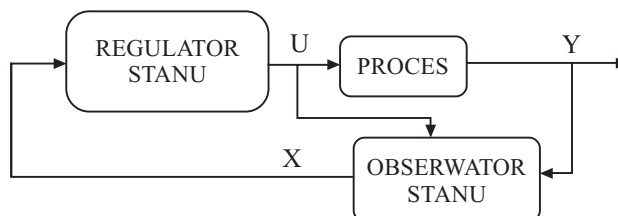


Witold Byrski\*, Jędrzej Byrski\*

## Metody i algorytmy ze skończoną pamięcią dla dokładnego odtwarzania stanu

### 1. Wprowadzenie

Nowoczesne układy sterowania dynamiką obiektu coraz częściej wykorzystywane są przez regulatory stabilizujące wektor stanu. Wektor ten jest zbudowany z reguły ze zmiennych procesowych. Dla obiektów liniowych, liniowa i nieosobliwa transformacja pozwala zamienić taką przestrzeń stanu w dowolnie inną przestrzeń, na przykład łatwiejszą do syntezy regulatora. Wymiar wektora stanu jest ściśle związany z rzędem obiektu, a więc mówiąc obrazowo, z liczbą niezależnych zbiorników energii, jakie występują w tym obiekcie. Dla sterowania stabilizującego konieczna jest informacja o bieżących wartościach wektora stanu. W rozwiązaniach technologicznych nie zawsze możliwy jest pomiar wszystkich zmiennych stanu. Dla układów obserwowalnych, możliwe jest jednak programowe odtworzenie wektora stanu, tylko na podstawie pomiaru wektora wyjścia obiektu i jego sterowania. Taki odtworzony sygnał stanu może być użyty do stabilizacji punktu pracy obiektu (rys. 1).



Rys. 1. Wykorzystanie obserwatora stanu

Fakt odtwarzania zmiennych niemierzalnych poprzez algorytmy obliczeniowe uzasadnia używanie dla obserwatorów nazwę *softsensory*. Stosowanie tych algorytmów umożliwia też wykonywanie innych zadań takich, jak filtracja szumów, identyfikacja parametrów czy diagnostyka błędów. Stąd pojawiają się zastosowania obserwatorów w diagnostyce to-

---

\* Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie;  
wby@ia.agh.edu.pl, jbyrski@agh.edu.pl

rów pomiarowo-kontrolnych, gdy sprawdzenie wiarygodności czujnika sprzętowego mierzącego ważną zmienną stanu przez wyliczenie z modelu obiektu jej hipotetycznej wartości może być łatwiejsze niż instalowanie dodatkowego czujnika.

Do estymacji wektora stanu od lat 60. ubiegłego wieku używany był filtr Kalmana (lub obserwator Luenbergera), których struktura oparta jest o równanie różniczkowe lub różnicowe. Na podstawie bieżącego pomiaru wejścia i wyjścia obiektu, obserwator generuje estymatę stanu zmierzającą z czasem asymptotycznie do stanu rzeczywistego.

Filtr Kalmana charakteryzują poniższe własności:

- sformułowanie teorii filtracji oparte jest o procesy stochastyczne,
- estymata stanu jest optymalna w sensie minimum średniokwadratowego błędu odtwarzania stanu,
- estymata stanu startuje z przyjętej arbitralnie początkowej wartości  $\bar{x}_0$  reprezentującej wektor losowy i dąży asymptotycznie do stanu rzeczywistego,
- obliczenia opierają się o bieżący pomiar wartości sterowania i wyjścia i nie wymagają użycia bufora pamięciowego dla próbek z przeszłości.

Dwie ostatnie cechy wynikają z zasadniczego założenia: struktura filtru jest oparta o liniowe zwyczajne równanie różniczkowe (różnicowe), podobne do równania obiektu.

Z tego założenia wynika, że:

- algorytm obserwatora wymaga podania warunku początkowego dla estymaty;
- estymata stanu różni się od stanu rzeczywistego i posiada własność asymptotycznego nadążania za stanem;
- nigdy nie wiadomo, jaka jest rzeczywista wartość stanu i jaki w danej chwili jest błąd estymacji;
- algorytm optymalnego filtru Kalmana potrzebuje informacji o macierzach kowariancji szumów.

Nowoczesna teoria sterowania i możliwości komputerów umożliwiają zastosowanie innych metod obserwacji. W tych metodach struktura obserwatora związana jest bezpośrednio z definicją obserwowalności, a do opisu modelu i obserwatora wykorzystuje się operatory całkowe. Dodatkową pozytywną cechą operacji całkowych na skończonym odcinku czasu jest pomijanie wpływu dawnych zakłóceń, które występowały w przeszłości, a które już nie zakłócają przebiegu procesu. W równaniu różniczkowym taki okresowy wpływ zakłócenia skutkuje teoretycznie aż do nieskończoności. Obserwator całkowy działający na odcinku  $[0, T]$  odtwarza dokładną wartość stanu  $x(T)$ . Dla czasów  $t \geq T$  obserwator całkowy działający w formie przesuwanego okna pomiarowego, zbudowany tylko w oparciu o pomiar wejścia i wyjścia na pewnym odcinku czasu  $[t-T, t]$ , odtwarza dokładnie stan  $x(t)$ .

