— 1, VI.

1.2t

Repetytorjum algebry

według wykładów Prof. Dr[a] A. Hoborskiego

1922/3

Wydano staraniem Sekcji Wydawniczej
Koła Stuch. Akademji Górniczej
w Krakowie.

Rozdział I.

Liczby całkowite bezwzględne.

§ 1. Dodawanie liczb całkowitych bezwzględnych.

Najprostsze liczby, z jakimi się spotykamy są to liczby naturalne, to znaczy liczby szeregu naturalnego 1, 2, 3, 4, i t. d. Jeżeli do liczb naturalnych dołączymy liczbę 0, wówczas liczby te, t. j.: 0, 1, 2, i t. d. zwiemy liczbami całkowitemi bezwzględnemi. Cóż to jest zatem liczba całkowita? Zanim na to odpowiemy, zastanówmy się nad definicjami. Przez definicję rozumiemy wyjaśnienie pojęcia nowego przez pojęcie dawne, już znane. Definjując zaś te pojęcia dawne innymi pojęciami, musimy wreszcie zatrzymać się i przyjąć pewne pojęcia za znane, ich nie określając. Te pojęcia nazywamy <u>pojęciami pierwotnymi</u>. Do takich pojęć pierwotnych zaliczymy właśnie pojęcie liczby całkowitej. Możemy powiedzieć, że liczba całkowita jest pewną właściwością zbioru przedmiotów, ale zdanie to nie jest określe=

niem liczby całkowitej, tylko raczej jej objaśnieniem. Jeżeli weźmiemy pod uwagę jakikolwiek zbiór przedmiotów, pomyślanych lub rzeczywistych, to jedną z cech jego jest ilość przedmiotów. Musimy się zastrzedz, że przez słowo „zbiór" rozumieć będziemy tu coś więcej, niż zwykle, gdyż zbiór może zawierać tylko jeden przedmiot, lub może żadnego przedmiotu nie zawierać. N. p. rozważmy zbiór trójkątów równobocznych, prostokątnych; zamiast mówić, że takich trójkątów niema, powiemy, że ich zbiór jest pustym i że ich ilość wynosi zero lub że ich zbiór ma zero przedmiotów.[1]

Liczby są to twory umysłu, w rzeczywistości nie istnieją. Możemy jednak mówić o zbiorze liczb i dla tego zbioru ustanawiamy pojęcie działania i porównywania. Pierwszą czynnością arytmetyczną, którą człowiek wykonuje, jest liczenie czyli podawanie ilości przedmiotów zbioru, drugą porównywanie liczb, które oparte jest na następującej podstawie: Weźmy pod uwagę dwa

1) Zero jest również liczbą, podobnie jak 4, 100, 252, i t. d.

zbiory pewnych przedmiotów (Z') i (Z"). Porównuję te zbiory w ten sposób, że z obydwu wybieram równocześnie po jednym przedmiocie. Wtedy zdarzyć się się może jeden i tylko jeden z dwu następujących przypadków:

1) Oba zbiory się wyczerpią
2) Jeden zbiór się wyczerpie, drugi nie.

W pierwszym przypadku mówimy, że zbiory są równe, w drugim zaś zwiemy zbiór, który się wyczerpał, mniejszym, a powstały zbiór większym z obu.

Przypuśćmy, że się zbiór (Z') wyczerpał, zaś zbiór (Z") się nie wyczerpał. Niech z' oznacza ilość przedmiotów zbioru (Z'), z" ilość przedmiotów zbioru (Z"). Liczbę z' nazywamy liczbą mniejszą, zaś liczbę z" liczbą większą z dwu liczb, co piszemy $z' < z''$, $z'' > z'$!

Następną czynnością arytmetyczną jest tworzenie sumy dwu zbiorów. Weźmy pod uwagę dwa zbiory A i B. Przez sumę zbiorów A i B rozumiemy zbiór elementów (przedmiotów) należących do zbioru A lub B i tylko takich. Zbiór C, będący sumą zbiorów A i B oznaczany symbolem $C = A + B$. Zbiory A i B mogą mieć elementy wspólne. Zajmiemy się teraz zbiorami nie mającymi elementów wspólnych. Niech a i b oznaczają ilości elementów zbiorów A i B. Przez sumę $a + b$ liczb a i b rozumiemy ilość elementów zbioru $C = A + B$. Liczby a i b nazywamy składnikami sumy. Czynność arytmetyczną, prowadzącą do obliczania sumy dwu liczb, gdy znamy składniki sumy, nazywamy dodawaniem.

Dodawanie liczb całkowitych bezwzględnych posiada własności następujące:

1) Dodawanie jest jednoznaczne i zawsze wykonalne, t.zn. jedna jedyna liczba jest sumą składników a, b i zawsze taka suma istnieje.
2) $a + b = b + a$ lub wyrażając to słowami: Dodawanie nie zależy od porządku składników. Własność tę nazywamy przemiennością lub prawem komutatywnem dodawania.
3) $(a + b) + c = a + (b + c)$

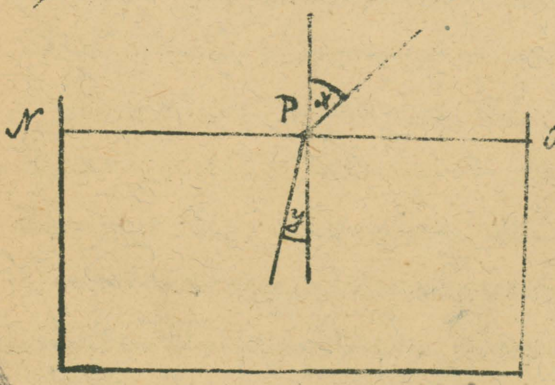
Nawiasy przepisują sposób obliczania sum. Włas=

ność tę, że na wynik dodawania nie wpływa sposób kojarzenia składników zowiemy prawem kojarzenia lub prawem associatywnem (dla dodawania). Skutkiem tej własności możemy przy dodawaniu opuszczać nawiasy i każdemu zostawić do woli sposób kojarzenia składników.

4) $a + b \geq a$ (*) czyli w słowach: suma dwu składników nie jest mniejsza od żadnego ze swych składników.

§ 2. Zasada indukcji matematycznej.

Weźmy dwa ośrodki materjalne: powietrze i wodę: Niech NO oznacza zwierciadło wody.



Rzućmy promień światła na zwierciadło wody pod pewnym kątem. Stwierdzimy, że promień świetlny załamuje się ku prostopa=

(*) $m \geq n$ znaczy: m większe lub równe n; możemy także tak czytać: m conajmniej równe n; $m \leq n$ znaczy: m mniejsze lub równe n, co można także tak czytać: m co najwyżej równe n.

dłej do NO, wykreślonej w punkcie P. Jeżeli zmierzymy kąt padania x, zawarty między promieniem świetlnym w powietrzu, a prostopadłą i kąt załamania y, zawarty między promieniem świetlnym w wodzie a prostopadłą, to przekonamy się, że stosunek $\frac{\sin x}{\sin y}$ jest wielkością stałą. Stosunek ten nazywamy współczynnikiem załamania powietrza i wody. Na podstawie zjawisk szczegółowych wnosimy, że to zawsze zachodzi. Zasadę, na podstawie której tak wnioskujemy, nazywamy zasadą indukcji przyrodniczej. Zasada ta opiewa: Gdy ze spełnienia się warunków (α) w licznym szeregu zjawisk wynika zjawisko lub własność (β), to zawsze z warunków (α) wyniknie (β). Zasada ta opiera się na prawie niezmienności natury, na prawidłowości zjawisk w naturze. W naszym przykładzie warunkiem (α) jest padanie promienia świetlnego w powietrzu na zwierciadło wody, zaś (β) oznacza, że $\frac{\sin x}{\sin y}$ jest wielkością stałą.

Podobną zasadę posiada też matematyka, która jednak będąc nauką dedukcyjną nie może oprzeć tej zasady na prawie niezmienności natury. Nim tę zasadę indukcji matematycznej wysłowimy, rozważymy dwa przykłady.

Przykład I:

Rozważmy ciąg liczb 5, 0, 7, 8, 11, 14, 17 ... i t.d. Pierwsze cztery wyrazy są dowolnie napisane, od wyrazu zaś czwartego począwszy, budujemy prawidłowo w ten sposób, że każdy wyraz następny jest większym od poprzedniego o liczbę 3 czyli od czwartego wyrazu począwszy mamy postęp arytmetyczny o różnicy 3. Oznaczmy przez w_n wyraz, znajdujący się na n-tem miejscu ciągu. Ile wynosi w_n?

Otóż jest: $w_1 = 5$, $w_2 = 0$, $w_3 = 7$, $w_4 = 8$, $w_5 = 8+3$, $w_6 = 8 + 2.3$, $w_7 = 8 + 3{:}3$, ... przeto $w_n = 8 + 3(n-4)$.

Zauważmy, że ponieważ pierwsze trzy wyrazy są dowolne, nie przedstawimy ich ogólnym wzorem, wobec czego wzór ogólny odnosi się tylko do wskaźników $n \geqslant 4$. Wzór $w_n = 8+3(n-4)$ stwierdziliśmy dla $n = 4, 5, 6, 7$. Ale nie mamy pewności, że wzór ten jest słusznym także dla innych wartości na liczbę n.

Dowodzimy tego wzoru na podstawie zasady indukcji matematycznej. Dowód składa się z dwu kroków:

1) Wykazujemy prawdziwość twierdzenia dla $n=1$.

2) Wykazujemy, że, jeśli twierdzenie jest prawdziwem dla wartości naturalnej p na n, byle było $p \geq 1$, to jest także prawdziwem dla $n = p+1$.

Przykład II.

Dla lepszego objaśnienia tej zasady weźmy jeszcze przykład drugi. Wyobraźmy sobie worek z owocami. Wyciągamy owoc i stwierdzamy, że jest to gruszka. Ktoś zapewnia nas, że jeżeli za p-tym razem wyciągniemy gruszkę, to za $(p+1)$-szym razem wyciągnięty owoc będzie również gruszką. Możemy wtedy powiedzieć, że wszystkie owoce są gruszkami. Ale gdy chodzi o zagadnienia matematyczne, nikt nam tego rodzaju zapewnień dać nie może, owszem musimy je sami sobie dać, co odpowiada krokowi drugiemu zasady.

Udowodnijmy teraz słuszność wzoru na wyraz w_n z przykładu I. Przyjmijmy, że wzór jest prawdziwym dla $n = p$, gdzie $p \geqslant 4$, a więc założymy, że jest:

$$w_p = 8 + 3(p-4).$$

Mamy dowieść, że jest słusznym wzór dla wartości $n = p+1$ czyli, że jest:

$$w_{p+1} = 8 + 3[(p+1)-4] = 8 + 3(p-3).$$

Ponieważ w_{p+1} oznacza wyraz następny po wyrazie w_p, więc $w_{p+1} = w_p + 3$.

Korzystając z założenia mamy

$$w_{p+1} = 8 + 3(p-4) + 3 = 8 + 3[p-4+1]$$

$$w_{p+1} = 8 + 3[p-3],$$ co było do udowodnienia.

Zatem twierdzenie T. jest słuszne.

Na podstawie zasady indukcji matematycznej wnosimy, że wzór nasz jest prawdziwy dla wszelkich liczb naturalnych $n \geqslant 4$.

Widzimy zatem, że indukcja przyrodnicza posiada też krok pierwszy i drugi, lecz kroku drugiego się nie dowodzi, tylko przyjmuje za prawdziwy na podstawie niezmienności praw przyrody.

Sformułujmy zasadę indukcji matematycznej we formie ogólnej:

<u>Niech będzie dane zdanie (zd), w którego występowa-</u>

niu zachodzi litera n, mogąca przyjmować wartości naturalne. Załóżmy że to zdanie (zd) ma następujące dwie własności:
1) Zdanie (zd) jest prawdziwe, gdy za literę n podstawimy liczbę całkowitą bezwzględną k (w przykładzie I $k = 4$, w przykładzie II jest $k=1$).
2) Jeżeli zdanie (zd) jest prawdziwem gdy za literę n podstawimy liczbę całkowitą bezwzględną $p \geqslant k$, zresztą dowolną, to zdanie to jest prawdziwem gdy za literę n podstawimy dowolną liczbę całkowitą bezwzględną, byle nie mniejszą od liczby k.

Własność trzecia wynika z dwu poprzednich czyli jest ich konsekwencją. Zasada indukcji matematycznej jest własnością liczb całkowitych bezwzględnych.

§. 3.- Dalsze działania na liczbach całkowitych bezwzględnych.

Działania na liczbach dzielimy na trzy stopnie, - każdy zaś stopień zawiera dwa działania: proste i odwrotne. Działania pierwszego stopnia są: do:

dawanie i odejmowanie. Odejmowanie, jako działanie odwrotne do dodawania polega na tem, że mając dane dwie liczby całkowite bezwzględne a, b, mamy znaleźć taką liczbę x, ażeby spełniała ona równość $a + x = b$. Ażeby taka liczba istniała, musi być spełniony warunek $b \geqq a$. Jeżeli taka liczba x istnieje, wówczas oznaczamy ją znakiem : $b - a$.

Odejmowanie posiada własności następujące:

1) Jeżeli $b \geqq a$, to jest ono zawsze wykonalne i jednowartościowe czyli: gdy $b \geqq a$, to symbol $b - a$ przedstawia liczbę i tylko jedną. (Znak $3-8$ nie oznacza żadnej (na razie) liczby).

2) $a-(b+c) = (a-b)-c$

3) $a-(b-c) = (a+c)-b$

4) $a+(b-c) = (a+b)-c$

5) $(a \pm m)-(b \pm m) = a-b$

Ostatnią własność możemy wyrazić słowami, że różnica się nie zmieni, gdy odjemną i odjemnik pomniejszymy lub powiększymy o tę samą liczbę.

Działaniami drugiego stopnia są: mnożenie i dzieleniè. Iloczyn liczb a, b oznaczamy symbolem a. b. Przez iloczyn a. 0 rozumièmy liczbę zero: a. 0 = 0. Przez iloczyn a. 1 rozumièmy liczbę a: a. 1 = a. Przez iloczyn a. b, gdziè $b \geq 2$, rozumièmy liczbę następującą: Weźmy pod uwagę b zbiorów, z których każdy ma po a przedmiotów, przyczem żadne dwa z tych zbiorów niè mają nièć elementów wspólnych; tworzymy sumę tych zbiorów, będziè to zbiór, który oznaczmy przez (Z). Liczbę, podającą ilość przedmiotów zbioru (Z) nazywamy iloczynem liczb a i b. Liczbę a iloczynu a. b nazywamy mnożną, liczbę b mnożnikiem; mnożną i mnożnik nazywamy czynnikami iloczynu.

Mnożeniè posiada własności następujące:

<u>1) a. b = b. a jest to t. zw. prawo przemienności czynników, wyrażające się słowami: iloczyn niè zależy od porządku czynników.</u>

<u>2) (a. b). c = a. (b. c) jest to t. zw. prawo kojarzenia czynników. Ponièważ mnożeniè niè zależy od sposobu wykonania działania, zatem możemy nawiasy opuścić i napisać: a. b. c jako</u>

symbol iloczynu trzech czynników a, b, c.

3.) $(a+b).c = a.c + b.c$

Sumę mnożymy przez liczbę, mnożąc poszczególne składniki sumy i dodając otrzymane iloczyny. Własność tę nazywamy prawem rozdzielczości (dystrybutywnem) mnożenia w stosunku do dodawania. Mnożenie posiada również własność rozdzielczości w stosunku do odejmowania:

$$(a-b).c = a.c - b.c$$

4.) Iloczyn dwu liczb jest równym zeru wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden czynnik jest równym zeru. Jeżeli $a.b = 0$, wówczas $a=0, b \neq 0$ *) albo $a \neq 0, b=0$ albo $a=0$ $b=0$.

Działaniem odwrotnem do mnożenia jest dzielenie, które określa się następująco: Dane są liczby a i b, szukamy takiej liczby x, ażeby było: $b.x = a$. Mogą zajść dwa przypadki: I) $b=0$ albo II) $b \neq 0$. Pierwszy przypadek rozbijemy na dwa dalsze a mianowicie:

I₁) $b=0$ i $a \neq 0$ n.p: $0.x = 5$. Otóż niema liczby x, któraby spełniała to równanie, $0.x$ będzie zerem dla każdej liczby x (zobacz własność 4 dla mno-

*) $b \neq 0$ znaczy, że liczba b nie równa się zeru.

żenia).

I_2) Niech będzie $b=0$ i zarazem $a=0$; mamy tedy równanie: $X.0=0$. Otóż istnieje nieskończenie wiele liczb x, spełniających to równanie; za x wolno przyjąć każdą liczbę bezwzględną całkowitą.

II) Niech będzie $b \neq 0$, zaś liczba a niech będzie dowolną. W tym przypadku nie zawsze równanie posiada pierwiastek, ale, jeżeli go ma, to ma tylko jeden pierwiastek. Jeżeli równanie $bx=a$ ma pierwiastek i tylko jeden, to pierwiastek ten zowiemy ilorazem dzielenia liczby a przez b; znakiem ilorazu jest $a:b$ lub $\frac{a}{b}$.

Zatem dzielenie nie ma sensu, gdy dzielnik jest zerem. Symbole $5:0$ lub $0:0$ nie oznaczają żadnej liczby w arytmetyce. Dzielenie przez zero może prowadzić do błędów. Znaczna też ilość sofizmatów matematycznych opiera się na dzieleniu przez zero. N.p: Znanem jest twierdzenie, że liczby równe, dzielone przez równe i różne od zera dają ilorazy równe. Gdybyśmy nie wykluczyli możliwości dzielenia przez zero, doszlibyśmy do następującego nonsensu:

Jest: $5 \cdot 0 = 7 \cdot 0$, bo obie strony są zerami; dzieląc obustronnie przez zero, otrzymamy $5 = 7$. Błąd leży w tem, że twierdzenie jest słusznem tylko wtedy, gdy dzielenie ma sens, to znaczy, gdy dzielnik jest odmienny od zera.

Dzielenie podobnie jak odejmowanie nie posiada własności kommutatywnej, ale ma własność dystrybutywną w stosunku do dodawania i odejmowania, czyli:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$$

Do działań stopnia III-go należy potęgowanie. Symbolem działania tego wykonanego na liczbach a i n, jest a^n. Liczbę a^n nazywamy n-tą potęgą liczby a; liczbę a zowiemy zasadą potęgi, zaś n jej wykładnikiem.

Określimy teraz znaczenie tego symbolu:

1.) Przez a^0 rozumiemy liczbę 1: $a^0 = 1$, pod warunkiem, że $a \neq$ od zera. Symbol 0^0 nie oznacza żadnej liczby.

2.) Przez a^1 rozumiemy liczbę a: $a^1 = a$.

3.) Przez a^n, gdzie n oznacza liczbę całą, conaj=

mniej równą liczbie 2, rozumiemy iloczyn *) n czynników, z których każdy równa się liczbie a.

Uwaga. $0^1=0$, $0^2=0$, $0^n=0$ dla $n>2$, zaś 0^0 żadnej liczby nie oznacza; jest $1^m=1$ dla każdej wartości bezwzględnej całkowitej m.

Zajmijmy się teraz własnościami potęgowania.

1) Potęgowanie nie posiada własności kommutatywnej ani assocjatywnej ani dystrybutywnej.

2) Iloczyn potęg o tej samej zasadzie jest równym potędze o zasadzie wspólnej, której wykładnik jest sumą wykładników, zachodzących w czynnikach

$$\text{(I)} \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

pod warunkiem, że nie wchodzi tu potęga 0^0.

Czytając wzór (I) odwrotnie, t. zn. ze strony prawej na lewą otrzymamy twierdzenie: Potęga o zasadzie a, o wykładniku $x+y$ da się rozłożyć na iloczyn potęgi o zasadzie a i wykładniku x przez potęgę o wykładniku y i zasadzie tej samej.

3) Iloczyn potęg o tymsamym wykładniku jest

*) Poznaliśmy więc dotychczas dwa symbole, które nie mają sensu: $a:0$, 0^0, trzecim takim symbolem jest $\sqrt[0]{a}$

potęgą o wykładniku wspólnym, której zasadą jest iloczyn zasad.

$$\text{(II)}\quad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x.$$

Czytając odwrotnie mamy: iloczyn potęgujemy, potęgując każdy czynnik z osobna.

4) Potęgi o tej samej zasadzie dzielimy podnosząc wspólną zasadę do różnicy wykładników:

$$\text{(III)}\quad a^x : a^y = a^{x-y}$$

pod warunkiem (na razie), że $x > y$, przyczem żadna z potęg a^x, a^y, a^{x-y} nie jest postaci 0^0.

5) Iloraz dwu potęg o tym samym wykładniku jest równy potędze o wykładniku wspólnym, której zasadą jest iloraz zasad.

$$\text{(IV)}\quad a^x : b^x = (a : b)^x$$

pod warunkiem, że $b \neq 0$ i że dzielenie $a : b$ jest wykonalnem.

6) Potęga potęgi jest nową potęgą o tej samej zasadzie, a o wykładniku równym iloczynowi wykładników

$$\text{(V)}\quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Zbierając krótko razem te własności otrzymamy tabelę:

I) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
II) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
III) $a^x : a^y = a^{x-y}$
IV) $a^x : b^x = (a:b)^x$
V) $(a^x)^y = a^{xy}$

§. 4: O znakach pisarskich i nazwach liczb całkowitych bezwzględnych.

Liczby całkowite bezwzględne symbolizujemy za pomocą 10 specjalnych znaków pisarskich, zwanych cyframi arabskimi i ich kombinacji. Cyfry te są następujące:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Liczby więc od zera do dziewięć włącznie, posiadają osobne znaki pisarskie; liczby całkowite, większe od dziewięciu, przedstawiamy zapomocą kombinacji cyfr arabskich n. p. znak 4078 przedstawia liczbę: $4 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$

Znaki pisarskie dla liczb całkowitych, większych od liczby 9 określa umowa, opierająca się na następującem twierdzeniu:

Twierdzenie: Każda liczba całkowita bezwzglę-

<u>dna większa od liczby 9 jest sumą wielokrotności potęg liczby 10 o wykładnikach malejących od pewnej liczby całkowitej aż do zera włącznie, a o współczynnikach wziętych z pomiędzy liczb całkowitych bezwzględnych 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, przyczem współczynnik przy największej potędze liczby 10 jest od zera odmienny: suma zaś taka jest jednoznacznie określona.</u>

Niech a oznacza liczbę całk. bezwgl. większą od liczby 9. Oznaczmy przez k_i współczynnik przy potędze 10^i, wówczas na podstawie tego twierdzenia zachodzi równość:

(1) $a = k_n \cdot 10^n + k_{n-1} 10^{n-1} + \dots\dots + k_2 10^2 + k_1 10^1 + k_0 10^0$

gdzie $n \geq 1$, $0 \leq k_i \leq 9$, $k_n \neq 0$.

Wtedy liczbę a oznaczymy znakiem pisarskim, wybranym na podstawie umowy następującej:

<u>Umowa. Cyfry współczynników potęg liczby 10 w sumie (1), napisane obok siebie w porządku malejących potęg, przedstawiają znak pisarski dla liczby całkowitej, a większej od liczby 9.</u>

Jest więc znakiem liczby a znak:

$$\bar{k}_n \bar{k}_{n-1} \ldots\ldots \bar{k}_2 \bar{k}_1 \bar{k}_0$$

gdzie $\bar{k}_i$ oznacza cyfrę liczby k_i.

Nazwy liczb całk. bezwzgl. tworzymy w następujący sposób:

Liczbom od 0 do 9 włącznie, jak również potęgom liczby 10: $10^1, 10^2, 10^3, 10^6, 10^9, 10^{12}, 10^{18}, 10^{24}, \ldots \ldots 10^{6\cdot n} \ldots$ nadajemy osobne nazwy. Nazwę każdej innej liczby tworzymy przy pomocy nazw poprzednich.

Powyższy sposób pisania liczb nazywamy sposobem pisania liczb w układzie dziesiątkowym. Możemy jednak pisać liczby również w innych układach, z wyjątkiem zerowego i jedynkowego. N. p. liczbę 56 napiszemy w układzie dwójkowym, ponieważ jest:

$$56 = 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0,$$

przeto jej znakiem pisarskim będzie symbol $(111000)_2$.

Układy odmienne od układu dziesiątkowego polegają na twierdzeniu, które jest ogólniejszem od twierdzenia poprzedniego.

Twierdzenie: Każda liczba całk. bezwzgl. nie=

ksza od liczby $Z-1$, gdzie Z jest liczbą naturalną większą od liczby 1, jest sumą wielokrotności potęg liczby z o wykładnikach malejących, a o współczynnikach wziętych z pomiędzy liczb całkow. bezwzgl. $0, 1, 2, \dots (Z-1)$, przyczem współczynnik najwyższej potęgi liczby z jest różnym od zera; suma zaś jest określoną jednoznacznie.

Jest więc dla liczby całkowitej a, większej od liczby $(z-1)$:

$$a = c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_2 z^2 + c_1 z^1 + c_0 z^0,$$

gdzie $c_m \neq 0$, $0 \leq c_i \leq z-1$ $\quad i = 0, 1, \dots m$.

Znakiem pisarskim liczby a będzie więc znak:

$$\overline{c}_m \overline{c}_{m-1} \dots\dots \overline{c}_2 \overline{c}_1 \overline{c}_0,$$

na podstawie umowy analogicznej do umowy dla układu dziesiątkowego.

Znakowanie powyższe nazywamy pozycyjnem, istnieją jednak inne znakowania, n.p. rzymskie, które nie jest pozycyjnem.

Wyobraźmy sobie dane duże liczby $\underline{a}$ i $\underline{b}$ całkowite bezwzględne napisane według powyższej umowy dla układu dziesiątkowego. Jak się napi=

sze znak liczb $a+b$, $a-b$, $a.b$ i ilorazu całkowitego dzielenia liczby a przez b, przyczem jest $a \geq b > 0$. Rozwiązują to zagadnienie znane „praktyczne reguły wykonania działań", przyczy- jnie one mają swe matematyczne uzasadnienie. Tych reguł praktycznych albo mechanizmów działań nie będziemy uzasadniali, ograniczając się do ich wyjaśnienia na przykładach liczbowych.

