



Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica
w Krakowie

praca magisterska

Własności chromatyczne wybranych klas grafów

Karolina Bieniek

kierunek: matematyka
specjalność: matematyka w informatyce

nr albumu: 283413

opiekun
dr hab. Mariusz Mészka, profesor AGH



Wydział Matematyki Stosowanej

Kraków 2020

Oświadczenie autorki

Upředzona o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz.U. z 2018 r. poz. 1191 z późn. zm.): "Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystyczne wykonanie albo publicznie zniekształca taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, wideogram lub nadanie.", a także upředzona o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 307 ust. 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.) "Student podlega odpowiedzialności dyscyplinarnej za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyn uchybiający godności studenta.", oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałam osobiście i samodzielnie i nie korzystałam ze źródeł innych niż wymienione w pracy. Jednocześnie Uczelnia informuje, że zgodnie z art. 15a ww. ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych Uczelnia przysługuje pierwszeństwo w opublikowaniu pracy dyplomowej studenta. Jeżeli Uczelnia nie opublikowała pracy dyplomowej w terminie 6 miesięcy od dnia jej obrony, autor może ją opublikować, chyba że praca jest częścią utworu zbiorowego. Ponadto Uczelnia jako podmiot, o którym mowa w art. 7 ust. 1 pkt 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. - Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.), może korzystać bez wynagrodzenia i bez konieczności uzyskania zgody autora z utworu stworzonego przez studenta w wyniku wykonywania obowiązków związanych z odbywaniem studiów, udostępniać utwór ministrowi właściwemu do spraw szkolnictwa wyższego i nauki oraz korzystać z utworów znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych, w celu sprawdzania z wykorzystaniem systemu antyplagiatowego. Minister właściwy do spraw szkolnictwa wyższego i nauki może korzystać z prac dyplomowych znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych w zakresie niezbędnym do zapewnienia prawidłowego utrzymania i rozwoju tych baz oraz współpracujących z nimi systemów informatycznych.

.....
(Podpis autorki)

Oświadczenie opiekuna

Oświadczam, że praca spełnia wymogi stawiane pracom magisterskim.

.....
(Podpis opiekuna)

Spis treści

Streszczenie	3
Abstract	4
Wstęp	5
1 Wprowadzenie	7
1.1 Grafy planarne	12
2 Kolorowania wierzchołkowe.	15
2.1 Grafy planarne.	20
2.2 Grafy kubiczne.	27
3 Kolorowanie krawędziowe.	28
3.1 Grafy kubiczne.	31
3.2 Grafy planarne.	40
Literatura	44

Streszczenie

Rozdział 1 poświęcony jest wprowadzeniu do teorii grafów, zdefiniowane są w nim wszystkie niezbędne pojęcia, przytoczone zostały również niektóre podstawowe wyniki. Podobnie, początki rozdziałów 2 i 3 zawierają definicje i podstawowe wyniki dotyczące odpowiednio kolorowań wierzchołkowych oraz krawędziowych, w tym twierdzenie Brooksa z dowodem. Oba te rozdziały wprowadzają również pojęcia grafów (odpowiednio: wierzchołkowo i krawędziowo) krytycznych i kilka ich własności. Rozdział 2.1 poświęcony jest kolorowaniu wierzchołkowemu grafów planarnych. Dla większości zawartych w nim wyników przedstawione zostały dowody, w tym dla 3-kolorowalności triangulacji oraz 3-kolorowalności grafu zawierającego co najwyżej trzy trójkąty. Podrozdział 2.2. umieszczony został w pracy dla jej kompletności i zawiera jeden wynik dotyczący kwadratów grafów kubicznych. Podrozdział 3.1. przedstawia wyniki związane z klasyfikacją grafów kubicznych ze względu na indeks chromatyczny oraz krótką charakteryzację klasy źmirłaczy. Najważniejszymi wynikami zawartymi w tej części są twierdzenie Taita, przedstawione z dowodem, oraz twierdzenie o zawieraniu grafu Petersena przez każdy graf kubiczny klasy 2. Ostatnia część pracy porusza zagadnienia kolorowania krawędziowego grafów planarnych i zawiera wyniki dotyczące zależności ich indeksu chromatycznego od stopnia maksymalnego i talii, a także twierdzenie charakteryzujące grafy zewnętrznie planarne klasy 1 (z dowodem).

Słowa kluczowe

kolorowanie wierzchołkowe, liczba chromatyczna, kolorowanie krawędziowe, indeks chromatyczny, graf planarny, graf kubiczny, źmirłacz

Abstract

First section is an introduction to graph theory, it contains all the necessary concepts and basic results. Similarly, sections 2 and 3 present basic definitions and results connected to, respectively, vertex coloring and edge coloring, including Brooks theorem with a proof. Both of these chapters also introduce the concepts of critical graphs with a few of their basic properties. Subsection 2.1. is devoted to vertex coloring of planar graphs. Proofs of most of the theorems in this part are included, among others a proof of 3-colorability of a triangulation and 3-colorability of a graph containing at most three triangles. Subsection 2.2. is included only for completeness of this paper and contains one theorem about cubic graphs' squares. Part 3.1. considers results regarding classification of cubic graphs in terms of chromatic index and short characterization of snarks. The most important theorems in this part are Tait's theorem, for which proof is presented, and the theorem about Petersen graph being a minor in every cubic graph of class 2. The last part explores the edge coloring of planar graphs and contains results connected with the girth and maximal degree. It also demonstrates a proof for necessary and sufficient condition for an outerplanar graph to be class 1.

Key words

vertex coloring, chromatic number, edge coloring, chromatic index, planar graph, cubic graph, snark

Wstęp

Układanie harmonogramów, planowanie rozgrywek sportowych, zarządzanie widmem częstotliwości radiowych, przydzielanie rejestrów procesora, rozdział zasobów, segmentacja obrazu - to wszystko problemy, w których zastosowanie mają kolorowania grafów. Dziś jedna z najprężniej rozwijanych gałęzi kombinatoryki swoją genezę ma w roku 1852, kiedy to postawione zostało niepozorne pytanie o to, ile minimalnie kolorów jest nam potrzebne, abyśmy mogli pokolorować za ich pomocą obszary państw na dwolnej mapie politycznej, w taki sposób, aby żadne dwa sąsiadujące państwa nie otrzymały jednakowych kolorów. Problem ten, dziś znany jako problem czterech barw, przełożony został na grunt teorii grafów i mimo, że dość szybko została postawiona hipoteza, że odpowiedzią są cztery kolory, to na poprawny dowód trzeba czekać było aż do roku 1976. Dowód ten, autorstwa trzech matematyków: Appela, Hakena oraz Kocha, to jeden z najbardziej kontrowersyjnych dowodów matematycznych, gdyż z powodu mnogości przypadków, które musiały zostać rozpatrzone, został częściowo przeprowadzony przy pomocy komputera. Był to pierwszy w historii przypadek, kiedy słynny problem matematyczny został rozwiązany w ten sposób.

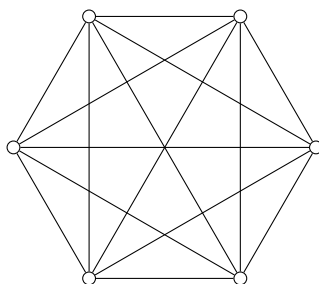
Na pytanie co i w jaki sposób możemy w grafie pokolorować, odpowiedzi są niezliczone. Mamy do dyspozycji kolorowania wierzchołków, krawędzi, ścian, ale również kolorowania wszystkich tych elementów jednocześnie. Ponadto, kolorowania te mogą spełniać najróżniejsze wymagania i tak, powstają teorie na temat kolorowań sprawiedliwych, normalnych, acyklicznych i wielu wielu innych modeli, w których szczegóły nie będziemy się zagłębiać. Niniejsza praca traktuje o dwóch podstawowych wariantach kolorowań, to jest o kolorowaniu wierzchołkowym oraz krawędziowym, przy czym w obu przypadkach skupia się jedynie na kolorowaniach właściwych. Co więcej, rozważania ograniczamy do dwóch klas grafów, uznanych przez autorkę za wyjątkowo interesujące, mianowicie grafów planarnych oraz grafów kubicznych. Obie te klasy są kluczowe dla wybranych modeli kolorowania, ponadto leżą u podstaw teorii na ich temat. Grafy planarne to klasa, od której rozważania na temat kolorowań, w szczególności kolorowań wierzchołkowych, biorą swój początek. Grafy kubiczne są bardziej istotone dla kolorowań krawędziowych, jednak są klasą interesującą również przy rozważaniach innych modeli, gdyż często problemy związane z kolorowaniami można bez straty ogólności rozważać tylko dla grafów kubicznych, tak jak ma to miejsce przy twierdzeniu o czterech kolorach. Przy tej klasie pochylamy się również nad zmińlacami - szczególną podklasą grafów kubicznych, która ma związek z wieloma problemami, również otwartymi i nie tylko z zakresu kolorowania.

Praca ma charakter przeglądowy, autorka starała się zawrzeć w niej wszystkie podstawowe informacje z zakresu poruszanej problematyki, jak również nowsze wyniki. Podstawy modelu grafowego zostały przygotowane na podstawie podręczników teorii grafów ([14, 7, 20]), jak również wiedzy zdobytej przez autorkę w toku studiów matematycznych. Własną pracą autorki, oprócz zebrania i opracowania wyników wielu prac naukowych, było ujednoczenie

używanej terminologii, dobranie do prezentowanych teorii przykładów, doprecyzowanie dowodów (uzasadnienie faktów, które autor użytego dowodu pozostawił jako oczywiste), oraz uzasadnienia pomniejszych wyników, takich jak twierdzenie 3, 3-kolorowalność grafu Petersena czy 3-kolorowalność grafów powstałych w wyniku konstrukcji opisanej w rozdziale 4.1. Dla twierdzenia 20, dowód oryginalny w całości przeprowadzony został dla kolorowania ścian. Na potrzeby użytej wersji twierdzenia, dowód został przeprowadzony przez autorkę w dużej mierze w wersji dla kolorowania wierzchołkowego. Niektóre prezentowane dowody zostały opracowane na podstawie materiałów pochodzących z różnych źródeł, co też jest wkładem własnym autorki. Źródła wykorzystanych dowodów, jeżeli nie pochodzą one z oryginalnej pracy prezentującej dany wynik i nie zostały opracowane w całości przez autorkę, podane są jako ostatnie cytowanie (lub cytowania) przy twierdzeniach.

1. Wprowadzenie

Grafem G nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie V jest dowolnym skończonym zbiorem oraz E jest zbiorem wybranych nieuporządkowanych par różnych elementów ze zbioru V . Często zbiory te będziemy oznaczać przez odpowiednio $V(G)$ oraz $E(G)$. Elementy V nazywamy *wierzchołkami*, a E jest zbiorem łączących je *krawędzie*. Dla uproszczenia zapisu, krawędź $\{u, v\}$ będziemy zazwyczaj oznaczać przez uv lub vu . Liczebności zbiorów $V(G)$ oraz $E(G)$ nazywamy odpowiednio *rzędem* (ozn. $|G|$) i *rozmiarem grafu* G (ozn. $||G||$). Graf jest *pusty*, jeżeli jest rozmiaru 0. Przemawiającą do intuicji interpretacją grafu jest jego reprezentacja graficzna, w której wierzchołkom odpowiadają punkty na płaszczyźnie, a krawędziom - łączące je odcinki. I tak, poniższy rysunek przedstawia graf rzędu 6 i posiadający wszystkie 15 możliwych krawędzi. Graf, którego zbiór krawędzi składa się ze wszystkich możliwych par (nieuporządkowanych) wierzchołków nazywamy *grafem pełnym* lub *kliką* (ozn. K_n , gdzie n - rząd grafu).



Rysunek 1: Graf pełny rzędu 6.

Multigraf definiujemy jako parę (V, E) , gdzie V jest skończonym zbiorem wierzchołków, a E jest multizbiorem (zbiorem, w którym elementy mogą się powtarzać) nieuporządkowanych par elementów ze zbioru V . W multigrafach możliwe więc jest, że dwa wierzchołki łączy więcej niż jedna krawędź. Możemy również dopuszczać możliwość istnienia *pętli* w multigrafie, czyli krawędzi postaci vv , dla pewnego wierzchołka v .

Na zbiorze wierzchołków grafu określamy relację sąsiedztwa. Mówimy, że dwa wierzchołki u, v grafu są *sąsiednie* (lub *sąsiadujące*), jeżeli w grafie tym istnieje łącząca je krawędź $e = uv$. Wierzchołki u, v nazywamy wtedy końcami krawędzi e i mówimy, że krawędź ta jest *incydentna* z każdym z tych wierzchołków. Przez *sąsiedztwo* wierzchołka v rozumiemy zbiór wierzchołków, które są z nim w relacji, a więc są jego sąsiadami. Zbiór ten oznaczamy przez $N(v)$, a liczbę jego elementów nazywamy *stopniem wierzchołka* v i zapisujemy jako $d(v)$. Jeżeli będzie to konieczne, to będziemy zaznaczać, że odnosimy się do stopnia wierzchołka w grafie G , wtedy będziemy zapisywać go jako $d_G(v)$.

Stopniem maksymalnym $\Delta(G)$ grafu G nazywamy największą wartość $d(v)$ dla $v \in V(G)$, analogicznie definiujemy *stopień minimalny* w grafie $\delta(G)$. Jeżeli $\delta(G) = \Delta(G)$, a więc wszystkie wierzchołki w grafie G mają równe stopnie, to G określamy grafem *regularnym*, lub *k-regularnym*, gdzie k to

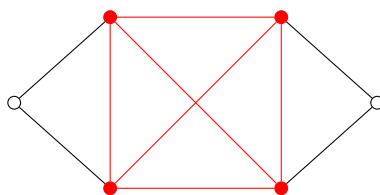
stopień każdego z wierzchołków. Szczególnie interesujące dla nas będą grafy 3-regularne, czyli inaczej *grafy kubiczne*.

Przy stopniach wierzchołków warto wspomnieć o istotnym wyniku, zwanym lematem o uściskach dłoni, który mówi, że suma stopni wierzchołków w grafie jest równa dwukrotności liczby krawędzi tego grafu, a więc

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Wynika to oczywiście z tego, że każda krawędź incydentna jest z dokładnie dwoma wierzchołkami, a więc sumując stopnie wierzchołków, zliczamy każdą krawędź dwukrotnie.

Graf H nazywamy *podgrafem grafu G* , jeżeli $V(H) \subset V(G)$ oraz $E(H) \subset E(G)$. Możemy wtedy powiedzieć, że graf H zawiera się w grafie G . Pograf H nazywamy *właściwym*, jeżeli nie jest równy grafowi G . Podgrafem grafu G indukowanym przez zbiór wierzchołków $S \subset V(G)$ nazywamy graf $G[S]$, taki że jego zbiorem wierzchołków jest zbiór S , a jego krawędziami są wszystkie krawędzie łączące wierzchołki z tego zbioru w grafie G . Podobnie możemy zdefiniować podgraf indukowany przez podzbiór krawędzi $F \subset E(G)$ jako graf, którego zbiorem krawędzi jest zbiór F , a zbiorem wierzchołków zbiór końców tych krawędzi.



Rysunek 2: Graf rzędu 6 z zaznaczonym pografem indukowanym (K_4).