Daje to nowe, niżej wymienione własności jakościowe obserwatora [1].

- Deterministyczne sformułowanie zadania obserwacji i obserwacji optymalnej.
- Całkowa struktura opisu obserwatora.
- Wykorzystanie pomiarów wejścia i wyjścia obiektu.

- Jeśli pomiary są idealne (niezaszumione) to po ustalonym i znanym czasie obserwacji  $T$  obserwator odtworzy dokładną wartość wektora stanu  $x(T)$ , bez potrzeby wstępnego ustalania warunków początkowych.
- W przypadku „zaszumionego” wejścia  $u$  i wyjścia  $y$  systemu, obserwator posiada własności filtrujące.
- Istnieją ogólne i uniwersalne formuły na optymalną minimalno-normową postać obserwatora dającego minimalną normę błędu odtwarzania stanu w wypadku pomiarów zakłóconych szumem.

Formalnie obserwatory całkowe posiadają więc same zalety. Ich teorię sformułowano w pracach [1, 2] i rozbudowywano sukcesywnie w [3–7]. Dokładne obserwatory całkowe mają jednak również jedną wadę. Dla otrzymania on-line dokładnej wartości stanu wymagana jest duża ilość obliczeń wykonywanych na bieżąco. Dla wolnozmiennych procesów przemysłowych takich jak procesy chemiczne, w których zmienne procesowe próbkowane są np. raz na sekundę i dla mocy obliczeniowych nowoczesnych komputerów – nie stanowi to problemu. Istnieją jednak procesy szybkozmiennne (np. mechaniczne), w których częstotliwości próbkowania wynoszą kilkadziesiąt kHz (np. sterowanie głowicą dysku twardego – częstotliwość próbkowania 14 kHz), a akcja sterująca ma być realizowana co 10 milisekund. Mikrokontrolery DSP mogą realizować algorytmy sterowania oparte o rozwiązywanie równań różniczkowych, bowiem metoda Eulera nie wymaga dużej ilości obliczeń. Mogą jednak wystąpić ograniczenia możliwości obliczeniowych dla omawianych obserwatorów całkowych, gdy wartość całki w każdym przesuwającym oknie pomiarowym wymaga obróbki 1000 i więcej próbek/milisekundę.

Powstaje pytanie, czy jest możliwe zbudowanie algorytmu dokładnej obserwacji stanu on-line w oparciu o bieżący pomiar wyjścia i wejścia obiektu sterowanego oraz różniczkowe (a nie całkowe) formuły przetwarzania sygnałów. W niniejszym artykule zaprezentujemy taką możliwość i zilustrujemy jakość obserwacji na testach.

## 2. Całkowe dokładne obserwatory stanu końcowego

Przypomnimy niektóre formuły dokładnego odtwarzania nieznanej, końcowej wartości wektora stanu  $x(T)$  za pomocą obserwatora całkowego, na podstawie pomiarów wejścia  $u$  i wyjścia  $y$  na skończonym odcinku czasu  $[0, T]$ , (np. [7]).

Wektor stanu  $x(t)$  ma skończony wymiar  $n$ . Zakłada się, że liniowy, stacjonarny system jest znany (zidentyfikowany) i jest obserwowalny:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t)\end{aligned}\tag{1}$$

gdzie  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^r$  i  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  dla  $\forall t \geq 0$ ,  $m < n$ . Macierze  $A$ ,  $B$ ,  $C$  mają odpowiednie wymiary.

Założmy, że mierzone są sterowanie  $u$  i wyjście  $y$  w przedziale  $[0, T]$ , gdzie  $T$  jest ustalonym przedziałem obserwacji. Naszym celem jest określenie stanu  $x(T)$ .

Przyjmuje się: przestrzeń stanów  $X = \mathbb{R}^n$ , funkcyjną przestrzeń wyjść  $Y = (L^2(0, T))^m$ , i przestrzeń sterowań  $U = (L^2(0, T))^r$ .

Wyjście systemu (1) liczone w oparciu o wartość stanu w chwili  $T$  ma postać

$$y(t) = Ce^{-A(T-t)}x(T) - C \int_t^T e^{A(t-s)}Bu(s)ds \quad (2)$$

Równanie dokładnego obserwatora ma postać dwóch całek

$$x(T) = \int_0^T G_1^o(T, \tau) y(\tau) d\tau + \int_0^T G_2^o(T, \tau) u(\tau) d\tau \quad (3)$$

Macierze funkcyjne obserwacji  $G_1^o(T, \tau)$ ,  $G_2^o(T, \tau)$  mają wymiary  $(n \times m)$  i  $(n \times r)$ , a ich elementy są funkcjami dwóch parametrów – ustalonego czasu obserwacji  $T$  i zmiennej  $\tau \in [0, T]$ .