Mamy n.p.: dodać do siebie dwie liczby: 3091 i 526; wykonujemy to, jak dobrze wiadomo następująco: w odpowiedni sposób podpisujemy drugą liczbę pod pierwszą, potem dodajemy do siebie liczby jednej kolumny, idąc od strony lewej ku prawej i t.d.:

$$\begin{array}{r} 3091 \\ \underline{526} \\ 3617 \end{array}$$

Jest bowiem na podstawie umowy o znakach pisarskich liczb i poznanych własności działań:

$$\begin{aligned} 3091+526 &= (3.10^3+0.10^2+9.10+1.10^0)+(5.10^2+2.10^1+6.10^0) = \\ &= 3.10^3+(0.10^2+5.10^2)+(9.10+2.10)+(1.10^0+6.10^0) \\ &= 3.10^3+5.10^2+(9+2).10+(1+6).10^0 \\ &= 3.10^3+5.10^2+(1.10^1+1.10^0).10+7.10^0 \end{aligned}$$

$$= 3.10^3 + 5.10^2 + 1.10^2 + 1.10^1 + 7.10^0$$
$$= 3.10^3 + (5+1).10^2 + 1.10^1 + 7.10^0 =$$
$$= 3.10^3 + 6.10^2 + 1.10^1 + 7.10^0 = 3617.$$

Podobnie wyjaśnia się mechanizm odejmowania. Niech będą dane mnożna i mnożnik n.p. 521 i 98, w układzie dziesiątkowym, wyszukajmy symbol ich iloczynu w układzie dziesiątkowym.

Liczbę 521 mnożymy przez 8, zaś iloczyn 521 x 9 podpisujemy odpowiednio pod poprzedni iloczyn, poczem sumujemy kolumnami etc.

$$\begin{array}{r} 521 \,.\, 98 \\ \hline 4168 \\ 4689 \\ \hline 51058 \end{array}$$

Otóż $521 \times 98 = 521.(9.10+8) = (521.9).10 + 521.8$, skąd szczegóły reguły praktycznej widoczne, sprowadziliśmy bowiem rzecz do mnożenia przez liczbę jednocyfrową i dodawanie. Pozostaje uzasadnić sposób mnożenia przez liczbę jednocyfrową n.p. mnożenia 521×9.
Otóż jest:

$$521.9 = (5.10^2 + 2.10^1 + 1).9 = 5.9.10^2 + 2.9.10^1 + 1.9 =$$
$$= 45.10^2 + 18.10^1 + 9 = (4.10+5).10^2 + (1.10+8).10^1 + 9 =$$
$$= 4.10^3 + (5+1).10^2 + 8.10^1 + 9.$$

Trudniejszą jest sprawa uzasadnienia mechanizmu dzielenia, wymaga dowodu kilku twierdzeń przygotowawczych, dlatego ją pomijamy.

§. 5.- Teorja liczb całkowitych.

Teorją liczb nazywamy dział arytmetyki, do którego zaliczamy twierdzenia o cechach podzielności liczb, o największym wspólnym podzielniku, o najmniejszej wspólnej wielokrotności i o rozkładzie liczb na czynniki pierwsze.

A. Cechy podzielności liczb.

Dane są liczby całkowite bezwzględne a i b. Jeżeli mogę znaleść taką liczbę całkowitą c, że $a = b \cdot c$, to mówimy, że liczba a jest podzielna przez liczbę b, albo też, że liczba a jest wielokrotnością liczby b.

Ponieważ $a = 1 \cdot a = a \cdot 1$, więc:

Każda liczba całkowita bezwzględna jest podzielna przez liczbę 1 i przez siebie samą.

Zajmiemy się teraz rzeczą następującą: dana liczba a przez swój znak pisarski, w układzie dziesiątkowym, podać warunki, które mają

spełniać cyfry liczby a, by liczba a była podzielną przez liczbę b. Twierdzenie o tych warunkach zowiemy cechą podzielności liczby a przez b.
Weźmy pod uwagę przypadek, kiedy jest $b=2$.
Załóżmy, że liczba a jest podzielna przez liczbę 2. Otóż jest

$$a = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots\dots + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0.$$

Możemy położyć

$$c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots\dots c_1 \cdot 10^1 = 2b,$$

gdyż liczba 10 jest podzielna przez 2, a więc również każda wielokrotność liczby 10, jak i suma wielokrotności.
Mamy więc

$$a = 2b + c_0.$$

Ponieważ a jest podzielna przez 2, więc $a = 2a'$.
Zatem $\quad 2a' = 2b + c_0.$
Stąd $\quad 2(a' - b) = c_0.$
Jeżeli więc liczba a jest podzielna przez 2, wówczas ostatnia jej cyfra czyli cyfra jednostek jest 0, 2, 4, 6 lub 8, gdyż c_0 musi być podzielnem przez 2.
Otrzymaliśmy twierdzenie o postaci:

Jeżeli jest A (liczba a podzielna przez 2) to jest B (c_0 podzielne przez 2). Własność B nazywamy tedy <u>warunkiem koniecznym</u> własności A. Je= żeliby zachodziło twierdzenie postaci: Jeże= li jest B, to jest A, wtedy nazywamy B warun= kiem dostatecznym własności A. Otrzymany wynik możemy wysłowić następująco:
<u>Warunek konieczny na to, ażeby liczba a by= ła przez liczbę 2 podzielną, polega na tem, a= żeby jej ostatnia cyfra była jedną z cyfr 0, 2, 4, 6 lub 8.</u>
Udowodnimy teraz, że warunek konieczny jest zarazem dostatecznym.
Zakładamy więc, że liczba c_0 jest podzielna przez 2. $c_0 = 2c'$. $a = 2b + 2c' = 2(b + c')$, co dowodzi, że liczba a jest podzielna przez 2.
A więc:
<u>Podzielność liczby c_0 przez liczbę dwa jest wa= runkiem koniecznym i dostatecznym podziel= ności liczby a przez liczbę 2.</u>
<u>Cecha podzielności przez 3.</u>
Napiszmy liczbę a w układzie dziesiątko=

wym jako sumę:

(1) $a = c_n 10^n + c_{n-1} 10^{n-1} + \ldots\ldots + c_1 10^1 + c_0$.

Twierdzimy, że:

<u>warunkiem koniecznym i dostatecznym podzielności liczby a przez liczbę 3 jest podzielność sumy cyfr symbolu (1) przez 3.</u>

Dowód. Wykażemy przedtem twierdzenie pomocnicze:

<u>Dowolne potęgi liczby 10 podzielone przez 3, dają jako resztę liczbę 1.</u>

Mamy więc udowodnić, że $10^n = 3.d_n + 1$.

Dla $n = 1$ to zachodzi, ponieważ $10 = 3.3 + 1$.

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n \leq k$.

Z. $10^k = 3.d_k + 1$.

wówczas twierdzimy, że jest także:

T. $10^{k+1} = 3.d_{k+1} + 1$.

Rzeczywiście jest:

$$10^{k+1} = 10.10^k = 10(3d_k + 1) = 3.10.d_k + 10$$
$$= 3.10.d_k + 3.3 + 1 = 3(10d_k + 3) + 1.$$

Oznaczając $10d_k + 3 = d_{k+1}$ mamy więc

$10^{k+1} = 3d_{k+1} + 1$, co po chodziło.

A więc na podstawie zasady indukcji twierdze-

nie pomocnicze jest słusznem, dla każdego $n \geq 1$.
Na podstawie twierdzenia pomocniczego udowodnimy teraz cechę podzielności liczby a przez liczbę 3.

Niech będzie: $a = c_n 10^n + c_{n-1} 10^{n-1} + \dots + c_1 10^1 + c_0$.
Podstawiając $10^k = 3d_k + 1$ dla $k = 1, 2, \dots, n$
otrzymamy

$$a = c_n(3d_n+1) + c_{n-1}(3d_{n-1}+1) + \dots + c_1(3d_1+1) + c_0$$

A stąd

$$a = 3\overbrace{(d_n c_n + d_{n-1} c_{n-1} + \dots + d_1 c_1)}^{b} + c_n + c_{n-1} + \dots + c_1 + c_0.$$

Oznaczmy sumę w nawiasie przez b, zaś sumę cyfr przez s, tedy: $a = 3b + s$ czyli

$$a - 3b = s.$$

Jeżeli a jest podzielna przez 3, to $a - 3b$, czyli s jest podzielna przez 3, zatem dowiedliśmy, że podany w twierdzeniu warunek jest konieczny.
Jeżeli s jest podzielną przez 3, to $3b + s$ czyli a jest też podzielną, a więc podzielność sumy cyfr liczby a przez 3 jest też warunkiem dostatecznym.

W podobny sposób dowiedlibyśmy:

warunek konieczny i dostateczny podzielności liczby a przez liczbę 5 polega na tem, ażeby „ostatnią" cyfrą liczby a była cyfra 0 lub 5.

B. Największy wspólny podzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność

Liczbami bezwzględnie pierwszymi nazywamy liczby całkowite większe od jedności, które są podzielne tylko przez 1 i przez siebie.
Dla liczb naturalnych zachodzi twierdzenie:
Każda liczba naturalna jest albo liczbą bezwzględnie pierwszą, albo iloczynem liczb bezwzględnie pierwszych.
Jeżeli liczba a nie jest bezwzględnie pierwszą, czyli jest liczbą złożoną, to posiada ona prócz podzielników 1 i a jeszcze inne podzielniki.
Udowodnimy
Twierdzenie: Najmniejszy podzielnik liczby a większy od 1 jest liczbą bezwzgl. pierwszą.
Wykażemy to dowodem niewprost (apagogicznym) czyli: per reductionem ad absurdum.
Na czem polega dowód niewprost? Jeżeli przyj-

miemy pewne założenie, to rozumując zupełnie poprawnie, wyprowadzimy z niego pewien wniosek. Otóż wniosek ten może być prawdziwy lub fałszywy. Jeżeli założenie jest prawdziwe, wówczas wniosek jest prawdziwy; jeżeli zaś założenie jest fałszywe, to wniosek jest albo prawdą albo fałszem. Z prawdy może wynikać (na poprawnej drodze) jedynie prawda, z fałszu może wynikać albo prawda albo fałsz. Zatem, gdy wiemy, że wniosek jest prawdziwym, nie możemy nic orzec o założeniu, jeśli jednak wniosek jest fałszywym, to założenie musi być fałszywem.

Na tem właśnie polega dowód nie wprost: chcąc dowieść słuszności jakiegoś zdania (twierdzenia), przyjmujemy chwilowo zdanie przeciwne, jako podstawę rozumowania dalszego; jeżeli stąd dojdziemy do wniosku fałszywego, wówczas widocznie fałszywem jest chwilowe założenie, a więc prawdziwem jest nasze zdanie (twierdzenie), które mieliśmy udowodnić.

Otóż chcąc dowieść naszego twierdzenia, załóżmy, że najmniejszy podzielnik b liczby a, większy od 1 nie jest liczbą bezwzgl. pierwszą. Posiada ona zatem jakiś podzielnik c większy od jedności i mniejszy od b: $1 < c < b$. Skoro c mieści się w b, zaś liczba b mieści się w a, więc c mieści się w a. Ale $1 < c < b$, więc liczba a posiada podzielnik c mniejszy od b, co jest fałszem, gdyż właśnie najmniejszym podzielnikiem liczby a różnym od jedności jest b, zatem założenie, że liczba b nie jest bezwzgl. pierwszą, było fałszywe. W ten sposób dowiedliśmy naszego twierdzenia.

Dwie liczby całk. bezwzgl., których największy wspólny podzielnik równa się 1, nazywamy <u>liczbami względem siebie pierwszemi</u>. Dla takich liczb prawdziwem jest

<u>Twierdzenie: Jeżeli a i b są liczbami względem siebie pierwszemi i jeżeli iloczyn $k.a$ jest podzielny przez b, wówczas liczba k jest też podzielną przez b</u>

Chcąc dowieść tego twierdzenia rozważmy kilka przypadków. Ponieważ liczba b nie może być zerem, gdyż dzielenie $k.a$ przez 0 jest nie-

określonem, więc rozważmy przypadek, kiedy $b = 1$. Wówczas zawsze λ jest podzielnem przez b. Zbadajmy teraz przypadek, kiedy $b > 1$. Gdyby $a = 1$, to $\lambda a = \lambda . 1$, więc ponieważ wedle założenia $\lambda . a$ podzielne przez b, również λ jest podzielnem przez b, jak twierdzimy. Pozostaje przypadek, gdy $a > 1$ i $b > 1$.
Rozłóżmy je na czynniki pierwsze:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots\cdots p_n^{\alpha_n}$$

$$b = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdots\cdots q_m^{\beta_m}$$

Żaden z czynników a nie jest równym czynnikowi liczby b, gdyż a i b są względem siebie pierwsze. Rozłóżmy λ na czynniki pierwsze:

$$\lambda = r_1^{\gamma_1} \cdot r_2^{\gamma_2} \cdots\cdots r_s^{\gamma_s}$$

Wtedy mamy

$$\lambda a = r_1^{\gamma_1} \cdot r_2^{\gamma_2} \cdots\cdots r_s^{\gamma_s} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots\cdots p_n^{\alpha_n}$$

Iloczyn λa jest podzielnym przez b, a więc również przez każdy $q_k^{\beta_k}$ $(k = 1, 2, \ldots\ldots m)$; każdy zatem z tych czynników musi wystąpić w prawej stronie ostatniej równości:

$$\lambda a = q_1^{\gamma_1} \cdot q_2^{\gamma_2} \cdots q_m^{\gamma_m} r_{m+1}^{\gamma_{m+1}} \cdots r_s^{\gamma_s} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$$

$$\gamma_1 \geq \beta_1, \ \gamma_2 \geq \beta_2 \cdots \gamma_m \geq \beta_m .$$

Stąd otrzymujęmy, że

$$\lambda = q_1^{\delta_1} \cdot q_2^{\delta_2} \cdots q_m^{\delta_m} \cdot r_{m+1}^{\delta_{m+1}} \cdots r_t^{\delta_t}$$

Przeczywiście więc λ jest podzielnem przez b.

Najmniejsza wspólna wielokrotność

Weźmy dowolne dwie liczby a i b i rozłóżmy je na czynniki pierwsze

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}, \quad b = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdots q_m^{\beta_m}.$$

Szukajmy ich najmniejszej wspólnej wielokrotności. Niech W oznacza jakąkolwiek wspólną wielokrotność liczb a i b różną od zera; przeto istnieją liczby całk. bezwzgl. λ i μ takie, iż

$$W = \lambda . a, \quad W = \mu . b.$$

Rozłóżmy λ i μ na czynniki pierwsze, to otrzymamy

$$W = \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\text{czynniki liczby } \lambda} p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n} = \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\text{czynniki liczby } \mu} q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdots q_m^{\beta_m}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób rozkład liczby W na czynniki pierwsze. Liczba W zawiera w swoich czynnikach każdy czynnik wspólny liczb a i b w potędze o wykładniku nie mniejszym od wykładników, z jakimi występują w liczbach

a lub b. Prócz tego liczba ta musi zawierać każdy czynnik niewspólny liczbom a i b, w potędze o wykładniku conajmniej równym wykładnikowi dla tej liczby. Ponieważ każda wielokrotność liczb a i b musi zawierać powyższe czynniki, zaś iloczyn wszystkich tych czynników (w potęgach o wykładnikach równych większemu z wykładników dla liczb a i b, jeżeli czynniki są wspólne, a wykładniki są różne, równym zaś wspólnemu wykładnikowi, gdy wykładniki są równe, względnie o wykładniku równym wykładnikowi, z jakim czynnik występuje w liczbach a i b, gdy nie jest czynnikiem wspólnym) jest wielokrotnością liczb a i b, zatem iloczyn ten jest najmniejszą wspólną wielokrotnością.
Niech n. p. $a = 2^5 \cdot 3^6 \cdot 7^2$, $b = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 11^3$.
czynniki wspólne są: 2, 3.

$$N.w.w. = 2^5 \cdot 3^6 \cdot 7^2 \cdot 11^3$$

gdyż 2 występuje w a i b jako 2^5 i 2^4, zaś 3 jako 3^6 i 3^6. –

Rozdział II.

Liczby wymierne, rzeczywiste i zespolone.

§. 1. Liczby ułamkowe bezwzględne i liczby wymierne bezwzględne.

Widzieliśmy, że liczby całk. bezwzgl. nie wystarczają do tego, aby działania były zawsze wykonalne n. p. znaki 2 - 5, 2 : 3 nie oznaczają żadnych liczb całkowitych bezwzględnych. Również nie możemy uskutecznić mierzenia, znając tylko liczby całkowite. Dlatego też rozszerzamy zakres pojęcia liczby dołączając do liczb całkowitych bezwzględnych liczby ułamkowe bezwzględne. Otrzymany w powyższy sposób zbiór liczb bezw. całkowitych i ułamkowych nazywamy zbiorem liczb wymiernych bezwzględnych. Wskutek tego każda liczba wymierna jest albo całkowitą albo ułamkową.

Zajmiemy się teraz działaniami na liczbach wymiernych. Przedtem jednak określimy znaczenie zdania, że dwie liczby wymierne są sobie

…ne.

Podamy tu teorję geometryczną liczb wymiernych. Dane mamy dwie liczby wymierne bezwzględne w i w'. Obierzmy dowolny odcinek (j), który nazwiemy odcinkiem jednostkowym i zbudujmy odcinek d, który się mierzy liczbą w przy jednostce j, przez co rozumiemy rzecz następującą: jeżeli w oznacza liczbę całą bezwzgl., to odcinek d niech będzie sumą d odcinków po j; gdy zaś w oznacza ułamek $\frac{m}{p}$, gdzie $p \geqq 1$, to odcinek j dzielimy na p równych części i przez d rozumiemy sumę m odcinków, z których każdy równa się p-tej części odcinka j.

Po wyborze odcinka j*) zbudujmy odcinki d i d', które mierzą się przy odcinku j liczbami v i v'. Jeżeli odcinki $d = d'$ to mówimy, że liczby w i v' są równe i odwrotnie.

Zatem dwie liczby wymierne bezwzględne nazywamy równemi, gdy przy dowolnie obranej jednostce j mierzą równe odcinki. Skutek tego liczba całkowita wzgl. a jest równą każdemu ułamkowi $\frac{an}{n}$, gdzie n oznacza liczbę

*) ...str. 38.

naturalną.

Weźmy teraz dwie liczby w i w' nierówne sobie. Zbudujmy dla nich jak poprzednio odcinki d i d'. Jeżeli $d > d'$, to mówimy, że $w > w'$. Zatem: Z dwu liczb wym. bezwzgl. jedna jest większa od drugiej i zarazem druga mniejsza od pierwszej, jeżeli przy dowolnie obranej jednostce j pierwsza mierzy odcinek dłuższy niż druga.

Udowodnimy teraz twierdzenie:

Jeżeli licznik i mianownik ułamka $\frac{m}{n}$ pomnożymy przez liczbę naturalną k, to otrzymamy ułamek równy danemu.

$$\frac{m}{n} = \frac{km}{kn}.$$

Obierzmy dowolnie jednostkę j (odcinek mierzowy) i wyrysujmy odcinek d mierzący się liczbą $\frac{m}{n}$. Oznaczmy n-tą część odcinka przez u. Odcinek u mieścić się będzie m razy w odcinku d. Dzielimy odcinek u na k równych części. Niech odcinek u' będzie jedną z tych części, to u' mieści się $n \cdot k$ razy w j, zaś $m \cdot k$ razy w odcinku d.

To wszystko możemy wyrazić następująco:

$j = n.\mu$, $d = m.\mu$; $\mu = k.\mu'$, $j = n.k.\mu'$, $d = m.k.\mu'$.

Zatem liczba $\frac{m.k}{n.k}$ mierzy odcinek d przy jednostce j; według powyższej definicji równości liczb wymiernych jest:

$$\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}.$$

Na powyższem twierdzeniu opiera się tak skracanie, jak i rozszerzanie ułamków. Weźmy n. p. ułamek $\frac{24}{18}$. Licznik i mianownik mają wspólny podzielnik 6, możemy więc napisać:

$$\frac{24}{18} = \frac{4\times 6}{3\times 6} = \frac{4}{3}.$$

Również tem twierdzeniem posługujemy się przy sprowadzaniu kilku ułamków do wspólnego mianownika, które polega na zastąpieniu ich przez ułamki odpowiednio równe, ale o wspólnym mianowniku. Najwygodniej jest przyjąć

*) (do str. 36) Dla wygody punkt nazywamy odcinkiem zerowym i mierzymy go liczbą zero względnie ułamkami $\frac{0}{p}$ ($p \geq 1$); otóż odcinek jednostkowy j może być dowolnie wybrany, byle nie był odcinkiem zerowym. –

najmniejszą wspólną wielokrotność mianowni=
ków za wspólny mianownik.

§.2.- Dodawanie i odejmowanie liczb wymiernych bezwz.

Mamy dane dwie liczby wymierne bezwz. w i w'; przez sumę ich, którą oznaczamy symbolem $w + w'$ rozumiemy, co następuje:
Obrawszy dowolnie odcinek jednostkowy j, budujemy odcinki d i d', mierzące się liczbami w i w'. Tworzymy odcinek, będący sumą odcinków d i d'. Każda liczba wymierna, mierząca odcinek $d + d'$ przy jednostce j zowie się sumą liczb w i w'.
Aby podać prosty sposób obliczenia liczby $w+w'$, gdy dane liczby w i w', odróżnimy trzy przypadki:

Przypadek	I	II	III
w	całk.	całk.	ułamk.
w'	całk.	ułamk.	ułamk.

Przypadek I) Obie liczby są całkowite c, c'. Tworzymy odcinki d i d', mierzące się odpowiednio liczbami c i c' przy jednostce j, wówczas li=

liczba mierząca odcinek $d+d'$ jest sumą $c+c'$.
Przypadek II: Do liczby całk. c mamy dodać ułamek $\frac{m}{n}$. Bierzemy odcinek j i budujemy odcinek d mierzący się liczbą c, i odcinek d', mierzący się liczbą $\frac{m}{n}$.
Istnieje więc odcinek u, mieszczący się w odcinku j n razy, zaś w odcinku d' m razy. Zatem odcinek u mieści się cn razy w odcinku d, więc mieści się w odcinku $d+d'$ $cn+m$ razy, więc sumą liczb $c+\frac{m}{n}$ jest liczba $\frac{cn+m}{n}$.
Dodajemy więc do liczby całk. ułamek w ten sposób, że zamieniamy liczbę całkowitą c na równy jej ułamek $\frac{cn}{n}$ i oba ułamki dodajemy, jak to zaraz wykażemy pod III.
Przypadek, kiedy do liczby ułamkowej dodajemy całą, załatwia się analogicznie.
Przypadek III. Mamy dodać do siebie ułamki $\frac{m}{n}$ i $\frac{m'}{n'}$. Rysujemy więc odcinki d i d', mierzone liczbami $\frac{m}{n}$ i $\frac{m'}{n'}$. Jeżeli u oznacza n-tą część odcinka j, zaś u' n'-tą część odcinka j, to możemy napisać:
$j = n.u$, $d = m.u$, $j = n'.u'$, $d' = m'.u'$.

Podzielmy odcinek μ na n' równych części, oznaczmy przez μ'' jedną z tych części; będzie

$\mu = n' \cdot \mu''$. wtedy mamy:

$j = n \cdot \mu = n \cdot n' \mu'' = n'(n \cdot \mu'')$, ale jest

$j = n' \cdot \mu'$, więc $\mu' = n \cdot \mu''$.

Ponieważ $\mu = n' \mu''$, $\alpha = m \mu$, zatem

$\alpha = m \cdot n' \cdot \mu''$.

Podobnie z równości $\alpha' = m' \mu'$, $\mu' = n \mu''$ otrzymamy

$$\alpha' = m' \cdot n \cdot \mu''.$$

zatem $\alpha + \alpha' = (m' n + m n')\mu''$, nadto

$$j = n n' \mu''$$

więc

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{m n' + m' n}{n n'}.$$

Gdyby było $n = n'$, to

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n} = \frac{mn + m'n}{n^2} = \frac{n(m+m')}{n^2} = \frac{m+m'}{n}$$

Zatem: Dodajemy do siebie liczby wymierne, zamieniając je na ułamki o wspólnym mianowniku i dodając te ułamki w ten sposób że dodajemy liczniki, a mianownik pozostaje niezmieniony.

Dodawanie liczb wymiernych posiada własność kommutatywną i assocjatywną.

Przejdźmy teraz do odejmowania.

Odjąć od liczby w liczbę w' znaczy znaleźć liczbę ξ taką, że $w = w' + \xi$. Jeżeli w i w' są całkowite, wykonujemy odejmowanie jak na liczbach całkowitych.

Jeżeli od liczby całkowitej c mamy odjąć ułamek $\frac{m}{n}$, wówczas zamieniamy liczbę całkowitą na ułamek o mianowniku n

$$c = \frac{c.n}{n}$$

$$\xi = c - \frac{m}{n} = \frac{c.n}{n} - \frac{m}{n}.$$

Sprowadziliśmy więc przypadek drugi do przypadku trzeciego. Analogicznie byłoby w wypadku: $\xi = \frac{m}{n} - c$.

W przypadku trzecim, gdy mamy odjąć od siebie dwa ułamki, sprowadzamy je do wspólnego mianownika: $\frac{m}{n} - \frac{m'}{n'} = \frac{m_1}{p} - \frac{m_2}{p}$, gdzie p oznacza wspólny mianownik.

Udowodnimy, że

$$\frac{m_1}{p} - \frac{m_2}{p} = \frac{m_1 - m_2}{p}.$$

W tym celu dość wykazać, że

$$\frac{m_1 - m_2}{p} + \frac{m_2}{p} = \frac{m_1}{p}$$

Otóż $\frac{m_1 - m_2}{p} + \frac{m_2}{p} = \frac{(m_1 - m_2) + m_2}{p} = \frac{m_1}{p}$.

Ażeby odejmowanie było wykonalnem, musimy mieć $\qquad w \geqslant v'$,

gdyż z równości $w - v' = \xi$, otrzymujemy $v = v' + \xi$, ale wiadomo, że $w' + \xi \geqslant v'$, zatem

$$v = v' + \xi \geqslant v' \quad \text{czyli} \quad w \geqslant v'.$$

Jeżeli ten warunek spełniony, to odejmowanie jest zawsze wykonalne i jednoznaczne, to znaczy, że wszystkie liczby ξ o własności $w' + \xi = w$ będą sobie równe.

§.3.- Dalsze działania na liczbach wym. bezwzgl.

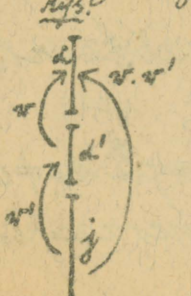
Określimy teraz mnożenie dwu liczb wymier= nych. Odróżniamy dwa przypadki

1.) $W' = 0$. wtedy $\quad W.0 = 0$

Każda liczba wymierna pomnożona przez zero, równa się zeru.