Ścieżką w grafie nazywamy naprzemienny ciąg niepowtarzających się wierzchołków i krawędzi $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$, gdzie $v_i \in V(G)$, $e_i \in E(G)$ oraz $v_{i-1}v_i = e_i$, dla każdego $i = 1, \dots, n$. W uproszczeniu będziemy zazwyczaj zapisywać ten ciąg v_0, v_1, \dots, v_n (lub pomijając przecinki), gdyż ścieżka jest w istocie ciągiem różnych wierzchołków połączonych krawędziami (skoro zawężamy rozważania jedynie do grafów prostych, to krawędzie ścieżki są zdefiniowane przez wybrane wierzchołki, inaczej wyglądałoby to w przypadku multigrafów). Przez długość ścieżki rozumiemy liczbę jej krawędzi (a więc tutaj: n). Długość najkrótszej ścieżki łączącej dwa wierzchołki u, v w grafie nazywamy *odległością* między tymi dwoma wierzchołkami i oznaczamy przez $d(u, v)$.

Strukturę otrzymaną ze ścieżki v_0, v_1, \dots, v_n przez dodanie krawędzi v_nv_1 nazywamy *cyklem długości $n + 1$* i oznaczamy C_{n+1} (indeks to liczba wierzchołków w cyklu). Cyklami, które będą dla nas szczególnie ważne, są cykle długości 3, które będziemy czasem określać *trójkątami*.

Jeżeli cykl ma parzystą (lub nieparzystą) długość, to dla uproszczenia będziemy nazywać go *cyklem parzystym* (lub *nieparzystym*). Podobnego nazewnictwa będziemy używać dla ścieżek.

Długość najkrótszego cyklu w grafie G nazywamy *talią grafu* G . Jeżeli w grafie G istnieje cykl łączący wszystkie jego wierzchołki, to cykl ten nazywamy *cyklem Hamiltona* i o G mówimy, że jest grafem hamiltonowskim.

Graf prosty nazywamy *spójnym*, jeżeli dla każdej pary jego wierzchołków istnieje łącząca je ścieżka. Własność ta jest o tyle istotna, iż bardzo często wystarczające okazuje się badanie jedynie grafów spójnych, a ewentualne uogólnianie twierdzeń dla grafów niespójnych jest trywialne, gdyż składowe grafów niespójnych są grafami spójnymi. Z definicji, przez *składową grafu niespójnego* rozumiemy jego maksymalny (względem zawierania) podgraf spójny. Mówiąc o grafie spójnym możemy również sprecyzować "jak silna" jest jego spójność. Powiemy, że graf jest k -spójny, jeżeli usunięcie z niego dowolnego zbioru mniej niż k wierzchołków (dla $k < |G|$) nie psuje jego spójności (nie rozspójnia go), tzn.

$$\forall S \subset V(G), |S| < k : G - S \text{ jest grafem spójnym.}$$

Przez $G - S$, gdzie S jest podzbiorem wierzchołków grafu G , oznaczamy graf powstały z G przez usunięcie z niego wszystkich wierzchołków ze zbioru S oraz incydentnych z nimi krawędzi (podobnie, gdy S będzie zbiorem krawędzi, $G - S$ będzie oznaczać graf G z usuniętymi krawędziami ze zbioru S). Gdy usuwany zbiór będzie jednoelementowy, będziemy używać uproszczonego zapisu i zamiast $G - \{x\}$ będziemy używać notacji $G - x$. *Spójnością wierzchołkową* grafu G (ozn. $\kappa(G)$) nazywamy największą liczbę k , taką że G jest k -spójny. Warto zauważyć, że każdy graf k -spójny jest również $(k - i)$ -spójny, dla dowolnego $i < k$. Jeżeli istnieje w grafie wierzchołek, którego usunięcie spowoduje rozspójnienie grafu, to nazywamy go *wierzchołkiem rozspajającym*. Krawędź e w grafie G , taką że graf $G - e$ jest niespójny nazywamy *mostem*.

Izomorfizmem grafów G i H nazywamy bijekcję $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$, która zachowuje relację sąsiedztwa, to znaczy dowolny wierzchołek $v \in V(G)$ jest sąsiadem wierzchołka $u \in V(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wierzchołki $\phi(v), \phi(u) \in V(H)$ są sąsiednie. Dwa grafy nazywamy *izomorficznymi*, jeżeli istnieje między nimi izomorfizm. Relacja izomorficzności, którą oznaczać będziemy przez \simeq , jest relacją równoważności w zbiorze wszystkich grafów. Zazwyczaj rozważamy grafy z dokładnością do izomorfizmu, co oznacza, że przez dany graf G rozumiemy jego klasę abstrakcji względem relacji izomorficzności. Poniższy przykład przedstawia dwa różne grafy, jednak oba są izomorficzne z K_4 (grafem pełnym rzędu 4), a więc oba możemy utożsamić z K_4 .



Rysunek 3: Grafy izomorficzne.

Automorfizm grafu to izomorfizm działający tylko na tym grafie, tzn. izomorfizm $\phi : V(G) \rightarrow V(G)$ jest automorfizmem grafu G . Zbiór wszystkich automorfizmów grafu tworzy grupę, w której elementem neutrealnym jest identyczność.

Zbiór niezależny (inaczej nazywany również *antykliką*) w grafie G to dowolny podzbiór jego wierzchołków, w którym elementy nie sąsiadują ze sobą. Moc największego (pod względem liczebności) takiego zbioru w grafie G nazywamy *liczbą niezależności grafu* i oznaczamy przez $\alpha(G)$. Natomiast zbiór niezależnych krawędzi (niemających wspólnych wierzchołków) nazywamy *skojarzeniem*. *Skojarzenie doskonałe* to takie, które posiada krawędź incydentną z każdym z wierzchołków grafu. Liczebność najliczniejszego skojarzenia w grafie G nazywamy *krawędziową liczbą niezależności grafu G* i oznaczamy przez $\alpha'(G)$.

Powiemy że dany zbiór V ma podział na zbiory X, Y , jeżeli zbiory X i Y są rozłączne, a ich suma daje zbiór V . Graf G jest *grafem dwudzielnym* (lub w ogólności *r -dzielnym*), jeżeli zbiór jego wierzchołków ma podział na dwa zbiory niezależne (w ogólności r zbiorów). Poniższe twierdzenie podaje warunek konieczny i wystarczający dla posiadania takiej własności.

Twierdzenie 1. [30] *Graf G jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera cyklu o długości nieparzystej.*

Dowód. Rozważmy graf niepusty G rzędu większego niż jeden (dla grafów rzędu 1 teza jest oczywista). Przyjmijmy, że G jest spójny, w przeciwnym wypadku wystarczy tezę zastosować do jego składowych spójnych.

Na początek załóżmy, że G jest dwudzielny. Możemy więc podzielić zbiór jego wierzchołków na dwa rozłączne zbiory niezależne X i Y :

$$V(G) = X \cup Y.$$

Jeżeli w G nie istnieje cykl, to dowód jest skończony. Załóżmy jednak, że istnieje w G cykl $C = v_1 v_2 \dots v_n$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że wierzchołek v_1 to wierzchołek ze zbioru X . Zbiór X jest niezależny, niemożliwe więc, aby wierzchołek v_2 również należał do tego zbioru, należy więc do zbioru Y . Rozumując w ten sposób dla kolejnych wierzchołków cyklu, otrzymamy zależność, że wierzchołki o nieparzystych indeksach należą do zbioru X , a te

o indeksach parzystych do zbioru Y . Jeżeli v_1 jest sąsiadem v_n , to n musi być liczbą parzystą, a więc C jest cyklem parzystym.

Dla dowodu przeciwnej implikacji, załóżmy że G nie zawiera cykli nieparzystych. Wybierzmy dowolny wierzchołek $v \in V(G)$ i zdefiniujmy dla niego dwa podzbiory jego sąsiadów:

$$X = \{u \in N(v) : d(v, u) \text{ jest parzysta}\},$$

$$Y = \{u \in N(v) : d(v, u) \text{ jest nieparzysta}\}.$$

Zbiory te tworzą podział zbioru wierzchołków grafu G (przy założeniu, że 0 jest liczbą parzystą). Pokażemy, że zbiory X i Y są niezależne.

Założmy, że istnieje krawędź $e = x_1x_2$ łącząca dwa wierzchołki ze zbioru X . Oznaczmy najkrótsze ścieżki łączące wierzchołek v z wierzchołkami x_1, x_2 przez, odpowiednio, P_1, P_2 .

Jeżeli ścieżki P_1 i P_2 są rozłączne, to krawędź e wraz z dwoma wspomnianymi ścieżkami (o parzystej długości) utworzy cykl nieparzysty, a więc otrzymujemy sprzeczność z założeniem. Załóżmy, że ścieżki te nie są rozłączne, a więc istnieje wierzchołek w , który jest ostatnim (najbliższym wierzchołkom x_1, x_2) wierzchołkiem należącym zarówno do ścieżki P_1 jak i P_2 . Dla obydwu ścieżek długość ich odcinka od u do w wynosi $d(u, w)$. Jeżeli odległość wierzchołka u do wierzchołka w jest parzysta, to pozostałe odcinki ścieżek również mają długości parzyste, a więc otrzymujemy cykl nieparzysty utworzony przez najkrótsze ścieżki z w do wierzchołków x_1, x_2 oraz krawędź e . W przeciwnym wypadku, pozostałe odcinki ścieżek mają długości nieparzyste i w ten sam sposób otrzymujemy cykl nieparzysty.

Podobnie, sprzeczność otrzymamy zakładając sąsiedztwo dwóch dowolnych wierzchołków ze zbioru Y , a więc oba zbiory są niezależne. \square

Graf dwudzielny nazywamy *dwudzielnym pełnym*, jeżeli zawiera wszystkie możliwe krawędzie między antyklikami, które tworzą podział jego zbioru wierzchołków (ozn. $K_{m,n}$, gdzie m, n to liczebności niezależnych zbiorów podziału zbioru wierzchołków).

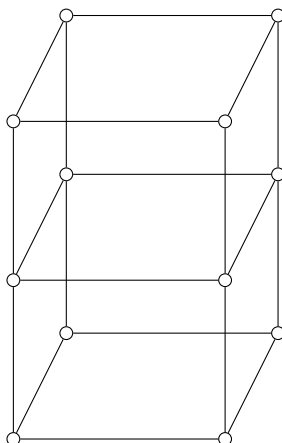
Najważniejszą klasę grafów dwudzielnych stanowią drzewa. *Drzewo* to graf spójny i acykliczny (niezawierający cykli). Jeżeli graf jest niespójny i nie zawiera cykli (jego spójne składowe są drzewami), to nazywamy go *lasem*. W przypadku grafu G który jest drzewem, zawsze z góry znamy liczbę jego krawędzi i jest to $|G| - 1$.

Dopełnienie grafu G (ozn. \bar{G}) to graf o tym samym zbiorze wierzchołków $V(G)$, ale zawierający jedynie te krawędzie między nimi, których nie ma w grafie G (tzn. $E(\bar{G}) = \binom{V}{2} \setminus E(G)$). Innymi słowy, zachodzi warunek

$$xy \in E(G) \Leftrightarrow xy \notin E(\bar{G}).$$

Kilka ważniejszych własności dopełnienia grafu:

1. Dopełnienie dopełnienia grafu G to graf G ($(\bar{\bar{G}}) = G$).
2. Wierzchołek mający maksymalny stopień w grafie G jest wierzchołkiem o minimalnym stopniu w jego dopełnieniu, a co za tym idzie $\delta(\bar{G}) = |G| - \Delta(G) - 1$.



Rysunek 4: Iloczyn kartezjański ścieżki długości 3 oraz cyklu długości 4.

3. Każdy zbiór wierzchołków niezależnych w grafie G będzie zbiorem wierzchołków kliki w \tilde{G} .

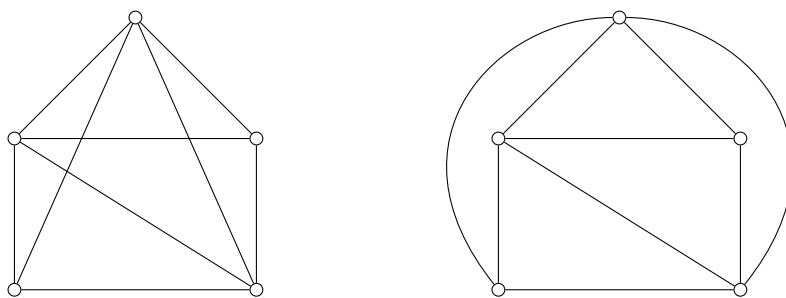
Iloczynem kartezjańskim grafów G i H nazywamy taki graf $G \times H$, że zbiorem jego wierzchołków jest iloczyn kartezjański zbiorów $V(G)$ i $V(H)$, a dwa wierzchołki (u, v) , (u', v') są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi jeden z dwóch warunków:

- $u = u'$ oraz $vv' \in E(H)$
- $v = v'$ oraz $uu' \in E(G)$.

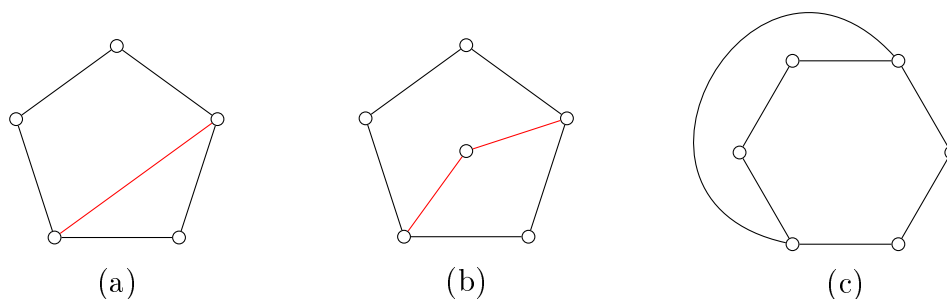
1.1. Grafy planarne

Grafem planarnym nazywamy graf, który może zostać przedstawiony na płaszczyźnie w ten sposób, aby żadne jego dwie krawędzie nie miały innych punktów wspólnych niż ich końce. Taką reprezentację nazywamy *zanurzeniem planarnym* grafu. Zanurzenie planarne grafu G możemy traktować jako graf \tilde{G} , izomorficzny z G , w którym zbiorem wierzchołków jest zbiór punktów odpowiadających wierzchołkom grafu G , a zbiorem krawędzi jest zbiór odcinków reprezentujących krawędzie G . Każdy wierzchołek w \tilde{G} jest incydentny ze wszystkimi krawędziami w \tilde{G} , które go zawierają. Zanurzenie planarne grafu jest czasami nazywane grafem płaskim. Zazwyczaj, pisząc o grafie planarnym będziemy domyślnie utożsamiać go z jego zanurzeniem planarnym.

Ścianą w grafie płaskim będziemy nazywać wnętrze cyklu bez przekątnych (zazwyczaj wraz z tym cyklem) lub nieograniczony obszar otaczający graf. Przez przekątną cyklu rozumiemy tutaj krawędź lub ścieżkę leżącą wewnątrz cyklu, a więc dla cyklu $C = x_1x_2 \dots x_n$, przekątną będzie krawędź x_ix_j , dla której $i \neq j - 1, j + 1$ oraz która położona jest wewnątrz C , lub ścieżka długości co najmniej 2, łącząca dwa wierzchołki z cyklu C , rozłączna z cyklem C i leżąca wewnątrz niego.



Rysunek 5: Graf i jego zanurzenie planarne



Rysunek 6: Przykłady grafów z trzema ścianami. Na rysunku (a) oraz (b) na czerwono zaznaczono przekątne najdłuższych cykli w grafach.