Podstawiając (2) do (3), można wykazać, że dopuszczalne macierze obserwacji  $G_1$  muszą spełniać równanie ograniczenia [1]

$$\int_0^T G_1(\tau) C e^{-A(T-\tau)} d\tau = I \quad (4)$$

gdzie  $I$  jest  $n \times n$  macierzą jednostkową. Macierz  $G_2$  musi mieć wtedy postać

$$G_2(\tau) = \int_0^\tau G_1(s) C e^{-A(\tau-s)} B ds \quad (5)$$

Spśród takich macierzy można wybrać parę  $G_1$  i  $G_2$ , która dodatkowo będzie posiadała najmniejszą normę w sensie przestrzeni  $L^2[0, T]$ . Norma taka będzie symbolizowała maksymalny możliwy i uśredniony błąd obserwacji, w przypadku pojawienia się zakłóceń w pomiarach  $u$  i  $y$  (zakłóceń najgorszych, ograniczonych, znormalizowanych do kuli jednostkowej).

Dla elementów  $g_1^{ij}(t)$ ,  $g_2^{ij}(t)$  macierzy  $G_1$  i  $G_2$ , definiuje się postać normy obserwatora

$$J = \int_0^T \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (g_1^{ij}(\tau))^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (g_2^{ij}(\tau))^2 \right] d\tau \quad (6)$$

Optymalne macierze we wzorze (3) mają postać ([1, 2]):

$$G_1^o(t) = P_1(t) C', \quad G_2^o(t) = P_2(t) B \quad (7)$$

Kwadratowe macierze  $P_1(t)$  i  $P_2(t)$  wyliczane są z wykorzystaniem macierzy fundamentalnej  $\Phi$  (prim oznacza tu transpozycję)

$$\Phi(t) = e^{Wt} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

gdzie macierz Hamiltona dana jest wzorem

$$W = \begin{bmatrix} A & BB' \\ C'C & -A' \end{bmatrix} \quad (9)$$

Liczbowa nieosobliwa macierz Grama  $M$  zależy od przyjętego czasu obserwacji  $T$ .

$$M' = \int_0^T e^{-A'(T-\tau)} C'C \Phi_{11}(\tau) d\tau.$$

Optymalne macierze obserwacji mają ostatecznie postać:

$$\begin{aligned} G_1^o(T, \tau) &= M^{-1} \Phi'_{11}(\tau) C' \\ G_2^o(T, \tau) &= M^{-1} \Phi'_{21}(\tau) B \end{aligned} \quad (10)$$

Odwrotność macierzy Grama  $M^{-1}$  ma postać:

$$M^{-1} = e^{AT} \left[ \int_0^T \Phi'_{11}(\tau) C'C e^{A\tau} d\tau \right] \quad (11)$$

Macierze (wzory (11) i (10)) dla wybranego czasu  $T$  można policzyć off-line w przedziale  $[0, T]$  i następnie stosować on-line w wersji obserwatora z ruchomym oknem [3].

Norma (6) obserwatora jest malejącą funkcją czasu obserwacji  $T$ , co oznacza, że dla krótkich czasów obserwacji posiada ona dużą wartość. Jest to potencjalnie niebezpieczne dla dokładnego odtwarzania stanu, jeśli bazuje się na krótkich oknach, gdyż w przypadku zjawienia się zakłóceń, zwiększy się też błąd odtwarzania stanu, szacowany wartością normy obserwatora. Dla minimalizacji błędu, okno obserwacyjne powinno więc być jak najdłuższe. Zwiększa się jednak wtedy ilość obliczeń wewnątrz takiego okna i opóźnia się moment wyliczenia pierwszej obserwacji (realizacja pierwszego okna). Jeśli zakłócenia pomiarowe są nieobecne, lub pomijalnie małe, to dokładność odtwarzania nie zależy od  $T$  i okno można przyjąć tak małe jak to jest możliwe.

### 3. Obserwatory całkowe z przesuwającym oknem

Przedstawiony w poprzednim rozdziale całkowy opis obserwatorów na skończonym oknie obserwacji według formuły

$$x(T) = \int_0^T G_1(T, \tau) y(\tau) d\tau + \int_0^T G_2(T, \tau) u(\tau) d\tau \quad (12)$$

może być wykorzystany w systemach obserwacji i sterowania on-line. W tym celu można zaproponować strukturę przesuwanego okna o stałej szerokości  $T$  MWO (*Moving Window Observer*). Formuła (12) jest prawdziwa w układach stacjonarnych dla dowolnego odcinka zarejestrowanych funkcji  $y$  i  $u$ , a więc również dla funkcji przesuniętych.