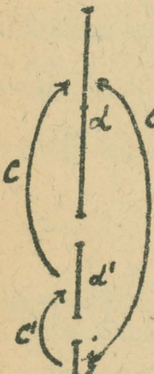
2.) $w' \neq 0$. Iloczyn $w.w'$ określimy geometry= cznie: wybieramy dowolny odcinek j, byle nie zerowy, rysujemy odcinek d', który się mierzy

Rys.



liczbą w' przy jednostce j, ponieważ jest $w' \neq 0$, więc odcinek d' nie jest zerowym (punktem), zatem możemy go wziąć za jednostkę i zbudować odcinek α, który się mierzy liczbą w przy jednostce α'. Iloczynem $w \cdot w'$ nazywamy każdą liczbę, mierzącą odcinek α przy jednostce j.

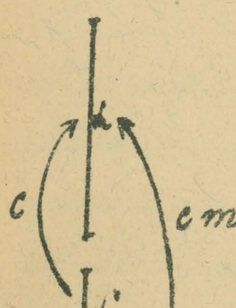
Przy wykonywaniu mnożenia rozróżniamy cztery przypadki



a) Obie liczby w i w' są całkowite.

$w = c$, $w' = c'$, przyczem $c' \neq 0$

Weźmy dowolny, byle nie zerowy odcinek j i zbudujmy odcinek α' mierzący się liczbą c' przy jednostce j, następnie odcinek α, mierzący się liczbą c przy jednostce α'. Iloczyn $c \cdot c'$, jak to bezpośrednio widocznem, jest liczbą mierzącą odcinek α przy jednostce j. Stąd wynika, że nowe określenie mnożenia jest zgodne z dawnem określeniem iloczynu liczb całkowitych.

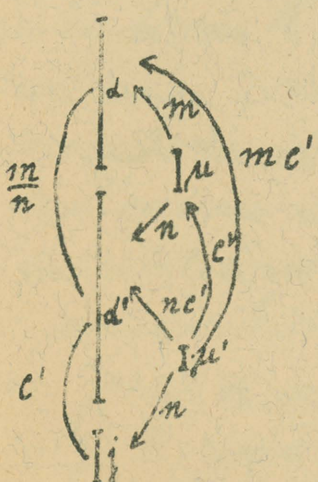


b) Niech będzie w liczbą całkowitą, w' liczbą ułamkową:

$w = c$, $w' = \frac{m}{n}$, gdzie $w' \neq 0$ czyli $m \neq 0$.

Budujemy odcinek α', mierzący się liczbą $\frac{m}{n}$ przy jednostce j. Następnie rysujemy odcinek d, mierzący się liczbą c przy jednostce d'. Oznaczmy n-tą część odcinka j przez μ. Odcinek μ mieści się n razy w odcinku j, zaś m razy w odcinku d'. W odcinku d odcinek μ mieści się $c \cdot m$ razy, więc $c \cdot \frac{m}{n} = \frac{c \cdot m}{n}$.

c) Niech liczba v będzie ułamkową, zaś v' całkowitą: $v = \frac{m}{n}$, $v' = c' \neq 0$.



Rysujemy jak poprzednio odcinki j, d, d'. Oznaczmy n-tą część odcinka d' przez μ. Odcinek μ mieści się n razy w odcinku d', m razy w odcinku d. Dzielimy odcinek j na n równych części. Oznaczmy przez μ' n-tą część odcinka j. Będzie tedy:

$d = m \cdot \mu$, $\quad d' = n \cdot \mu$,

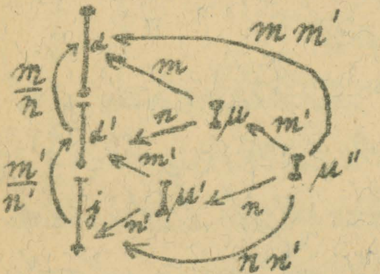
$d' = c' \cdot j$, $\quad j = n \cdot \mu'$. Stąd mamy

$d' = c' \cdot j = c'(n \cdot \mu') = n(c' \cdot \mu')$, a że także $d' = n \cdot \mu$, więc $\mu = c' \cdot \mu'$, zatem

$j = n \cdot \mu'$; $d = m \cdot \mu = m \cdot c' \cdot \mu' = (m c')\mu'$.

Odcinek d przy jednostce j mierzy się przeto liczbą $\frac{mc'}{n}$, wobec czego jest: $\frac{m}{n}c' = \frac{mc'}{n}$.

d.) Pozostaje do rozwiązania przypadek, gdy $v = \frac{m}{n}$; $v' = \frac{m'}{n'}$, przyczem jest $m' \neq 0$. Budujemy odcinki j, d, d'. n'-tą część odcinka j oznaczmy przez μ', zaś n-tą część odcinka d' przez μ, tedy:



$$j = n'\mu'; \quad d' = m'\mu',$$

$$d' = n\mu, \quad d = m\mu.$$

Oznaczmy n-tą część odcinka μ' przez μ''. Tedy:

$$j = n'(n\mu''), \text{ nadto } \mu' = n.\mu''$$

przeto $d' = m'\mu' = m'(n\mu'') = n(m'\mu'') = n.\mu$.

więc $\quad \mu = m'\mu''$.

Wobec tego: $d = m\mu = m(m'\mu'') = (m\,m')\mu''$,

$$j = n\,n'\mu''. \qquad \text{Stąd:}$$

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{m'}{n'} = \frac{m\,m'}{n\,n'}$$

Mnożenie liczb wymiernych posiada własności: <u>kommutatywną, assocjatywną i dystrybutywną w stosunku do dodawania i mnożenia</u>, co się wyraża równościami:

$$u.w = w.u,$$

$$(u.v).w = u(v.w) = u.v.w$$
$$(u \pm v)w = u w \pm v.w.$$

<u>Iloczyn dwu liczb wymiernych jest zerem, wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z czynników jest zerem. Jest to zatem warunek konieczny i dostateczny.</u>

<u>Dzielenie liczb wymiernych.</u> Niech będą dane dwie liczby wymierne w, w'. Znajdźmy taką liczbę ξ, aby spełnioną była równość:
$$w.\xi = w'$$
Jeżeli taka liczba ξ istnieje, nazywamy ją ilorazem dzielenia liczby w' przez liczbę w; liczbę w' nazywamy dzielną, a liczbę w dzielnikiem. Kiedy liczba ξ istnieje?

a) Jeżeli <u>$w=0$</u>, $w' \neq 0$ również <u>nie ma liczby</u> ξ, spełniającej równanie
$$0.\xi = w'$$
gdyż $0.\xi = 0$, zaś $w' \neq 0$.

b) Jeżeli <u>$w=0$</u> i $w'=0$, to każda liczba wymierna ξ spełnia równanie, gdyż $w.\xi = 0.\xi = 0$, a ponieważ jest $w'=0$, więc rzeczywiście jest $w.\xi = w'$. Wtedy iloraz <u>nie</u>

<u>jest oznaczony jednoznacznie.</u>

Widzimy więc, że dzielenie przez liczbę 0 nie prowadzi do określonego wyniku, gdyż albo nie istnieje iloraz; albo jest zupełnie dowolnym.

c) Jeżeli <u>dzielnik jest $\neq 0$</u>, wówczas <u>dzielenie jest zawsze wykonalne i jednoznaczne.</u>

Aby to wykazać, rozróżnimy cztery przypadki:

1.) Niech dzielna i dzielnik będą liczbami całkowitemi: $w = c$, $w' = c'$, $c \neq 0$; wtedy możemy przyjąć $\xi = \frac{c'}{c}$ i otrzymamy:

$$w \cdot \xi = c \frac{c'}{c} = \frac{c \cdot c'}{c} = c' = w'$$

2.) Niech w oznacza liczbę całkowitą, różną od zera, zaś w' liczbę ułamkową:

$w = c \neq 0$, $w' = \frac{m'}{n'}$. Kładąc:

$$\xi = \frac{m'}{n'c},$$ otrzymamy

$$w \cdot \xi = c \frac{m'}{n'c} = \frac{c\, m'}{c\, n'} = \frac{m'}{n'} = w'$$

3.) Niech będzie w liczbą ułamkową, w' liczbą całkowitą:

$w = \frac{m}{n} \neq 0$, $w' = c'$. Połóżmy

$$\xi = \frac{c' n}{m},$$

wówczas

$$w \cdot \xi = \frac{m}{n} \cdot \frac{c'n}{m} = \frac{c'mn}{nm} = c' = w'.$$

4) Niech będą w i w' liczbami ułamkowemi:

$$w = \frac{m}{n} \neq 0, \quad w' = \frac{m'}{n'}.$$

Połóżmy $\xi = \frac{m'}{n'} \cdot \frac{n}{m}$, wtedy

$$w \cdot \xi = \frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} \cdot \frac{n}{m} = \frac{m'}{n'} \cdot \frac{mn}{mn} = \frac{m'}{n'} = w'.$$

Pozostaje do wykazania, że dzielenie jest jednoznaczne.

Przypuśćmy, że istnieją dwie liczby ξ, ξ' różne od siebie, spełniające związki

$$w \cdot \xi = w' \qquad w \cdot \xi' = w'.$$

Ponieważ $\xi \neq \xi'$, zatem $\xi > \xi'$ albo $\xi < \xi'$.
Przypuśćmy, że $\xi > \xi'$. Wtedy na podstawie własności mnożenia mamy

$$w\,\xi > w\,\xi'.$$

co sprzeczne bo $w \cdot \xi = w'$ i $w \cdot \xi' = w'$.
Podobnie otrzymalibyśmy sprzeczność, założywszy, że $\xi' > \xi$. Jest więc: $\xi = \xi'$ czyli dzielenie jest jednoznacznie wykonalne.

<u>Potęga</u>. Potęgę liczby wymiernej określamy

podobnie jak potęgę liczby całkowitej, a więc, gdy w oznacza liczbę wymierną, ma być:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & w^0 = 1, \quad \text{jeśli } w \neq 0 \\ \text{II.} & w^1 = w \\ \text{III.} & w^n = \underbrace{w_1 \cdot w_2 \ldots \ldots w_n} \end{array}$$

Potęgowanie posiada następujące własności:

I. $w^x \cdot w^y = w^{x+y}$, gdzie x, y liczby całkowite bezwzględne i nadto $w \neq 0$, jeżeli $x=0$ lub $y=0$.

II. $w^x : w^y = w^{x-y}$, gdzie x, y l. całk. bezwz., $x \geqslant y$, $w \neq 0$.

III. $w^x \cdot w_1^x = (w \cdot w_1)^x$, gdzie x l. całk. bezwzględna; nadto $w \neq 0$, $w_1 \neq 0$, jeżeli $x = 0$.

IV. $w^x : w_1^x = (w : w_1)^x$, gdzie $w_1 \neq 0$, x l. całk. bezwzgl.; nadto $w \neq 0$, jeżeli $x=0$.

V. $(w^x)^y = w^{xy}$, gdzie x, y l. całk. bezwz., nadto $w \neq 0$, jeżeli iloczyn $xy = 0$.

Pierwiastkowanie. Przez n-ty pierwiastek z liczby wymiernej w rozumiemy liczbę, której n-ta potęga równa się liczbie w. n-ty pierwiastek liczby w (o ile istnieje) oznaczymy znakiem $\sqrt[n]{w}$, przeto znak ten oznacza taką liczbę, iż jest:

$$\left(\sqrt[n]{w}\right)^n = w.$$

Pierwiastkowanie nie zawsze jest wykonalne w zakresie liczb wymiernych. Weźmy na przykład

$$\sqrt{3}.$$

Szukamy więc takiej liczby wymiernej x, aby było

$$x^2 = 3.$$

Wiemy z teorji liczb całkowitych, że niema liczby całkow., spełniającej równanie

$$x^2 = 3.$$

Przypuśćmy więc, że istnieje liczba ułamkowa, $x = \frac{m}{n}$, spełniająca to równanie, że zatem jest:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 3, \quad \text{czyli} \quad \frac{m^2}{n^2} = 3.$$

Stąd otrzymamy $m^2 = 3n^2$. Liczby m, n są różne od zera, nadto jest $n \neq 1$, gdyż $\frac{m}{n}$ nie może być liczbą całkowitą; jest tedy $n > 1$, więc $n^2 > 1$, zatem $3n^2 > 3.1 > 1$,

$m^2 = 3n^2 > 1$ czyli też $m > 1$. Rozłóżmy liczby naturalne m, n na czynniki pierwsze.

Jeżeli liczba 3, która jest pierwszą zachodzi w rozkładzie liczby n^2, to musi zachodzić w potędze o wykładniku parzystym, a więc $3^{2\alpha}$, ta zaś pomnożona przez 3 (bo $m^2 = 3n^2$), da potęgę liczby 3 o wykładniku nieparzystym

$$3 \cdot 3^{2\alpha} = 3^{2\alpha+1}$$

Jeżeli zaś liczba 3 nie występuje w rozkładzie liczby n^2, to mamy $\alpha = 0$ i również otrzymamy potęgę liczby 3 z wykładnikiem nieparzystym, bo 3^1. Zatem w obu przypadkach iloczyn $3n^2$ zawiera czynnik 3 z wykładnikiem nieparzystym. Prawa strona, m^2, albo nie zawiera czynnika 3 albo zawiera czynnik 3, ale z wykładnikiem parzystym. Ponieważ liczba całkowita da się rozłożyć tylko w jeden sposób na czynniki pierwsze, tu zaś otrzymaliśmy dwa różne rozkłady, w jednym czynnik 3 zachodzi z wykładnikiem parzystym, w drugim czynnik 3 zachodzi z wykładnikiem nieparzystym, zatem założenie, że istnieje ułamek $x = \frac{m}{n}$, spełniający równość:

$$x^2 = 3$$

jest fałszywe.

§.7.- Ułamki dziesiętne bezwzględne.

Ułamkami dziesiętnymi bezwzględnymi nazywamy ułamki o licznikach naturalnych dowolnych, ponadto mianowniki są potęgami naturalnymi liczby 10, a więc ułamki postaci $\frac{a}{10^n}$; n nazywamy ilością miejsc dziesiętnych. Ułamki dziesiętne pisze się zwykle w specjalny sposób mianowicie przy pomocy t. zw. kropki dziesiętnej lub przecinka dziesiętnego:

$$\frac{37}{10^4} = 0{\cdot}0037, \quad 5{\cdot}3218 = \frac{53218}{10^4}$$

Sprowadzanie ułamków dziesiętnych do wspólnego mianownika jest nadzwyczaj łatwe. Podobnie wykonywanie działań na ułamkach dziesiętnych jest bardzo proste: mnożenie wanie i odejmowanie po sprowadzeniu do wspólnego mianownika wykonujemy jak na liczbach całkowitych, suma zaś lub różnica ułamków dziesiętnych jest znowu ułamkiem dziesiętnym, n.p. $\frac{a}{10^3} \pm \frac{b}{10^3} = \frac{a \pm b}{10^3}$, byleby było w przypadku różnicy $a \geq b$.

Iloczyn dwu ułamków dziesiętnych jest ułamkiem dziesiętnym o liczniku, będącym iloczynem liczników czynników, ilość zaś miejsc dziesiętnych jest równą sumie ilości miejsc czynników: $\frac{a}{10^m} \cdot \frac{b}{10^n} = \frac{a \cdot b}{10^{m+n}}$.

Iloraz dwu ułamków dziesiętnych nie musi być znowu ułamkiem dziesiętnym, n.p.: $0{\cdot}2 : 0{\cdot}3 = \frac{2}{10} : \frac{3}{10} = \frac{2}{3}$, niema zaś ułamka dziesiętnego równego ułamkowi $\frac{2}{3}$. Wobec tego, że mechanizm działań na ułamkach dziesiętnych jest prostym, przeto powstaje myśl, by w celu wykonania działań na dowolnych ułamkach zastąpić je przez równe im ułamki dziesiętne. Czy to zawsze możliwe?

Musimy więc znaleźć warunki, kiedy dany

ułamek $\frac{a}{b}$ da się zamienić na ułamek dziesiętny, czyli kiedy istnieje ułamek dziesiętny n-miejscowy równy ułamkowi $\frac{a}{b}$ czyli by było:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{10^n},$$

przyczem liczba x ma być liczbą całkowitą bezwzględną.

Przykłady: 1/ Niech będzie $\frac{1}{5} = \frac{x}{10}$, stąd $x = \frac{10}{5} = 2$, więc $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0{\cdot}2$;

2/ Niech będzie $\frac{1}{8} = \frac{x}{10}$, $x = \frac{10}{8} = \frac{4}{5}$, liczba x całkowita nie istnieje; podobnie gdy położymy: $\frac{1}{8} = \frac{x}{100}$, to $x = \frac{100}{8} = \frac{25}{2}$; znów x całkowite nie istnieje; ale gdy położymy: $\frac{1}{8} = \frac{x}{10^3}$, to $x = \frac{10^3}{8} = 125$, więc $\frac{1}{8} = \frac{125}{10^3} = 0{\cdot}125$.

3/ Niech będzie: $\frac{2}{3} = \frac{x}{10^n}$, gdzie $n = 1, 2, \ldots$, to $x = \frac{2.10^n}{3}$; ponieważ 2.10^n nie jest podzielne przez 3, zatem nie istnieje liczba całkowita x, ułamek $\frac{2}{3}$ nie daje się zamienić na żaden ułamek dziesiętny.

Załóżmy, że ułamek $\frac{a}{b}$ jest nieskracalny, to znaczy, że licznik i mianownik są liczbami względem siebie pierwszemi. Zbadajmy, czy ułamek $\frac{a}{b}$ da się zamienić na dziesiętny n-miejscowy. Połóżmy więc: $\frac{a}{b} = \frac{x}{10^n}$, skąd mamy $x = \frac{a.10^n}{b}$; liczba x ma być naturalną.

Widzimy więc, że warunkiem koniecznym jest podzielność iloczynu $a.10^n$ przez liczbę b, czyli podzielność liczby 10^n przez liczbę b, gdyż liczby a i b są względem siebie pierwsze. Jeżeli liczba 10^n jest podzielną przez b, to liczba b może zawierać tylko czynniki pierwsze 2, 5. Niech będzie $b = 2^\alpha . 5^\beta$, gdzie α, β są liczbami całkowitemi bezwzgl. Naodwrót, gdy tak jest, to iloczyn $a.10^n$ jest podzielnym przez liczbę b, o ile jest $n \geq \alpha$, $n \geq \beta$, i wtedy x jest liczbą całkowitą, tem samem ułamek $\frac{a}{b}$ da się zamienić na ułamek dziesiętny. Zatem

<u>IV. Warunek i wystarczający aby ułamek zwyczajny $\frac{a}{b}$, nieskracalny, dał się zamienić na ułamek dziesiętny n-miej=</u>

<u>nowy, polega na tem, ażeby było $b = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$, gdzie $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, α, β są całkowite, nadto żadna z liczb α, β nie ma przekraczać liczby n.</u>

Z tego twierdzenia widzimy, że nie każdy ułamek można zamienić na ułamek dziesiętny, choćby ilość miejsc dziesiętnych była dowolnie obraną.

Weźmy pod uwagę ułamek zwyczajny, niedający się właśnie zamienić na żaden ułamek dziesiętny n. p. $\frac{3}{7}$. Wybieramy dwa ułamki dziesiętne n-miejscowe, różniące się między sobą o 1 w ostatniej cyfrze, a zawierające pomiędzy sobą ułamek $\frac{3}{7}$.

Ułamki te dziesiętne nazywamy przybliżeniami dziesiętnemi n-miejscowemi, mniejszy przez niedomiar, większy przez nadmiar.

Przyjmując kolejno $n = 1, 2, 3, \dots$ i t. d. otrzymamy ciąg nieskończony przybliżeń dziesiętnych przez niedomiar i przez nadmiar.

N. p. ciąg kolejnych przybliżeń dziesiętnych przez niedomiar dla ułamka $\frac{3}{7}$ będzie:

I) 0·4, 0·42, 0·428, 0·4285, ...;
zaś ciąg przybliżeń dziesiętnych kolejnych przez nadmiar dla ułamka $\frac{3}{7}$ będzie:
II) 0·5, 0·43, 0·429, 0·4286, ...

<u>Ciąg kolejnych przybliżeń przez niedomiar (I) nazywamy ułamkiem dziesiętnym nieskończonym, utworzonym przez ułamek dany ($\frac{3}{7}$)</u> (albo ułamek $\frac{3}{7}$ „prowadzi" do ułamka dzies. nieskończonego (I).

Dla odróżnienia poprzednio rozważane ułamki dziesiętne zowiemy skończonymi ułamkami dziesiętnymi.

W ciągu (I) spostrzegamy, że pewna grupa cyfr stale się powtarza

$$0·\underbrace{428571}\,\underbrace{428571}\,\underbrace{428571}\,4\ldots$$

<u>W każdym ułamku dziesiętnym nieskończonym, utworzonym ułamek zwyczajny, nie dający się zamienić na ułamek dzies. skończony, istnieje grupa cyfr, nie wszystkich będących zerami, zwana okresem lub perjodem, która się powtarza.</u>

Dlatego też rozważany ułamek dziesiętny niesk. nazywamy ułamkiem dziesiętnym perjodycznym (okresowym). Własność powyższa pozwala nam łatwo podać przybliżenie dziesiętne przez niedomiar (lub nadmiar) na dowolną ilość miejsc dziesiętnych. W praktyce podajemy cyfry przed okresem i okres, kładąc kropkę nad pierwszą i ostatnią (jeżeli jest ich więcej) cyfrę okresu. Tedy prawidło tworzenia ciągu (I) wyrazi się symbolem $0\cdot\dot{4}2857\dot{1}$. Równość $\frac{3}{7} = 0\cdot\dot{4}2857\dot{1}$ oznacza, że ułamek $\frac{3}{7}$ prowadzi do ciągu kolejnych przybliżeń dzies. przez niedomiar czyli do ułamka dzies. nieskończonego o prawie tworzenia wyrazów zawartem w symbolu $0\cdot\dot{4}2857\dot{1}$.—

<u>Widzimy zatem, że każdy ułamek zwyczajny da się zamienić albo na ułamek dziesiętny skończony, albo na ułamek dzies. niesk. perjodyczny.</u>

Chodzi o to, jak można znaleźć ułamek dziesiętny skończony, który jest wyrażem

ciągu (I) t. j. ułamka dzies. nieskończonego, utworzonego przez ułamek $\frac{a}{b}$.
Otóż ma być $\frac{x}{10^n} < \frac{a}{b} < \frac{x+1}{10^n}$, skąd $x < \frac{a \cdot 10^n}{b} < x+1$, skąd widać, że x jest największą liczbą całkowitą ilorazu $\frac{a \cdot 10^n}{b}$. Potem tę liczbę x dzielimy przez 10^n i otrzymujemy n-miejscowe przybliżenie dziesiętne ułamka $\frac{a}{b}$ przez niedomiar. Z tego widać, że chcąc takie przybliżenie otrzymać, mamy dzielić a przez b aż do n-tego miejsca dziesiętnego włącznie i na tem dzielenie przerwać. N. p. dla ułamka $\frac{3}{7}$ znajdziemy 4-ro-miejscowe przybliżenie dziesiętne przez niedomiar w sposób następujący

$$\begin{array}{l} 3:7 = 0{\cdot}4285; \\ \underline{30} \\ \;\underline{20} \\ \;\;\underline{60} \\ \;\;\;\underline{40} \\ \;\;\;\;5 \end{array}$$

tedy mamy $0{\cdot}4285 < \frac{3}{7} < 0{\cdot}4286$.

Znalazłszy przybliżenie dzies. przez niedomiar $0{\cdot}4285$, mamy podwyższyć ostatnią cyfrę o 1, aby otrzymać przybliżenie dzies. przez nadmiar.
Jeżeli ułamek nie da się zamienić na uła=

nek dzies., to powyżej podane dzielenie nigdy nie da reszty zero, a że reszty są mniejsze od dzielnika, więc muszą się powtórzyć i wtedy powtórzy się cyfra w ilorazie, co właśnie tłomaczy istnienie perjodu (okresu).

Wykażemy jeszcze, że:

<u>Nie istnieje ułamek zwyczajny, któryby prowadził do ułamka dzies. nieskończonego, posiadającego perjod, złożony wyłącznie z dziewiątek.</u>

Dowiedziemy tego tylko dla ułamka perjodycznego $0\cdot\dot{9}$. Przyjmijmy, że ułamek $\frac{\alpha}{\beta}$ wytwarza ułamek $0\cdot\dot{9}$. Wtedy

$\alpha : \beta = 0\cdot\dot{9}$; skoro ma się dziewiątka w ilorazie powtórzyć stale, to reszta musi powtórzyć, czyli ma być

$10\alpha - 9\beta = \alpha$

$10\alpha - 9\beta = \alpha$, skąd wynika $9\alpha = 9\beta$, co daje $\alpha = \beta$.

Jest więc $\frac{\alpha}{\beta} = 1$, co sprzeczne, bo liczba 1 nie prowadzi do ułamka dzies. nieskończonego o prawie tworzenia $0\cdot\dot{9}$. –

Powstaje pytanie, czy poza badanym przypadkiem każdy ułamek dzies. mięsk. perjodyczny (a więc z wyjątkiem perjodu złożonego z samych dziewiątek) może być wytworzony przez ułamek zwyczajny?

