{b}'' - E'' \mathfrak{a}'') = 0,$$

który można doprowadzić do postaci:

$$(79) \qquad (E' F'' - F' E'') \mathfrak{a}' \mathfrak{a}'' + (C'' F' - D'' E') \mathfrak{a}' \mathfrak{b}'' -$$

$$- (C' F'' - D' E'') \mathfrak{b}' \mathfrak{a}'' + (C' D'' - D' C'') \mathfrak{b}' \mathfrak{b}'' = 0.$$

To znaczy, że punkty niewłaściwe płaszczyzn S i B są przy założeniach $\Omega_{11} \neq 0$ i $\Omega_{22} \neq 0$ śladami $\underline{Q}'$ i $\underline{Q}''$ punktu niewłaściwego, określonego stosunkiem $v : u$, wtedy i tylko wtedy, gdy stosunki $\mathfrak{b}' : \mathfrak{a}'$ i $\mathfrak{b}'' : \mathfrak{a}''$, określające odpowiednio te ślady, czynią zadość związkowi, który przy zastosowaniu oznaczeń (52) można napisać w postaci:

$$(80) \qquad (E, F) \mathfrak{a}' \mathfrak{a}'' + \Omega_{21} \mathfrak{a}' \mathfrak{b}'' - \Omega_{12} \mathfrak{b}' \mathfrak{a}'' + (C, D) \mathfrak{b}' \mathfrak{b}'' = 0.$$

Odpowiedniość ta należy do kategorji odpowiedniości, któremi zajmowaliśmy się w § 51 tomu I-go. Przy rozważaniu ich własności tworzyliśmy wyznaczniki w i W. Jeżeli pierwszy z tych wyznaczników obliczymy dla odpowiedniości (80), to mieć będziemy:

$$w = (E, F)(C, D) + \Omega_{12} \Omega_{21},$$

a więc na podstawie wzoru (53) otrzymamy wzór:

$$(81) \qquad w = \Omega_{11} \Omega_{22}.$$

Przy naszych obecnych założeniach wyznacznik w jest różny od zera. Korzystając ze wzoru (81) otrzymamy na drugi z tych wyznaczników wzór:

$$(82) \qquad W = \Omega_{11} \Omega_{22} - \frac{1}{4} (\Omega_{12} + \Omega_{21})^2.$$

Wyznacznik W jest wyróżnikiem równania drugiego stopnia:

$$(83) \qquad (E, F)\,\mathfrak{a}^2 + (\Omega_{21} - \Omega_{12})\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} + (C, D)\,\mathfrak{b}^2 = 0,$$

które określa stosunki $\mathfrak{b} : \mathfrak{a}$, nie zmieniające się przy uważanej odpowiedniości. Każdemu z tych stosunków odpowiadają na płaszczyznach S i B takie dwukierunki, które po utworzeniu z płaszczyzn S i B płaszczyzny SB stają się na niej jednym i tym samym dwukierunkiem. W tem rozważaniu wchodzą jednak w grę tylko dwukierunki rzeczywiste. Gdy $W < 0$, wówczas istnieją dwa dwukierunki rzeczywiste, spełniające równanie (83). Gdy $W = 0$, ale wielkości (E, F), $\Omega_{21} - \Omega_{12}$ i (C, D) nie są wszystkie jednocześnie zerami, wówczas istnieje jeden dwukierunek, spełniający związek (83). Gdy wreszcie wszystkie trzy rzeczone wielkości są zerami, wówczas każdy dwukierunek spełnia związek (83).

Odpowiedniość, określona związkiem (80) jest inwolucją wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest równość:

$$(84) \qquad \Omega_{12} + \Omega_{21} = 0,$$

którą na podstawie oznaczeń (58) możemy napisać w postaci:

$$(85) \quad (\gamma_{12,1} + \gamma_{21,1})\,(u'^2 + u''^2) + (\gamma_{12,2} + \gamma_{21,2})\,(v'^2 + v''^2) +$$
$$+ (\gamma_{12,3} + \gamma_{21,3})\,(u'\,v' + u''\,v'') - (\gamma_{12,4} + \gamma_{21,4})\,(u'\,v'' - v'\,u'') = 0.$$

Inwolucja (80) ma wyróżnik dodatni, jest więc inwolucją eliptyczną, gdy znaki wyznaczników Ω_{11} i Ω_{22} są te same, ma zaś wyróżnik ujemny, jest więc inwolucją hiperboliczną, gdy znaki wyznaczników Ω_{11} i Ω_{22} są różne jeden od drugiego.

Rozważaliśmy tutaj związek (79) przy założeniach $\Omega_{11} \neq 0$ i $\Omega_{22} \neq 0$. Zapytujemy o znaczenie tego związku przy innych założeniach. Gdy spełnione są albo związki (61), albo też związki (65), wówczas związek (79) jest spełniony przy wszelkich wartościach wielkości $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$. Zapytujemy, czy prócz tych przypadków istnieją jeszcze inne przypadki spełnienia związku (79) przy wszelkich wartościach wielkości $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$. Łatwo wykazać, opierając się na tożsamości (53), że przyrównanie do zera wszystkich spółczynników związku (79) prowadzi albo do konkluzji $\Omega_{11} = 0$, $\Omega_{22} \neq 0$ i zachodzenia wszystkich związków (61), albo do konkluzji $\Omega_{22} = 0$, $\Omega_{11} \neq 0$ i zachodzenia wszystkich związków (65), albo wreszcie do konkluzji $\Omega_{11} = 0$, $\Omega_{22} = 0$. Zatem tylko

ostatnia konkluzja stanowi ewentualną dalszą możliwość spełnienia związku (79) przy wszelkich wartościach wielkości $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$. Wtedy wszystkie wyznaczniki drugiego stopnia macierzy (51) musiałyby być równe zeru, a więc musiałyby istnieć dwa takie czynniki p i q, nie oba jednocześnie równe zeru, żeby spełnione były cztery równości:

$$g_1'(pu'-qu'')+h_1'(pv'-qv'')+g_1''(pu''+qu')+h_1''(pv''+qv')=0,$$

$$r_1'(pu'-qu'')+s_1'(pv'-qv'')+r_1''(pu''+qu')+s_1''(pv''+qv')=0,$$

$$g_2'(pu'-qu'')+h_2'(pv'-qv'')+g_2''(pu''+qu')+h_2''(pv''+qv')=0,$$

$$r_2'(pu'-qu'')+s_2'(pv'-qv'')+r_2''(pu''+qu')+s_2''(pv''+qv')=0,$$

z których wobec założenia, że wyznacznik T jest różny od zera, wynikają cztery równości:

$$(86)\qquad \begin{cases} pu'-qu''=0, & pu''+qu'=0, \\ pv'-qv''=0, & pv''+qv'=0. \end{cases}$$

Ale założyliśmy, że nie wszystkie cztery wielkości u', v', u'', v'' są jednocześnie równe zeru. Jeżeli wielkości u', u'' nie są obie jednocześnie zerami, to z pierwszego wiersza równań (86) wynika $p=0$, $q=0$, a jeżeli wielkości v', v'' nie są obie jednocześnie zerami, to z drugiego wiersza równań (86) wynika $p=0$, $q=0$. Widzimy więc, że niema innych przypadków zachodzenia równości (79) przy wszelkich wartościach wielkości $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$ prócz przypadku jednoczesnego spełnienia równości (61) i przypadku jednoczesnego spełnienia równości (65). Poza temi przypadkami równość (79), lub (80) zawsze określa odpowiedniość pomiędzy dwukierunkami $\mathfrak{b}':\mathfrak{a}'$ i $\mathfrak{b}'':\mathfrak{a}''$. Rozważanie tej odpowiedniości w przypadkach $w=0$ prowadziłoby do części rezultatów, które otrzymaliśmy już poprzednio drogą bardziej bezpośrednią. Dlatego też rozważanie to pomijamy.

Zauważmy tu wreszcie, że prócz badania powyższej zależności dwukierunków na płaszczyznach S i B można także zająć się rozważaniem zależności pomiędzy kierunkami ramion, określonych na tych płaszczyznach równaniami (48), gdzie ρ jest zmiennym parametrem dodatnim. Szczególnym przypadkiem takiego rozwa-

żania zajmowaliśmy się w § 52 tomu I-go. W końcu zaś następnego paragrafu podamy sformułowania, które prócz innych wyników zawierać będą rozwiązanie zadania, równoważnego z rzeczoną kwestją w przypadku ogólnym.

§ 69. Linjowe obrazy wektorów zespolonych.

Weźmy pod uwagę na płaszczyźnie P dwa punkty zespolone o spółrzędnych:

$$x_1 = x_1' + i\,x_1'', \quad y_1 = y_1' + i\,y_1'',$$

$$x_2 = x_2' + i\,x_2'', \quad y_2 = y_2' + i\,y_2''.$$

Wektor zespolony, którego początkiem jest pierwszy, a końcem drugi z tych punktów, ma składowe:

$$u = u' + i\,u'', \quad v = v' + i\,v'', \tag{87}$$

gdzie wielkości u', v' i u'', v'' określają się wzorami:

$$u' = x_2' - x_1', \quad v' = y_2' - y_1',$$

$$u'' = x_2'' - x_1'', \quad v'' = y_2'' - y_1''$$

i są składowemi odpowiednio pierwszego boku i drugiego boku węgła wektora (87) na płaszczyźnie $R\,A$. Niech będą teraz płaszczyzny S i B i oznaczmy przez X_1', Y_1' spółrzędne pierwszego śladu (Q) punktu zespolonego x_1, y_1, przez X_1'', Y_1'' spółrzędne drugiego śladu (Q) punktu zespolonego x_1, y_1, przez X_2', Y_2' spółrzędne pierwszego śladu (Q) punktu zespolonego x_2, y_2 i wreszcie przez X_2'', Y_2'' spółrzędne drugiego śladu (Q) punktu zespolonego x_2, y_2. Wektor rzeczywisty na płaszczyźnie S, którego początkiem jest ślad X_1', Y_1', a końcem ślad X_2', Y_2' nazwiemy pierwszym śladem (Q) wektora zespolonego o początku w punkcie x_1, y_1 i końcu w punkcie x_2, y_2, a wektor rzeczywisty na płaszczyźnie B, którego początkiem jest ślad X_1'', Y_1'' a końcem ślad X_2'', Y_2'', nazwiemy drugim śladem (Q) wektora zespolonego o początku w punkcie x_1, y_1 i końcu w punkcie x_2, y_2. Składowe tych śladów (Q) wektora zespolonego wyrażają się przez odpowiednie ślady (Q) początku i końca tego wektora zapomocą wzorów:

$$U' = X_2' - X_1', \quad V' = Y_2' - Y_1',$$

$$U'' = X_2'' - X_1'', \quad V'' = Y_2'' - Y_1''.$$

Ponieważ zaś ślady (Q) początku i końca wektora zespolonego określają się przez odpowiednie zastosowanie wzorów (1), przeto składowe rzeczonych śladów (Q) wektora zespolonego określają się wzorami:

$$(88) \quad \begin{cases} U' = g_1' u' + h_1' v' + g_1'' u'' + h_1'' v'', \\ V' = r_1' u' + s_1' v' + r_1'' u'' + s_1'' v'', \\ U'' = g_2' u' + h_2' v' + g_2'' u'' + h_2'' v'', \\ V'' = r_2' u' + s_2' v' + r_2'' u'' + s_2'' v''. \end{cases}$$

Weźmy teraz pod uwagę płaszczyznę SB i umieśćmy na niej dwa wektory, których początki leżą oba w początku spółrzędnych, składowe zaś są odpowiednio równe U', V' i U'', V''. Otrzymamy wtedy na płaszczyźnie SB figurę, którą nazywać będziemy w ę g ł e m (Q) w e k t o r a z e s p o l o n e g o, a wektory rzeczywiste, z których ona się składa p i e r w s z y m i d r u g i m b o k i e m w ę g ł a (Q).

Zauważymy tutaj, że nie istnieje wektor zespolony, mający nie obie składowe u, v równe zeru, którego oba ślady (Q) miałyby długość równą zeru. Wynika to stąd, że wyznacznik T jest różny od zera. Ale widoczne, że istnieje nieskończenie wiele wektorów zespolonych u, v, których pierwszy ślad (Q) ma obie składowe równe zeru, a także nieskończenie wiele wektorów zespolonych u, v, których drugi ślad (Q) ma obie składowe równe zeru.

Następnie zajmiemy się rozważaniem wszystkich węgłów (Q) wektorów zespolonych, których składowe $\bar{u}, \bar{v}$ określają się wzorami:

$$(89) \quad \bar{u} = \rho e^{i\sigma} u, \quad \bar{v} = \rho e^{i\sigma} v,$$

gdzie u, v są danemi składowemi (87), a wielkości ρ i σ oznaczają parametry rzeczywiste, z których ρ przyjmuje tylko wartości dodatnie, a σ nie podlega temu ograniczeniu. Łatwo dostrzec, że w rzeczonem rozważaniu będziemy mogli korzystać z rachunków wykonanych w § 68. Wzory (89) można zastąpić wzorami:

$$(90) \quad \begin{cases} \bar{u}' = (u' \cos\sigma - u'' \sin\sigma)\rho, & \bar{v}' = (v' \cos\sigma - v'' \sin\sigma)\rho, \\ \bar{u}'' = (u' \sin\sigma + u'' \cos\sigma)\rho, & \bar{v}'' = (v' \sin\sigma + v'' \cos\sigma)\rho, \end{cases}$$

które określają składowe pierwszego boku i składowe drugiego boku węgła wektora u, v. Stosując do składowych (90) wzory (88), otrzymamy na składowe boków węgła (Q) wektora u, v wyrażenia:

$$(91)\quad \begin{cases} U' = (C'\cos\sigma + D'\sin\sigma)\,\rho\,, & V' = (E'\cos\sigma + F'\sin\sigma)\,\rho\,, \\ U'' = (C''\cos\sigma + D''\sin\sigma)\,\rho\,, & V'' = (E''\cos\sigma + F''\sin\sigma)\,\rho\,, \end{cases}$$

w których C, D, E, F z jednym i z dwoma akcentami oznaczają wyrażenia określone wzorami (50).

Wszystkie składowe (91) nie mogą być jednocześnie zerami, bo składowe wektora zespolonego u, v nie są obie jednocześnie zerami.

Następnie, korzystając z rozważań § 68, łatwo dojdziemy do następującego twierdzenia. Warunki konieczne i wystarczające, żeby istniały wektory zespolone u, v, dla których składowe U', V' pierwszego śladu (Q) wektora u, v są obie zerami przy wszelkich wartościach parametrów ρ, σ, polegają na jednoczesnem spełnieniu związków:

$$(63)\quad \begin{cases} g_1' s_1' - h_1' r_1' - (g_1'' s_1'' - h_1'' r_1'') = 0\,, \\ g_1' s_1'' - h_1' r_1'' + g_1'' s_1' - h_1'' r_1' = 0\,. \end{cases}$$

Jeżeli związki te są spełnione, to wielkości u', v', u'', v'' są wtedy i tylko wtedy odpowiedniemi składowemi boków węgła odnośnego wektora u, v, gdy czynią one zadość równościom:

$$(61)\qquad C' = 0\,,\quad E' = 0\,,\quad D' = 0\,,\quad F' = 0\,.$$

Podobnież możemy skonstatować twierdzenie. Warunki konieczne i wystarczające, by istniały wektory zespolone u, v, dla których obie składowe U'', V'' drugiego śladu (Q) wektora u, v są obie zerami przy każdym wyborze wartości parametrów ρ, σ, polegają na jednoczesnem spełnieniu równości:

$$(66)\quad \begin{cases} g_2' s_2' - h_2' r_2' - (g_2'' s_2'' - h_2'' r_2'') = 0\,, \\ g_2' s_2'' - h_2' r_2'' + g_2'' s_2' - h_2'' r_2' = 0\,. \end{cases}$$

Jeżeli równości te zachodzą, to wielkości u', v', u'', v'' są wtedy i tylko wtedy odpowiedniemi składowemi boków węgła odnośnego wektora u, v, gdy czynią one zadość związkom:

$$C''=0, \quad E''=0, \quad D''=0, \quad F''=0. \tag{65}$$

Może się zdarzyć, że spółczynniki przekształcenia (1) czynią zadość i równościom (63) i równościom (66). Wtedy istnieją i wektory u, v, dla których przy dowolnych wartościach parametrów ρ, σ obie składowe $\bar{U}'$, $\bar{V}'$ są zerami i także wektory u, v, dla których przy dowolnych wartościach parametrów ρ, σ obie składowe $\bar{U}''$, $\bar{V}''$ są zerami, ale w tych dwóch zbiorach wektorów u, v niema widocznie żadnych wektorów wspólnych.