Dla ustalonego  $T$ , policzonych  $G_1(T, \tau)$ ,  $G_2(T, \tau)$  i  $t \geq T$ , obowiązuje więc formuła MWO przedstawiana różnymi możliwymi postaciami całek:

$$x(t) = \int_0^T G_1(\tau) y(t-T+\tau) d\tau + \int_0^T G_2(\tau) u(t-T+\tau) d\tau \quad (13)$$

$$x(t) = \int_{-T}^0 G_1(T+\tau) y(t+\tau) d\tau + \int_{-T}^0 G_2(T+\tau) u(t+\tau) d\tau$$

$$x(t) = \int_{t-T}^t G_1(T-t+\tau) y(\tau) d\tau + \int_{t-T}^t G_2(T-t+\tau) u(\tau) d\tau \quad (14)$$

Z ostatniej postaci wynika, że taki obserwator reprezentuje okno o stałej szerokości  $T$  związane z macierzowymi funkcjami obserwacji  $G$ , przesuwane na tle pomiarów wzdłuż osi czasu i po obliczeniu całek dające stan  $x(t)$  dla  $t \geq T$ . W praktycznych zastosowaniach wygodną postacią jest (13), z której widać, że macierze  $G_1$ ,  $G_2$  nie zależą od bieżącego czasu  $t$  i muszą być policzone w przedziale  $[0, T]$  tylko raz (off-line), a następnie zapamiętane wystarczająco gęsto, aby zagwarantować dokładność numeryczną liczenia całek. Użyty sprzęt komputerowy musi być wystarczająco szybki, aby w jednym przedziale dyskretyzacji zdążyły się policzyć w przedziale  $T$  iloczyny funkcji  $G_1 y$  i  $G_2 u$  oraz ostateczne wartości dwóch całek (np. procedurą Simpsona).

### 4. Obserwator całkowy i równoważna mu forma różniczkowa

Analizując wzór (10) i postać obserwatora (14), można wyprowadzić różniczkową postać obserwatora z przesuwającym oknem. W tym celu zauważmy, że w każdej chwili czasu obserwator z przesuwającym oknem o szerokości  $T$  może być formalnie rozważany jako różnica dwóch obserwatorów z rozszerzonym na bieżąco oknem. Początki obu okien zaczy-

nają się w chwili  $t_0 = 0$ . Jeden z obserwatorów ma koniec w  $t$ , drugi w  $t-T$ . Macierz Grama  $M$  jest stała i policzona dla  $t = T$ .

Zgodnie z (10 i (14)

$$x(t) = M^{-1} \cdot \left[ \int_{t-T}^t \left[ \Phi'_{11}(T-t+\tau) C'y(\tau) + \Phi'_{21}(T-t+\tau) B u(\tau) \right] d\tau \right].$$

Jest to równoważne różnicy dwóch całek

$$\begin{aligned} x(t) = M^{-1} & \int_0^t \left[ \Phi'_{11}(h-t+\tau) C'y(\tau) + \Phi'_{21}(h-t+\tau) B u(\tau) \right] d\tau - \\ & - M^{-1} \int_0^{t-h} \left[ \Phi'_{11}(h-t+\tau) C'y(\tau) + \Phi'_{21}(h-t+\tau) B u(\tau) \right] d\tau \end{aligned} \quad (15)$$

Wprowadźmy dwie nowe  $n$ -wymiarowe zmienne wektorowe  $\eta_1(t)$  i  $\eta_2(t)$ , które spełniają macierzowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu o wymiarze macierzy stanu  $[2n \times 2n]$ , z wybranymi zerowymi warunkami początkowymi:  $\eta_1(0) = 0$  i  $\eta_2(0) = 0$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1(t) \\ \dot{\eta}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A' & , & -C'C \\ -BB' & , & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C'y(t) \\ B u(t) \end{bmatrix} = -W'\eta(t) + \begin{bmatrix} C'y(t) \\ B u(t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Wtedy:

- a) rozwiązanie (16) dla czasu  $t$  ma dla uogólnionego wektora  $\eta(t)$   $[2n \times 1]$  postać

$$\eta(t) = \int_0^t e^{-W'(t-\tau)} \begin{bmatrix} C'y(\tau) \\ B u(\tau) \end{bmatrix} d\tau \quad (17)$$

- b) rozwiązanie (16) dla chwili wcześniejszej  $t-T$  ma postać

$$\eta(t-T) = \int_0^{t-T} e^{-W'(t-T-\tau)} \begin{bmatrix} C'y(\tau) \\ B u(\tau) \end{bmatrix} d\tau \quad (18)$$