Weźmy dowolny ciąg ułamków dziesiętnych z okresem.
Rozróżnimy dwa przypadki:
a) perjod rozpoczyna się zaraz po kropce dziesiętnej.
Przypuśćmy, że istnieje ułamek zwyczajny $\frac{a}{b}$, tworzący ten ciąg. Niech $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ będzie okresem, nadto cyfrą całkowitą, niech będzie 0. W każdym razie: $\frac{a}{b} = 0{\cdot}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n + \frac{r}{10^n b}$.
Skoro cyfry w ilorazie mają się powtarzać, więc reszta musi się powtórzyć czyli $r = a$ t. zn. jest $\frac{a}{b} = 0{\cdot}\alpha_1\ldots\alpha_n + \frac{a}{10^n b}$. Mnożąc to przez $10^n b$, otrzymujemy kolejno:

$$10^n a = (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n).\, b + a,$$

$$(10^n - 1)a = (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n).\, b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)}{10^n - 1}$$

Tu symbol $(\alpha_1\ldots\alpha_n)$ oznacza liczbę całkowitą
$10^{n-1}\alpha_1 + 10^{n-2}\alpha_2 + \ldots\ldots + 10\alpha_{n-1} + \alpha_n$

Rachunek, który pominiemy, wykazałby, że rzeczywiście ułamek $\frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}{10^n-1}$ prowadzi do przyjętego powyżej ułamka dzies. perjodycznego.
<u>Zatem jeżeli perjod zaczyna się tuż po kropce dziesiętnej, to ułamkiem tworzącym ten ułamek dzies. niesk., jest ułamek, którego licznikiem jest perjod, a mianownikiem liczba utworzona z tylu dziewiątek, ile miejsc ma okres.</u>
Taki ułamek nieskończony nazywamy ułamkiem perjodycznym, <u>czystym</u>.
<u>Przykład.</u> Dany ułamek perjodyczny $0\cdot\dot{3}\dot{6}$.
Więc $a : b = 0\cdot\dot{3}\dot{6}$ Wobec tego
$(10a-3b)10-6b=a$.
jest $100a-30b-6b=a$ czyli $99a=36b$, skąd $\frac{a}{b}=\frac{36}{99}$, jak powyżej ogólnie podano.
b) Niech perjod nie następuje bezpośrednio po kropce dziesiętnej.
Mamy więc ułamek perjodyczny:
$$0\cdot\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\ldots\beta_n$$
o perjodzie n-cyfrowym $\beta_1\ldots\beta_n$. Przypuść=

my, że istnieje ułamek zwyczajny $\frac{a}{b}$, który ten ułamek dzies. perjodyczny wytwarza, wówczas jest

$$\frac{a}{b} = 0{\cdot}\alpha_1 \ldots \alpha_m \beta_1 \ldots \beta_n + \frac{r}{10^{m+n} b},$$

przyczem resztę r należy wyrachować. Ponieważ przy dalszem dzieleniu miałyby się cyfry powtarzać, więc reszta r będzie równa tej reszcie, która pomnożona przez 10 dała na iloraz liczbę β_1; wyrachujmy tę resztę. Otóż ta ostatnia reszta równa się

$$[\{[(10a - \alpha_1 b)10 - \alpha_2 b]10 - \alpha_3 b\}10 - \cdots]10 - \alpha_m b =$$

$$= 10^m a - \{\alpha_1 10^{m-1} + \alpha_2 10^{m-2} + \cdots + \alpha_{m-1} 10 + \alpha_m\} b,$$

co krótko napiszemy: $10^m a - \{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m\} b$. Tej liczbie równa się r. Jest więc $\frac{a}{b} = 0{\cdot}\alpha_1 \ldots \alpha_m \beta_1 \ldots \beta_n + \frac{10^m a - \{\alpha_1 \ldots \alpha_m\} b}{10^{m+n} b}$. Mnożąc to przez $10^{m+n} \cdot b$ otrzymujemy

$$10^{m+n} \cdot a = (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n) b + 10^m a - \{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m\} b,$$

stąd wynika, że

$$[10^{m+n} - 10^m] a = [(\alpha_1 \ldots \alpha_m \beta_1 \ldots \beta_n) - (\alpha_1 \ldots \alpha_m)] b,$$

przeto

$$\frac{a}{b} = \frac{(\alpha_1 \ldots \alpha_m \beta_1 \ldots \beta_n) - (\alpha_1 \ldots \alpha_m)}{(10^n - 1) \cdot 10^m}.$$

Rachunek, który pomijamy, wykazałby, że prawa strona równości ostatniej wytworzyłaby dany ułamek peryodyczny.

A więc ułamkiem, wytwarzającym ułamek peryodyczny mieszany, jest ułamek, którego licznikiem jest liczba, utworzona z cyfr, stojących przed okresem i w okresie, a pomniejszona o liczbę, utworzoną z cyfr stojących przed okresem, mianownikiem zaś jest liczba, mająca tyle dziewiątek, ile cyfr ma okres, i tyle ~~(cyfr)~~ zer, ile cyfr stoi przed okresem.

Przykład: Niech będzie dany ułamek peryodyczny $0{\cdot}2\dot{7}\dot{8}$. Tedy $a:b = 0{\cdot}2\dot{7}\dot{8}$

$[(10a-2b)10-7b]10-8b = 10a-2b$, więc

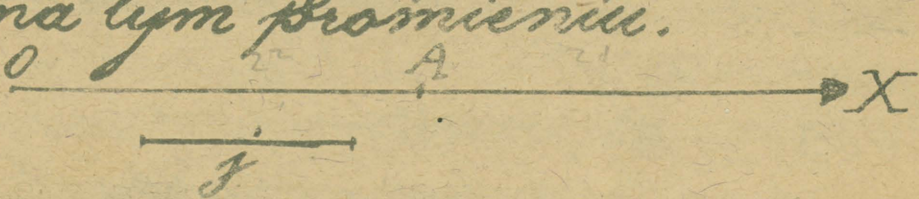
$1000a-200b-70b-8b = 10a-2b$, co daje $990a = (278-2)b$ czyli $\frac{a}{b} = \frac{278-2}{990}$ jak to wyżej ogólnie podano.

§ 8. Liczby niewymierne bezwzględne. Liczby bezwzględne wymierne nie wystarczają do rozwiązania niektórych zagadnień analitycznych i geometrycznych. Odejmowanie i pierwiastkowanie nie zawsze są wykonalne, podobnie zagadnienie o mierzeniu odcinków niewspółmiernych z jednostką, wyznaczenie stosunku obwodu koła do średnicy nie da się rozwiązać w zakresie liczb wymiernych.

Przez wprowadzenie liczb niewymiernych bezwzględnych, a następnie połączenie ich z liczbami wymiernemi bezwzględnemi w zbiór <u>liczb bezwzględnych</u>, niektóre z powyższych zagadnień zostały rozwiązane.

Liczby niewymierne można określić w kilka sposobów. Jednym z nich jest teorja liczb niewymiernych utworzona przez R. Dedekinda: Weźmy pod uwagę zbiór

wszystkich liczb wymiernych bez=
względnych i podzielmy go na
dwa zbiory o własnościach:
1.) Oba zbiory Z_1 i Z_2 mają być
nieskończone, t.zn., że każdy ze zbio=
rów Z_1, Z_2 zawiera każdą ilość liczb
wymiernych.
2.) Każda liczba zbioru Z_1 ma być
mniejszą od każdej liczby zbio=
ru Z_2.
3) W zbiorze Z_1 nie ma liczby naj=
większej, w zbiorze Z_2 nie ma licz=
by najmniejszej.
Geometrycznie oznacza to,
że mając dany promień OX, je=
dnostkę j i odcinek OA niewspół=
mierny z jednostką j, uważamy
wszystkie odcinki współmierne
z jednostką j o początku O, leżące
na tym promieniu.



Końce odcinków współmiernych leżą na lewo i prawo od punktu A. Widzimy, że wszystkie liczby mierzące odcinki współmierne z jednostką j, a mniejsze od odcinka OA utworzą zbiór Z_1, zaś wszystkie liczby mierzące odcinki współmierne z jednostką j a większe od odcinka OA utworzą zbiór Z_2, o podanych wyżej własnościach. Podział zbioru wszystkich liczb wymiernych bezwzględnych posiadający powyższe trzy własności, nazywamy przekrojem liczb wymiernych bezwzględnych.

Przekrój taki określa liczbę niewymierną, którą nazwiemy zarazem liczbą mierzącą odcinek OA przy jednostce j. Umiemy więc mierzyć każdy odcinek przy dowolnej jednostce j. Przykład:

Utwórzmy przekrój liczb wymiernych w, porównując liczby w^2 z licz=

bą 2, gdzie w oznacza dowolną liczbę wymierną bezwzględną. Zachodzi dylemat: albo $w^2 > 2$ albo $w^2 < 2$, gdyż niema liczby wymiernej bezwzględnej w takiej, że jest $w^2 = 2$.

Jeśli $w^2 > 2$ zaliczamy liczbę (w) do zbioru Z_2, jeżeli $w^2 < 2$ zaliczamy liczbę w do zbioru Z_1. Podział ten posiada wymagane 3 własnosci, czego dowód pominiemy, jest więc przekrojem, a zatem określa pewną liczbę niewymierną, którą nam na mocy późniejszych rozważań wypadnie oznaczyć znakiem $\sqrt{2}$.

Mając określane w ten sposób liczby niewymierne, łączymy je z liczbami wymiernemi w jeden zbiór, który nazywamy zbio. liczb bezwzględnych; dla nich należy ustanowić definicje porównywania ich ze sobą i działania na nich.

Pamiętajmy, że dowolna liczba bezwzględna jest albo wymierną albo niewymierną. Weźmy dwie liczby bezwzględne b i b' (wymierne lub niewymierne). Rysujemy odcinki β i β' mierzące się liczbami b i b' przy jednostce j. Jeżeli odcinek $\beta > \beta'$ to mówimy, że liczba $b > b'$, jeśli odcinek $\beta < \beta'$, mówimy, że liczba $b < b'$ wreszcie jeżeli $\beta = \beta'$, to liczba $b = b'$.

Jeżeli b jest liczbą wymierną zaś b' liczbą niewymierną, to równość $b = b'$ jest niemożliwą, gdyż odcinek $\beta = \beta'$ byłby i współmiernym i niewspółmiernym z jednostką j, co jest nonsensem.

<u>Dodawanie</u>. Przez sumę dwu liczb bezwzględnych $b + b'$ rozumiemy liczbę, mierzącą odcinek $\beta + \beta'$, przyczem β oznacza

odcinek, mierzący się liczbą b, zaś β' odcinek, mierzący się liczbą b', przy obranej jednostce j.

<u>Mnożenie</u>. Przy mnożeniu liczby bezwzględnej b przez liczbę bezwzględną b' odróżnimy dwa przypadki:

1) $b'=0$. Wtedy $b.0=0$

2) $b'\neq 0$. Wówczas, obrawszy dowolnie odcinek j jako jednostkę, budujemy odcinek β', mierzący się liczbą b'. Ponieważ $b'\neq 0$, więc β' nie może być punktem. Możemy zatem zbudować odcinek β, mierzący się liczbą b przy jednostce β'. Liczbę mierzącą odcinek β ale przy jednostce j, nazywamy iloczynem $b.b'$ liczby b przez liczbę b'.

<u>Potęgowanie</u>. Działanie to określamy następująco:

1) $b^0=1$ jeśli $b\neq 0$; 2) $b^1=b$

3) gdy n oznacza liczbę naturalną większą od jedności, to b^n ma oznaczać iloczyn n czynników, z których każdy równa się b: $b^n=\underbrace{b.b.b.\ldots b}_{n \text{ czynników}}$

Wprowadzenie liczb bezwzględnych umożliwia nam wykonanie pierwiastkowania liczb bezwzględnych.

Weźmy naprzykład równanie $x^2=2$. Wiemy, że nie istnieje liczba wymierna bezwzględna czyniąca zadość temu równaniu, wykażemy, że istnieje liczba niewymierna, spełniająca to równanie. W tym celu podzielmy zbiór wszystkich liczb wymiernych bezwzględnych na dwa zbiory i do zbioru Z_1 zaliczmy liczby u, które spełniają nierówność $u^2<2$; do zbioru Z_2, zaliczmy liczby pozostałe w, to znaczy spełniające nierówność $w^2>2$.

Wykażemy, że podział ten posiada własności:

1) Zbiory Z_1 i Z_2 są nieskończone. Do zbioru Z_1 należą bowiem wszystkie liczby u, $0\leq u\leq 1$, a tych jest nieskończenie wiele. Podobnie

do zbioru Z_2 należą wszystkie liczby w, o własności $w>2$, gdyż stąd wynika, że jest $w^2>4>2$.

2) Każda liczba zbioru Z_1 jest mniejsza od każdej liczby zbioru Z_2. Albowiem jest $u^2<2$ $w^2>2$ więc $u^2<2<w^2$ stąd $u^2<w^2$ przeto też $u<w$.

3) W zbiorze Z_1 niema liczby największej, zaś w zbiorze Z_2 najmniejszej. Własność tę przyjmiemy bez dowodu.

Podział ten jest więc przekrojem, zatem określa liczbę niewymierną ξ. Na podstawie tych własności wykażemy:

4) <u>Twierdzenie</u>: Do każdej liczby $\varepsilon>0$ mogę dobrać taką liczbę u_0 ze zbioru Z_1 i liczbę w_0 ze zbioru Z_2, że jest $0<w_0-u_0<\varepsilon$.

<u>Dowód</u>. Że $0<w_0-u_0$, wynika z tego, że $u_0<w_0$ (druga własność zbiorów Z_1 i Z_2) Obierzmy dowolnie $\varepsilon>0$. Znajdę zawsze tak wielkie n, że

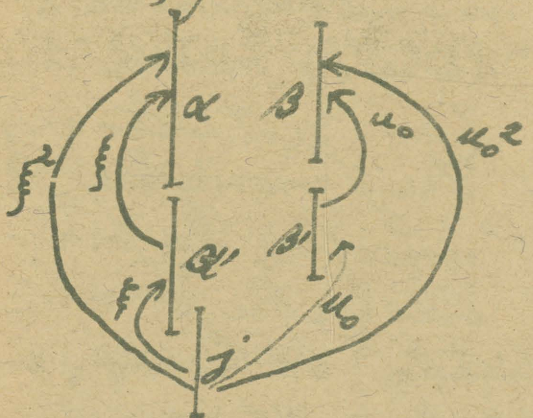
$\frac{1}{10^n} < \varepsilon$. Bierzemy pod uwagę ciąg.
$\frac{0}{10^n}, \frac{1}{10^n}, \frac{2}{10^n}, \ldots\ldots\ldots \frac{125}{10^n}, \ldots\ldots\ldots$

Musimy znaleźć w tym ciągu dwa wyrazy następujące po sobie, $\frac{l}{10^n}$ i $\frac{l+1}{10^n}$, takie, że ułamek $\frac{l}{10^n}$ należy do zbioru Z_1, zaś ułamek $\frac{l+1}{10^n}$ należy do zbioru Z_2. Kładę $u_0 = \frac{l}{10^n}$, $w_0 = \frac{l+1}{10^n}$, wówczas $w_0 - u_0 = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$ o co chodziło.

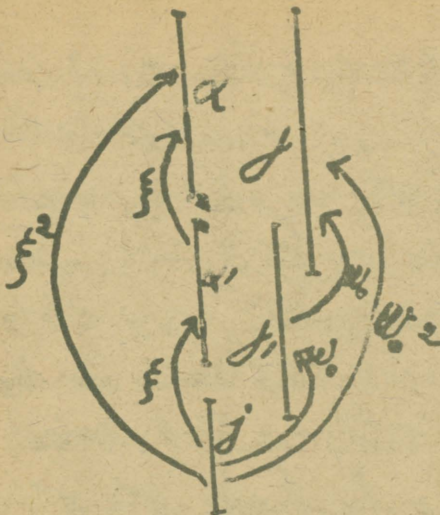
Wykażemy teraz, że liczba niewymierna ξ spełnia równanie $\xi^2 = 2$, przyczem jest $\xi^2 = \xi \cdot \xi$. Według definicji mnożenia, obieramy odcinek j za jednostkę, rysujemy odcinek α', mierzący się liczbą ξ przy jednostce j, następnie rysujemy odcinek α mierzący się liczbą ξ przy jednostce α'. Tedy odcinek α mierzy się liczbą ξ^2 przy jednostce j.

Wiemy że $\xi^2 \neq 0$, bo $\xi > 0$ (~~albo $\xi^2 > 2$~~) (gdyż $1 < \xi$), zatem jest albo $\xi^2 < 2$, albo $\xi^2 = 2$, albo $\xi^2 > 2$. Przypuśćmy, że jest $\xi^2 < 2$. Wedle twierdzenia ...

znajdę do dowolnej liczby $\varepsilon>0$, dwie liczby u_0 i w_0, takie, że jedna należy do zbioru Z_1, druga do zbioru Z_2 czyli $u_0^2<2$ i $2<w_0^2$, ponadto: $0<w_0-u_0<\varepsilon$



Liczba $u_0\neq 0$ należy do zbioru Z_1; tedy $u_0<\xi$, więc odcinek $\beta'<\alpha'$. Ponieważ odcinek β mierzy się liczbą u_0 przy jednostce β' (mniejszej od α') i liczbą $u_0<\xi$, więc tem bardziej $\beta<\alpha$. Z obu odcinków α, β, pierwszy mierzy się liczbą ξ^2, drugi liczbą u_0^2 przy jednostce j: jest $u_0^2<\xi^2$ niech liczba w_0 należy do zbioru Z_2 i niech odcinek γ' mierzy się liczbą w_0 przy jednostce j, zaś odcinek γ liczbą w_0 przy jednostce γ'; tedy odcinek γ mierzy się liczbą w_0^2 przy jednostce j. Okażemy, że jest $\xi^2<w_0^2$.



Liczba w_0 należy do zbioru Z_2 więc mierzy przy jednostce j odcinek γ', dłuższy od odcinka α' który się mierzy liczbą ξ. Jest więc $\alpha' < \gamma'$. Przy mniejszej jednostce, bo przy odcinku α' mierzy się mniejszą liczbą, bo liczbą ξ odcinek α, niż odcinek γ, który przy jednostce j' mierzy się liczbą w_0. Jest więc $\alpha < \gamma$, stąd (ze względu na jednostkę j') jest $\xi^2 < w_0^2$. Jeżeli jest $\xi^2 < 2$ to jest $0 < u_0^2 < \xi^2 < 2 < w_0^2$, skąd wynika, że różnica liczb wewnętrznych będzie mniejsza od różnicy liczb zewnętrznych czyli będzie:

$0 < 2-\xi^2 < w_0^2 - u_0^2$ t.j. $0 < 2-\xi^2 < (w_0+u_0)(w_0-u_0) < (w_0+u_0)\varepsilon$ ale $w_0 - u_0 < \varepsilon$ skąd:

$w_0 < u_0+\varepsilon < 2+\varepsilon$, bo $u_0 < 2$ więc $w_0+u_0 < 2+\varepsilon+2 = 4+\varepsilon$ tedy $0 < 2-\xi^2 < (4+\varepsilon)\varepsilon$;

zatem $0 < 2 - \xi^2 < (4+\varepsilon)\varepsilon < 5\varepsilon$ jeśli $0 < \varepsilon < 1$.
Ponieważ liczba ε jest pozatem dowolną, więc 5ε może być dowolnie małe, a więc $2-\xi^2$ musiałoby być zerem, gdy tymczasem $2-\xi^2 > 0$; przypuszczenie więc, że $\xi^2 < 2$ prowadzi do fałszu. Podobnie zakładając, że $\xi^2 > 2$ otrzymamy $0 < u_0^2 < 2 < \xi^2 < \omega_0^2$; skąd $0 < \xi^2 - 2 < \omega_0^2 - u_0^2 < 5\varepsilon$ a więc $\xi^2 - 2$ musiałoby być zerem, co sprzeczne z założeniem. Pozostaje jako możliwy tylko przypadek, że $\xi^2 = 2$. c.b.d.d.
Zatem liczbę ξ możemy oznaczyć symbolem: $\xi = \sqrt{2}$.

Własności działań liczbami bezwzględnemi

1) Dodawanie i mnożenie mają własność komutatywną i assocyatywną to zn. jest:

$$b + b' = b' + b \qquad b \cdot b' = b' \cdot b$$
$$(b + b') + b'' = b + (b' + b''), \quad (b \cdot b') \cdot b'' = b \cdot (b' \cdot b'')$$

2) Mnożenie w stosunku do dodania i odejmowania ma

własność dystrybutywną t. zn. jest:
$(b \pm b')b'' = bb'' \pm b'b''$
3) Dodawanie i mnożenie są wykonalne zawsze i jednoznacznie, dzielenie również, prócz przypadku, że dzielnik równa się zeru.
4) Odejmowanie jest wykonalne i jednoznacznie pod warunkiem, że odjemna jest niemniejszą od odjemnika.
5) Pierwiastkowanie jest wykonalne jednoznacznie, o ile wykładnik pierwiastkowy jest liczbą naturalną.
6) Jeżeli $a > b$, nadto c dowolna liczba bezwzględna to $a+c > b+c$
7) gdy $a > b$, $c \neq 0$, to $a.c > b.c$
8) Jeżeli $a.b = 0$, to albo $a = b = 0$, albo $a = 0$ lub $b = 0$

§ 9. Teorja liczb względnych i rzeczywistych.

Rozszerzenie pojęcia liczby, dokonane przez wprowadzenie liczb niewymiernych nie pozwala jeszcze rozwiązać wszystkich zagadnień analitycznych lub geometrycznych, o których poprzednio wspomnieliśmy. Liczby bezwzględne nie zawsze zezwalają wykonać odejmowanie, niema też odpowiedności takiej między liczbami bezwzględnemi a punktami linji prostej, aby każdej liczbie odpowiadał jeden tylko punkt i naodwrót. Dlatego w dalszym ciągu rozszerzamy pojęcie liczby i wprowadzamy liczby dodatnie i ujemne czyli liczby względne. Liczbą dodatnią jest liczba bezwzględna, opatrzona (poprzedzona) znakiem +, a liczbą ujemną jest liczba bezwzględna opatrzona (poprzedzona) znakiem −. Zbiór liczb względnych i bezwzględnych nazywamy zbiorem liczb rzeczywistych. Określi=

my teraz porównywanie i działania dla liczb rzeczywistych.

1.) Jeżeli b oznacza liczbę bezwzględną to ma być $b = +b$.

2.) Jeżeli b oznacza liczbę bezwzględną to każdy ze znaków $|+b|$, $|-b|$, $|b|$ ma oznaczać liczbę bezwzględną (b), którą nazywamy bezwzględną wartością liczb $+b$, $-b$, b. Z dwu liczb dodatnich ta jest większa, której bezwzględna wartość jest większa t.zn. $+b < +b'$ gdy jest $|+b| < |+b'|$.

3.) Każda liczba dodatnia jest większa od każdej liczby ujemnej czy. $-b < +b'$, gdy $bb' \neq 0$; także jest wtedy $-b < b'$.

4.) Z dwu liczb ujemnych ta jest większa, której bezwzględna wartość jest mniejsza czyli $-b < -b'$ gdy $|-b| > |-b'|$

<u>Dodawanie</u>. Sumę dwu liczb względnych określamy następująco:

1) $(+a)+(+a') = +(a+a') = a+a'$

2) $(-a)+(-a') = -(a+a')$

3) Jeżeli mamy dodać liczbę ujemną do liczby dodatniej $(+a)+(-a')$ to należy odróżnić trzy przypadki:

a) jeżeli jest $a > a'$, wtedy $(+a)+(-a') = +(a-a') = a-a'$;

b) jeżeli jest $a = a'$, wtedy $(+a)+(-a') = 0$;

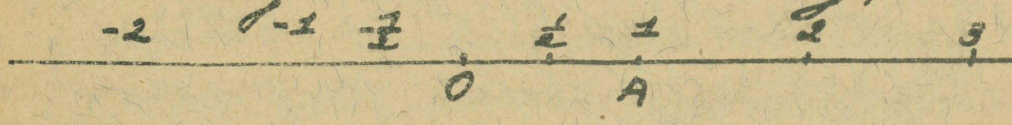
c) jeżeli jest $a' > a$, wtedy $(+a)+(-a') = -(a'-a)$;

Jeżeli jedna z liczb jest bezwzględna, różna od zera, to podstawiamy za nią, równą jej liczbę dodatnią, i dodajemy podług powyższej definicji. Suma dwu liczb rzeczywistych, z których conajmniej jedna jest zerem, jest równa drugiej z nich.

Dodawanie ma własność assocyatywną i komutatywną. Liczby rzeczywiste posiad=

stawiamy geometrycznie następująco:

Na dowolnej prostej (l) obieramy dwa różne punkty O, A. Każdy punkt B, różny od punktu O, uważajmy za obraz geometryczny liczby rzeczywistej, a mianowicie: niech liczba bezwzględna a mierzy odcinek OB przy jednostce OA; punkt B uważajmy za obraz liczby +a lub −a, zależnie od tego czy kierunek od O do B jest identyczny z kierunkiem od O do A, czy nie. Punkt O uważamy za obraz liczby zero.



Prostą tę będziemy nazywali prostą (osią) liczbową. Widzimy, że punkty będące obrazami liczb (+a) i (−a), gdzie jest $a \neq 0$, są położone symetrycznie względem punktu 0. Stąd to pochodzi, że liczby $(+a)$ i $(-a)$ nazywamy liczbami symetrycznemi względem siebie. Suma dwu liczb symetrycznych względem siebie jest równa zeru.

W zakresie liczb rzeczywistych wykonalnem jest już każde odejmowanie bez zastrzeżeń; ponadto różnica dwu liczb rzeczywistych $R - R_1$ równa się sumie odjemnej R i liczby symetrycznej R_1' do odjemnika R_1, czyli: $(\cancel{R+R_1'})$ $R - R_1 = R + R_1'$; jest bowiem $(R + R_1') + R_1 = R + (R_1' + R_1) = R + 0 = R$.

<u>Mnożenie</u> liczb rzeczywistych określamy następująco:

1) $r \cdot 0 = 0 \cdot r = 0$

2) $(+a) \cdot (+b) = +(a \cdot b) = a \cdot b$

$(-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b) = a \cdot b$

3) $(-a) \cdot (+b) = -(a \cdot b)$

$(+a).(-b) = -(a.b)$

4) Jeżeli jeden z czynników jest bezwzględny i różny od zera, zastępujemy go liczbą dodatnią i następnie wykonywamy mnożenie, jak wyżej określono.

Mnożenie liczb rzeczywistych posiada własności:

1) kommutatywną
2) assocjatywną
3) dystrybutywną w stosunku do odejmowania i dodawania.

Ponadto: iloczyn liczb rzeczywistych jest wtedy i tylko wtedy zerem, gdy conajmniej jeden z czynników iloczynu jest zerem. Udowodnimy teraz kilka twierdzeń o bezwzględnych wartościach.

Twierd. 1. Bezwzględna wartość iloczynu dwu liczb rzeczywistych równa się iloczy-

(~~mnożnik~~) równi bezwzględnych wartości czynników.

(1) $|k.k'| = |k|.|k'|$.

Dowód. Połóżmy $k = \pm b$ $k' = \pm b'$ gdzie b i b' oznaczają liczby bezwzględne. Według określenia mnożenia mamy

$|k.k'| = |(\pm b).(\pm b')| = |\pm(b.b')| = b.b'$;

natomiast jest $|k| = b$ $|k'| = b'$ zatem jest $|k|.|k'| = b.b'$, a więc $|k.k'| = |k|.|k'|$. Gdy jest n.p. $k=0$ to równość (1) jest także słuszna.