Znikanie obu składowych $\bar{U}'$, $\bar{V}'$, względnie obu składowych $\bar{U}''$, $\bar{V}''$ może nie zachodzić przy dowolnych wartościach parametrów ρ, σ, ale może zachodzić przy pewnych odpowiednio wybranych wartościach tych parametrów. Możemy mianowicie wypowiedzieć t w i e r d z e n i a. Jeżeli nie są spełnione jednocześnie cztery równości (61), to warunek konieczny i wystarczający, żeby istniały wartości ρ, σ, przy których składowe $\bar{U}'$, $\bar{V}'$ są obie równe zeru, polega na spełnieniu związku:

$$\gamma_{11,1}(u'^2+u''^2)+\gamma_{11,2}(v'^2+v''^2)+ \\ +\gamma_{11,3}(u'v'+u''v'')-\gamma_{11,4}(u'v''-v'u'')=0 \tag{68}$$

i wtedy składowe $\bar{U}'$, $\bar{V}'$ są obie zerami przy dowolnej wartości ρ i przy wartości σ, czyniącej zadość równaniom:

$$C'\cos\sigma+D'\sin\sigma=0, \quad E'\cos\sigma+F'\sin\sigma=0. \tag{60}$$

Jeżeli nie zachodzą jednocześnie cztery równości (65), to warunkiem koniecznym i wystarczającym, żeby istniały wartości ρ, σ, przy których obie składowe $\bar{U}''$, $\bar{V}''$ są zerami, jest zachodzenie równości:

$$\gamma_{22,1}(u'^2+u''^2)+\gamma_{22,2}(v'^2+v''^2)+ \\ +\gamma_{22,3}(u'v'+u''v'')-\gamma_{22,4}(u'v''-v'u'')=0 \tag{72}$$

i wówczas składowe $\bar{U}''$, $\bar{V}''$ są obie zerami przy dowolnej wartości ρ i przy wartości σ, spełniającej równania:

(64) $C'' \cos\sigma + D'' \sin\sigma = 0, \quad E'' \cos\sigma + F'' \sin\sigma = 0.$

Zwrócimy tutaj uwagę na to, że równości $\bar{U}' = 0$, $\bar{V}' = 0$ oraz równości $\bar{U}'' = 0$, $\bar{V}'' = 0$ nie mogą zachodzić jednocześnie przy tych samych wartościach parametru σ. Ale mogą ewentualnie istnieć wektory u, v, dla których zachodzą równości $\bar{U}' = 0$, $\bar{V}' = 0$ przy pewnych wartościach parametru σ, a równości $\bar{U}'' = 0$, $\bar{V}'' = 0$ przy wartościach parametru σ, różnych od wszystkich poprzednich. Składowe u', v', u'', v'' boków węgłów takich wektorów muszą spełniać jednocześnie obie równości (68) i (72).

Dalej łatwo zauważyć twierdzenie następujące. Jeżeli nie są spełnione jednocześnie wszystkie cztery równości (61), to warunek konieczny i wystarczający, żeby pierwsze boki węgłów (Q) wektorów $\bar{u}, \bar{v}$, otrzymujących się przy wszelkich możliwych wartościach parametrów ρ i σ, leżały wszystkie na tej samej linji prostej, polega na tem, żeby wielkości u', v', u'', v'' spełniały równość (68). Podobnież, jeżeli nie zachodzą jednocześnie wszystkie cztery równości (65), to warunek konieczny i wystarczający, żeby drugie boki węgłów (Q) wektorów $\bar{u}, \bar{v}$, określonych wzorami (89) przy wszelkich wartościach wielkości ρ i σ, leżały wszystkie na tej samej linji prostej, polega na spełnieniu równości (72).

Załóżmy teraz, że $\Omega_{11} \neq 0$. Przy tem założeniu z pierwszego wiersza wzorów (91) wynikają równości:

$$(92) \quad \cos\sigma = \frac{1}{\rho\,\Omega_{11}}(F'\bar{U}' - D'\bar{V}'), \quad \sin\sigma = \frac{1}{\rho\,\Omega_{11}}(C'\bar{V}' - E'\bar{U}'),$$

z których przez rugowanie σ dochodzimy do równania:

$$(93) \quad (F'\bar{U}' - D'\bar{V}')^2 + (C'\bar{V}' - E'\bar{U}')^2 = \rho^2(\Omega_{11})^2.$$

Zatem na podstawie pierwszego wiersza wzorów (91) oraz równania (93) możemy wypowiedzieć twierdzenie. Jeżeli $\Omega_{11} \neq 0$, t.j. wielkości u', v', u'', v'' nie czynią zadość równości (68), to koniec pierwszego boku węgła (Q) wektora $\bar{u}, \bar{v}$ opisuje przy stałem σ i zmiennem ρ ramię o początku w punkcie 0 z wyłączeniem tego punktu i o nachyleniu zależnem od wyboru wielkości σ, a przy stałem ρ i zmiennem σ istotną krzywą rodzaju elips określoną równaniem (93).

Załóżmy następnie, że $\Omega_{22} \neq 0$. Wtedy ze związków podanych w drugim wierszu równości (91) wynikają na $\cos\sigma$ i $\sin\sigma$ wyrażenia:

$$(94)\quad \cos\sigma = \frac{1}{\rho\,\Omega_{22}}(F''\,\bar{U}'' - D''\,\bar{V}''),\quad \sin\sigma = \frac{1}{\rho\,\Omega_{22}}(C''\,\bar{V}'' - E''\,\bar{U}''),$$

skąd przez rugowanie σ otrzymuje się równanie:

$$(95)\quad (F''\,\bar{U}'' - D''\,\bar{V}'')^2 + (C''\,\bar{V}'' - E''\,\bar{U}'')^2 = \rho^2\,(\Omega_{22})^2.$$

Widzimy więc, że z drugiego wiersza wzorów (91) i z równania (95) wynika twierdzenie. Jeżeli $\Omega_{22} \neq 0$, t.j. wielkości u', v', u'', v'' nie spełniają równości (72), to koniec drugiego boku węgła (Q) wektora $\bar{u}$, $\bar{v}$ opisuje przy stałem σ i zmiennem ρ ramię o początku w punkcie 0 z wyłączeniem tego punktu i o nachyleniu zależnem od wyboru wielkości σ, a przy stałem ρ i zmiennem σ istotną krzywą rodzaju elips określoną równaniem (95).

Zakładając, że spełnione są obie nierówności $\Omega_{11} \neq 0$ i $\Omega_{22} \neq 0$, możemy stosować i związki (92) i związki (94). Jeżeli zrównamy wyrażenia, wynikające z jednych i z drugich na $\operatorname{tg}\sigma$, to dojdziemy do związku:

$$(C'\,\bar{V}' - E'\,\bar{U}')(D''\,\bar{V}'' - F''\,\bar{U}'') - (D'\,\bar{V}' - F'\,\bar{U}')(C''\,\bar{V}'' - E''\,\bar{U}'') = 0,$$

który przy zastosowaniu oznaczeń (52) można przedstawić w postaci:

$$(96)\quad (E, F)\,\bar{U}'\,\bar{U}'' + \Omega_{21}\,\bar{U}'\,\bar{V}'' - \Omega_{12}\,\bar{V}'\,\bar{U}'' + (C, D)\,\bar{V}'\,\bar{V}'' = 0.$$

Jeżeli zaś zrównamy wyrażenia (92) i (94) na $\cos\sigma$ i $\sin\sigma$, to mieć będziemy:

$$(97)\quad \begin{cases} \dfrac{F'\,\bar{U}' - D'\,\bar{V}'}{\Omega_{11}} = \dfrac{F''\,\bar{U}'' - D''\,\bar{V}''}{\Omega_{22}}, \\ \dfrac{C'.\bar{V}' - E'\,\bar{U}'}{\Omega_{11}} = \dfrac{C''\,\bar{V}'' - E''\,\bar{U}''}{\Omega_{22}}. \end{cases}$$

Rozwiązując te równania względem $\bar{U}''$, $\bar{V}''$, otrzymamy:

$$(98)\quad \bar{U}'' = \frac{\Omega_{21}\,\bar{U}' + (C, D)\,\bar{V}'}{\Omega_{11}},\quad \bar{V}'' = \frac{\Omega_{12}\,\bar{V}' - (E, F)\,\bar{U}'}{\Omega_{11}},$$

a rozwiązując je względem $\bar{U}'$, $\bar{V}'$ mieć będziemy:

$$(99)\qquad \bar{U}' = \frac{\Omega_{12}\,\bar{U}'' - (C, D)\,\bar{V}''}{\Omega_{22}},\qquad \bar{V}' = \frac{\Omega_{21}\,\bar{V}'' + (E, F)\,\bar{U}''}{\Omega_{22}}.$$

Układy związków (97), (98) i (99) są oczywiście algebraicznie równoważne i przytem dostrzeżemy łatwo, że jeżeli w wielkościach, figurujących w tych związkach, jeden akcent zastąpimy wszędzie przez dwa akcenty, a dwa akcenty przez jeden akcent, to lewe strony związków (97) przejdą w ich strony prawe, prawe strony związków (97) w ich strony lewe, związki (98) w związki (99), a związki (99) w związki (98). Wobec tych wyników możemy dwa ostatnie twierdzenia uzupełnić twierdzeniem następującem. Przy założeniach $\Omega_{11} \neq 0$, $\Omega_{22} \neq 0$ dwukierunki boków węgła (Q) wektora $\bar{u}$, $\bar{v}$, odpowiadających tym samym wartościom parametrów ρ i σ muszą spełniać związek (96), składowe zaś tych boków muszą być takie, żeby spełnione były związki (97) lub co na jedno wychodzi równoważne z niemi związki (98) albo związki (99).

Związek (96) jest tylko inną postacią związku (80), którego własności rozważaliśmy w § 68. W celu podania geometrycznej interpretacji równości (97) uważajmy na płaszczyźnie S trzy wektory, których składowe są odpowiednio równe wielkościom:

$$C', E';\quad D', F';\quad \bar{U}', \bar{V}',$$

a na płaszczyźnie B trzy wektory, których składowe są odpowiednio równe wielkościom:

$$C'', E'';\quad D'', F'';\quad \bar{U}'', \bar{V}''.$$

Jeżeli początki pierwszych trzech wektorów umieścimy w początku spółrzędnych płaszczyzny S, a początki drugich trzech wektorów w początku spółrzędnych płaszczyzny B, to wielkości:

$$(100)\quad \begin{cases} \tau' = \dfrac{1}{2}\,\Omega_{11}\sin\vartheta, \quad \tau'' = \dfrac{1}{2}\,\Omega_{22}\sin\vartheta, \\ T_1' = \dfrac{1}{2}\,\Psi(C', E';\ \bar{U}', \bar{V}'), \quad T_1'' = \dfrac{1}{2}\,\Psi(C'', E'';\ \bar{U}'', \bar{V}''), \\ T_2' = \dfrac{1}{2}\,\Psi(D', F';\ \bar{U}', \bar{V}'), \quad T_2'' = \dfrac{1}{2}\,\Psi(D'', F'';\ \bar{U}'', \bar{V}'') \end{cases}$$

określać będą pola pewnych trójkątów. Dwa boki każdego z tych trójkątów są dwoma z powyższych sześciu wektorów. Przytem pole τ' jest obiegane w kierunku wektora C', E', pole τ'' w kierunku wektora C'', E'', pole T_1' w kierunku wektora C', E', pole T_1'' w kierunku wektora C'', E'', pole T_2' w kierunku wektora D', F' i wreszcie pole T_2'' w kierunku wektora D'', F''. Równości (97) można napisać jako związki pomiędzy temi polami w postaci:

$$(101) \qquad \frac{T_1'}{\tau'} = \frac{T_1''}{\tau''}, \quad \frac{T_2'}{\tau'} = \frac{T_2''}{\tau''}.$$

Związki te możemy przez zastosowanie dowolnych parametrów zastąpić jednym związkiem. Niech k i l oznaczają liczby rzeczywiste, które nie są obie jednocześnie zerami, ale zresztą mają wartości dowolne. Weźmy pod uwagę na płaszczyźnie S wektor o składowych:

$$(102) \qquad P' = k\,C' + l\,D', \quad Q' = k\,E' + l\,F',$$

a na płaszczyźnie B wektor o składowych:

$$(103) \qquad P'' = k\,C'' + l\,D'', \quad Q'' = k\,E'' + l\,F''.$$

Długości obu tych wektorów są różne od zera. Przyjmiemy, że początki wektorów o składowych P', Q'; $\bar{U}'$, $\bar{V}'$ leżą w początku spółrzędnych płaszczyzny S, a początki wektorów o składowych P'', Q''; $\bar{U}''$, $\bar{V}''$ w początku spółrzędnych płaszczyzny B. Wtedy wielkości:

$$(104) \quad T' = \frac{1}{2}\,\Psi\,(P', Q'; \bar{U}'', \bar{V}''), \quad T'' = \frac{1}{2}\,\Psi\,(P'', Q''; \bar{U}'', \bar{V}'')$$

określać będą na tych płaszczyznach pola dwóch trójkątów, z których pierwsze obiegane jest w kierunku zgodnym z kierunkiem wektora o składowych P', Q', drugie zaś w kierunku zgodnym z kierunkiem wektora o składowych P'', Q''. Łatwo dostrzec, że zachodzą równości:

$$T' = k\,T_1' + l\,T_2', \quad T'' = k\,T_1'' + l\,T_2'',$$

a więc ze związków (101) wynika związek:

$$\frac{T'}{\tau'} = \frac{T''}{\tau''}, \tag{105}$$

zawierający rzeczone dowolne parametry k, l i widoczne, że nawzajem ze związku (105) wynikają związki (101).

Analogicznie do nazwy pole węgła wektora zespolonego u, v, przyjętej na str. 269 tomu I-go, zastosujemy do wyrażenia $\frac{1}{2}\Psi(U', V'; U'', V'')$ nazwę: pole węgła (Q) wektora zespolonego u, v, a do wyrażenia $\frac{1}{2}\Psi(\bar{U}', \bar{V}'; \bar{U}'', \bar{V}'')$ nazwę: pole węgła (Q) wektora zespolonego $\bar{u}, \bar{v}$. Przyjmiemy powyższe założenie $\Omega_{11}\Omega_{22} \neq 0$ i zauważymy, że możemy przy tem założeniu pole $\frac{1}{2}\Psi(\bar{U}', \bar{V}'; \bar{U}'', \bar{V}'')$ wyrazić na podstawie związków (98) przez składowe $\bar{U}', \bar{V}'$, a na podstawie związków (99) przez składowe $\bar{U}'', \bar{V}''$. Zastosujemy oznaczenie:

$$\varphi(\xi, \eta) = (E, F)\,\xi^2 + (\Omega_{21} - \Omega_{12})\,\xi\eta + (C, D)\,\eta^2, \tag{106}$$

a także oznaczenie:

$$\omega = (E, F) + (C, D) + (\Omega_{21} - \Omega_{12})\cos\vartheta. \tag{107}$$

Na podstawie związków (98) dochodzimy do wyrażenia:

$$\frac{1}{2}\Psi(\bar{U}', \bar{V}'; \bar{U}'', \bar{V}'') = -\frac{1}{2}\frac{\varphi(\bar{U}', \bar{V}')\sin\vartheta}{\Omega_{11}}, \tag{108}$$

a na podstawie związków (99) do wyrażenia:

$$\frac{1}{2}\Psi(\bar{U}', \bar{V}'; \bar{U}'', \bar{V}'') = -\frac{1}{2}\frac{\varphi(\bar{U}'', \bar{V}'')\sin\vartheta}{\Omega_{22}}. \tag{109}$$

Wyróżnik W formy $\varphi(\xi, \eta)$ określony jest wzorem:

$$W = \Omega_{11}\Omega_{22} - \frac{1}{4}(\Omega_{12} + \Omega_{21})^2. \tag{82}$$

Naprzód zauważymy, że jeżeli $W \geqq 0$, to założenie $\Omega_{11}\Omega_{22} \neq 0$ pociąga za sobą nierówność:

$$\Omega_{11}\Omega_{22} > 0.$$

Gdy $W > 0$, wówczas pole węgła (Q) wektora $\bar{u}, \bar{v}$ jest przy wszelkich składowych $\bar{U}', \bar{V}'$ i przy wszelkich składowych $\bar{U}'', \bar{V}''$ tego samego znaku, który jest znakiem wielkości $-\omega\,\Omega_{11}\sin\vartheta$, lub co na jedno wychodzi znakiem wielkości $-\omega\,\Omega_{22}\sin\vartheta$. Gdy $W = 0$, wówczas istnieje jeden dwukierunek rzeczywisty $\eta : \xi$, dla którego forma $\varphi(\xi, \eta)$ jest zerem. Jeżeli jeden ze stosunków $\bar{V}' : \bar{U}'$ i $\bar{V}'' : \bar{U}''$ określa ten dwukierunek, to określa go i drugi z nich, a odnośne pole węgła (Q) wektora $\bar{u}, \bar{v}$ jest zerem. Przy wszelkich innych składowych $\bar{U}', \bar{V}'$ i przy wszelkich innych składowych $\bar{U}'', \bar{V}''$ pole węgła (Q) wektora $\bar{u}, \bar{v}$ jest stale tego samego znaku, który jest znakiem wielkości $-\omega\,\Omega_{11}\sin\vartheta$, lub, co na jedno wychodzi, znakiem wielkości $-\omega\,\Omega_{22}\sin\vartheta$. Przy założeniu, że $W < 0$, rozważać będziemy hiperbole:

$$\varphi(\xi, \eta) + \frac{m' \sin\vartheta}{\Omega_{11}\, W} = 0, \tag{110}$$

gdzie m' oznacza parametr rzeczywisty dodatni i hiperbole:

$$\varphi(\xi, \eta) + \frac{m'' \sin\vartheta}{\Omega_{22}\, W} = 0, \tag{111}$$

gdzie m'' oznacza także parametr rzeczywisty dodatni. Jeżeli przy założeniu $W < 0$ iloczyn $\Omega_{11}\,\Omega_{22}$ jest dodatni, to przy zmiennych parametrach rzeczywistych dodatnich m' i m'' równania (110) i (111) określają tę samą rodzinę hiperbol, mających wspólne asymptoty i położonych w dwóch kątach wierzchołkowych pomiędzy asymptotami. Jeżeli zaś iloczyn $\Omega_{11}\,\Omega_{22}$ jest ujemny, to spełniona jest zawsze nierówność $W < 0$, a równania (110) i (111) określają przy zmiennych parametrach rzeczywistych dodatnich m' i m'' dwie różne rodziny hiperbol, mających wspólne asymptoty. Jedna z tych rodzin położona jest w dwóch kątach wierzchołkowych pomiędzy asymptotami, druga zaś w dwóch innych kątach wierzchołkowych pomiędzy asymptotami. Przy założeniu $W < 0$ forma $\varphi(\xi, \eta)$ ma dwa dwukierunki rzeczywiste $\eta : \xi$, dla których wartość jej równa się zeru. Jeżeli którykolwiek z dwukierunków $\bar{V}' : \bar{U}'$ i $\bar{V}'' : \bar{U}''$ jest jednym z rzeczonych dwukierunków rzeczywistych, to tym samym dwukierunkiem jest i drugi z nich, a odnośne pole węgła (Q) wektora $\bar{u}, \bar{v}$ równa się zeru. We wszelkich innych przypadkach

zauważymy, że zależnie od tego, czy spełniona jest górna, czy też dolna z nierówności:

$$\frac{\varphi(\bar{U}', \bar{V}') \sin \vartheta}{\Omega_{11}} \gtrless 0, \tag{112}$$

dwukierunek $\bar{V}' : \bar{U}'$ jest odpowiednio dwukierunkiem zewnętrznym, albo też dwukierunkiem wewnętrznym względem hiperboli (110), a także, że zależnie od tego, czy spełniona jest górna, czy też dolna z nierówności:

$$\frac{\varphi(\bar{U}'', \bar{V}'') \sin \vartheta}{\Omega_{22}} \gtrless 0, \tag{113}$$

dwukierunek, określony stosunkiem $\bar{V}'' : \bar{U}''$, jest odpowiednio dwukierunkiem zewnętrznym lub dwukierunkiem wewnętrznym względem hiperboli (111). Ale prawe strony równości (108) i (109) są sobie równe. Jeżeli przeto dwukierunki $\bar{V}' : \bar{U}'$, $\bar{V}'' : \bar{U}''$ nie są dwukierunkami asymptotycznemi hiperbol (110) i (111), to są albo oba jednocześnie zewnętrznemi odpowiednio względem hiperbol (110) i (111), albo też oba jednocześnie wewnętrznemi względem hiperbol (110) i (111). Opierając się na tem, dochodzimy na mocy wzorów (108), (109) i nierówności (112), (113) do następującego twierdzenia: jeżeli spełniona jest nierówność $W < 0$ i dwukierunki $\bar{V}' : \bar{U}'$, $\bar{V}'' : \bar{U}''$ nie są asymptotycznemi dwukierunkami hiperbol (110) i (111), to warunek konieczny i wystarczający, aby pole węgła (Q) wektora $\bar{u}, \bar{v}$ było dodatnie, polega na tem, żeby dwukierunki $\bar{V}' : \bar{U}'$, $\bar{V}'' : \bar{U}''$ były dwukierunkami zewnętrznemi odpowiednio względem hiperbol (110), (111), a warunek konieczny i wystarczający, aby pole węgła (Q) wektora $\bar{u}, \bar{v}$ było ujemne, polega na tem, żeby dwukierunki $\bar{V}' : \bar{U}'$, $\bar{V}'' : \bar{U}''$ były dwukierunkami wewnętrznemi odpowiednio względem hiperbol (110), (111).

