

**AGH**

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

---

---

**Praca magisterska**

**Lidia Tarczewska**

kierunek studiów: **fizyka medyczna**

specjalność: **Techniki obrazowania i**

**biometria**

**Zastosowanie transformaty Wignera-Gabora do analizy  
korelacji czasowych w mechanice klasycznej**

Opiekun: **dr hab. Bartłomiej Spisak**

**Kraków, listopad 2020**

## Oświadczenie studenta

Uprzedzony(-a) o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz. U. z 2018 r. poz. 1191 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystyczne wykonanie albo publicznie zniekształca taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, wideogram lub nadanie.”, a także uprzedzony(-a) o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 307 ust. 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.) „Student podlega odpowiedzialności dyscyplinarnej za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyn uchybiający godności studenta.”, oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem(-am) osobiście i samodzielnie i nie korzystałem(-am) ze źródeł innych niż wymienione w pracy.

Jednocześnie Uczelnia informuje, że zgodnie z art. 15a ww. ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych Uczelnia przysługuje pierwszeństwo w opublikowaniu pracy dyplomowej studenta. Jeżeli Uczelnia nie opublikowała pracy dyplomowej w terminie 6 miesięcy od dnia jej obrony, autor może ją opublikować, chyba że praca jest częścią utworu zbiorowego. Ponadto Uczelnia jako podmiot, o którym mowa w art. 7 ust. 1 pkt 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. — Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.), może korzystać bez wynagrodzenia i bez konieczności uzyskania zgody autora z utworu stworzonego przez studenta w wyniku wykonywania obowiązków związanych z odbywaniem studiów, udostępniać utwór ministrowi właściwemu do spraw szkolnictwa wyższego i nauki oraz korzystać z utworów znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych w celu sprawdzania z wykorzystaniem systemu antyplagiatowego. Minister właściwy do spraw szkolnictwa wyższego i nauki może ze korzystać z prac dyplomowych znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych w zakresie niezbędnym do zapewnienia prawidłowego utrzymania i rozwoju tych baz oraz współpracujących z nimi systemów informatycznych.

.....  
(czytelny podpis)

**Tematyka pracy magisterskiej i praktyki dyplomowej Lidii Tarczewskiej, studenta drugiego roku studiów drugiego stopnia na kierunku fizyka medyczna, specjalności techniki obrazowania i biometria**

**Temat pracy magisterskiej:** Zastosowanie transformaty Wignera-Gabora do analizy korelacji czasowych w mechanice klasycznej

Opiekun pracy: dr hab. Bartłomiej Spisak

Recenzenci pracy:

Miejsce praktyki dyplomowej: WFIS AGH, Kraków

**Program pracy magisterskiej i praktyki dyplomowej**

1. Omówienie realizacji pracy magisterskiej z opiekunem.
2. Zebranie i opracowanie literatury dotyczącej tematu pracy.
3. Praktyka dyplomowa:
  - zapoznanie się z pojęciem funkcji Wignera
  - rozwiązanie równań ruchu klasycznych układów dynamicznych
  - wyznaczanie funkcji Wignera dla klasycznych układów dynamicznych
  - implementacja programu do obliczania dyskretnej funkcji Wignera w środowisku MATLAB
  - dyskusja i analiza wyników
  - sporządzenie sprawozdania z praktyki.
4. Kontynuacja obliczeń związanych z tematem pracy magisterskiej.
5. Zebranie i opracowanie wyników obliczeń.
6. Analiza wyników obliczeń numerycznych, ich omówienie i zatwierdzenie przez opiekuna.
7. Opracowanie redakcyjne pracy.

Termin oddania w dziekanacie: 30 listopada 2020

.....  
(podpis kierownika katedry)

.....  
(podpis opiekuna)

# SPIS TREŚCI

|  |           |
|--|-----------|
| <b>SPIS TREŚCI</b> .....   | <b>6</b>  |
| <b>Wstęp</b> .....   | <b>7</b>  |
| <b>1. Funkcja Wignera-podstawy matematyczne i fizyczne</b> .....               | <b>9</b>  |
| 1.1 Analiza sygnału w domenie czasowo-częstotliwościowej .....                 | 9         |
| 1.2 Funkcja Wignera-definicja .....  | 10        |
| 1.3 Wybrane własności funkcji Wignera.....                                     | 10        |
| 1.4 Funkcje stowarzyszone z funkcją Wignera.....                               | 12        |
| 1.5 Krzyżowa funkcja Wignera (cross-Wigner function).....                      | 13        |
| 1.6 Implementacja dyskretnej funkcji Wignera .....                             | 14        |
| 1.7 Równania Hamiltona.....  | 16        |
| <b>2. Funkcja Wignera dla układów mechanicznych</b> .....                      | <b>17</b> |
| 2.1 Cząstka swobodna.....  | 17        |
| 2.1.1 Równania ruchu cząstki swobodnej.....                                    | 17        |
| 2.1.2 Funkcja Wignera dla cząstki swobodnej .....                              | 19        |
| 2.2 Oscylator harmoniczny prosty .....   | 21        |
| 2.2.1 Równanie ruchu oscylatora harmonicznego.....                             | 21        |
| 2.2.2 Funkcja Wignera oscylatora harmonicznego prostego.....                   | 24        |
| 2.3 Oscylator harmoniczny słabo tłumiony .....                                 | 26        |
| 2.3.1 Równanie ruchu oscylatora harmonicznego słabo tłumionego.....            | 26        |
| 2.3.2 Funkcja Wignera oscylatora harmonicznego słabo tłumionego .....          | 29        |
| 2.4 Oscylator harmoniczny tłumiony krytycznie.....                             | 30        |
| 2.4.1 Równanie ruchu dla oscylatora harmonicznego tłumionego krytycznie .....  | 30        |
| 2.4.2 Funkcja Wignera dla oscylatora harmonicznego tłumionego krytycznie ..... | 31        |
| 2.5. Oscylator harmoniczny silnie tłumiony.....                                | 32        |
| 2.5.1 Równanie ruchu oscylatora harmonicznego silnie tłumionego .....          | 32        |
| 2.5.2 Funkcja Wignera dla oscylatora harmonicznego silnie tłumionego .....     | 34        |

|   |           |
|---|-----------|
| 2.6 Złożenie drgań harmoniczných prostých.....                        | 37        |
| 2.6.1 Równanie ruchu dla złożenia drgań harmoniczných prostých .....  | 37        |
| 2.6.2 Funkcja Wignera dla złożenia drgań harmoniczných prostých.....  | 41        |
| 2.6.3 Dudnienie.....  | 43        |
| 2.6.4 Funkcja Wignera dla dudnień .....                               | 45        |
| 2.7 Układ drgający z malejącą masą .....                              | 46        |
| <b>3. Krzyżowa funkcja Wignera .....</b>                              | <b>49</b> |
| 3.1 Częstka swobodna i prosty oscylator harmoniczny.....              | 50        |
| 3.2 Dwa oscylatory proste o różnych częstościach drgań własnych ..... | 54        |
| 3.3 Oscylator harmoniczny prosty i oscylator słabo tłumiony .....     | 58        |
| <b>Podsumowanie .....</b>   | <b>61</b> |
| <b>Spis literatury.....</b>   | <b>62</b> |
| <b>Spis Ilustracji .....</b>  | <b>63</b> |
| <b>ZAŁĄCZNIK 1.....</b>   | <b>65</b> |

Funkcja Wignera wywodzi się z badań nad mechaniką kwantową i została po raz pierwszy zaproponowana przez E. Wignera w 1932 roku. W 1948 J. Ville znalazł dla niej nowe zastosowanie i wprowadził ją do innej dziedziny fizyki- analizy sygnałów. Celem niniejszej pracy jest zastosowanie funkcji Wignera w mechanice klasycznej poprzez analizę kilku prostych układów-cząstki swobodnej i różnych układów drgających. W rozdziale 1. zdefiniowano funkcję Wignera i opisano podstawowe jej właściwości, a w rozdziale 2. wyprowadzono równania ruchu dla badanych układów, by następnie na tej podstawie obliczyć analitycznie i numerycznie wartość funkcji Wignera dla każdego z nich. W rozdziale 3. zbadano funkcję krzyżową Wignera dla kilku wybranych par sygnałów i wspomniano o jej zastosowaniu.

# 1. Funkcja Wignera-podstawy matematyczne i fizyczne

## 1.1 Analiza sygnału w domenie czasowo-częstotliwościowej

Na potrzeby niniejszej pracy przyjęto, że sygnałem nazywamy zmienność dowolnej wielkości względem innej, najczęściej czasu. Jako przyczynę zmienności możemy wskazać zaburzenie, które wytrąca system generujący sygnał ze stanu równowagi stabilnej. W mechanice klasycznej odpowiednikiem zaburzenia jest siła, a jej konsekwencją jest ruch, który jest zmianą położenia w czasie. Dzięki transformacji Fouriera:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt, \quad (1.1)$$

z sygnału wielkości zmiennej w czasie  $x(t)$  uzyskuje się jego widmo częstotliwościowe  $X(f)$ , tj. wszystkie częstotliwości składowe sygnału. Jednak częstotliwości te nie są umiejscowione w czasie, co bardzo utrudnia analizę sygnałów, których częstotliwość zmienia się w czasie- a wiele rzeczywistych sygnałów, zwłaszcza biologicznych, ma taki charakter. Stąd pojawiły się różne rozwiązania, pozwalające na jednoczesne zobrazowanie zmiany sygnału od czasu i od częstotliwości. Wspólnie nazywa się je metodami analizy w domenie czasowo-częstotliwościowej. Warto podkreślić, że zarówno sygnał  $x(t)$ , jak i jego transformatę  $X(f)$  można przedstawić na płaszczyźnie dwuwymiarowej, podczas gdy analiza w domenie czasowo-częstotliwościowej wymaga trzeciego wymiaru. Przykładową powszechnie stosowaną metodą jest STFT (*ang. Short-Time Fourier Transform*), która polega na podziale sygnału na krótkie okna czasowe i przeprowadzeniu w nich transformacji Fouriera, w celu uzyskania częstotliwości występujących w danym oknie czasowym [4]. Im większe jest wybrane okno, tym dokładniejsze rozdzielenie częstotliwości przez transformatę, ale jednocześnie tym mniejsza rozdzielczość czasowa. Jedną z alternatywnych metod otrzymywania obrazu w domenie czasowo-częstotliwościowej jest funkcja Wignera, której przewagą nad STFT jest możliwość uzyskania lepszej rozdzielczości jednocześnie w czasie i częstotliwości. Maksymalna możliwa do uzyskania rozdzielczość zależy tylko od jakości zebranego sygnału: częstotliwości próbkowania  $f_s$  (im większa, tym lepsza rozdzielczość czasowa) i długości sygnału (im dłuższy sygnał, tym lepsza rozdzielczość częstotliwościowa).

## 1.2 Funkcja Wignera-definicja

Dla potrzeb analizy sygnałów funkcję Wignera definiuje się w następujący sposób:

$$W_x(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{T}{2}\right) x^*\left(t - \frac{T}{2}\right) e^{-i\omega T} dT, \quad (1.2)$$

gdzie funkcja podcałkowa może być interpretowana jako funkcja autokorelacji

$$C(t, T) = x\left(t + \frac{T}{2}\right) x^*\left(t - \frac{T}{2}\right), \quad (1.3)$$

a całe wyrażenie (1.2) jako transformacja Fouriera z funkcji autokorelacji. Podana definicja odnosi się do pojęcia częstotliwości kołowej  $\omega$ . W literaturze najczęściej można spotkać inną definicję [1], mianowicie:

$$W_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{T}{2}\right) x^*\left(t - \frac{T}{2}\right) e^{-i2\pi f T} dT, \quad (1.4)$$

gdzie  $f$  jest częstotliwością  $f = \omega/2\pi$ .

## 1.3 Wybrane własności funkcji Wignera

Wadą funkcji Wignera jest jej nieliniowość, co powoduje powstawanie artefaktów [1]. Z kolei jej zaletą jest możliwość powiązania jej z wieloma fizycznymi parametrami opisującymi sygnał. Poniżej przedstawiono wybór najważniejszych z punktu widzenia tej pracy własności [1],[2].

1. Funkcja Wignera przyjmuje wartości rzeczywiste.
2. Rozkłady graniczne funkcji Wignera są dobrze określone, tzn.
  - a) całkowanie po czasie wyznacza gęstość spektralną mocy sygnału, czyli jego całkowitą moc przypadającą na dane pasmo częstotliwości (moc sygnału w analizie sygnałów definiuje się jako kwadrat wartości sygnału  $|x(t)|^2$  lub  $|X(\omega)|^2$ )

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_x(t, \omega) dt = |X(\omega)|^2, \quad (1.5)$$

gdzie  $X(\omega)$  jest transformatą Fouriera sygnału  $x(t)$  w dziedzinie częstości,

b) całkowanie po częstości wyznacza chwilową moc sygnału  $|x(t)|^2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_x(t, \omega) d\omega = |x(t)|^2. \quad (1.6)$$

3. Funkcja Wignera zachowuje całkowitą moc sygnału

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} W_x(t, \omega) dt d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt. \quad (1.7)$$

4. Funkcja Wignera znika wraz z sygnałem

a) w domenie czasowej

$$x(t) = 0 \text{ dla } |t| > T \Rightarrow W_x(t, \omega) = 0 \text{ dla } |t| > T, \quad (1.8)$$

b) w domenie częstościowej

$$X(\omega) = 0 \text{ dla } |\omega| > \Omega \Rightarrow W_x(t, \omega) = 0 \text{ dla } |\omega| > \Omega. \quad (1.9)$$

5. Funkcja Wignera jest odwracalna

$$x(t) x^*(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x\left(\frac{t}{2}, \omega\right) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.10)$$

6. Znaczenie fizyczne ma pierwszy moment dla sygnału analitycznego  $x_a(t)$ :

$$x_a(t) = x(t) + iH[x(t)], \quad (1.11)$$

gdzie  $H[x(t)]$  jest transformatą Hilberta sygnału  $x(t)$ , określoną wzorem

$$H[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (1.12)$$

Mianowicie

a) pierwszy moment w dziedzinie częstości wyznacza częstość chwilową  $\omega(t)$

$$\omega(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega W_{x_a}(t, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} W_{x_a}(t, \omega) d\omega}, \quad (1.13)$$

b) pierwszy moment w dziedzinie czasu wyznacza opóźnienie grupowe  $t(\omega)$

$$t(\omega) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t W_{x_a}(t, \omega) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} W_{x_a}(t, \omega) dt}. \quad (1.14)$$

## 1.4 Funkcje stowarzyszone z funkcją Wignera

W literaturze można znaleźć różne modyfikacje funkcji Wignera. Często pojawia się funkcja Wignera-Villa, która jest funkcją Wignera dla sygnału analitycznego (1.11) [5]. Jest ona często przywoływana z racji występowania dodatkowych użytecznych własności, takich jak ta opisana w punkcie 6, oraz brak tzw. zjawiska aliasingu, czyli interferencji między składowymi częstościami. Inną modyfikacją jest dyskretna funkcja Wignera, której sformułowanie było niezbędne, aby poddawać jej działaniu sygnały dyskretne, a taki charakter mają wszystkie sygnały cyfrowe. Najprostszą formę dyskretnej funkcji Wignera zaproponowali Claasen i Mecklenbrauke [5]:

$$\begin{aligned} W_x^{CM}\left(t = \frac{n}{f_s}, f\right) &= \frac{2}{f_s} \sum_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} x(n+m)x^*(n-m) e^{-i2\pi f(2m/f_s)}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

gdzie:  $f_s$  jest częstotliwością próbkowania sygnału  $x(t)$ , a  $N$ -długością sygnału dyskretnego  $x(n)$  i  $N$  jest parzyste ( $N \bmod 2 = 0$ ).

Analogicznie dla domeny częstości kołowej można wprowadzić

$$W_x^{CM}\left(\frac{n}{f_s}, \omega\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi f_s}} \sum_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} x(n+m)x^*(n-m) e^{-i\omega(2m/f_s)}. \quad (1.16)$$

Takie sformułowanie jest intuicyjne (formą przypomina definicję ciągłej funkcji Wignera), choć ma pewne wady: bierze pod uwagę tylko korelacje między parzystymi i między nieparzystymi wyrazami ciągu  $x(n)$  oraz jest zdefiniowana tylko dla parzystych długości sygnału. Mimo tych wad ta formuła została użyta w obliczeniach w dalszej części pracy ze względu na możliwość zastosowania w niej sygnału rzeczywistego (a nie zespolonego) oraz ze względu na złożoność obliczeniową. Dyskretna funkcja Wignera w tej postaci spełnia następujące właściwości:

1. Przyjmuje wartości rzeczywiste (tak jak ciągła funkcja Wignera).
2. Jest okresowa w dziedzinie częstości

$$W_x^{CM}\left(\frac{n}{f_s}, \omega\right) = W_x^{CM}\left(\frac{n}{f_s}, \omega + \pi f_s\right). \quad (1.17)$$

Okresowość dyskretnej funkcji Wignera wyznacza użyteczny zakres częstości kołowej jako  $\omega \in \left(-\frac{1}{2}\pi f_s, \frac{1}{2}\pi f_s\right)$ .

3. Jest symetryczna względem sprzężenia

$$W_x^{CM}\left(\frac{n}{f_s}, \omega\right) = W_{x^*}^{CM}\left(\frac{n}{f_s}, -\omega\right). \quad (1.18)$$

W szczególności dla sygnału o wartościach rzeczywistych  $\forall t: x(t) \in \mathbb{R}$

$$W_x^{CM}\left(\frac{n}{f_s}, \omega\right) = W_x^{CM}\left(\frac{n}{f_s}, -\omega\right). \quad (1.19)$$

## 1.5 Krzyżowa funkcja Wignera (cross-Wigner function)

Jeśli w funkcji Wignera funkcję autokorelacji  $C = x(t + T/2)x^*(t - T/2)$  zastąpimy analogicznym członem korelacji między dwoma funkcjami  $x(t)$  i  $y(t)$ , otrzymamy krzyżową funkcję Wignera

$$W_{x,y}(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{T}{2}\right) y^*\left(t - \frac{T}{2}\right) e^{-i\omega T} dT. \quad (1.20)$$

Funkcja ta posiada inne właściwości niż funkcja Wignera:

1. Przyjmuje wartości zespolone.
2. Posiada własność symetrii

$$W_{x,y}(t, \omega) = W_{y,x}^*(t, \omega). \quad (1.21)$$

Analogicznie jak w przypadku funkcji Wignera można wprowadzić te same modyfikacje, co opisane w poprzednim punkcie, w szczególności wersję dyskretną. Dyskretna postać krzyżowej funkcji Wignera ma te same właściwości co jej ciągła wersja oraz właściwość periodyczności jak dyskretna wersja funkcji Wignera.

## 1.6 Implementacja dyskretniej funkcji Wignera

Aby usprawnić obliczenia, uproszczono dyskretną funkcję Wignera do poniższej postaci, korzystając z zależności  $x(t) = x^*(t)$ , która jest prawdziwa dla sygnałów rzeczywistych (a z założenia takie będziemy badać), stąd:

$$\begin{aligned} W_x^{CM}\left(\frac{n}{f_s}, \omega\right) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi f_s}} \sum_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} x(n+m)x(n-m) e^{-i(2m/f_s)} \quad (1.22) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi f_s}} \sum_{m=-\frac{N}{2}+1}^{-1} x(n+m)x(n-m) e^{-i\omega(2m/f_s)} \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{2\pi f_s}} \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} x(n+m)x(n-m) e^{-i\omega(2m/f_s)} \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{2\pi f_s}} \sum_{m=0}^0 x(n+m)x(n-m) e^{-i(2m/f_s)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi f_s}} \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} x(n-m)x(n+m) e^{i\omega(2m/f_s)} \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{2\pi f_s}} \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} x(n+m)x(n-m) e^{-i(2m/f_s)} + \frac{2}{\sqrt{2\pi f_s}} x^2(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi f_s}} \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} (x(n-m)x(n+m)e^{i\omega(2m/f_s)} + x(n-m)x(n+m)e^{-i\omega(2m/f_s)}) \\
&\quad + \frac{2}{\sqrt{2\pi f_s}} x^2(n) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi f_s}} \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} (x(n+m)x(n-m)(e^{i\omega(2m/f_s)} + e^{-i\omega(2m/f_s)})) + \frac{2}{\sqrt{2\pi f_s}} x^2(n) \\
&= \frac{4}{\sqrt{2\pi f_s}} \left( \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} [x(n+m)x(n-m)\cos(2m\omega/f_s)] + \frac{1}{2} x^2(n) \right).
\end{aligned}$$

W ten sposób z sumowania N ilorazów uprościliśmy obliczenia do sumowania N/2-1 ilorazów, a także zastąpiliśmy liczbę zespoloną liczbą rzeczywistą, oszczędzając pamięć operacyjną i przede wszystkim usuwając jedno ze źródeł niedokładności obliczeń numerycznych. W teorii wszystkie urojone wyrazy sumują się ostatecznie do 0, ale ze względu na stosowane w informatyce przybliżenia mogłoby do tego nie dojść podczas obliczeń komputerowych.

Do obliczenia dyskretnej krzyżowej funkcji Wignera dla dwóch sygnałów  $x(t)$  i  $y(t)$  o tej samej długości  $N$  i częstotści próbkowania  $f_s$  użyto wzoru w postaci:

$$\begin{aligned}
W_{x,y}^{CM} \left( \frac{n}{f_s}, \omega \right) & \tag{1.23} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi f_s}} \left( \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} \left[ x(n+m)y(n-m)e^{-i\omega\left(\frac{2m}{f_s}\right)} + x(n-m)y(n+m)e^{i\omega\left(\frac{2m}{f_s}\right)} \right] \right. \\
&\quad \left. + x(n)y(n) \right)
\end{aligned}$$

Obydwa wzory zaimplementowano w programie MATLAB z użyciem 3 pętli. Najbardziej wewnętrzna obliczała  $W(t, \omega)$  według podanych powyżej wzorów, a dwie pętli wewnętrzne zmieniały wartość  $t$  i  $\omega$  tak, aby uzyskać rozkład  $W(t, \omega)$  w całej dostępnej dziedzinie. Kod dla przykładowego układu jest dostępny do wglądu w załączniku.

## 1.7 Równania Hamiltona

Do opisu ruchu, oprócz bazujących na pojęciu położenia i siły równań Newtona, można użyć równań Hamiltona, opartych na pojęciach pędu i położenia. Ogólna postać równań Hamiltona dla pary pęd  $p$ , położenie  $x$  jest wyrażona przez układ równań

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H(x, p)}{\partial x}, \end{cases} \quad (2.1)$$

gdzie  $H(x, p)$  oznacza funkcję Hamiltona [3].

Dla jednowymiarowego układu, opisującego ruch cząstki w polu potencjalnym funkcja Hamiltona ma postać:

$$H(x, p) = E_T + U(x) = \frac{p^2}{2m} + U(x), \quad (2.2)$$

gdzie  $E_T$  i  $U(x)$  oznaczają odpowiednio energię kinetyczną i potencjalną.

Warto zauważyć, że w tym wypadku pierwsze pochodne po czasie  $\dot{x}$ ,  $\dot{p}$  oznaczają odpowiednio prędkość i siłę. W dalszych obliczeniach będziemy zawsze przyjmować stałą masę  $m$ .