Tw. 2 <u>Bezwzględna wartość sumy lub różnicy dwu liczb rzeczywistych nie przekracza nigdy sumy bezwzględnych wartości tych liczb i nie jest mniejsza od różnicy bezwzględnych wartości</u>; t.zn. jest:

$|k| - |k'| \leq |k \pm k'| \leq |k| + |k'|$

Dowód. [illegible]

my liczbę $|R|$, możemy więc napisać $|r \pm r'| = \sqrt{(r \pm r')^2} =$
$= \sqrt{r^2 \pm 2rr' + r'^2}$ dodając zaś stronami nierówności $\pm 2rr' \le 2|r| \cdot |r'|$
nierówność $r^2 = |r|^2$ i $r'^2 = |r'|^2$.
(gdyż według tw.(8) jest $|r^2| = |r \cdot r| =$
$= |r| \cdot |r| = |r|^2$.

$$\pm 2rr' \le 2|r| \cdot |r'|$$
$$r^2 = |r|^2$$
$$r'^2 = |r'|^2$$

otrzymamy $0 \le (r \pm r')^2 = r^2 \pm 2rr' + r'^2 \le |r|^2 +$
$+ 2|r| \cdot |r'| + |r'|^2 = (|r| \pm |r'|)^2$; zatem jest
$\sqrt{r^2 \pm 2rr' + r'^2} \le \sqrt{(|r| \pm |r'|)^2} = |r| + |r'|$,
przeto $|r \pm r_1| = \sqrt{r^2 \pm 2rr' + r'^2} \le$
$\le |r| + |r'|$ czyli $|r \pm r_1| \le |r| + |r'|$.
Dodając zaś nierówności

$$\pm 2rr' \ge -2 \cdot |r||r'|$$
$$r^2 = |r|^2$$
$$r'^2 = |r'|^2$$

otrzymamy $r^2 \pm 2rr' + r'^2 \ge |r|^2 -$
$- 2|r||r_1| + |r'|^2 = (|r| - |r_1|)^2$
czyli $|r \pm r'| = \sqrt{r^2 \pm 2rr' + r'^2} \ge$

$\geq \sqrt{|z|^2 - 2|z||z'| + |z'|^2} = \sqrt{(|z| - |z'|)^2} = ||z| - |z'|| \geq$
$\geq |z| - |z'|$ to jest $|z \pm z'| \geq |z| - |z'|$

Powoływaliśmy się na nierówność $|a| \geq a$, która jest prawdziwą dla liczb bezwzględnych, dodatnich i ujemnych.

Dzielenie liczb rzeczywistych jest zawsze wykonalne i jednoznacznie, o ile tylko dzielnik jest różny od zera.

Potęgowanie i pierwiastkowanie. Potęgowanie określamy zupełnie podobnie, jak dla liczb bezwzględnych; ono posiada też same własności.

Przejdźmy do pierwiastkowania liczb rzeczywistych. Otóż znaleźć n-ty pierwiastek z liczby rzeczywistej z, znaczy znaleźć taką liczbę rzeczywistą ξ, aby było $\xi^n = z$. Powstają pytania:

1) czy zawsze istnieje taka liczba ξ ?

2) ile takich liczb istnieje ?

Przypadek I. Niech będzie $k>0$. Pierwiastek wtedy istnieje przyczem, jeżeli n oznacza liczbę naturalną parzystą, to istnieją dwa pierwiastki symetryczne względem siebie; jeśli n oznacza liczbę nieparzystą, to istnieje jeden tylko pierwiastek $\xi>0$.

Przypadek II. Niech będzie $k=0$. Wtedy $\xi=0$

Przypadek III. Niech będzie $k<0$. Jeżeli n oznacza liczbę parzystą to nie istnieje liczba ξ. Jeśli zaś n oznacza liczbę nieparzystą to istnieje i tylko jedna liczba $\xi<0$. Ponieważ pierwiastkowanie nie zawsze jest jednoznaczne.

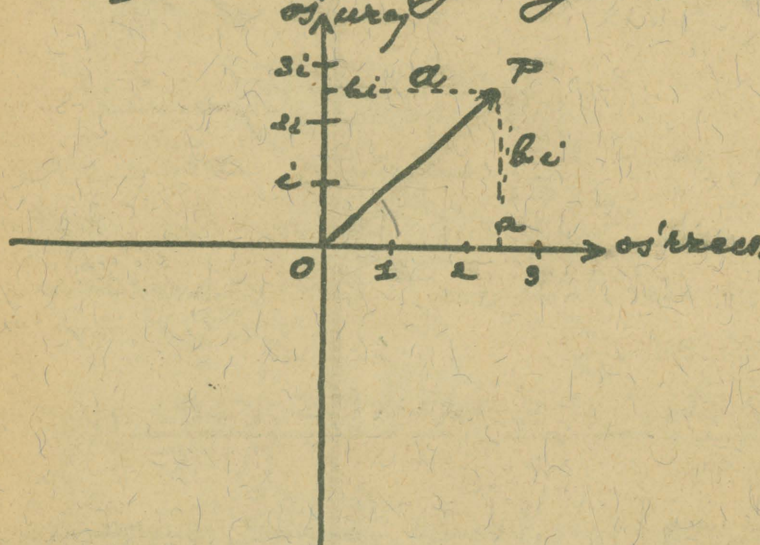
(w przypadku wykładnika parzystego), przeto umawiamy się rozumieć przez symbol $\sqrt[n]{x}$, w tym przypadku liczbę bezwzględną $\sqrt[n]{x} = |\xi|$.

Ponieważ pierwiastkowanie się zawsze jest wykonalne, więc nasuwa się potrzeba jeszcze jednego (i już ostatniego) rozszerzenia pojęcia liczby.

§ 10. Liczby zespolone.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę prostą liczbową, to każdemu punktowi na niej odpowiada jedna liczba rzeczywista i naodwrót. Rozszerzamy pojęcie liczby, ustanawiając odpowiedniość między punktami płaszczyzny a liczbami.

Weźmy prostą liczbową i poprowadźmy prostopadłą do niej w punkcie zerowym. Prostą liczbową nazwijmy osią liczb rzeczywistych, zaś prostopadłą osią liczb urojonych. Każdemu punktowi na płaszczyźnie odpowiadają dwie liczby odcięta i rzędna.



Na dodatniej półosi liczb urojonych odcinamy jednostkę i punkt końcowy tej jednostki uważamy za odpowiednik liczby urojonej i, rozumiejąc przez i liczbę spełniającą $i^2 = -1$.

Każdy punkt na płaszczyźnie o współrzędnych (a, b) jest odpowiednikiem liczby z, zwanej liczbą zespoloną. Zatem liczby rzeczywiste są szczególnemi liczbami zespolonemi.

Dla liczb zespolonych nie określamy pojęcia mniejszości ani większości; mówimy tylko o liczbach równych lub nierównych. Dwie liczby zespolone są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są odpowiednikami tego samego punktu płaszczyzny.

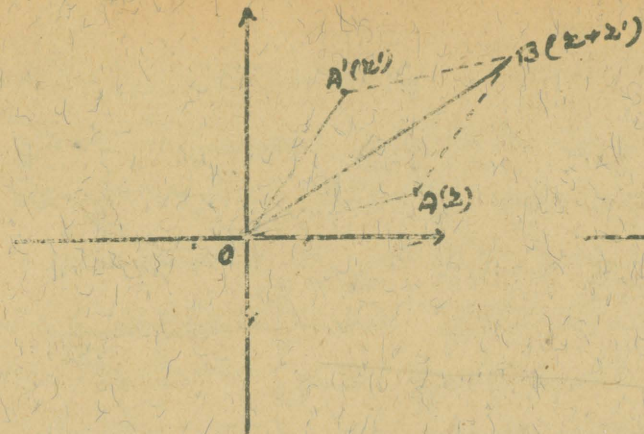
Wektorem liczby zespolonej z nazywamy wektor, którego początkiem jest punkt 0, końcem zaś odpowiednik liczby z.

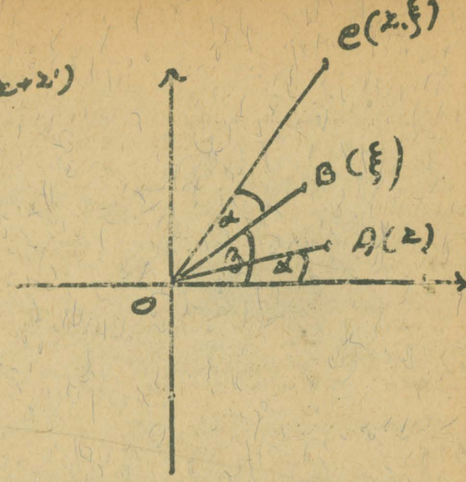
Aby wektor był określony, trzeba znać jego kierunek (kąt, jaki tworzy z osią liczb rzeczywistych) i długość. Oznaczmy przez ρ jego długość, przez φ kąt, jaki tworzy z osią liczb rzeczywistych.

Bezwzględną wartością liczby

lub jej modułem nazywamy długość wektora ρ. Jeżeli znamy liczbę zespoloną, to jej moduł ρ jest jednoznacznie określony, kąt φ zaś wieloznacznie, gdyż każdy kąt $\varphi + 2n\pi$ określa ten sam wektor, który określa kąt φ, jeżeli <u>n</u> oznacza dowolną liczbę całkowitą. Kąt φ nazywamy też argumentem liczby zespolonej z. Określimy teraz dodawanie i mnożenie liczb zespolonych.

Przez sumę $z + z'$ dwu liczb zespolonych rozumiemy liczbę zespoloną następującą: Weźmy pod uwagę wektor OA liczby z i wektor OA' liczby z'. Wektor będący sumą tych dwu wektorów, o początku w punkcie O, ma koniec w punkcie B. Liczbę, której odpowiednikiem jest punkt B, nazywamy sumą liczb $z + z'$.





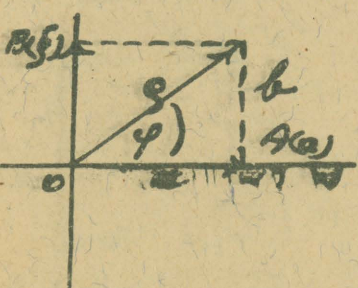
Niech A oznacza odpowiednik liczby zespolonej z, B odpowiednik liczby ξ. Przez iloczyn liczb z.ξ rozumiemy nową liczbę zespoloną następującą: Utwórzmy wektor o początku O, którego długość równa się iloczynowi długości wektorów OA i OB, ~~niech C będzie końcem wektora~~ i którego argument równa się sumie argumentów wektorów OA i OB; niech C będzie końcem wektora, iloczyn liczb z i ξ jest liczbą zespoloną, będącą odpowiednikiem punktu C. Stąd widzimy, że odpowiednikiem liczby bi, gdzie b jest liczbą rzeczywistą jest punkt na osi liczb urojonych, o współrzędnych $(0, b)$. Zatem wszystkie punkty osi urojonej odpowiadają liczbom $a \cdot i$, jeżeli x oznacza liczbę rzeczywistą. Potęgę liczby zespolonej o wykładniku całkowitym określamy podobnie jak potęgę liczby rzeczywistej; Jeżeli pomnożymy liczbę i przez siebie, to otrzymamy -1, $i \cdot i = i^2 = -1$, jak to łatwo się czytelnik przekona na podstawie powyższego określenia mnożenia liczb zespolonych.

Podobnie otrzymamy według definicji mnożenia $(-i)(-i) = (-i)^2 = -1$. Zatem równanie $\xi^2 = -1$ posiada w zakresie liczb zespolonych dwa rozwiązania $\xi_1 = i$, $\xi_2 = -i$. Łatwo stwierdzić, że mamy $i^1 = i$ $i^2 = i \cdot i = -1$

$i^3 = i \cdot i \cdot i = (-1) i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = +1$

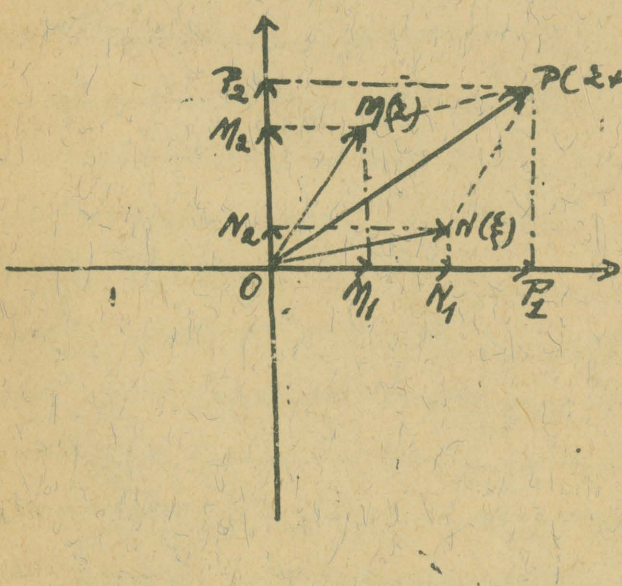
<u>Twierdzenie</u>. Jeżeli liczba zespolona z jest odpowiednikiem punktu o współrzędnych (a, b) to mamy $z = a + bi$, czyli, że każda liczba zespolona jest sumą liczby rzeczywistej a i drugiego składnika, który jest iloczynem liczby rzeczywistej b przez jednostkę urojoną i.

<u>Dowód</u>. Według określenia dodawania odpowiednik liczby z jest końcem wektora,



będącego sumą wektorów liczb a i ξ, więc $z = a + \xi$. Ale liczba ξ jest iloczynem $b \cdot i$ więc $z = a + bi$. Opierając się na tem twierdzeniu możemy wyrazić liczbę zespoloną z trygonometrycznie za pomocą jej wartości bezwzględnej ρ i argu=

mentu φ. Mamy bowiem:
$a = \rho \cos\varphi$, $b = \rho \sin\varphi$; stąd więc
$z = a+bi = \rho\cos\varphi + \rho i \sin\varphi$, czyli też
$\underline{z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)}$.
Zajmiemy się teraz arytmetycz=
nem wykonaniem dodawania
i mnożenia liczb zespolonych.
Mamy dodać do siebie dwie licz=
by $z = a+bi$, $\xi = c+di$. Ponie=
waż wektor sumy $z+\xi$ jest su=
mą wektorów z i ξ, zatem rzut



jego na oś liczb rzeczy=wistych, równa się su=mie rzu=tów wekto=rów liczb z i ξ, podobnie na oś liczb uro=jonych. Jest więc według tego wzo=

tzn: $OP_1 = OM_1 + ON_1$,

$OP_2 = OM_2 + ON_2$, a więc

$OP_1 = a+c$, $OP_2 = b+d$. Ponieważ

$\overline{OP} = \overline{OP_1} + \overline{OP_2}$ więc też

$z + \zeta = a+c+(b+d)i$ czyli

$(a+bi)+(c+di) = a+c+(b+d)i$

Dwie liczby zespolone dodajemy, dodając osobno części rzeczywiste a osobno części urojone.

Dwie liczby zespolone położone symetrycznie względem osi liczb rzeczywistych, czyli liczby postaci: $a+bi$, $a-bi$, nazywamy liczbami zespolonemi sprzężonemi ze sobą.

Znajdziemy teraz iloczyn dwu liczb zespolonych sposobem trygonometrycznym. Niech będzie: $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\zeta = \sigma(\cos\psi + i\sin\psi)$, wiemy, że

$z\cdot\zeta = \rho\cdot\sigma[\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)]$ na podstawie definicji mnożenia.

Pomnóżmy z przez ξ, tak, jak mnożymy wielomiany rzeczywiście:

$z \cdot \xi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot \sigma(\cos\psi + i\sin\psi) =$
$= \rho \cdot \sigma(\cos\varphi\cos\psi + i\sin\varphi\cos\psi + i\cos\varphi\sin\psi +$
$+ i^2\sin\varphi\sin\psi)$; ale $i^2 = -1$ więc
$\cos\varphi\cos\psi + i^2\sin\varphi\sin\psi = \cos\varphi\cos\psi -$
$- \sin\varphi\sin\psi = \cos(\varphi+\psi)$, ponadto
$i\sin\varphi\cos\psi + i\cos\varphi\sin\psi =$
$= i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi) = i\sin(\varphi+\psi)$
zatem $z \cdot \xi = \rho \cdot \sigma[\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)]$;
otrzymaliśmy wynik ten sam.

Widzimy więc, że dwa wielomiany zespolone mnożymy tak, jak dwumiany rzeczywiste n.p.:
$(a+bi)(c+di) = ac + bci + adi + bdi^2 =$
$ac - bd + i(bc+ad)$.

Własności działań na liczbach zespolonych są następujące:

1) Prawo komutatywne i asocjatywne dla mnożenia i dodawania są słuszne.

2) Prawo dystrybutywne w stosunku do dodawania i odejmowania jest również słuszne.

3) Warunek konieczny i wystarczający, aby iloczyn dwu liczb był zerem, polega na tem, aby przynajmniej jeden z czynników był zerem.

Dwie liczby zespolone odejmujemy, odejmując części rzeczywiste od rzeczywistych, części urojone od urojonych:

$$(a+bi)-(c+di) = a-c+(b-d)i$$

Przy dzieleniu dwu liczb zespolonych, mnożymy dzielną i dzielnik, przez taką liczbę, by nowy dzielnik był liczbą rzeczywistą. W tym celu mnożymy dzielną i dzielnik przez liczbę sprzężoną z dzielnikiem.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} =$$

$$= \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i;$$

Iloraz dwu liczb zespolonych jest znów liczbą zespoloną.

Potęgowanie określamy jak dla liczb rzeczywistych.

Pierwiastkowanie o wykładniku naturalnym jest zawsze wykonalne i posiada tyle pierwiastków ile wynosi wykładnik pierwiastkowany. N.p. równanie: $\xi^2=-4$ ma dwa rozwiązania $\xi_1=2i$, $\xi_2=-2i$.

Rozdział III.

Równania algebraiczne.

§1. Określenie i podział równań.

Równaniem algebraicznem stopnia n-tego o niewiadomych x, y, z... i t.d. nazywamy wielomian stopnia n-tego względem zmiennych x, y, z, ... i t.d., przyrównany do zera. N.p.

$$5x^3+7x^2-1=0 \quad \text{lub}$$

$$2x^2+3xy+7y^2-2y+3=0$$

Pierwiastkiem równania naz. liczbę, która podstawiona w równaniu za niewiadomą, spełnia to równanie. Rozwiązać równanie, znaczy znaleźć układ pierwiastków tego rów=

nania, czyli układ liczb, które podstawione za wszystkie niewiadome spełniają to równanie.

Równania algebraiczne dzielimy według stopni i według ilości niewiadomych.

Weźmy pod uwagę dwa równania stopnia 1-go, o dwu niewiadomych:

1) $ax+by+c=0$
2) $a_1x+b_1y+c_1=0$

gdzie a, b, c, a_1, b_1, c_1 oznaczają dane liczby.

Znajdźmy pierwiastki obu równań czyli parę liczb, spełniających równanie (1) i (2). Pomnóżmy w tym celu równanie (1) przez liczbę b_1, zaś równanie (2) przez liczbę b:

3) $ab_1x+bb_1y+cb_1=0$
4) $a_1bx+bb_1y+c_1b=0$

odejmując (4) od (3) otrzymamy

$x(ab_1 - a_1 b) + y(\underbrace{bb_1 - bb_1}_{=0}) + cb_1 - c_1 b =$
$= 0$ czyli (5) $x(ab_1 - a_1 b) = bc_1 - b_1 c$;
podobnie mnożąc równania (1) i (2) odpowiednio przez liczby a_1 i a i odejmując od siebie otrzymamy

(6) $y(a_1 b - ab_1) = ac_1 - a_1 c$.

Załóżmy, że jest (7) $a_1 b - ab_1 \neq 0$ wówczas równości (5) i (6) dają

(8) $x = \frac{bc_1 - b_1 c}{ab_1 - a_1 b}$, $y = \frac{ac_1 - a_1 c}{a_1 b - ab_1}$

Jeżeli równania (1) i (2) mają rozwiązania i jeżeli zachodzi nierówność (7) to one są dane przez wzory (8), podstawiając (8) w (1) i (2) przekonywamy się, że równania (1) (2) są spełnione czyli wzory (8) dają przy nierówności (7) rzeczywiście rozwiązania równań (1) i (2). Wzory (8) noszą nazwę wzorów Cramera.

Widzimy, że wyrażenia w licz= nikach i mianownikach są po= dobne. Dlatego też wprowadza= my następujący symbol

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

Symbol ten nazywamy <u>wy= znacznikiem</u> rzędu drugiego z liczb a, b, a_1, b_1, i przypi= sujemy mu wartość:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a b_1 - a_1 b$$

możemy więc napisać

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}.$$

§ 2. Wyznaczniki.

Symbol wyznacznika skła= da się z liczb pozio-mych i pionowych. Linje poziome nazywamy wierszami, linje pionowe, kolumnami. Liczby, które tworzą wiersze i kolumny wyznacznika, nazywamy elementami wyznacznika.

Weźmy teraz symbol wyznacznika rzędu trzeciego:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Przez minor należący do jakiegoś elementu tego wyznacznika, rozumiemy wyznacznik utworzony z niego przez wykreślenie tego wiersza i tej kolumny, w których się dany element znajduje; n.p. minor należący do elementu b_2 jest następujący:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

Wyznacznik rzędu trzeciego przedstawia liczbę otrzymaną przez dodanie do siebie iloczynów z elementów pierwszej kolumny (lub pierwszego wiersza) przez ich minory ze znakami plus (+) i minus (-) naprzemian, mianowicie:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Przez wyznacznik rzędu pierwszego (a) rozumiemy liczbę a. Wyznaczniki dowolnego rzędu określamy podobnie. Przez wyznacznik rzędu n-tego rozumiemy układ liczb o n kolumnach i n wierszach; elementami jego będą liczby o dwu wskaźnikach a_{ik}

$i = 1, 2, 3, \dots n \quad k = 1, 2, 3, \dots n$

gdzie wskaźnik pierwszy i oznacza wiersz; wskaźnik drugi kolumnę, w których ta liczba się znajduje. Wyznacznik taki ma postać

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Oznaczmy przez M_{ik} minor elementu a_{ik} tego wyznacznika, czyli wyznacznik (rzędu $n-1$go) utworzony przez wykreślenie i-tego wiersza i k-tej kolumny. Wtedy wyznacznik rzędu n-tego przedstawia liczbę następującą:

$$W = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - \ldots \ldots + (-1)^{n+1} M_{1n} a_{1n}$$

Przykład.

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+3\begin{vmatrix}1&3&1\\-1&0&1\\2&1&4\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}1&3&2\\-1&0&2\\2&1&2\end{vmatrix}$$

Ale jest

$$\begin{vmatrix}3&2&1\\0&2&1\\1&2&4\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2&1\\2&4\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}2&1\\2&4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2&1\\2&1\end{vmatrix}=3.(8-2)-0+$$

$$+(2-2)=3.6=18.$$

podobnie

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&2&1\\2&2&4\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}2&1\\2&4\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}2&1\\2&4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2&1\\2&1\end{vmatrix}=12$$

wreszcie
$$\begin{vmatrix}1&3&1\\-1&0&1\\2&1&4\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}0&1\\1&4\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}3&1\\1&4\end{vmatrix}+$$

$$+2\begin{vmatrix}3&1\\0&1\end{vmatrix}=-1+11+6=16$$

Zatem

$$1.18-2.12+3.16=42$$

<u>Twierdzenie 1</u> Jeżeli w wyznaczniku przestawimy dwie kolumny lub dwa wiersze to wyznacznik zmienia znak. We wypadku wyznacznika rzędu 2-go jest to wprost widoczne:

$$\begin{vmatrix}a&b\\a_1&b_1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b&a\\b_1&a_1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a&b\end{vmatrix}$$

Dowód w wypadku wyznacznika dowolnego rzędu pomijamy.

Twierdzenie 2. Jeżeli w wyznaczniku dwie kolumny lub dwa wiersze są identyczne, to wyznacznik równy jest zeru.

Dowód. Przestawmy linje identyczne. Według twierdzenia 1-go, wyznacznik zmienia znak; ponieważ otrzymamy jednak ten sam wyznacznik więc $W = -W$ stąd $2W = 0$ co daje $W = 0$, zgodnie z twierdzeniem 2.

Twierdzenie 3. Wyznacznik mnożymy przez liczbę, mnożąc elementy tylko jednego wiersza lub kolumny.

Dowód Udowodnimy to (tylko) dla wyznacznika rzędu drugiego. Jest:

$$a\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) =$$

$$= a\,a_{11}a_{22} - a\,a_{21}a_{12} = (a\,a_{11})\,a_{22} - $$
$$-(a\,a_{21})\,a_{12} = \begin{vmatrix} a\,a_{11} & a_{12} \\ a\,a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

<u>Twierdzenie 4.</u> Wartość wyznaczni=ka się nie zmieni gdy przestawi=my wszystkie wiersze na kolum=ny i odwrotnie.

Dowód. Udowodnimy to twierdze=nie tylko dla wyznaczników rzędu drugiego. Jest bowiem:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a\,b_1 - a_1 b; \quad \text{zaś}$$

$$\begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix} = a\,b_1 - a_1 b,$$

skąd twierdzenie wynika w tym wypadku.

<u>Twierdzenie 5</u> Wyznacznik, w którym każdy element jedne=go wiersza przedstawia się jako suma dwu wyrazów jest rów=ny sumie wyznaczników następujących:

$$\begin{vmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

~~Twierdzenie 5~~ Dowód

$$\begin{vmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ a' & b' \end{vmatrix} = (a+\alpha)b' - (b+\beta)a' =$$

$$= ab' - a'b + \alpha b' - \beta a' = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

Twierdzenie 6. Wyznacznik nie zmieni wartości, jeżeli do elementów jednego wiersza (lub kolumny) dodamy odpowiednio elementy drugiego wiersza (lub kolumny) pomnożone przez ten sam, zresztą dowolny) czynnik.

Dowód. Wykażemy to twierdzenie dla wyznaczników rzędu 3go.

Twierdzimy, że jest:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ale ostatni wyznacznik równy jest sumie:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

gdyż wyznacznik, pomnożony przez λ, równy jest zeru, na podstawie twierdzenia 2-go.

Twierdzenie 7. Jeżeli elementy wyznacznika są funkcjami zmiennej x, posiadającemi pochodne, wówczas pochodna wyznacznika jest równa sumie wyznaczników, utworzonych przez zastąpienie elementów jednego wiersza przez ich pochodne.

Jest n.p.
$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) \end{vmatrix} =$$
$$=\begin{vmatrix} \varphi'_{11}(x) & \varphi'_{12}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) \\ \varphi'_{21}(x) & \varphi'_{22}(x) \end{vmatrix}$$

Dowód. Udowodnimy to twierdzenie w wypadku wyznacznika 2go rzędu. Oznaczmy go przez $W(x)$. Jest:

$$\frac{d}{dx}W(x) = \frac{d}{dx}[\varphi_{11}(x)\cdot\varphi_{22}(x) - \varphi_{12}(x)\cdot\varphi_{21}(x)] = [\varphi_{11}'(x)\varphi_{22}(x) - \varphi_{12}'(x)\varphi_{21}(x)] + [\varphi_{11}(x)\varphi_{22}'(x) - \varphi_{12}(x)\varphi_{21}'(x)] =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_{11}'(x) & \varphi_{12}'(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) \\ \varphi_{21}'(x) & \varphi_{22}'(x) \end{vmatrix}$$

§ 3. Równania algebraiczne stopnia pierwszego o jednej niewiadomej.

Równanie algebraiczne stopnia pierwszego o jednej niewiadomej ma postać $ax+b=0$ gdzie a, b są danemi liczbami. Odnośnie do niej rozróżniamy kilka przypadków.

Przypadek 1. $a=b=0$. Wtedy każda liczba spełnia równanie.