§ 70. Interpretacja Marie punktów zespolonych i własności odpowiadających tej interpretacji węgłów wektorów zespolonych.

Weźmiemy teraz pod uwagę pewien szczególny przypadek związków (1), mianowicie równania:

$$\begin{cases} X' = x' - x'', & Y' = y' - y'', \\ X'' = x' + x'', & Y'' = y' + y''. \end{cases} \tag{114}$$

Obraz linjowy, określony temi równaniami będziemy nazywać obrazem Marie, albo krócej obrazem (M) właściwego punktu zespolonego x, y i stosownie do ogólnych nazw przyjętych w § 67, używać będziemy dla punktu X', Y' na płaszczyźnie S nazwy pierwszego śladu (M) punktu zespolonego x, y, a dla punktu X'', Y'' na płaszczyźnie B nazwy drugiego śladu (M) punktu zespolonego x, y. Ślady te łatwo skonstruować według śladów R i A punktu zespolonego. Niech będzie płaszczyzna SB (fig. 101) i naznaczmy na tej płaszczyźnie punkt R o spółrzędnych x', y', punkt A o spółrzędnych x'', y'' i punkt $\underline{A}$ o spółrzędnych $-x''$, $-y''$. Ślad X', Y' oznaczać będziemy literą M', a ślad X'', Y'' literą M''.

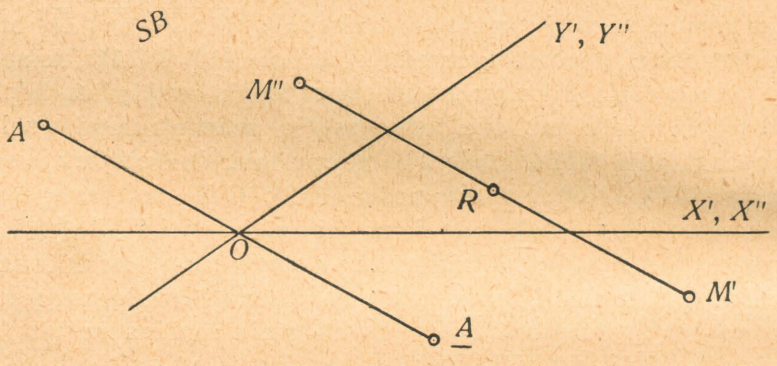

Fig. 101.

Jeżeli punkt x, y jest rzeczywisty, to oba ślady M' i M'' leżą w punkcie R. Jeżeli zaś punkt x, y jest urojony, to bierzemy pod uwagę wektory $\overline{O\,\underline{A}}$ i $\overline{O\,A}$. Ze wzorów (114) wynika, że ślady M' i M'' są końcami wektorów $\overline{R\,M'}$ i $\overline{R\,M''}$, które mają odpowiednio te same składowe, co wektory $\overline{O\,\underline{A}}$ i $\overline{O\,A}$. Widzimy więc, że ślady M', M'' leżą oba na prostej rzeczywistej urojonego punktu x, y po dwóch stronach punktu R i w tych samych od niego odległościach oraz, że wektor $\overline{M'\,M''}$ ma kierunek osi urojonego punktu x, y. Ślady (M) punktu z nim sprzężonego $\overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ są odpowiednio M'', M', są więc parą tych samych punktów, ale punkt M'' jest pierwszym śladem, a punkt M' jest drugim śladem.

Spółrzędne śladów (M) punktu zespolonego otrzymają się ze wzorów:

$$\xi = x' + x''\omega, \quad \eta = y' + y''\omega,$$

podanych pod numerem (9) w § 46 tomu I, gdy w nich przyjmiemy $\omega = -1$ i $\omega = +1$. Stąd wynika, że ślady (M) mają własność udowodnioną tam dla każdego punktu ξ, η przy dowolnej stałej wartości wielkości ω, t.j. że ślady (M): X', Y' i X'', Y'' są spółzmiennemi punktami zespolonego punktu x, y.

Weźmy następnie pod uwagę zespolony wektor o składowych u, v. Stosując w przypadku obrazu Marie równania (88), mieć będziemy równania:

$$(115) \qquad \begin{cases} U' = u' - u'', & V' = v' - v'', \\ U'' = u' + u'', & V'' = v' + v''. \end{cases}$$

Węgieł, którego pierwszy i drugi bok mają odpowiednio składowe U', V' i U'', V'', określone równaniami (115), jest szczególnym przypadkiem węgła (Q), rozważanego w § 69. Ten szczególny węgieł nazwiemy węgłem Marie wektora u, v lub krócej

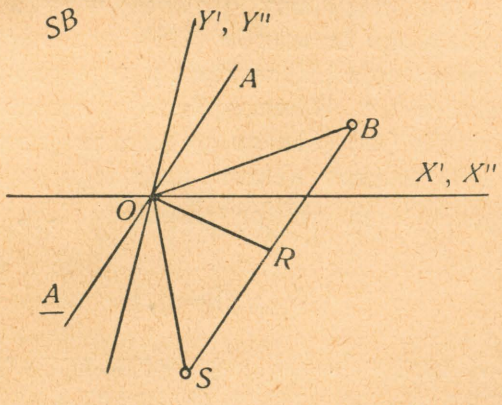

Fig. 102.

węgłem (M) wektora u, v, a jego pierwszy i drugi bok odpowiednio pierwszym i drugim bokiem węgła (M). Jeżeli wektor u, v ma składowe rzeczywiste, to każdy z boków jego węgła (M) jest wektorem rzeczywistym o tych samych składowych u, v. Jeżeli wektor u, v jest urojony, to weźmiemy pod

uwagę węgieł wektora u, v i węgieł wektora z nim sprzężonego $\overset{*}{u}, \overset{*}{v}$. Te dwa węgły mają pierwszy bok $\overline{OR}$ wspólny, a dwa drugie boki $\overline{OA}$ i $\overline{OA}$ wprost przeciwnie do siebie skierowane i mające tę samą długość (fig. 102). Niech będą następnie wektory $\overline{RS}$ i $\overline{RB}$. mające odpowiednio te same składowe co wektory $\overline{OA}$ i $\overline{OA}$. Wtedy pierwszym bokiem węgła (M) wektora u, v będzie wektor $\overline{OS}$, a drugim bokiem tego węgła wektor $\overline{OB}$.

Znane nam są niezmienniki dwóch wektorów rzeczywistych względem zmian spółrzędnych prostolinjowych. Wyprowadzimy wyrażenia niezmienników wektorów $\overline{OS}$ i $\overline{OB}$ przez niezmienniki wektora zespolonego u, v. Przyjmując mianowicie dla tych ostatnich niezmienników oznaczenia stosowane w tomie I (zob. wzory (35) w § 48), mieć będziemy:

$$(116)\quad \begin{cases} \Phi(U', V') = \Phi' + \Phi'' - 2\Phi, \quad \Phi(U'', V'') = \Phi' + \Phi'' + 2\Phi, \\ \Phi(U', V'; U'', V'') = \Phi' - \Phi'', \quad \Psi(U', V'; U'', V'') = 2\Psi. \end{cases}$$

Jeżeli pole trójkąta OSB, obiegane w kierunku zgodnym z kierunkiem boku $\overline{OS}$, nazwiemy polem węgła (M) wektora u, v, to treść ostatniego ze wzorów (116) będziemy mogli wysłowić w ten sposób: pole węgła (M) wektora u, v jest równe podwójnemu polu węgła wektora u, v. W szczególności z rzeczonego wzoru wynika, że pole węgła (M) górnego wektora urojonego jest dodatnie, a pole węgła (M) dolnego wektora urojonego jest ujemne.

Niech będzie teraz wektor zespolony λ, μ, spełniający warunek:

$$(117)\qquad \Phi(\lambda, \mu) = \eta,$$

gdzie $\eta = +1$, lub $\eta = 0$. W pierwszym przypadku wektor λ, μ określa kierunek, w drugim zaś pseudokierunek (zob. § 26 tomu I). W przypadkach, gdy λ, μ określa kierunek rzeczywisty, oba boki węgła (M) wektora λ, μ są jednym i tym samym wektorem rzeczywistym, mającym długość równą jedności i rzeczony kierunek rzeczywisty. We wszystkich innych przypadkach niech będą na rysunku (fig. 103) dwa prostokątne węgły wektorów λ, μ i $\overset{*}{\lambda}, \overset{*}{\mu}$. Węgły te mają wspólny pierwszy bok $\overline{OR}$ i dwa prostopadłe do niego o wprost przeciwnych sobie kierunkach i tej

samej długości drugie boki $\overline{OA}$ i $\overline{OA}$. Pierwszy bok węgła (M) kierunku względnie pseudokierunku λ, μ jest wektorem $\overline{OS}$, którego koniec jest czwartym wierzchołkiem prostokąta, mającego trzy wierzchołki w punktach O, R i A. Drugi zaś bok tego węgła (M) jest wektorem $\overline{OB}$, którego koniec jest czwartym wierzchołkiem prostokąta, mającego trzy wierzchołki w punktach O, R, A.

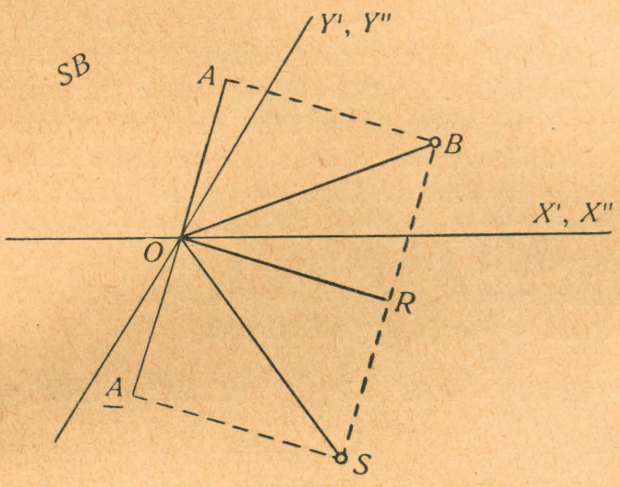

Fig. 103.

Boki węgła (M) kierunku, względnie pseudokierunku mają tę samą długość. Ten węgieł (M) określa kierunek, gdy boki jego nie są do siebie prostopadłe, określa zaś pseudokierunek, gdy boki jego są do siebie prostopadłe.

Z tem rozważaniem połączymy pewien rachunek. Jeżeli oznaczymy przez $\mathfrak{L}', \mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{L}'', \mathfrak{M}''$ składowe pierwszego i drugiego boku węgła (M) kierunku, względnie pseudokierunku λ, μ, to mieć będziemy:

$$(118) \qquad \begin{cases} \mathfrak{L}' = \lambda' - \lambda'', & \mathfrak{M}' = \mu' - \mu'', \\ \mathfrak{L}'' = \lambda' + \lambda'', & \mathfrak{M}'' = \mu' + \mu''. \end{cases}$$

Warunek (117) jest równoważny ze związkami:

$$(119) \qquad \Phi(\lambda', \mu') - \Phi(\lambda'', \mu'') = \eta, \quad \Phi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'') = 0,$$

podanemi w § 48 tomu I pod numerem (40). Jeżeli związki (116) zastosujemy do wektorów (118) przy uwzględnieniu warunków (119), to mieć będziemy:

$$(120)\quad \begin{cases} \Phi(\mathfrak{L}', \mathfrak{M}') = \Phi(\mathfrak{L}'', \mathfrak{M}'') = \Phi(\lambda', \mu') + \Phi(\lambda'', \mu''), \\ \Phi(\mathfrak{L}', \mathfrak{M}'; \mathfrak{L}'', \mathfrak{M}'') = \eta, \Psi(\mathfrak{L}', \mathfrak{M}'; \mathfrak{L}'', \mathfrak{M}'') = 2\Psi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu''). \end{cases}$$

Ze związków pierwszego wiersza wynika znana już nam własność, że boki węgła (M) kierunku względnie pseudokierunku mają oba tę samą długość. Konstatowaliśmy także własność, wynikającą przy $\eta = 0$ z pierwszego związku drugiego wiersza, że boki węgła (M) pseudokierunku są do siebie prostopadłe. Przy $\eta = 1$ ze związku tego wynika, że boki węgła (M) kierunku tworzą ze sobą kąt ostry. Łatwo dostrzec, że warunki konieczne i wystarczające, żeby węgieł, którego pierwszy bok ma składowe $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{M}'$, a drugi ma składowe $\mathfrak{L}''$, $\mathfrak{M}''$, był węgłem (M) kierunku względnie pseudokierunku, wyrażają się związkami:

$$(121)\quad \Phi(\mathfrak{L}', \mathfrak{M}') = \Phi(\mathfrak{L}'', \mathfrak{M}''), \quad \Phi(\mathfrak{L}', \mathfrak{M}'; \mathfrak{L}'', \mathfrak{M}'') = \eta.$$

W przypadku, gdy $\eta = 1$, przedstawimy drugi ze związków (121) jeszcze w innych postaciach. Oznaczmy przez A', B' i A'', B'' składowe wektorów, otrzymujących się odpowiednio z boków $\mathfrak{L}', \mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{L}'', \mathfrak{M}''$ przez obroty ich o kąt $+\frac{\pi}{2}$ naokoło początku spółrzędnych. Dla składowych A', B' i A'', B'' mieć będziemy wzory:

$$A' = -\frac{\mathfrak{L}' \cos\vartheta + \mathfrak{M}'}{\sin\vartheta}, \quad B' = \frac{\mathfrak{L}' + \mathfrak{M}' \cos\vartheta}{\sin\vartheta},$$

$$A'' = -\frac{\mathfrak{L}'' \cos\vartheta + \mathfrak{M}''}{\sin\vartheta}, \quad B'' = \frac{\mathfrak{L}'' + \mathfrak{M}'' \cos\vartheta}{\sin\vartheta}$$

i, korzystając z nich, napiszemy przy $\eta = 1$ drugi ze związków (121) w postaci:

$$(122)\qquad \Psi(\mathfrak{L}'', \mathfrak{M}''; A', B') = 1,$$

albo też w postaci:

$$(123)\qquad \Psi(\mathfrak{L}', \mathfrak{M}'; A'', B'') = 1.$$

Weźmy pod uwagę trójkąt, którego dwoma bokami są wektory $\mathfrak{L}'', \mathfrak{M}''$ i A', B'. Związek (122) orzeka, że pole tego trójkąta, obiegane w kierunku wektora $\mathfrak{L}'', \mathfrak{M}''$, równa się $\frac{1}{2}$. Weźmy następnie pod uwagę trójkąt, którego dwoma bokami są wektory $\mathfrak{L}', \mathfrak{M}'$ i A'', B''. Związek (123) orzeka, że pole tego trójkąta, obiegane w kierunku wektora $\mathfrak{L}', \mathfrak{M}'$, równa się $\frac{1}{2}$.