Przyjmijmy, że gdy mówimy o krawędziach należących do ściany, to mamy na myśli krawędzie rozdzielające tę ścianę od sąsiadujących z nią ścian, podobnie dla cyklu ograniczającego (założenie takie jest istotne w przypadku ściany zewnętrznej). Jeżeli mówimy, że dany wierzchołek należy do ściany, to oznacza że jest incydentny z jedną z krawędzi należących do ściany. *Stopień ściany* możemy zdefiniować jako liczbę należących do niej wierzchołków. Każdy graf zawiera jedną nieograniczoną ścianę zwaną *ścianą zewnętrzną*. Jeżeli graf jest acykliczny, to wszystkie jego wierzchołki należą do jedynej ściany grafu - ściany zewnętrznej.

Liczbę ścian w grafie będziemy zazwyczaj oznaczać przez f lub $f(G)$.

Twierdzenie 2. [18, 7] *Jeżeli G jest grafem planarnym spójnym mającym n wierzchołków, m krawędzi oraz f ścian, to zachodzi wzór*

$$n - m + f = 2.$$

Powyższy wzór jest często nazywany wzorem Eulera dla grafów płaskich.

Dowód. Przeprowadźmy indukcję ze względu na liczbę ścian f . Jeżeli $f = 1$, to graf G jest acykliczny, jest więc drzewem. Oznacza to, że liczba jego krawędzi jest równa $n - 1$ i wzór oczywiście zachodzi

Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla wszystkich grafów spójnych o liczbie ścian mniejszej niż f . Niech G będzie grafem spójnym o $f \geq 2$ ścianach.

Wyberzmy w G krawędź e , której usunięcie nie rozspójnia grafu, tzn. graf $G - e$ również jest spójny. $G - e$ zawiera jedną ścianę mniej niż G , gdyż dwie ściany rozdzielone przez e w grafie G połączyły się w jedną po usunięciu krawędzi. Z założenia indukcyjnego wzór z twierdzenia zachodzi dla grafu $G - e$, a więc:

$$n - (m + 1) + (f - 1) = 2.$$

Redukując równanie otrzymujemy tezę. □

Ze wzoru Eulera możemy bardzo łatwo oszacować maksymalną liczbę krawędzi, jaką może zawierać graf planarny.

Twierdzenie 3. [18, 14] *Jeżeli G jest grafem planarnym rzędu n większego lub równego 3 i rozmiaru m , to*

$$m \leq 3n - 6$$

Dowód. Możemy założyć, że G jest spójny, gdyż w przeciwnym przypadku moglibyśmy dodać do niego krawędzie nie tracąc jego planarności. Dla $n = 3$ teza zachodzi, gdyż wtedy G jest cyklem C_3 lub ścieżką długości 2, a więc jego rozmiar nie przekroczy 3. Załóżmy zatem, że $n \geq 4$. Oznaczmy przez f liczbę ścian w G . Ze wzoru Eulera, $n - m + f = 2$. Oznaczmy ściany grafu G przez F_1, F_2, \dots, F_f oraz przez m_i liczbę krawędzi należących do ściany F_i ($1 \leq i \leq f$). Liczba m_i jest na pewno nie mniejsza niż 3. Skoro każda krawędź należy do co najwyżej dwóch ścian, to zachodzi nierówność

$$3f \leq \sum_{i=1}^f m_i \leq 2m.$$

Zatem

$$6 = 3n - 3m + 3f \leq 3n - 3m + 2m = 3n - m,$$

skąd $m \leq 3n - 6$. □

2. Kolorowania wierzchołkowe.

Kolorowaniem wierzchołkowym (w domyśle, jeśli z kontekstu nie będzie wynikać inaczej, przez kolorowanie rozumiemy kolorowanie wierzchołkowe) grafu G nazywamy dowolną funkcję działającą na zbiorze wierzchołków grafu G . Wartość przypisaną wierzchołkowi v przez taką funkcję nazywamy *kolorem wierzchołka v* . Choć zbiorem wartości kolorowania może być dowolny zbiór, to zazwyczaj, bez straty ogólności, rozważa się kolorowania przypisujące wierzchołkom liczby naturalne. Kiedy funkcja taka przyjmuje k różnych wartości, to mówimy o k -kolorowaniu.

Podstawowym rodzajem kolorowań są *kolorowania właściwe*, czyli takie, które żadnym dwóm wierzchołkom sąsiednim nie przypisują tego samego koloru. Kolorowanie właściwe jest więc w istocie podziałem zbioru wierzchołków na rozłączne zbiory niezależne. Czasami będziemy utożsamiać k -kolorowanie (funkcję) z ciągiem zbiorów niezależnych (V_1, V_2, \dots, V_k) stanowiących podział zbioru wierzchołków grafu na zbiory wierzchołków w danym kolorze. Graf posiadający k -kolorowanie właściwe nazywamy *k -kolorowalnym*, a najmniejszą liczbę kolorów k , za pomocą której można pokolorować graf G właściwie, nazywamy *liczbą chromatyczną grafu G* i oznaczamy $\chi(G)$. Możemy zapisać w sposób symboliczny

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : G \text{ jest } k\text{-kolorowalny}\}.$$

Jeżeli $\chi(G) = k$, to G nazywamy *k -chromatycznym*. Zarówno w tym, jak i w kolejnych rozdziałach będziemy zajmować się kolorowaniami właściwymi, a więc w domyśle o takie kolorowanie będzie zawsze chodziło.

Graf jest 1-kolorowalny tylko jeżeli jest grafem rozmiaru 0 (jest niezależnym zbiorem wierzchołków) oraz 2-kolorowalny wtedy i tylko wtedy gdy jest dwudzielny (lub ogólniej: grafy r -dzielne to grafy r -kolorowalne). Również liczba chromatyczna klik K_n jest łatwa do obliczenia, gdyż każdy jej wierzchołek musi zostać pokolorowany innym kolorem, stąd $\chi(K_n) = n$.

Nietrudno zauważyć, że jeżeli graf H jest podgrafem grafu G , to

$$\chi(H) \leq \chi(G).$$

Stąd, jeżeli przez $\omega(G)$ oznaczymy *liczbę klikową grafu G* , to jest maksymalny rząd klikki zawartej w grafie G , to $\omega \leq \chi(G)$.

Możemy również uzależnić liczbę chromatyczną grafu G od jego liczby niezależności, tj. mocy jego największego (pod względem liczebności) zbioru niezależnego. Możemy więc podzielić n wszystkich wierzchołków G na maksymalnie $\lceil \frac{n}{\alpha(G)} \rceil$ zbiorów niezależnych, stąd liczba chromatyczna G musi być większa od tej wartości. Łącząc razem te dwie zależności otrzymujemy poniższe twierdzenie, które jest elementarnym wynikiem w teorii kolorowań grafów.

Twierdzenie 4.

$$\chi(G) \geq \max\{\omega(G), \lceil \frac{n}{\alpha(G)} \rceil\}.$$

Górne ograniczenie dla liczby chromatycznej możemy uzyskać analizując najprostszy algorytm znajdujący kolorowanie wierzchołkowe grafu, mianowicie algorytm zachłanny (znajdujący rozwiązanie lokalnie optymalne). W pierwszym kroku algorytmu porządkujemy wierzchołki grafu (w dowolny sposób) otrzymując ciąg v_1, v_2, \dots, v_n . Wierzchołkowi v_1 nadajemy kolor 1. W i -tym kroku, dla $i \in \{2, \dots, n\}$, kolorujemy wierzchołek v_i najmniejszą możliwą liczbą naturalną, to znaczy:

$$c(v_i) = \min\{l \in \mathbb{N} : \forall k < i : v_i v_k \in E(G) \Rightarrow c(v_k) \neq l\}.$$

Innymi słowy, analizujemy zbiór kolorów sąsiadów wierzchołka v_i i wybieramy najmniejszą liczbę naturalną, której nie ma w tym zbiorze. Kolorowanie otrzymane w wyniku algorytmu używa co najwyżej $\Delta(G) + 1$ kolorów, ponieważ każdy z wierzchołków ma co najwyżej $\Delta(G)$ sąsiadów. Otrzymujemy więc ograniczenie dla liczby chromatycznej zawarte w kolejnym twierdzeniu.

Twierdzenie 5. [11] *Dla dowolnego grafu G zachodzi*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Co więcej, w ogólności nie znajdziemy lepszego górnego ograniczenia, ponieważ $\chi(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$. Inne górne ograniczenie podaje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 6. [41, 34] *Załóżmy, że w grafie G każdy jego podgraf zawiera wierzchołek o stopniu mniejszym lub równym $\delta(G)$. Wtedy*

$$\chi(G) \leq \delta(G) + 1$$

Dowód. Wiemy, że w grafie G istnieje wierzchołek o stopniu $\delta(G)$, oznaczmy go v_n . Wiemy również, że także w grafie $G - v_n$ istnieje wierzchołek o stopniu nie większym niż $\delta(G)$, który oznaczmy przez v_{n-1} . Również w grafie $G - \{v_n, v_{n-1}\}$ istnieje wierzchołek stopnia co najwyżej $\delta(G)$, oznaczmy go v_{n-2} . Kontynuując ten proces możemy poetykietować wszystkie wierzchołki w grafie G , jednocześnie ustawiając je w ciąg v_1, v_2, \dots, v_n . Do tak uporządkowanych wierzchołków zastosujemy algorytm zachłanny. W i -tym kroku algorytmu rozważać będziemy wierzchołek v_i , który połączony będzie z co najwyżej $\delta(G)$ wierzchołków spośród v_1, \dots, v_{i-1} , które zostały wcześniej pokolorowane. Stąd będziemy potrzebować co najwyżej $\delta(G) + 1$ kolorów. \square

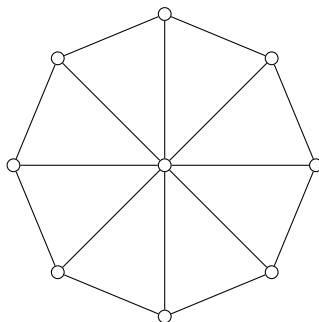
Powyższe twierdzenia zapewniają nam ścisłe ograniczenia dla, na przykład, grafu pełnego:

$$\chi(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1 = \delta(K_n) + 1,$$

lub dla cyklu nieparzystego:

$$\chi(C_n) = 3 = \Delta(C_n) + 1 = \delta(C_n) + 1.$$

Wydawałoby się więc, że twierdzenie 6, mając na uwadze jego mocniejsze założenia, nie wnosi niczego nowego. Rozważmy jednak graf W_n , nazywany kołem szprychowym. Jest to graf posiadający n wierzchołków z których $n - 1$ leży na wspólnym cyklu, a ostatni jest "środkiem koła" połączonym krawędziami ("szprychami") ze wszystkimi wierzchołkami na cyklu.



Rysunek 7: Graf W_8 .

Dla $n = 100$, twierdzenie 5 ogranicza liczbę chromatyczną przez 100, podczas gdy $\chi(W_n) = 4$. Jest więc to ograniczenie zupełnie bezużyteczne. Z drugiej jednak strony, łatwo pokazać, że każdy podgraf grafu W_n będzie zawierał wierzchołki o stopniu nieprzekraczającym $\delta(W_n) = 3$, stąd z twierdzenia 6 otrzymujemy górne ograniczenie liczby chromatycznej: $\chi(W_n) \leq 4$, a więc najlepsze możliwe.

Kolejne twierdzenie, będące nieco poprawionym twierdzeniem 5, jest jednym z najważniejszych wyników w dziedzinie kolorowania. Do jego dowodu będzie nam potrzebne pojęcie bloku.

Blokiem w grafie nazywamy jego maksymalny (względem zawierania) podgraf o spójności większej lub równej 2 (czyli taki, który nie zawiera wierzchołków rozspajających).

Twierdzenie 7. [11, 14](**Brooks**) *Jeżeli G jest grafem spójnym różnym od grafu pełnego i cyklu nieparzystego, to $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Dowód. Dla grafów, których maksymalny stopień jest mniejszy niż 2, twierdzenie jest prawdziwe w sposób trywialny. Jeżeli $\Delta(G) = 0$ to mamy do czynienia z K_1 , jeżeli $\Delta(G) = 1$, to $G = K_2$, a więc oba przypadki nie spełniają założeń twierdzenia. Jeżeli $\Delta(G) = 2$, to graf G jest ścieżką (wtedy $\chi(G) = 2 = \Delta(G)$) lub cyklem (w tym wypadku, jeżeli G jest cyklem parzystym, to jego liczba chromatyczna również wynosi 2, a jeżeli jest cyklem nieparzystym, to oczywiście nie jest spełnione założenie).

Żałujemy więc, że $\Delta(G) \geq 3$. Dla dowodu nie wprost, założmy że G nie spełnia tezy twierdzenia, to znaczy $\chi(G) > \Delta(G)$ oraz G jest najmniejszym (w sensie rzędu) grafem, dla którego taka zależność zachodzi. Prawdziwe są więc następujące stwierdzenia.

1. Graf G jest spójny. W przeciwnym wypadku, przynajmniej jedna z jego spójnych składowych byłaby grafem mniejszego rzędu, dla którego prawdziwa byłaby interesująca nas nierówność, co daje sprzeczność z założeniem o minimalności rzędu grafu G .

2. G jest 2-spójny. Gdyby nie był, zawierałby wierzchołek rozspajający v oraz składowe grafu $G - v$ wraz z wierzchołkiem v byłyby $\Delta(G)$ -kolorowalne. Kolory wierzchołków w składowych można by więc spermutować w ten sposób, aby w każdej wierzchołek v miał ten sam kolor, co daje kolorowanie właściwe grafu G za pomocą co najwyżej $\Delta(G)$ kolorów.
3. G musi zawierać trzy wierzchołki v, u_1, u_2 , takie że
 - u_1 i u_2 są niesąsiednie
 - zarówno u_1 jak i u_2 są połączone krawędzią z v
 - $G - \{u_1, u_2\}$ jest spójny.

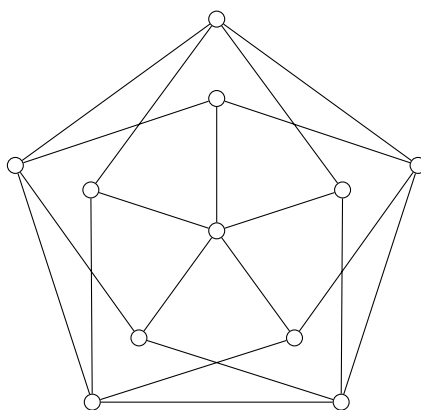
Rozpatrzmy dwa przypadki.

Przypadek 1: G jest 3-spójny. Ponieważ G nie jest pełny, muszą istnieć dwa jego niesąsiednie wierzchołki x, y . Niech $x = v_0, \dots, v_l = y$, gdzie $l \geq 2$, będzie najkrótszą ścieżką łączącą x i y . Wierzchołek v_0 nie jest więc połączony z wierzchołkiem v_2 . Możemy przyjąć $u_1 = v_0, v = v_1, u_2 = v_2$.

Przypadek 2: G jest 2-spójny, ale nie jest 3-spójny. W takim przypadku muszą istnieć dwa wierzchołki x, y , takie że $G - \{x, y\}$ jest niespójny. Oznacza to, że graf $G - x$ posiada wierzchołek rozspajający, jednak sam graf G takiego wierzchołka nie posiada. Stąd, x musi być połączony z conajmniej jednym wierzchołkiem z każdego bloku w grafie $G - \{x\}$. Wierzchołkami spełniającymi powyższe warunki są wierzchołek x oraz dwa wierzchołki należące do różnych bloków końcowych sąsiadujące z x .