Przypadek 2. $a=0$ $b\neq 0$. Pierwiastek równania nie istnieje

Przypadek 3. $a \neq 0$. W tym przypadku wolno równanie podzielić przez a, przez co otrzymujemy $x + \frac{b}{a} = 0$. Dodając obustronnie liczbę $-\frac{b}{a}$, otrzymujemy równanie zwane oczywistem:

$x = -\frac{b}{a}$

Rozwiązywanie równania stopnia pierwszego polega na sprowadzeniu go przez różne przekształcenia do równania oczywistego, którego pierwiastek bezpośrednio odgadujemy.

Weźmy n.p. równanie

(1) $\frac{x}{10} + \frac{x}{2} + \frac{x}{5} = 18 - x$ pomnożymy obie strony równości przez liczbę 10 (najmniejszą wspólną wielokrotność mianowników)

(2) $x + 5x + 2x = 180 - 10x$ czyli

(3) $8x = 180 - 10x$ dodajmy obustronnie liczbę $10x$, a otrzymamy (4) $18x = 180$, dzieląc przez

18, otrzymamy równanie oczy-
wiste: (5) $x = 10$.
Widzimy, że pierwiastkiem
równania (5) jest liczba 10. Skąd
jednak możemy twierdzić, że
liczba 10 jest też pierwiastkiem
równania (1), i że równanie (1)
nie posiada innych pierwiast-
ków? Pierwsza część pytania
nie sprawia żadnego kłopotu, gdyż
dość podstawić liczbę 10 w rów-
naniu (1), by się przekonać, że
ono będzie spełnionem. Trud-
niejsza rzecz z drugą częścią
pytania; ta część wymaga
dalszych pojęć.

<u>Określenie</u>. Dwa równania zo-
wiemy równoważnemi, jeżeli
posiadają te same pierwiast-
ki. Wobec tego określenia mo-
żemy pytanie tak sformu-
łować: Na jakiej podstawie

twierdzimy, że równania (4) i (5) są równoważne?

Równanie (5) otrzymaliśmy z równania (4) za pomocą pewnych działań. A więc zapytajmy: Które działania wytwarzają z danego równania równanie równoważne z danem? Otóż równania równoważne otrzymujemy wówczas, gdy:

1) do obu stron równania dodamy lub od obu stron odejmiemy tę samą ale dowolną liczbę lub wyrażenie zawierające niewiadomą;

2) gdy obie strony równania pomnożymy (lub podzielimy) przez dowolną liczbę szczególną (nie zawierającą niewiadomej) byle różną od zera. Inne działania mogą wytwarzać równania nierównoważne z danem np. szersze t.zn. mające tak zwane obce pierwiastki lub węższe. Dla ilustracji

weźmy równanie następujące:

(1) $\sqrt{x-5} - \sqrt{x-8} = 3$

Ono jest równoważne równaniu:

(2) $\sqrt{x-5} = 3 + \sqrt{x-8}$

podnieśmy obie strony równania (2) do potęgi drugiej:

(3) $(x-5) = 9 + 6\sqrt{x-8} + x-8$

to równanie równoważne jest równaniu:

(4) $-6 = 6\sqrt{x-8}$,

które znowu równoważne jest równaniu:

(5) $-1 = \sqrt{x-8}$

podnosząc do potęgi drugiej otrzymamy:

(6) $1 = x-8$

równoważne równanie otrzymamy:

(7) $x = 9$.

Podstawmy pierwiastek równania (7) w równaniu (1) otrzymamy $2-1=3$, co jest sprzeczne itd.

tem pierwiastek równania (7) nie spełnia równania (1), czyli równania (1) i (7) nie są równoważne, z tego powodu, że potęgowanie nie prowadzi do równań równoważnych, ale może prowadzić do równania szerszego.

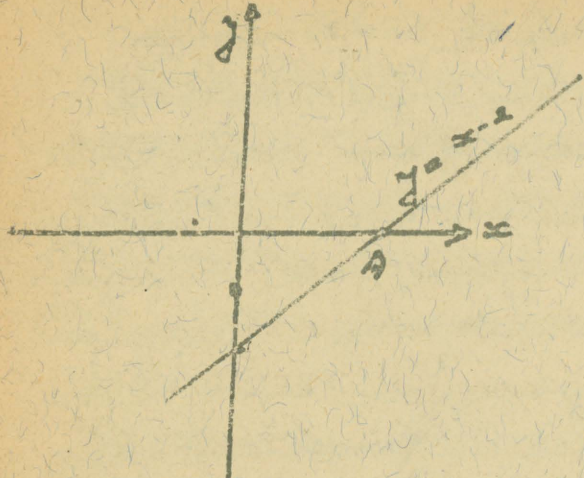
Ponieważ jednak każdy pierwiastek równania (1) musi być pierwiastkiem równania (7) (ale nie naodwrót, bo nie są równoważne), gdyż równanie (7) otrzymaliśmy przez wykonanie takich działań, jak dodawanie mnożenie przez liczbę różną od zera i potęgowanie, równanie zaś (7) posiada tylko jeden pierwiastek $x = 9$ który nie jest pierwiastkiem równania (1), zatem równanie (1) nie posiada żadnego pierwiastka.

Mamy zatem przykład równania nie posiadającego żadnego pierwiastka. Nie po=

trzeba podkreślać, że równanie (8) nie jest równaniem algebraicznem.

Uwaga. Ażeby rozwiązać graficznie równanie stopnia Igo, przekształcamy je na równanie, mające na prawej stronie tylko liczbę 0, czyli przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę, następnie piszemy zamiast zera po prawej stronie liczbę y i rysujemy obraz graficzny otrzymanej w ten sposób funkcji. Odcięta punktu przecięcia się krzywej z osią x-ów przedstawia pierwiastek danego równania. Przykład. Niech będzie dane równanie:

$3x-5=2x-3$, ono jest równoważne równaniu $3x-5-2x+3=0$ czyli $x-2=0$. Wobec tego kreślimy krzywą $y=x-2$ t.j. prostą. Punkt $A(2,0)$ jest punktem przecięcia się prostej z osią x, zatem $x=2$ jest pierwiastkiem danego równania.



Metoda graficzna szukania pierwiastków równania ma zastosowanie w przypadku równań wyższych stopni, jak to często w przypadku równania stopnia 3-go przedstawimy na wykładach „Wyższej Matematyki”.

§4. Równania stopnia pierwszego o dwu lub więcej niewiadomych.

Teraz niech będzie równanie o dwu niewiadomych x, y stopnia pierwszego:

$ax + by + c = 0$, gdzie a, b, c oznaczają liczby dane.

Rozwiązać to równanie, znaczy znaleźć parę liczb, które podstawio=

wione za niewiadome x, y spełniają równanie. Wykluczamy wypadek, gdy $a=b=0$, gdyż wówczas albo nie istnieje rozwiązanie, jeżeli $c \neq 0$ albo jeżeli $c=0$ każda para liczb spełnia je.

Zakładamy, że $|a|+|b| \neq 0$.

Jeżeli więc $a \neq 0$ (lub $b \neq 0$) to obieramy dowolnie wartość na niewiadomą y (lub x), obliczamy drugą sprowadzając równanie do równania o jednej niewiadomej. Zatem równanie takie posiada nieskończenie wiele pierwiastków. Graficznie odpowiada każdemu rozwiązaniu punkt na płaszczyźnie, zbiór zaś wszystkich takich punktów, przedstawia prostą.

Weźmy pod uwagę układ dwu równań o dwu niewiadomych:

$$\begin{aligned} (I)\quad & ax+by=c \\ (II)\quad & a_1x+b_1y=c_1 \end{aligned} \Bigg\} \text{ przyczem } \begin{aligned} &|a|+|b| \neq 0 \\ &|a_1|+|b_1| \neq 0 \end{aligned}$$

Znajdźmy rozwiązanie tego układu, czyli parę liczb spełniającą równania (I) i (II). Możliwe są trzy przypadki:

1) Istnieje nieskończenie wiele pierwiastków; geometrycznie oznacza to, że proste o równaniach (I) i (II) mają nieskończenie wiele punktów wspólnych, czyli zlewają się ze sobą.

2) Istnieje jedno i tylko jedno rozwiązanie, czyli geometrycznie proste (I) i (II) przecinają się.

3) Niema żadnego rozwiązania, geometrycznie oznacza to, że proste nie mają punktów wspólnych, czyli, że są równoległe.

Ustawimy teraz kryterja algymatyczne, decydujące o tem, który z tych trzech przypadków zachodzi.

W tym celu pomnożymy równanie (I) przez b_1, równanie (II) przez liczbę b i odejmijmy je od siebie, a otrzymamy $x(ab_1 - a_1 b) = b_1 c - b c_1$, co przy pomocy wyznaczników przyjmie postać

III $x\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}$ Zdarzyć się musi jeden z przypadków, albo jest: 1) $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ albo

2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$

1) W przypadku, gdy $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ możemy podzielić przez ten wyznacznik równanie III i otrzymać:

$$(\mathrm{IV}a)\quad x = \frac{\begin{matrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{matrix}}{\begin{matrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{matrix}}$$

W podobny sposób mnożąc równania (I) i (II) odpowiednio przez a_1 i a, odejmując od siebie i dzieląc przez liczbę $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ otrzymamy:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} \quad (\overline{IV}\, b)$$

Zatem, gdy wyznacznik $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ otrzymujemy jedno tylko rozwiązanie; równania nazywamy niezależnemi.
Mianowniki wyrażeń $\overline{IV}a$ i $\overline{IV}b$ są identyczne; liczniki otrzymujemy, gdy kolumnę współczynników przy x względnie przy y we wyznaczniku $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ zastąpimy przez strony prawe c, c_1, równań I i II.

2) Jeżeli wyznacznik $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, rozróżnimy dwa przypadki:

a) Niech będzie $\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \neq 0$

Wówczas mamy $x . 0 = \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \neq 0$

Zatem nie istnieje taka liczba którąby ostatnią równość spełniała; równania I i II nie posiadają rozwiązania i nazywamy je sprzecznemi ze sobą. [Geometrycznie dają dwie proste do siebie równoległe.]

b) Niech będzie $\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$ Wówczas liczba x każdej pary liczb (x, y) [o ile takie istnieją] spełniające równanie I i II spełniają równość V $x . 0 = 0$, która jej określić nie zezwoli; gdyż każda wartość na x spełnia równanie V. Analogicznie otrzymujemy dla y

(V bis) $y . \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}$ szyli

(V ter) $y . 0 = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}$. Ponieważ założyliśmy że

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a b_1 - a_1 b = 0$$

$$\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} = b c_1 - b_1 c_1 = 0$$

Zatem (VI) $ab_1 = a_1 b$, $bc_1 = b_1 c$
Albo jest $b \neq 0$ albo $b = 0$
Jeżeli $b = 0$, to, ponieważ $|a| + |b| \neq 0$ więc $a \neq 0$, otrzymujemy z pierwszej równości:

$a \cdot b_1 = a_1 0 = 0$ więc $b_1 = 0$

Podobnie otrzymalibyśmy, że, jeżeli $b_1 = 0$, wówczas $b = 0$
Ponieważ $b = b_1 = 0$ więc każdą wartość na y można obrać.
I wtedy równania I i II dają
$ax = c$, $a_1 x = c_1$, skąd $x = \frac{c}{a}$, $x = \frac{c_1}{a_1}$ czyli $ca_1 - c_1 a = 0$ t. zn

$\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$ Gdy ten [redacted] warunek spełniony to równania I i II mają nieskończenie wiele rozwiązań.

Jeżeli zaś $b \neq 0$ a więc i $b_1 \neq 0$ mnożymy obie równości VI przez siebie, a otrzymamy:
$ab_1 bc = a_1 b b_1 c$, i dzielimy

przez $bb_1 \neq 0$ co daje
$ac = a_1c$ czyli $ac_1 - a_1c = 0$
t.j: $\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$
Zatem ($\overline{V}$ test) daje: $y \cdot 0 = 0$. Na tej więc drodze nie doszliśmy do sprzeczności, ale też nie zdołaliśmy wyliczyć liczb (x, y) spełniających równania I i $\overline{V}$.
Mamy więc $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$ Ponieważ $|a| + |b| \neq 0$ więc niech będzie $b \neq 0$, tedy $\overline{VI}$ daje $a_1 = a\frac{b_1}{b}$; połóżmy $\frac{b_1}{b} = \lambda$ to $b_1 = b\lambda$, $a_1 = a\lambda$ nadto $c_1 = c\frac{b_1}{b} = c\lambda$.
Tedy równanie II ma postać:
$\lambda(ax + by) = \lambda c$ czyli powstało z I przez pomnożenie przez λ.
Każda więc para (x, y) spełniająca I, spełnia też i II. Równania są od siebie zależne. Mają

nieskończenie wiele rozwiązań.

§ 5. Równania stopnia drugiego o jednej niewiadomej.

Ogólna postać równania stopnia drugiego jest następująca:

(I.) $ax^2+bx+c=0$

przyczem $a\neq 0$, gdyż w przeciwnym razie równanie byłoby co najwyżej stopnia pierwszego, możemy więc napisać:

(II) $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

jako równanie równoważne z równaniem (I.)

Uważajmy pierwszy i drugi wyraz za niezupełny kwadrat pewnego dwumianu i dopełnijmy go. Pierwszym wyrazem dwumianu jest x, drugim $\frac{b}{2a}$ dodajmy więc obu stronom $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, tedy otrzymamy:

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}$, skąd

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, otóż wyciąga=
gając drugi pierwiastek otrzymamy:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$(3)\quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Każda więc liczba x, spełniająca równa=
nie (1), o ile taka istnieje, spełnia równa=
nie (3), które ma dwa rozwiązania. Z kolei
wo łatwo stwierdzamy, że one też spełniają
równanie (1).

Załóżmy, że liczby a, b, c są rzeczy=
wiste, i zapytajmy, czy pierwiastki są
też rzeczywiste?

Przypadki, jakie mogą zachodzić,
zależą widocznie od wyrażenia b^2-4ac,
które nazywamy wyróżnikiem rów=
nania.

Mianowicie zajść mogą następujące
trzy przypadki:

1) wyróżnik $b^2-4ac>0$, wówczas $\sqrt{b^2-4ac}\neq 0$
i jest liczbą rzeczywistą, równanie posiada

dwa pierwiastki rzeczywiste i różne od siebie;

2) wyróżnik $b^2-4ac=0$. Równanie posiada wtedy jeden pierwiastek rzeczywisty, t. zw. podwójny;

3) wyróżnik $b^2-4ac<0$. Wtedy $\sqrt{b^2-4ac}$ jest liczbą urojoną. Równanie posiada dwa pierwiastki zespolone sprzężone.

Widzieliśmy w jaki sposób wyrażają się pierwiastki przez współczynniki równania. Odwróćmy teraz zagadnienie: Jak wyrażają się współczynniki we funkcji pierwiastków?

Napiszmy pierwiastki:

$$x_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

dodając te równości do siebie otrzymujemy:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\quad ---\ (I)$$

Biorąc zaś iloczyn pierwiastków, otrzymujemy:

$$x_1 . x_2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$ czyli

$$x_1 x_2=\frac{c}{a}\quad ----------\ (II)$$

Innemi słowy: Suma pierwiastków równa się współczynnikowi, że znakiem przeciwnym, przy niewiadomej w stopnia pierwszym, jeżeli współczynnik przy niewiadomej w stopniu drugim jest równy jedności; iloczyn zaś pierwiastków równa się wtedy, wyrazowi wolnemu, jeżeli nadto stroną prawą równania jest zero.

Jeżeli we wyrażeniach (I) i (II) zmienimy x_1 z x_2 to funkcje te nie zmienią się. Funkcje, które przy przestawieniu zmiennych nie zmieniają wartości nazywamy symetrycznemi.

Zatem wyrażenia (I) i (II) są funkcjami symetrycznemi pierwiastków.

Z równań (I) i (II) otrzymujemy:

$b = -a(x_1+x_2)$

$c = a x_1 x_2$

Podstawiając te wartości w lewą stronę równania (1), otrzymujemy:

$ax^2+bx+c = ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2 =$

$= a[x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2] =$

$= a[x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1 x_2] =$

$= a[x(x-x_1) - x_2(x-x_1)] = a(x-x_1)(x-x_2);$

Znając więc pierwiastki trójmianu stopnia II-go, przyrównanego do zera, możemy znaleźć jego rozkład na czynniki pierwsze.

N.p. Niech będzie dany trójmian: $f(x) = 8-2x-x^2$; aby go rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego przyrównujemy trójmian do zera: $8-2x-x^2=0$ i szukamy pierwiastków równania: $\cancel{x^2+2x-8=0}$. Otóż otrzymujemy: $x=-1\pm\sqrt{1+8} = -1\pm3$. Tedy pierwiastkami będą liczby: $x_1=2$, $x_2=-4$; zatem otrzymuje się rozkład:

$f(x) = 8-2x-x^2 = -(x-2)(x+4) = (2-x)(x+4).$

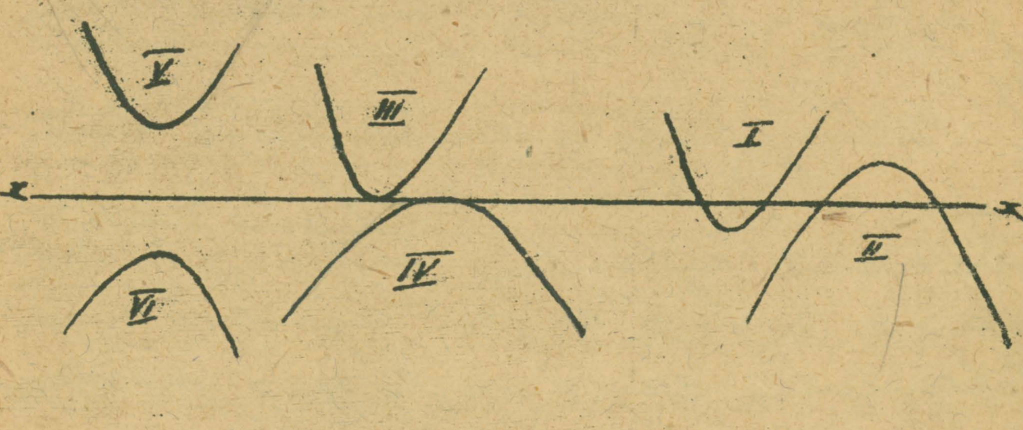
Jeżeli oba pierwiastki równania są równe, to mamy:

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$; dlatego też nazywamy wtedy pierwiastek x_1 równania podwójnym, co zachodzi w przypadku, gdy wyróżnik równania jest zerem.

Graficzne rozwiązywanie równania stopnia drugiego.

Mając rozwiązać graficznie równanie: $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$, a, b, c rzeczywiste.) rysujemy krzywą: $y=ax^2+bx+c$ i badajmy jej punkty przecięcia się z osią x-ów.

Wykres funkcji $y=ax^2+bx+c$ jest dla $a\neq 0$ parabolą o osi prostopadłej do osi x-ów. Parabola ta może mieć w stosunku do osi x-ów położenia naznaczone na rysunku.



Położenia te zależą od wyróżnika i współczynnika a.

1) Jeżeli wyróżnik jest dodatni, wówczas mamy położenie I lub II, gdyż wtedy istnieją dwa pierwiastki.

Weźmy x dowolne byle $x < x_1$ i $x < x_2$. Wtedy $(x-x_1)(x-x_2)$ będzie znaku dodatniego, gdyż każdy czynnik jest ujemny, a ponieważ:

$y = a(x-x_1)(x-x_2)$ więc znak zmiennej y zależy od znaku liczby a.

Jeżeli $a > 0$, wtedy $y > 0$. Jeżeli zaś $a < 0$, wtedy $y < 0$. Zatem, gdy $a > 0$, wtedy parabola ma kształt krzywej I; gdy zaś $a < 0$, wtedy ma kształt krzywej II.

Weźmy liczbę x dowolnie byle było $x_1 < x < x_2$. Wówczas iloczyn $(x-x_1)(x-x_2)$ ma znak ujemny, zatem gdy jest $a > 0$ to $y < 0$, co jest zgodne z położeniem I gdy $a < 0$, to $y > 0$ jak w po

Położenia I.

Naprzód weźmy $x > x_1$, $x > x_2$. Wówczas $(x-x_1)(x-x_2) > 0$ więc gdy $a > 0$, to $y > 0$ co odpowiada położeniu I, gdy zaś $a < 0$, to $y < 0$ co wskazuje na położenie II.

2) Jeżeli wyróżnik jest zerem to mamy położenie III lub IV. Wtedy bowiem.

$y = a(x-x_1)^2$

Jeżeli $a > 0$, to $y > 0$, gdy $x \neq x_1$, jest w położeniu III. Jeżeli zaś $a < 0$ i $x \neq x_1$ to $y < 0$ zgodnie z położeniem IV.

3) Jeżeli wyróżnik jest ujemny, to mamy położenie V lub VI.

Trójmian $ax^2 + bx + c$ jest wtedy albo stale dodatni albo stale ujemny.

Napiszmy go w postaci:

$$y = ax^2 + bx + c = ax^2\left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2}\right).$$

Jeżeli weźmiemy liczbę bezwzględną $|x|$ dość wielką, to $1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2} > 0$;

gdy więc $a > 0$ to dla dość wielkich liczb bezwzględnych $|x|$ będzie $y > 0$;

krzywa ma kształt IV; gdy $a<0$, to wtedy $y<0$, zgodnie z położeniem VI.

Zatem jeśli jest $a>0$ to mamy położenia I, III lub V, jeśli zaś jest $a<0$, to mamy położenia II, IV lub VI, zależnie od wyróżnika trójmianu.

Rozwiązanie trygonometryczne.

W wielu przypadkach korzystnym jest sposób trygonometryczny rozwiązania równania stopnia drugiego zwłaszcza, jeżeli współczynniki są liczbami o kilku miejscach dziesiętnych.

Sposób ten stosujemy tylko w przypadku, gdy wyróżnik: $b^2-4ac>0$.

W tym celu doprowadzamy równanie do postaci $x^2+px+q=0$ przyczem zakładamy, że jest $p\neq 0$, $q\neq 0$, gdyż przypadek $p=0$ lub $q=0$

daje się wprost rozwiązać przy pomocy tablic logarytmicznych.

Odróżniamy dwa przypadki: albo jest $q>0$, albo $q<0$

1) Niech będzie $q>0$; Połóżmy:

$x_1 = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\varphi$, gdzie φ oznacza nieznany kąt, przyczem niech będzie $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$. Kąt $\varphi \neq 0$, gdy $\varphi=0$ dałoby $x_1=0$ i wtedy mielibyśmy $q=0$, co jest sprzeczne z założeniem.

Ponieważ jest $x_1 x_2 = q$, zatem będzie: $\sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\varphi \cdot x_2 = q$ skąd $x_2 = \frac{q}{\sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\varphi} = \sqrt{q}\,\mathrm{cotg}\,\varphi$.

Wartość na pierwiastki x_1, x_2 podstawiamy w związek $x_1 + x_2 = -p$, aby otrzymać wartość na kąt φ. Otóż będzie $\sqrt{q}(\mathrm{tg}\,\varphi + \mathrm{ctg}\,\varphi) = -p$ czyli

$\mathrm{tg}\,\varphi + \mathrm{ctg}\,\varphi = \frac{-p}{\sqrt{q}}$, skąd

$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{p}{\sqrt{q}}$, co daje

$\frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = -\frac{p}{\sqrt{q}}$ czyli:

$\frac{1}{\frac{\sin 2\varphi}{2}} = -\frac{p}{\sqrt{q}}$, przeto $2 = -\frac{p}{\sqrt{q}}\sin 2\varphi$

skąd wreszcie (1) $\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$

Z równania (1) obliczamy kąt φ. Równanie to posiada rozwiązanie, ponieważ wyróżnik $p^2 - 4q > 0$, zatem jest $p^2 > 4q > 0$, skąd $|p| > 2\sqrt{q}$, co daje $1 > \frac{2\sqrt{q}}{|p|}$; a więc $|\sin 2\varphi| < 1$.

Równanie (1) dostarczy nam dwa pierwiastki na kąt φ, które jednak dadzą tę samą parę liczb x_1, x_2 tylko z przestawionemi wskaźnikami.

Ponieważ jest $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, to $-\pi < 2\varphi < \pi$. Nadto, gdy kąt φ_0 spełnia równanie (1), to spełnia je także kąt φ_1 taki, że $2\varphi_1 = \pi - 2\varphi_0$, skąd $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_0$. Gdy więc $x_1 = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\varphi_0$, $x_2 = \sqrt{q}\,\mathrm{ctg}\,\varphi_0$, to $\sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\varphi_1 = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) = \sqrt{q}\,\mathrm{ctg}\,\varphi_0 = x_2$, zaś $\sqrt{q}\,\mathrm{ctg}\,\varphi_1 = \sqrt{q}\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\varphi_0 = x_1$.

Kąt φ_1 daje więc tę samą parę liczb x_1, x_2, co kąt φ_0, tylko w innym porządku.

2) Niech teraz będzie $q < 0$. Podstawiamy:

$x_1 = \sqrt{-q}\,\mathrm{tg}\varphi$, albowiem $-q>0$; znów $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$. Zatem związek $x_1 x_2 = q$ czyli $\sqrt{-q}\,\mathrm{tg}\varphi \cdot x_2 = q$ daje:

$$x_2 = \frac{q}{\sqrt{-q}\,\mathrm{tg}\varphi} = -\frac{-q}{\sqrt{-q}\,\mathrm{tg}\varphi} = -\frac{\sqrt{-q}}{\mathrm{tg}\varphi} = -\sqrt{-q}\,\mathrm{ctg}\varphi.$$

Wstawiając te wartości w związek $x_1 + x_2 = -p$ otrzymamy:

$\sqrt{-q}(\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{ctg}\varphi) = -p$ co daje:

$\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{ctg}\varphi = \frac{-p}{\sqrt{-q}}$ czyli

$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{-p}{\sqrt{-q}}$ albo

$\frac{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{\sin\varphi \cdot \cos\varphi} = -\frac{p}{\sqrt{-q}}$ czyli ze względu na związki: $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$, otrzymamy

$2\frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} = -\frac{p}{\sqrt{-q}}$ czyli $\mathrm{ctg}\,2\varphi = -\frac{p}{2\sqrt{-q}}$ ... (2)

Otrzymane stąd dwie wartości na φ dadzą dwie pary wartości na pierwiastki x_1, x_2, ale identyczne. Skoro jest $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, tedy $-\pi < 2\varphi < \pi$. Nadto, gdy kąt φ_0 spełnia równanie (2) to spełnia je także taki kąt φ_1, że $2\varphi_1 = 2\varphi_0 - \pi$ skąd $\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$. Jeżeli więc $x_1 = \sqrt{-q}\,\mathrm{tg}\,\varphi_0$, $x_2 = \sqrt{-q}\,\mathrm{ctg}\,\varphi_0$, wtedy jest

$$\sqrt{-q}\,\mathrm{tg}\,\varphi_1 = \sqrt{-q}\,\mathrm{tg}\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{-q}\,\mathrm{ctg}\,\varphi_0 = x_2,$$

$$-\sqrt{-q}\,\mathrm{ctg}\,\varphi_1 = -\sqrt{-q}\,\mathrm{ctg}\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{-q}\,\mathrm{tg}\,\varphi_0 = x_1$$

Kąt φ_1 daje więc tę samą parę pierwiastków, co kąt φ_0, tylko w innym porządku.