Zajmiemy się teraz obrazami punktów niewłaściwych w interpretacji Marie. W tym celu możemy zastosować wzory § 68. Dla składowych, określonych wzorami (115), otrzymamy na wielkości (50) wyrażenia:

$$(124)\qquad \begin{cases} C' = u' - u'', & D' = -u' - u'', \\ E' = v' - v'', & F' = -v' - v'', \\ C'' = u' + u'', & D'' = u' - u'', \\ E'' = v' + v'', & F'' = v' - v'', \end{cases}$$

a na wielkości (52) wyrażenia:

$$(125)\qquad \begin{cases} \Omega_{11} = -2(u'v'' - v'u''), & \Omega_{12} = 2(u'v' + u''v''), \\ \Omega_{21} = -2(u'v' + u''v''), & \Omega_{22} = -2(u'v'' - v'u''), \\ (C, D) = 2(u'^2 + u''^2), & (E, F) = 2(v'^2 + v''^2). \end{cases}$$

Punkt na płaszczyźnie S, do którego dąży ślad M', gdy t dąży do nieskończoności, nazywać będziemy pierwszym śladem (M) punktu niewłaściwego i oznaczać będziemy przez $\underline{M'}$. Punkt na płaszczyźnie B, do którego dąży ślad M'', gdy t dąży do nieskończoności, nazywać będziemy drugim śladem (M) punktu niewłaściwego i oznaczać będziemy przez $\underline{M''}$. Z tabelki (124) wynika, że niema takiego zespolonego punktu niewłaściwego, żeby jego ślad $\underline{M'}$ był przy każdem dążeniu t do nieskończoności punktem właściwym, jak również, że niema takiego zespolonego punktu niewłaściwego, żeby jego ślad $\underline{M''}$ był przy każdem dążeniu t do nieskończoności punktem właściwym. Załóżmy teraz, że zachodzi równość:

$$(126)\qquad u'v'' - v'u'' = 0,$$

t.j. że uważany punkt niewłaściwy jest rzeczywisty i oznaczmy przez m spółczynnik rzeczywistego dwukierunku, który prowadzi do tego punktu niewłaściwego. Gdy spełniona jest równość (126), wówczas przy σ, czyniącem zadość związkom:

$$(127)\quad (u'-u'')\cos\sigma-(u'+u'')\sin\sigma=0,\ (v'-v'')\cos\sigma-(v'+v'')\sin\sigma=0,$$

każdy właściwy punkt płaszczyzny S może być przyjęty jako ślad $\underline{M'}$ punktu niewłaściwego, a przy σ, nie czyniącem zadość tym związkom, śladem $\underline{M'}$ punktu niewłaściwego jest niewłaściwy punkt płaszczyzny S, do którego prowadzi dwukierunek o spółczynniku m. Podobnież, jeżeli zachodzi równość (126) i przytem σ spełnia związki:

$$(128)\quad (u'+u'')\cos\sigma+(u'-u'')\sin\sigma=0,\ (v'+v'')\cos\sigma+(v'-v'')\sin\sigma=0,$$

to każdy właściwy punkt płaszczyzny B może być przyjęty jako ślad $\underline{M''}$ punktu niewłaściwego, a jeżeli σ nie spełnia tych związków, to punkt niewłaściwy ma ślad $\underline{M''}$, będący niewłaściwym punktem płaszczyzny B, do którego prowadzi dwukierunek o spółczynniku m. Niema takiej wartości parametru σ, przy której spełnione byłyby jednocześnie wszystkie równości (127) i (128). Jeżeli założymy następnie, że zachodzi nierówność:

$$(129)\qquad u'v''-v'u''\neq 0,$$

t.j. że punkt niewłaściwy jest urojony, to odpowiadać mu będzie nieskończenie wiele punktów niewłaściwych na płaszczyznach S i B. Oznaczając przez $\mathfrak{b}':\mathfrak{a}'$ i $\mathfrak{b}'':\mathfrak{a}''$ spółczynniki dwukierunków, prowadzących do tych punktów odpowiednio na płaszczyznach S i B, widzimy na podstawie równania (80) i wzorów (125), że spółczynniki te spełniać muszą związek:

$$(130)\quad (v'^2+v''^2)\,\mathfrak{a}'\mathfrak{a}''-(u'v'+u''v'')\,(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}''+\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'')+(u'^2+u''^2)\,\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''=0,$$

określający inwolucję eliptyczną. Widzimy, że wyprowadzone tutaj własności śladów (M) punktów niewłaściwych są w przypadku nierówności (129) te same, co odnośne własności śladów $\underline{R}$ i $\underline{A}$, skonstatowane w § 52 tomu I, w przypadku zaś równości (126) analogiczne do własności śladów $\underline{R}$ i $\underline{A}$, skonstatowanych tamże przy tem założeniu.

Niech będzie teraz zespolony wektor u, v i zajmiemy się rozważeniem węgłów (M) wszystkich wektorów o składowych, określonych wzorami (89), w których σ oznacza parametr rzeczywisty, a ρ rzeczywisty parametr dodatni. Na podstawie wzorów (91) i (124) składowe boków węgła (M) wektora $\bar{u}, \bar{v}$ określone będą wzorami:

$$(131)\quad \begin{cases} \bar{U}' = \rho\,[(u' - u'')\cos\sigma - (u' + u'')\sin\sigma], \\ \bar{V}' = \rho\,[(v' - v'')\cos\sigma - (v' + v'')\sin\sigma], \\ \bar{U}'' = \rho\,[(u' + u'')\cos\sigma + (u' - u'')\sin\sigma], \\ \bar{V}'' = \rho\,[(v' + v'')\cos\sigma + (v' - v'')\sin\sigma]. \end{cases}$$

Załóżmy naprzód, że spełniona jest równość (126). Wtedy równania:

$$(132)\qquad v'X - u'Y = 0, \quad v''X - u''Y = 0$$

albo przedstawiają oba tę samą linję prostą, albo też jedno z nich przedstawia linję prostą, a drugie jest tożsamością. Łatwo sprawdzić, że przy dowolnych wartościach parametrów ρ i σ oba boki, określone wzorami (131), leżą na tej linji prostej. Niema wartości parametru σ, przy których obie składowe obu boków byłyby zerami, ale są wartości tego parametru, przy których obie składowe pierwszego boku są zerami, a także są wartości tego parametru, przy których obie składowe drugiego boku są zerami. Gdy σ ma wartość stałą, przy której składowe $\bar{U}', \bar{V}'$ nie są obie zerami, wówczas koniec pierwszego boku opisuje przy ρ, przyjmującem wszystkie wartości dodatnie, ramię prostej (132) o początku w punkcie O, ale z wyłączeniem tego punktu. Podobnież, jeżeli σ ma wartość stałą, przy której wielkości $\bar{U}'', \bar{V}''$ nie są obie zerami, to przy zmienianiu się ρ, przyjmującem wszelkie wartości dodatnie, końce drugiego boku opisują ramię prostej (132) z początkiem w punkcie O, ale z wyłączeniem tego punktu. Gdy ρ ma wartość stałą, a σ przyjmuje wszelkie możliwe wartości, wówczas końce obu boków opisują bądź w jednym bądź w drugim kierunku ten sam odcinek linji prostej (132) o środku w punkcie O. Szczegółowe rozważanie tych dróg pomijamy.

Przypuśćmy następnie, że spełniona jest nierówność (129). Wtedy weźmiemy pod uwagę krzywą rodzaju elips:

$$[(v' + v'') X - (u' + u'') Y]^2 + [(v' - v'') X - (u' - u'') Y]^2 =$$
$$= 4 \rho^2 (u' v'' - v' u'')^2,$$

której równanie możemy także napisać w postaci:

$$(133)\quad (v'^2 + v''^2) X^2 - 2 (u' v' + u'' v'') X Y + (u'^2 + u''^2) Y^2 =$$
$$= 2 \rho^2 (u' v'' - v' u'')^2.$$

Przytem zauważymy, że związek (96) mieć będzie w uważanym przypadku postać:

$$(134)\quad (v'^2 + v''^2) \bar{U}' \bar{U}'' - (u' v' + u'' v'') (\bar{U}' \bar{V}'' + \bar{V}' \bar{U}'') +$$
$$+ (u'^2 + u''^2) \bar{V}' \bar{V}'' = 0,$$

oraz, że związki (98) mieć będą formę:

$$(135)\quad \begin{cases} \bar{U}'' = \dfrac{(u' v' + u'' v'') \bar{U}' - (u'^2 + u''^2) \bar{V}'}{u' v'' - v' u''}, \\ \bar{V}'' = \dfrac{(v'^2 + v''^2) \bar{U}' - (u' v' + u'' v'') \bar{V}'}{u' v'' - v' u''}, \end{cases}$$

a związki (99) formę:

$$(136)\quad \begin{cases} \bar{U}' = \dfrac{(u'^2 + u''^2) \bar{V}'' - (u' v' + u'' v'') \bar{U}''}{u' v'' - v' u''}, \\ \bar{V}' = \dfrac{(u' v' + u'' v'') \bar{V}'' - (v'^2 + v''^2) \bar{U}''}{u' v'' - v' u''}. \end{cases}$$

Z równości (134) wynika, że stosunki $\bar{V}' : \bar{U}'$ i $\bar{V}'' : \bar{U}''$ określają dwukierunki ze sobą sprzężone względem krzywej (133). Ze wzorów (90) łatwo wywnioskować, że wielkości $\Psi(u', v'; u'', v'')$ i $\Psi(\bar{u}', \bar{v}'; \bar{u}'', \bar{v}'')$ mają te same znaki, a z ostatniego ze związków (116) zastosowanego do wektora $\bar{u}, \bar{v}$, widać bezpośrednio, że wielkości $\Psi(\bar{u}', \bar{v}'; \bar{u}'', \bar{v}'')$ i $\Psi(\bar{U}', \bar{V}'; \bar{U}'', \bar{V}'')$ mają te same znaki. Stąd wynika, że wielkości $\Psi(u', v'; u'', v'')$ i $\Psi(\bar{U}', \bar{V}'; \bar{U}'', \bar{V}'')$ mają te same znaki. Moglibyśmy tę własność wyprowadzić także z równości (135) lub (136), ale wykonanie odnośnego rachunku pomijamy. Jeżeli zastosujemy równania (93) i (95) w uważa-

nym obecnie przypadku obrazu Marie, to skonstatujemy, że w tym przypadku końce obu boków $\bar{U}', \bar{V}'$ i $\bar{U}'', \bar{V}''$ leżą na krzywej (133). Wszystkie te wyniki prowadzą do następującego twierdzenia. Jeżeli spełniona jest nierówność (129), to końce pierwszego i drugiego boku węgła (M) wektora $\bar{u}, \bar{v}$ opisują przy stałem σ i zmiennem ρ ramiona o wspólnym początku w punkcie O z wyłączeniem tego początku, a przy stałem ρ i zmiennem σ jednę i tę samą krzywą rodzaju elips (133). W obu tych ruchach dwukierunki boków węgła (M) są stale dwukierunkami ze sobą sprzężonemi względem krzywej (133), kierunki ich zaś są takie, że pole węgła (M) wektora $\bar{u}, \bar{v}$ jest dodatnie, gdy wektor u, v jest górny, ujemne zaś, gdy wektor u, v jest dolny. Zauważymy przytem, że krzywe (133) są podobne do krzywych rozważanych w § 43 (zob. równania (66) tego paragrafu) i że krzywa (133) ma przy określonej wartości ρ wymiary $\sqrt{2}$ razy większe od krzywej rzeczonego § 43, która odpowiada tej samej wartości ρ.

§ 71. Interpretacja Laguerre'a punktów zespolonych i własności, odpowiadających tej interpretacji węgłów wektorów zespolonych.

Niech będzie wektor o składowych x'', y'' i oznaczmy literami m'', n'' składowe wektora, otrzymującego się przez obrót wektora x'', y'' o kąt $+\frac{\pi}{2}$ naokoło jego początku. Dla składowych m'', n'' mieć będziemy wzory:

$$(137) \qquad m'' = -\frac{x'' \cos\vartheta + y''}{\sin\vartheta}, \quad n'' = \frac{x'' + y'' \cos\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Jeżeli dla punktu zespolonego:

$$x = x' + i\,x'', \quad y = y' + i\,y''$$

przyjmiemy równania:

$$(138) \qquad \begin{cases} X' = x' - m'', & Y' = y' - n'', \\ X'' = x' + m'', & Y'' = y' + n'', \end{cases}$$

w których m'', n'' określone są wzorami (137), to otrzymamy obraz linjowy punktu x, y, który nazywać będziemy obrazem Laguerre'a, albo inaczej obrazem (L) właściwego punktu zespolonego x, y. Przytem punkt X', Y' na płaszczyźnie S oznaczać będziemy literą L' i nazywać pierwszym śladem (L) punktu zespolonego x, y, a punkt X'', Y'' na płaszczyźnie B oznaczać będziemy literą L'' i nazywać drugim śladem (L) punktu zespolonego x, y. Według danych śladów M' i M'' łatwo skonstruować ślady L' i L''. Jeżeli punkt x, y jest rzeczywisty, to, tak samo jak ślady M' i M'', oba ślady L' i L'' leżą w tymże punkcie rzeczywistym. Jeżeli zaś punkt x, y jest urojony, to ślady M' i M'' są różne jeden od drugiego. Oznaczmy punkt podziału odcinka $M'M''$ na dwie części równe literą R (fig. 104). Obracając wektor $\overline{RM'}$ naokoło punktu R o kąt $+\frac{\pi}{2}$,

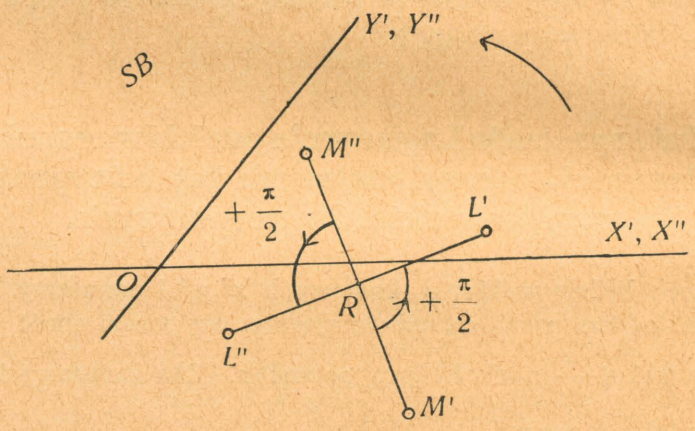

Fig. 104.

otrzymamy wektor, którego końcem jest szukany ślad L', a obracając wektor $\overline{RM''}$ naokoło punktu R o kąt $+\frac{\pi}{2}$, otrzymamy wektor, którego końcem jest szukany ślad L''. Punkt $\overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ sprzężony z punktem x, y ma te same ślady (L), co punkt x, y ale L'' jest jego pierwszym śladem, a L' jest jego drugim śladem.

Łatwo udowodnić, że ślady $(L): X', Y'$ i X'', Y'' są spółzmiennemi punktami zespolonego punktu x, y i przeprowadzenie tego dowodu pominiemy.

Niech będzie teraz wektor zespolony o składowych u, v. Stosując w uważanym obecnie przypadku równania (88), mieć będziemy równania:

$$(139)\qquad \begin{cases} U' = u' - p'', & V' = v' - q'', \\ U'' = u' + p'', & V'' = v' + q'', \end{cases}$$

gdzie p'' i q'' określają się wzorami:

$$(140)\qquad p'' = -\frac{u'' \cos\vartheta + v''}{\sin\vartheta}, \quad q'' = \frac{u'' + v'' \cos\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Węgieł, którego boki pierwszy i drugi mają odpowiednio składowe U', V' i U'', V'', określone wzorami (139), nazwiemy węgłem Laguerre'a wektora u, v, lub krócej węgłem (L) wektora u, v, a rzeczone boki pierwszym i drugim bokiem węgła (L). Boki węgła (L) wektora o składowych rzeczywistych u, v są oba tym samym wektorem rzeczywistym o składowych u, v. Jeżeli zaś składowe u, v nie są obie rzeczywiste, to boki węgła (M) wektora u, v nie są oba tym samym wektorem rzeczywistym i w szczególności końce tych dwóch boków są różne jeden od

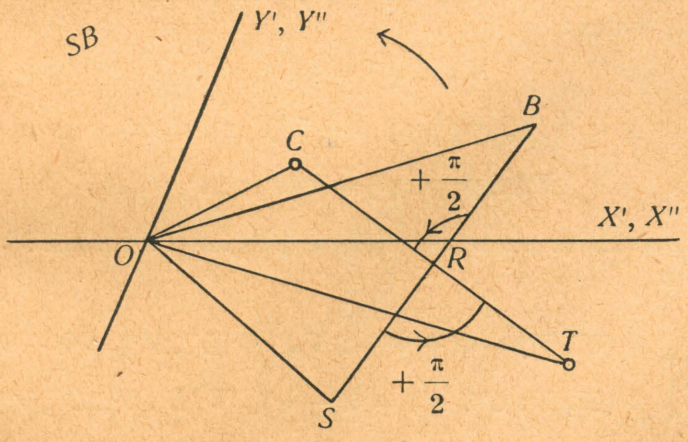

Fig. 105.

drugiego. Z równań (139) i (140) wynika droga konstrukcji węgła (L) urojonego wektora u, v według danego węgła (M) tego wektora. Jeżeli $\overline{OS}$ i $\overline{OB}$ są bokami pierwszym i drugim węgła (M) tego

wektora (fig. 105), to oznaczając literą R środek odcinka SB i obracając wektory $\overline{RS}$ i $\overline{RB}$ naokoło punktu R o kąt $+\frac{\pi}{2}$, otrzymamy wektory $\overline{RT}$ i $\overline{RC}$, których końce są odpowiednio końcami pierwszego i drugiego boku szukanego węgła (L). Zatem pierwszym bokiem szukanego węgła (L) jest wektor $\overline{OT}$, a drugim bokiem tego węgła jest wektor $\overline{OC}$. Widoczne, że węgły (L) dwóch wektorów ze sobą sprzężonych mają te same boki, ale pierwszy bok któregokolwiek z nich jest drugim bokiem drugiego z nich.