Uporządkujmy wierzchołki grafu G w ten sposób, aby algorytm zachłanny dał nam szukane kolorowanie. Przez π_i oznaczmy i -ty wyraz konstruowanego ciągu. Niech $\pi_1 = u_1, \pi_2 = u_2, \pi_n = v$. Pozostałe wyrazy ciągu wybieramy w ten sposób, że dla $3 \leq i \leq n - 1$ zachodzi $\{\pi_{i+1}, \dots, \pi_n\} \cap N(v_i) \neq \emptyset$. Kolorujemy wierzchołki za pomocą algorytmu zachłannego. Wierzchołki π_1, π_2 otrzymają kolor 1, ponieważ nie są połączone krawędzią. Przy kolorowaniu wierzchołka π_i , dla $3 \leq i \leq n - 1$, dostępny będzie przynajmniej jeden kolor $k \leq \Delta(G)$, ponieważ przynajmniej jeden z jego sąsiadów nie został jeszcze pokolorowany. Ostatecznie, gdy algorytm dojdzie do wierzchołka $\pi_n = v$, to co najwyżej $\Delta(G) - 1$ kolorów będzie już wykorzystanych do pokolorowania jego sąsiadów, a więc przynajmniej jeden z $\Delta(G)$ kolorów będzie dostępny. W efekcie, algorytm zachłanny da nam kolorowanie za pomocą co najwyżej $\Delta(G)$ kolorów, stąd $\chi(G) \leq \Delta(G)$. \square

Użyteczną, przy analizie zagadnień związanych z kolorowaniem, klasą grafów są grafy krytyczne. Mówimy, że graf G jest *grafem krytycznym* (w domyśle *wierzchołkowo krytycznym*), jeżeli dla dowolnego właściwego podgrafu H grafu G prawdziwa jest nierówność $\chi(H) < \chi(G)$. Jeżeli liczba chromatyczna grafu krytycznego jest równa k , to nazywamy go k -krytycznym. Poniższy graf, zwany grafem Grötzscha, jest przykładem grafu 4-krytycznego.



Rysunek 8: Graf Grötzscha

Oczywistym faktem jest, że graf krytyczny musi być spójny (inaczej nie zachodziłby warunek z definicji). Co więcej, graf krytyczny nie może zawierać wierzchołków rozspajających.

Każdy k -chromatyczny graf ma podgraf k -krytyczny. Fakt ten udowodnić można w prosty sposób, przez indukcję ze względu na liczbę wierzchołków lub liczbę krawędzi grafu G . Jeżeli G jest k -krytyczny to szukany podgrafem jest sam G . W przeciwnym wypadku istnieje wierzchołek v w G , taki że $\chi(G - v) = k$ lub krawędź e , taka że $\chi(G - e) = k$. W obu przypadkach, możemy zastosować założenie indukcyjne do otrzymanego grafu, a więc będzie miał on k -krytyczny podgraf, który jest również podgrafem grafu wyjściowego G . Inną własność grafów krytycznych opisuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 8. [16, 7] *Jeżeli G jest k -krytyczny, to $\delta(G) \geq k - 1$.*

Dowód. Dla dowodu nie wprost załóżmy że G jest grafem k -krytycznym, takim że $\delta(G) < k - 1$. Niech v będzie takim wierzchołkiem grafu G , że jego stopień wynosi $\delta(G)$. Z k -krytyczności grafu G wynika, że $\chi(G - v) \leq k - 1$. Rozważmy kolorowanie $(V_1, V_2, \dots, V_{k-1})$ grafu $G - v$. Skoro v ma mniej niż $k - 1$ sąsiadów, to musi istnieć $j \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$, takie że v nie sąsiaduje z żadnym wierzchołkiem z V_j . Z tego wynika jednak, że $V_j \cup \{v\}$ jest zbiorem niezależnym, a więc $(V_1, V_2, \dots, V_j \cup \{v\}, \dots, V_{k-1})$ jest $(k - 1)$ -kolorowaniem właściwym G , co jest sprzeczne z założeniem $\chi(G) = k$. Wnioskujemy, że $\delta(G) \geq k - 1$. \square

Z powyższych rozumowań wynika następujący wniosek.

Twierdzenie 9. [16, 7] *Każdy graf k -chromatyczny ma przynajmniej k wierzchołków, których stopień jest większy lub równy $k - 1$.*

Dowód. Niech G będzie grafem k -chromatycznym, a H jego podgrafem k -krytycznym. Z twierdzenia 8, każdy wierzchołek grafu H ma stopień większy lub równy $k - 1$ w H , a więc także w G . Skoro H jest k -krytyczny, to jest również k -chromatyczny, a więc ma minimum k wierzchołków. \square

Wnioskiem z twierdzenia 9 jest wynik, który przedstawiliśmy już wcześniej - twierdzenie 5.

2.1. Grafy planarne.

Własności chromatyczne grafów planarnych są o tyle istotne, że rozważania nad nimi dały początek całej teorii kolorowania grafów. Twierdzenie 10, uważane za jeden z najważniejszych wyników w dziedzinie, pierwotnie funkcjonowało jako hipoteza dotycząca kolorowania obszarów map kartograficznych. Przez utożsamienie obszarów mapy z wierzchołkami, które połączone są krawędzią jeżeli obszary mają wspólną granicę, przełożone zostało na język grafów planarnych.

Twierdzenie 10. [3] **(Twierdzenie o czterech kolorach.)** *Każdy graf planarny jest 4-kolorowalny.*

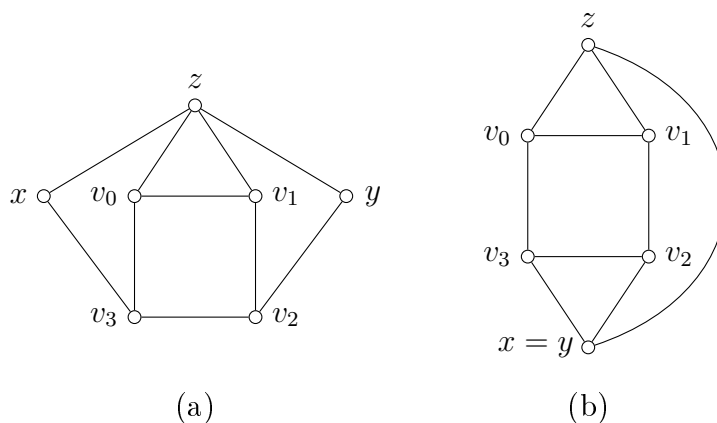
Powyższy wynik nie może zostać poprawiony w ogólności (choćby ze względu na K_4), jednak możemy wyróżnić podklasę grafów planarnych, których liczba chromatyczna wynosi 3.

Twierdzenie 11. [23] **(Grötzsch)** *Każdy graf planarny nie zawierający trójkątów (cykli długości 3) jest 3-kolorowalny.*

Twierdzenie 17 podaje ten sam wynik przy osłabionych założeniach. Twierdzenia 13, 14, 16 będą używane do jego dowodu i również dotyczą 3-kolorowalności grafów planarnych.

Przez używane w dowodach *ściągnięcie dwóch wierzchołków* rozumiemy zastąpienie tych dwóch wierzchołków przez jeden wierzchołek połączony krawędziami ze wszystkimi sąsiadami wyjściowych wierzchołków (z pominięciem krawędzi wielokrotnych i pętli).

Lemat 12. [10] *Niech G będzie grafem planarnym, F będzie jego ścianą ograniczoną cyklem $v_0v_1v_2v_3$ oraz $v_0v_2, v_1v_3 \notin E(G)$. Niech G_i będzie grafem powstałym z G przez ściągnięcie wierzchołków v_i, v_{i+2} do jednego wierzchołka, dla $i \in \{0, 1\}$. Jeżeli liczba trójkątów zarówno w grafie G_0 jak i G_1 jest większa niż w grafie G , to istnieje w G trójkąt $v_iv_{i+1}z$ dla pewnego wierzchołka $z \in V(G)$ oraz pewnego $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Ponadto, G zawiera wierzchołki x, y , które nie należą do ściany F , takie że $v_{i+1}zxv_{i-1}$ oraz v_izyv_{i+2} (indeksy rozważamy modulo 4) są ścieżkami w G .*



Rysunek 9: Trójkąt sąsiadujący ze ścianą ograniczoną cyklem długości 4 w lemacie 12 (dwa przypadki).

Dowód. Niech G , F , G_0 oraz G_1 będą zadane tak jak w wypowiedzi lematu. Skoro G_0 zawiera więcej trójkątów niż G , to musi istnieć ścieżka v_0zyv_2 w G , gdzie z, y nie należą do ściany F . Podobnie, jeżeli w grafie G_1 pojawia się trójkąt, którego nie było w grafie G , to musi istnieć ścieżka v_1wxv_3 w G . Z planarności G wynika, że zbiory wierzchołków $\{z, y\}$, $\{w, x\}$ nie mogą być rozłączne. Bez straty ogólności, możemy przyjąć że $z = w$, co skutkuje obecnością trójkąta v_0v_1z oraz ścieżek v_1zxv_3 , v_0zyv_2 w grafie G . Zauważmy również, że wierzchołki x oraz y mogą być tożsame (patrz rys.9). \square

Twierdzenie 13. [31] *Jeżeli G jest grafem 4-krytycznym rzędu n , to zachodzi nierówność*

$$|E(G)| \geq \frac{5n - 2}{3}.$$

Dowód powyższego twierdzenia pomijamy ze względu na jego obszerność.

Twierdzenie 14. [10] *Niech G będzie grafem planarnym bez trójkątów oraz H będzie grafem, takim że $G = H - v$ dla pewnego wierzchołka v o stopniu 4. Wtedy H jest 3-kolorowalny.*

Zauważmy, że skoro teza zachodzi, gdy rozważamy wierzchołek stopnia 4, to tym bardziej będzie prawdziwa, gdy stopień wierzchołka v będzie mniejszy.

Dowód. Załóżmy, że twierdzenie nie zachodzi i graf H jest najmniejszym (ze względu na rząd) kontrprzykładem. Niech G będzie grafem planarnym nie zawierającym trójkątów, takim że $G = H - v$, gdzie v jest pewnym wierzchołkiem w grafie H o stopniu 4. Oznaczmy: przez n rząd grafu H , przez m jego rozmiar oraz przez f - liczbę ścian w grafie G . Graf G ma więc $n - 1$ wierzchołków i $e - 4$ krawędzi. Z minimalności, H jest 4-krytyczny, a więc z twierdzenia 13 mamy, że $m \geq \frac{5n-2}{3}$.

Przypadek 1. Graf G nie posiada ścian stopnia 4. Wtedy $5f \leq 2(m - 4)$, a więc $f \leq \frac{2(m-4)}{5}$. Stąd oraz ze wzoru Eulera $(n - 1) - (m - 4) + f = 2$, mamy

$$5n - 3m - 8 \geq -5,$$

skąd $m \leq \frac{5n-3}{3}$, co jest sprzeczne z twierdzeniem 13.

Przypadek 2. Graf G posiada ścianę F o ograniczoną cyklem $v_0v_1v_2v_3$ (długości 4). Ponieważ G nie zawiera trójkątów, w G nie istnieją krawędzie v_0v_2 , v_1v_3 . Możemy skorzystać z lematu 12. Bez straty ogólności, załóżmy że G_0 , powstały z G przez ściągnięcie wierzchołków v_0 oraz v_2 , nie zawiera trójkątów.

Z minimalności H , graf otrzymany z grafu H przez ściągnięcie v_0 i v_2 spełnia założenia twierdzenia, a więc posiada 3-kolorowanie właściwe. Stąd, również graf H jest 3-kolorowalny, co daje sprzeczność. \square

Istnieje również podobny wynik dla sytuacji, gdy w powyższym twierdzeniu wierzchołki zastąpimy krawędzią.

Twierdzenie 15. [2] *Niech G będzie grafem planarnym bez trójkątów oraz niech H będzie takim grafem, że $G = H - e$ dla pewnej krawędzi e grafu H . Wtedy graf H jest 3-kolorowalny.*

Twierdzenie 16. [10] *Niech G będzie grafem planarnym niezawierającym trójkątów oraz niech F będzie jego ścianą ograniczoną cyklem o długości co najwyżej 5. Wtedy każde 3-kolorowanie właściwe wierzchołków ściany F może zostać rozszerzone do 3-kolorowania właściwego grafu G*

Dowód. Rozważmy 3-kolorowanie właściwe ϕ wierzchołków ściany F .

Przypadek 1. F jest ścianą stopnia 4 ograniczoną przez cykl $v_0v_1v_2v_3$.

Przypadek 1.1. Zachodzą równości $\phi(v_0) = \phi(v_2)$ oraz $\phi(v_1) = \phi(v_3)$. Niech G' będzie grafem otrzymanym z G przez dodanie wierzchołka v sąsiadującego z v_0, v_1, v_2 oraz v_3 . Z twierdzenia 14, istnieje 3-kolorowanie właściwe G' , oznaczmy je ρ . Zauważmy, że skoro ρ używa tylko trzech kolorów, to musi zachodzić $\rho(v_0) = \rho(v_2)$ oraz $\rho(v_1) = \rho(v_3)$. Stąd, lub dodatkowo przez permutację kolorów w kolorowaniu ρ , otrzymujemy 3-kolorowanie ρ całego grafu G , które jest rozszerzeniem kolorowania ϕ .

Przypadek 1.2. Niech $\phi(v_0) = \phi(v_2)$ oraz $\phi(v_1) \neq \phi(v_3)$. Zkonstruujemy graf G' przez dodanie do G krawędzi v_1v_3 . Nowopowstały graf spełnia założenia twierdzenia 15, a więc istnieje jego 3-kolorowanie ρ . Oczywiście jest, że $\rho(v_1) \neq \rho(v_2)$, a więc z kolorowania ρ możemy uzyskać rozszerzenie ϕ do 3-kolorowania grafu G . Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla przypadku, gdy $\phi(v_0) \neq \phi(v_2)$ i $\phi(v_1) = \phi(v_3)$.

Przypadek 2. F jest ścianą o pięciu wierzchołkach $v_0v_1v_2v_3v_4$. Zauważmy, że z dokładnością do symetrii, istnieje tylko jedno 3-kolorowanie wierzchołków ściany F . Bez straty ogólności załóżmy więc, że $\phi(v_0) = \phi(v_2)$ oraz $\phi(v_1) = \phi(v_3)$.

Niech G' będzie grafem powstałym z G przez dodanie wierzchołka v sąsiadującego z v_0, v_1, v_2 oraz v_3 . Z twierdzenia 14, istnieje 3-kolorowanie ρ grafu G' . Zauważmy, że w dowolnym takim kolorowaniu $\rho(v_0) = \rho(v_2)$ oraz $\rho(v_1) = \rho(v_3)$. Przez spermutowanie kolorów w kolorowaniu ρ otrzymujemy rozszerzenie ϕ do 3-kolorowania grafu G . \square

Twierdzenie 17. [1, 10] *Jeżeli graf planarny zawiera co najwyżej trzy trójkąty, to jest 3-kolorowalny.*

Dowód. Niech G będzie najmniejszym (pod względem rzędu) grafem planarnym, takim że zawiera co najwyżej trzy trójkąty i nie jest 3-kolorowalny. Z minimalności, G jest 4-krytyczny.