## 2. Funkcja Wignera dla układów mechanicznych

### 2.1 Cząstka swobodna

#### 2.1.1 Równania ruchu cząstki swobodnej

Dla cząstki swobodnej energia potencjalna  $U(x)$  jest stała, stąd

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U. \quad (2.3)$$

Zatem po podstawieniu  $H(x, p)$  do układu równań Hamiltona otrzymujemy:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial \left( \frac{p^2}{2m} + U \right)}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -\frac{\partial \left( \frac{p^2}{2m} + U \right)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Aby otrzymać explicite równanie ruchu, wystarczy przekształcić i scałkować obustronnie równanie

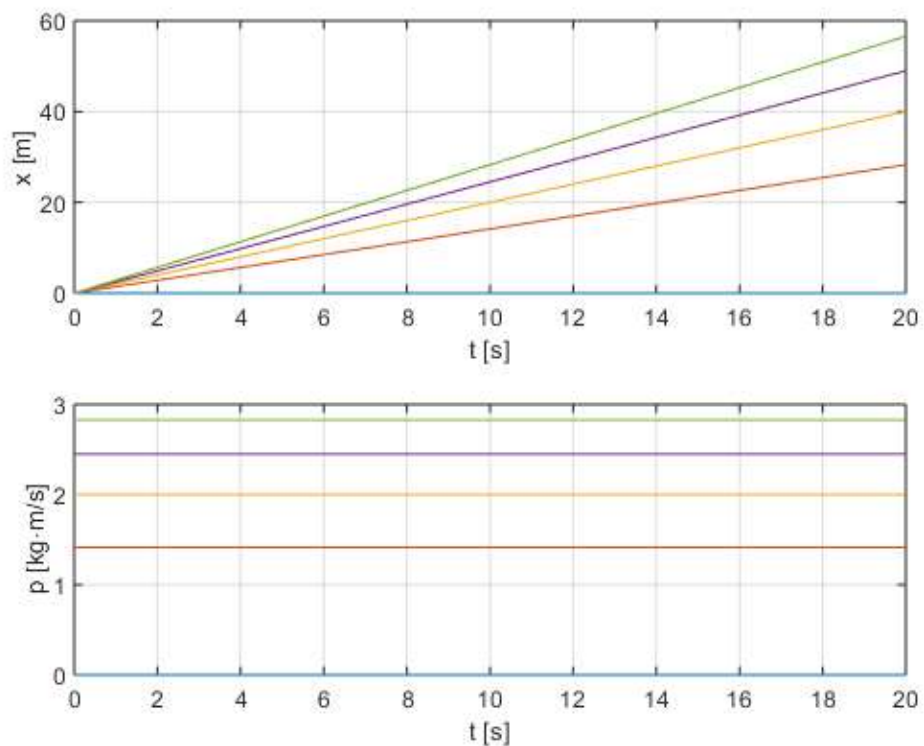
$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} \Rightarrow dx = \frac{p}{m} dt. \quad (2.5)$$

W rezultacie otrzymujemy

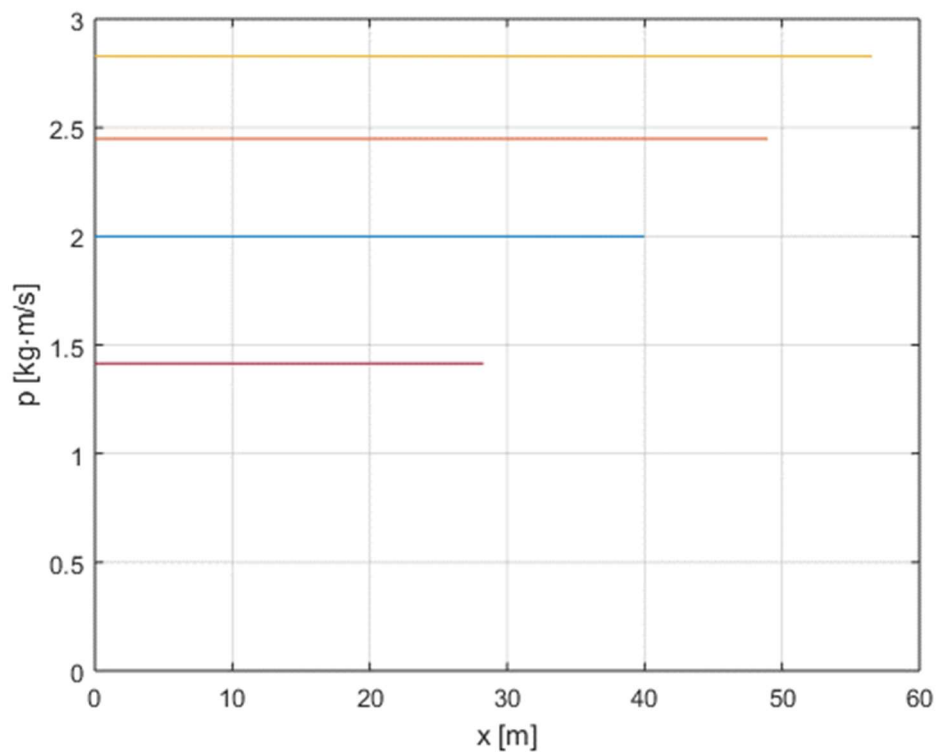
$$x(t) = x_0 + \frac{p}{m} t, \quad (2.6)$$

co odpowiada ruchowi jednostajnemu prostoliniowemu (dla  $p \neq 0$ ) lub pozostawaniu w spoczynku (dla  $p = 0$ ).

Dla uzyskanego równania, przyjmując warunek początkowy  $x_0 = 0$  i jednostkową masę  $m = 1$  uzyskano w programie MATLAB wykresy  $x(t)$ ,  $p(t)$  oraz portret fazowy dla kilku ustalonych  $H(x, p)$ -patrz rys 1 i 2.



Rys. 1 Przykładowa zależność położenia  $x(t)$  i pędu  $p(t)$  od czasu dla cząstki swobodnej. Kolory: czerwony, pomarańczowy, fioletowy i zielony oznaczają kolejne wartości  $H$ : 1, 2, 3, 4 [J]



Rys. 2 Przykładowe portrety fazowe dla cząstki swobodnej. Kolory: fiolet, niebieski, pomarańczowy i żółty oznaczają kolejne wartości  $H$ : 1, 2, 3, 4 [J]

### 2.1.2 Funkcja Wignera dla cząstki swobodnej

Następnie wyznaczono analitycznie funkcję Wignera dla otrzymanej zależności  $x(t)$ , wychodząc z definicji 1.2:

$$\begin{aligned}
 W_{CS}(t, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( x_0 + \frac{p}{m}t + \frac{p}{2m}T \right) \left( x_0 + \frac{p}{m}t - \frac{p}{2m}T \right) e^{-i\omega T} dT \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( x_0 + \frac{p}{m}t \right)^2 e^{-i\omega T} dT - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{p}{2m}T \right)^2 e^{-i\omega T} dT \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( x_0 + \frac{p}{m}t \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega T} dT - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{p}{2m} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} T^2 e^{-i\omega T} dT \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( x_0 + \frac{p}{m}t \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega T} dT + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{p}{2m} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (-iT)^2 e^{-i\omega T} dT.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Zauważmy, że

$$\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} e^{-i\omega T} = \frac{\partial}{\partial \omega} (-iT) e^{-i\omega T} = (-iT)^2 e^{-i\omega T}, \tag{2.8}$$

co możemy podstawić w ostatnim wyrażeniu równania 2.7, stąd

$$\begin{aligned}
 W_{CS}(t, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( x_0 + \frac{p}{m}t \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega T} dT \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{p}{2m} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} e^{-i\omega T} \right) dT \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( x_0 + \frac{p}{m}t \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega T} dT + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{p}{2m} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega T} dT.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Posługując się definicją delty Diraca  $\delta(\omega)$

$$\delta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega T} dT, \tag{2.10}$$

możemy przekształcić otrzymane wyrażenie na  $W_{CS}(t, \omega)$  do poniższej postaci

$$W_{CS}(t, \omega) = \left(x_0 + \frac{p}{m}t\right)^2 \delta(-\omega) + \left(\frac{p}{2m}\right)^2 \delta''(-\omega) \quad (2.11)$$

Korzystając z dwóch własności delty Diraca:

a) Parzystość

$$\delta(-\omega) = \delta(\omega), \quad (2.12)$$

b) Właściwość pochodnej

$$\omega \delta'(\omega) = -\delta(\omega), \quad (2.13)$$

Możemy wyznaczyć  $\delta''(-\omega)$  różniczkując obustronnie równanie 2.13

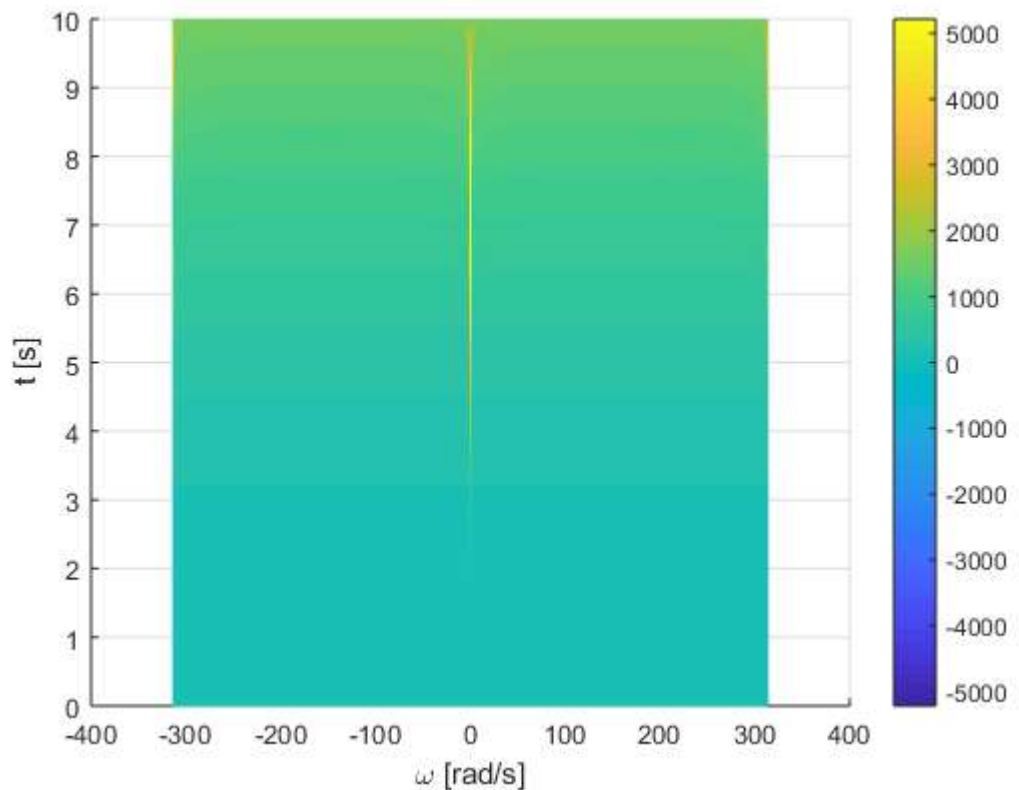
$$\begin{aligned} \omega \delta''(\omega) + 1 \cdot \delta'(\omega) &= -\delta'(\omega) \\ \omega \delta''(\omega) &= -2\delta'(\omega) \\ \delta''(\omega) &= \frac{-2\delta'(\omega)}{\omega} = \frac{-2\omega \delta'(\omega)}{\omega^2} = \frac{2}{\omega^2} \delta(\omega) \\ \delta''(-\omega) &= \frac{2}{(-\omega)^2} \delta(-\omega) = \frac{2}{\omega^2} \delta(\omega). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Podstawiając wyrażenie 2.14 do 2.11, funkcję Wignera dla cząstki swobodnej ostatecznie przyjmuje postać

$$W_{CS}(t, \omega) = \left(x_0 + \frac{p}{m}t\right)^2 \delta(\omega) + 2 \left(\frac{p}{2m \cdot \omega}\right)^2 \delta(\omega). \quad (2.15)$$

Wyrażenie to odpowiada pojawieniu się wykresie linii dla  $\omega = 0$  (brak oscylacji) w całej dziedzinie czasu. Poza tą linią funkcja Wignera przyjmuje wartość 0.

Następnie obliczono w programie MATLAB dyskretną funkcję Wignera dla danych wejściowych:  $x_0 = 0$ ,  $m = 1$  i  $H = 4$ . Częstość próbkowania sygnału wejściowego wynosiła  $f_s = 100 \text{ Hz}$  a jego długość  $N = 1000$  (te wartości parametrów używane są w całym rozdziale, jeśli nie zaznaczono inaczej). Wartość funkcji Wignera zaznaczono kolorem, a skalę barw dobrano tak, aby 0 znajdowało się pośrodku skali.



Rys. 3 Wykres funkcji Wignera dla cząstki swobodnej

W przypadku dyskretnej transformaty uzyskano obraz zgodny z wynikiem analitycznym- sygnał jednostkowy zlokalizowany w  $\omega = 0$ . Z powodu niedokładności wynikającej z dyskretyzacji funkcja Wignera przyjmuje wartości różne od 0 poza tym obszarem. Dla początkowych i końcowych  $t$  obraz jest zakłócony przez małą liczbę składników sumy (odpowiednio  $n$  dla  $n < N/2$  i  $N - n$  dla  $n > N/2$ ).

## 2.2 Oscylator harmoniczny prosty

### 2.2.1 Równanie ruchu oscylatora harmonicznego

Dla oscylatora harmonicznego energia potencjalna wynosi  $U(x) = kx^2/2$ , gdzie  $k$  to współczynnik sprężystości, związany z masą  $m$  i częstością drgań własnych  $\Omega$  zależnością:

$$\Omega^2 = \frac{k}{m} \quad (2.16)$$

Stąd i z definicji 2.2

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\Omega^2 x^2}{2}, \quad (2.17)$$

zatem równania Hamiltona przyjmują postać:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{m\Omega^2 x^2}{2} \right)}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -\frac{\partial \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{m\Omega^2 x^2}{2} \right)}{\partial x} = -m\Omega^2 x. \end{cases} \quad (2.18)$$

Różniczkując po czasie pierwsze równanie otrzymujemy układ:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m} \dot{p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{m\Omega^2 x^2}{2} \right)}{\partial x} = -m\Omega^2 x. \end{cases} \quad (2.19)$$

Podstawiając w pierwszym równaniu wartość  $\dot{p}$  z drugiego równania, otrzymujemy jedno równanie zawierające tę samą informację co powyższy układ równań:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \dot{p} = -\Omega^2 x. \quad (2.20)$$

Równanie charakterystyczne tego równania ma postać:

$$\lambda^2 = (i\Omega)^2, \quad (2.21)$$

zatem ma ono dwa zespolone sprzężone pierwiastki  $\lambda_1 = i\Omega$  i  $\lambda_2 = -i\Omega$ , stąd rozwiązanie ogólne ma postać:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t} \\ &= (C_1 + C_2) \cos(\Omega t) + (iC_1 - iC_2) \sin(\Omega t) \\ &= A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Aby uprościć wyrażenie, przyjmijmy warunki początkowe tożsame z przejściem ciała przez położenie równowagi (tzn.  $x = 0$ )

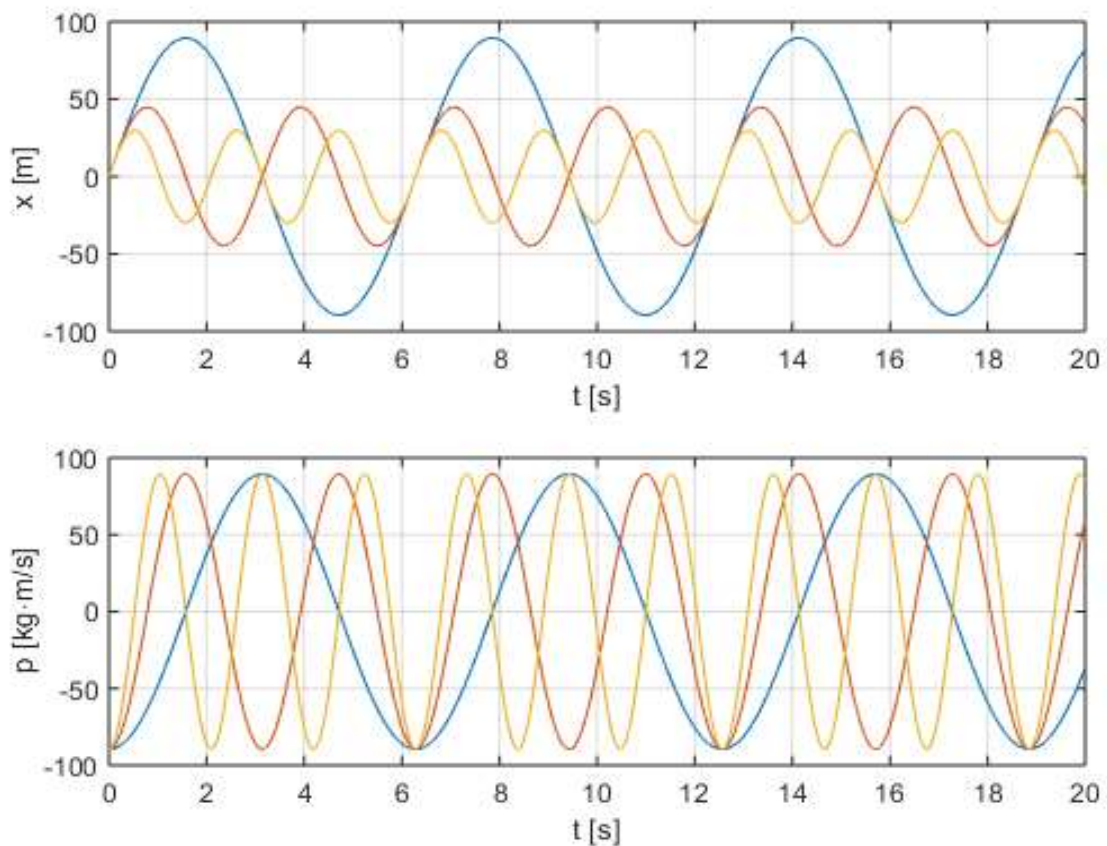
$$\begin{cases} x(0) = A \sin(\Omega \cdot 0) + B \cos(\Omega \cdot 0) = 0 \\ p(0) = \Omega mA \cos(\Omega \cdot 0) - \Omega mB \sin(\Omega \cdot 0) = p_0. \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = \frac{p_0}{\Omega m}, \end{cases}$$

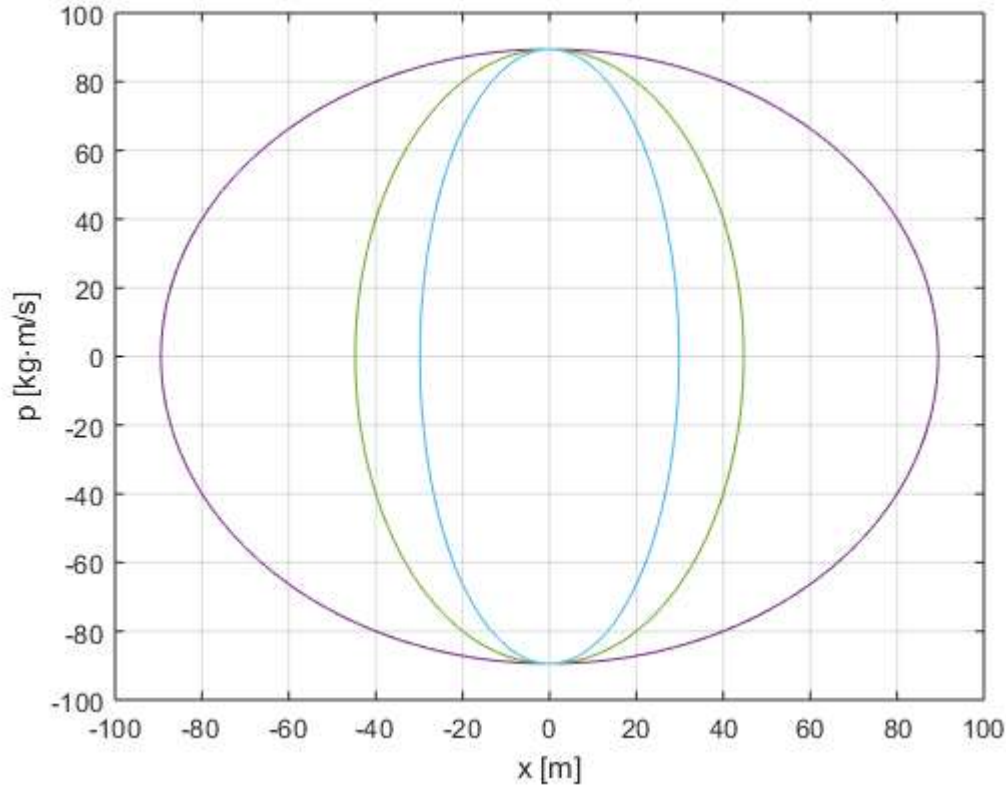
zatem dla wybranych warunków początkowych:

$$x(t) = \frac{p_0}{\Omega m} \sin(\Omega t) \quad (2.24)$$

Dla uzyskanego równania 2.24, przyjmując jednostkową masę  $m = 1$  uzyskano w programie MATLAB wykresy  $x(t)$ ,  $p(t)$  oraz portret fazowy dla ustalonej wartości energii, przy różnych częstotliwościach  $\Omega$  i odpowiadających im amplitudach drgań.



Rys. 4 Przykładowa zależność położenia  $x(t)$  i pędu  $p(t)$  od czasu dla oscylatora harmonicznego prostego. Każdy zilustrowany ruch odbywa się przy tej samej energii, ale z różną częstotliwością drgań.



Rys. 5 Przykładowy portret fazowy dla dla oscylatora harmonicznego prostego. Każdy zilustrowany ruch odbywa się przy tej samej energii, ale z różną częstotliwością drgań.

### 2.2.2 Funkcja Wignera oscylatora harmonicznego prostego

Dla  $x(t) = \frac{p_0}{\Omega m} \sin(\Omega t)$  funkcja Wignera przyjmuje wartość:

$$W_x(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{p_0}{\Omega m} \sin\left(\Omega t + \Omega \frac{T}{2}\right) \right) \left( \frac{p_0}{\Omega m} \sin\left(\Omega t - \Omega \frac{T}{2}\right) \right) e^{-i\omega T} dT \quad (2.25)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{p_0}{\Omega m} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sin\left(\Omega t + \Omega \frac{T}{2}\right) \right) \left( \sin\left(\Omega t - \Omega \frac{T}{2}\right) \right) e^{-i\omega T} dT$$

Korzystając z właściwości funkcji trygonometrycznych:

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \quad (2.26)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad (2.27)$$

otrzymujemy po podstawieniu postać

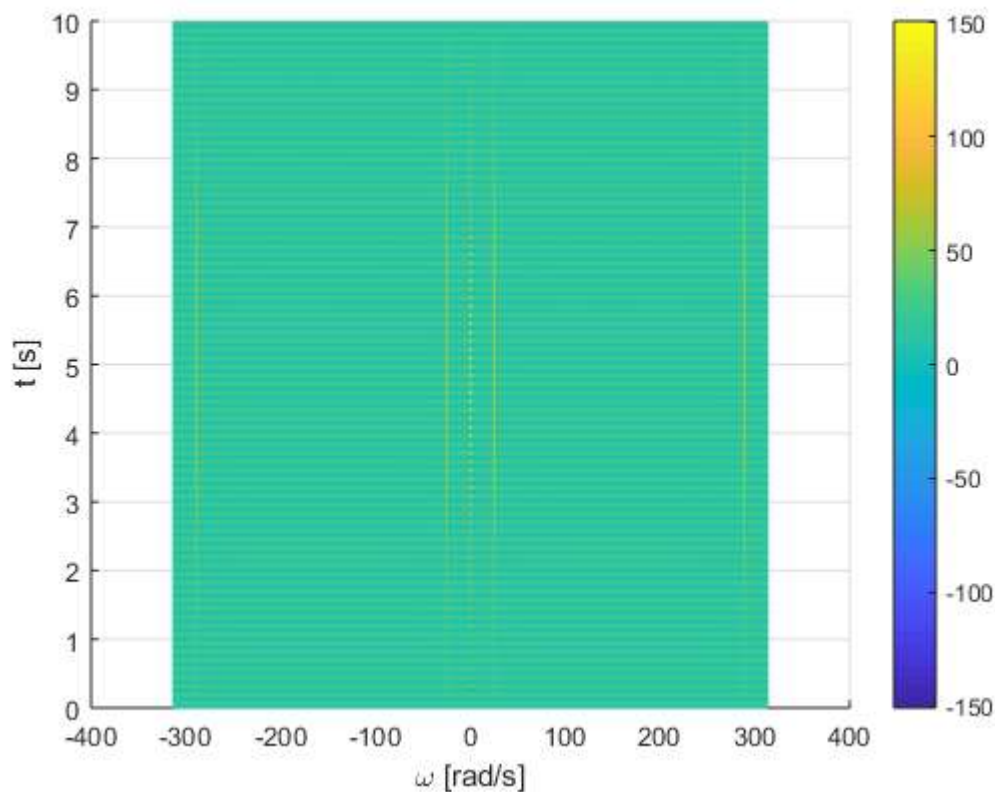
$$\begin{aligned}
W_x(t, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{p_0}{\Omega m}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\Omega t + i\Omega \frac{T}{2}} - e^{-i\Omega t - i\Omega \frac{T}{2}}}{2i} \frac{e^{i\Omega t - i\Omega \frac{T}{2}} - e^{-i\Omega t + i\Omega \frac{T}{2}}}{2i} e^{-i\omega T} dT \quad (2.28) \\
&= \frac{1}{-4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{p_0}{\Omega m}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( e^{i\Omega t + i\Omega \frac{T}{2} + i\Omega t - i\Omega \frac{T}{2}} - e^{i\Omega t + i\Omega \frac{T}{2} - i\Omega t + i\Omega \frac{T}{2}} \right. \\
&\quad \left. - e^{-i\Omega t - i\Omega \frac{T}{2} + i\Omega t - i\Omega \frac{T}{2}} + e^{-i\Omega t - i\Omega \frac{T}{2} - i\Omega t + i\Omega \frac{T}{2}} \right) e^{-i\omega T} dT \\
&= \frac{1}{-2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{p_0}{\Omega m}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (e^{i2\Omega t} + e^{-i2\Omega t}) e^{-i\omega T} dT \\
&\quad + \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{p_0}{\Omega m}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\Omega T - i\omega T}) dT \\
&\quad + \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{p_0}{\Omega m}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-i\Omega T - i\omega T}) dT \\
&= \frac{1}{-2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{p_0}{\Omega m}\right)^2 \cos(2\Omega t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega T} dT + \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{p_0}{\Omega m}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i(\Omega - \omega)T}) dT \\
&\quad + \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{p_0}{\Omega m}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-i(\Omega + \omega)T}) dT
\end{aligned}$$

Ponownie korzystając z delty Diraca (2.10) uzyskujemy końcową postać:

$$\begin{aligned}
W_x(t, \omega) &= -2 \left[ \left(\frac{p_0}{2\Omega m}\right)^2 \cos(2\Omega t) \right] \delta(\omega) \quad (2.29) \\
&\quad + \left(\frac{p_0}{2\Omega m}\right)^2 \delta(\omega + \Omega) + \left(\frac{p_0}{2\Omega m}\right)^2 \delta(\omega - \Omega)
\end{aligned}$$

Na wykresie powinny się zatem pojawić się dwie linie odpowiadające częstości oscylacji  $\Omega$  i jej odpowiednika w dziedzinie ujemnych częstości ( $-\Omega$ ). Pomiedzy nimi, dla  $\omega = \frac{\Omega + (-\Omega)}{2} = 0$ , znajduje się dodatkowa linia, będąca wynikiem aliasingu.