Podobnie jak przy rozważaniu interpretacji Marie zajmiemy się wyprowadzeniem wyrażeń niezmienników wektorów $\overline{OT}$ i $\overline{OC}$ przez wielkości $u', v'; u'', v''$. Na podstawie równości (139) łatwo otrzymać równości:

$$(141)\quad \begin{cases} \Phi(U', V') = \Phi(u', v') + \Phi(p'', q'') - 2\,\Phi(u', v'; p'', q''), \\ \Phi(U'', V'') = \Phi(u', v') + \Phi(p'', q'') + 2\,\Phi(u', v'; p'', q''), \\ \Phi(U', V'; U'', V'') = \Phi(u', v') - \Phi(p'', q''), \\ \Psi(U', V'; U'', V'') = 2\,\Psi(u', v'; p'', q'). \end{cases}$$

A jeżeli zwrócimy uwagę na to, że na podstawie wzorów (140) zachodzą wzory:

$$\Phi(p'', q'') = \Phi(u'', v''),$$

$$\Phi(u', v'; p'', q'') = -\Psi(u', v'; u'', v''),$$

$$\Psi(u', v'; p'', q'') = \Phi(u', v'; u'', v''),$$

to, przypominając oznaczenia (35) w § 48 tomu I-go, mieć będziemy równości:

$$(142)\quad \begin{cases} \Phi(U', V') = \Phi' + \Phi'' + 2\,\Psi, \quad \Phi(U'', V'') = \Phi' + \Phi'' - 2\,\Psi, \\ \Phi(U', V'; U'', V'') = \Phi' - \Phi'', \quad \Psi(U', V'; U'', V'') = 2\,\Phi. \end{cases}$$

Z równości pierwszego wiersza tych wzorów wynika równość:

$$(143)\qquad 4\,\Psi = \Phi(U', V') - \Phi(U'', V''),$$

a z niej odczytujemy twierdzenia następujące. Wektor zespolony u, v, którego nie obie składowe są zerami, ma wtedy

i tylko wtedy dwukierunek rzeczywisty, gdy boki węgła (L) tego wektora mają oba tę samą długość. Wektor urojony u, v jest wtedy i tylko wtedy wektorem górnym, gdy pierwszy bok jego węgła (L) jest dłuższy od drugiego boku, a wtedy i tylko wtedy wektorem dolnym, gdy drugi bok jego węgła (L) jest dłuższy od pierwszego boku.

Zajmiemy się teraz węgłem (L) wektora zespolonego λ, μ, czyniącego zadość równości (117), t j. określającego k i e r u n e k względnie p s e u d o k i e r u n e k. Jeżeli rzeczony kierunek jest rzeczywisty, to oba boki jego węgła (L) są jednym i tym samym wektorem rzeczywistym o długości równej jedności i o składowych λ, μ. We wszystkich innych przypadkach boki węgła (M) wektora λ, μ, spełniającego równość (117), mają oba tę samą długość i tworzą ze sobą dla każdego kierunku kąt ostry, a dla każdego pseudokierunku kąt prosty. Niech będą $\overline{OS}$ i $\overline{OB}$ boki węgła (M) uważanego wektora λ, μ (fig. 106). Jeżeli R oznacza środek odcinka BS, to stosując celem wyznaczenia węgła (L)

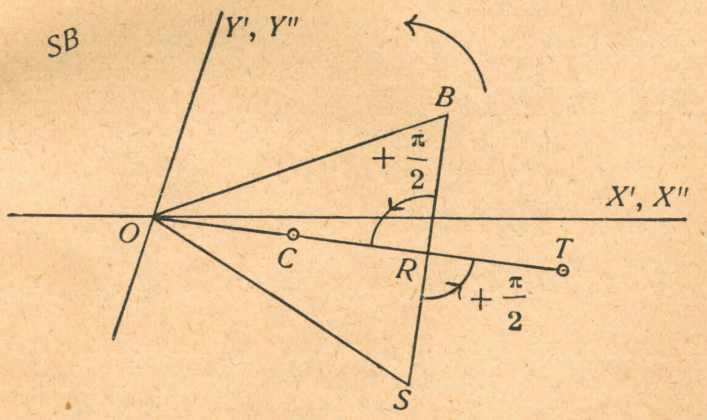

Fig. 106.

obroty wektorów $\overline{RS}$ i $\overline{RB}$ o kąt $+\frac{\pi}{2}$ naokoło punktu R, otrzymamy końce T i C boków szukanego węgła (L) na prostej, łączącej punkt O z punktem R. Pierwszym i drugim bokiem tego węgła (L) wektora λ, μ będą wektory $\overline{OT}$ i $\overline{OC}$, położone oba na tejże linji prostej. Jeżeli przytem λ, μ określa kierunek, to oba te boki mają długości różne od zera i ten sam kierunek, co wektor

λ', μ'. Jeżeli zaś λ, μ określa pseudokierunek, to jeden z tych boków ma długość równą zeru, a drugi ma długość różną od zera i ten sam kierunek co wektor λ', μ'. Jeżeli kierunek względnie pseudokierunek jest górny, to pierwszy bok jest dłuższy od drugiego, jeżeli zaś kierunek względnie pseudokierunek jest dolny, to drugi bok jest dłuższy od pierwszego.

Oznaczmy teraz przez $\mathfrak{L}', \mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{L}'', \mathfrak{M}''$ składowe pierwszego i drugiego boku węgła (L) kierunku względnie pseudokierunku λ, μ. Wtedy mieć będziemy równania:

$$(144)\qquad \begin{cases} \mathfrak{L}' = \lambda' - \alpha'', \quad \mathfrak{M}' = \mu' - \beta'', \\ \mathfrak{L}'' = \lambda' + \alpha'', \quad \mathfrak{M}'' = \mu' + \beta'', \end{cases}$$

gdzie α'', β'' określają się wzorami:

$$(145)\qquad \alpha'' = -\frac{\lambda'' \cos\vartheta + \mu''}{\sin\vartheta}, \quad \beta'' = \frac{\lambda'' + \mu'' \cos\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Korzystając ze wzorów (142) przy uwzględnieniu warunków (119), możemy niezmienniki boków węgła (L) kierunku względnie pseudokierunku wyrazić przez wielkości $\lambda', \mu', \lambda'', \mu''$ zapomocą wzorów:

$$(146)\qquad \begin{cases} \Phi(\mathfrak{L}', \mathfrak{M}') = \Phi(\lambda', \mu') + \Phi(\lambda'', \mu'') + 2\Psi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu''), \\ \Phi(\mathfrak{L}'', \mathfrak{M}'') = \Phi(\lambda', \mu') + \Phi(\lambda'', \mu'') - 2\Psi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu''), \\ \Phi(\mathfrak{L}', \mathfrak{M}'; \mathfrak{L}'', \mathfrak{M}'') = \eta, \quad \Psi(\mathfrak{L}', \mathfrak{M}'; \mathfrak{L}'', \mathfrak{M}'') = 0. \end{cases}$$

Warunki konieczne i wystarczające, żeby wielkości $\mathfrak{L}', \mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{L}'', \mathfrak{M}''$ były odpowiednio składowemi boków węgła (L) kierunku względnie pseudokierunku polegają na tem, żeby wielkości te nie były wszystkie jednocześnie zerami i żeby czyniły zadość równościom ostatniego wiersza związków (146). Równości pierwszych dwóch wierszy związków (146) określają kwadraty długości tych boków. Łatwo sprawdzić, że prawe strony tych dwóch równości mają wartości nieujemne. W tym celu zauważmy, że przy spełnieniu warunków (119) zachodzą równości:

$$[\Phi(\lambda', \mu') + \Phi(\lambda'', \mu'')]^2 = 4\Phi^2(\lambda', \mu') - 4\eta\Phi(\lambda', \mu') + \eta^2,$$

$$4\Psi^2(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'') = 4\Phi^2(\lambda', \mu') - 4\eta\Phi(\lambda', \mu'),$$

z których wynika, że przy $\eta = 0$ jedna z rzeczonych prawych stron jest zerem, a druga jest dodatnia i że przy $\eta = 1$ obie te prawe strony są dodatnie.

Na podstawie wzorów (144), (145) i warunków (119) łatwo można otrzymać równości:

$$\Psi(\lambda', \mu'; \mathfrak{L}', \mathfrak{M}') = 0, \quad \Psi(\lambda', \mu'; \mathfrak{L}'', \mathfrak{M}'') = 0,$$

$$\Phi(\lambda', \mu'; \mathfrak{L}', \mathfrak{M}') = \Phi(\lambda', \mu') + \Psi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu''),$$

$$\Phi(\lambda', \mu'; \mathfrak{L}'', \mathfrak{M}'') = \Phi(\lambda', \mu') - \Psi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu''),$$

gdzie strony prawe dwóch ostatnich wierszy mają wartości nieujemne. Równości te sprawdzają wyprowadzone poprzednio na drodze geometrycznej własności boków $\mathfrak{L}', \mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{L}'', \mathfrak{M}''$. Gdy $\Psi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'') > 0$, wówczas przy $\eta = 1$ oba boki odnośnego węgła (L) mają długości różne od zera i oba ten sam kierunek wektora λ', μ', przyczem pierwszy z tych boków jest dłuższy, a drugi krótszy; przy $\eta = 0$ pierwszy bok węgła (L) ma długość różną od zera i kierunek wektora λ', μ', drugi zaś długość równą zeru. Gdy $\Psi(\lambda', \mu'; \lambda'', \mu'') < 0$, wówczas przy $\eta = 1$ oba boki węgła (L) mają długości różne od zera i oba kierunek wektora λ', μ', przyczem pierwszy bok jest krótszy, a drugi dłuższy; przy $\eta = 0$ pierwszy bok węgła (L) ma długość równą zeru, a drugi ma długość różną od zera i kierunek wektora λ', μ'.

Zwrócimy się obecnie do zastosowania rachunków §§ 68 i 69. Jeżeli prócz oznaczeń (140) przyjmiemy jeszcze oznaczenia:

$$(147) \qquad p' = -\frac{u' \cos\vartheta + v'}{\sin\vartheta}, \quad q' = \frac{u' + v' \cos\vartheta}{\sin\vartheta},$$

to korzystając ze wzorów ogólnych (50) będziemy mogli w przypadku interpretacji Laguerre'a napisać wzory:

$$(148) \qquad \begin{cases} C' = u' - p'', & D' = -u'' - p', \\ E' = v' - q'', & F' = -v'' - q', \\ C'' = u' + p'', & D'' = -u'' + p', \\ E'' = v' + q'', & F'' = -v'' + q'. \end{cases}$$

Na podstawie tych wzorów obliczymy naprzód określone dwoma ze wzorów (52) wielkości Ω_{11} i Ω_{22}. Otrzymujemy wyrażenia:

$$(149)\quad \begin{cases} \Omega_{11} = -(u'q' - v'p' + u''q'' - v''p'' + u'v'' - v'u'' + p'q'' - q'p''), \\ \Omega_{22} = u'q' - v'p' + u''q'' - v''p'' - (u'v'' - v'u'') - (p'q'' - q'p''), \end{cases}$$

ale łatwo sprawdzić, że zachodzą równości:

$$u'q' - v'p' = \Phi(u', v')\operatorname{cosec}\vartheta,$$

$$u''q'' - v''p'' = \Phi(u'', v'')\operatorname{cosec}\vartheta,$$

$$p'q'' - q'p'' = u'v'' - v'u'' = \Psi(u', v'; u'', v'')\operatorname{cosec}\vartheta,$$

wskutek których przy zastosowaniu krótszych oznaczeń na niezmienniki wektorów u', v' i u'', v'', będziemy mogli wyrażenia (149) napisać w postaci:

$$(150)\quad \begin{cases} \Omega_{11} = -(\Phi' + \Phi'' + 2\Psi)\operatorname{cosec}\vartheta, \\ \Omega_{22} = (\Phi' + \Phi'' - 2\Psi)\operatorname{cosec}\vartheta. \end{cases}$$

Na podstawie związku, łączącego niezmienniki dwóch wektorów, mamy równość:

$$(\Phi' + \Phi'')^2 - 4\Psi^2 = (\Phi' - \Phi'')^2 + 4\Phi^2,$$

z której wynika, że jeżeli wektor u, v, którego nie obie składowe są zerami, jest nieizotropowy, to jedna z wielkości Ω_{11}, Ω_{22} jest dodatnia, a druga ujemna, jeżeli zaś jest on izotropowy, to jedna z rzeczonych wielkości jest zerem, a druga jest różna od zera. Obliczając następnie dalsze z wyrażeń (52), dochodzimy do wzorów:

$$(151)\quad \begin{cases} \Omega_{12} = u'q' + v'p' + u''q'' + v''p'', \\ \Omega_{21} = -(u'q' + v'p' + u''q'' + v''p''), \\ (C, D) = 2(u'p' + u''p''), \quad (E, F) = 2(v'q' + v''q''). \end{cases}$$

Założymy naprzód, że wektor u, v którego nie obie składowe są zerami jest n i e i z o t r o p o w y. Korzystając ze wzorów (151), możemy w uważanym przypadku związek (80) napisać w postaci:

$$(152)\qquad 2(v'q'+v''q'')\,\mathfrak{a}'\mathfrak{a}''+2(u'p'+u''p'')\,\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''-$$
$$-(u'q'+v'p'+u''q''+v''p'')(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}''+\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'')=0$$

i zauważymy, że zachodzi nierówność:

$$(153)\qquad \Omega_{11}\,\Omega_{22}<0.$$

Widzimy więc, że związek (152) określa hiperboliczną inwolucję dwukierunków. Inwolucja ta ma dwa niezmienne dwukierunki rzeczywiste, które spełniają równanie:

$$(154)\qquad (v'q'+v''q'')\,\mathfrak{a}^2+(u'p'+u''p'')\,\mathfrak{b}^2-$$
$$-(u'q'+v'p'+u''q''+v''p'')\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}=0.$$

Ponieważ zachodzi równość:

$$v'q'+v''q''+u'p'+u''p''+(u'q'+v'p'+u''q''+v''p'')\cos\vartheta=$$
$$=\Phi(u',v';p',q')+\Phi(u'',v'';p'',q''),$$

a każdy z wyrazów prawej strony tej równości jest zerem, przeto dwukierunki niezmienne rzeczonej inwolucji są do siebie prostopadłe. Pokażemy, że są niemi dwukierunki $\mu':\lambda'$ i $\mu'':\lambda''$, t.j. dwukierunki boków węgła kierunku wektora u, v. Ponieważ węgieł ten jest prostokątny, więc wystarczy sprawdzić to dla jednego z tych dwukierunków np. dla dwukierunku $\mu':\lambda'$. Wielkości $\lambda', \mu', \lambda'', \mu''$ spełniają związek:

$$(v'+iv'')(\lambda'+i\lambda'')-(u'+iu'')(\mu'+i\mu'')=0,$$

który jest równoważny z równaniami:

$$(155)\qquad \begin{cases} v'\lambda'-u'\mu'-(v''\lambda''-u''\mu'')=0, \\ v''\lambda'-u''\mu'+v'\lambda''-u'\mu''=0. \end{cases}$$

Rugując λ'', μ'' z równań (155) i z równości:

$$(\lambda'+\mu'\cos\vartheta)\lambda''+(\lambda'\cos\vartheta+\mu')\mu''=0,$$

otrzymujemy równość:

$$\begin{vmatrix} v'\lambda' - u'\mu', & -v'' & , & u'' \\ v''\lambda' - u''\mu', & v' & , & -u' \\ 0 & , \lambda' + \mu'\cos\vartheta, & \lambda'\cos\vartheta + \mu' & \end{vmatrix} = 0,$$

którą możemy napisać w postaci:

$$(v'\lambda' - u'\mu')\,\Phi(u', v'; \lambda', \mu') + (v''\lambda' - u''\mu')\,\Phi(u'', v''; \lambda', \mu') = 0,$$

albo, przy użyciu oznaczeń (140) i (147) w postaci:

$$(v'\lambda' - u'\mu')\,(q'\lambda' - p'\mu') + (v''\lambda' - u''\mu')\,(q''\lambda' - p''\mu') = 0.$$

Stąd po innem uporządkowaniu wyrazów wynika bezpośrednio, że dwukierunek $\mu' : \lambda'$ spełnia związek (154).