Każdy cykl długości 3 w G wyznacza ścianę. W przeciwnym wypadku, usunięcie cyklu C , który nie wyznacza ściany, spowodowałoby rozspójnienie grafu (przez usunięcie cyklu rozumiemy usunięcie należących do niego wierzchołków wraz z incydentnymi krawędziami). Oznaczmy składowe grafu $G - C$ przez G_1, G_2 . Z 4-krytyczności G , grafy G_1 wraz z cyklem C oraz G_2 z cyklem C są 3-kolorowalne. Możemy więc spermutować kolory w ich 3-kolorowaniach, tak aby kolory wierzchołków cyklu C pokrywały się, używając tym samym 3-kolorowanie grafu G .

Z twierdzenia 16 w przypadku każdego cyklu C długości 4 lub 5, którego usunięcie powoduje rozspójnienie grafu G , zarówno wewnątrz jak i zewnątrz C zawierają trójkąty.

Przypadek 1. Graf G nie ma ścian o 4 wierzchołkach. Wtedy $5f(G) - 6 \leq 2||G||$. Ze wzoru Eulera $f(G) = 2 - |G| + ||G||$, a więc wstawiając tę zależność do wcześniejszej nierówności otrzymujemy $4 - 5|G| + 5||G|| \leq 2||G||$. Stąd $||G|| \leq \frac{5|G|-4}{3}$, co jest sprzeczne z twierdzeniem 13.

Przypadek 2. Graf G posiada ścianę o 4 wierzchołkach F ograniczoną cyklem $v_0v_1v_2v_3$, taką że $v_0v_2 \in E(G)$. Z minimalności, $v_0v_1v_2$ i $v_0v_3v_2$ są ścianami o 3 wierzchołkach, a więc G ma 4 wierzchołki, 5 krawędzi i jest 3-kolorowalny.

Przypadek 3. Dla dowolnej ściany o 4 wierzchołkach F ograniczonej cyklem $v_0v_1v_2v_3$, krawędzie v_0v_2 oraz v_1v_3 nie istnieją. Z lematu 12, istnieją ścieżki v_0zyv_3 oraz v_1zxv_3 , dla pewnych $x, y, z \in V(G)$.

Przypadek 3.1. Graf G zawiera $C_3 \times K_2$ oraz jeden z cykli długości 4 tego podgrafu stanowi ścianę w G . Możemy założyć, że jest to ściana F oraz że $x = y$ (patrz rys. 9(b)). Z twierdzenia 16 ścianą będzie zv_0v_3x lub zv_1v_2x . Bez straty ogólności, przyjmijmy że zv_1v_2x jest ścianą o czterech wierzchołkach. Rozważmy graf G_0 powstały z G przez zastąpienie wierzchołków v_0 i v_2 wierzchołkiem v , takim że $N(v) = N(v_0) \cup N(v_2)$. G_0 nie jest 3-kolorowalny (bo wtedy z 3-kolorowania grafu G_0 moglibyśmy otrzymać 3-kolorowanie grafu G), zawiera więc podgraf 4-krytyczny G'_0 . Zauważmy, że G'_0 zawiera trójkąt xvz , którego nie ma w grafie G , ale nie zawiera trójkąta v_0v_1z , ponieważ w G_0 stopień wierzchołka v_1 wynosi 2. Z minimalności G , istnieje w G_0 trójkąt T , który nie należy do G . Z planarności, $x \in T$. Stąd, istnieje wierzchołek $w_1 \neq v_3$ sąsiadujący z v_0 i x .

Postępując analogicznie dla wierzchołków v_1 oraz v_3 , można wnioskować, że istnieje w G wierzchołek $w_2 \neq v_0$ sąsiadujący z v_3 i z . Z planarności wynika, że $w_1 = w_2$. To daje nam sprzeczność z faktem, że G posiada co najwyżej trzy trójkąty.

Przypadek 3.2. Graf G nie zawiera podgrafu $C_3 \times K_2$, takiego że jeden z jego cykli długości 4 wyznacza ścianę w G . Wtedy $x \neq y$ (patrz rys. 9(a)). Jeżeli $v_0x \in E(G)$, to graf $G - v_0$ nie zawiera trójkątów i twierdzenie 14 daje nam 3-kolorowanie grafu G , a więc sprzeczność. Analogicznie można wykazać, że wierzchołki v_1, y nie mogą być sąsiadujące.

Założmy, że zv_0v_3x jest ścianą. Niech G' będzie grafem otrzymanym z $G - v_0$ przez dodanie krawędzi xv_1 . Jeżeli liczba trójkątów grafie G' jest nie większa niż trzy, to, z minimalności G , istnieje 3-kolorowanie G' , oznaczmy je ϕ . Niech ρ będzie funkcją działającą na zbiorze wierzchołków grafu G , taką że

$$\rho(v) = \begin{cases} \phi(v), & \text{jeżeli } v \in V(G') \\ \phi(x), & \text{jeżeli } v = v_0 \end{cases}.$$

Skoro sąsiedzi wierzchołka v_0 w grafie G są sąsiadami wierzchołka x w grafie G' , funkcja ρ jest 3-kolorowaniem właściwym grafu G , co daje sprzeczność z założeniem. Wnioskujemy, że G' musi mieć przynajmniej 4 trójkąty, a więc zawiera wierzchołek $t \neq z$ połączony krawędziami z wierzchołkami v_1, x . Skoro $v_1y \notin E(G)$, to jedyną możliwością jest $t = v_2$. Jednak gdyby w G istniała krawędź xv_2 , to G zawierałby $C_3 \times K_2$ jako podgraf, co, ponownie, daje sprzeczność. Stąd, zv_0v_3x nie jest ścianą i, z symetrii, to samo możemy powiedzieć o zv_1v_2y .

Skoro cykle zv_0v_3x , zv_1v_2y nie są ścianami, to każdy z nich zawiera trójkąt. Udało się więc zlokalizować wszystkie trzy trójkąty w grafie G . Twierdzenie 16 implikuje więc, że zyv_2v_3x jest ścianą o pięciu wierzchołkach oraz że wierzchołki z, v_3 mają dokładnie dwóch wspólnych sąsiadów: v_0, x . Bez straty ogólności możemy więc założyć, że zyv_2v_3x jest ścianą zewnętrzną grafu G .

Niech H_1 będzie grafem powstałym z cyklu zv_0v_3x i jego wnętrza oraz dodanej krawędzi zv_3 . Krawędź zv_3 zawiera się w dwóch trójkątach, a we wnętrzu cyklu zv_0v_3x znajduje się tylko jeden trójkąt. Z minimalności G , istnieje 3-kolorowanie ϕ_1 grafu H_1 .

Podobnie, skonstruujemy graf H_2 z cyklu zv_1v_2y i jego wnętrza, przez dodanie krawędzi zv_2 . Przeprowadzając rozumowanie analogiczne do wcześniejszego, otrzymujemy 3-kolorowanie ϕ_2 grafu H_2 .

Spermutujmy kolory w grafach H_1, H_2 w ten sposób, żeby $\phi_1(z) = \phi_2(z)$, $\phi_1(v_0) = \phi_2(v_2)$ oraz $\phi_1(v_3) = \phi_2(v_1)$. Wtedy suma kolorowań ϕ_1 i ϕ_2 jest 3-kolorowaniem właściwym grafu G , a więc otrzymujemy sprzeczność z pierwotnym założeniem. \square

Okazuje się, że 3-kolorowalność grafu planarnego ma związek również z obecnością cykli o innych długościach niż trzy. I tak, graf planarny nie zawierający cykli długości od 4 do 9 jest 3-kolorowalny [8]. Wyniku tego użyjemy do dowodu twierdzenia 19, które podaje słabszy warunek wystarczający dla tej własności. W dowodzie oprzemy się również na wypowiedzi twierdzenia 18.

Twierdzenie 18. [9] *Niech G będzie spójnym grafem planarnym nie zawierającym cykli długości od 4 do 7. Każde 3-kolorowanie właściwe wierzchołków należących do ściany ograniczonej cyklem długości od 8 do 11 w grafie G może zostać rozszerzone do 3-kolorowania właściwego całego grafu G .*

Twierdzenie 19. [9] *Każdy graf planarny nie zawierający cykli długości od 4 do 7 jest 3-kolorowalny.*

Dowód. Przypuśćmy, że G jest grafem, dla którego twierdzenie nie zachodzi, o najmniejszej możliwej liczbie wierzchołków. Zatem G jest spójny oraz zawiera cykl C długości 8 lub 9. Skoro G nie zawiera cykli długości od 4 do 7, to w podgrafie indukowanym przez wierzchołki cyklu C , istnieje co najwyżej jedna krawędź nienależąca do tego cyklu, a więc istnieje 3-kolorowanie właściwe ϕ tego podgrafu. Z twierdzenia 18, kolorowanie to może zostać rozszerzone do 3-kolorowania całego grafu G . \square

Ostatnim wynikiem, którym zajmiemy się w tym podrozdziale jest 3-kolorowalność triangulacji. *Triangulacja* jest to graf planarny, którego wszystkie ściany są trójkątami. Triangulacja jest maksymalnym grafem planarnym, to znaczy dodanie do niej dowolnej krawędzi powoduje utratę planarności.

W dowodzie twierdzenia użyjemy pojęcia *grafu dualnego*. Grafem dualnym grafu planarnego G nazywamy taki graf G^* , którego zbiór wierzchołków jest zbiorem ścian grafu G oraz w którym krawędź fh istnieje wtedy i tylko wtedy, kiedy ściany f i h mają wspólną krawędź w G . Może się zdarzyć, że graf dualny będzie multigrafem, tzn. będzie zawierał krawędzie wielokrotne, kiedy dwie ściany w grafie wyjściowym będą miały więcej niż jedną wspólną krawędź, oraz będzie zawierał pętle (krawędzie postaci vv), kiedy będzie grafem dualnym dla grafu o jednej ścianie. Warto nadmienić, że zachodzi zależność $(G^*)^* = G$.

Idea grafu dualnego jest dokładnie tym, co pozwala nam przenieść zagadnienia dotyczące kolorowania map na grunt grafów planarnych, kolorowanie obszarów mapy G (ścian G) odpowiada kolorowaniu wierzchołków w G^* .

Kolorowaniem właściwym ścian w grafie planarnym nazywamy przyporządkowanie ścianom grafu kolorów (ze skończonego zbioru) w ten sposób, że żadne dwie ściany sąsiadujące nie otrzymują tego samego koloru. Jest to sformalizowanie pojęcia kolorowania obszarów mapy, o którym wspominaliśmy wcześniej. Jak zawsze, k -kolorowanie ścian to kolorowanie ścian za pomocą k kolorów.

Twierdzenie 20. [22] *Triangulacja jest 3-kolorowalna wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej wierzchołki mają parzyste stopnie.*

Dowód.

Niech G będzie triangulacją.

Najpierw udowodnimy, że parzystość stopni jest warunkiem koniecznym. Rozważmy graf dualny G^* i kolorowanie jego ścian. Gdyby w G istniał wierzchołek o nieparzystym stopniu, to w G^* odpowiadałaby mu ściana sąsiadująca z nieparzystą liczbą ścian, co uniemożliwia pokolorowanie ich w sposób właściwy za pomocą trzech kolorów (patrz rys.10).

a pozostałe wierzchołki w grafie G' mają stopień równy ich stopniowi w grafie G . Wszystkie wierzchołki w G' mają więc parzyste stopnie. Z założenia indukcyjnego, G' jest 3-kolorowalny. Pokażemy, że wierzchołki x_1, x_3 muszą w takim kolorowaniu otrzymać ten sam kolor.

Sąsiadów x' , z wyłączeniem wierzchołków x_1 i x_3 , możemy podzielić na dwa podzbiory: wierzchołki, które w grafie G sąsiadowały z wierzchołkiem x_2 (onaczmy ten zbiór N_2) oraz pozostałe, czyli sąsiedzi "odziedziczeni" po wierzchołku x_4 (ozn. N_4). Oba te podzbiory mają nieparzystą liczebność równą $d(x_i) - 3$ dla, odpowiednio, $i = 2$ lub $i = 4$. Załóżmy, że wierzchołek x_1 otrzymał w 3-kolorowaniu grafu G' kolor 1, a wierzchołek x' kolor 2. Istnieje w G' ścieżka prowadząca od x_1 przez kolejnych sąsiadów x' ze zbioru N_2 do wierzchołka x_3 . Na ścieżce występują tylko kolory 1 i 3, naprzemiennie. Skoro liczebność N_2 jest nieparzysta, to wierzchołek x_3 otrzyma kolor 1.

Stąd wystarczy przyporządkować kolor 2 wierzchołkom x_2, x_4 oraz kolor 3 wierzchołkowi x , a kolory pozostałych wierzchołków pokolorować tak jak wcześniej w kolorowaniu grafu G' , aby otrzymać 3-kolorowanie dla G . \square

2.2. Grafy kubiczne.

Zagadnienie kolorowania wierzchołkowego grafów kubicznych poruszamy dla kompletności pracy, gdyż problem wyznaczenia liczby chromatycznej grafów kubicznych całkowicie rozwiązują wyniki przytoczone wcześniej. Z twierdzenia 7 wynika, że jedynym grafem kubicznym o liczbie chromatycznej równej 4 będzie graf pełny K_4 , pozostałe grafy 3-regularne będą 3-kolorowalne. Jednocześnie, 2-kolorowalne będą tylko te grafy kubiczne, które są dwudzielne, jak na przykład $K_{3,3}$.

Przytoczymy jednak twierdzenie dotyczące kwadratów grafów kubicznych. Jednocześnie, będzie to jeszcze jeden wynik związany z własnościami chromatycznymi grafów planarnych.

Kwadratem grafu G nazywamy graf G^2 , który powstaje z G przez połączenie krawędziami par wierzchołków, których odległość od siebie wynosi 2 w G .

Twierdzenie 21. *Niech G będzie grafem planarnym o maksymalnym stopniu równym co najwyżej 3. Wtedy G^2 jest 7-kolorowalny.*

3. Kolorowanie krawędziowe.

Kolorowanie krawędziowe to termin analogiczny do kolorowania wierzchołkowego. Kolorowaniem takim nazwiemy dowolną funkcję działającą ze zbioru krawędzi grafu w pewien skończony zbiór kolorów. Ponownie, kolorowanie krawędziowe nazywamy *właściwym*, jeżeli żadne dwie krawędzie posiadające wspólne końce nie otrzymują tego samego koloru. Jeżeli krawędzie grafu możemy pokolorować w sposób właściwy za pomocą k kolorów, to mówimy że graf ten jest *krawędziowo k -kolorowalny*. Najmniejszą liczbę kolorów potrzebną do właściwego pokolorowania krawędzi grafu G nazywamy *indeksem chromatycznym grafu G* i oznaczamy przez $\chi'(G)$. Tak jak kolorowanie wierzchołkowe było dzieleniem zbioru wierzchołków na podzbiory niezależne, tak kolorowanie krawędziowe dzieli zbiór krawędzi grafu na skojarzenia, czyli zbiory krawędzi niesąsiadujących. I podobnie jak przy liczbie chromatycznej, zachodzi następująca relacja między krawędziową liczbą niezależności $\alpha'(G)$ grafu G oraz jego indeksem chromatycznym:

$$\chi'(G) \geq \lceil \frac{\|G\|}{\alpha'(G)} \rceil.$$

Uzasadnienie tego faktu jest takie, że w najlepszym przypadku (minimalizującym liczbę potrzebnych kolorów) wszystkie klasy kolorów krawędzi (zbiory krawędzi w jednym kolorze) będą skojarzeniami o największej możliwej mocy $\alpha'(G)$.