W programie MATLAB obliczono i przedstawiono na wykresie dyskretną transformatę dla  $\Omega = 25$  rad/s:



Rys. 6 Wykres funkcji Wignera dla oscylatora harmonicznego prostego

Na wykresie pojawiają się wyznaczone teoretycznie linie dla  $\omega = \pm\Omega$  i  $\omega = 0$ , oraz wynikające z okresowości dyskretnej funkcji Wignera linie dla  $\omega = \pm 314 \mp \Omega$ .

## 2.3 Oscylator harmoniczny słabo tłumiony

### 2.3.1 Równanie ruchu oscylatora harmonicznego słabo tłumionego

W ruchu oscylatora harmonicznego tłumionego dochodzi do utraty energii, zatem zamiast równań Hamiltona zastosujemy równanie Newtona. Na oscylator harmoniczny działają dwie siły: siła sprężystości proporcjonalna do  $x^2$  i siła oporu, proporcjonalna do prędkości  $\dot{x}$ , zatem zgodnie z II zasadą mechaniki Newtona

$$m\ddot{x} = -kx - \Gamma\dot{x}. \quad (2.30)$$

Dzieląc stronami przez masę  $m$  i przyjmując oznaczenia  $k/m = \Omega^2$  oraz  $\Gamma/m = 2\gamma$  otrzymujemy postać

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega^2x = 0. \quad (2.31)$$

Równanie charakterystyczne tego równania ma postać

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \Omega^2 = 0, \quad (2.32)$$

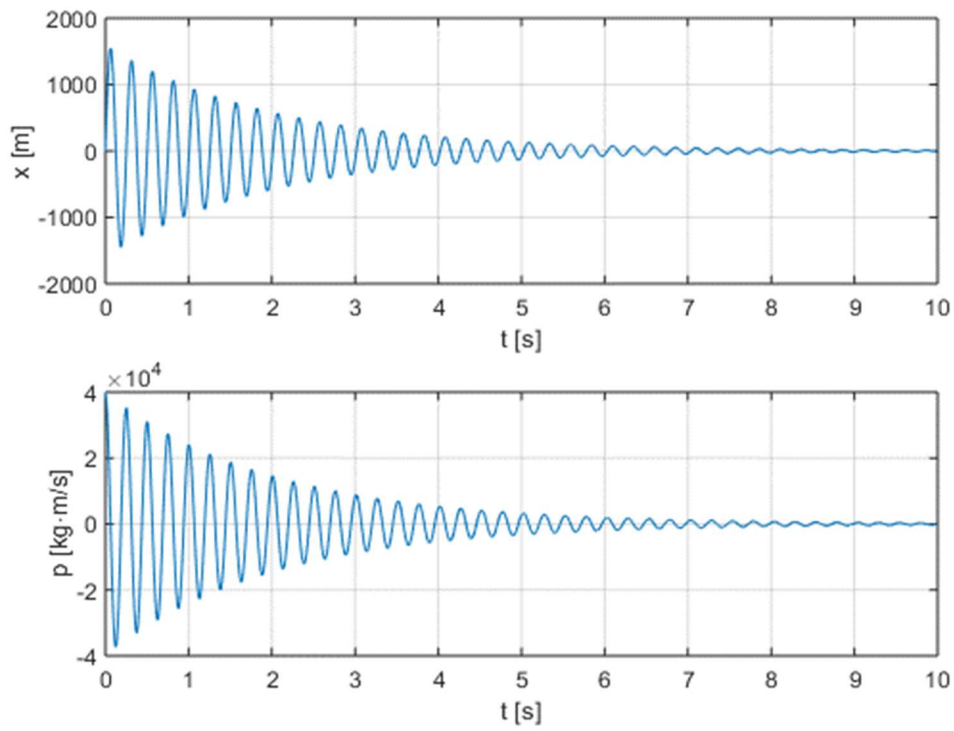
a wyróżnik tego równania wynosi  $\Delta = 4\gamma^2 - 4\Omega^2$ . Najciekawszy z punktu widzenia analizy w domenie czasowo-częstotliwościowej jest przypadek, gdy drgania nie są silnie tłumione, czyli  $\gamma < \Omega$ . Wówczas  $\lambda_{\pm} = -\gamma \pm i\sqrt{-\Delta}/2$ , a równanie ruchu (przy zastosowaniu oznaczenia  $\sqrt{-\Delta}/2 = \sqrt{\Omega^2 - \gamma^2} = \omega_0$ ) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-\gamma t} e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-\gamma t} e^{-i\omega_0 t} \\ &= (C_1 + C_2) e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t) \\ &\quad + i(C_1 - C_2) \sin(\omega_0 t) \\ &= B e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t) + A e^{-\gamma t} \sin(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (2.33)$$

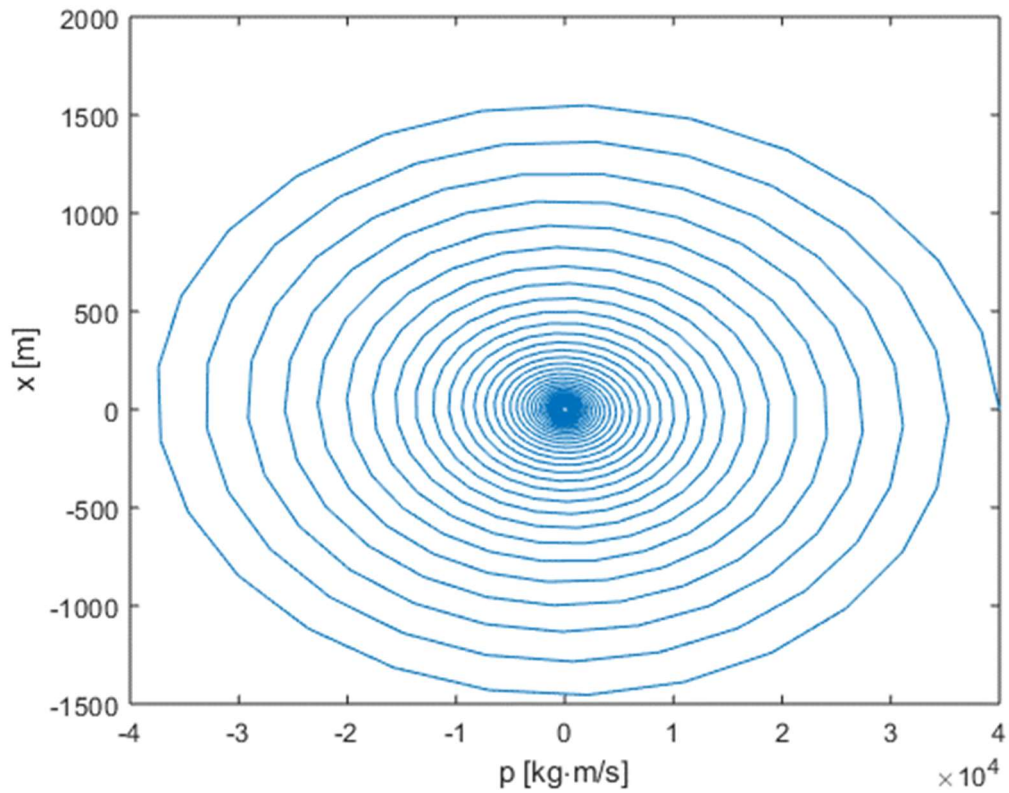
Wyrażenie to jest podobne do wyrażenia opisującego ruch oscylatora harmonicznego prostego, z tym że dodatkowo zawiera czynnik wygaszający  $e^{-\gamma t}$ , a częstość drgań  $\omega_0$  jest mniejsza od częstości drgań własnych  $\Omega$ . Zadając jako warunki początkowe wychylenie  $x(t=0) = 0$  i  $p(t=0) = p_0$ , wyrażenie ulega uproszczeniu do postaci:

$$x(t) = \frac{p_0}{\omega_0 m} e^{-\gamma t} \sin(\omega_0 t). \quad (2.34)$$

Na rysunkach 7 i 8 przedstawiono przykładowe zależności  $x(t)$ ,  $p(t)$  i portret fazowy. Ze względu na czytelność wykresów przedstawiono tylko jeden przykład, dla  $\Omega = 50\gamma = 25$  [rad/s].



Rys. 7 Przykładowa zależność położenia  $x(t)$  i pędu  $p(t)$  od czasu dla oscylatora tłumionego (słabe tłumienie)



Rys. 8 Przykładowy portret fazowy dla oscylatora tłumionego (słabe tłumienie)

### 2.3.2 Funkcja Wignera oscylatora harmonicznego słabo tłumionego

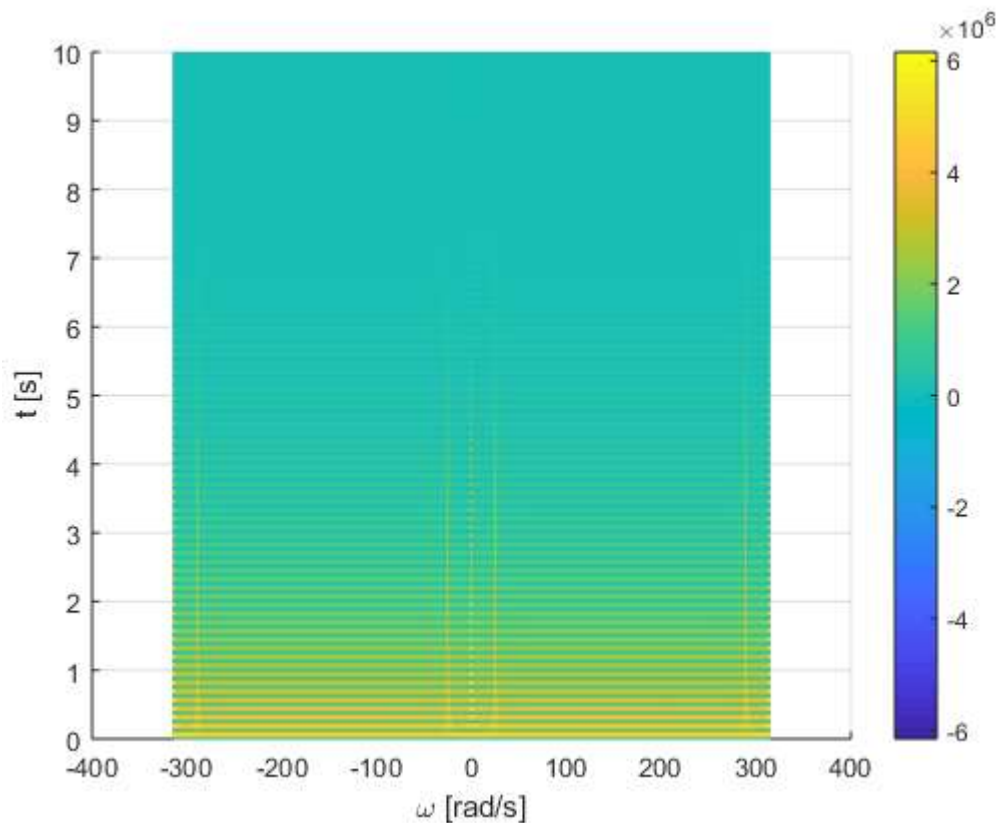
Dla oscylatora harmonicznego słabo tłumionego funkcja Wignera przyjmuje postać:

$$W_x(t, \omega) = -2 \left[ \left( \frac{p_{max}}{2\omega_0 m} \right)^2 e^{-2\gamma t} \cos(2\omega_0 t) \right] \delta(\omega) \quad (2.35)$$

$$+ \left( \frac{p_{max}}{2\omega_0 m} \right)^2 e^{-2\gamma t} \delta(\omega + \omega_0) + \left( \frac{p_{max}}{2\omega_0 m} \right)^2 e^{-2\gamma t} \delta(\omega - \omega_0)$$

Uzyskany wynik jest analogiczny jak dla oscylatora harmonicznego prostego, ze zmniejszoną odpowiednio częstotścią i czynnikiem wygaszającym  $e^{-2\gamma t}$ .

Dla funkcji  $x(t)$  zobrazowanej w podrozdziale 2.3., na rys. 7 i 8, obliczono i przedstawiono na wykresie dyskretną funkcję Wignera (rys.9)



Rys. 9 Wykres funkcji Wignera dla oscylatora harmonicznego tłumionego (słabe tłumienie)

Podobnie jak dla oscylatora harmonicznego prostego pojawiają się dwie linie, odpowiadające częstościom  $\omega_0$  i  $-\omega_0$  oraz wynikająca z aliasingu linia pomiędzy nimi, dla  $\omega = 0$ . Zgodnie z wynikiem teoretycznym, linie stopniowo zanikają z czasem, co jest efektem wygaszania.

## 2.4 Oscylator harmoniczny tłumiony krytycznie

### 2.4.1 Równanie ruchu dla oscylatora harmonicznego tłumionego krytycznie

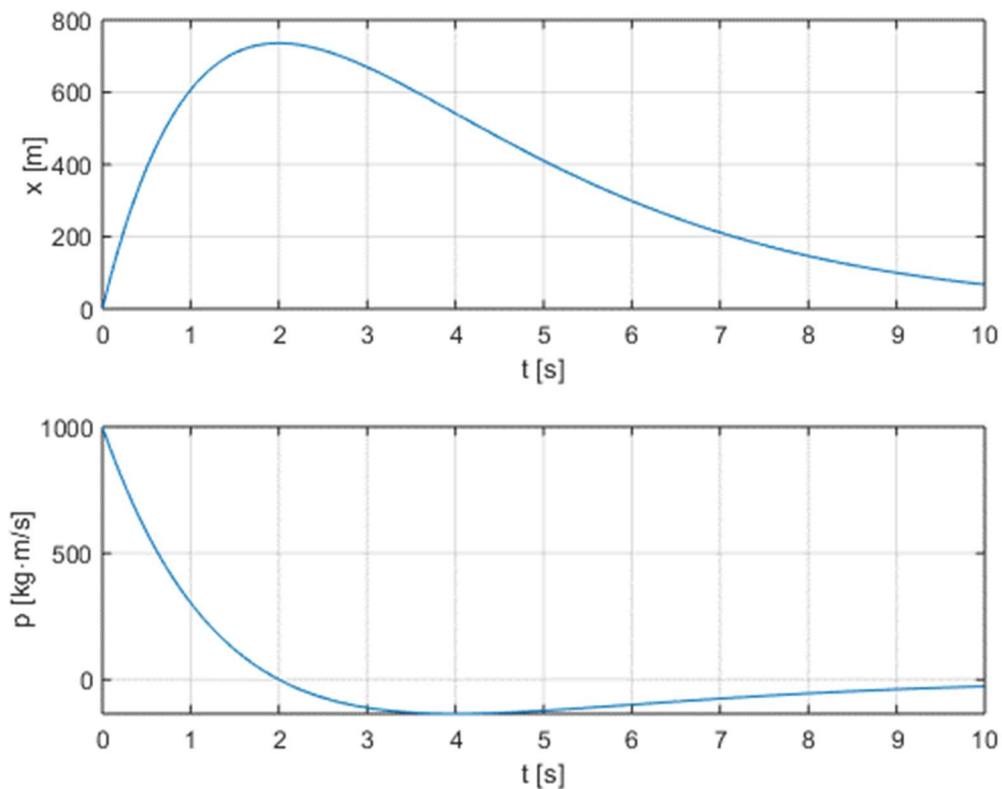
Tłumienie krytyczne zachodzi, gdy w równaniu 2.31  $\gamma = \Omega$ . Wówczas  $\lambda = -\gamma$ , a rozwiązanie równania ma postać:

$$x(t) = Ate^{\lambda t} + Be^{\lambda t}. \quad (2.36)$$

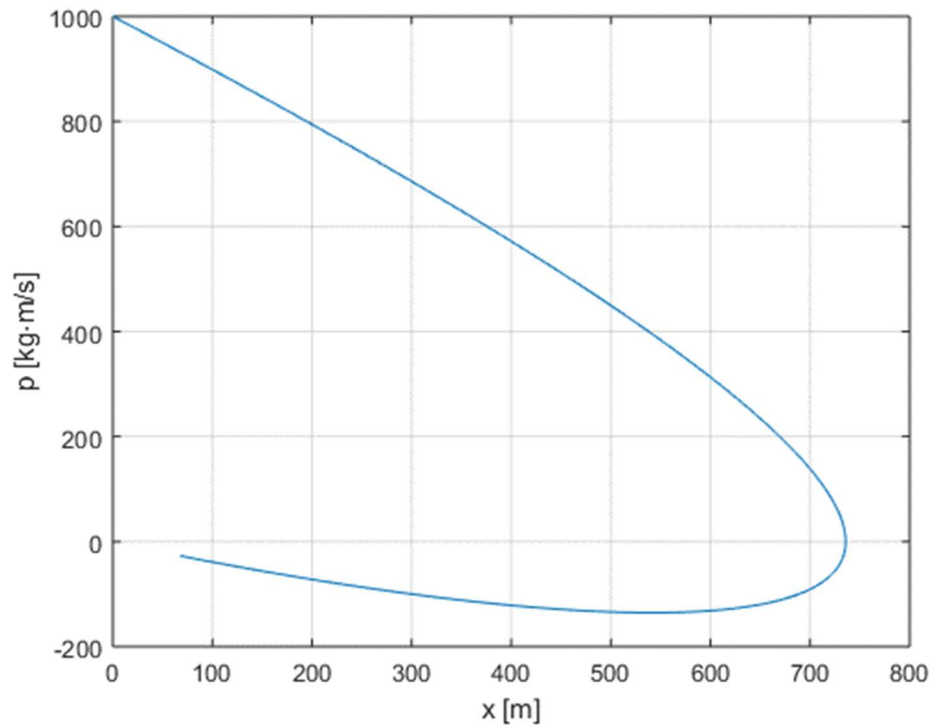
Przyjmując warunki początkowe  $x(t=0) = 0$  i  $p(t=0) = p_0$ , uzyskujemy

$$x(t) = \frac{p_0}{m} te^{-\gamma t}. \quad (2.37)$$

Dla  $\gamma = 0.5$  otrzymano następujące wykresy zależności  $x(t)$ ,  $p(t)$  i portret fazowy:



**Rys. 10** Przykładowa zależność położenia  $x(t)$  i pędu  $p(t)$  od czasu dla oscylatora tłumionego krytycznie



Rys. 11 Przykładowy portret fazowy dla oscylatora tłumionego krytycznie.

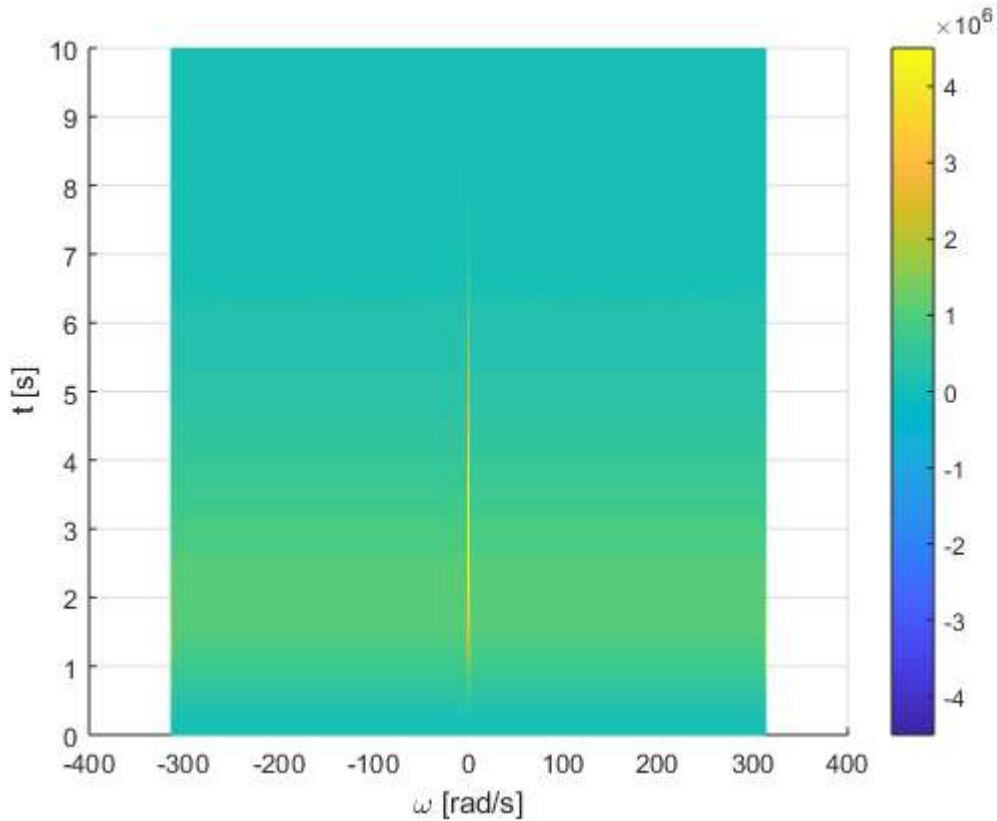
#### 2.4.2 Funkcja Wignera dla oscylatora harmonicznego tłumionego krytycznie

Dla (2.37) uzyskujemy funkcję Wignera w postaci

$$W_x(t, \omega) = e^{-2\gamma t} \left[ \left( \frac{p_0}{m} \right)^2 t^2 \right] \delta(\omega) + e^{-2\gamma t} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{p_0}{m} \right)^2 \frac{1}{\omega^2} \right] \delta(\omega) \quad (2.38)$$

W wyrażeniu występują jedynie linie dla  $\omega = 0$ , co odpowiada brakowi oscylacji. Linie są wygaszane przez malejące eksponentalnie czynniki  $e^{-2\gamma t}$ .

Dyskretna funkcja Wignera dla  $\gamma = 0.5$  przedstawia się jak na **Rys.12**. Zgodnie z wynikiem teoretycznym, występuje tylko linia dla  $\omega = 0$ , zanikająca z czasem.



Rys. 12 Wykres funkcji Wignera dla oscylatora harmonicznego tłumionego krytycznie

## 2.5. Oscylator harmoniczny silnie tłumiony

### 2.5.1 Równanie ruchu oscylatora harmonicznego silnie tłumionego

Jeśli w równaniu 2.31  $\gamma > \Omega$ , czyli współczynnik tłumienia góruje nad współczynnikiem oscylacji, mamy do czynienia z ruchem silnie tłumionym

$$x(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t}, \quad (2.39)$$

gdzie  $\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\Delta}/2 = -\gamma \pm \Omega_0$ .