Załóżymy następnie, że wektor u, v jest **izotropowy**. Wtedy mamy równości:

$$(156) \qquad u'' = -\frac{u'\cos\vartheta + v'}{\varepsilon\sin\vartheta}, \quad v'' = \frac{u' + v'\cos\vartheta}{\varepsilon\sin\vartheta},$$

gdzie $\varepsilon = +1$, gdy wektor jest górny, a $\varepsilon = -1$, gdy wektor jest dolny. Łatwo dostrzec, że przy spełnieniu równości (156) zachodzą równości:

$$p' = \varepsilon u'', \quad q' = \varepsilon v'', \quad p'' = -\varepsilon u', \quad q'' = -\varepsilon v'$$

i wtedy na podstawie wzorów (148) otrzymamy wzory:

$$(157) \qquad \begin{cases} C' = (1+\varepsilon)u', & D' = -(1+\varepsilon)u'', \\ E' = (1+\varepsilon)v', & F' = -(1+\varepsilon)v'', \\ C'' = (1-\varepsilon)u', & D'' = -(1-\varepsilon)u'', \\ E'' = (1-\varepsilon)v', & F'' = -(1-\varepsilon)v''. \end{cases}$$

Jeżeli wektor u, v jest górny, to zachodzi równość:

$$(158) \qquad \Omega_{11} = -4\,\Phi'\,\mathrm{cosec}\,\vartheta$$

i na płaszczyźnie S otrzymujemy na podstawie wzoru (77) dwukierunek, określony w zależności od parametru σ stosunkiem:

$$(159) \qquad \frac{\mathfrak{b}'}{\mathfrak{a}'} = \frac{v'\cos\sigma - v''\sin\sigma}{u'\cos\sigma - u''\sin\sigma},$$

który można, korzystając ze wzorów (156), przedstawić także w postaci:

$$\frac{\mathfrak{b}'}{\mathfrak{a}'} = \frac{v' \sin(\vartheta - \sigma) - u' \sin\sigma}{u' \sin(\vartheta + \sigma) + v' \sin\sigma}.$$

Nadto, gdy wektor jest górny, zachodzą równości:

$$C'' = 0, \quad D'' = 0, \quad E'' = 0, \quad F'' = 0. \tag{160}$$

Jeżeli wektor u, v jest dolny, to mamy równość:

$$\Omega_{22} = 4\,\Phi'' \operatorname{cosec}\vartheta \tag{161}$$

i otrzymujemy na płaszczyźnie B dwukierunek zależny od parametru σ i określający się na mocy wzoru (78) równością:

$$\frac{\mathfrak{b}''}{\mathfrak{a}''} = \frac{v' \cos\sigma - v'' \sin\sigma}{u' \cos\sigma - u'' \sin\sigma}, \tag{162}$$

którą można przy zastosowaniu wzorów (156) napisać także w postaci:

$$\frac{\mathfrak{b}''}{\mathfrak{a}''} = \frac{v' \sin(\vartheta + \sigma) + u' \sin\sigma}{u' \sin(\vartheta - \sigma) - v' \sin\sigma}.$$

Gdy wektor u, v jest dolny, spełnione są równości:

$$C' = 0, \quad D' = 0, \quad E' = 0, \quad F' = 0. \tag{163}$$

Na podstawie powyższych rozważań i rachunków można odpowiedzieć na zapytanie, jak zachowują się ślady L' i L'' punktu zespolonego x, y, który dąży do punktu niewłaściwego. Jeżeli naskutek pewnego procesu granicznego punkt zespolony x, y zmierza do punktu niewłaściwego, a jego ślad L' dąży wtedy do punktu właściwego czy też niewłaściwego płaszczyzny S, to punkt ten nazywać będziemy pierwszym śladem (L) zespolonego punktu niewłaściwego i oznaczać będziemy literą $\underline{L'}$. Podobnież, jeżeli przy rzeczonym procesie granicznym ślad L'' punktu zespolonego x, y dąży do punktu właściwego, czy też niewłaściwego płaszczyzny B, to punkt ten nazywać będziemy

drugim śladem (L) zespolonego punktu niewłaściwego i oznaczać będziemy literą $\underline{L''}$. Opierając się na powyższych rozważaniach i rachunkach możemy wypowiedzieć twierdzenie następujące. Niewłaściwy nieizotropowy punkt zespolony ma nieskończenie wiele par odpowiadających sobie śladów $\underline{L'}$ i $\underline{L''}$ na płaszczyznach S i B. Wszystkie te ślady są punktami niewłaściwemi i tworzą inwolucję hiperboliczną, której elementy niezmienne są punktami niewłaściwemi, do których prowadzą dwukierunki wzajemnie prostopadłe. Niewłaściwy izotropowy punkt górny ma nieskończenie wiele śladów $\underline{L'}$, które są wszystkiemi rzeczywistemi punktami niewłaściwemi płaszczyzny S i nieskończenie wiele śladów $\underline{L''}$, które są wszystkiemi rzeczywistemi właściwemi punktami płaszczyzny B. Niewłaściwy izotropowy punkt dolny ma nieskończenie wiele śladów $\underline{L'}$, które są wszystkiemi rzeczywistemi właściwemi punktami płaszczyzny S i nieskończenie wiele śladów $\underline{L''}$, które są wszystkiemi rzeczywistemi niewłaściwemi punktami płaszczyzny B.

W § 69 rozważaliśmy istotne krzywe rodzaju elips, określone równaniami (93) i (95). Założymy, że wektor o składowych u, v, nie będących jednocześnie zerami, jest wektorem nieizotropowym i zauważmy, że ze wzorów (148) wynikają wzory:

$$(164)\quad \begin{cases} F'\,\overline{U}' - D'\,\overline{V}' = [\Psi(u'', v''; \overline{U}', \overline{V}') - \Phi(u', v'; \overline{U}', \overline{V}')]\operatorname{cosec}\vartheta, \\ C'\,\overline{V}' - E'\,\overline{U}' = [\Psi(u', v'; \overline{U}', \overline{V}') + \Phi(u'', v''; \overline{U}', \overline{V}')]\operatorname{cosec}\vartheta, \\ F''\,\overline{U}'' - D''\,\overline{V}'' = [\Psi(u'', v''; \overline{U}'', \overline{V}'') + \Phi(u', v'; \overline{U}'', \overline{V}'')]\operatorname{cosec}\vartheta, \\ C''\,\overline{V}'' - E''\,\overline{U}'' = [\Psi(u', v'; \overline{U}'', \overline{V}'') - \Phi(u'', v''; \overline{U}'', \overline{V}'')]\operatorname{cosec}\vartheta. \end{cases}$$

Przytoczymy następnie pewne związki, odnoszące się do niezmienników, figurujących po prawych stronach pierwszych dwóch ze wzorów (164). Mamy równości:

$$(165)\quad \begin{cases} \Phi^2(u', v'; \overline{U}', \overline{V}') + \Psi^2(u', v'; \overline{U}', \overline{V}') = \Phi'\,\Phi(\overline{U}', \overline{V}'), \\ \Phi^2(u'', v''; \overline{U}', \overline{V}') + \Psi^2(u'', v''; \overline{U}', \overline{V}') = \Phi''\,\Phi(\overline{U}', \overline{V}'), \\ \Phi(u', v'; \overline{U}', \overline{V}')\,\Psi(u'', v''; \overline{U}', \overline{V}') - \\ -\Phi(u'', v''; \overline{U}', \overline{V}')\,\Psi(u', v'; \overline{U}', \overline{V}') = -\Psi\,\Phi(\overline{U}', \overline{V}'). \end{cases}$$

Jeżeli pierwsze dwa z wyrażeń (164) podstawimy w równanie (93) i uwzględnimy równości (165), to otrzymamy:

$$(\Phi' + \Phi'' + 2\Psi)\operatorname{cosec}^2\vartheta\,\Phi(\overline{U}', \overline{V}') = \rho^2\,\Omega_{11}^2.$$

Zważywszy zaś, że pierwszy czynnik lewej strony tej równości jest różny od zera przy naszych założeniach co do wektora u, v i opierając się na pierwszym ze wzorów (150) dochodzimy do równania:

$$\Phi(\overline{U}', \overline{V}') = (\Phi' + \Phi'' + 2\Psi)\,\rho^2. \tag{166}$$

Łatwo dostrzec, że jeżeli wyrażenia, podane w trzecim i czwartym wierszu wzorów (164), podstawimy w równanie (95), to taką samą drogą dojdziemy przy przyjętych założeniach co do wektora u, v do równania:

$$\Phi(\overline{U}'', \overline{V}'') = (\Phi' + \Phi'' - 2\Psi)\,\rho^2. \tag{167}$$

Przy stałem ρ a zmiennem σ końce pierwszego i drugiego boku węgła (L) wektora $\overline{u}, \overline{v}$ znajdują się odpowiednio na kołach (166) i (167). Jeżeli promienie tych kół oznaczymy odpowiednio przez r' i r'', to mieć będziemy równości:

$$r'^2 + r''^2 = 2(\Phi' + \Phi'')\,\rho^2, \quad r'^2 - r''^2 = 4\Psi\,\rho^2. \tag{168}$$

Dochodzimy do następującego twierdzenia. Jeżeli u, v jest wektorem nieizotropowym, którego nie obie składowe są zerami, to końce pierwszego i drugiego boku węgła (L) odnośnego wektora $\overline{u}, \overline{v}$ poruszają się przy stałem ρ i zmiennem σ odpowiednio po kołach, których promienie r' i r'' czynią zadość równaniom (168), a wspólny środek leży w początku spółrzędnych. Jeżeli wektor u, v ma dwukierunek rzeczywisty, to rzeczone promienie są sobie równe. Jeżeli wektor u, v jest urojony górny, to promień r' jest większy od promienia r'', jeżeli zaś wektor u, v jest urojony dolny, to promień r' jest mniejszy od promienia r''.

Do uważanych tutaj wektorów $\overline{u}, \overline{v}$ możemy zastosować związki (97), lub równoważne z niemi związki (101). Figurujące w tych ostatnich wielkości tabelki (100), są w przypadku rozważanym określone wyrażeniami:

$$(169)\quad \begin{cases} \tau' = -\frac{1}{2}(\Phi' + \Phi'' + 2\Psi), \quad \tau'' = \frac{1}{2}(\Phi' + \Phi'' - 2\Psi), \\ T_1' = \frac{1}{2}\Psi(u' - p'', v' - q''; \overline{U}', \overline{V}'), \\ T_1'' = \frac{1}{2}\Psi(u' + p'', v' + q''; \overline{U}'', \overline{V}''), \\ T_2' = \frac{1}{2}\Psi(-u'' - p', -v'' - q'; \overline{U}', \overline{V}'), \\ T_2'' = \frac{1}{2}\Psi(-u'' + p', -v'' + q'; \overline{U}'', \overline{V}''). \end{cases}$$

Łatwo konstruować trójkąty, których pola określone są czterema ostatniemi ze wzorów (169). Weźmy pod uwagę węgieł wektora u, v. Jeżeli boki u', v' i u'', v'' tego węgła obrócimy naokoło początku spółrzędnych o kąty $+\frac{\pi}{2}, +\pi, +\frac{3\pi}{2}$, to otrzymamy odpowiednio wektory o składowych: p', q' i p'', q''; $-u', -v'$ i $-u'', -v''$; $-p', -q'$ i $-p'', -q''$. Wykreślimy teraz czwarte wierzchołki równoległoboków, których dwoma bokami są wektory:

$$u', v' \text{ i } -p'', -q''; \quad u', v' \text{ i } p'', q'';$$

$$-u'', -v'' \text{ i } -p', -q'; \quad -u'', -v'' \text{ i } p', q'.$$

Składowe wektorów, których wspólny początek jest w początku spółrzędnych, a końce znajdują się w czterech rzeczonych wierzchołkach, są następujące:

$$(170)\quad \begin{cases} u' - p'', \quad v' - q''; \quad u' + p'', \quad v' + q''; \\ -u'' - p', \quad -v'' - q'; \quad -u'' + p', \quad -v'' + q'. \end{cases}$$

Składowe te figurują w czterech ostatnich ze wzorów (169). Te cztery wzory określają pola trójkątów i zawsze, gdy nie obie składowe odnośnego wektora (170) są zerami, kierunek obiegu trójkąta jest zgodny z kierunkiem tego wektora.

Zastosujemy tutaj do węgła (L) nieizotropowego wektora zespolonego $\overline{u}, \overline{v}$ rozważania, podane w końcu § 69. Jeżeli przyjmiemy oznaczenie:

$$(171)\quad \varphi(\xi, \eta) = 2\,[(v'q' + v''q'')\,\xi^2 + (u'p' + u''p'')\,\eta^2 - (u'q' + v'p' + u''q'' + v''p'')\,\xi\eta],$$

to będziemy mogli w tym przypadku równanie hiperbol (110) napisać w postaci.

$$(172)\quad \varphi(\xi, \eta) + \frac{m' \sin^4 \vartheta}{(\Phi' + \Phi'' + 2\Psi)\,[(\Phi' - \Phi'')^2 + 4\Phi^2]} = 0,$$

a równanie hiperbol (111) w postaci:

$$(173)\quad \varphi(\xi, \eta) - \frac{m'' \sin^4 \vartheta}{(\Phi' + \Phi'' - 2\Psi)\,[(\Phi' - \Phi'')^2 + 4\Phi^2]} = 0.$$

Dwukierunki $\overline{V}' : \overline{U}'$ i $\overline{V}'' : \overline{U}''$ są jednocześnie tym samym dwukierunkiem asymptotycznym i wtedy pole odnośnego węgła (L) równa się zeru. Jeżeli ten przypadek nie zachodzi, to dwukierunek $\overline{V}' : \overline{U}'$ jest zewnętrzny względnie wewnętrzny w stosunku do hiperbol (172), gdy spełniona jest górna względnie dolna z nierówności:

$$(174)\quad \varphi(\overline{U}', \overline{V}') \gtrless 0,$$

a dwukierunek $\overline{V}'', \overline{U}''$ jest zewnętrzny względnie wewnętrzny w stosunku do hiperbol (173), gdy spełniona jest górna względnie dolna z nierówności:

$$(175)\quad \varphi(\overline{U}'', \overline{V}'') \lessgtr 0.$$

Na podstawie twierdzenia, podanego w końcu § 69, pole węgła (L) wektora zespolonego $\overline{u}, \overline{v}$, jest dodatnie, gdy spełnione są górne nierówności (174) i (175), jest zaś ujemne, gdy spełnione są dolne nierówności (174) i (175). Te konkluzje zgadzają się z faktem, że wzór (108) można w uważanym przypadku napisać w postaci:

$$\frac{1}{2}\Psi(\overline{U}', \overline{V}'; \overline{U}'', \overline{V}'') = \frac{\varphi(\overline{U}', \overline{V}') \sin^2 \vartheta}{2(\Phi' + \Phi'' + 2\Psi)},$$

a wzór (109) w postaci:

$$\frac{1}{2}\Psi(\overline{U}', \overline{V}'; \overline{U}'', \overline{V}'') = -\frac{\varphi(\overline{U}'', \overline{V}'')\sin^2\vartheta}{2(\Phi' + \Phi'' - 2\Psi)}.$$

Załóżmy teraz, że wektor u, v jest izotropowy. Jeżeli jest on wektorem górnym, to spełnione są równości (160) i odnośne wielkości $\overline{U}'', \overline{V}''$ są obie zerami. Łatwo przytem wyprowadzić, że miejsce geometryczne (93) określa się w tym przypadku równaniem:

$$\Phi(\overline{U}', \overline{V}') = 4\Phi'\rho^2. \tag{176}$$

Jeżeli zaś wektor izotropowy u, v jest dolny, to spełnione są równości (163) i odnośne wielkości $\overline{U}', \overline{V}'$ są obie zerami. Wtedy dla miejsca geometrycznego (95) otrzymujemy równanie:

$$\Phi(\overline{U}'', \overline{V}'') = 4\Phi''\rho^2. \tag{177}$$

Dochodzimy do następującego twierdzenia. Jeżeli u, v jest wektorem izotropowym górnym, to długość drugiego boku węgła (L) odnośnego wektora $\overline{u}, \overline{v}$ jest zerem, a koniec pierwszego boku tego węgła porusza się przy stałem ρ i zmiennem σ po kole (176). Jeżeli zaś u, v jest wektorem izotropowym dolnym, to długość pierwszego boku węgła (L) odnośnego wektora $\overline{u}, \overline{v}$ równa się zeru, a koniec drugiego boku tego węgła porusza się przy stałem ρ i zmiennem σ po kole (177).

Indeks alfabetyczny.

Asymptoty hiperboli 6 — 8, 63 — 65; — krzywych stopnia drugiego 86 — 91; — w przypadkach $\Delta = 0$ 91.

Biegunowa punktu w stosunku do krzywej stopnia drugiego 119, 120.

Boki węgła (L) wektora zespolonego 653 — 655; — (M) wektora zespolonego 643, 644; — (Q) wektora zespolonego 632.

Czwórka kołowa liczb zespolonych, odpowiadająca uporządkowanej parze liczb rzeczywistych 364; — kołowa wektorów urojonych 368; — i kołowe liczb zespolonych ze sobą sprzężone 364, 365; — i kołowe wektorów ze sobą sprzężone 369; — i ósemki kołowej wektorów pierwsza i druga 369.

Długość prostopadłej opuszczonej z bieżącego punktu elipsy względnie hiperboli na kierownicę 200; — prostopadłej opuszczonej z ogniska elipsy względnie hiperboli na styczną do tej krzywej w jej punkcie x, y 205; — prostopadłej opuszczonej z ogniska paraboli na jej styczną w punkcie x, y 211, 212; — prostopadłej opuszczonej ze środka elipsy względnie hiperboli na styczną do tej krzywej w jej punkcie x, y 205; — prostopadłej opuszczonej z wierzchołka paraboli na jej styczną w punkcie x, y 212; kwadraty długości boków węgłów kierunków asymptotycznych 459.

Dwukierunek asymptotyczny krzywej stopnia drugiego 75 — 77; — sam ze sobą sprzężony 144; — wewnętrzny względnie zewnętrzny istotnej krzywej stopnia drugiego 118; — i do siebie prostopadłe, którym naskutek przekształcenia linjowego odpowiadają również dwukierunki prostopadłe 319 — 321; — i główne 164 — 166; — i górne względnie dolne wśród dwukierunków skojarzonych inwolucyjnie 488; — i niezmienne inwolucji hiperbolicznej w systemie interpretacji Laguerre'a 658 — 660; — i przechodzące naskutek przekształcenia linjowego w dwukierunki do nich prostopadłe 316 — 319; — i skojarzone inwolucyjnie 487; para dwukierunków sprzężonych 142 — 145.

Dwusieczne dwóch par prostych: pary stycznych do elipsy względnie hiperboli, przechodzących przez punkt a, b płaszczyzny, nie będący żadnem jej ogniskiem i pary prostych, łączących tenże punkt a, b z dwoma ogniskami elipsy względnie hiperboli, położonemi na tej samej osi 252 — 257; — dwóch par prostych: pary stycznych do paraboli, przechodzących przez punkt a, b płaszczyzny nie będący jej ogniskiem i pary prostych, przechodzących przez ten punkt, z których jedna łączy ten punkt z ogniskiem paraboli, druga zaś ma dwukierunek asymptotyczny 257, 258.

Elipsa 2; — i hiperbola spółogniskowe 210; — której wierzchołki są końcami boków węgłów kierunków asymptotycznych urojonych 458, 459; — rzeczywista 62, 179 — 181; — urojona 62, 179 — 181; — y ósemek wektorów urojonych 379 — 388; — y spółogniskowe 228 — 234.

Figury homotetyczne (wprost i odwrotnie) 277; — nakładalne 289; — podobne 289.