Nietrudno zauważyć, że indeks chromatyczny będzie silnie związany z maksymalnym stopniem wierzchołka w danym grafie. Skoro każda z krawędzi incydentnych z jednym wierzchołkiem musi w kolorowaniu właściwym otrzymać inny kolor, to dla każdego nie pustego grafu G zachodzi

$$\chi'(G) \geq \Delta(G).$$

Co mniej oczywiste, okazuje się, że indeks chromatyczny grafu może przekroczyć jego stopień maksymalny co najwyżej o 1.

Twierdzenie 22. [43, 45] (**Vizing**) *Dla każdego niepustego grafu G zachodzi*

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Ostatecznie, indeks chromatyczny grafu może przyjmować tylko dwie wartości: $\Delta(G)$ lub $\Delta(G) + 1$. Z tego względu wyróżniamy dwie klasy grafów:

- jeżeli $\chi'(G) = \Delta(G)$, to mówimy, że G jest *klasy 1*,
- jeżeli $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, to mówimy, że G jest *klasy 2*.

Reprezentantami klasy 1 są na przykład cykle parzyste, w których wystarczy pokolorować krawędzie dwoma kolorami, naprzemiennie. W przypadku cykli parzystych możemy skorzystać z wcześniej przytoczonej zależności. Gdy n jest nieparzyste to

$$\chi'(C_n) = \frac{n-1}{2},$$

a więc

$$\chi'(C_n) \geq \frac{n}{\alpha'(C_n)} = \frac{2n}{n-1} > 2,$$

stąd (i z twierdzenia Vizinga) $\chi'(C_n) = 3$.

Twierdzenie 23. [29] (König) *Grafy dwudzielne są grafami klasy 1.*

Paletę wierzchołka nazywamy zbiór kolorów krawędzi incydentnych z tym wierzchołkiem.

Dowód.

Przeprowadźmy indukcję ze względu na liczbę krawędzi m w grafie dwudzielnym G . Dla przypadków $m = 1$, $m = 2$ mamy do czynienia ze ścieżką lub krawędzią, więc teza oczywiście zachodzi.

Zakładamy, że $m \geq 3$. Rozważmy graf $G' = G - e$, gdzie $e = uv$ jest krawędzią w G . Z założenia indukcyjnego, $\chi'(G') = \Delta(G')$. Jeżeli $\Delta(G') < \Delta(G)$, to możemy pokolorować krawędzie G' za pomocą $\Delta(G) - 1$ kolorów, po czym rozszerzyć to kolorowanie do kolorowania G kolorując krawędź e innym kolorem, co da nam w sumie $\Delta(G)$ kolorów.

Przyjmijmy więc, że $\Delta(G') = \Delta(G)$. Możemy pokolorować wszystkie krawędzie w G , oprócz e , za pomocą $\Delta(G)$ kolorów. To oznacza, że w kolorowaniu tym istnieje przynajmniej jeden kolor, taki że nie otrzymała go żadna krawędź incydentna z wierzchołkiem u . Taka sama sytuacja zachodzi dla v . Jeżeli w paletach wierzchołków u i v brakuje tego samego koloru, to nim właśnie możemy pokolorować krawędź e . W przeciwnym wypadku, oznaczmy przez α kolor, którego nie ma w paletce wierzchołka u oraz przez β brakujący kolor w paletce v , przy założeniu $\alpha \neq \beta$. Niech $P(\alpha, \beta)$ będzie najdłuższą ścieżką o kolorach α, β i początku w wierzchołku v . Wierzchołek u na pewno nie należy do ścieżki, ponieważ koloru α nie ma w jego paletce. Możemy więc zamienić kolory α, β na ścieżce $P(\alpha, \beta)$. W nowo otrzymanym kolorowaniu, krawędzi e możemy przypisać kolor α . \square

Skoro klasa grafu uwarunkowana jest głównie przez jego maksymalny stopień, nietrudno się domyślić, że będzie związana również z *gęstością grafu*, czyli stosunkiem liczby krawędzi do liczby wszystkich możliwych krawędzi. Dla grafu G jego gęstość wynosi

$$d(G) = \frac{|G|}{\binom{|G|}{2}}.$$

Twierdzenie 24. [4] *Niech G będzie grafem o nieparzystej liczbie wierzchołków n , liczbie krawędzi m oraz maksymalnym stopniu Δ . G jest grafem klasy 2 jeżeli*

$$m > \Delta \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor.$$

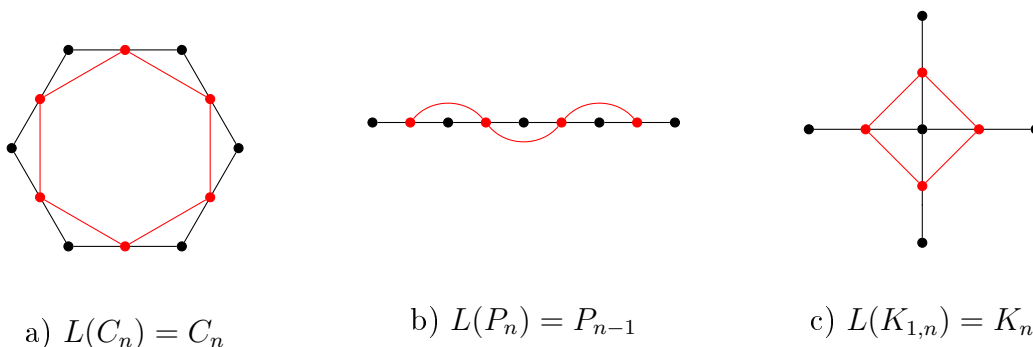
Innymi słowy, jeżeli gęstość grafu nieparzystego rzędu G jest większa niż $\frac{\Delta(G)}{|G|}$, to G jest klasy 2.

Dowód. Przypuśćmy, że twierdzenie nie zachodzi i G jest klasy 1. Istnieje kolorowanie grafu G , które dzieli zbiór jego krawędzi na co najwyżej Δ skojarzeń. Liczba krawędzi w każdym z nich jest równa co najwyżej $\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor$, stąd $m \leq \Delta \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor$, co daje sprzeczność z założeniem. \square

Zanim przejdziemy do kolorowania krawędziowego grafów kubicznych i planarnych, zajmiemy się krótką charakterystyką grafów krytycznych dla tego wariantu kolorowania. *Grafem krawędziowo krytycznym* nazywamy graf spójny klasy 2, taki że usunięcie z niego dowolnej krawędzi obniża jego indeks chromatyczny. Jeżeli $\Delta(G) = k$, to mówimy, że G jest *krawędziowo k-krytyczny*. Grafami krawędziowo krytycznymi są między innymi cykle nieparzyste (grafy 2-krytyczne). Innym przykładem może być graf powstały z K_5 przez usunięcie dowolnej krawędzi (będzie to graf 4-krytyczny), jednak sam graf K_5 nie jest krytyczny, ponieważ graf powstały po usunięciu z niego krawędzi nadal będzie miał indeks chromatyczny równy 5.

Twierdzenie 25. *Jeżeli G jest grafem klasy 2 o stopniu maksymalnym Δ , to G zawiera podgraf krawędziowo k -krytyczny, dla każdej liczby naturalnej k , takiej że $2 \leq k \leq \Delta$.*

Przy analizie grafów krawędziowo krytycznych posłużymy się konstrukcją grafu krawędziowego. *Grafem krawędziowym grafu G* nazywamy taki graf $L(G)$, którego wierzchołki reprezentują krawędzie grafu G i są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im krawędzie w G mają wspólny wierzchołek. Warto zaznaczyć, że w przeciwieństwie do konstrukcji grafu dualnego, konstrukcja grafu krawędziowego nie jest odwracalna, to znaczy zazwyczaj $L(L(G)) \neq G$.



Rysunek 11: Przykłady grafów wraz z ich grafami krawędziowymi (na czerwono).

Dzięki idei grafu krawędziowego, możemy rozważać kolorowanie krawędziowe grafu G na gruncie teorii o kolorowaniu wierzchołkowym (choć zazwyczaj okazuje się, że bardziej użyteczne jest zajmowanie się kolorowaniem krawędziowym bezpośrednio). Indeks chromatyczny grafu G jest równy liczbie chromatycznej jego grafu krawędziowego $L(G)$.

Twierdzenie 26. [43, 20] *Jeżeli G jest grafem k -krytycznym to dla jego wierzchołków sąsiadujących u, v zachodzi*

$$d(u) + d(v) \geq k + 2.$$

Dowód. Jeżeli graf G jest krawędziowo k -krytyczny, to jego graf krawędziowy $L(G)$ jest $(k + 1)$ -krytyczny (wierzchołkowo). Z twierdzenia 8 wiemy, że każdy wierzchołek grafu $L(G)$ ma stopień co najmniej k . Stąd, dla dwóch dowolnych wierzchołków u, v w grafie G połączonych krawędzią zachodzi

$$k \leq d_{L(G)}(uv) = d_G(u) - 1 + d_G(v) - 1.$$

Z powyższych zależności wynika teza. □

Twierdzenie 27. [43] *Jeżeli G jest krawędziowo krytyczny, to $\kappa(G) \geq 2$.*

Dowód. Przypuśćmy, że G jest grafem k -krytycznym zawierającym wierzchołek rozspajający v . Oznaczmy przez H_1, H_2, \dots, H_r składowe spójne grafu $G - v$. Skoro G jest krytyczny, to każdy z podgrafów H_i wraz z wierzchołkiem v i krawędziami prowadzącymi z v do wierzchołków H_i jest k -kolorowalny krawędziowo. Wystarczy więc spermutować kolorowania tych podgrafów w ten sposób, aby każda z krawędzi incydentnych z wierzchołkiem v otrzymała inny kolor i otrzymujemy k -kolorowanie krawędzi grafu G , co stanowi sprzeczność. □

Ostatnim wynikiem dotyczącym grafów krawędziowo krytycznych, który będzie nam potrzebny w późniejszych dowodach, jest poniższe twierdzenie nazywane lematem Vizinga o sąsiadach.

Twierdzenie 28. [44] *Niech G będzie grafem Δ -krytycznym krawędziowo, u, v będą jego wierzchołkami połączonymi krawędzią oraz niech $d(u) = k$. Wtedy*

- (1) *jeżeli $k < \Delta$, to v ma przynajmniej $\Delta - k + 1$ sąsiadów stopnia Δ*
- (2) *jeżeli $k = \Delta$, to v ma przynajmniej dwóch sąsiadów stopnia Δ .*

3.1. Grafy kubiczne.

I.J. Holyer udowodnił, że problem znalezienia indeksu chromatycznego dowolnego grafu jest NP-zupełny [25]. Zagadnienie to jest co najmniej tak samo trudne dla grafów regularnych, poczynając już od grafów kubicznych.

Twierdzenie 29. [33] *Dla dowolnej liczby naturalnej $k \geq 3$, problem klasyfikacji grafu k -regularnego ze względu na indeks chromatyczny jest NP-zupełny.*

Z twierdzenia 24 możemy wysnuć prosty wniosek na temat indeksu chromatycznego grafów regularnych: jeżeli G jest grafem regularnym o nieparzystej liczbie wierzchołków, to G jest klasy 2. Wynik ten będzie zatem dotyczył tylko

grafów regularnych o parzystym stopniu, a więc otwarty pozostaje problem klasyfikacji grafów regularnych o stopniach nieparzystych.

Przyjrzymy się teraz kolorowaniu krawędziowemu grafów kubicznych, czyli grafów regularnych stopnia 3. I tak, korzystając z twierdzenia o czterech kolorach możemy wywnioskować, że każdy planarny graf kubiczny nie zawierający mostu jest 3-kolorowalny krawędziowo.

Twierdzenie 30. [42, 20](**Tait**) *Twierdzenie o czterech kolorach jest równoważne tezie, że każdy planarny kubiczny graf niezawierający mostu jest 3-kolorowalny krawędziowo.*

Dowód.

Krok 1. Najpierw pokażemy, że twierdzenie o czterech kolorach jest równoważne twierdzeniu, że dla każdego kubicznego grafu niezawierającego mostu istnieje 4-kolorowanie właściwe jego ścian.

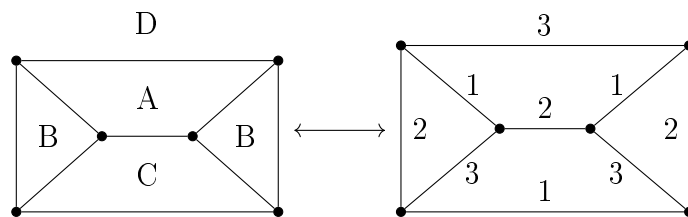
Z dowolnego prostego grafu planarnego H możemy skonstruować triangulację H^Δ przez dodanie odpowiednich krawędzi (dodanie przekątnych w ścianach, które nie są trójkątami). Graf dualny triangulacji $(H^\Delta)^*$ jest oczywiście grafem kubicznym. Taki graf dualny nie może również zawierać mostu, ponieważ to oznaczałoby, że w grafie wyjściowym H^Δ istnieje pętla (krawędź postaci vv dla pewnego wierzchołka v), a rozważamy grafy niezawierające pętli. Zatem, jeżeli możemy ściany grafu $(H^\Delta)^*$ pokolorować czterema kolorami w sposób właściwy, to możemy również czterema kolorami pokolorować właściwie wierzchołki grafu H^Δ . Jednak graf H jest grafem H^Δ z usuniętymi krawędziami, a więc tym bardziej on będzie 4-kolorowalny wierzchołkowo.

Z drugiej strony, graf dualny planarnego grafu kubicznego niezawierającego mostu G jest grafem planarnym, który nie zawiera pętli oraz nie zawiera krawędzi wielokrotnych. Jeżeli G^* jest więc 4-kolorowalny wierzchołkowo, to również ściany G możemy pokolorować właściwie czterema kolorami.

Krok 2. Udowodnimy tezę równoważną do podanej, mianowicie dla każdego kubicznego niezawierającego mostu grafu planarnego istnieje 4-kolorowanie właściwe jego ścian, wtedy i tylko wtedy gdy każdy planarny kubiczny graf niezawierający mostu jest 3-kolorowalny krawędziowo.

Założmy najpierw, że G jest planarnym kubicznym grafem niezawierającym mostu, którego ściany pokolorowano za pomocą kolorów A, B, C, D . Możemy otrzymać 3-kolorowanie krawędzi G w następujący sposób:

- 1) kolorujemy za pomocą koloru 1 te krawędzie, które rozdzielają ściany pokolorowane kolorami A i B lub C i D ,
- 2) za pomocą koloru 2 kolorujemy te krawędzie, które rozdzielają ściany pokolorowane kolorami A i C lub B i D ,
- 3) za pomocą koloru 3 kolorujemy krawędzie, które rozdzielają ściany pokolorowane za pomocą A i D lub B i C .



Rysunek 12: Kolorowania grafu według konstrukcji w dowodzie twierdzenia 30.

Łatwo pokazać że takie kolorowanie będzie właściwe. Każdy wierzchołek w G ma stopień 3, a więc należy do trzech ścian i każda z nich ma inny kolor. Sposób zdefiniowania kolorowania krawędzi powoduje, że żadna para krawędzi incydentnych z tym wierzchołkiem nie może otrzymać tego samego koloru.

Wystarczy teraz pokazać, że jeżeli G jest planarnym kubicznym grafem niezawierającym mostu, którego krawędzie zostały pokolorowane za pomocą kolorów 1, 2, 3, to ściany G mogą zostać pokolorowane czterema kolorami.