Z własności macierzy fundamentalnej wiadomo, że zachodzi

$$\begin{aligned} \Phi'(T-t+\tau) &= \begin{bmatrix} \Phi'_{11}(T-t+\tau), \Phi'_{21}(T-t+\tau) \\ \Phi'_{12}(T-t+\tau), \Phi'_{22}(T-t+\tau) \end{bmatrix} = \\ &= e^{W'(T-t+\tau)} = e^{WT} \cdot e^{-W'(t-\tau)}. \end{aligned}$$

Stąd łącząc a) i b), można utworzyć różnicowy wektor  $X(t)$  o wymiarze  $[2n \times 1]$ :

$$X(t) = e^{W'T} \eta(t) - \eta(t-T),$$

$$X(t) = e^{W'T} \cdot \int_0^t e^{-W'(t-\tau)} \begin{bmatrix} C'y(\tau) \\ Bu(\tau) \end{bmatrix} d\tau - \int_0^{t-T} e^{-W'(t-T-\tau)} \begin{bmatrix} C'y(\tau) \\ Bu(\tau) \end{bmatrix} d\tau = e^{W'T} \eta(t) - \eta(t-T).$$

Pierwsza składowa ( $n$ -wymiarowa) wektora  $X(t)$  pomnożona przez macierz  $M^{-1}$  realizuje odtwarzany stan  $x(t)$  wg (15) w formie różnicowego równania „wyjścia” takiego obserwatora różniczkowego

$$x(t) = \begin{bmatrix} M^{-1}, 0 \end{bmatrix} X(t) = \begin{bmatrix} M^{-1}, 0 \end{bmatrix} e^{W'T} \cdot \eta(t) - \begin{bmatrix} M^{-1}, 0 \end{bmatrix} \eta(t-T) \quad \text{dla } t \geq T \quad (19)$$

Stąd ostatecznie otrzymuje się dwa równania do opisu **różniczkowego obserwatora dokładnego**:

$$\dot{\eta}(t) = -W'\eta(t) + \begin{bmatrix} C'y(t) \\ Bu(t) \end{bmatrix}, \quad \eta(0) = 0 \quad (20)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} M^{-1}, 0 \end{bmatrix} e^{W'T} \cdot \eta(t) - \begin{bmatrix} M^{-1}, 0 \end{bmatrix} \eta(t-T) \quad (21)$$

Równania (20), (21) dają równoważną do (15) różniczkową postać obserwatora z przesuwającym oknem. Różniczkowe równanie stanu obserwatora (20) jest bez opóźnienia. Opóźnienie występuje tylko w algebraicznym równaniu wyjścia obserwatora (21).

Dla każdego  $t$  równanie różniczkowe musi być rozwiązywane na bieżąco, a wartości  $\eta(t)$  w przedziale  $[t-T, t]$  muszą być pamiętane i użyte do obliczenia stanu dokładnego z równania wyjścia obserwatora (21).

Należy zauważyć, że równanie różniczkowe (20) jest niestabilne, gdyż niektóre wartości własne macierzy  $W$   $[2n \times 2n]$  są dodatnie. Stąd składniki równania (21) są też niestabilne, jakkolwiek ich różnica daje dobrą estymatę stanu. Należy stosować do obliczeń dużą dokładność (*double precision*). Testy pokazują, że dla długich przedziałów czasu rozwiązanie różnicowe jest stabilne. W praktyce, dla pozbycia się nawarstwiającego błędu, co jakiś czas obserwator powinien rozpoczynać obliczenia od początku (od warunków zerowych). Mały nakład obliczeniowy wymagany do obserwacji rekompensuje tę własność.

Poniżej przedstawimy testy na obserwację stanu w układzie drugiego rzędu.

## 5. Przykład

Dany jest obserwowalny układ drugiego rzędu. Przeprowadzić syntezę dwóch typów obserwatorów odtwarzających stan dokładnie.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}\quad (22)$$

### 5.1. Dokładny obserwator całkowy

Dla powyższego układu (22) należy podać zależności na całkowy obserwator optymalny stanu końcowego  $x(T)$ .

Macierze  $\Phi_{11}(t)$  i  $\Phi_{21}(t)$  obliczone na podstawie zależności (8), (9) mają postać:

$$\begin{aligned}\Phi_{11}(t) &= \begin{bmatrix} \cosh t \cos t, & \frac{1}{2}(\sinh t \cos t + \cosh t \sin t) \\ \sinh t \cos t - \cosh t \sin t, & \cosh t \cos t \end{bmatrix} \\ \Phi_{21}(t) &= \begin{bmatrix} 2(\sinh t \cos t + \cosh t \sin t), & 2 \sinh t \sin t \\ -2 \sinh t \sin t, & \sinh t \cos t - \cosh t \sin t \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (23)$$