Hiperbola 3, 65, 67, 68, 181, 182; — i elipsa spółogniskowe 210; — równoboczna 8; — e spółogniskowe 228 — 234; — e ze sobą sprzężone 8, 63 — 65, 67, 68, 394, 395; — e ze sobą sprzężone, których połowy osi rzeczywistych są bezwzględnemi wartościami części rzeczywistej i spółczynnika przy i długości danego wektora urojonego 395 — 398; gałęzie hiperboli 6; pary hiperbol skojarzonych na płaszczyznach R i A i związany z niemi opis odpowiedniości punktów płaszczyzn R i A, określającej punkty zespolone koła zespolonego 402 — 418.

Homotetyczność 276, 277; — i stosunek 277; — i środek 277.

Interpretacja dwukierunków asymptotycznych krzywych rodzaju elips, nienależących do rodzaju kół 456 — 459; — geometryczna punktów zespolonych elipsy rzeczywistej 466, 467; — geometryczna punktów zespolonych elipsy urojonej 467 — 469; — geometryczna punktów zespolonych hiperboli 469 — 471; — geometryczna punktów zespolonych paraboli 471 — 473; — Laguerre'a dwukierunków izotropowych 660, 661; — równań zmiany spółrzędnych prostolinjowych, gdy oba systemy spółrzędnych w nich zachodzące uważamy, jako spółrzędne punktów w tym samym układzie 263 — 269; — e geometryczne asymptot linij krzywych stopnia drugiego rodzaju elips 462 — 465; — e geometryczne, dotyczące wektora zespolonego, którego węgieł jest prostokątny 358 — 360; — e geometryczne, dotyczące wektora zespolonego w przypadku ogólnym 353 — 358; — e geometryczne dwuparametrowych systemów pierwszego stopnia w przypadkach wyjątkowych 568 — 570.

Inwolucja dwukierunków 143; — eliptyczna, hiperboliczna, paraboliczna 145; — eliptyczna śladów M' i M'' niewłaściwego punktu zespolonego 647, 648; — hiperboliczna dwukierunków w systemie interpretacji Laguerre'a 658 — 660; — przeprowadzająca jeden w drugi dwa dane urojone dwukierunki 495, 496.

Kąty ramion stycznej do elipsy względnie hiperboli w jej punkcie x, y i wektorów o początku w tym punkcie i o końcach w ogniskach tej krzywej 205 — 210; — ramion stycznej do paraboli w jej punkcie x, y i wektora o początku w tym punkcie i o końcu w ognisku tej krzywej 212, 213; — stycznych do elipsy, przechodzących przez dany punkt płaszczyzny z wektorami o początku w tym punkcie i o końcach w ogniskach elipsy 215 — 217; — stycznych do hiperboli, przechodzących przez dany punkt płaszczyzny z wektorami o początku w tym punkcie i o końcach w ogniskach hiperboli 219 — 225; — stycznych do paraboli, przechodzących przez dany punkt płaszczyzny z osią paraboli oraz z wektorem o początku w tym pnnkcie i końcu w ognisku paraboli 227, 228; — średnic sprzężonych elipsy i kąty średnic sprzężonych hiperboli 146 — 151.

Kierownica paraboli 17; — e elipsy 200; — e hiperboli 200.

Kierunki asymptotyczne hiperboli oraz związany z niemi prostokąt i dwie hiperbole ze sobą sprzężone 459 — 461.

Klasyfikacja przypadków zadania o punktach wspólnych linji prostej właściwej i krzywej stopnia drugiego 71 — 74.

Koło 5.

Krzywa istotna stopnia drugiego 48; — stopnia drugiego 48; — e rodzaju elips, rodzaju hiperbol, rodzaju kół, rodzaju parabol 78; — e stopnia drugiego o jednym środku niewłaściwym 82; — e stopnia drugiego o jednym środku właściwym 80, 81.

Liczby zespolone $\varepsilon' l' + \varepsilon'' i l''$, $\varepsilon'' l'' + \varepsilon' i l'$ ($\varepsilon' = \pm 1$, $\varepsilon'' = \pm 1$) 360 — 365.

Miejsce geometryczne punktów symetrycznie położonych do ogniska elipsy względem stycznych elipsy 214, 215;—punktów symetrycznie położonych do ogniska hiperboli względem jej stycznych 217 — 219; — punktów symetrycznie położonych do ogniska paraboli względem jej stycznych 225, 226; — spodków prostopadłych opuszczonych z ogniska elipsy na jej styczne 214, 215; — spodków prostopadłych opuszczonych z ogniska hiperboli na jej styczne 217 — 219; — spodków prostopadłych opuszczonych z ogniska paraboli na styczne do paraboli 225, 226.

Mimośród elipsy 4, 200; — hiperboli 4, 200; — hiperboli równobocznej 8; — koła 5; — paraboli 200.

Nić prostolinjowa przechodząca przez dwa dane punkty zespolone 552; — i prostolinjowe położone na tworze, określonym linjowemi równaniami zespolonemi w spółrzędnych x, y, $\overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ 520, 521, 528 — 530; — i $\omega = \text{const.}$ i $\rho = \text{const.}$, położone na tworze β w przypadkach, gdy stosunek $A : D$ jest wielkością rzeczywistą 538, 539; — i $\omega = \text{const.}$ i $\rho = \text{const.}$, położone na tworze β w przypadkach, gdy stosunek $A : D$ jest wielkością urojoną 539 — 543.

Niezmienniki względem zmian kierunków osi spółrzędnych krzywej drugiego stopnia 54 — 57; — wielomianu drugiego stopnia 53, 54.

Niezmienniki względem zmian spółrzędnych prostolinjowych dwuparametrowych systemów pierwszego stopnia 570 — 576; — formy dwulinjowej 303—305; — formy stopnia drugiego i dwóch wektorów zespolonych 497 — 499; — krzywej stopnia drugiego 48 - 53, 96, 97;—nici prostolinjowej i interpretacje geometryczne tych niezmienników 557 — 565; — przekształcenia linjowego 308 — 316; — punktu zespolonego i swobodnego wektora zespolonego 557; — równania dwulinjowego 305, 306; — trzyparametrowych systemów pierwszego stopnia 582 — 585; — wektora zespolonego, pozostające także bez zmiany przy mnożeniu obu składowych wektora przez ten sam czynnik zespolony 352; — wielomianu stopnia drugiego o dwóch zmiennych 43 — 48; geometryczne znaczenie niezmienników krzywej stopnia drugiego w niektórych przypadkach 52, 53; niezmiennik I dwukierunku skojarzonego inwolucyjnie z danym dwukierunkiem 488 — 493; niezmiennik I stycznej do krzywej stopnia drugiego o urojonym dwukierunku 477, 478.

Obiegi łuków na pewnych krzywych stopnia drugiego 329 — 341.

Obraz Laguerre'a lub obraz (L) właściwego punktu zespolonego 651, 652; — linjowy albo obraz (Q) właściwego punktu zespolonego 609, 610; — Marie albo obraz (M) właściwego punktu zespolonego 641, 642; — y linjowe albo obrazy (Q) niewłaściwych punktów zespolonych 619 — 631; — y linjowe wektorów zespolonych 631 — 641; — y (M) punktów niewłaściwych 647, 648.

Obszar pusty na płaszczyźnie A w odwzorowaniu, określającem punkty zespolone elipsy urojonej 451, 452; — na płaszczyźnie R w odwzorowaniu, określającem punkty zespolone elipsy rzeczywistej 450, 451; — na płaszczyźnie R w odwzoro-

waniu, określającem punkty zespolone paraboli 455, 456; obszary puste na płaszczyznach R i A w odwzorowaniu, określającem punkty zespolone hiperboli 452 — 455.

Odległość ogniskowa elipsy 4; — ogniskowa hiperboli 4; — punktu bieżącego elipsy względnie hiperboli od jej ogniska 200.

Odniesienie istotnej krzywej stopnia drugiego do jej stycznej i jej średnicy, przechodzącej przez punkt styczności 159 — 161; — istotnej krzywej stopnia drugiego i jej stycznej do pewnego szczególnego układu spółrzędnych 482 — 486;—linji krzywej drugiego stopnia do jej średnic sprzężonych 157— 159;— linjowego przekształcenia do nowego układu spółrzędnych prostolinjowych 308 — 310; — wielomianu drugiego stopnia o dwóch zmiennych do nowych spółrzędnych prostolinjowych 41, 42.

Odpowiedniość punktów na płaszczyznach R i A trzyparametrowego systemu pierwszego stopnia 585, 586, a także 517; — i pomiędzy śladami R i A punktów zespolonych, których spółrzędne spełniają równania, określające dwuparametrowy system pierwszego stopnia 524, 525.

Odwzorowanie płaszczyzn R i A w przypadku elipsy rzeczywistej 450, 451; — płaszczyzn R i A w przypadku elipsy urojonej 451; — płaszczyzn R i A w przypadku hiperboli 452 — 455; — płaszczyzn R i A w przypadku paraboli 455, 456.

Ognisko i kierownica do siebie należące 200; — paraboli 17; — a elipsy 2, 199; — a hiperboli 3, 199.

Oś krzywej stopnia drugiego 169; — paraboli 17, 170; — symetrji 270; — ie elipsy 3; — ie hiperboli 3; — ie krzywych rodzaju elips, rodzaju hiperbol i rodzaju kół 169; — ie pary prostych o wspólnym dwukierunku 170; — ie symetrji linji krzywej stopnia drugiego 274 — 276; połowy osi elipsy 4; połowy osi elipsy urojonej 181; połowy osi hiperboli 4.

Ósemka kołowa liczb zespolonych, odpowiadająca uporządkowanej parze liczb rzeczywistych 365; — wektorów urojonych, odpowiadająca uporządkowanej czwórce liczb rzeczywistych 369.

Parabola 15, 16, 66, 67, 182, 183.

Parametr elipsy 21; — hiperboli 21; — paraboli 17.

Płaszczyzny S, B i SB 609, 610.

Pole węgła (M) wektora zespolonego 644; — węgła (Q) wektora zespolonego 639.

Prosta podwójna 66; — symetryczna do prostej danej względem danej osi symetrji 273, 274; — środków 82; — zespolona oraz przekształcenia kategoryj $A, \overset{*}{A}, C, \overset{*}{C}, D, \overset{*}{D}$ 604, 605; — e o danym dwukierunku, dla których równanie, określające ich punkty wspólne z krzywą drugiego stopnia, ma pierwiastek podwójny 113 — 119; — e przechodzące przez dany punkt właściwy, dla których równanie, określające ich punkty wspólne z krzywą drugiego stopnia, ma pierwiastek podwójny 105 — 113; — e zespolone, położone na tworze określonym linjowemi równaniami zespolonemi w spółrzędnych x, y $\overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ 517 — 520, 525 — 528; dwie proste równoległe rzeczywiste 66; dwie proste równoległe urojone ze sobą sprzężone 66; dwie proste rzeczywiste spotykające się 66, 68.

Przekształcenie linjowe pary punktów rzeczywistych na parę punktów rzeczywistych 587, 588; — linjowe pary punktów rzeczywistych na parę punktów rzeczywistych przedstawione zapomocą punktów zespolonych sprzężonych

588 — 593; — linjowe spółrzędnych śladów punktów zespolonych, położonych na tworze β w przypadku, gdy stosunek $A : D$ jest liczbą urojoną 532 — 537; — linjowe wykonane na linji prostej 308; — linjowe wykonane na wektorze zespolonym 422, 423; — linjowe zastosowane do punktów niewłaściwych lub dwukierunków 307, 308; — podobieństwa 279 — 281, 419; — podobieństwa wykonane na kole zespolonem 427; — przedstawiające styczną o urojonym dwukierunku do krzywej stopnia drugiego 481, 482; — symetrji względem prostej 270, 419, 420; — śladów punktów zespolonych, należących do dwuparametrowego systemu pierwszego stopnia w przypadku ogólnym 565 — 567; — a kategoryj $A, \overset{*}{A}, B, \overset{*}{B}, C, \overset{*}{C}, D, \overset{*}{D}$ 594 — 603; — a kategoryj $A, \overset{*}{A}, B, \overset{*}{B}, C, \overset{*}{C}, D, \overset{*}{D}$ oraz linje proste zespolone i twory β 604, 605; — a linjowe wykonane na właściwych punktach zespolonych 420 — 422; — a typów I, II, III, IV 605, 606; pewne szczególne przekształcenia linjowe ogólniejsze od homotetyczności 291, 292; wykonywanie jednego po drugiem przekształceń linjowych 279 — 281, 292 — 298; wykonywanie przekształceń linjowych na równaniach określających krzywą drugiego stopnia 298 — 303; wyprowadzenie przez różniczkowanie przekształcenia, określającego urojoną styczną do krzywej stopnia drugiego 481, 482; wyrażenia spółczynników przekształceń linjowych, odniesionych do pewnych szczególnych układów spółrzędnych 321 — 326.

Przemieszczenie płaszczyzny R w samej sobie 421; — płaszczyzny w samej sobie 264, 265, 419.

Punkt rzeczywisty stycznej o urojonym dwukierunku do krzywej stopnia drugiego 476; — styczności 99; — właściwy wewnętrzny względnie właściwy zewnętrzny istotnej krzywej stopnia drugiego 111; — y niewłaściwe krzywych stopnia drugiego 77, 78; — y niezmienne linjowego przekształcenia 306, 307; — y podwójne krzywej stopnia drugiego właściwe i niewłaściwe 83, 84; — y przecięcia krzywej stopnia drugiego z jej średnicą sprzężoną z dwukierunkiem nieasymptotycznym 152 — 157; — y styczności właściwe względnie niewłaściwe pary stycznych do istotnej krzywej stopnia drugiego, przechodzących przez dany punkt właściwy 108, 109, 112, 113; — y styczności właściwe względnie niewłaściwe stycznych o danym dwukierunku 119; — y symetryczne względem linji prostej 269, 270; — y wspólne linji krzywej stopnia drugiego i linji prostej 69; dwa niewłaściwe punkty kołowe 77; położenie punktów styczności stycznych istotnej krzywej stopnia drugiego, mających dany dwukierunek 135 — 138; położenie punktów styczności stycznych istotnej krzywej stopnia drugiego, przechodzących przez dany punkt właściwy 120 — 134.

Romb dwukierunków asymptotycznych krzywej rodzaju elips nie należącej do rodzaju kół 458.

Równanie asymptoty 91; — kanoniczne elipsy rzeczywistej 3, 179 — 181; — kanoniczne elipsy urojonej 179 — 181; — kanoniczne hiperboli 3, 181, 182; — kanoniczne paraboli 16, 17, 182, 183; — krzywej rodzaju elips lub rodzaju hiperbol, odniesione do środka 85; — krzywej rodzaju kół odniesione do osi, będących jej prostopadłemi średnicami 172; — krzywej rodzaju parabol odniesione do osi krzywej, mającej dwukierunek asymtotyczny i do prostopadłej do tej osi 173, 174; — krzywej stopnia drugiego ze środkiem odniesione do pary jej osi 173; — krzywej ze środkiem odniesionej do asymptot 96, 97; — na S 166, 167; — osi paraboli 171; — pary asymptot krzywej rodzaju elips lub rodzaju hiperbol 91 — 93; — pary osi elipsy względnie hiperboli 170, 171; — pary

prostych, które łączą punkt a, b płaszczyzny z ogniskami elipsy względnie hiperboli, położonemi na małej osi względnie na osi urojonej 256, 257; — pary prostych, które łączą punkt a, b płaszczyzny z ogniskami elipsy względnie hiperboli położonemi na osi wielkiej względnie rzeczywistej 254, 255; — pary prostych właściwych o wspólnym dwukierunku odniesione do jednego z środków właściwych 86; — pomiędzy $x, y, \overset{*}{x}, \overset{*}{y}$, przedstawiające trzyparametrowy system pierwszego stopnia punktów zespolonych 551, 552, a także 517; — stycznej do elipsy w jej punkcie danym 13; — stycznej do hiperboli w jej punkcie danym 13; — stycznej do krzywej stopnia drugiego w jej punkcie właściwym 99; — stycznej do paraboli w jej punkcie danym 18; — wierzchołkowe elipsy 22; — wierzchołkowe hiperboli 22; — a biegunowe elipsy, hiperboli i paraboli 26 — 38; — a krzywych stopnia drugiego odniesione do układów spółrzędnych, których osie mają dwukierunki główne, a początki leżą na linji krzywej 174 — 177; — a określające dwukierunki główne 168; — a określające spółrzędne punktów hiperboli, jako wymierne funkcje zmiennego parametru 15; — a parametryczne elipsy 9; — a parametryczne hiperboli 9; — a pomiędzy $x, y, \overset{*}{x}, \overset{*}{y}$, określające nić prostolinjową 549, 550; — a pomiędzy $x, y, \overset{*}{x}, \overset{*}{y}$, przedstawiające dwuparametrowy system pierwszego stopnia 550, 551, a także 523; — a śladów R i A punktów zespolonych, należących do jednoparametrowego, dwuparametrowego względnie trzyparametrowego systemu pierwszego stopnia 516, 524, 556; — a środków 79, 80.

Równoległobok ósemki kołowej wektorów 370.

Spółczynniki kierunków skojarzonych inwolucyjnie z danym dwukierunkiem 488 — 495; — kierunkowe urojonego kierunku wyrażone przez funkcje trygonometryczne rzeczywistej części kąta tego kierunku z osią x i funkcje hiperboliczne spółczynnika przy i tego kąta 398 — 400.

Spółrzędne eliptyczne 228 — 234.

Styczna do elipsy 13; — do hiperboli 13; — do krzywej stopnia drugiego 98 — 101; — do paraboli 17, 18; — e o rzeczywistych dwukierunkach do krzywych stopnia drugiego 474 — 476; granica stycznej do krzywej stopnia drugiego przy oddalaniu się punktu styczności do nieskończoności 101 — 103; para stycznych właściwych istotnej krzywej stopnia drugiego, przechodzących przez dany rzeczywisty właściwy punkt płaszczyzny 108 — 113; wzory pomocnicze, dotyczące urojonych stycznych do istotnych krzywych stopnia drugiego 477, 478, 480, 481.