Podgraf grafu G indukowany przez zbiór krawędzi pokolorowanych kolorem 1 lub 2 jest 2-regularnym grafem, a więc grafem złożonym z rozłącznych cykli. Jego ściany możemy więc pokolorować dwoma kolorami α i β . Podobnie, ściany podgrafu indukowanego przez zbiór krawędzi o kolorach 1 lub 3, możemy pokolorować dwoma kolorami γ i δ . Każdej ścianie w grafie G możemy więc przyporządkować parę wartości (x, y) , gdzie $x \in \{\alpha, \gamma\}$ oraz $y \in \{\beta, \delta\}$. Skoro pary przypisane do dwóch sąsiednich ścian w G muszą różnić się przynajmniej jednym elementem, to zadają one 4-kolorowanie tego grafu.

□

Wniosek 31. *Jeżeli G jest planarnym kubicznym grafem niezawierającym mostu, to $\chi'(G) = 3$.*

Dowód. Teza wynika bezpośrednio z twierdzeń Taita oraz Vizinga. □

Zatem najważniejszy wynik dotyczący kolorowania wierzchołkowego, jakim jest twierdzenie o czterech kolorach, mówi nam również, że planarne grafy kubiczne bez mostów są klasy 1. Brak mostów jest istotnym założeniem, chociażby ze względu na kolejny wynik.

Twierdzenie 32. [6] *Graf kubiczny zawierający most jest klasy 2.*

Powyższe twierdzenie jest wnioskiem z lematu 33.

*Zbiorem rozcinającym grafu G nazywamy dowolny zbiór krawędzi w grafie G , których usunięcie powoduje rozspójnienie grafu. Zbiór rozcinający nazywamy *minimalnym* jeżeli usunięcie z niego dowolnej krawędzi powoduje, że zbiór nie jest już rozcinający.*

Lemat 33. [6, 24] *Niech G będzie kubicznym multigrafem 3-kolorowalnym za pomocą kolorów $\{1, 2, 3\}$ oraz niech Z będzie jego minimalnym zbiorem rozcinającym. Jeżeli n_i jest liczbą krawędzi ze zbioru Z , które są pokolorowane kolorem i , dla $i = 1, 2, 3$, to liczby n_i przystają do siebie modulo 2.*

Dowód. Gdyby z grafu G usunąć krawędzie ze zbioru Z to otrzymalibyśmy dwa grafy o rozłącznych zbiorach wierzchołków A, B . Oczywiście $A \cup B = V(G)$ oraz każda z krawędzi ze zbioru Z ma swój jeden koniec w zbiorze A i drugi w zbiorze B . Co więcej, w G nie istnieje krawędź łącząca wierzchołek ze zbioru A z wierzchołkiem ze zbioru B , która nie należy do zbioru Z .

Założmy, że mamy ustalone kolorowanie właściwe krawędzi grafu G za pomocą kolorów $\{1, 2, 3\}$. Skoro G jest kubiczny, to każdy z jego wierzchołków posiada w swojej palecie wszystkie trzy kolory. W zbiorze A wierzchołki możemy podzielić na dwie kategorie: wierzchołki, które są końcami krawędzi ze zbioru Z , pokolorowanych kolorem i , oraz pozostałe, czyli wierzchołki tych krawędzi w kolorze i , których oba końce należą do zbioru A . Liczba wierzchołków drugiej kategorii w zbiorze A musi być parzysta, zatem liczba wszystkich wierzchołków zbioru A przystaje modulo 2 do liczby krawędzi ze zbioru Z pokolorowanych kolorem i . Możemy więc zapisać

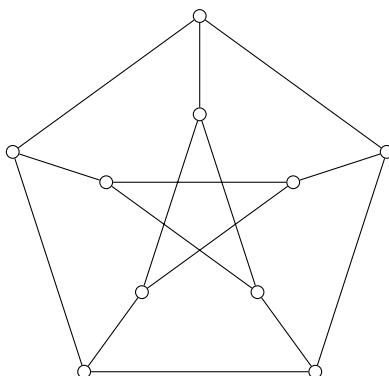
$$n_i = |A| \pmod{2}.$$

Skoro ta równość zachodzi dla każdego koloru, to liczby n_i , dla $i = 1, 2, 3$, są równe modulo 2. \square

Teza twierdzenia 32 wynika również z ogólniejszego twierdzenia dla grafów regularnych o dowolnym stopniu.

Twierdzenie 34. [45] *Jeżeli G jest grafem regularnym zawierającym wierzchołek rozspajający, to G jest klasy 2.*

Teza twierdzenia 31 w ogólności nie zachodzi, jeżeli pominiemy założenie planarności. Spójne nieplanarne niezawierające mostów grafy kubiczne o indeksie chromatycznym 4 nazywamy *źmirlaczami*, a najmniejszym przykładem takiego grafu jest *graf Petersena*. Zazwyczaj o źmirlaczach zakłada się również, że nie zawierają cykli długości mniejszej niż 5.



Rysunek 13: Graf Petersena.

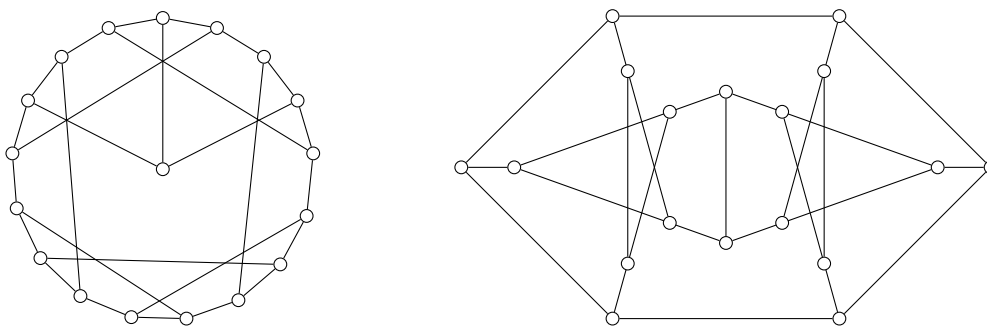
Graf Petersena (ozn. P) nie jest planarny, co wynika ze wzoru Eulera oraz długości cykli w tym grafie. Gdyby przypuścić, że graf P jest planarny, to ze wspomnianego wzoru wynika, że ma 7 ścian. Jednak najkrótszy cykl w grafie

ma długość 5. Stąd, P powinien posiadać przynajmniej $\lfloor \frac{35}{2} \rfloor = 17$ krawędzi, co jest oczywiście nieprawdą.

Sprawdźmy, że graf Petersena jest klasy 2. Przypuśćmy, że istnieje 3-kolorowanie krawędzi P . Zauważmy, że w P możemy wyróżnić dwa cykle C_5 , nazwijmy je zewnętrznym i wewnętrznym, oraz "szprychy" łączące wierzchołki z dwóch różnych cykli. Skoro zewnętrzny cykl jest nieparzysty, to każdy z trzech kolorów musi się na nim pojawić. Niech uv będzie krawędzią w cyklu zewnętrznym pokolorowaną kolorem 1. Skoro P jest 3-regularny, to każdy z trzech kolorów musi pojawić się w palecie każdego wierzchołka. Jeżeli przez x i y oznaczymy sąsiadów wierzchołków odpowiednio u i v , leżących na wewnętrznym cyklu, to koloru 1 nie może otrzymać ani krawędź ux ani vy . Stąd zarówno krawędź pokolorowana kolorem 1 wychodząca z wierzchołka x , jak i ta pokolorowana tym samym kolorem wychodząca z wierzchołka y , są krawędziami należącymi do wewnętrznego cyklu. Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić dla każdego koloru. Ostatecznie okazuje się więc, że w tym kolorowaniu każdy z trzech kolorów musiałby pojawić się na dwóch krawędziach cyklu długości 5, co jest oczywiście niemożliwe.

Żmirłacze są klasą istotną w wielu rozważanych problemach, często dla stawianej hipotezy na temat grafów, minimalnym obalającym ją kontrprzykładem jest właśnie żmirłacz. Tak jest na przykład z hipotezą Fulkersona, która mówi, że każdy kubiczny graf niezawierający mostu ma sześć doskonałych skojarzeń, takich że każda z krawędzi należy do dokładnie dwóch z nich (patrz [21]). Pytanie o prawdziwość tej hipotezy pozostaje otwarte, ale minimalny kontrprzykład dla niej, jeżeli istnieje, będzie właśnie żmirłaczem. Żmirłacze mają związek z wieloma twierdzeniami i hipotezami, nie tylko z zakresu teorii grafów.

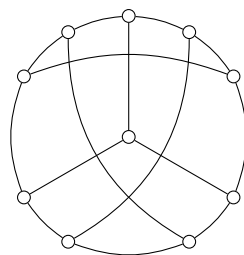
Problem znalezienia żmirłaczy rzędu wyższego niż 10 nie jest bynajmniej trywialny. Dopiero 50 lat po odkryciu najmniejszego przedstawiciela tej klasy, skonstruowano kolejne: grafy Blauša [5] rzędu 18 oraz graf Descartesa [15] rzędu 210.



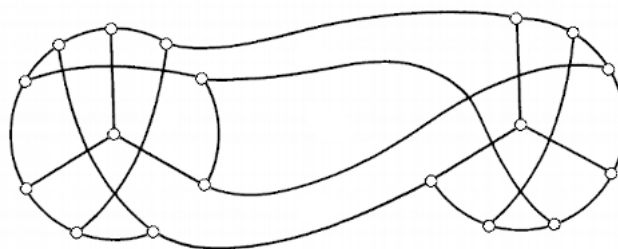
Rysunek 14: Żmirłacze rzędu 18.

Przełomem w poszukiwaniach, zwanych polowaniem na żmirłacze, było odkrycie przez R. Isaaca dwóch nieskończonych rodzin żmirłaczy [26], z których jedna zawierała odkryte wcześniej żmirłacze, a druga składała się w ca-

łości z zupełnie nowych. Konstrukcja grafów pierwszej z rodzin opiera się na połączeniu dwóch grafów klasy 2 w taki sposób, by otrzymać nowy graf, również klasy 2. I tak, jeden z grafów Blanuša powstaje z dwóch grafów Petersena, poprzez usunięcie dowolnej pary niesąsiadujących krawędzi z jednego z nich oraz usunięcie dwóch sąsiednich wierzchołków (i pięciu incydenentnych z nimi krawędzi) z drugiego grafu, oraz połączenie obu grafów ze sobą.



(a)



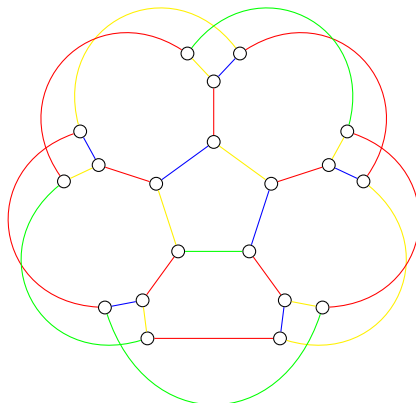
(b)

Rysunek 15: (a) Alternatywna reprezentacja grafu Petersena. (b) Konstrukcja grafu Blanuša z dwóch grafów Petersena.

Konstrukcję zmirlacza rzędu $4n$ (dla nieparzystej liczby $n \geq 5$) należącego do drugiej rodziny możemy zawrzeć w trzech punktach:

- (1) rozważamy n kopii grafu $K_{1,3}$ i oznaczamy w każdej z nich wierzchołki stopnia 3 przez a_i , a pozostałe przez b_i, c_i, d_i , dla $i \in \{1, \dots, n\}$,
- (2) łączymy wierzchołki b_i cyklem długości n : $b_1 b_2 \dots b_n$,
- (3) łączymy wierzchołki c_i, d_i cyklem długości $2n$: $c_1 \dots c_n d_1 \dots d_n$.

Rysunek 16 przedstawia powstały w ten sposób graf dla $n = 5$ wraz z kolorowaniem krawędzi.



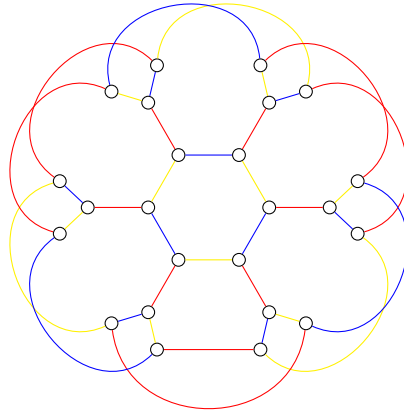
Rysunek 16: Żmirlacz rzędu 20.

Warto zauważyć, że dla parzystych wartości n , graf skonstruowany w ten sposób nie będzie żmirlaczem. Sprawdźmy, że jeżeli $n = 2k$, dla pewnej liczby naturalnej k , to powstały graf jest 3-kolorowalny krawędziowo.

Krawędzie cyklu b_1, \dots, b_n kolorujemy naprzemiennie kolorami 1 i 2. Krawędzie $a_i b_i$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$, kolorujemy kolorem 3. Pozostałe krawędzie kolorujemy w sposób następujący:

- (1) krawędzie $a_i c_i$ otrzymują kolor 1, krawędzie $a_i d_i$ otrzymują kolor 2,
- (2) krawędzie $c_i c_{i+1}$, dla nieparzystych wartości indeksu i , kolorujemy kolorem 2, a dla parzystych wartości i - kolorem 3,
- (3) krawędź $c_n d_1$ kolorujemy za pomocą koloru 3 (możemy tak zrobić, ponieważ n jest parzyste),
- (4) krawędzie $d_i d_{i+1}$, dla nieparzystych wartości indeksu i , kolorujemy kolorem 1, a dla parzystych wartości i - kolorem 3.

Otrzymane kolorowanie jest kolorowaniem właściwym i używa trzech kolorów.



Rysunek 17: Kolorowanie krawędzi grafu powstałego w wyniku opisanej konstrukcji dla $n = 6$.

Z opisanej konstrukcji wynika, że dla każdej nieparzystej liczby $g \geq 5$ istnieje żmirlacz o talii g , jednak własność ta dotyczy również parzystych wartości g .

Twierdzenie 35. [28] *Dla każdego $g \geq 5$, istnieje nieskończona rodzina żmirlaczy o talii g .*

Okazuje się, że graf Petersena jest kluczowym elementem rozważań nad grafami kubicznymi klasy 2. Kolejne twierdzenie mówi nam, że każdy żmirlacz zawiera minor izomorficzny z grafem Petersena.

Minorem grafu G nazywamy taki graf H , który można otrzymać z G przez zastosowanie skończonej liczby operacji ściągania krawędzi (ściągania dwóch wierzchołków sąsiednich), usuwania wierzchołków oraz usuwania krawędzi. Przykładami minorów są K_2 jako minor każdego grafu spójnego o przynajmniej dwóch wierzchołkach lub graf K_5 jako minor grafu Petersena, powstały z niego przez ściągnięcie wszystkich szprych.

Twierdzenie 36. [37, 38, 39, 40, 17] *Każdy kubiczny graf 2-spójny, który nie zawiera grafu Petersena jako minora, jest klasy 1.*

Konstrukcję grafu Petersena możemy opisać w następujący sposób: zadajemy zbiór wierzchołków grafu P jako $\{v_0, v_1, \dots, v_4, v'_0, v'_1, \dots, v'_4\}$, krawędziami łączymy wierzchołki:

- v_i z v_{i+1}
- $v_{i'}$ z $v_{i'+2}$
- v_i z $v_{i'}$,

dla $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, gdzie wszystkie indeksy rozważamy modulo 5. Konstrukcję tę możemy rozszerzyć tworząc uogólnione grafy Petersena.