Macierze  $M$  i  $M^{-1}$  mają postać:

$$\begin{aligned}M &= \begin{bmatrix} 2 \sinh T \cos T + 2 \cosh T \sin T, & -2 \sinh T \sin T \\ 2 \sinh T \sin T, & \sinh T \cos T - \cosh T \sin T \end{bmatrix} \\ M^{-1} &= \frac{1}{2 \sinh^2 T - 2 \sin^2 T} \begin{bmatrix} \sinh T \cos T - \cosh T \sin T, & 2 \sinh T \sin T \\ -2 \sinh T \sin T, & 2(\sinh T \cos T + \cosh T \sin T) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (24)$$

Ostatecznie optymalna para obserwatorów  $G_1^o(t)$  i  $G_2^o(t)$  obliczona na podstawie (10), odpowiadająca normie (6) przyjmie postać daną poniższym wzorem.

$$\begin{aligned}G_1^o(t) &= M^{-1} \begin{bmatrix} 2 \cos t \cosh t \\ \cos t \sinh t + \sin t \cosh t \end{bmatrix} \\ G_2^o(t) &= M^{-1} \begin{bmatrix} -2 \sin t \sinh t \\ \cos t \sinh t - \sin t \cosh t \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (25)$$

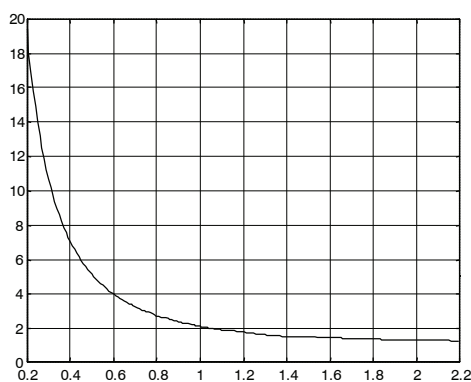
Optymalny całkowy obserwator dokładny dla układu drugiego rzędu (25) ma postać

$$\begin{bmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \end{bmatrix} = \int_0^T \begin{bmatrix} G_{11}^o(\tau) \\ G_{12}^o(\tau) \end{bmatrix} y(\tau) d\tau + \int_0^T \begin{bmatrix} G_{21}^o(\tau) \\ G_{22}^o(\tau) \end{bmatrix} u(\tau) d\tau.$$

Norma obserwatora  $\|(G_1, G_2)\|(T)$  wg (6) jest funkcją czasu obserwacji  $T$

$$\|(G_1, G_2)\|(T) = \sqrt{\frac{3 \sinh 2T + \sin 2T}{4(\sinh^2 T - \sin^2 T)}}.$$

Analiza przebiegu tej normy w funkcji czasu obserwacji  $T$  wykazuje, że dla  $T \rightarrow \infty$ , jej wartość maleje monotonicznie do  $\sqrt{1,5} = 1,225$ , a dla czasu  $T \rightarrow 0$  wartość normy rośnie do  $\infty$  (rys. 2).



Rys. 2. Przebieg normy obserwatora dla układu drugiego rzędu

Powyższe obserwatory całkowe testowane były w poprzednich publikacjach [3, 4]. Poniżej przedstawiono nowe testy odtwarzania stanu dla układu drugiego rzędu (22) za pomocą obserwatora różniczkowego z opóźnieniem.

## 5.2. Dokładny obserwator różniczkowy

Dla układu (22) należy podać zależności na dokładny różniczkowy optymalny obserwator stanu końcowego  $x(T)$ . Zgodnie ze wzorem (16) otrzymujemy:

$$\dot{\eta}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1(t) \\ \dot{\eta}_2(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A' & C'C \\ BB' & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C'y(t) \\ B u(t) \end{bmatrix} = -W'\eta(t) + \begin{bmatrix} C'y(t) \\ B u(t) \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{W'T} \cdot \eta(t) - \eta(t-T) \end{bmatrix}$$

Łatwo pokazać, że po uproszczeniach zachodzi zależność:

$$x(t) = M^{-1} \left[ \Phi'_{11} \eta_1(t) + \Phi'_{21} \eta_2(t) - \eta_1(t-T) \right] \quad (27)$$

Po wykonaniu podstawień macierzy  $A$ ,  $B$ ,  $C$  do (26) otrzymuje się cztery równania różniczkowe:

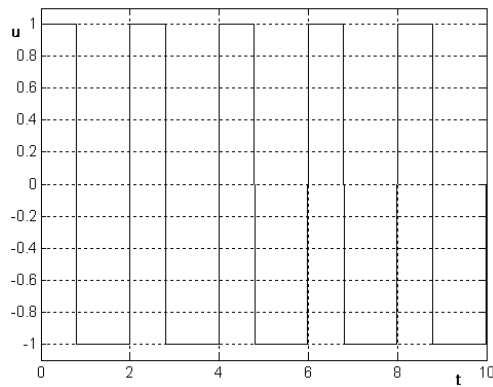
$$\begin{aligned}\dot{\eta}_{11}(t) &= -4\eta_{21}(t) + 2y(t) \\ \dot{\eta}_{12}(t) &= -\eta_{11}(t) \\ \dot{\eta}_{21}(t) &= \eta_{22}(t) \\ \dot{\eta}_{22}(t) &= -\eta_{12}(t) + u(t)\end{aligned}\tag{28}$$