Dla warunków początkowych  $x(0) = 0$  i  $p(0) = p_0$  otrzymujemy:

$$\begin{cases} 0 = Ae^0 + Be^0 \Rightarrow B = -A \\ p_0 = mA(-\gamma + \Omega_0)e^0 + mB(-\gamma - \Omega_0)e^0 = mA2\Omega_0 \Rightarrow A = \frac{p_0}{2m\Omega_0} \end{cases} \quad (2.40)$$

Ruch ten jest złożeniem dwóch wyrazów malejących eksponencjalnie i w dziedzinie

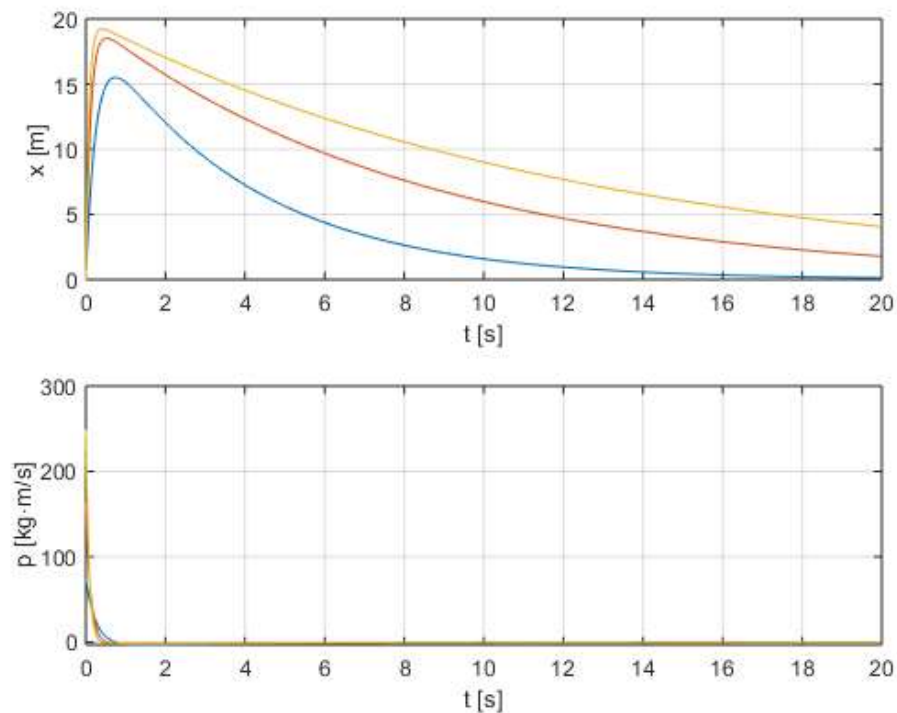
rzeczywistej nie występują w nim oscylacje. Alternatywnie można przedstawić wzór posługując się pojęciem funkcji hiperbolicznych, które definiuje się następująco:

$$\cosh(\omega) = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{2}; \quad \sinh(\omega) = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2} \quad (2.41)$$

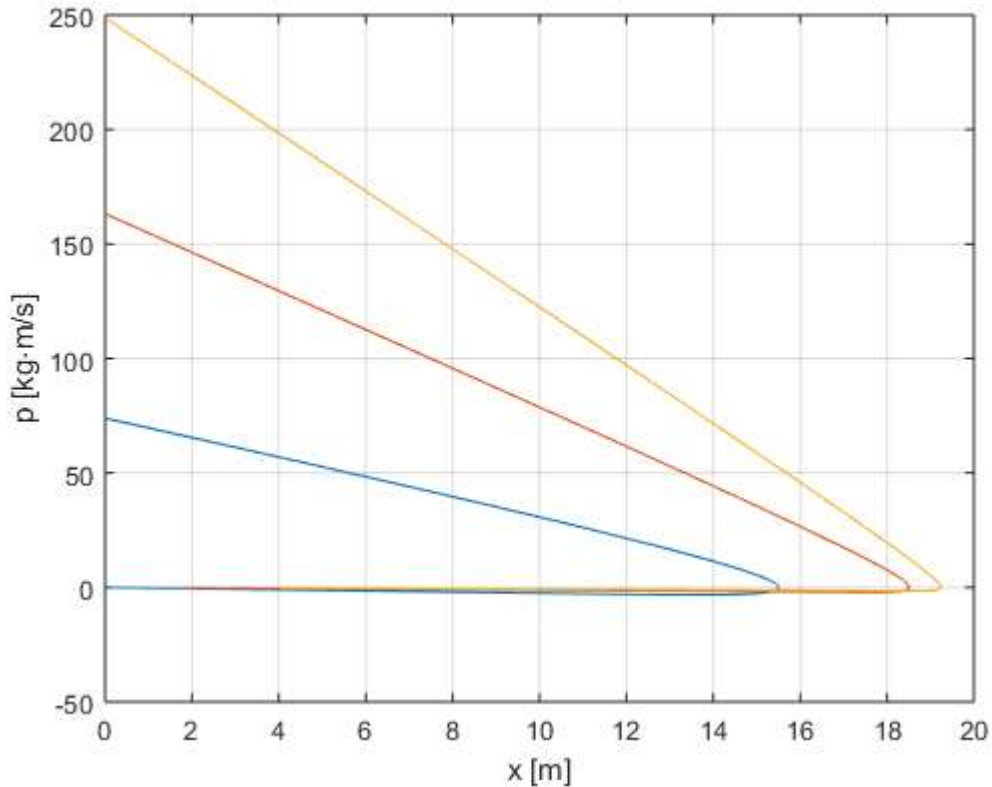
Stosując te wzory, uzyskujemy:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{p_0}{2m\Omega_0} e^{-\gamma t} e^{\Omega_0 t} - \frac{p_0}{2m\Omega_0} e^{-\gamma t} e^{-\Omega_0 t} \\ &= \frac{p_0}{m\Omega_0} e^{-\gamma t} \frac{(e^{\Omega_0 t} - e^{-\Omega_0 t})}{2} = \frac{p_0}{m\Omega_0} e^{-\gamma t} \sinh(\Omega_0 t) \end{aligned} \quad (2.42)$$

W tej postaci równanie przypomina równanie ruchu uzyskane dla oscylatora słabo tłumionego, z tą różnicą, że zamiast okresowego w dziedzinie rzeczywistej sinusa występuje okresowy wzdłuż osi urojonej sinus hiperboliczny. Przykładowe wykresy zależności  $x(t)$ ,  $p(t)$  i portret fazowy dla zadanych warunków przedstawiono na **Rys.13-14**



**Rys. 13** Przykładowa zależność położenia  $x(t)$  i pędu  $p(t)$  od czasu dla oscylatora tłumionego (silne tłumienie). Kolory odpowiadają różnym częstościom drgań własnych.



Rys. 14 Przykładowy portret fazowy dla oscylatora tłumionego (silne tłumienie). Kolory odpowiadają różnym częstościom drgań własnych.

## 2.5.2 Funkcja Wignera dla oscylatora harmonicznego silnie tłumionego

Sinus hiperboliczny można przedstawić za pomocą szeregu Taylora:

$$\sinh(\Omega_0 t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\Omega_0 t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2.43)$$

Podstawiając do definicji funkcji Wignera (1.2) funkcję  $x(t)$  otrzymamy

$$W_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{p_0}{m\Omega_0} e^{-\gamma T} e^{-\frac{1}{2}\gamma T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Omega_0^{2n+1} \left(t + \frac{1}{2}T\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \quad (2.44)$$

$$\times \left( \frac{p_0}{m\Omega_0} e^{-\gamma t} e^{\frac{1}{2}\gamma T} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Omega_0^{2n+1} \left(t - \frac{1}{2}T\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) e^{-i\omega T} dT$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{p_0}{m\Omega_0} \right)^2 e^{-2\gamma t} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left( \Omega_0 t + \frac{1}{2} \Omega_0 T \right)^{2n+1} \cdot \left( \Omega_0 t - \frac{1}{2} \Omega_0 T \right)^{2n+1}}{((2n+1)!)^2} \right) e^{-i\omega T} dT \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{p_0}{m\Omega_0} \right)^2 e^{-2\gamma t} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left( (\Omega_0 t)^2 - \left( \frac{1}{2} \Omega_0 T \right)^2 \right)^{2n+1}}{((2n+1)!)^2} \right) e^{-i\omega T} dT \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{p_0}{m\Omega_0} \right)^2 e^{-2\gamma t} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \binom{2n+1}{k} (\Omega_0 t)^{2(2n+1-k)} \left( \frac{1}{2} \Omega_0 T \right)^{2k}}{((2n+1)!)^2} \right) e^{-i\omega T} dT \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{p_0}{m\Omega_0} \right)^2 e^{-2\gamma t} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\binom{2n+1}{k} (\Omega_0 t)^{2(2n+1-k)} \left( \frac{1}{2} \Omega_0 \right)^{2k}}{((2n+1)!)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k (T)^{2k} e^{-i\omega T} dT.
\end{aligned}$$

W tym momencie warto zauważyć, że dla  $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^m}{\partial \omega^m} e^{-i\omega T} &= (-iT)^m e^{-i\omega T} \\
&= \begin{cases} T^m e^{-i\omega T} & \text{dla } m \bmod 4 = 0 \\ -iT^m e^{-i\omega T} & \text{dla } m \bmod 4 = 1 \\ -T^m e^{-i\omega T} & \text{dla } m \bmod 4 = 2 \\ iT^m e^{-i\omega T} & \text{dla } m \bmod 4 = 3 \end{cases} \quad (2.45)
\end{aligned}$$

Zatem dla parzystych wartości  $k = 2l$  zachodzi

$$(-1)^k (T)^{2k} e^{-i\omega T} = (-1)^{2l} (T)^{4l} e^{-i\omega T} = \frac{\partial^{2k}}{\partial \omega^{2k}} e^{-i\omega T}, \quad (2.46)$$

a dla nieparzystych  $k = 2l + 1$

$$(-1)^k (T)^{2k} e^{-i\omega T} = (-1)^{2l+1} (T)^{4l+2} e^{-i\omega T} = \frac{\partial^{2k}}{\partial \omega^{2k}} e^{-i\omega T}. \quad (2.47)$$

Dzięki temu wyrazy szeregu można przedstawić jako

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k (T)^{2k} e^{-i\omega T} dT &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{2k}}{\partial \omega^{2k}} e^{-i\omega T} dT \\ &= \frac{\partial^{2k}}{\partial \omega^{2k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega T} dT = \frac{\partial^{2k}}{\partial \omega^{2k}} \delta(\omega). \end{aligned} \quad (2.48)$$

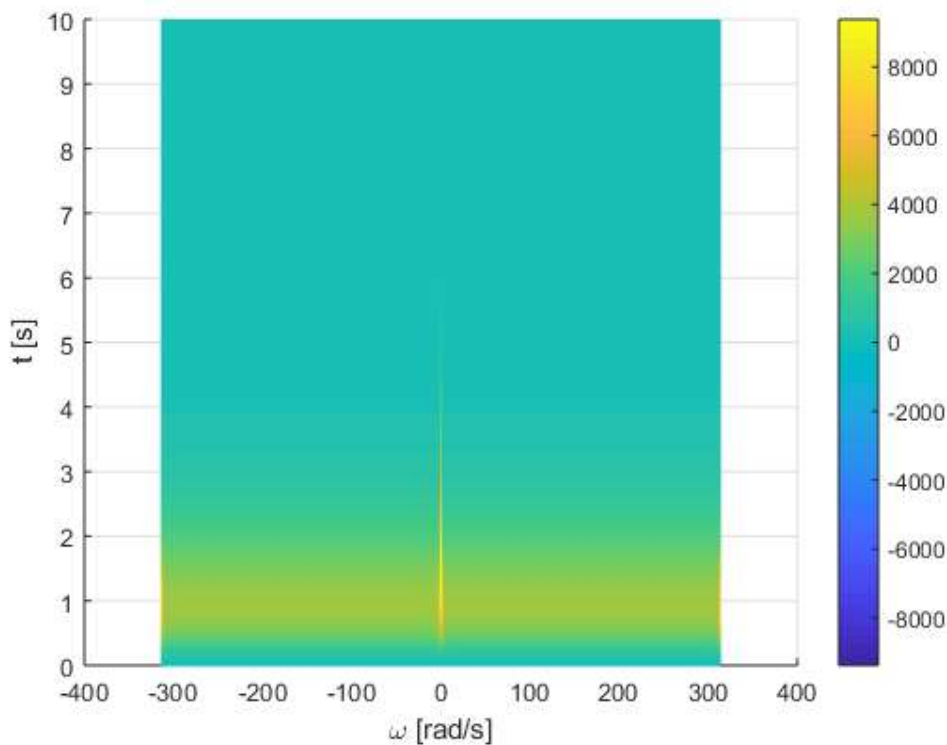
Ponieważ za (2.12)

$$\frac{\partial^n}{\partial \omega^n} \delta(\omega) = (-1)^n \frac{n!}{\omega^n} \delta(\omega), \quad (2.49)$$

ostatecznie funkcję Wignera dla oscylatora harmonicznego silnie tłumionego można przedstawić jako sumę delt Diraca  $\delta(\omega)$ :

$$W_x = \left( \frac{p_0}{m\Omega_0} \right)^2 e^{-2\gamma t} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \Omega_0^{2(2n+1)} \frac{\binom{2n+1}{k} (t)^{2(2n+1-k)} \left( \frac{1}{2} \right)^{2k}}{((2n+1)!)^2} \frac{(2k)!}{\omega^{2k}} \delta(\omega). \quad (2.50)$$

Dyskretna funkcja Wignera została przedstawiona na **Rys.15**



Rys. 15 Wykres funkcji Wignera dla oscylatora harmonicznego tłumionego (silne tłumienie)

Zgodnie z wynikiem teoretycznym, widoczna jest tylko jedna linia dla  $\omega = 0$ , wygaszana z czasem przez czynnik  $e^{-2\gamma t}$ .

## 2.6 Złożenie drgań harmoniczych prostych

### 2.6.1 Równanie ruchu dla złożenia drgań harmoniczych prostych

Kolejnym wartym rozpatrzenia układem jest układ w którym punkt wykonuje dwa niezależne ruchy oscylacyjne, czy innymi słowy oscyluje wokół punktu równowagi, który sam oscyluje względem punktu odniesienia. Ponieważ badanie funkcji Wignera dla złożenia drgań prostopadłych wymagałoby wprowadzenia kolejnego wymiaru przestrzennego, rozpatrzmy tylko drgania równoległe, tj. kiedy kierunek oscylacji punktu jest równoległy względem kierunku oscylacji punktu równowagi. Przykładem takiego ruchu może być rzut na prostą toru ruchu punktu na (idealnie kulistej) planecie, która obraca się wokół własnej osi, jednocześnie okrążając po okręgu ciało centralne.

W układzie odniesienia związanym z punktem równowagi punkt materialny wykonuje ruch oscylacyjny zgodnie ze wzorem:

$$x_1(t) = A \sin(\Omega_1 t + \varphi_1) \quad (2.51)$$

Wzór ten jest innym zapisem wzoru na ruch harmoniczny stosowanego do tej pory, ponieważ zgodnie ze wzorem na sinus sumy kątów:

$$\begin{aligned} A \sin(\Omega_1 t + \varphi_1) &= A \cos(\varphi_1) \sin(\Omega_1 t) + A \sin(\varphi_1) \cos(\Omega_1 t) \\ &= A_1 \cos(\Omega_1 t) + B_1 \sin(\Omega_1 t). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Dla uproszczenia przyjmijmy, że pomiar czasu zaczynamy w chwili przejścia przez punkt równowagi, zatem  $x_1(t = 0) = 0$ , a stąd  $\varphi_1 = 0$ .

W drugim układzie odniesienia układ pierwszy oscyluje względem drugiego punktu równowagi zgodnie ze wzorem:

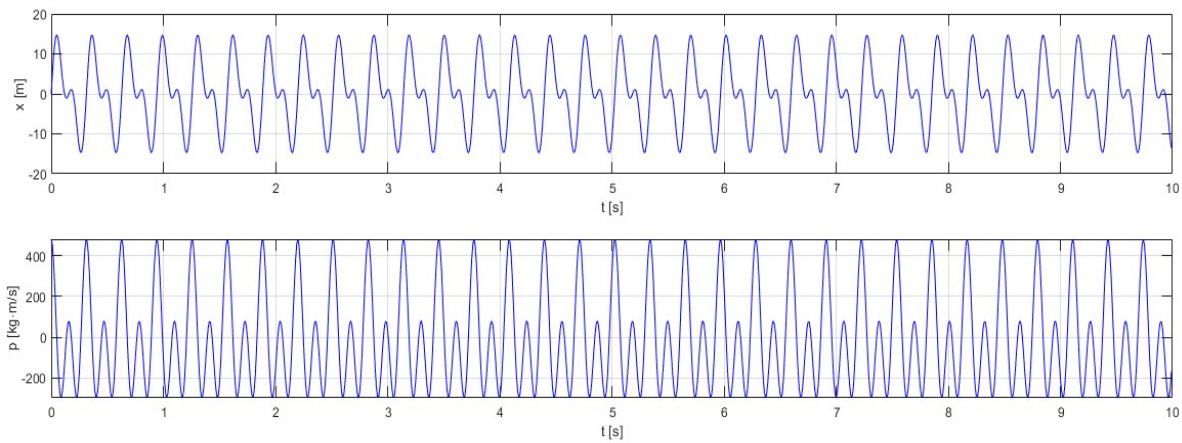
$$x_2(t) = B \sin(\Omega_2 t + \varphi_2) \quad (2.53)$$

Ostatecznie wypadkowy ruch punktu w drugim układzie jest superpozycją drgań punktu w układzie I i ruchu tego układu w układzie II, tj.

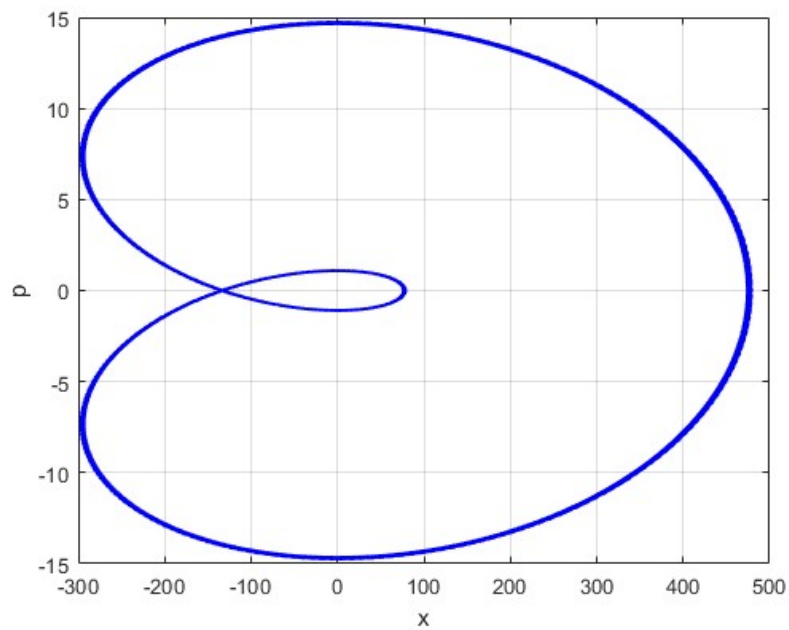
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \sin(\Omega_1 t) + B \sin(\Omega_2 t + \varphi_2). \quad (2.54)$$

W zależności od stosunku  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  można otrzymać różnego rodzaju krzywe, zarówno okresowe jak i nie. Jeśli stosunek ten jest wymierny, mamy do czynienia z ruchem okresowym, a jego okres podstawowy to najmniejsza wspólna wielokrotność okresów  $T_1$  i  $T_2$ .

Dla uzyskanego równania, przyjmując  $\Omega_1 = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  i  $\Omega_2 = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $A = 10$  i  $B = 7$ ,  $\varphi_2 = 0$ , uzyskano wykresy  $x(t)$ ,  $p(t)$  oraz portret fazowy (Rys 16-17).



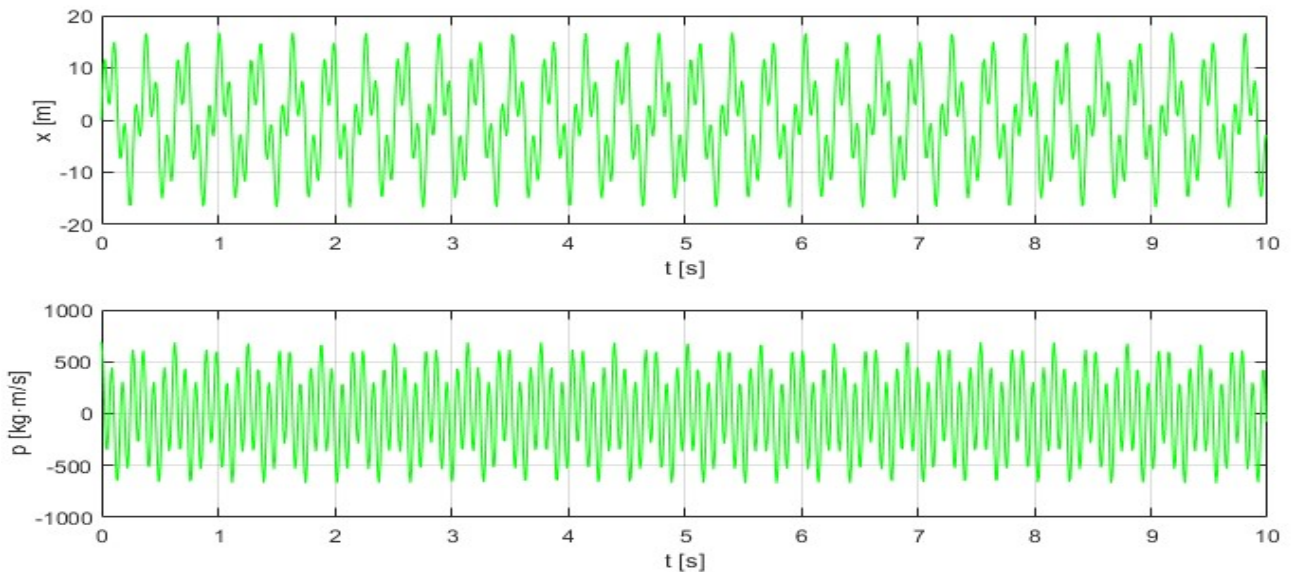
Rys. 16 Przykładowa zależność położenia  $x(t)$  i pędu  $p(t)$  od czasu dla złożenia dwóch drgań harmoniczych, gdy stosunek częstości drgań wynosi 1:2



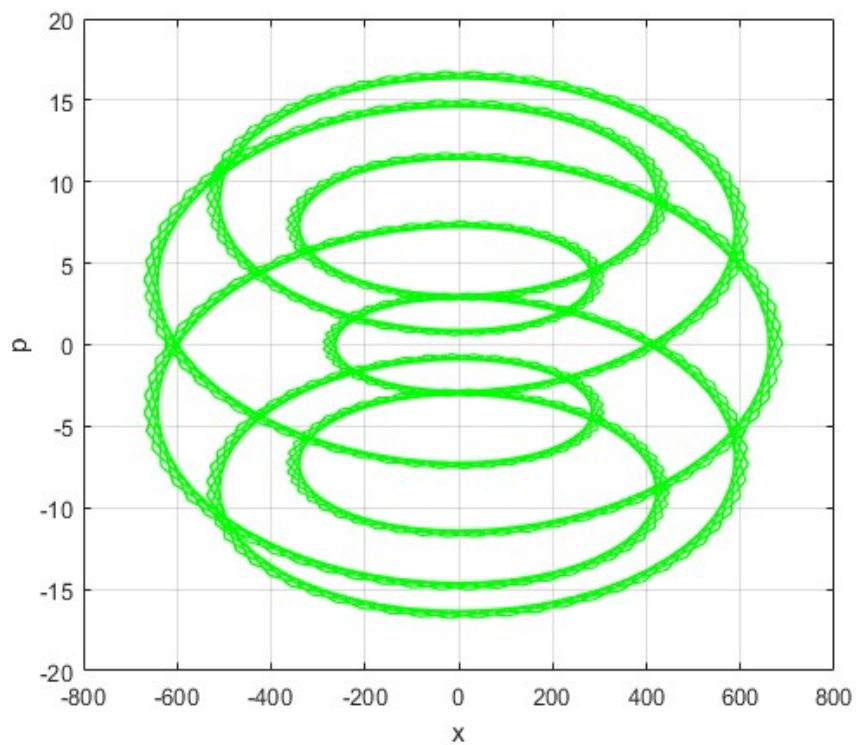
Rys. 17 Przykładowy portret fazowy dla złożenia dwóch drgań harmoniczych, gdy stosunek częstości drgań wynosi 1:2

Dla porównania jakie znaczenie ma stosunek częstości składowych, wykonano kolejny wykres przyjmując takie same parametry  $A$ ,  $B$  i  $\varphi_2$  oraz  $\Omega_1 = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  i  $\Omega_2 = 70 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  i uzyskano wykresy  $x(t)$ ,  $p(t)$  oraz portret fazowy (**Rys 18-19**). Ogólnie ujmując, im większy stosunek częstości składowych, tym wizualnie bardziej skomplikowany efekt, choć matematycznie jest to dalej zwykła suma dwóch funkcji sinus. To jeden z wielu powodów, dla których stosuje się analizę w przestrzeni częstości kołowej- w niektórych przypadkach takie podejście pozwala nam ujawnić prostą naturę pozornie złożonego zjawiska.