Aby więc rozwiązać równanie $x^2+px+q=0$ trygonometrycznie w przypadku $p^2-4q \geq 0$, $p \neq 0$, $q \neq 0$, rozwiązujemy równanie (1) lub (2) i obliczamy pierwiastki równania na podstawie związków:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\varphi \\ x_2 &= \sqrt{q}\,\mathrm{ctg}\,\varphi \end{aligned}\right\} \text{ lub } \left\{\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{-q}\,\mathrm{tg}\,\varphi \\ x_2 &= -\sqrt{-q}\,\mathrm{ctg}\,\varphi \end{aligned}\right.$$

§6. Równania stopnia trzeciego.

Ogólna postać równania stopnia

trzeciego jest:

$ax^3+bx^2+cx+d=0$, gdzie liczba $a\neq 0$.

Dzieląc równanie przez liczbę a, otrzymujemy: $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$

Oznaczmy dla krótkości:

$\alpha=\frac{b}{a}$, $\beta=\frac{c}{a}$, $\gamma=\frac{d}{a}$. Równanie jest więc postaci:

$x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

Sprowadzamy równanie do tak zwanej postaci normalnej, to znaczy do postaci w której nie ma wyrazu z niewiadomą w stopniu drugim. Mianowicie podstawiamy $x=y+h$, gdzie h oznacza liczbę, którą należy tak dobrać, by równanie w niewiadomej y nie zawierało wyrazu y^2, czyli by współczynnik przy wyrazie y^2 był zerem.

Wstawiając mamy:

$(y+h)^3+\alpha(y+h)^2+\beta(y+h)+\gamma=0$ czyli

$y^3+3y^2h+3yh^2+h^3+\alpha(y^2+2yh+h^2)+\beta y+$

$+\beta h+\gamma=0$; porządkując otrzymamy
$y^3+y^2(3h+\alpha)+y(3h^2+2\alpha h+\beta)+(h^3+\alpha h^2+\beta h+\gamma)=$
$=0$.

Szukaną wartość na liczbę h wyzna=
czamy z warunku: $3h+\alpha=0$ co da=
je $h=-\frac{\alpha}{3}$.

Otrzymamy w ten sposób równanie
postaci normalnej, nie zawiera=
jące więc niewiadomej y^2; rów=
nanie napiszemy w postaci:
(I) $y^3+py+q=0$, gdzie p i q ozna=
czają liczby.

Dla rozwiązania równania (I) u=
żyjemy metody Eulera. Odróż=
niamy dwa przypadki: albo
jest $p\neq0$, albo jest $p=0$.

1) Niech będzie $p=0$. Równanie
jest postaci $y^3+q=0$; jest to tak
zwane równanie dwumienne.

Załóżmy, że liczba q jest rzeczy=
wistą. Przypadek $q=0$, jako zbyt

łatwy pomijamy. Zakładamy $q \neq 0$. Zawsze znajdziemy liczbę rzeczywistą z taką, że jest $z^3 = -q$.

W ten sposób otrzymamy jeden pierwiastek równania.

Aby znaleźć te pierwiastki podzielmy dwumian:
$y^3 + q = y^3 + z^3$ przez czynnik pierwiastkowy $(y - z)$. Otóż dzielenie daje: $(y^3 + z^3) : (y - z) = y^2 - zy + z^2$.

Zatem jest
$y^3 + z^3 = (y - z)(y^2 - zy + z^2) = 0$. Jeden pierwiastek $y_1 = z$ jużeśmy otrzymali, pozostałe dwa otrzymamy z równania stopnia drugiego: $y^2 - zy + z^2 = 0$

Ponieważ wyróżnik tego równania jest $z^2 - 4z^2 = -3z^2$, a więc ujemny, przeto równanie ma dwa pierwiastki zespolone i sprzężone ze sobą.

2) Niech będzie $p \neq 0$, i $q \neq 0$.

Gdyż przypadek $p \neq 0$, $q = 0$ jest

bardzo łatwy do rozwiązania.

Podstawiamy $y = u+v$. Ponieważ zamiast jednej niewiadomej y mamy teraz dwie u, v, zatem musimy na nie położyć pewne warunki, aby je znaleźć. Równanie (I) przejdzie w równanie

$$(u^3+3u^2v+3uv^2+v^3)+p(u+v)+q=0$$

czyli $u^3+v^3+(u+v)(3uv+p)+q=0$

Przyjmijmy warunek:

$3uv+p=0$. Sprowadzamy przez to przypadek ten do przypadku poprzedniego. Mamy znaleźć liczby u, v z równań:

$u^3+v^3+q=0$; i $3uv+p=0$.

Ale $u \neq 0$, $v \neq 0$, gdyż w przeciwnym razie drugie z tych równań daje $p=0$, co jest sprzeczne z założeniem.

Zatem $v = \frac{-p}{3u}$, co podstawiamy w pierwsze z równań:

$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0$; mnożymy je przez u^3, przez co otrzymujemy:

$u^6 - \frac{p^3}{27} + qu^3 = 0$, czyli $u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$.

Podstawiając $u^3 = \xi$ mamy

$\xi^2 + q\xi - \frac{p^3}{27} = 0$ . . . . (II)

Równanie drugie nazywamy równaniem rozwiązującem, resolwentą równania (I); ono ma współczynniki rzeczywiste, gdyż założyliśmy, że liczby p, q są rzeczywiste.

Rozwiązując równanie (II) otrzymamy na pierwiastki ξ albo rozwiązania rzeczywiste, albo zespolone sprzężone.

a) Rozwiązania na pierwiastki ξ są rzeczywiste, gdy wyróżnik równania (II) czyli wyrażenie $H = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$.

Otrzymujemy wtedy liczby $\xi_{1,2}$, liczby rzeczywiste. Weźmy pod uwagę liczbę ξ_1. Wtedy $u^3 = \xi_1$, czyli otrzymamy:

$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$; to równanie ma jeden rzeczywisty pierwiastek: $u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

Obliczmy teraz v_1; otóż:

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1} = -\frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}} =$$

$$= -\frac{p\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}} =$$

$$= \frac{-p\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}{-3\frac{p}{3}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Zatem pierwiastek równania (I):

$$y_1 = u_1+v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Liczba y_1 jest rzeczywistą; wzór na liczbę y_1 nazywa się wzorem Cardana.

Pozostałe pierwiastki u_2, u_3, które będą zespolone pozwolą znaleźć pierwiastki y_2, y_3, które będą zespolone i sprzężone ze sobą.

Gdybyśmy rozwiązali równanie $u^3 = \xi_2$, otrzymalibyśmy wyniki te same, tylko w innym porządku.

b) Niech będzie $H<0$.

Równanie (I) ma pierwiastki zespolone, otrzymamy wtedy — jak się poniżej przekonamy — na y trzy pierwiastki rzeczywiste; jednak nie można ominąć liczb zespolonych, dlatego wypadek ten nazywa się casus irreducibilis (przypadek nie przywiedny).

Pierwiastki znajdujemy w tym przypadku drogą trygonometryczną. W tym celu znajdujemy pierwiastki równania (II) w postaci trygonometrycznej, a mianowicie: Oznaczmy pierwiastki zespolone równania (II) następująco: $\xi_1 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\xi_2 = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, one bowiem są zespolone i sprzężone ze sobą. Aby wyznaczyć liczby ρ i φ, korzystamy ze związków, że $\xi_1 + \xi_2 = -Q$, $\xi_1 \cdot \xi_2 = -\frac{p^3}{27}$; podstawienie w te związki daje:

$\rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi + \rho\cos\varphi - i\rho\sin\varphi = -Q$

$\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot\rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = -\frac{p^3}{27}$. Czyli po wykonaniu działań:

$2\rho\cos\varphi = -Q$, $\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = -\frac{p^3}{27}$.

Ponieważ $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, więc z drugiego z tych związków otrzymujemy ρ: $\rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$, gdyż ρ jako moduł (bezwzględna wartość) liczby zespolonej jest liczbą nieujemną.

Pozostaje jeszcze zbadać, czy liczba pod pierwiastkiem jest nieujemna, gdyż ρ jest liczbą rzeczywistą. Otóż jest

$\Delta < 0$, czyli $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ ale $\frac{q^2}{4}\geq 0$, zatem odejmując obustronnie $\frac{p^3}{27}$ mamy: $0\leq\frac{q^2}{4}<-\frac{p^3}{27}$, a więc jest $0<-\frac{p^3}{27}$, przeto ϱ oznacza rzeczywiście liczbę rzeczywistą.

Znalaźliśmy liczbę ϱ, otrzymujemy kąt φ ze związku: $\cos\varphi = \frac{-q}{2\varrho} = -\frac{q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}$.

Zanim znajdziemy wartości na liczbę u, znając już liczbę ϱ w postaci trygonometrycznej udowodnimy twierdzenie pomocnicze.

__Twierdzenie__. Jeżeli dwa kąty mają tę własność, że ich sinus i cosinus są równe to różnica ich jest wielokrotnością parzystą kąta π czyli

Jeżeli jest $\left\{\begin{array}{l}\cos\varphi=\cos\psi\\ \sin\varphi=\sin\psi\end{array}\right\}$ to jest

$\varphi-\psi=2s\pi$ gdzie s oznacza liczbę całkowitą.

__Dowód__. Wedle założenia jest $\cos\varphi-\cos\psi=0$, $\sin\varphi-\sin\psi=0$ a więc $\cancel{-2s}$

$-2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi-\psi}{2}=0$,

$2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}=0$ czyli

$\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}=0,$

$\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}=0$. Możemy więc mieć cztery przypadki:

Albo I $\left\{\begin{array}{l}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}=0\\ \cos\frac{\varphi+\psi}{2}=0\end{array}\right\}$ co niemożliwe, gdyż $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, dla każdego kąta α, więc także dla kąta $\alpha=\frac{\varphi+\psi}{2}$. Albo II $\sin\frac{\varphi+\psi}{2}=0$ i $\sin\frac{\varphi-\psi}{2}=0$, albo III $\sin\frac{\varphi-\psi}{2}=0$, $\cos\frac{\varphi+\psi}{2}=0$,

albo IV $\sin\frac{\varphi-\psi}{2}=0$

Przypadek II i III sprowadzają się ze względu na równość $\sin\frac{\varphi-\psi}{2}=0$ do przypadku IV, wobec czego wystarczy zająć się przypadkiem IV. W przypadku IV otrzymujemy $\frac{\varphi-\psi}{2}=s\pi$, gdzie s oznacza liczbę całą, czyli $\varphi-\psi=2s\pi$, co mieliśmy okazać.

Rozwiążmy teraz równanie $u^3=\xi$, połóżmy w tym celu $u=\sigma(\cos\psi+i\sin\psi)$, gdzie σ oznacza moduł, ψ argument liczby zespolonej u.

Wiemy, że $u^2=\sigma^2[\cos(\psi+\psi)+i\sin(\psi+\psi)]=$ $=\sigma^2(\cos 2\psi+i\sin 2\psi)$. Zatem $u^3=u^2u=$

$= \sigma^3[\cos(2\psi+\psi) + i \sin(2\psi+\psi)] = \sigma^3(\cos 3\psi + i \sin 3\psi)$

Mamy więc rozwiązać równanie:

$\sigma^3(\cos 3\psi + i \sin 3\psi) = \varrho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ czyli

$\sigma^3 \cos 3\psi + i\sigma^3 \sin 3\psi = \varrho\cos\varphi + i\varrho\sin\varphi$.

Ponieważ liczby zespolone są równe tylko wtedy, gdy części rzeczywiste i urojone są odpowiednio sobie równe, więc

$\sigma^3 \cos 3\psi = \varrho\cos\varphi$, $\sigma^3 \sin 3\psi = \varrho\sin\varphi$

podnosząc do kwadratu i ~~dodając~~ odejmując mamy $\sigma^6 = \varrho^2$ skąd $\sigma = \varrho^{\frac{2}{6}} = \varrho^{\frac{1}{3}}$, wstawiając tę wartość na σ w oba równania otrzymujemy $\varrho\cos 3\psi = \varrho\cos\varphi$, $\varrho\sin 3\psi = \varrho\sin\varphi$ ponieważ jest $\varrho > 0$, więc możemy podzielić (przez) ostatnią równość przez ϱ: otrzymujemy $\cos 3\psi = \cos\varphi$, $\sin 3\psi = \sin\varphi$. Stosując teraz twierdzenie powyższe wyciągamy równość: $3\psi - \varphi = 2s\pi$, skąd wynika $3\psi = 2s\pi + \varphi$, a więc $\frac{\varphi}{3} + \frac{2s\pi}{3} = \psi$, gdzie s oznacza liczbę całkowitą. Dla $s = 0, 1, 2$, otrzymamy trzy różne wartości na kąt ψ, zaś dla innych wartości na liczbę s, otrzymamy wartości na

kąt φ, różne od tych o wielokrotności liczby
2π, a więc dla nich liczba u jest ta sama,
gdyż $u = \rho^{\frac{1}{3}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2s\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2s\pi}{3}\right)\right]$.
tedy:

$s=0$ otrzymujemy $u_1 = \rho^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right)$

$s=1$ — " — $u_2 = \rho^{\frac{1}{3}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right)\right]$

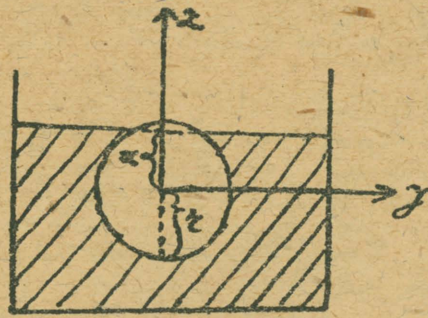
$s=2$ — " — $u_3 = \rho^{\frac{1}{3}}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right)\right]$.

Znając liczby u, obliczamy liczbę v i otrzymujemy stąd wartości dla y. Będzie
$v_1 = -\frac{p}{3u_1} = -\frac{p}{3\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right)}$, ale $\sqrt[3]{\rho} = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}} =$
$= \sqrt{\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}} = \sqrt{-\frac{p}{3}}$ przeto $-\frac{p}{3\sqrt[3]{\rho}} =$
$= -\frac{p}{3\sqrt{-\frac{p}{3}}} = +\sqrt{-\frac{p}{3}} = \sqrt[3]{\rho}$. Wobec tego $v_1 =$
$= \frac{\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{3}-i\sin\frac{\varphi}{3}\right)}{\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right)\left(\cos\frac{\varphi}{3}-i\sin\frac{\varphi}{3}\right)} =$

$= \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{3}-i\sin\frac{\varphi}{3}\right)$. Stąd $y_1 = u_1+v_1 =$
$= \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right)+\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{3}-i\sin\frac{\varphi}{3}\right) =$
$2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\varphi}{3}$. Podobnie $y_2 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right)$,
$y_3 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right)$. Wszystkie więc pierwiastki na y są rzeczywiste. Rozwiązując równanie $u^3 = \xi_2$ dostalibyśmy te same pierwiastki; ale tylko

w innym porządku.

Przykład. Kula z materjału o ciężarze właściwym δ pływa po wodzie. (Jest więc $0<\delta<1$.) Do jakiej głębokości zanurzy się kula?



Według prawa Archimedesa, ciało zanurza się do takiej głębokości, aż ciężar wody wypartej będzie równy ciężarowi ciała zanurzonego. Oznaczmy odległość środka kuli od płaszczyzny swobodnej powierzchni przez x. Ciężar wody wypartej będzie $q=\delta_0 v$ gdzie v oznacza objętość części zanurzonej. Dla wody wypartej ($\delta_0=1$) mamy $q=v=\pi\int_{-r}^{x} y^2 dz$, przyjmując, że kula powstała przez obrót półkola na osi z. Mamy więc wedle prawa Archimedesa $\pi\int_{-r}^{x} y^2 dz=\frac{4}{3}r^3\pi\delta$ ale równanie koła jest $y^2+z^2=r^2$ stąd $y^2=r^2-z^2$ zatem:

$\int_{-r}^{x}(r^2-z^2)\,dz = \frac{4}{3}r^3\delta$. Ale jest $\int_{-r}^{x}(r^2-z^2)\,dz =$
$=\left(r^2z-\frac{z^3}{3}\right)_{-r}^{x} = r^2x-\frac{x^3}{3}+r^3-\frac{r^3}{3} = r^2x-\frac{x^3}{3}+\frac{2r^3}{3}$.
Podstawiamy tę wartość i otrzymujemy:
$r^2x-\frac{x^3}{3}+\frac{2r^3}{3}=\frac{4}{3}r^3\delta$, co daje:
$x^3-3r^2x+2(2\delta-1)r^3=0$. Otrzymaliśmy równanie normalne stopnia III go. Tworzymy wyróżnik H równania rozwiązującego: $H=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ przyczem jest $p=-3r^2$; $q=2(2\delta-1)r^3$. Tedy jest $H=(2\delta-1)^2r^6-r^6=$
$=[(2\delta-1)^2-1]r^6$. Zależnie od wartości liczby δ otrzymamy casus irreductibilis lub nie. Weźmy n.p. $\delta=\frac{1}{2}$ to będzie $H=(-1)r^6=-r^6<0$ mamy więc casus irreductibilis. Ale wtedy $q=$
$=2(2\cdot\frac{1}{2}-1)r^3=0$ więc mamy
$x^3-3r^2x=0$ czyli $x(x^2-3r^2)=0$ i otrzymujemy $x_1=0$, ponadto $x^2=3r^2$, co daje $x_2=r\sqrt{3}$, $x_3=-r\sqrt{3}$; ponieważ ~~(pierwiastek~~) $\sqrt{3}=1{\cdot}73205>1$ więc będzie $|x_2|>r$, $|x_3|>r$ tedy pierwiastki nie mają znaczenia fizycznego. Pierwiastek $x_1=0$, orzeka, że kula

zmniejszy się do połowy, co można było przewidzieć, skoro jest $\delta = \frac{1}{2}$.

Własności równania stopnia trzeciego.

Weźmy równanie (1) $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ o dowolnych współczynnikach α, β, γ (niekoniecznie rzeczywistych.)

Twierdzenie. Lewa strona równania stopnia trzeciego (1) jest podzielna przez każdy swój czynnik pierwiastkowy.

Dowód. Weźmy czynnik $(x-x_1)$. Przez podzielenie lewej strony równania (1) otrzymamy iloraz I i resztę r. tedy:

(2) $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma = (x-x_1)I+r$, r jako reszta jest stopnia [~~(niższego) zerowego~~] mniejszego od stopnia dzielnika, a więc jest stopnia zerowego czyli liczbą stałą. Podstawmy w równości (2): $x=x_1$ a otrzymamy:

$$\underbrace{x_1^3+\alpha x_1^2+\beta x_1+\gamma}_{=0} = \underbrace{(x_1-x_1)}_{=0}I+r$$

Zatem jest $r=0$, co mieliśmy wykazać. Jeżeli x_2, x_3 są dalszemi pierwiastkami równania to możemy napisać: $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma =$
$= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3 - x^2(x_1+x_2+x_3) +$
$+ x(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) - x_1x_2x_3$.

Ta równość jest identycznością, bo zachodzi dla wszystkich wartości na liczbę x, zatem współczynniki muszą być równe, co daje; $\alpha = -(x_1+x_2+x_3)$
$\beta = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$
$\gamma = -x_1x_2x_3$.

Zatem współczynniki równania są funkcjami symetrycznemi pierwiastków; współczynnik przy niewiadomej ~~x~~ w stopniu drugim jest sumą pierwiastków ze znakiem przeciwnym, współczynnik przy niewiadomej w stopniu pierwszym jest sumą kombinacji drugiej klasy z pierwiastków równania, zaś wyraz wolny ~~ze~~ jest iloczynem funkcja wymierna

pierwiastków ze znakiem przeciwnym.

Dla funkcji pierwiastków zachodzi:

Twierdzenie. Każda funkcja wymierna i symetryczna pierwiastków równania da się wyrazić wymiernie przez współczynniki równania.

Przy pomocy tego twierdzenia, którego dowód pomijamy, możemy rozwiązać następujące zagadnienie:

Mając dane równanie

(1) $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ możemy bez rozwiązania go utworzyć nowe równanie, także stopnia trzeciego, którego pierwiastki byłyby kwadratami pierwiastków równania danego. Równanie to będzie postaci:

(3) $y^3+ay^2+by+c=0$ przyczem będzie: $a=-(y_1+y_2+y_3)$

$b=y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3$

$c=-y_1y_2y_3$. Jeżeli y_1, y_2, y_3, są pierwiastkami równania (3).

157.

Wedle założenia $y_1 = x_1^2$; $y_2 = x_2^2$; $y_3 = x_3^2$, jeżeli x_1, x_2, x_3 oznaczają pierwiastki danego równania (1).

Zatem: $a = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$

$b = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2$

$c = -x_1^2 x_2^2 x_3^2$

Współczynniki a, b, c są więc funkcjami wymiernemi, całkowitemi i symetrycznemi pierwiastków x_1, x_2, x_3 możemy je więc wyrazić wymiernie zapomocą współczynników α, β, γ. Rzeczywiście jest $-(x_1 + x_2 + x_3) = \alpha$ podnosząc do kwadratu wszystkiemy:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = \alpha^2$,

a więc $-a + 2\beta = \alpha^2$ skąd wynika $a = 2\beta - \alpha^2$; podobnie jest

$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \beta$, podnosząc do kwadratu otrzymujemy:

$x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 + 2(x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2) = \beta^2$ a więc $b + 2(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 x_3) = \beta^2$ czyli $b = \beta^2 - 2\alpha\gamma$, wreszcie

$e = -x_1^2 x_2^2 x_3^2 = -(x_1 x_2 x_3)^2 = -\gamma^2$

Zatem szukane równanie jest postaci: $y^3 + (2\beta - \alpha^2) y^2 + (\beta^2 - 2\alpha\gamma) y - \gamma^2 = 0$

Znaleźliśmy je nie rozwiązawszy danego równania (1).

§7. Równania stopnia czwartego.

Ogólna postać równania stopnia czwartego jest:

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ przyczem jest liczba $a \neq 0$

Podzielmy równanie przez liczbę a i otrzymamy:

$x^4 + \frac{b}{a} x^3 + \frac{c}{a} x^2 + \frac{d}{a} x + \frac{e}{a} = 0$, oznaczając $\alpha = \frac{b}{a}$, $\beta = \frac{c}{a}$, $\gamma = \frac{d}{a}$, $\delta = \frac{e}{a}$, otrzymamy równanie:

$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$

Równania to da się zawsze sprowadzić do postaci normalnej to znaczy postaci bez niewiadomej w stopniu trzecim.

W tym celu podstawiamy $x = y+h$, przyczem liczbę h obieramy tak by równanie na y nie zawierało wyrazu y^3.

$$(y+h)^4 + \alpha(y+h)^3 + \beta(y+h)^2 + \gamma(y+h) + \delta = 0$$

czyli:

$$y^4 + \binom{4}{1}y^3h + \binom{4}{2}y^2h^2 + \binom{4}{3}yh^3 + \binom{4}{4}h^4 +$$
$$+\alpha(y^3 + 3y^2h + 3yh^2 + h^3) + \beta(y^2 + 2yh + h^2) +$$
$$\gamma y + \gamma h + \delta = 0.$$

Porządkując według potęg y otrzymamy:

(1) $y^4 + y^3(4h+\alpha) + y^2(6h^2 + 3\alpha h + \beta) +$
$+ y(4h^3 + 3\alpha h + 2\beta h + \gamma) + (h^4 + \alpha h^3 + \beta h^2 +$
$+ \gamma h + \delta) = 0.$

Dobieramy tak liczbę h, aby było $4h+\alpha = 0$ tedy: $h = -\frac{\alpha}{4}$. Otrzymujemy więc równanie nie zawierające wyrazu y^3:

(2) $y^4 + py^2 + qy + r = 0$, gdzie p, q, r oznaczają wartości nawiasów w równaniu (1) dla $h = -\frac{\alpha}{4}$.

Zawsze więc możemy sprowadzić równanie stopnia IV tego do postaci normalnej. Gdy $q = 0$, równanie (2) jest dwukwadratowem i podstawienie $y^2 = \xi$ prowadzi do równania stopnia drugiego.

Podobnie gdy $r = 0$, otrzymujemy jeden pierwiastek $y_1 = 0$ i równanie stopnia 3-go normalne $y^3 + py + q = 0$. Załóżmy więc że $q \neq 0$, $r \neq 0$.

Dla rozwiązania tego równania użyjemy metody Eulera.

Podobnie jak w równaniu stopnia 3-go podstawimy za niewiadomą sumę: (3) $y = u + v + w$ i nałożymy na niewiadome u, v, w pewne warunki. Podnosimy równość (3) do kwadratu:

$$y^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + vw),$$

$$y^2 - (u^2 + v^2 + w^2) = 2(uv + uw + vw).$$

Ostatnią równość podnosimy znowu do kwadratu:

$$y^4 - 2y^2(u^2 + v^2 + w^2) + (u^2 + v^2 + w^2)^2 =$$
$$= 4\{u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 + 2(u^2vw + uv^2w + uvw^2)\},$$

przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę i otrzymujemy:

$y^4-2y^2(u^2+v^2+w^2)-8uvw(u+v+w)+(u^2+v^2+w^2)^2-$
$-4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)=0$

Uwzględniając podstawienie (3), mamy więc

(4) $y^4-2y^2(u^2+v^2+w^2)-8uvwy+(u^2+v^2+w^2)-$
$-4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)=0$

Zapytajmy jak należy dobrać liczby u, v, w by równanie (2) było identyczne z równaniem (4).

Ażeby właśnie równanie (4) było identyczne z równaniem (2) trzeba i wystarcza, żeby współczynniki obu równań były odpowiednio sobie równe: $p=-2(u^2+v^2+w^2)$, $q=-8uvw$, $r=(u^2+v^2+w^2)^2-4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)$.

Zatem liczby u, v, w mają spełniać równania:

$$(5)\begin{cases} u^2+v^2+w^2=-\dfrac{p}{2} \\ u^2v^2w^2=\dfrac{q^2}{64} \\ u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2=\dfrac{(u^2+v^2+w^2)^2}{4}-\dfrac{r}{4}=+\dfrac{p^2}{16}-\dfrac{r}{4} \end{cases}$$

Środkowe z równań (5) otrzymaliśmy przez podniesienie do kwadratu równania (6) $u.v.w=-\dfrac{q}{8}$.