Równania (28) można łatwo rozwiązywać numerycznie, otrzymując wartości wektorów  $\eta_1(t)$  i  $\eta_2(t)$ , a z (27) przebieg stanu  $x(t)$ . Przebieg  $\eta_1(t)$  należy zapamiętać w przedziale  $t-T$ . Wartości macierzy Grama i podmacierzy  $\Phi$ , dla przykładowego  $T=2$ , policzono poniżej.

$$\Phi'(T) = \begin{bmatrix} \Phi'_{11}(T) & \Phi'_{21}(T) \\ \Phi'_{12}(T) & \Phi'_{22}(T) \end{bmatrix} = e^{W' \cdot 2} = \begin{bmatrix} -1,5656 & -4,9303 & 3,8233 & -6,5958 \\ 0,9558 & -1,5656 & 6,5958 & -4,9303 \\ -1,2326 & -1,6489 & -1,5656 & -0,9558 \\ 1,6489 & 0,9558 & 4,9303 & -1,5656 \end{bmatrix}$$

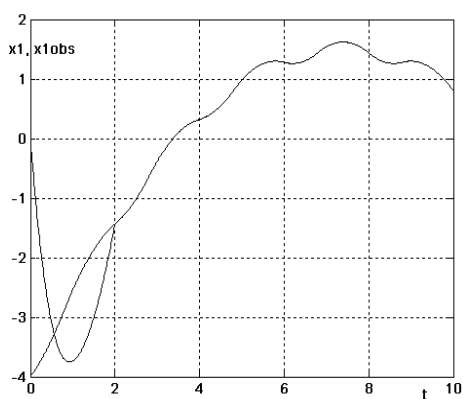
$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,2675 \\ -0,2675 & 0,1551 \end{bmatrix}\tag{29}$$

Testy wykonano dla sygnałów pomiarowych  $u$  i  $y$  niezakłócanych i dla sygnałów pomiarowych z zakłóceniem. Na rysunku 3 widać kształt zastosowanego sygnału wejściowego.

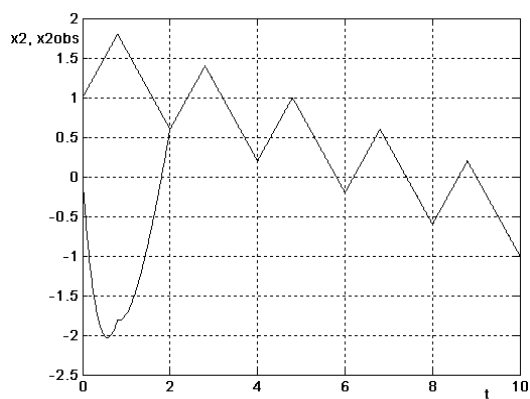


**Rys. 3.** Przebieg zastosowanego sygnału sterującego

Na rysunkach 4 i 5 widać, że dla  $t \geq T$  zachodzi idealna zgodność zmiennych stanu  $x_1$  i  $x_2$  z ich, odtwarzanymi obserwatorem różniczkowym, przebiegami. Po czasie równym opóźnieniu  $T = 2$  sygnały są równe. W tym teście sygnały oryginalne startują z warunków początkowych  $x_1(0) = -4$ ,  $x_2(0) = 1$ . Stan odtwarzany startuje z zerowych warunków początkowych.