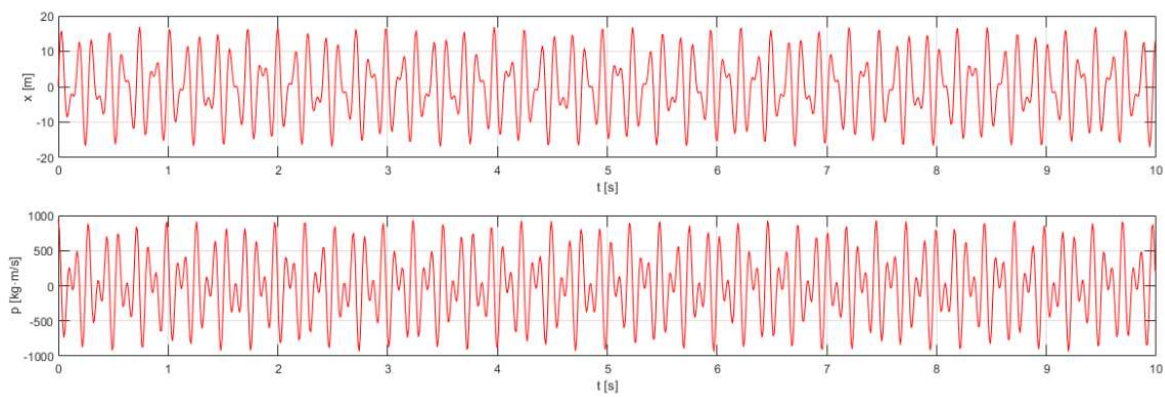
Aby pokazać przykład drgań złożonych który nie jest okresowy, wykonano kolejny wykres  $x(t)$ ,  $p(t)$  i portret fazowy (**Rys 20-21**), przyjmując takie same parametry  $A$ ,  $B$  i  $\varphi_2$  oraz  $\Omega_1 = 20\sqrt{5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  i  $\Omega_2 = 70 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , uzyskując w ten sposób niewymierny stosunek okresów.



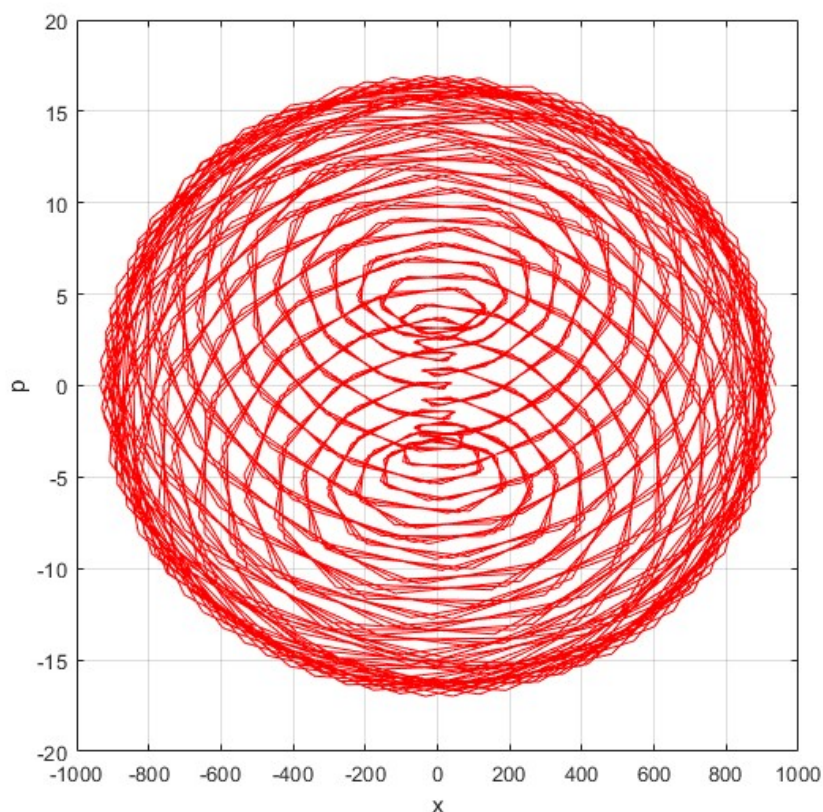
Rys. 18 Przykładowa zależność położenia  $x(t)$  i pędu  $p(t)$  od czasu dla złożenia dwóch drgań harmoniczych, gdy stosunek częstości drgań wynosi 2:7



**Rys. 19** Przykładowy portret fazowy dla złożenia dwóch drgań harmoniczných, gdy stosunek częstotliwości drgań wynosi 2:7



**Rys. 20** Przykładowa zależność położenia  $x(t)$  i pędu  $p(t)$  od czasu dla złożenia dwóch drgań harmoniczných, gdy stosunek częstotliwości drgań nie jest wymierny



Rys. 21 Przykładowy portret fazowy dla złożenia dwóch drgań harmoniczych, gdy stosunek częstości drgań jest liczbą niewymierną

### 2.6.2 Funkcja Wignera dla złożenia drgań harmoniczych prostych

Wprowadźmy oznaczenia:  $\Omega_s = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}$  i  $\Omega_r = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2}$ .  $\Omega_s$  jest zatem średnią arytmetyczną z dwóch częstości  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ , a  $\Omega_r$  jest średnią arytmetyczną z dwóch częstości  $\Omega_1$  i  $(-\Omega_2)$ . Funkcja autokorelacji dla wzoru 2.54 wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned}
 C(t, T) &= x\left(t + \frac{T}{2}\right)x\left(t - \frac{T}{2}\right) = & (2.55) \\
 & \left[ A \sin\left(\Omega_1 t + \Omega_1 \frac{T}{2}\right) + B \sin\left(\Omega_2 t + \Omega_2 \frac{T}{2} + \varphi_2\right) \right] \\
 & \times \left[ A \sin\left(\Omega_1 t - \Omega_1 \frac{T}{2}\right) + B \sin\left(\Omega_2 t - \Omega_2 \frac{T}{2} + \varphi_2\right) \right] \\
 & = \frac{1}{2i} \left( A e^{i\Omega_1 t + i\Omega_1 \frac{T}{2}} - A e^{-i\Omega_1 t - i\Omega_1 \frac{T}{2}} + B e^{i\Omega_2 t + i\Omega_2 \frac{T}{2} + i\varphi_2} - B e^{-i\Omega_2 t - i\Omega_2 \frac{T}{2} - i\varphi_2} \right) \\
 & \times \frac{1}{2i} \left( A e^{i\Omega_1 t - i\Omega_1 \frac{T}{2}} - A e^{-i\Omega_1 t + i\Omega_1 \frac{T}{2}} + B e^{i\Omega_2 t - i\Omega_2 \frac{T}{2} + i\varphi_2} - B e^{-i\Omega_2 t + i\Omega_2 \frac{T}{2} - i\varphi_2} \right) \\
 & = \frac{-A^2}{4} \left( e^{2i\Omega_1 t} + e^{-2i\Omega_1 t} \right) + \frac{A^2}{4} \left( e^{i\Omega_1 T} + e^{-i\Omega_1 T} \right) + \frac{-B^2}{4} \left( e^{2i\Omega_2 t + 2i\varphi_2} + e^{-2i\Omega_2 t - 2i\varphi_2} \right)
 \end{aligned}$$

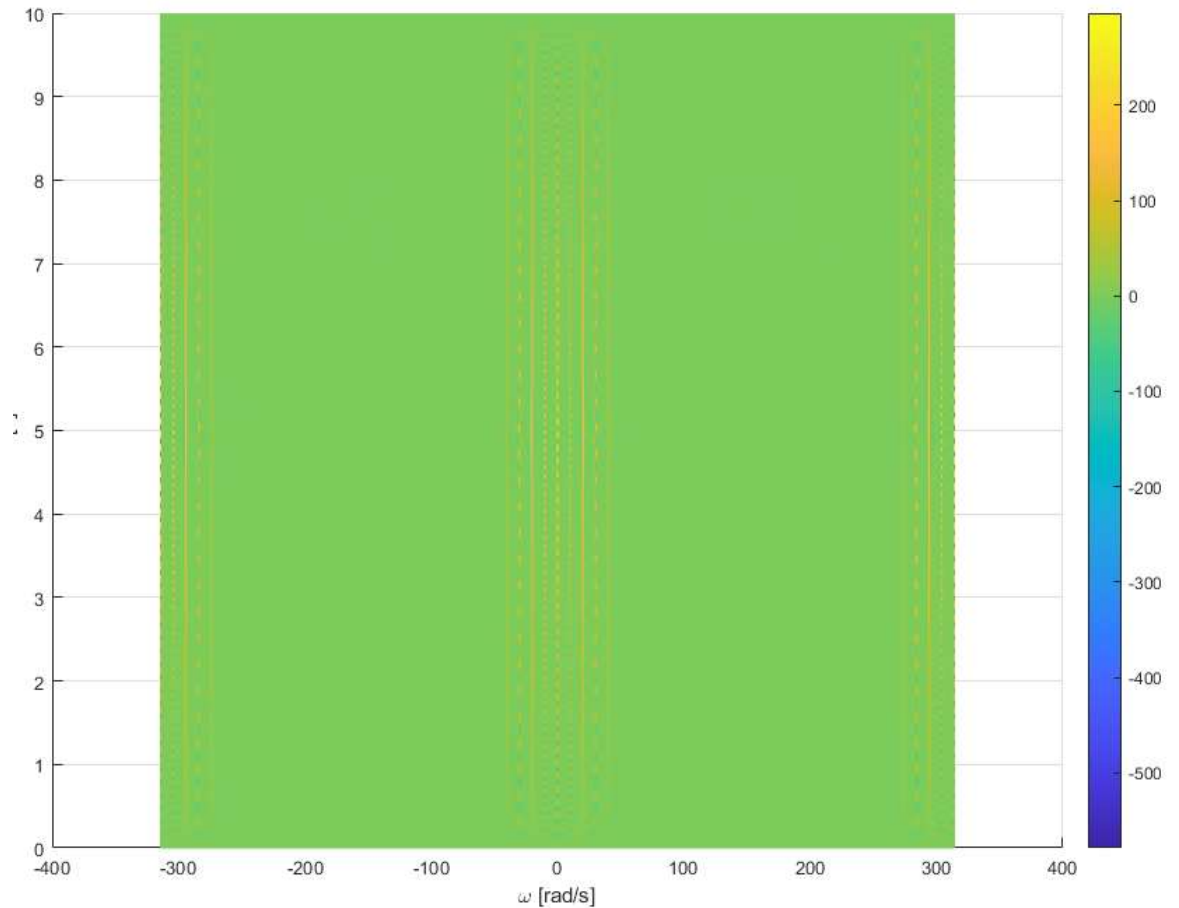
$$\begin{aligned}
& + \frac{B^2}{4} (e^{i\Omega_2 T} + e^{-i\Omega_2 T}) + \frac{-AB}{4} [2\cos(2\Omega_s t + \varphi_2) e^{i\Omega_r T} + 2\cos(2\Omega_s t + \varphi_2) e^{-i\Omega_r T}] \\
& + \frac{AB}{4} [2\cos(2\Omega_r t - \varphi_2) e^{i\Omega_s T} + 2\cos(2\Omega_r t - \varphi_2) e^{-i\Omega_s T}];
\end{aligned}$$

a zatem funkcja Wignera dla oscylacji złożonych

$$\begin{aligned}
W(t, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int C(t, T) e^{-i\omega T} dT & (2.56) \\
&= \frac{-A^2}{2} \cos(2\Omega_1 t) \delta(\omega) - \frac{B^2}{2} \cos(2\Omega_2 t + 2i\varphi_2) \delta(\omega) \\
&+ \frac{A^2}{4} [\delta(\omega - \Omega_1) + \delta(\omega + \Omega_1)] + \frac{B^2}{4} [\delta(\omega - \Omega_2) + \delta(\omega + \Omega_2)] \\
&+ \frac{-AB}{2} [\cos(2\Omega_s t + \varphi_2) \delta(\omega - \Omega_r) + \cos(2\Omega_s t + \varphi_2) \delta(\omega + \Omega_r)] \\
&+ \frac{AB}{2} [\cos(2\Omega_r t - \varphi_2) \delta(\omega - \Omega_s) + \cos(2\Omega_r t - \varphi_2) \delta(\omega + \Omega_s)].
\end{aligned}$$

Oznacza to, że na wykresie możemy się spodziewać dziewięciu linii: dwóch linii odpowiadających częstościom składanych drgań  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ , dwóch linii odpowiadających ich przeciwieństwom ( $-\Omega_1$ ) i ( $-\Omega_2$ ), oraz pięciu linii aliasingu dla wartości równych średnim arytmetycznym z dwóch wymienionych częstości: 0 dla  $\Omega_1$  i ( $-\Omega_1$ ) oraz  $\Omega_2$  i ( $-\Omega_2$ ),  $\Omega_s$  dla  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$ , ( $-\Omega_s$ ) dla ( $-\Omega_1$ ) i ( $-\Omega_2$ ),  $\Omega_r$  dla  $\Omega_1$  i ( $-\Omega_2$ ) oraz ( $-\Omega_r$ ) dla ( $-\Omega_1$ ) i  $\Omega_2$ .

Dla takich samych parametrów jak przy rysunku 16 uzyskano obraz dyskretnej funkcji Wignera (**Rys. 22**). Warto zaznaczyć, że względu na słabą widoczność niektórych linii pozostawiono domyślną skalę kolorów, nie wypośrodkując jej w 0 jak w innych przykładach.



Rys. 22 Wykres funkcji Wignera dla złożenia dwóch oscylacji harmoniczných.

Zgodnie z teoretycznymi wyliczeniami, można zauważyć 9 głównych linii.

### 2.6.3 Dudnienie

Szczególnym przypadkiem układu omawianego w podrozdziale 2.6 jest układ dudniący. Dudnienie to zjawisko zachodzące, gdy złożeniu ulegają dwa sygnały o zbliżonych parametrach: częstotliwości, amplitudzie i fazie. Im bardziej zbliżone do siebie są te wartości, tym dudnienie jest wyraźniejsze. Dudnienie wzięło swoją nazwę od zjawiska dźwiękowego, który pojawia się na przykład gdy dwa instrumenty grające *unisono* (łac. jednym głosem) nie są perfekcyjnie nastrojone. W efekcie słyszalna jest wyraźna modulacja głośności-a głośność dźwięku jest ściśle powiązana z amplitudą fali akustycznej.

Aby wyprowadzić równanie ruchu dla układu dudniącego, przyjmijmy, że oba sygnały mają tę samą amplitudę i są zgodne w fazie. Matematyczne wyprowadzenie dudnień przy innych założeniach jest bardziej skomplikowane, ale fizycznie to zjawisko zachodzi przy różnych warunkach. Dla  $A=B$  i  $\varphi_2 = 0$  wyrażenie 2.61 upraszcza się do

$$\begin{aligned}
 x(t) &= A\sin(\Omega_1 t) + A\sin(\Omega_2 t) = A(\sin(\Omega_1 t) + \sin(\Omega_2 t)) & (2.64) \\
 &= 2A\sin\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2}t\right) \\
 &= 2A\cos(\Omega_r t) \times \sin(\Omega_s t)
 \end{aligned}$$

Przyjmując oznaczenie

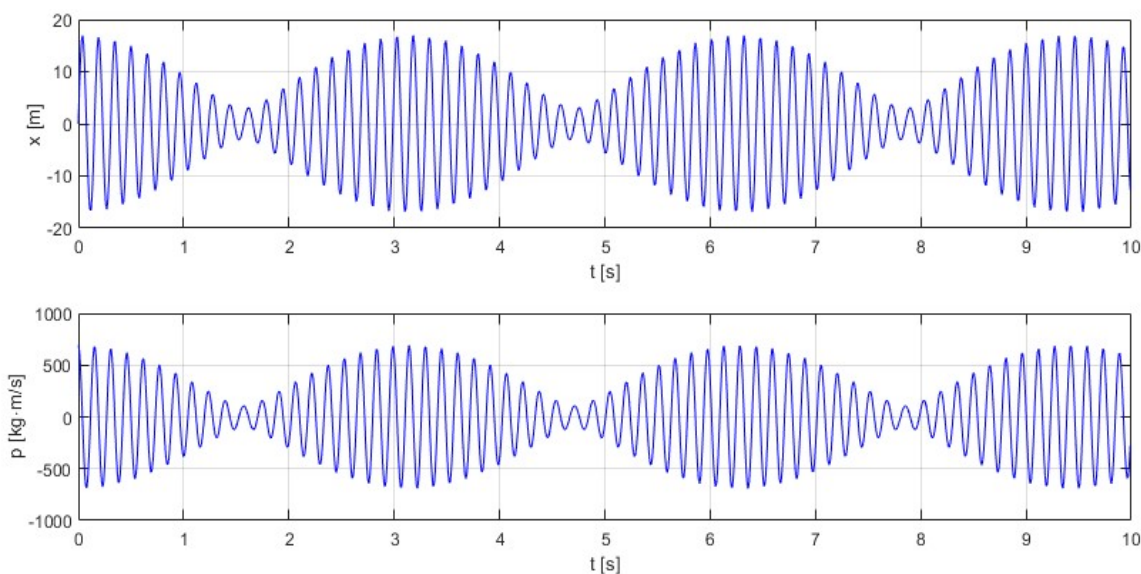
$$A_{mod}(t) = 2A\cos(\Omega_r t) \quad (2.65)$$

uzyskujemy równanie w postaci

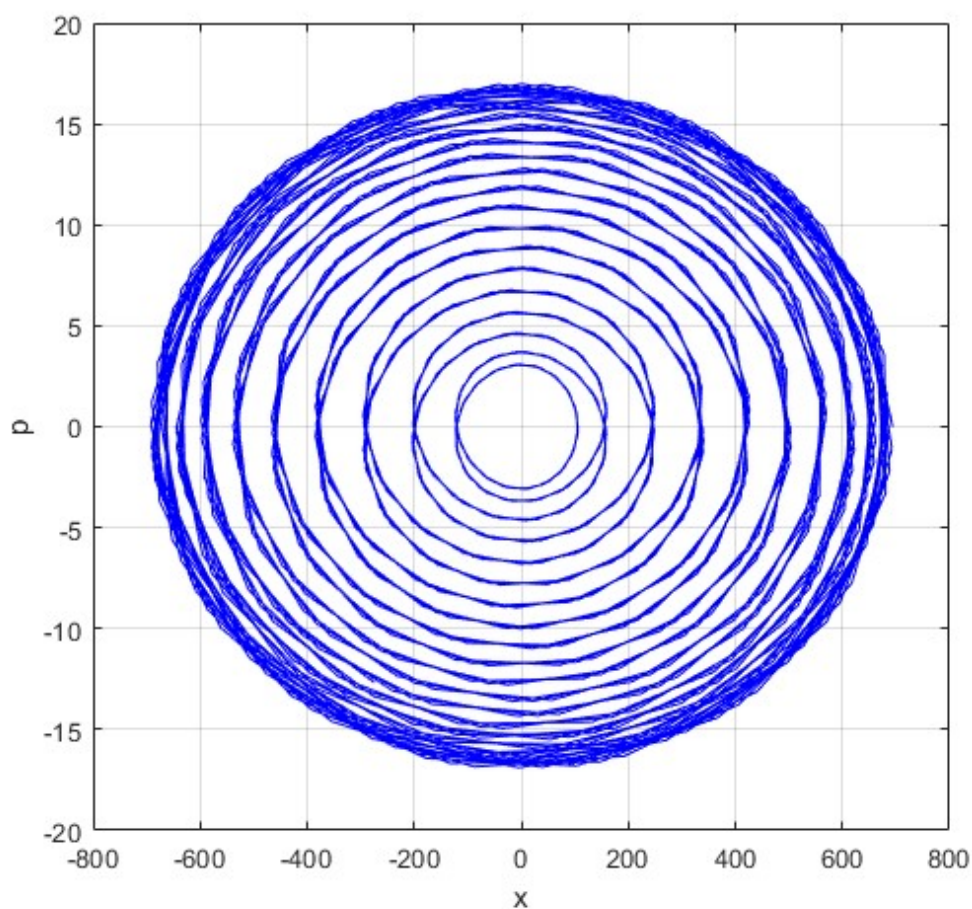
$$x(t) = A_{mod}(t) \times \sin(\Omega_s t) \quad (2.66)$$

Dzięki takiej postaci równania wyraźnie widać czym charakteryzują się dudnienia. Sygnał wypadkowy można interpretować nie jako dwa sygnały o różnych częstościach, lecz jak jeden sygnał o częstości pośredniej między składowymi ( $\Omega_s = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}$ ) i amplitudzie  $A_{mod}(t)$ , która zmienia się powoli z częstością  $\Omega_r = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2}$ . Ponieważ energia sygnału zależy od kwadratu amplitudy, częstość jej zmian jest dwukrotnie większa, czyli równa różnicy częstości składowych.

Aby zobrazować zjawisko dudnienia wykonano wykresy  $x(t)$ ,  $p(t)$  i portret fazowy (Rys.23-24) przyjmując  $A = 10$  i  $B = 7$ ,  $\varphi_2 = 0$ , oraz  $\Omega_1 = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  i  $\Omega_2 = 42 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$



Rys. 23 Przykładowa zależność położenia  $x(t)$  i pędu  $p(t)$  od czasu dla układu dudniącego

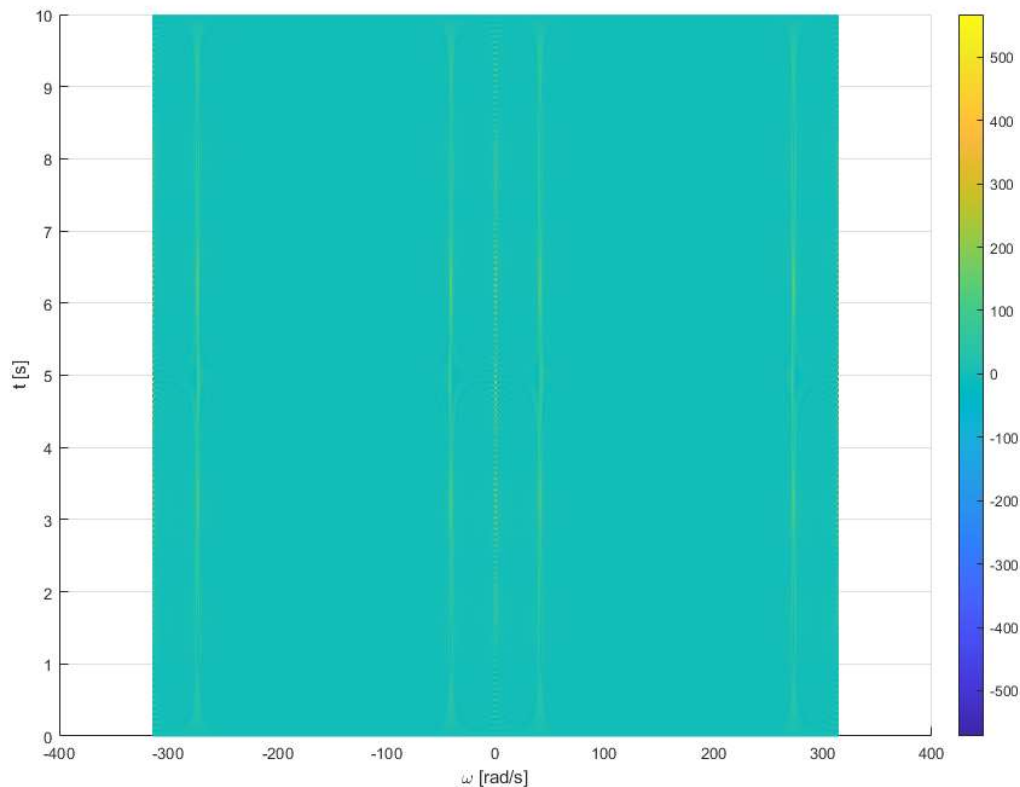


Rys. 24 Przykładowy portret fazowy dla układu dudniącego

#### 2.6.4 Funkcja Wignera dla dudniń

Poza innymi oznaczeniami i przyjęciem założenia, że amplitudy obu złożeń są takie same, teoretyczny wzór na funkcję Wignera dla dudniń jest taki sam jak w podpunkcie 2.6.2.

Ponieważ różnica  $\Omega_r$  jest z założenia mała, linie leżące blisko siebie praktycznie nałożą się na siebie, tworząc jedną rozmytą linię. Na wykresie możemy się spodziewać trzech linii: jednej linii odpowiadającej średniej arytmetycznej częstości składowych drgań  $\Omega_s$ , linii dla przeciwieństwa, tj.  $(-\Omega_s)$ , oraz linii dla  $\omega = 0$ .



Rys. 25 Wykres funkcji Wignera dla dudnień

Zgodnie z oczekiwaniami, można zauważyć 3 nieco rozmyte linie. Ponieważ różnica częstotliwości jest mała, linie dla  $\Omega_r$  i  $-\Omega_r$  połączyły się ze sobą i linią odpowiadającą za aliasing w  $\omega = 0$ , a linia dla  $\Omega_s$  to w rzeczywistości połączone linie częstotliwości składowych  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  i aliasingu pomiędzy nimi (analogicznie dla  $-\Omega_s$ ).

## 2.7 Układ drgający z malejącą masą

Ostatnim omawianym układem będzie układ drgający, w którym masa punktu ulega ciągłemu zmniejszeniu, przykładem rzeczywistym może być wprowadzony w oscylacje worek, z którego wysypuje się piasek. Nie bierzemy pod uwagę oporów ruchu ani działania innych sił poza siłą sprężystości. Warto zaznaczyć, że ponieważ masa opuszcza układ, energia całkowita układu nie jest zachowana.