Dla liczb u^2, v^2, w^2 mamy ich sumę, sumę iloczynów po dwa i ich iloczyn; czynią więc liczby u^2, v^2, w^2, zadość równaniu stopnia 3go, którego współczynniki są nam znane. Widzimy tedy, że trzy kwadraty u^2, v^2, w^2 są pierwiastkami równania stopnia trzeciego.

(7) $\xi^3 + \frac{p}{2}\xi^2 + \left(\frac{p}{16} - \frac{r}{4}\right)\xi - \frac{q^2}{64} = 0$

Sprowadziliśmy więc rozwiązanie równania (2) do rozwiązania równania (7), które potrafimy już rozwiązać. Znalazłszy pierwiastki ξ_1, ξ_2, ξ_3 równania (7) obliczymy u, v, w, ze związków: $u^2 = \xi_1$, $v^2 = \xi_2$, $w^2 = \xi_3$.

Otrzymamy po dwie wartości na każdą z liczb u, v, w, (ponieważ $q \neq 0$, więc $\xi_1 \neq 0$, $\xi_2 \neq 0$, $\xi_3 \neq 0$)

Ale mamy wartości u, v, w, obrać z takim znakiem by spełniały równość:

(6 bis) $q = -8uvw$.

Otrzymamy w ten sposób na y cztery pierwiastki. Będzie tedy $y_1 = u_0 + v_0 + w_0$, jeżeli $u_0^2 = \xi_1$, $v_0^2 = \xi_2$, $w_0^2 = \xi_3$, $u_0 v_0 w_0 = -\frac{q}{8}$, ale ostatecznie warunki będą spełnione, gdy przyjmiemy $u_0, -v_0, -w_0$ lub $-u_0, v_0, -w_0$, lub wreszcie $-u_0, -v_0, w_0$ zamiast u_0, v_0, w_0. Będą tedy dalsze pierwiastki: $y_2 = u_0 - v_0 - w_0$, $y_3 = -u_0 + v_0 - w_0$, $y_4 = -u_0 - v_0 + w_0$. Pierwiastki te mogą być rzeczywiste lub zespolone.

Przykład. Niech będzie dane równanie stopnia czwartego: $x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x - 4 = 0$

Podstawiamy $x = y + 2$, Otrzymamy:
$(y+2)^4 - 8(y+2)^3 + 18(y+2)^2 - 8(y+2) - 4 = 0$ Skąd po wykonaniu działań wynika równanie normalne i zarazem dwukwadratowe:
$y^4 - 6y^2 + 4 = 0$. Kładąc $y^2 = z$ otrzymujemy równanie stopnia drugiego:
$z^2 - 6z + 4 = 0$, które ma pierwiastki rzeczywiste $z = 3 \pm \sqrt{5}$ skąd $y^2 = 3 \pm \sqrt{5}$ więc
$y_1 = \sqrt{3+\sqrt{5}}$, $y_2 = -\sqrt{3+\sqrt{5}}$, $y_3 = \sqrt{3-\sqrt{5}}$, $y_4 = -\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

Wyrażenia te można przekształcić na sumę dwóch pierwiastków.

Łączy się to przekształcenie z następującem zagadnieniem algebraicznem: Niech będą dane liczby dodatnie a i b i wymierne, znaleźć liczby wymierne nieujemne ξ, η takie, iż jest $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\xi} + \sqrt{\eta}$. Zagadnienie to nie zawsze jest rozwiązalne.

Otrzymujemy: $a+\sqrt{b} = \xi + \eta + 2\sqrt{\xi\eta}$. Niech $\sqrt{b}$ będzie liczbą niewymierną. Tedy ostatnia równość daje $a = \xi + \eta$, $b = 4\xi\eta$, skąd $a^2 - b = (\xi - \eta)^2$. Jeżeli $\xi \geq \eta$, to $\xi - \eta = \sqrt{a^2-b}$, ale różnica dwóch liczb wymiernych ξ, η musi być wymierną, tedy $\sqrt{a^2-b}$ ma być liczbą wymierną; jest to warunek konieczny ale i wystarczający rozwiązalności zagadnienia: Jest $\xi = \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}$, $\eta = \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$.

Powyżej $a = 3$, $b = 5$.

Dla równania stopnia czwartego zachodzi twierdzenie:

<u>Twierdzenie</u> Lewa strona równania $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ jest podzielną przez każdy czynnik pierwiastkowy i równa się ich iloczynowi: $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$. Wykonując po prawej stronie mnożenie i porównując współczynniki otrzymamy funkcje symetryczne:

$$\alpha = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$\beta = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

$\gamma = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)$

$\delta = x_1x_2x_3x_4$.

A więc współczynniki $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ są kombinacjami I, II, III względnie IV tej. klasy z czterech elementów x_1, x_2, x_3, x_4.

§ 8. Równanie algebraiczne stopnia n-tego

D'Alambert udowodnił niezmiernie ważne twierdzenie zwane podstawowem twierdzeniem algebry.

Twierdzenie. Każde równanie algebraiczne stopnia dowolnego posiada przynajmniej jeden pierwiastek.

Dowód tego twierdzenia pomijamy.

Na podstawie tego twierdzenia łatwo wykazać drugie ważne twierdzenie, będące uzupełnieniem poprzedniego.

Twierdzenie. Każde równanie stopnia n-tego posiada dokładnie n pierwiastków albo ściślej: Lewa strona równania algebraicznego stopnia n-tego, którego pierwsza strona jest zerem, daje się rozłożyć na czynników stopnia pierwszego.

Dowód. Oznaczmy lewą stronę równania przez $W_n(x)$, gdzie jest:

$$W_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n \;;$$

przeto równanie ma postać: $W_n(x) = 0$

Wiemy z podstawowego twierdzenia algebraicznego, że równanie to posiada przynajmniej jeden pierwiastek α_1; podzielmy $W_n(x)$ przez różnicę $(x-\alpha_1)$; będzie:

$W_n(x) = \mathcal{I}_{n-1}(x)(x-\alpha_1) + R_n$, gdzie $\mathcal{I}_{n-1}(x)$ jest wielomianem stopnia $(n-1)$go, reszta zaś R_n jest stopnia zerowego, czyli stałą. Dla wyznaczenia tej stałej, położmy $x = \alpha_1$, otrzymamy:

$W_n(\alpha_1) = \mathcal{I}_{n-1}(\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_1) + R_n$, ale α_1 jest pierwiastkiem, więc $W_n(\alpha_1) = 0$, zatem $0 = \mathcal{I}_{n-1}(\alpha_1)\cdot 0 + R_n$, stąd $R_n = 0$

Otrzymaliśmy więc ostatecznie:

$W_n(x) = (x-\alpha_1)\,\mathcal{I}_{n-1}(x)$. Rozumując dalej tak samo nad $\mathcal{I}_{n-1}(x)$ i t.d. otrzymamy:

$\mathcal{I}_{n-1}(x) = (x-\alpha_2)\cdot\mathcal{I}_{n-2}(x)$

- - - - - - - - - - - - - - - -

$\mathcal{I}_2(x) = (x-\alpha_{n-1})\,\mathcal{I}_1(x)$

$\mathcal{I}_1(x) = (x-\alpha_n)$

A więc $W_n(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)$ przyczem niektóre liczby α_k a nawet wszystkie mogą być równe. Jeżeli p pierwiastków jest równych, mówimy, że to jest pierwiastek p-krotny, a mianowicie α_1 jest p-krotnym pierwiastkiem, gdy.

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{p-1} = \alpha_p$ zaś

$\alpha_{p+1} \neq \alpha_1, \alpha_{p+2} \neq \alpha_1, \alpha_{p+3} \neq \alpha_1, \dots \alpha_n \neq \alpha_1$,

że liczby te $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ są pierwiastkami wynika stąd, że kładąc $x = \alpha_k$ otrzymamy

$$W_n(\alpha_k) = 0$$

Zatem udowodniliśmy twierdzenie w obu postaciach wysłowienia.

Z twierdzenia tego łatwo wyprowadzić wniosek następujący:

<u>Wniosek</u>: Współczynniki równania stopnia n-tego są funkcjami symetrycznemi pierwiastków równania.

Mamy bowiem:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

Po wymnożeniu i porównaniu współczynników otrzymamy:

$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n)$

$a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \dots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \dots \alpha_{n-1}\alpha_n$

$a_3 = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n$

- -

$a_n = (-1)^n \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \dots \alpha_n$ to jest słowami.

Współczynnik a_k $(k = 1, 2, 3, \dots n)$ jest sumą kombinacji k-tej klasy z elementów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ wziętą ze znakiem $(-1)^k$

Zachodzi tu także twierdzenie:

Każda funkcja wymierna i symetryczna pierwiastków $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ jest funkcją wymierną współczynników a_1, a_2 $a_3 \dots a_n$ danego równania.

Równanie algebraiczne stopnia n-tego o współczynnikach rzeczywistych.

Dotychczas nie zakładaliśmy o współczynnikach równania n-tego stopnia że są liczbami rzeczywistemi, wszystkie więc twierdzenia i własności słuszne są jakiekolwiek byłyby współczynniki.

Obecnie zajmiemy się równaniami o współ-

czynnikach rzeczywistych wykażemy nia-
nowicie.:

Twierdzenie. Jeżeli liczba zespolona $a+bi$ jest pierwiastkiem równania o współczynnikach rzeczywistych, wówczas liczba zespolona z nią i sprzężona $a-bi$ jest również pierwiastkiem tego równania.

Dla dowodu posłużymy się następującem twierdzeniem pomocniczem: Jeżeli n oznacza liczbę naturalną i jeżeli jest $(a+bi)^n = A+Bi$, gdzie a, b, A, B są liczbami rzeczywistemi, wówczas $(a-bi)^n = A-Bi$.

Dowód twierdzenia pomocniczego.
Udowodnimy to metodą indukcji matematycznej.

Dla $n=1$ mamy
$(a+bi)^1 = a+bi$; $(a-bi)^1 = a-bi$

Zatem twierdzenie jest słusznem w przypadku $n=1$

Załóżmy że twierdzenie zachodzi dla $n=p\geq 1$, okażemy, że jest słusznem dla $n=p+1$. A więc zakładamy:

Jeżeli jest $(a+bi)^p = A_p+B_pi$
wówczas $(a-bi)^p = A_p-B_pi$

Udowodnimy teraz twierdzenie:

Jeżeli $(a+bi)^{p+1} = A_{p+1} + B_{p+1} i$ to jest wówczas $(a-bi)^{p+1} = A_{p+1} - B_{p+1} i$

Obliczmy $(a\pm bi)^{p+1}$, otóż $(a\pm bi)^{p+1} =$ $= (a\pm bi)^p \cdot (a\pm bi) = (A_p \pm B_p i)(a\pm bi) = A_p a \pm B_p a i \pm A_p b i + B_p b i^2 = (A_p a - B_p b) \pm (B_p a + A_p b) i$

Jeżeli oznaczymy:

$A_p a - B_p b = A_{p+1}$, $B_p a + A_p b = B_{p+1}$, to $(a\pm bi)^{p+1} = A_{p+1} \pm B_{p+1} i$ co mieliśmy wykazać

Na mocy zasady indukcji matematycznej twierdzenie jest słuszne dla każdej liczby n-naturalnej.

Udowodnimy teraz twierdzenie główne. Weźmy równanie $W_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$

Załóżmy, że 1°: współczynniki a^k $(k=1,2,3\dots n)$ są liczbami rzeczywistemi;

2° równanie posiada pierwiastek $a+bi$.

Według założenia 2° spełniona jest równość:

$(a+bi)^n = a_1 (a+bi)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(a+bi) + a_n = 0$

Oznaczmy $(a+bi)^p = A_p + B_p i$ $(p = 1, 2, 3, \ldots n)$

Zatem zachodzi równość $A_n + B_n i + a_1(A_{n-1} + B_{n-1} i) + \ldots + a_{n-1}(A_1 + B_1 i) + a_n = 0$

Zbierzmy razem część rzeczywistą i urojoną $(A_n + a_1 A_{n-1} + \ldots + a_{n-1} A_1 + a_n) + i(B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_{n-1} B_1) = 0$

Liczba zespolona jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy tak część rzeczywista jak i urojona są zerami. Będzie więc:

$$(1)\begin{cases} A_n + a_1 A_{n-1} + \ldots + a_{n-1} A_1 + a_n = 0 \\ B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_{n-1} B_1 = 0 \end{cases}$$

Podstawmy w równanie teraz $x = a - bi$, a otrzymamy słuszne twierdzenie pomocnicze

$W_n(a-bi) = (a-bi)^n + a_1(a-bi)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(a-bi) + a_n = A_n - B_n i + a_1(A_{n-1} - B_{n-1} i) + \ldots + a_{n-1}(A_1 - B_1 i) + a_n = (A_n + a_1 A_{n-1} + \ldots + a_{n-1} A_1 + a_n) - (B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_{n-1} B_1)$

Według związku (1) nawiasy są zerami, zatem jest też $W_n(a-bi) = 0$

Co dowodzi, że $a - bi$ jest pierwiastkiem równania $W_n(x) = 0$

Można wykazać jeszcze dokładniej że twierdzenie: Jeżeli równanie algebraiczne ma współczynniki rzeczywiste i jeżeli liczba zespolona $a+bi$ jest jego pierwiastkiem p-krotnym, to także liczba sprzężona $a-bi$ jest p-krotnym pierwiastkiem równania.

Jako wniosek z twierdzenia wypływa że równanie stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych posiada przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty, gdyż ilość pierwiastków jest nieparzysta, liczby zaś zespolone występują jako pierwiastki parami

W przypadku współczynników rzeczywistych możemy rozkład równania na czynniki (pierwsze) napisać nieco inaczej: Jeżeli liczba zespolona $a+bi$ jest p-krotnym pierwiastkiem to również liczba $a-bi$ jest również p-krotnym pierwiastkiem. Zatem mamy dwa czynniki postaci:

$$(x-\alpha_1)^p(x-\alpha_2)^p=(x-a-bi)^p(x-a+bi)^p=[(x-a)^2+b^2]^p$$

A więc $W_n(x) = [(x-a_1)^2 + b_1^2]^{p_1} \cdot [(x-a_2)^2 + b_2^2]^{p_2} \ldots$
$\ldots [x - a_m]^2 b^2 \ldots [(x-a_m)^2 + b_m^2]^{p_m} [x - a_{m+1}] +$
$+ (x - \alpha_{m+j})$

Jeżeli $a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \ldots a_m + ib_m$ są zespolonemi pierwiastkami (rzeczywistemi pewnego rodzaju) równania odpowiednio $p_1, p_2, \ldots p_m$ krotnemi, zaś $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2} \ldots \alpha_{m+j}$ są pierwiastkami rzeczywistemi pewnego rodzaju czynników może brakować.

Otrzymaliśmy rozkład na czynniki stopnia I i II o współczynnikach rzeczywistych, przyczem czynniki stopnia II^go nie dadzą się już dalej rozłożyć na czynniki stopnia I^go o rzeczywistych współczynnikach.

Pierwiastki wielokrotne.

Jeżeli mamy dane równanie, ważną jest rzeczą przekonać się czy posiada ono pierwiastki wielokrotne, względnie czy dany pierwiastek jest wielokrotnym, gdyż to umożliwia nam szybsze rozwiązanie równania. Poznamy teraz metodę, która prowadzi do równania, mającego wszystkie pierwiastki wielokrotne danego równania.

Weźmy równanie algebraiczne stopnia n-tego:

$W_n(x) = 0$, którego pierwiastek α jest p-krotnym; tedy

$$W_n(x) = (x-\alpha)^p (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{n-p}),$$

gdzie $\alpha_1 \neq \alpha$, $\alpha_2 \neq \alpha$, ... $\alpha_{n-p} \neq \alpha$

Wobec tego iloczyn:

$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots\dots(x-\alpha_{n-p})$ jest wielomianem stopnia $(n-p)$ego, który oznaczamy przez $\varphi(x)$; widoczne że $\varphi(\alpha) \neq 0$; odwrotnie; przypuszczamy tedy, że liczba α jest pierwiastkiem p-krotnym $(p \geq 1)$

Jest więc $W_n(x) = (x-\alpha)^p \cdot \varphi(x)$ gdzie $\varphi(x)$ jest wielomianem całkowitym stopnia $(n-p)$ego

nadto $\varphi(\alpha) \neq 0$

Weźmy pochodną wielomianu $W_n(x)$

$W_n'(x) = p(x-\alpha)^{p-1}\varphi(x) + (x-\alpha)^{p}\cdot\varphi'(x)$ czyli

$W_n'(x) = (x-\alpha)^{p-1}[p\varphi(x) + (x-\alpha)\varphi'(x)]$.

Twierdzimy, że równanie $W_n'(x)=0$ ma liczbę α jako $(p-1)$ krotny pierwiastek.

Równanie to jest stopnia $(n-1)$ nadto nawias $p\varphi(x)+(x-\alpha)\varphi'(x)$ jest wielomianem stopnia $(n-p-1)$ego;

ponadto dla $x=\alpha$ ma ten nawias wartość: $p\varphi(\alpha)+(\alpha-\alpha)\cdot\varphi_1(\alpha) = p\varphi(\alpha)\neq 0$

Jeżeli jest $p>1$, to będzie

$W(\alpha)=(\underbrace{\alpha-\alpha}_{=0})^{p-1}\cdot p\varphi(\alpha)=0$ Zatem α jest pierwiastkiem równania

$W_n'(x)=(x-\alpha)^{p-1}\varphi_1(x)$ gdzie $\varphi_1(\alpha)\neq 0$;

mamy podobnie:

$W_n''(x) = (x-\alpha)^{p-2}\varphi_1(x)(p-1)$

$(x-\alpha)^{p-1}\varphi_1'(x)$ czyli $W_n''(x)=(x-\alpha)^{p-2}[(p-1)\varphi_1(x) + (x-\alpha)\varphi_1'(x)]$ Zatem jest α $p-2$ krotnym pierwiastkiem równania $W_n''(x)=0$ i t.d.

aż otrzymamy $W_n^{(p-1)}(x) = (x-\alpha)^{p-(p-1)}\varphi_{p-1}(x)$.
aż wreszcie będzie.

$W_n^{(p)}x = \varphi_p(x)$; gdzie $\varphi_p(x) \neq 0$

Wykazaliśmy więc

Twierdzenie. Jeżeli równanie $W_n(x)=0$ posiada liczbę α jako pierwiastek p-krotny wówczas liczba α, jest też pierwiastkiem równań otrzymanych przez przyrównanie pierwszej, drugiej .... (p-1)nej pochodnej funkcji $W_n(x)$ do zera i naodwrót.

Przykład. Mamy rozwiązać równanie: $x^3-4x^2+5x-2=0$. Równanie ma pierwiastek $\alpha=1$; zbadajmy jego krotność: Kładę

$$W_n(x) = x^3-4x^2+5x-2=0$$
$$W_n'(x) = 3x^2-8x+5 = 0$$
$$W_n''(x) = 6x-8$$

Jest $W(1) = 0$

$W'(1) = 0$

$-2 = W''(1) \neq 0$

Zatem liczba (1) jest pierwiastkiem dwukrotnym, wobec tego dzielimy wielomian

$W_n'(x)=(x-\alpha)^{p-1}\varphi_1(x)$ gdzie $\varphi_1(\alpha)\neq 0$; mamy podobnie:

$W_n''(x)=(x-\alpha)^{p-2}\varphi_1(x)(p-1)$

$+(x-\alpha)^{p-1}\varphi_1'(x)$ czyli $W_n''(x)=(x-\alpha)^{p-2}[(p-1)\varphi_1(x)+$
$+(x-\alpha)\varphi_1'(x)]$ Zatem jest α $p-2$ krotnym pierwiastkiem równania $W_n''(x)=0$ i t. d. aż otrzymamy $W_n^{(p-1)}(x)=(x-\alpha)^{p-(p-1)}\varphi_{p-1}(x)$.

aż wreszcie będzie:

$W_n^{(p)}x=\varphi_p(x)$; gdzie $\varphi_p(x)\neq 0$

Wykazaliśmy więc

Twierdzenie. Jeżeli równanie $W_n(x)=0$ posiada liczbę α jako pierwiastek p-krotny, wówczas liczba α, jest też pierwiastkiem równań otrzymanych ~~przez~~ przez przyrównanie pierwszej, drugiej.... $(p-1)$ nej pochodnej funkcji $W_n(x)$ do zera i naodwrót.

<u>Przykład</u>: Mamy rozwiązać równanie:

$x^3-4x^2+5x-2=0$. Równanie ma pierwiastek

$\alpha = 1$ zbadajmy jego krotność: kładąc

$W_n(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

$W_n'(x) = 3x^2 - 8x + 5 = 0$

$W_n''(x) = 6x - 8$

Jest $W(x) = 0$

$W'(x) = 0$

$-2 = W''(x) \neq 0$

Zatem liczba (1) jest pierwiastkiem dwukrotnym, wobec tego dzielimy wielomian $W(x)$ przez kwadrat $(x-1)^2$ i otrzymujemy: $(x^3 - 4x^2 + 5x - 2) : (x-1)^2 = x - 2$ przeto trzecim pierwiastkiem jest liczba -2.

Potrafimy już stwierdzić ilukrotnym równania jest dany pierwiastek, pozostaje jeszcze zbadać, czy dane równanie posiada wogóle pierwiastki wielokrotne, a jeżeli posiada to jakie?

Otóż ukazaliśmy, że jeżeli liczba α jest p-krotnym pierwiastkiem równania algebraicznego $W(x)=0$ to $W(x)=(x-\alpha)^p \cdot \varphi(x)$ i nadto $W'(x)=(x-\alpha)^{p-1} f(x)$. Zatem czynnik $(x-\alpha)^{p-1}$ jest wspólnym podzielnikiem obu wielomianów $W(x)$ i $W'(x)$. Jeżeli więc znajdziemy największy wspólny podzielnik wielomianów $W(x)$ i $W'(x)$, to przyrównując go do zera, otrzymamy równanie, któremu czynią zadość pierwiastki wielokrotne danego równania $W(x)=0$.

Największy wspólny podzielnik obu wielomianów znajdziemy za pomocą t. zw. kolejnego dzielenia Euklidesowego, co wyjaśnimy na przykładzie.

Przykład. Weźmy równanie poprzednio rozważane $x^3-4x^2+5x-2=0$,

Zbadajmy jego pierwiastki wielokrotne. Kładąc $W(x)=x^3-4x^2+5x-2$ otrzymujemy pochodną $W'(x)=3x^2-8x+5$

Wyszukujemy największy wspólny podzielnik obu wielomianów $W(x)$ i $W'(x)$ w tym celu stosujemy dzielenie Euklidesowe:

$$(3x^3-12x^2+15x-6):(3x^2-8x+5)=x$$
$$\underline{-3x^3 \mp 8x^2 \pm 5x}$$
$$-4x^2+10x-6$$

Dla uniknięcia ułamków znów pomnożymy przez 3.

$$(-12x^2+30x-18):(3x^2-8x+5)=-4$$
$$\underline{\mp 12x^2 \pm 32x \mp 20}$$
$$-2x+2$$

$-2x+2=-2(x-1)$ Dzieląc ten trójmian przez ten sam co poprzednio dzielnik otrzymujemy iloraz -4. $-2(x-1)$ jest to już reszta dzielenia, bo jest stopnia niższego niż dzielnik, zatem nie dzielimy dalej ale dzielimy dzielnik $W'x$ przez resztę, przyczem odrzucimy czynnik -2 bo o iloraz nie chodzi.

Jest $(3x^2-8x+5):(x-1)=3x-5$
$$\underline{\pm 3x^2 \mp 3x}$$
$$= \quad -5x+5$$
$$\underline{\mp 5x \pm 5}$$
$$=$$

Dzielenie to daje resztę zero więc ostatni dzielnik jest N.W.P. wielomianów $W(x)$ i $W'(x)$. A więc pierwiastki wielokrotne danego równania spełniają równanie $(x-1)=0$, które otrzymaliśmy przyrównując do zera mianownik N.W.P. obu wielomianów $W(x)$ i $W'(x)$. Widzimy więc że równanie to posiada jeden pierwiastek wielokrotny $x=1$, który jest pierwiastkiem podwójnym, jak już przekonaliśmy się poprzednio.

Koniec.

Zredagował asystent przy katedrze matematyki: Stefan Kaczmarz (obecnie teolog III R.)

Spis dostrzeżonych błędów.

Str.	wiersz	jest	powinno być
10.	9 z góry	opuszczono: gdy za literę n podstawimy liczbę $(p+1)$, wówczas zdanie (Zd) jest prawdziwe, ...	
16.	6 z góry	postępowanie	połączowanie
16.	7 " "	"	"
20.	9 z dołu	$a = 26 + c_0$	$a = 2b + c_0$
40.	11 z góry	po słowie „w wypadku" opuszczono „$w = \frac{m}{n}$, $w' = c$"	
58.	5 z dołu	po słowie „utworzonym" opuszczono „przez"	
169.	8 z dołu	$(a+b)' = a - bi$	$(a+bi)' = a - bi$
170.	1 " "	$(a+bi)^n =$	$(a+bi)^n +$
"	5 " "	a^k	a_k
172	1 " "	jest $(x-a-bi)^p + (x-a+bi)^p$ ma być $(x-a-bi)^p \cdot (x-a+bi)^p$.	
173	2 z góry	zamiast $[x-\alpha_{m+1}] + \dots + [x-\alpha_{m+p}]$ ma być $[x-\alpha_{m+1}] \cdot \ldots \cdot [x-\alpha_{m+p}]$	
173	5 z góry	skreślić (rzeczywistym pierwszego rodzaju)	

Str.	wiersz	jest	powinno być
174	6 z dołu	skreślić:	odwrotnie
175	7 z góry	$+(x-\alpha)\varphi(x)$	$+(x-\alpha)\varphi'(x)$
175	8 z góry	$(n-p-1)$ ego	$(n-p)$ tego
"	10 " "	$p\varphi(\alpha)=0$	$p\varphi(\alpha)\neq 0$
"	8 z dołu	$(\alpha-\alpha)^{p-1}p\varphi(x)$	$(\alpha-\alpha)^{p-1}p\varphi(\alpha)$
"	6 z dołu	$\varphi_1(x)\neq 0$	$\varphi_1(\alpha)\neq 0$
176	3 z góry	$\varphi_p(x)\neq 0$	$\varphi_p(\alpha)\neq 0$

Spis rzeczy.

Rozdział III. Równania algebraiczne

4

$\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$

$\frac{4\,3\,2\,1}{1\,2\,3\,4}$

$\frac{4\,3\,2}{3\,2\,1} = 4$