AUTOMATYKA • 2009 • Tom 13 • Zeszyt 1

Henryk Górecki*

Rozwiązanie równania czwartego stopnia w przypadku dwóch par pierwiastków zespolonych sprzężonych

Rozważmy równanie

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0 \tag{1}$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ i $a_0 \neq 0$. Kładąc w równaniu (1)

$$s = y - \frac{1}{4} \cdot \frac{a_1}{a_0} \tag{2}$$

otrzymujemy równanie

$$f(y) = y^4 + py^2 + qy + r = 0 \tag{3}$$

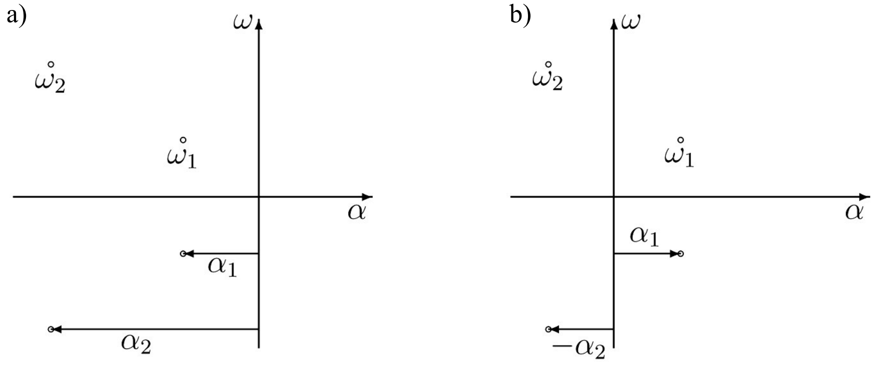
gdzie

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{a_2}{a_0} - \frac{3}{8}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \\ q &= \frac{1}{8}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{a_1 a_2}{a_0^2} + \frac{a_3}{a_0} \\ r &= -3\left(\frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0}\right)^2 \frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1}{a_0}\frac{a_3}{a_0} + \frac{a_4}{a_0} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Na podstawie twierdzenia Borhardta [3, 1] otrzymujemy następujące warunki konieczne i dostateczne do tego, by równanie (3) miało wyłącznie pierwiastki zespolone sprzężone

$$\left.\begin{aligned} &p < 0, \quad -q(p^2 + 12r) > 0 \\ &D = 16p^4 r - 128p^2 r^2 + 256r^3 - 4p^3 q^2 + 144pq^2 r - 27q^4 > 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

* Katedra Automatyki, Wydział EAIiE, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
* Wyższa Szkoła Informatyki w Łodzi



Rys. 1. Lokalizacja pierwiastków: a) przed przesunięciem i b) po przesunięciu

Zauważmy, że z warunku, iż przy y^3 w równaniu (3) współczynnik jest równy zeru, otrzymujemy (por. rys. 1), iż

$$\alpha_1 + j\omega_1 + \alpha_1 - j\omega_1 + \alpha_2 + j\omega_2 + \alpha_2 - j\omega_2 = 0 \tag{6}$$

gdzie $\alpha_i + j\omega_i$, $(i = 1, 2)$ są pierwiastkami równania (3), czyli

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 \tag{7}$$

Obie pary zespolone sprzeżone, po przesunieciu, mają symetrycznie względem osi $j\omega$ części rzeczywiste.

Położmy w równaniu (3) $y = \alpha + j\omega$, wtedy otrzymamy dwa równania

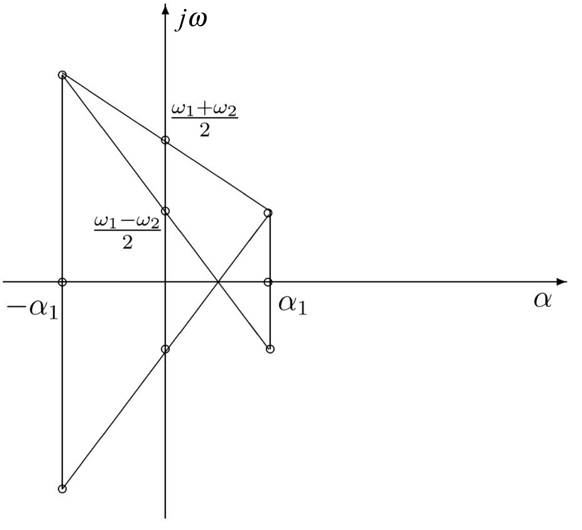
$$\left.\begin{aligned} P(\omega) &= \operatorname{Re} f(\alpha + j\omega) = 0 \\ Q(\omega) &= \operatorname{Im} f(\alpha + j\omega) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

przy czym

$$\left.\begin{aligned} P(\omega) &= \alpha^4 + p\alpha^3 - 6\omega^2\alpha^2 + (q - 3p\omega^2)\alpha + r + \omega^4 \\ Q(\omega) &= 4\omega\alpha^3 + 3p\omega\alpha^2 - 4\omega^4\alpha + q\omega a - p\omega^3 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