Jest nieskończenie wiele możliwości modelowania jak zmienia się drgająca masa. Przyjmijmy wykładniczy spadek masy, tj.

$$m(t) = m_0 e^{-\mu t}, \quad (2.67)$$

gdzie  $m_0 = m(t = 0)$  i oznacza masę początkową, a  $\mu$  możemy nazwać stałą zaniku masy. Dzięki wybraniu takiego modelu mamy pewność, że niezależnie od czasu trwania obserwacji masa nigdy nie będzie ujemna i nie musimy nakładać dodatkowych ograniczeń na stałe  $m_0$  i  $\mu$  poza byciem dodatnimi liczbami rzeczywistymi.

Wychodząc ponownie z II zasady dynamiki Newtona możemy zapisać:

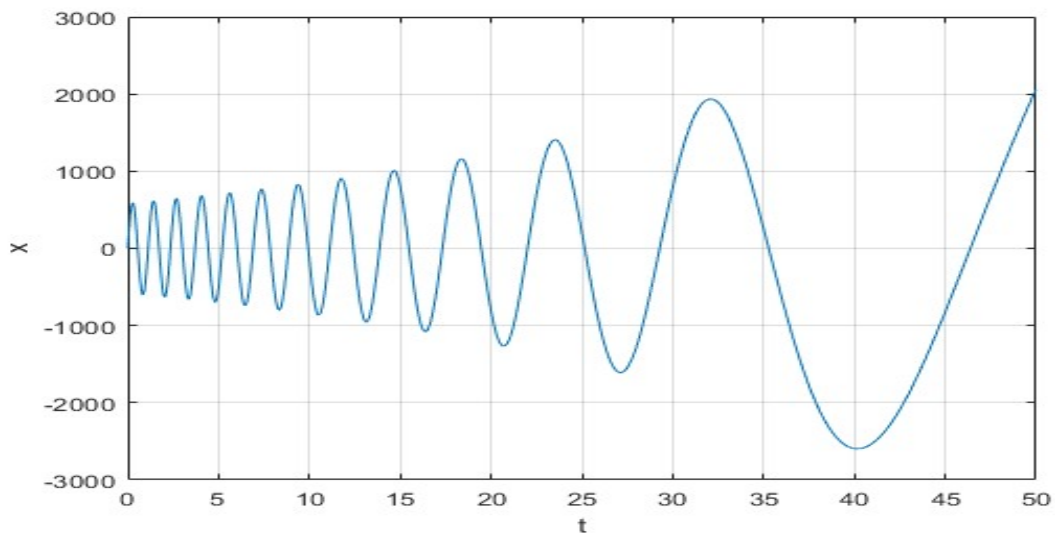
$$m(t)\ddot{x}(t) = -kx(t), \quad (2.68)$$

czyli po odpowiednich przekształceniach:

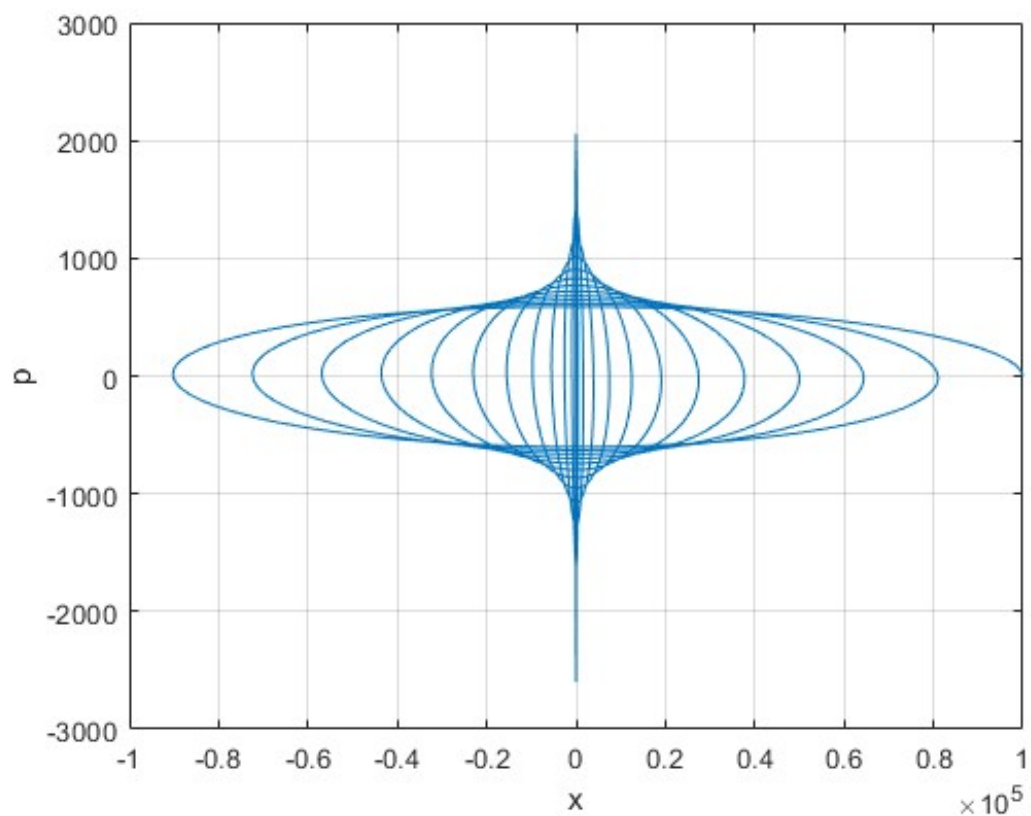
$$m_0 e^{-\mu t} \ddot{x}(t) - kx(t) = 0. \quad (2.69)$$

Ponieważ nie istnieje analityczny sposób na rozwiązanie tego typu równania różniczkowego, do zasymulowania sygnału (**Rys. 26-27**) zastosowano metodę Rungego-Kutty 4, a następnie wykonano wykres dyskretnej funkcji Wignera (**Rys. 28**) dla tego samego sygnału. Na **Rys. 26** wyraźnie widać, że wraz z upływem czasu maleje częstość drgań.

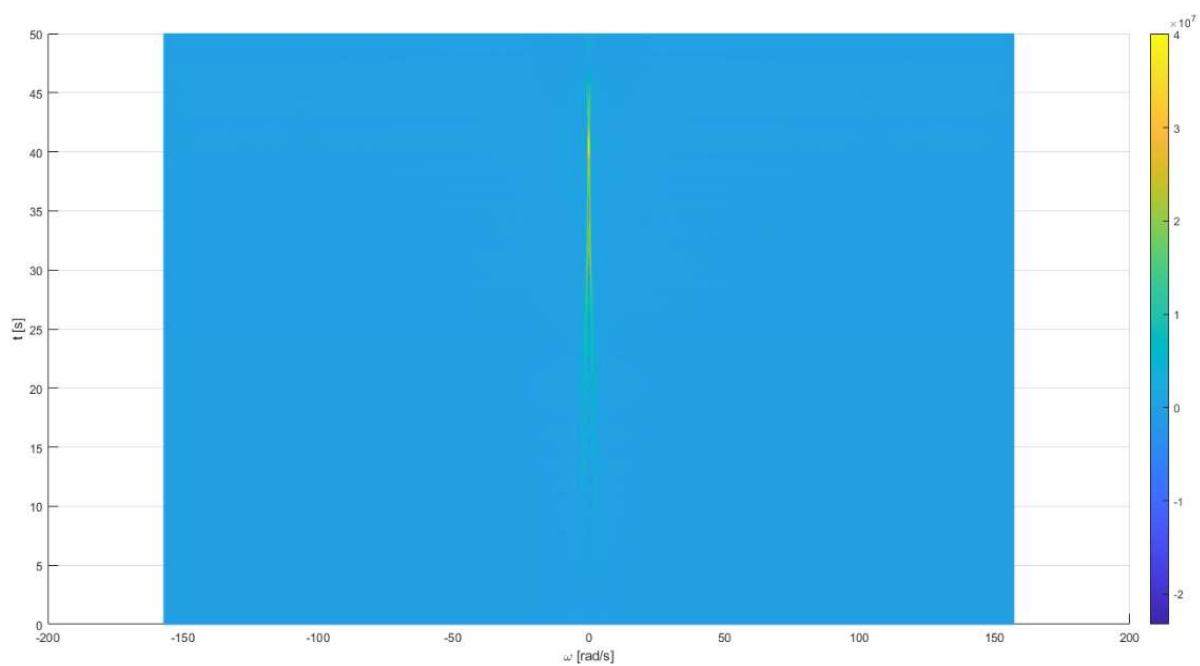
Na **Rys. 28** jesteśmy w stanie dostrzec dwie linie (odpowiadające częstościom chwilowym  $\Omega_{ch}$  i  $-\Omega_{ch}$ ), które z biegiem czasu zbliżają się do 0-zatem zgodnie z oczekiwaniem częstość maleje.



Rys. 26 Przykładowa zależność położenia  $x(t)$  od czasu dla układu z malejącą masą



Rys. 27 Przykładowy portret fazowy dla układu z malejącą masą



Rys. 28 Wykres funkcji Wignera dla oscylatora o spadającej masie dla ruchu ukazanego na Rys. 26

### 3. Krzyżowa funkcja Wignera

Jak wielokrotnie wspominaliśmy w poprzednich rozdziałach, funkcja Wignera nie jest liniowa i przez to pojawiają się linie aliasingu pomiędzy liniami odpowiednimi dla rzeczywiście występujących w sygnale składowych. Jeśli badany sygnał jest sumą dwóch sygnałów  $x(t)$  i  $y(t)$ , wówczas:

$$\begin{aligned}
 W_{x+y,x+y}(t, \omega) &= \tag{3.1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( x\left(t + \frac{1}{2}T\right) + y\left(t + \frac{1}{2}T\right) \right) \left( x^*\left(t - \frac{1}{2}T\right) + y^*\left(t - \frac{1}{2}T\right) \right) e^{-i\omega T} dT \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{1}{2}T\right) x^*\left(t - \frac{1}{2}T\right) e^{-i\omega T} dT \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y\left(t + \frac{1}{2}T\right) y^*\left(t - \frac{1}{2}T\right) e^{-i\omega T} dT \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{1}{2}T\right) y^*\left(t - \frac{1}{2}T\right) e^{-i\omega T} dT \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y\left(t + \frac{1}{2}T\right) x^*\left(t - \frac{1}{2}T\right) e^{-i\omega T} dT \\
 &= W_{x,x}(t, \omega) + W_{y,y}(t, \omega) + W_{x,y}(t, \omega) + W_{y,x}(t, \omega)
 \end{aligned}$$

A korzystając z własności symetrii (1.21)

$$\begin{aligned}
 W_{x+y,x+y}(t, \omega) &= W_{x,x}(t, \omega) + W_{y,y}(t, \omega) + W_{x,y}(t, \omega) + W_{x,y}^*(t, \omega) \tag{3.2} \\
 &= W_{x,x}(t, \omega) + W_{y,y}(t, \omega) + \text{Re}\{W_{x,y}(t, \omega)\}
 \end{aligned}$$

Z równania 3.2 wynika, że krzyżową funkcję Wignera można wykorzystać do zniwelowania niepożądanego efektu aliasingu z widma  $W_{x+y,x+y}(t, \omega)$ .

### 3.1 Cząstka swobodna i prosty oscylator harmoniczny

Równanie ruchu cząstki swobodnej oznaczmy jako  $x(t)$ , a prostego oscylatora harmonicznego jako  $y(t)$ . Zgodnie ze wzorem 1.20, funkcja krzyżowa Wignera dla tych dwóch funkcji wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned}
 W_{xy}(t, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{1}{2}T\right) y^*\left(t - \frac{1}{2}T\right) e^{-i\omega T} dT & (3.3) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_{0x}}{m_x} \left(t + \frac{1}{2}T\right) \frac{p_{0y}}{\Omega m_y} \sin\left(\Omega\left(t - \frac{1}{2}T\right)\right) e^{-i\omega T} dT \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{p_{0x}p_{0y}}{m_x\Omega m_y} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t + \frac{1}{2}T\right) \cdot \frac{1}{2i} \left(e^{i\Omega t - i\frac{\Omega T}{2}} - e^{-i\Omega t + i\frac{\Omega T}{2}}\right) e^{-i\omega T} dT \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{p_{0x}p_{0y}}{2im_x\Omega m_y} t \left( e^{i\Omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega + \frac{\Omega}{2})T} dT - e^{-\Omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega - \frac{\Omega}{2})T} dT \right) \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{p_{0x}p_{0y}}{4m_x\Omega m_y} \left( e^{i\Omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} iT e^{-i(\omega + \frac{\Omega}{2})T} dT e^{-\Omega t} - \int_{-\infty}^{+\infty} iT e^{-i(\omega - \frac{\Omega}{2})T} dT \right) \\
 &= \frac{p_{0x}p_{0y}}{4m_x\Omega m_y} e^{i\Omega t} \left( \frac{2t}{i} - \frac{1}{\omega + \frac{\Omega}{2}} \right) \delta\left(\omega + \frac{\Omega}{2}\right) \\
 &\quad - \frac{p_{0x}p_{0y}}{4m_x\Omega m_y} e^{-i\Omega t} \left( \frac{2t}{i} - \frac{1}{\omega - \frac{\Omega}{2}} \right) \delta\left(\omega - \frac{\Omega}{2}\right)
 \end{aligned}$$

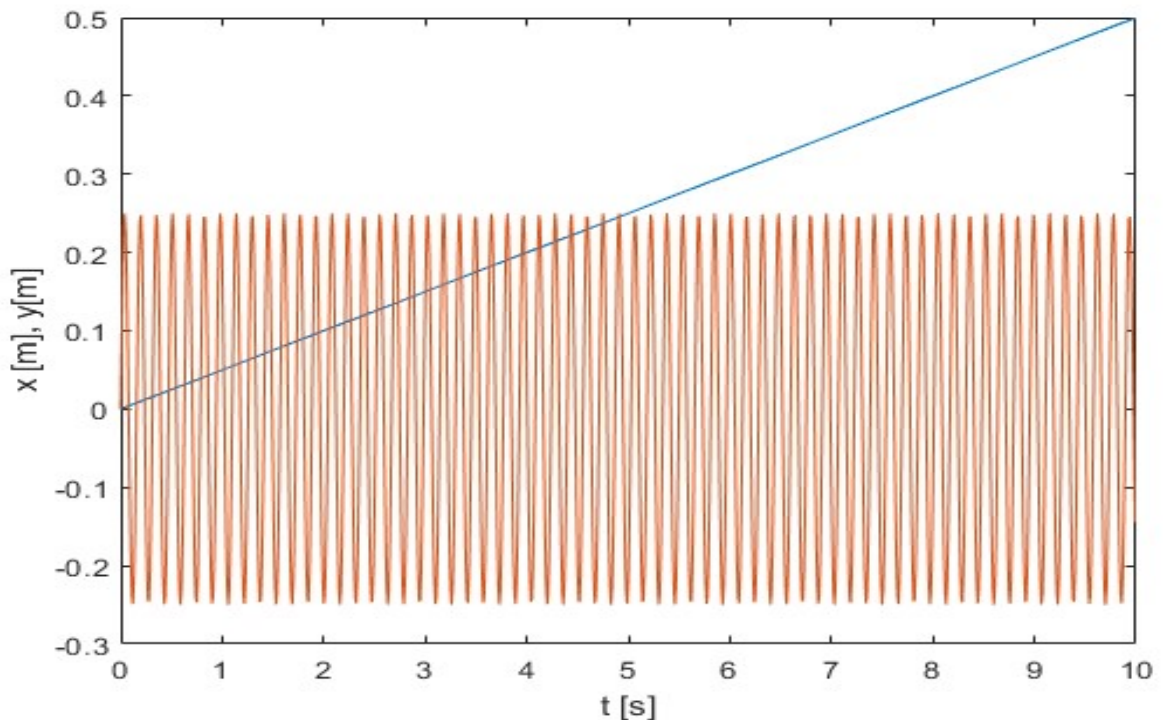
W wyrażeniu tym można wyróżnić część rzeczywistą i część urojoną:

$$\begin{aligned}
 Re\{W_{xy}\} &= \frac{p_{0x}p_{0y}}{4m_x\Omega m_y} \left( 2t \sin(\Omega t) - \frac{\cos(\Omega t)}{\omega + \frac{\Omega}{2}} \right) \delta\left(\omega + \frac{\Omega}{2}\right) & (3.4) \\
 &\quad + \frac{p_{0x}p_{0y}}{4m_x\Omega m_y} \left( 2t \sin(\Omega t) + \frac{\cos(\Omega t)}{\omega - \frac{\Omega}{2}} \right) \delta\left(\omega - \frac{\Omega}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im}\{W_{xy}\} = & -\frac{p_{0x}p_{0y}}{4m_x\Omega m_y} \left( 2t\cos(\Omega t) + \frac{\sin(\Omega t)}{\omega + \frac{\Omega}{2}} \right) \delta\left(\omega + \frac{\Omega}{2}\right) \\ & + \frac{p_{0x}p_{0y}}{4m_x\Omega m_y} \left( 2t\cos(\Omega t) - \frac{\sin(\Omega t)}{\omega - \frac{\Omega}{2}} \right) \delta\left(\omega - \frac{\Omega}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Pojawiają się linie dla  $\omega = \pm\Omega/2$ . Częstość  $\Omega/2$  można traktować jako średnią arytmetyczną częstości oscylacji harmonicznyc  $\Omega$  i częstości w ruchu bez oscylacji, czyli 0. Jest to zgodne z intuicją, że dla sygnałów o częstościach  $\Omega$  i 0 aliasing nastąpiłby właśnie dla  $\Omega/2$ . Współczynniki odpowiadające za skalę ruchu (prędkość dla ruchu jednostajnego prostoliniowego i amplituda dla ruchu harmonicznego) ulegają wymnożeniu, zatem nie możemy porównywać skali ruchów, a jedynie częstości.

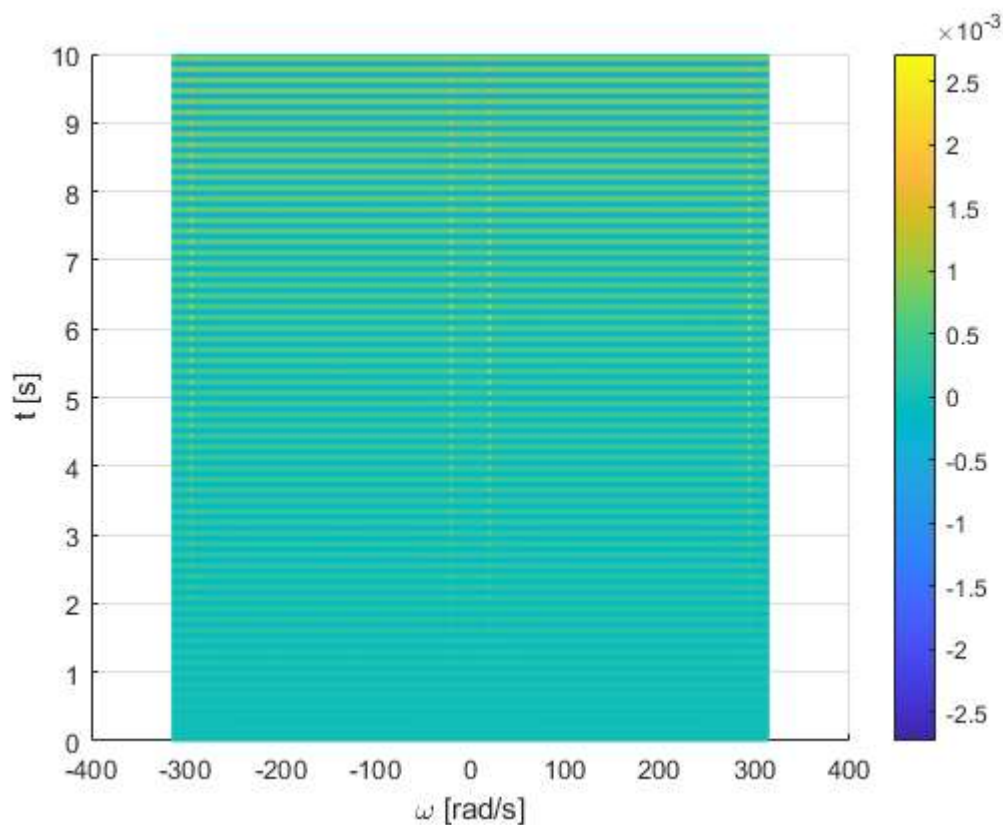
Dla oscylatora drgającego z  $\Omega_y = 40$  i cząstki swobodnej uzyskano przykładowe wykresy  $x(t)$  i  $y(t)$  -**Rys. 29**, oraz wykres funkcji krzyżowej Wignera (**Rys 30-33**).



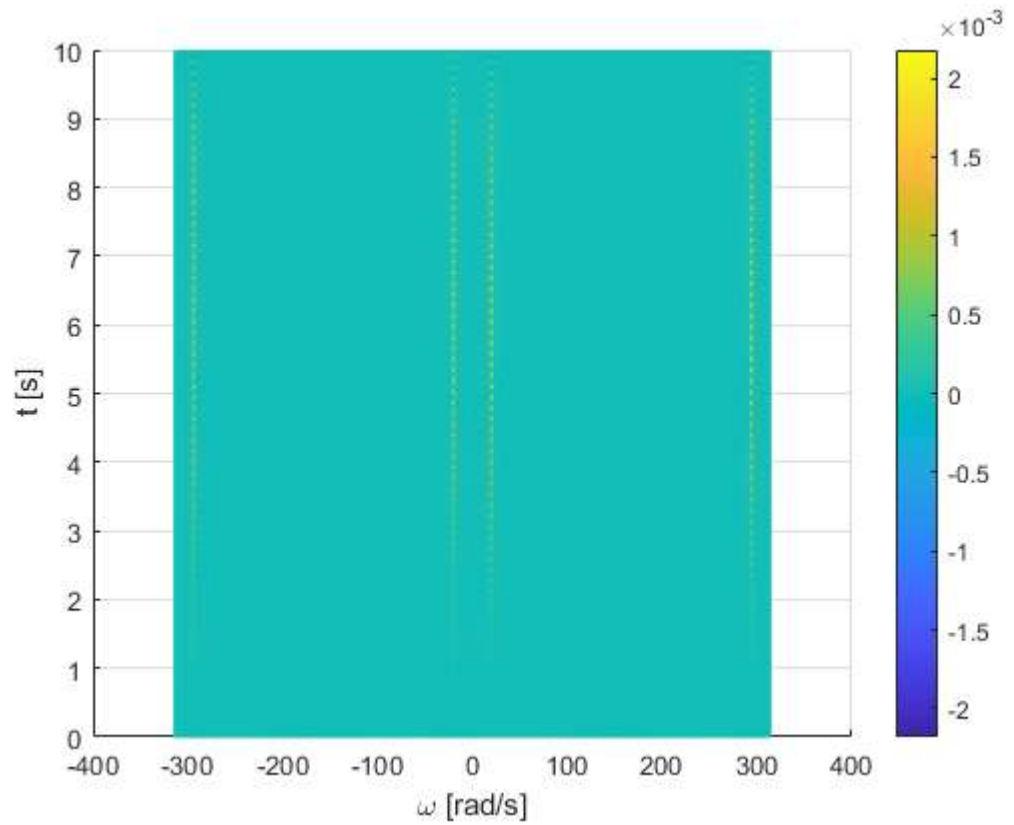
**Rys. 29** Przykładowa zależność położenia  $x(t)$  od czasu dla oscylatora harmonicznego i cząstki swobodnej

Ponieważ funkcja krzyżowa Wignera przyjmuje wartości zespolone, jej dyskretną wersję można przedstawić na dwa sposoby, poprzez zobrazowanie osobno: części

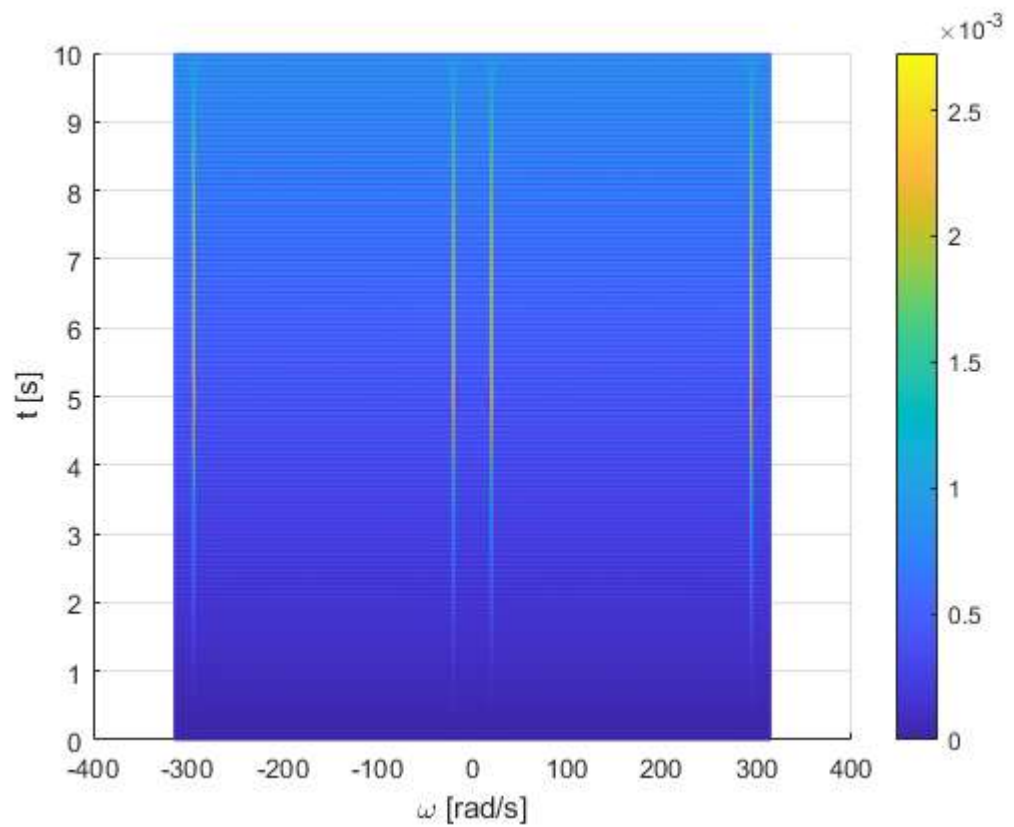
rzeczywistej i urojonej (**Rys. 30-31**), albo modułu i argumentu głównego (**Rys. 32-33**). Ponieważ moduł liczby zespolonej z definicji jest liczbą nieujemną, pozostawiono na wykresie **Rys. 32** domyślną skalę barw (tzn. 0 znajduje się na początku skali a nie na jej środku). Dzięki temu otrzymano lepszy kontrast i linie odpowiadające  $\omega = \pm \frac{\Omega}{2}$  są najlepiej zauważalne, choć obecne są w tym samym miejscu na każdym z omawianych wykresów.