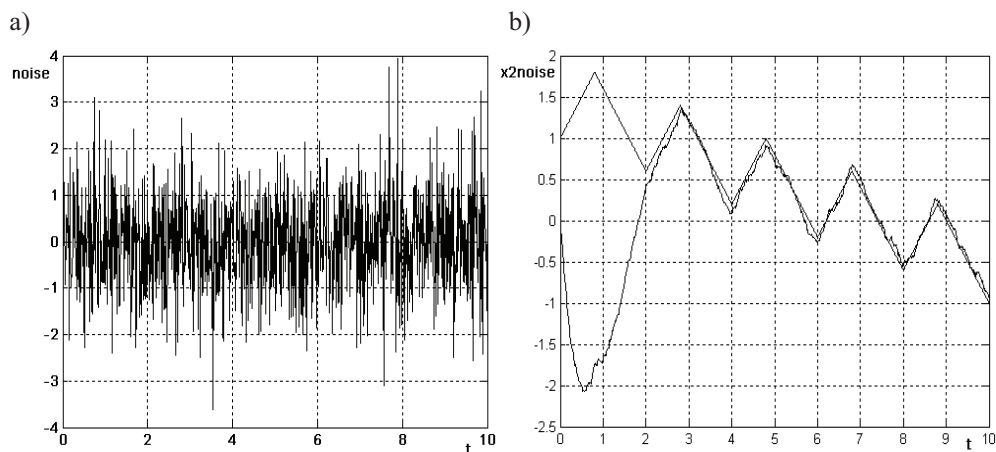


**Rys. 4.** Oryginalna zmienna stanu  $x_1$  i przebieg sygnału odtwarzanego



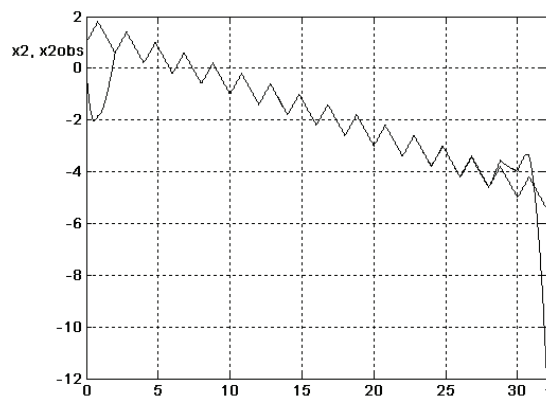
**Rys. 5.** Oryginalna zmienna stanu  $x_2$  i przebieg sygnału odtwarzanego

Na rysunku 6 przedstawiony jest kształt szumu dodawanego do pomiarów  $u$  i  $y$  oraz przebiegi oryginalnego i odtwarzanego sygnału  $x_2$ . Mimo dużego poziomu szumu, stan odtwarzany jest bardzo dobrze.



**Rys. 6.** Kształt szumu dodawanego do pomiarów  $u$  i  $y$  (a) oraz przebiegi sygnału  $x_2$  (b)

Ostatnim testem był eksperyment polegający na sprawdzeniu długości horyzontu czasowego, po którym pojawiają się efekty narastania błędów iteracji (rys. 7). W tym przypadku czas  $t = 28$ . Czas ten zależy od dokładności prowadzonych obliczeń. Można go wydłużyć, przyjmując większą ilość cyfr po przecinku w zapisie macierzy (29) na  $M$  i  $\Phi$ .



Rys. 7. Numeryczny efekt narastania się błędów obliczeniowych

## 6. Podsumowanie

W artykule przedstawiono teorię dokładnego odtwarzania skończonego wymiarowego stanu układu liniowego w przestrzeniach  $L^2[0, T]$ . Przypomniano podstawowe zależności dla dokładnych obserwatorów całkowych. Przedstawiono nową koncepcję dokładnego obserwatora stanu opisywanego przez dwa równania różniczkowe i koncepcję wykorzystania opóźnienia.

Za pomocą stworzonego pakietu oprogramowania w języku C++ przeprowadzono testy numeryczne, które potwierdziły dokładność odtwarzania stanu również przez obserwatory różniczkowe, po czasie  $t \geq T$ . Wszelkie zewnętrzne zakłócenia stanu oryginalnego w trakcie procesu obserwacji zmiennych  $u$  i  $y$  ( $t > T$ ) dają również efekt zaburzenia przebiegu odtwarzanego stanu, ale tylko na długość okna  $T$ . Stan jest ponownie dokładnie zrekonstruowany po gwarantowanym czasie  $T$  od chwili wystąpienia zaburzenia. Jest to ważna cecha w układach sterowania w czasie rzeczywistym

## Literatura

- [1] Byrski W., Fuksa S.: *Optimal finite parameter observer. An application to synthesis of stabilizing feedback for a linear system*. Control and Cybernetics, vol. 13, No. 1–2, 1984
- [2] Fuksa S., Byrski W.: *General Approach to Linear Optimal Estimation of Finite Number of Parameters*. IEEE, TAC–29, No. 5, 1984, 470–472
- [3] Byrski W.: *Optimal State Observers with Moving and Expanding Observation Window*. Proc. of IASTED, XII Intern. Conference on Model. & Sim. Innsbruck, 1993

- [4] Byrski W.: *Integral Description of the Optimal State Observers*. Proc. of II European Control Conference, ECC'93, Groningen, vol. 4, 1993, 1832–1838
- [5] Byrski W.: *Theory and application of the optimal integral state observers*. Proc. of III European Control Conference, ECC'95, Roma, vol. 1, 1995, 526–532
- [6] Byrski W., *Obserwatory i ich zastosowania w systemach sterowania adaptacyjnego*, Monografie Zeszyty Naukowe AGH, Kraków 1993
- [7] Byrski W., Pelc M.: *Algorytmy całkowych obserwatorów stanu o przełączanej strukturze*. Automatyka, UWND AGH, t. 8, z. 3, 2004
- [8] Rolewicz S.: *On optimal observability of linear systems in infinite-dimensional states*. Studia Math., No. 44, 1972, 411