W pracy [2] udowodniono, że po eliminacji ω z równań (9) otrzymuje się równanie szóstego stopnia na α

$$\alpha^6 + \frac{p}{2}\alpha^4 + \left[\left(\frac{p}{4}\right)^2 - \frac{r}{4}\right]\alpha^2 - \left(\frac{q}{8}\right)^2 = 0 \tag{10}$$



Rys. 2. Lokalizacja pierwiastków równania (11)

Pierwiastkami równania (10) są dwa pierwiastki rzeczywiste różniące się tylko znakiem oraz dwie pary pierwiastków urojonych sprzężonych (rys. 2):

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha \\ \alpha_2 &= -\alpha \\ \alpha_3 &= j\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \\ \alpha_4 &= -j\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \\ \alpha_5 &= j\frac{\omega_1-\omega_2}{2} \\ \alpha_6 &= -j\frac{\omega_1-\omega_2}{2} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Kładąc w równaniu (10)

$$\alpha^2 = x \tag{12}$$

otrzymuje się równanie trzeciego stopnia

$$x^3 + \frac{p}{2}x^2 + \left[\left(\frac{p}{4}\right)^2 - \frac{r}{4}\right]x - \left(\frac{q}{8}\right)^2 = 0 \tag{13}$$

posiadające, z uwagi na (8) i (9), dwa pierwiastki rzeczywiste ujemne i jeden pierwiastek rzeczywisty dodatni.

Połóżmy w równaniu (13)

$$x = z - \frac{1}{6} \cdot p \tag{14}$$

otrzymamy równanie

$$z^3 + 3Az + 2B = 0 \tag{15}$$

gdzie

$$3A = \frac{768\left(p^2 - 4r\right) - 1024p^2}{12288} = \frac{3\left(p^2 - 4r\right) - 4p^2}{48} = -\frac{p^2 + 12r}{48} \tag{16}$$

$$2B = \frac{p^3}{108} - \frac{p\left(p^2 - 4r\right)}{96} - \frac{q^2}{64} = \frac{1}{4}\left(\frac{p}{3}\right)^3 - \frac{p}{3}\,\frac{p^2 - 4r}{32} - \left(\frac{q}{8}\right)^2 \tag{17}$$

Ponieważ

$$B^3 + A^2 < 0 \tag{18}$$

oraz

$$A < 0 \tag{19}$$

Mamy 3 różne pierwiastki rzeczywiste, które sa równe:

$$z_1 = -2r\cos\frac{1}{3}\varphi, \quad z_2 = 2r\cos\left(60^{\circ} - \frac{1}{3}\varphi\right), \quad z_3 = 2r\cos\left(60^{\circ} + \frac{1}{3}\varphi\right) \tag{20}$$

gdzie

$$\cos\varphi = \frac{B}{r^3}, \quad r = \eta\sqrt{|A|}, \quad \eta = \operatorname{sign} q \tag{21}$$

Po wyznaczeniu z_1, z_2, z_3, cofając się do początku, otrzymujemy:

$$x_i = z_i - \frac{1}{6}p, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\alpha_1 = +\sqrt{x_1}$$

$$\alpha_2 = -\sqrt{x_1}$$

$$\alpha_3\alpha_4 = \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)^2 = x_2$$

$$\alpha_5\alpha_6 = \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)^2 = x_3$$

Stąd, dodając i odejmując, mamy:

$$\omega_1 = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}, \quad \omega_2 = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3}.$$

Następnie

$$y_1 = \alpha_1 + j\omega_1, \qquad y_2 = \alpha_1 - j\omega_1$$

$$y_3 = -\alpha_1 + j\omega_2, \quad y_4 = -\alpha_1 - j\omega_2$$

gdzie

$$s_i = y_i - \frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Czyli ostatecznie

$$s_{1,2} = \alpha_1 \pm j\left(\sqrt{z_2 - \frac{1}{6}} + \sqrt{z_3 - \frac{1}{6}}\right) - \frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0},$$

$$s_{3,4} = -\alpha_1 \pm j\left(\sqrt{z_2 - \frac{1}{6}} + \sqrt{z_3 - \frac{1}{6}}\right) - \frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0},$$

$$|\alpha_1| = |-\alpha_2| = \frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0}.$$

gdzie z_1, z_2, z_3 są pierwiastkami równania (15) stopnia trzeciego.

Literatura

[1] Borchardt C.: *Developpments sur l'equation a l'aide, de laqette on détermine les inégalités seculaires du monvement des planetes.* J. Math. pures appl. 12, 1847, s. 50–67

[2] Górecki H., Szymkat M.: *Application of an elemination method to the study of the geometry of zeros of real polynomials*. Int. J. Control, Vol. 38, No. 1, 1983, s. 1–26

[3] Krein M., Nejmark M.: *Mietod symmetriczeskich i ermitowych form w tieorii otdielenja korniej algebraiczeskich urawnienij.* Charkow, GNTI 1936

[4] Suszkiewicz A.K.: *Osnowy wyższej algebry*. Moskwa, OTIZ 1941