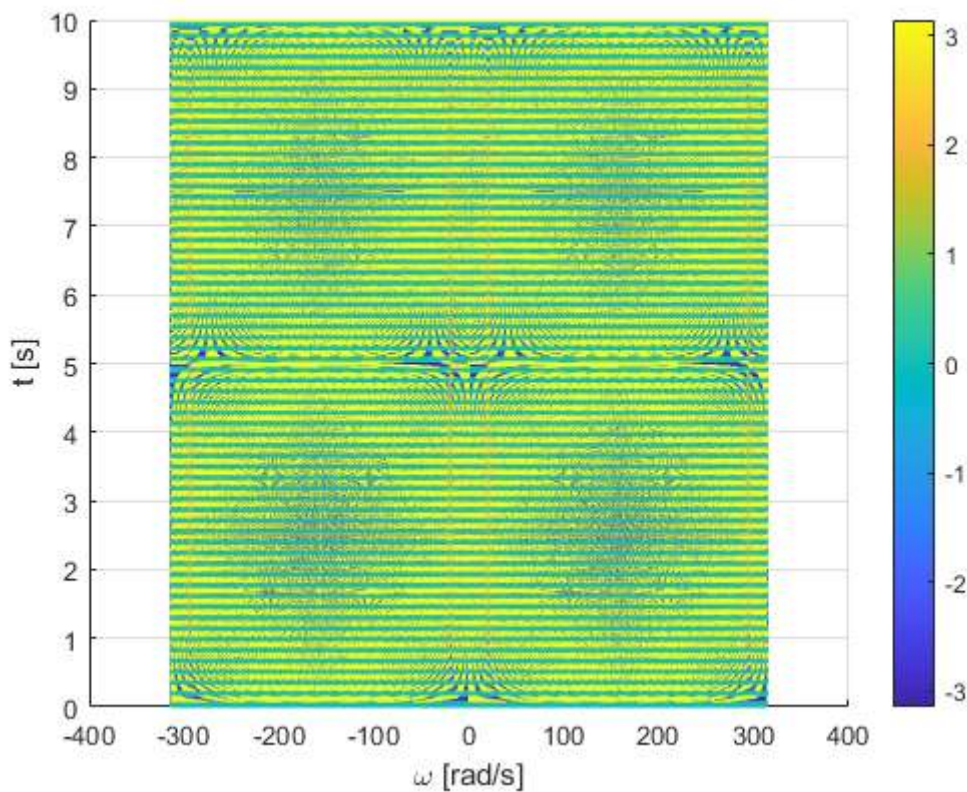
Rys. 30 Wykres funkcji krzyżowej Wignera dla cząstki swobodnej i oscylatora harmonicznego prostego-  
część rzeczywista



Rys. 31 Wykres funkcji krzyżowej Wignera dla cząstki swobodnej i oscylatora harmonicznego prostego-  
część urojona



Rys. 32 Wykres funkcji krzyżowej Wignera dla cząstki swobodnej i oscylatora harmonicznego prostego-  
moduł



Rys. 33 Wykres funkcji krzyżowej Wignera dla cząstki swobodnej i oscylatora harmonicznego prostego-argument główny

### 3.2 Dwa oscylatory proste o różnych częstościach drgań własnych

Dla dwóch oscylatorów harmoniczných

$$x(t) = \frac{p_{0x}}{\Omega_x m_x} \sin(\Omega_x t) = A_x \sin(\Omega_x t) \quad (3.6)$$

$$y(t) = \frac{p_{0y}}{\Omega_y m_y} \sin(\Omega_y t) = A_y \sin(\Omega_y t) \quad (3.7)$$

przyjmujemy oznaczenia  $\Omega_s = (\Omega_x + \Omega_y)/2$  i  $\Omega_r = (\Omega_x - \Omega_y)/2$ , analogicznie jak w podrozdziale 2.6.2.

Przy zastosowaniu tych oznaczeń funkcja krzyżowa Wignera przyjmuje postać

$$W_{xy} = -\frac{1}{4} A_x A_y \left( e^{i2\Omega_s t} \delta(\omega - \Omega_r) + e^{-i2\Omega_s t} \delta(\omega + \Omega_r) - e^{i2\Omega_r t} \delta(\omega - \Omega_s) - e^{-i2\Omega_r t} \delta(\omega + \Omega_s) \right). \quad (3.8)$$

W podanym wyrażeniu można wydzielić część rzeczywistą i urojoną:

$$\operatorname{Re}\{W_{xy}\} = -\frac{1}{4}A_xA_y(\cos(2\Omega_s t)\delta(\omega - \Omega_r) \quad (3.9)$$

$$+ \cos(2\Omega_s t)\delta(\omega + \Omega_r)$$

$$- \cos(2\Omega_r t)\delta(\omega - \Omega_s)$$

$$- \cos(2\Omega_r t)\delta(\omega + \Omega_s)).$$

(3.10)

$$\operatorname{Im}\{W_{xy}\} = -\frac{1}{4}A_xA_y(\sin(2\Omega_s t)\delta(\omega - \Omega_r)$$

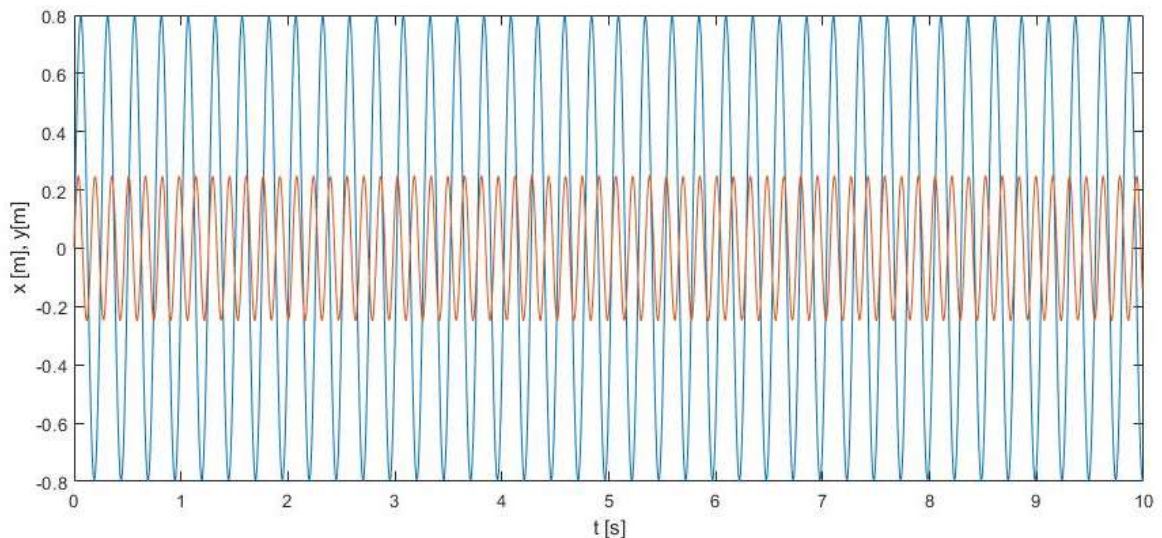
$$- \sin(2\Omega_s t)\delta(\omega + \Omega_r)$$

$$- \sin(2\Omega_r t)\delta(\omega - \Omega_s)$$

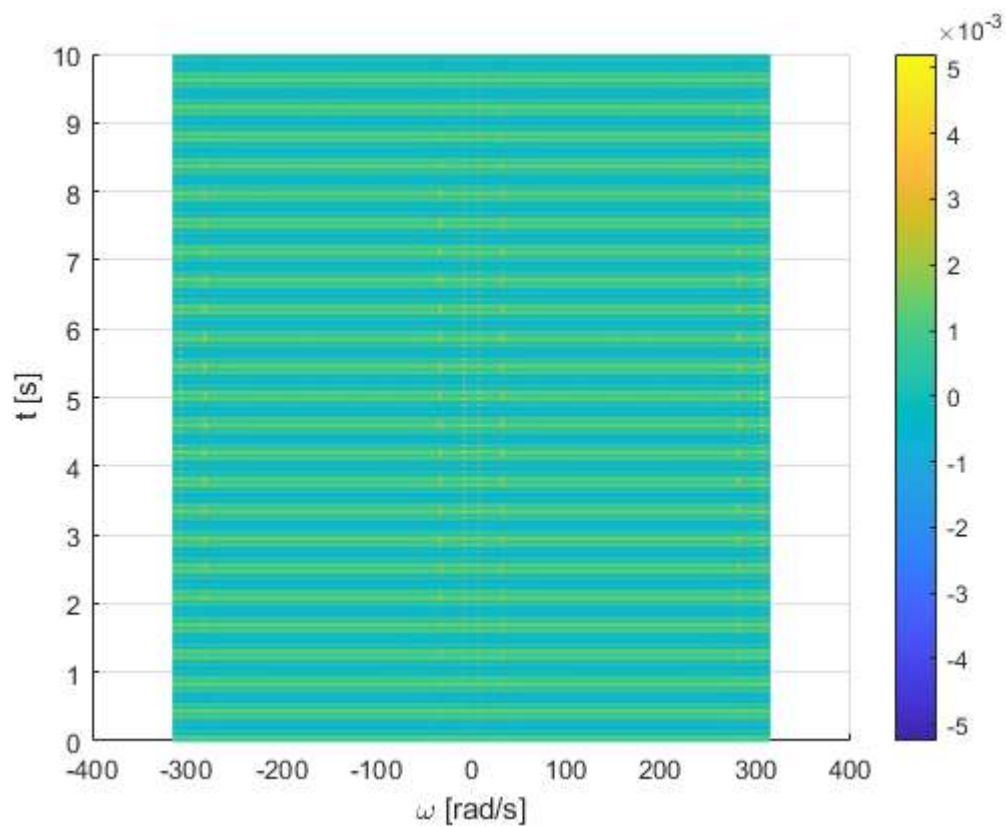
$$+ \sin(2\Omega_r t)\delta(\omega + \Omega_s)).$$

Na obrazie funkcji Wignera pojawiają się cztery linie, odpowiadające średniej arytmetycznej częstości drgań obu oscylatorów  $\Omega_s$  (w dodatnich i negatywnych częstościach) i różnicy między częstościami drgań a częstością  $\Omega_s$  (dodatnie i ujemne  $\Omega_r$ ). Jak obliczyliśmy w rozdziale 2.6, właśnie takie linie aliasingu pojawiały się dla ruchu będącego złożeniem dwóch prostych ruchów harmoniczných.

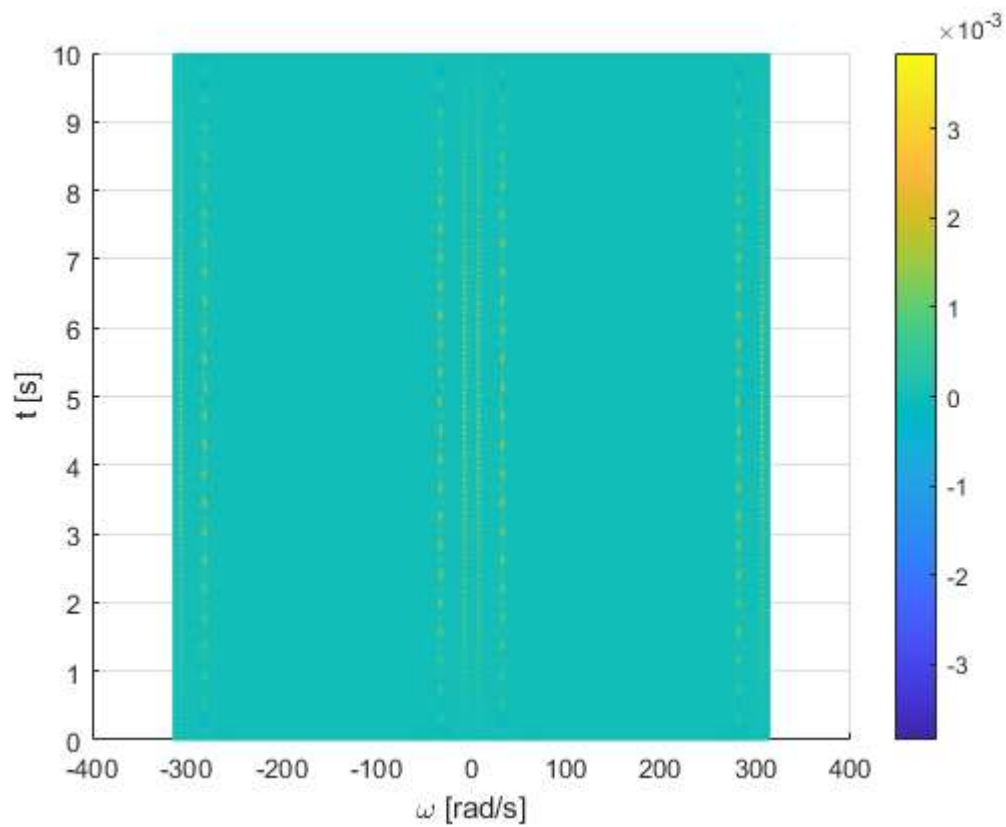
Na rys. 34 pokazano przykładowe sygnały  $x(t)$  i  $y(t)$  dla  $\Omega_x = 25$  i  $\Omega_y = 40$ . Dyskretną funkcję krzyżową Wignera zobrazowano na rys. 35-38 dla tych samych  $x(t)$ ,  $y(t)$ .



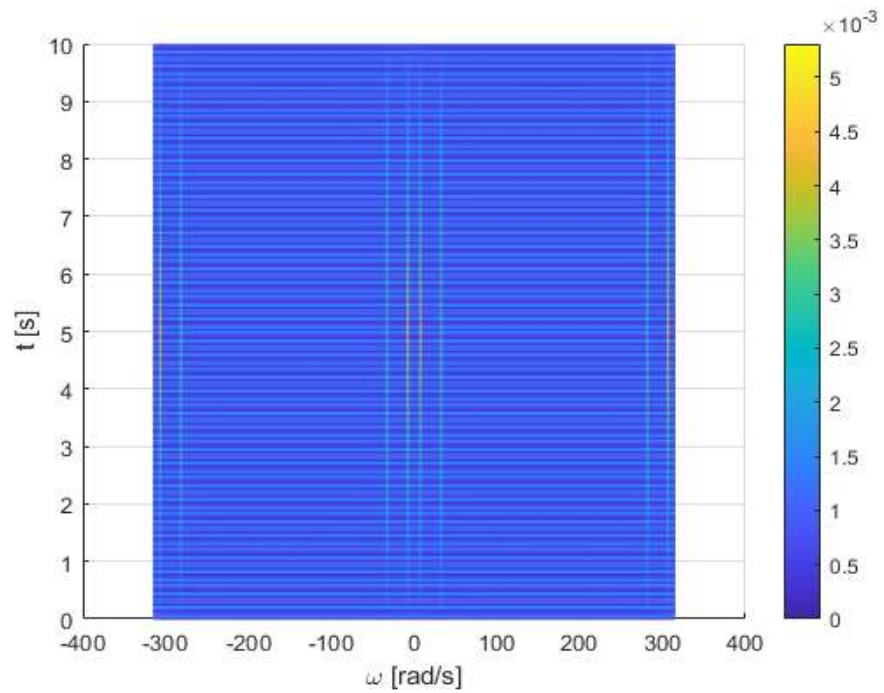
Rys. 34 Przykładowe zależności sygnałów  $x(t)$  i  $y(t)$ , gdzie oba są prostymi drganiami harmonicznymi o częstościach 25 i 40 rad/s



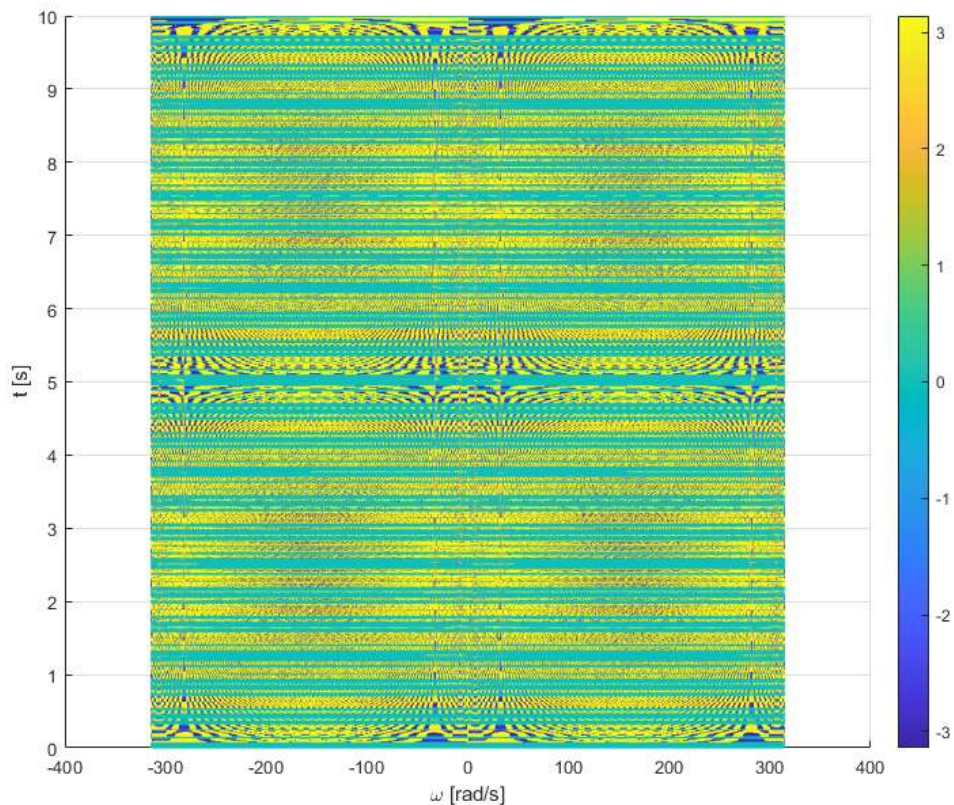
Rys. 35 Wykres funkcji krzyżowej Wignera dla dwóch oscylatorów harmoniczných prostých o różných częstościach drgań-część rzeczywista



Rys. 36 Wykres funkcji krzyżowej Wignera dla dwóch oscylatorów harmoniczných prostých o różných częstościach drgań-część urojona



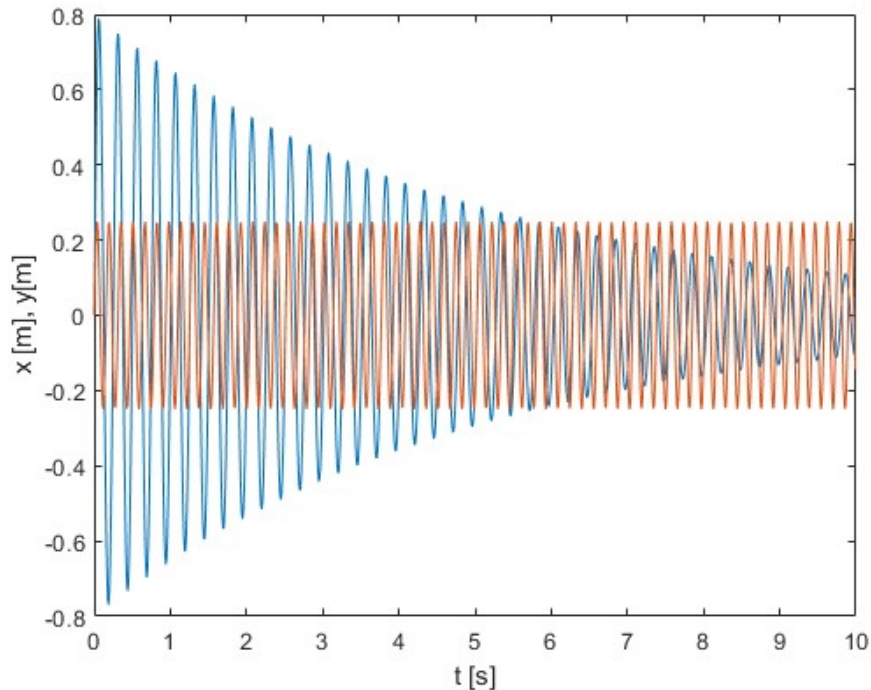
Rys. 37 Wykres funkcji krzyżowej Wignera dla dwóch oscylatorów harmonicznych prostych o różnych częstościach drgań-mod



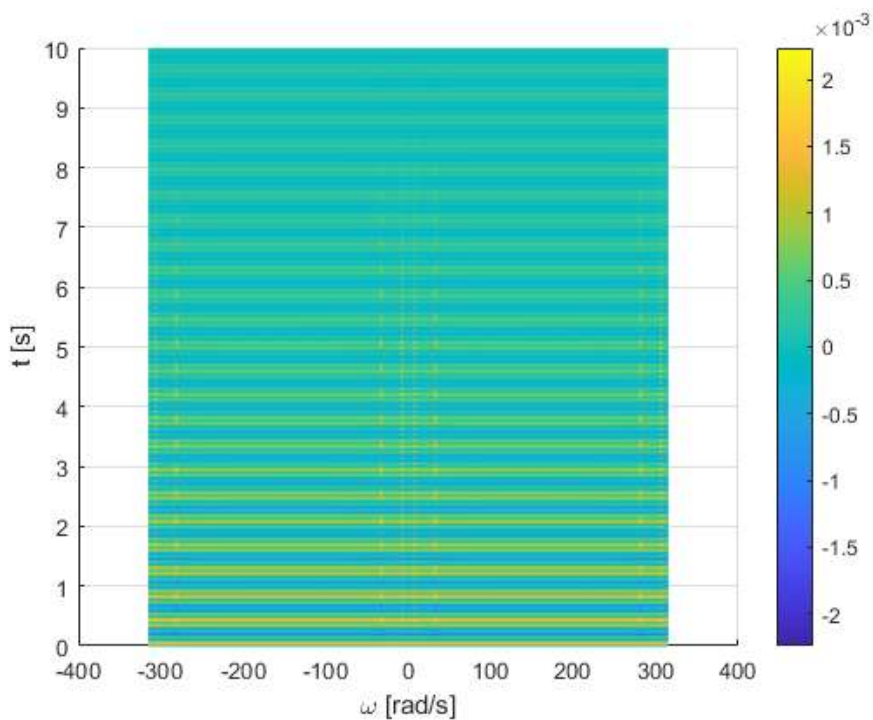
Rys. 38 Wykres funkcji krzyżowej Wignera dla dwóch oscylatorów harmonicznych prostych o różnych częstościach drgań-argument główny

### 3.3 Oscylator harmoniczny prosty i oscylator słabo tłumiony

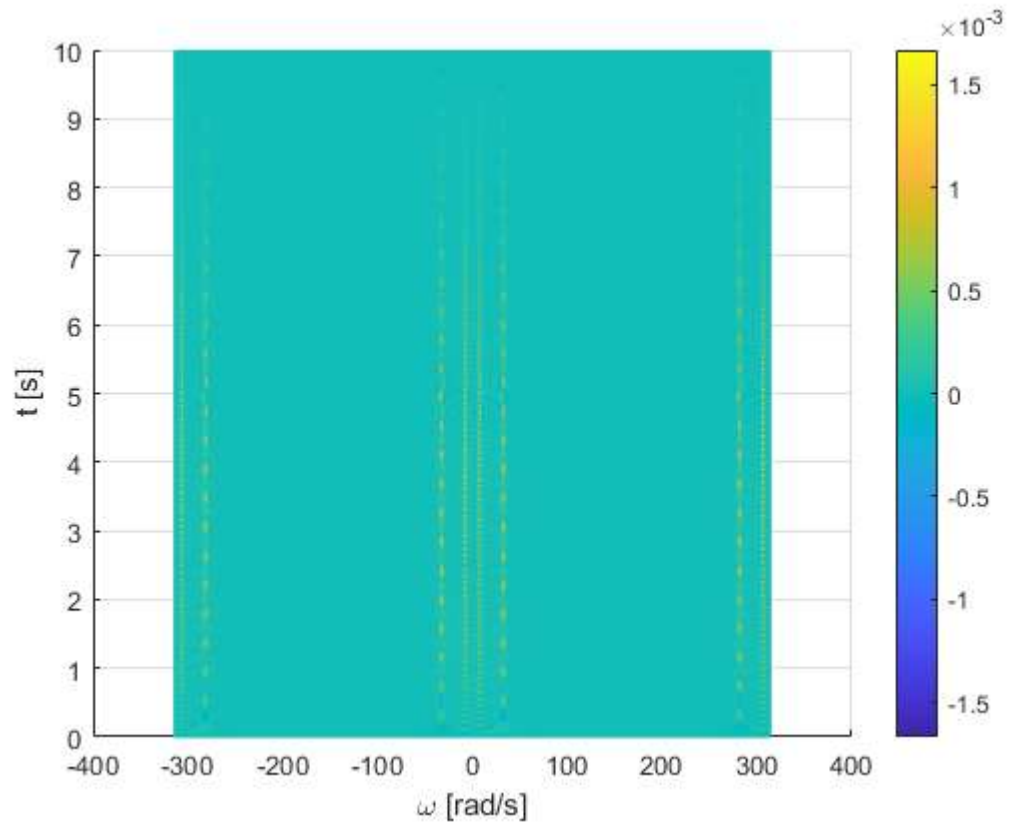
Dla takiej samej pary oscylatorów ( $\Omega_x = 25$  i  $\Omega_y = 40$ ) dodatkowo dołożono czynnik wyłumiający  $e^{-2\gamma t}$ . Otrzymano wykresy krzyżowej funkcji Wignera (rys. 40-43).