System dwuparametrowy pierwszego stopnia punktów zespolonych 544 — 546; — dwuparametrowy pierwszego stopnia punktów zespolonych, przechodzący przez trzy dane punkty zespolone 552 — 554; — istotnych krzywych rodzaju elips, parabol i hiperbol, przechodzących przez dany punkt oraz mających w tym punkcie wspólną styczną i wspólną średnicę sprzężoną z dwukierunkiem rzeczonej stycznej 161 — 163; — jednoparametrowy pierwszego stopnia punktów zespolonych 543, 544; — krzywych: elipsa, parabola i hiperbola o wspólnej osi, wspólnym wierzchołku i wspólnym parametrze 22 — 26; — ogniskowy albo system należących do siebie ogniska, kierownicy i mimośrodu 234 — 238; — ogniskowy istotnej krzywej stopnia drugiego 239 — 241; — ogniskowy paraboli 246, 247; — ogniskowy pary linij prostych 239; — trzyparametrowy pierwszego stopnia punktów zespolonych 546 — 548; — trzyparametrowy pierwszego stopnia

punktów zespolonych, przechodzący przez cztery dane punkty zespolone 554 — 556; — y elips homotetycznych i związane z niemi własności odwzorowania płaszczyzn R i A, określonego przez prostą urojoną o urojonym dwukierunku 390 — 393; — y jednoparametrowe $\omega = \text{const}$ i $\rho = \text{const}$ położone na systemach dwuparametrowych pierwszego stopnia 576 — 582; — y ogniskowe elipsy rzeczywistej 244, 245; — y ogniskowe elipsy urojonej 245; — y ogniskowe hiperboli 245, 246; — y ogniskowe prostej podwójnej 249, 250; — y ogniskowe prostych przecinających się 248, 249.

Ślady L' i L'' dwóch punktów zespolonych ze sobą sprzężonych 652; — (L) pierwszy i drugi lub ślady L', L'' punktu niewłaściwego 661, 662; — (L) pierwszy i drugi lub ślady L' i L'' właściwego punktu zespolonego 651, 652; — (M) pierwszy i drugi albo ślady M', M'' punktu niewłaściwego 647, 648; — (M) pierwszy i drugi albo ślady M' i M'' właściwego punktu zespolonego 641, 642; — (M) punktów zespolonych ze sobą sprzężonych 642; — Q' i Q'' punktów rzeczywistych 610 — 612; — Q' i Q'' punktów zespolonych ze sobą sprzężonych 612 — 617; — (Q) pierwszy i drugi albo ślady Q', Q'' niewłaściwego punktu zespolonego 619 — 631; — (Q) pierwszy i drugi, albo ślady Q' i Q'' właściwego punktu zespolonego 609; — (Q) pierwszy i drugi wektora zespolonego 631, 632; wyrażenia spółrzędnych śladu A przez spółrzędne śladu R punktu zespolonego istotnej krzywej stopnia drugiego 428 — 435; wyrażenia spółrzędnych śladu R przez spółrzędne śladu A punktu zespolonego istotnej krzywej stopnia drugiego 435 — 447; wyrażenia spółrzędnych śladów R i spółrzędnych śladów A punktów koła zespolonego przy zastosowaniu funkcyj hiperbolicznych 400 — 402.

Średnica istotnej krzywej stopnia drugiego sprzężona z dwukierunkiem stycznej do tej krzywej 156, 157; — krzywej stopnia drugiego sprzężona z danym dwukierunkiem 139 — 142; — sama ze sobą sprzężona 145; — e do siebie prostopadłe istotnych krzywych stopnia drugiego ze środkiem 508, 509; połowa średnicy rzeczywistej 158; połowa średnicy urojonej 158; połowy średnic sprzężonych 158.

Środek elipsy 3; — hiperboli 3; — krzywej stopnia drugiego 78, 79; — i właściwe względnie niewłaściwe 79, 80.

Trójmian drugiego stopnia 18 — 20.

Twierdzenia Apollonjusza 186 — 190; uogólnienia twierdzeń Apollonjusza 499 — 503.

Twór β 530; — β oraz przekształcenia kategoryj $B, \overset{*}{B}, C, \overset{*}{C}, D, \overset{*}{D}$ 604, 605; — y β ze sobą sprzężone 530; parametryczne przedstawienie śladów R i A punktów zespolonych tworu β 537; ślady punktów tworu β w przypadkach, gdy stosunek $A : D$ jest liczbą rzeczywistą 531, 532.

Warunki, aby dwie krzywe stopnia drugiego miały te same dwukierunki główne 250, 251; — aby przekształcenie linjowe pary zmiennych określało zmianę spółrzędnych prostolinjowych 260 — 263; — aby równanie stopnia drugiego przedstawiało elipsę rzeczywistą, elipsę urojoną, hiperbolę, parabolę, koło rzeczywiste, koło urojone ze sobą sprzężone 183 — 185; — aby równanie zespolone stopnia pierwszego w spółrzędnych $x, y, \overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ było równoważne jednemu związkowi rzeczywistemu 510 — 516; — aby równanie zespolone stopnia pierwszego w zmiennych $x, y, \overset{*}{x}, \overset{*}{y}$ było równoważne dwóm od siebie niezależnym związkom rzeczywistym 521 — 523; — aby styczna do krzywej stopnia drugiego,

mająca urojony dwukierunek, była prostą górną względnie prostą dolną 478 — 480; — homotetyczności dwóch linij krzywych stopnia drugiego 281 — 289; — nakładalności względnie podobieństwa linij krzywych stopnia drugiego 289 — 291; — niezmienności prostej przy linjowem przekształceniu 308.

Wektory symetryczne względem prostej 271 — 273; — wzajemne 365, 366.

Węgieł (L) wektora zespolonego 653 — 655; — (L) wektora zespolonego, którego składowe otrzymują się ze składowych danego wektora drogą mnożenia ich przez ten sam zespolony czynnik 662 — 666; — (M) wektora zespolonego 643, 644; — (M) wektora zespolonego, którego składowe otrzymują się przez mnożenie składowych danego wektora przez ten sam zespolony czynnik 649 — 651; — (Q) wektora zespolonego 632; — (Q) wektora zespolonego, którego składowe otrzymują się przez mnożenie składowych danego wektora przez ten sam zespolony czynnik 632 — 641; — y (L) kierunków względnie pseudokierunków 655 — 657; — y (M) kierunków względnie pseudokierunków 644 — 647; — y wektorów, zachodzących w uogólnionych twierdzeniach Apollonjusza 503 — 508; — y wektorów zespolonych, otrzymujących się mnożeniem obu składowych danego wektora zespolonego przez ten sam czynnik zespolony 342 — 350.

Wielomian stopnia drugiego o dwóch zmiennych rozwinięty według wzoru Taylor'a 39, 40; wzór na wartości wielomianu stopnia drugiego o dwóch zmiennych w punktach linji prostej, określonej równaniami osiowemi, 40, 41.

Wierzchołek paraboli 17; — i elipsy 4; — i hiperboli 4.

Wykreślanie elipsy 8, 9, 10; — hiperboli 8, 9, 10 — 12; — ognisk i kierownic elipsy według danych długości połów jej osi 201 — 203; — ognisk i kierownic hiperboli według danych długości połów jej osi 203, 204; — stycznej do elipsy w jej pukcie danym 14, 10; — stycznej do hiperboli w jej punkcie danym 15, 11; — stycznej do paraboli w jej punkcie danym 18, 16; — węgłów wektorów ósemki kołowej 366, 367.

Wyróżnik równania stopnia drugiego określającego punkty wspólne krzywej stopnia drugiego i prostej właściwej 70, 71; przypadki, w których równanie określające punkty wspólne krzywej drugiego stopnia i prostej właściwej ma wyróżnik równy zeru 103 — 105.

Wyznacznik symetryczny stopnia trzeciego 70.

Zbiory jednowymiarowe punktów zespolonych, leżące na prostej zespolonej o rzeczywistym dwukierunku 388 — 390.

Zespół 64 wektorów urojonych i przekształcenia typów I — IV 606 — 608; — 64 wektorów urojonych o składowych utworzonych w pewien sposób z czterech liczb rzeczywistych 370 — 379.

Związek inwolucyjny o danych odpowiadających sobie urojonych dwukierunkach 497; — odnoszący się do paraboli, analogiczny do twierdzeń Apollonjusza 190, 191; — pomiędzy kwadratem odległości środka krzywej rodzaju kół od początku spółrzędnych i niezmiennikami tej krzywej względem zmian kierunków osi spółrzędnych 195; — pomiędzy prostopadłą odległością prostej środków pary prostych o wspólnym dwukierunku od prostej o tym samym dwukierunku, przechodzącej przez początek spółrzędnych i niezmiennikami rzeczonej pary prostych względem zmian kierunku osi spółrzędnych 197, 198; — i określające homotetyczność w prostolinjowym układzie spółrzędnych 279; — i pomiędzy niezmiennikami krzywej w przypadkach $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$ względem zmian

kierunków osi spółrzędnych i spółrzędnemi wierzchołka krzywej w układzie, którego osie mają dwukierunki główne, a początek leży w początku danego układu spółrzędnych 195 — 197; — i pomiędzy niezmiennikami krzywej w przypadkach $\Omega \neq 0$, $\delta \neq 0$ względem zmian kierunków osi spółrzędnych i spółrzędnemi środka krzywej w układzie, którego osie mają dwukierunki główne, a początek leży w początku danego układu spółrzędnych 192 — 195; — i pomiędzy spółczynnikami uproszczonych równań paragrafu 25 i niezmiennikami względem zmian spółrzędnych prostolinjowych, wyprowadzonemi w paragrafie 7, 177 — 179.

SPIS RZECZY.

TOM II.

Linje krzywe stopnia drugiego i pewne zagadnienia geometrji dziedziny zespolonej.

Przedmowa V

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

Pewne szczególne formy równań elipsy, hiperboli i paraboli.

§ 1. Elipsa i hiperbola oraz ich równania kanoniczne 1
§ 2. Dalsze rachunki i wykresy odnoszące się do elipsy i hiperboli . . . 9
§ 3. Parabola 15
§ 4. Równania wierzchołkowe 20
§ 5. Równania biegunowe 26

ROZDZIAŁ DRUGI.

Przekształcanie ogólnego równania stopnia drugiego o dwóch zmiennych.

§ 6. Podstawowe wzory dotyczące wielomianu stopnia drugiego o dwóch zmiennych 39
§ 7. Niezmienniki wielomianu drugiego stopnia i niezmienniki krzywej drugiego stopnia 43
§ 8. Bezpośrednia metoda redukcji ogólnego równania drugiego stopnia do postaci prostszych 57
§ 9. Krzywe drugiego stopnia, określone przez uproszczone równania . . . 60
§ 10. O równaniu drugiego stopnia, określającem punkty wspólne krzywej drugiego stopnia i właściwej linji prostej 69

ROZDZIAŁ TRZECI.

Zagadnienia dotyczące środków, stycznych i asymptot krzywych stopnia drugiego.

§ 11. Dwukierunki asymptotyczne 75
§ 12. Środki 78
§ 13. Równanie krzywej odniesione do środka 84
§ 14. Asymptoty 86
§ 15. Równanie krzywej odniesione do asymptot 94
§ 16. Styczna w danym punkcie krzywej drugiego stopnia 98
§ 17. Styczne do krzywej stopnia drugiego, przechodzące przez dany punkt płaszczyzny 103
§ 18. O położeniu punktów styczności pary stycznych do istotnej krzywej stopnia drugiego 120

ROZDZIAŁ CZWARTY.

Zagadnienia dotyczące średnic i osi krzywych stopnia drugiego.

§ 19. Średnica sprzężona z danym dwukierunkiem 139
§ 20. Pary dwukierunków sprzężonych i pary średnic sprzężonych 142
§ 21. Badanie wzajemnego nachylenia średnic sprzężonych elipsy i hiperboli na podstawie równań kanonicznych tych linij krzywych 146
§ 22. Punkty przecięcia linji krzywej stopnia drugiego z jej średnicą, sprzężoną z danym dwukierunkiem 152
§ 23. Zastosowania własności średnic do upraszczania równań stopnia drugiego 157
§ 24. Dwukierunki główne i osie 164
§ 25. Równania stopnia drugiego odniesione do układów spółrzędnych, których osie mają dwukierunki główne 171
§ 26. Klasyfikacja istotnych krzywych stopnia drugiego 179
§ 27. Twierdzenia Apollonjusza 186
§ 28. Znaczenie geometryczne niezmienników krzywej stopnia drugiego przy zmianach kierunków osi spółrzędnych prostolinjowych 191

ROZDZIAŁ PIĄTY.

Własności ogniskowe krzywych stopnia drugiego.

§ 29. Ogniska i kierownice elipsy i hiperboli 199
§ 30. Pewne własności stycznych elipsy, hiperboli i paraboli 204
§ 31. Własności par stycznych elipsy, hiperboli i paraboli 214
§ 32. Spółrzędne eliptyczne 228
§ 33. Ogólne rachunki i twierdzenia, dotyczące ognisk i kierownic 234
§ 34. Wyznaczenie rzeczywistych i urojonych ognisk, kierownic i mimośrodów linij krzywych stopnia drugiego 241
§ 35. Krzywe stopnia drugiego o wspólnych dwukierunkach głównych oraz analityczne wyprowadzenie i uogólnienie twierdzeń § 31 250

ROZDZIAŁ SZÓSTY.

O linjowych przekształceniach w płaszczyźnie.

§ 36. Wzory zmiany spółrzędnych prostolinjowych 260
§ 37. Symetrja względem linji prostej 269
§ 38. Homotetyczność i podobieństwo 276
§ 39. Niektóre uogólnienia rozważań § 38 291
§ 40. Pewne zadania niezmiennikowe, dotyczące przekształceń linjowych . . 303
§ 41. Zagadnienia o prostopadłych dwukierunkach 316

ROZDZIAŁ SIÓDMY.

Zagadnienia dotyczące niektórych elementarnych tworów urojonych.

§ 42. Zbiory pewnych par punktów rzeczywistych, położonych na elipsach względnie hiperbolach 327
§ 43. Wektory zespolone i twory rzeczywiste związane z ich interpretacją . 342
§ 44. Własności kołowej ósemki wektorów urojonych 360
§ 45. O pewnym szczególnym zespole wektorów urojonych 370
§ 46. Dalsze własności zespołów wektorów urojonych, rozważanych w §§ 44 i 45 379
§ 47. O pewnych własnościach linij prostych zespolonych 388
§ 48. Hiperbole związane z interpretacją wektorów urojonych i kół urojonych 394
§ 49. Wykonywanie przekształceń linjowych na tworach urojonych elementarnych 419

ROZDZIAŁ ÓSMY.

Dziedzina zespolona istotnych krzywych stopnia drugiego.

§ 50. Wyrażenia spółrzędnych śladu A przez spółrzędne śladu R punktu zespolonego istotnej krzywej stopnia drugiego 428
§ 51. Wyrażenia spółrzędnych śladu R przez spółrzędne śladu A punktu zespolonego istotnej krzywej stopnia drugiego 435
§ 52. Geometryczne znaczenie przekształceń, określających punkty zespolone istotnych krzywych stopnia drugiego 448
§ 53. Interpretacje dwukierunków asymptotycznych i asymptot 456
§ 54. Dalsze rozważania dotyczące interpretacji zbiorów punktów zespolonych istotnych krzywych stopnia drugiego 465
§ 55. Styczne w urojonych punktach istotnych krzywych stopnia drugiego . 473
§ 56. O dwukierunkach urojonych skojarzonych inwolucyjnie 487
§ 57. Niezmienniki formy stopnia drugiego i dwóch wektorów zespolonych oraz uogólnienie pewnych twierdzeń o średnicach istotnych krzywych stopnia drugiego rodzaju elips i rodzaju hiperbol 497

ROZDZIAŁ DZIEWIĄTY.

Równania zespolone stopnia pierwszego w spółrzędnych prostolinjowych pary punktów sprzężonych.

§ 58. Równanie zespolone równoważne jednemu związkowi rzeczywistemu . 510
§ 59. Równanie zespolone równoważne dwóm niezależnym związkom rzeczywistym 521
§ 60. Własności linjowego równania zespolonego pewnej szczególnej kategorji 530
§ 61. Jedno, dwu i trzyparametrowe systemy pierwszego stopnia punktów zespolonych i wektory zespolone, leżące na tych systemach 543
§ 62. Niezmienniki i geometryczne interpretacje nici prostolinjowych . . . 557
§ 63. Niezmienniki i geometryczne interpretacje dwuparametrowych systemów stopnia pierwszego 565
§ 64. Niezmienniki i geometryczne interpretacje trzyparametrowych systemów pierwszego stopnia 582

ROZDZIAŁ DZIESIĄTY.

Zagadnienia dotyczące par punktów rzeczywistych i pewnych obrazów punktów zespolonych.

§ 65. Linjowe rzeczywiste przekształcenia par punktów rzeczywistych . . . 587
§ 66. Pewne szczególne kategorje linjowych rzeczywistych przekształceń par punktów rzeczywistych 593
§ 67. Linjowe obrazy właściwych punktów zespolonych 609
§ 68. Linjowe obrazy niewłaściwych punktów zespolonych 617
§ 69. Linjowe obrazy wektorów zespolonych 631
§ 70. Interpretacja Marie punktów zespolonych i własności odpowiadających tej interpretacji węgłów wektorów zespolonych 641
§ 71. Interpretacja Laguerre'a punktów zespolonych i własności, odpowiadających tej interpretacji węgłów wektorów zespolonych 651

Indeks alfabetyczny 667

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
W KRAKOWIE
BIBLIOTEKA

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
AKADEMII GÓRNICZO HUTNICZEJ
14366

Nie wypożycza się
NZB 4415