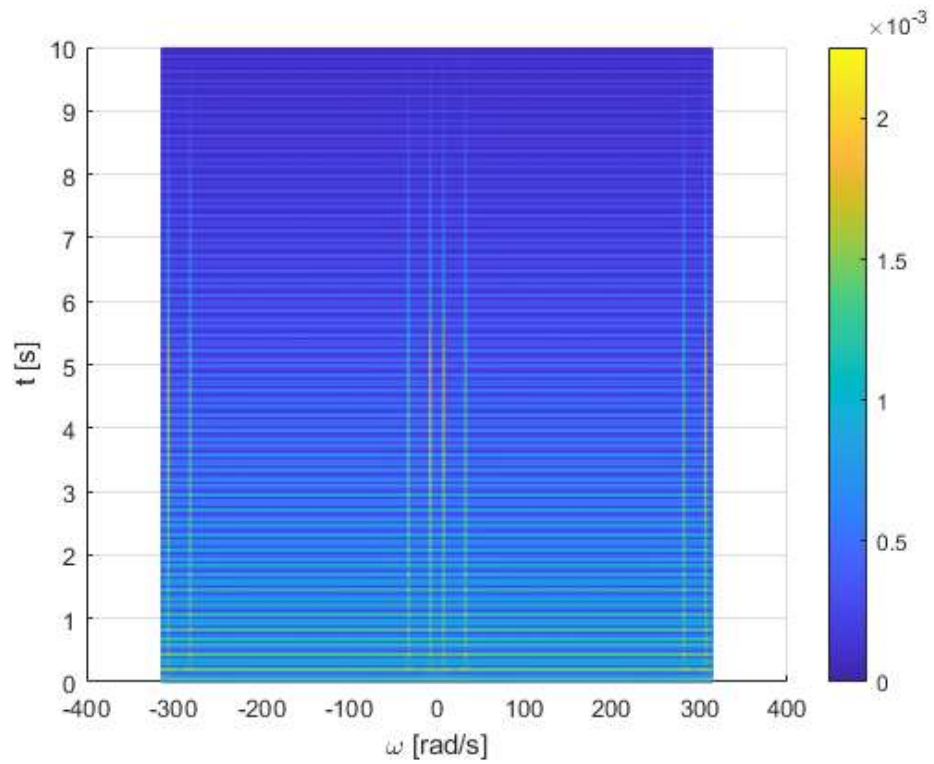
Rys. 39 Przykładowa zależność położenia  $x(t)$  od czasu dla oscylatora tłumionego (słabe tłumienie) i prostego



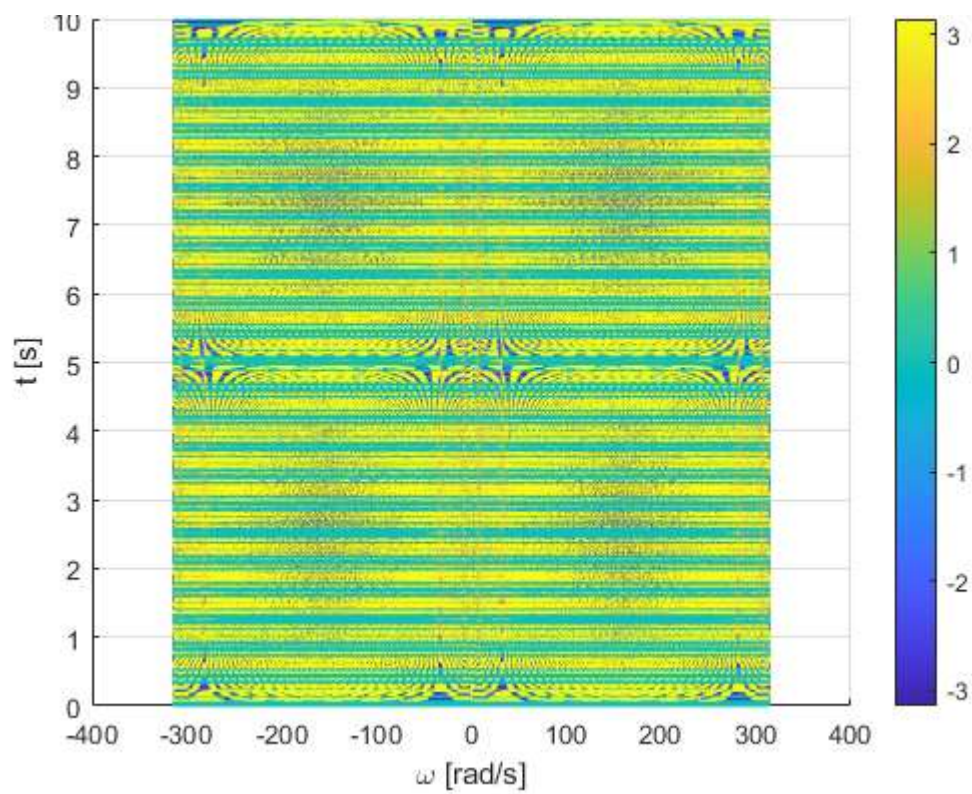
Rys. 40 Krzyżowa funkcja Wignera dla oscylatora tłumionego (słabe tłumienie) i prostego-część rzeczywista



Rys. 41 Krzyżowa funkcja Wignera dla oscylatora tłumionego (słabe tłumienie) i prostego-część urojona



Rys. 42 Krzyżowa funkcja Wignera dla oscylatora tłumionego (słabe tłumienie) i prostego-moduł



Rys. 43 Krzyżowa funkcja Wignera dla oscylatora tłumionego (słabe tłumienie) i prostego-argument główny

## Podsumowanie

W niniejszej pracy wybrano proste mechaniczne układy i wyprowadzono za pomocą równań Hamiltona lub zasad dynamiki Newtona, zależność położenia od czasu dla punktu materialnego w każdym z tych układów. Dla uzyskanej zależności obliczono analitycznie ciągłą transformatę Wignera i porównano ją z wyliczoną numerycznie dyskretną transformatą Wignera. Sporym problemem podczas tworzenia pracy okazała się złożoność obliczeniowa i długi czas trwania obliczeń, tylko częściowo rozwiązany poprzez zastosowanie obliczeń równoległych (ang. *parallel computing*). Istnieją metody obniżające tę złożoność, jak na przykład zastosowanie okna czasowego, lecz niestety odbywa się to kosztem rozdzielczości. Być może postęp informatyki i matematyki pozwoli w przyszłości wykorzystać pełen potencjał funkcji Wignera.

## Spis literatury

[1] Boashash B: *Theory, Implementation and Application of Time-Frequency Signal -Analysis using the Wigner-Ville Distribution* in: Journal of Electrical and Electronics Engineering, Australia - IE Aust. & IREE Aust., Vol. 7, No.3 1987

[2] D.S. K. Chan: *A Non-Aliased Discrete-Time Wigner Distribution for Time-Frequency Signal Analysis* in: ICASSP '82. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing Year: Vol. 7, 1982

[3] Landau L., Lifszyc J.M. *Fizyka teoretyczna: Mechanika*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2007

[4] Najmi A: *The Wigner Distribution: a Time-Frequency Analysis Tool* in: Johns Hopkins APL Technical Digest, Vol.15, Number 4, 1994

[5] O' Toole J., Mostefa M., Boashash B. (2005) *A Discrete Time and Frequency Wigner Distribution: Properties and Implementation*. In Proceedings International Symposium on Digital Signal Processing and Communication Systems, 2005

## Spis Ilustracji

|  |    |
|--|----|
| <b>RYS. 1</b> PRZYKŁADOWA ZALEŻNOŚĆ POŁOŻENIA $x(t)$ I PĘDU $p(t)$ OD CZASU DLA CZĄSTKI SWOBODNEJ.<br>KOLORY: CZERWONY, POMARAŃCZOWY, FIOLETOWY I ZIELONY OZNACZAJĄ KOLEJNE WARTOŚCI $H$ : 1, 2, 3, 4 [J].....   | 18 |
| <b>RYS. 2</b> PRZYKŁADOWE PORTRETY FAZOWE DLA CZĄSTKI SWOBODNEJ. KOLORY: FIOLET, NIEBIESKI, POMARAŃCZOWY I ŻÓŁTY OZNACZAJĄ KOLEJNE WARTOŚCI $H$ : 1, 2, 3, 4 [J] .....   | 18 |
| <b>RYS. 3</b> WYKRES FUNKCJI WIGNERA DLA CZĄSTKI SWOBODNEJ.....  | 21 |
| <b>RYS. 4</b> PRZYKŁADOWA ZALEŻNOŚĆ POŁOŻENIA $x(t)$ I PĘDU $p(t)$ OD CZASU DLA OSCYLATORA HARMONICZNEGO PROSTEGO. KAŻDY ZILUSTROWANY RUCH ODBYWA SIĘ PRZY TEJ SAMEJ ENERGII, ALE Z RÓŻNĄ CZĘSTOŚCIĄ DRGAŃ. .... | 23 |
| <b>RYS. 5</b> PRZYKŁADOWY PORTRET FAZOWY DLA DLA OSCYLATORA HARMONICZNEGO PROSTEGO. KAŻDY ZILUSTROWANY RUCH ODBYWA SIĘ PRZY TEJ SAMEJ ENERGII, ALE Z RÓŻNĄ CZĘSTOŚCIĄ DRGAŃ. ....                                | 24 |
| <b>RYS. 6</b> WYKRES FUNKCJI WIGNERA DLA OSCYLATORA HARMONICZNEGO PROSTEGO.....  | 26 |
| <b>RYS. 7</b> PRZYKŁADOWA ZALEŻNOŚĆ POŁOŻENIA $x(t)$ I PĘDU $p(t)$ OD CZASU DLA OSCYLATORA TŁUMIONEGO (SŁABE TŁUMIENIE).....   | 28 |
| <b>RYS. 8</b> PRZYKŁADOWY PORTRET FAZOWY DLA OSCYLATORA TŁUMIONEGO (SŁABE TŁUMIENIE).....  | 28 |
| <b>RYS. 9</b> WYKRES FUNKCJI WIGNERA DLA OSCYLATORA HARMONICZNEGO TŁUMIONEGO (SŁABE TŁUMIENIE)   | 29 |
| <b>RYS. 10</b> PRZYKŁADOWA ZALEŻNOŚĆ POŁOŻENIA $x(t)$ I PĘDU $p(t)$ OD CZASU DLA OSCYLATORA TŁUMIONEGO KRYTYCZNIE .....  | 30 |
| <b>RYS. 11</b> PRZYKŁADOWY PORTRET FAZOWY DLA OSCYLATORA TŁUMIONEGO KRYTYCZNIE. ....   | 31 |
| <b>RYS. 12</b> WYKRES FUNKCJI WIGNERA DLA OSCYLATORA HARMONICZNEGO TŁUMIONEGO KRYTYCZNIE .....   | 32 |
| <b>RYS. 13</b> PRZYKŁADOWA ZALEŻNOŚĆ POŁOŻENIA $x(t)$ I PĘDU $p(t)$ OD CZASU DLA OSCYLATORA TŁUMIONEGO (SILNE TŁUMIENIE). KOLORY ODPOWIADAJĄ RÓŻNYM CZĘSTOŚCIOM DRGAŃ WŁASNYCH. ....                             | 33 |
| <b>RYS. 14</b> PRZYKŁADOWY PORTRET FAZOWY DLA OSCYLATORA TŁUMIONEGO (SILNE TŁUMIENIE). KOLORY ODPOWIADAJĄ RÓŻNYM CZĘSTOŚCIOM DRGAŃ WŁASNYCH. ....  | 34 |
| <b>RYS. 15</b> WYKRES FUNKCJI WIGNERA DLA OSCYLATORA HARMONICZNEGO TŁUMIONEGO (SILNE TŁUMIENIE)  | 36 |
| <b>RYS. 16</b> PRZYKŁADOWA ZALEŻNOŚĆ POŁOŻENIA $x(t)$ I PĘDU $p(t)$ OD CZASU DLA ZŁOŻENIA DWÓCH DRGAŃ HARMONICZNYCH, GDY STOSUNEK CZĘSTOŚCI DRGAŃ WYNOŚI 1:2 .....   | 38 |
| <b>RYS. 17</b> PRZYKŁADOWY PORTRET FAZOWY DLA ZŁOŻENIA DWÓCH DRGAŃ HARMONICZNYCH, GDY STOSUNEK CZĘSTOŚCI DRGAŃ WYNOŚI 1:2 .....  | 38 |
| <b>RYS. 18</b> PRZYKŁADOWA ZALEŻNOŚĆ POŁOŻENIA $x(t)$ I PĘDU $p(t)$ OD CZASU DLA ZŁOŻENIA DWÓCH DRGAŃ HARMONICZNYCH, GDY STOSUNEK CZĘSTOŚCI DRGAŃ WYNOŚI 2:7 .....   | 39 |
| <b>RYS. 19</b> PRZYKŁADOWY PORTRET FAZOWY DLA ZŁOŻENIA DWÓCH DRGAŃ HARMONICZNYCH, GDY STOSUNEK CZĘSTOŚCI DRGAŃ WYNOŚI 2:7 .....  | 40 |
| <b>RYS. 20</b> PRZYKŁADOWA ZALEŻNOŚĆ POŁOŻENIA $x(t)$ I PĘDU $p(t)$ OD CZASU DLA ZŁOŻENIA DWÓCH DRGAŃ HARMONICZNYCH, GDY STOSUNEK CZĘSTOŚCI DRGAŃ NIE JEST WYMIERNY .....  | 40 |
| <b>RYS. 21</b> PRZYKŁADOWY PORTRET FAZOWY DLA ZŁOŻENIA DWÓCH DRGAŃ HARMONICZNYCH, GDY STOSUNEK CZĘSTOŚCI DRGAŃ JEST LICZBĄ NIEWYMIERNĄ.....  | 41 |
| <b>RYS. 22</b> WYKRES FUNKCJI WIGNERA DLA ZŁOŻENIA DWÓCH OSCYLACJI HARMONICZNYCH.....  | 43 |

|  |    |
|--|----|
| <b>RYS. 23</b> PRZYKŁADOWA ZALEŻNOŚĆ POŁOŻENIA $x(t)$ I PĘDU $p(t)$ OD CZASU DLA UKŁADU DUDNIĄCEGO   |    |
| <b>RYS. 24</b> PRZYKŁADOWY PORTRET FAZOWY DLA UKŁADU DUDNIĄCEGO .....  | 44 |
| <b>RYS. 25</b> WYKRES FUNKCJI WIGNERA DLA DUDNIENIĆ.....   | 46 |
| <b>RYS. 26</b> PRZYKŁADOWA ZALEŻNOŚĆ POŁOŻENIA $x(t)$ OD CZASU DLA UKŁADU Z MALEJĄCĄ MASĄ.....   | 47 |
| <b>RYS. 27</b> PRZYKŁADOWY PORTRET FAZOWY DLA UKŁADU Z MALEJĄCĄ MASĄ.....  | 48 |
| <b>RYS. 28</b> WYKRES FUNKCJI WIGNERA DLA OSCYLATORA O SPADAJĄCEJ MASIE DLA RUCHU UKAZANEGO NA<br>Rys. 26.....                                       | 48 |
| <b>RYS. 29</b> PRZYKŁADOWA ZALEŻNOŚĆ POŁOŻENIA $x(t)$ OD CZASU DLA OSCYLATORA HARMONICZNEGO I<br>CZĄSTKI SWOBODNEJ .....                             | 51 |
| <b>RYS. 30</b> WYKRES FUNKCJI KRZYŻOWEJ WIGNERA DLA CZĄSTKI SWOBODNEJ I OSCYLATORA HARMONICZNEGO<br>PROSTEGO-CZĘŚĆ RZECZYWISTA.....                  | 52 |
| <b>RYS. 31</b> WYKRES FUNKCJI KRZYŻOWEJ WIGNERA DLA CZĄSTKI SWOBODNEJ I OSCYLATORA HARMONICZNEGO<br>PROSTEGO-CZĘŚĆ UROJONA .....                     | 53 |
| <b>RYS. 32</b> WYKRES FUNKCJI KRZYŻOWEJ WIGNERA DLA CZĄSTKI SWOBODNEJ I OSCYLATORA HARMONICZNEGO<br>PROSTEGO-MODUŁ .....                             | 53 |
| <b>RYS. 33</b> WYKRES FUNKCJI KRZYŻOWEJ WIGNERA DLA CZĄSTKI SWOBODNEJ I OSCYLATORA HARMONICZNEGO<br>PROSTEGO-ARGUMENT GŁÓWNY .....                   | 54 |
| <b>RYS. 34</b> PRZYKŁADOWE ZALEŻNOŚCI SYGNAŁÓW $x(t)$ I $y(t)$ , GDZIE OBA SĄ PROSTYMI DRGANIAMI<br>HARMONICZNYMI O CZĘSTOŚCIACH 25 I 40 rad/s ..... | 55 |
| <b>RYS. 35</b> WYKRES FUNKCJI KRZYŻOWEJ WIGNERA DLA DWÓCH OSCYLATORÓW HARMONICZNYCH PROSTYCH O<br>RÓŻNYCH CZĘSTOŚCIACH DRGAŃ-CZĘŚĆ RZECZYWISTA ..... | 56 |
| <b>RYS. 36</b> WYKRES FUNKCJI KRZYŻOWEJ WIGNERA DLA DWÓCH OSCYLATORÓW HARMONICZNYCH PROSTYCH O<br>RÓŻNYCH CZĘSTOŚCIACH DRGAŃ-CZĘŚĆ UROJONA.....      | 56 |
| <b>RYS. 37</b> WYKRES FUNKCJI KRZYŻOWEJ WIGNERA DLA DWÓCH OSCYLATORÓW HARMONICZNYCH PROSTYCH O<br>RÓŻNYCH CZĘSTOŚCIACH DRGAŃ-MOD\                    |    |
| <b>RYS. 38</b> WYKRES FUNKCJI KRZYŻOWEJ WIGNERA DLA DWÓCH OSCYLATORÓW HARMONICZNYCH<br>PROSTYCH O RÓŻNYCH CZĘSTOŚCIACH DRGAŃ-ARGUMENT GŁÓWNY .....   | 57 |
| <b>RYS. 39</b> PRZYKŁADOWA ZALEŻNOŚĆ POŁOŻENIA $x(t)$ OD CZASU DLA OSCYLATORA TŁUMIONEGO (SŁABE<br>TŁUMIENIE) I PROSTEGO                             |    |
| <b>RYS. 40</b> KRZYŻOWA FUNKCJA WIGNERA DLA OSCYLATORA TŁUMIONEGO (SŁABE TŁUMIENIE) I<br>PROSTEGO-CZĘŚĆ RZECZYWISTA.....                             | 58 |
| <b>RYS. 41</b> KRZYŻOWA FUNKCJA WIGNERA DLA OSCYLATORA TŁUMIONEGO (SŁABE TŁUMIENIE) I PROSTEGO-<br>CZĘŚĆ UROJONA .....                               | 59 |
| <b>RYS. 42</b> KRZYŻOWA FUNKCJA WIGNERA DLA OSCYLATORA TŁUMIONEGO (SŁABE TŁUMIENIE) I PROSTEGO-<br>MODUŁ.....  | 59 |
| <b>RYS. 43</b> KRZYŻOWA FUNKCJA WIGNERA DLA OSCYLATORA TŁUMIONEGO (SŁABE TŁUMIENIE) I PROSTEGO-<br>ARGUMENT GŁÓWNY .....                             | 60 |

# ZAŁĄCZNIK 1.

Program w środowisku MATLAB2020b: równania ruchu i funkcja Wignera dla superpozycji drgań harmoniczych (patrz rozdział 2.6). Małe 'w' w komentarzach jest zmienną  $\omega$

```
h=0.01;      %deklaracja wielkosci kroku czasowego, czestosc probowania
fs=1/h
N=1000; %dlugosc sygnalu
x= h*[0:N-1];
p= h*[0:N-1];
t= h*[0:N-1];      %deklaracja zmiennej czas
```

```
%deklaracja amplitudy i czestosci dla obu drgan
```

```
A=10;
B=7;
omega1=40;
omega2=42;
```

```
x = h*[0:N-1];
p= h*[0:N-1];
t= h*[0:N-1];      %deklaracja zmiennej czas
```

```
for j=1:N
    x(j)=A*sin(omega1*t(j))+B*sin(omega2*t(j));
    p(j)=A*omega1*cos(omega1*t(j))+omega2*B*cos(omega2*t(j));
end
```

```
%narysowanie wykresu x od t
```

```
figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(t,x,'color','b')
xlabel('t [s]')
ylabel('x [m]')
grid on
```

```
subplot(2,1,2)
plot(t,p,'color','b')
xlabel('t [s]')
ylabel('p [kg\cdotm/s]')
grid on
```

```
%narysowanie portretu fazowego
```

```
figure(2)
plot(p,x,'color','b')
xlabel('x')
ylabel('p')
grid on
```

```
%%
```

```
%druga czesc programu-wyliczenie funkcji Wignera
```

```
tic
parpool(2)%rozpoczenie obliczen rownoleglych
```

```
dl=1/N; %wielkosc kroku czestotliwosciowego
n=N/2;
w= pi*(1/h)*(1/n)*[-n:n]'; %w będzie brane z zakresu od pi*fs do pi*fs
```

```

L=ones(N,N+1);

%wyliczenie wartosci funkcji W od t i w
suma=0;

for m=1:N %petla dyktujaca czas

    for k=1:N+1 %petla dyktujaca czestosc w

        suma=0.5*x(1,m)^2; %dla tau=0

        if m>1
            for dx=1:min((m-1),(N-m-1))
                C=x(1,m-dx)*x(1,m+dx)*cos(2*dx*w(k,1)*h);
                suma=suma+C;
            end
        end

        L(m,k)=4*h*(1/sqrt(2*pi))*suma;

    end

end

time = toc;
poolobj = gcp('nocreate');
delete(poolobj; %zakonczenie obliczen rownoleglych

figure(32) %wyświetlenie wykresu funkcji Wignera L(t,w)

mesh(w,t,(L));
xlabel('\omega [rad/s]')
ylabel('t [s]')
zlabel(' W(t, \omega) [mV^2]')
grid on
colorbar
view(0,90)

```