Uogólnionym grafem Petersena, dla liczb naturalnych n, k spełniających zależności $0 < k \leq n-1$, $n \neq 2k$, nazywamy graf $G(n, k)$ o $2n$ wierzchołkach,

które możemy oznaczyć przez $\{0, 1, \dots, n-1, 0', 1', \dots, (n-1)'\}$ oraz którego krawędzie są postaci $(i, i+1)$, $(i', (i+k)')$ oraz (i, i') , dla $0 \leq i \leq n-1$ (wszystkie liczby rozpatrujemy modulo n). W takim modelu, graf Petersena będzie grafem $G(5, 2)$.

Warto nadmienić, że zapis krawędzi (u, v) w powyższych konstrukcjach służy jedynie czytelności i nie oznacza pary uporządkowanej.

Wszystkie uogólnione grafy Petersena są kubiczne. Mimo silnego związku z grafem Petersena, uogólnione grafy Petersena niemal wszystkie należą do innej klasy niż on sam.

Twierdzenie 37. [13] *Wszystkie uogólnione grafy Petersena, oprócz grafu Petersena, są klasy 1.*

Na koniec tego podrozdziału rozważymy grafy kubiczne, które nie są planarne, jednak usunięcie niewielkiej liczby krawędzi mogłoby im zagwarantować tę własność. Mianowicie, okazuje się, że twierdzenie Taita zachodzi dla grafów nieplanarnych, pod warunkiem że ograniczymy możliwą liczbę par przecinających się krawędzi.

Graf prawie planarny to graf, który może zostać przedstawiony na płaszczyźnie z co najwyżej jedną parą przecinających się krawędzi. Są to grafy, które po usunięciu pewnej jednej problematycznej krawędzi byłyby planarne.

Twierdzenie 38. [27] *Każdy kubiczny graf prawie planarny nie zawierający mostu jest 3-kolorowalny krawędziowo.*

Dowód. Rozważmy graf G taki jak w założeniu twierdzenia. Niech jedy-nymi krawędziami w G , które się przecinają będą $e = z_1z_3$ oraz $f = z_2z_4$. Zdefiniujmy H jako graf powstały z G przez usunięcie krawędzi e, f oraz dodanie czterech nowych wierzchołków y_1, \dots, y_4 i krawędzi $g_i = y_iz_i$, dla $1 \leq i \leq 4$. Każdy wierzchołek w H ma stopień 3, oprócz wierzchołków y_1, \dots, y_4 , których stopień jest równy 1. H jest planarny. Przez dodanie do H krawędzi $y_1y_2, y_2y_3, y_3y_4, y_4y_1$ otrzymujemy graf planarny, kubiczny i niezawierający mostu, a więc 3-kolorowalny (krawędziowo) z twierdzenia 30. Stąd graf H również jest 3-kolorowalny. Niech $\phi : E(H) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ będzie 3-kolorowaniem krawędzi grafu H . Skoro każdy z trzech kolorów pojawia się w palecie każdego wierzchołka poza y_1, \dots, y_4 i wierzchołków tych jest parzysta liczba, to każdy z kolorów może być przyporządkowany tylko parzystej liczbie krawędzi spośród g_1, \dots, g_4 .

Jeżeli $\phi(g_1) = \phi(g_3)$, to $\phi(g_2) = \phi(g_4)$ i z 3-kolorowania grafu H możemy otrzymać 3-kolorowanie grafu G .

Założmy, że $\phi(g_1) \neq \phi(g_3)$, a więc również $\phi(g_2) \neq \phi(g_4)$. Przyjmijmy, że $\phi(g_i) = 1$ dla $i = 1, 2$ oraz $\phi(g_j) = 2$ dla $j = 3, 4$. Rozważmy podgraf J grafu H , zawierający wszystkie wierzchołki grafu H i tylko te krawędzie, które w kolorowaniu ϕ otrzymały kolor 1 lub 2. W grafie J każdy wierzchołek różny od y_1, \dots, y_4 , ma stopień 2, natomiast wierzchołki y_1, \dots, y_4 , mają stopień 1. Oznacza to, że graf J posiada dwie składowe spójne, które są ścieżkami o końcach w wierzchołkach y_i oraz wszystkie pozostałe składowe

są cyklami. Oznaczmy wspomniane ścieżki przez P_1 i P_2 . Przyjmijmy, że jednym z końców ścieżki P_1 jest wierzchołek y_1 . Drugim jej końcem nie może być y_3 , ponieważ to implikowałoby, że końcami ścieżki P_2 są wierzchołki y_2, y_3 , co jest sprzeczne z planarnością H . Zatem drugim końcem ścieżki P_1 jest wierzchołek y_2 lub y_4 . W obu tych przypadkach, wystarczy, że zamienimy kolory 1 i 2 krawędzi na ścieżce P_1 , a kolory pozostałych krawędzi pozostawimy bez zmian, i otrzymamy nowe kolorowanie właściwe ϕ' krawędzi grafu H , w którym $\phi'(g_1) = \phi'(g_3)$ oraz $\phi'(g_2) = \phi'(g_4)$. Ponownie znajdujemy więc 3-kolorowanie właściwe krawędzi grafu G . \square

Kolejne twierdzenie, które pozostawimy bez dowodu, dotyczy grafów kubicznych z maksymalnie dwoma przecięciami krawędzi.

Twierdzenie 39. [17] *Jeżeli G jest niezawierającym mostu grafem, który może zostać przedstawiony na płaszczyźnie z jedynie dwiema parami przecinających się krawędzi oraz przecięcia te nie znajdują się wewnątrz cyklu, to G jest 3-kolorowalny.*

3.2. Grafy planarne.

W tym podrozdziale zajmiemy się klasyfikacją grafów planarnych. Częściowo ten temat został poruszony już w poprzedniej części, ponieważ wiele z wyników dotyczących grafów kubicznych zakładało również planarność rozważanych grafów.

Twierdzenie 40. [44, 35] *Jeżeli G jest grafem planarnym o stopniu maksymalnym większym lub równym 8, to G jest klasy 1.*

Dowód. Załóżmy, że istnieje graf G - planarny, o maksymalnym stopniu nie mniejszym niż 8 oraz klasy 2. Załóżmy również, że G jest krawędziowo 8-krytyczny (najmniejszy możliwy).

Wprowadźmy oznaczenia:

- przez n_j oznaczmy liczbę wierzchołków (w grafie G) o stopniu j , dla $2 \leq j \leq 8$,
- przez $n_8(r, s, t, u)$ oznaczmy liczbę wierzchołków stopnia 8 sąsiadujących z dokładnie r wierzchołkami stopnia 2, s wierzchołkami stopnia 3, t wierzchołkami stopnia 4 i u wierzchołkami stopnia 5,
- przez $n_7(s, t, u)$ oznaczmy liczbę wierzchołków stopnia 7 sąsiadujących z dokładnie s wierzchołkami stopnia 3, t wierzchołkami stopnia 4 i u wierzchołkami stopnia 5.

Twierdzimy, że

$$4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 \geq 12. (*)$$

Wiemy, że

$$\begin{aligned} |G| &= n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{\Delta(G)} \\ 2||G|| &= n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots + \Delta(G)n_{\Delta(G)} \end{aligned}$$

oraz dla każdego grafu planarnego zachodzi $3f(G) \leq 2m$. Korzystając z tych zależności oraz wzoru Eulera, otrzymujemy odpowiednią nierówność.

Z lematu Vizinga (tw. 28)

$$2n_2 = n_8(1, 0, 0, 0)$$

oraz

$$3n_3 = n_8(0, 1, 0, 0) + n_8(0, 1, 1, 0) + n_8(0, 1, 0, 1) + \\ + 2n_8(0, 2, 0, 0) + n_7(1, 0, 0).$$

Ponadto, skoro każdy wierzchołek stopnia 5 jest połączony krawędziami z przynajmniej dwoma wierzchołkami stopnia 8, to z tego samego lematu

$$2n_5 \leq n_8(0, 1, 0, 1) + n_8(0, 0, 1, 1) + n_8(0, 0, 0, 1) + 2n_8(0, 0, 1, 2) + \\ + n_8(0, 1, 0, 0) + 2n_8(0, 0, 0, 2) + 3n_8(0, 0, 0, 3) + 4n_8(0, 0, 0, 4)$$

Z twierdzenia 26, wierzchołki stopnia 4 mogą sąsiadować tylko z wierzchołkami stopnia co najmniej 6. Z lematu Vizinga, każdy wierzchołek stopnia 4 posiadający sąsiada stopnia 6, musi mieć przynajmniej trzech sąsiadów stopnia 8. Stąd, jeżeli przez n'_4 oznaczymy liczbę wierzchołków stopnia 4 sąsiadujących z wierzchołkiem stopnia 6, to zachodzi

$$3n'_4 + 4(n_4 - n'_4) = n_8(0, 1, 1, 0) + n_8(0, 0, 1, 0) + n_8(0, 0, 1, 1) + \\ + n_8(0, 0, 1, 2) + 2n_8(0, 0, 2, 0) + 2n_8(0, 0, 2, 1) + \\ + 3n_8(0, 0, 3, 0) + n_7(0, 1, 0) + n_7(0, 1, 1) + 2n_7(0, 2, 0).$$

Ponadto, skoro każdy wierzchołek stopnia 4 jest połączony z co najwyżej dwoma wierzchołkami stopnia 7, to zachodzi

$$n_4 - n'_4 = n_7(0, 2, 0).$$

Łącząc ze sobą powyższe zależności, otrzymujemy

$$4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5 \leq n_7 + 2n_8,$$

co jest sprzeczne z wynikiem (*). □

W 2001 roku zostało udowodnione, że grafy o maksymalnym stopniu 7 są 7-kolorowalne krawędziowo [48]. Wciąż nie do końca nierozwiązanym problemem w dziedzinie kolorowania krawędziowego pozostaje hipoteza Vizinga, mówiąca, że również grafy planarne, których maksymalny stopień wynosi co najmniej 6 są klasy 1. Kolejne twierdzenia przedstawiają kilka warunków, które implikują przynależność do klasy 1 grafów planarnych o maksymalnym stopniu 6 lub nawet mniejszym. Dowody twierdzeń pominiemy.

Cięciwą w cyklu C w grafie G nazywamy taką krawędź $e = xy$, że wierzchołki x, y leżą na cyklu C , jednak krawędź e do niego nie należy. Innymi słowy, jeżeli $C = x_1x_2 \dots x_n$, to cięciwą będzie krawędź x_ix_j , jeżeli $i \neq j - 1 \pmod{n}$ oraz $i \neq j + 1 \pmod{n}$. Cykl, w którym występują cięciwy nazywamy *cyklem cięciwowym*.

Twierdzenie 41. [12, 47] *Jeżeli G jest grafem planarnym, takim że $\Delta(G) = 6$ oraz G nie zawiera cięciwowych cykli długości 4 lub 5, to G jest klasy 1.*

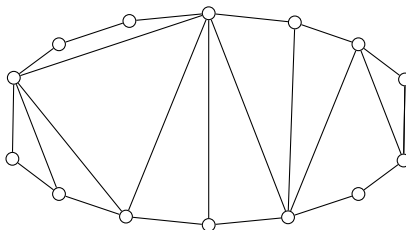
Twierdzenie 42. [12] *Jeżeli G jest grafem planarnym o maksymalnym stopniu 6 oraz G nie zawiera cyklu długości 6, to G jest klasy 1.*

Twierdzenie 43 wskazuje związek między kolorowalnością krawędziową grafu a jego talią i maksymalnym stopniem. Warto zwrócić uwagę na pewną symetrię warunków, które podaje.

Twierdzenie 43. [32] *Niech G będzie grafem planarnym o maksymalnym stopniu Δ oraz tali g . G jest klasy 1, jeżeli zachodzi dowolny z poniższych warunków:*

- (1) $\Delta \geq 3$ oraz $g \geq 8$,
- (2) $\Delta \geq 4$ oraz $g \geq 5$,
- (3) $\Delta \geq 8$ oraz $g \geq 3$,
- (4) $\Delta \geq 5$ oraz $g \geq 4$.

Zdefiniujmy *graf zewnętrznie planarny* jako graf planarny, w którym wszystkie wierzchołki należą do ściany zewnętrznej. Trywialnym przykładem grafu zewnętrznie planarnego będzie dowolny graf acykliczny, który posiada tylko jedną ścianę.



Rysunek 18: Przykład grafu zewnętrznie planarnego.

Dla grafów zewnętrznie planarnych problem klasyfikacji został całkowicie rozwiązany. Ich przynależność do jednej z dwóch klas można stwierdzić na podstawie jednego tylko warunku.

Nadmieńmy, że w przypadku grafów zewnętrznie planarnych, wszystkie własności i twierdzenia wystarczy rozpatrywać dla grafów 2-spójnych, gdyż graf jest zewnętrznie planarny wtedy i tylko wtedy, gdy zewnętrznie planarne są jego 2-spójne podgrafy (bloki).

Twierdzenie 44. [19, 20] *Graf zewnętrznie planarny jest klasy 1 wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest cyklem nieparzystym.*

Dowód. Jeżeli G jest cyklem o nieparzystej długości, to jest oczywiście grafem zewnętrznie planarnym i jest klasy 2.

Dla dowodu przeciwnej implikacji, rozważmy graf G - zewnętrznie planarny klasy 2. Załóżmy, że G jest 2-spójny. Jeżeli jego stopień maksymalny wynosi 1, to G jest krawędzią, a więc nie może być klasy 2. Jeżeli $\Delta(G) = 2$, to G jest cyklem nieparzystym.

Założmy więc, że maksymalny stopień grafu G wynosi co najmniej 3. Załóżmy również, że G jest najmniejszym, pod względem rzędu oraz maksymalnego stopnia, grafem spełniającym te założenia. Tak jak wspomnieliśmy wcześniej, zakładamy również, że G jest 2-spójny, a więc jest hamiltonowski.

Jeżeli rząd G jest liczbą parzystą, to G posiada skojarzenie doskonałe, które tworzy połowa krawędzi cyklu Hamiltona w G (wybieramy co drugą krawędź z cyklu). Jeżeli skojarzenie to oznaczymy przez F , to graf $G - F$ ma maksymalny stopień $\Delta(G) - 1$. $G - F$ jest więc klasy 1, z założenia o minimalności stopnia maksymalnego G . Skoro $G - F$ jest $(\Delta(G) - 1)$ -kolorowalny, to G jest $\Delta(G)$ -kolorowalny.

Rozważmy przypadek $|G| = 2k + 1$, dla pewnej liczby naturalnej k . W G istnieje wierzchołek v o stopniu 2. G posiada skojarzenie M , zawierające k krawędzi występujących naprzemiennie w cyklu Hamiltona w G , które nie zawiera żadnej krawędzi incydentnej z v (i v jest jedynym takim wierzchołkiem). Graf $G - M$ jest zewnętrznie planarny i ma stopień maksymalny równy $\Delta(G) - 1$, a więc z założenia $G - M$ jest klasy 1. Stąd ponownie wynika, że G również jest klasy 1. \square

Literatura

- [1] V. A. Aksenov. On continuation of 3-colouring of planar graphs. *Diskret. Anal. Novosibirsk*, 26:3–19, 1974.
- [2] V.A. Aksenov. Chromatic connected vertices in planar graphs. *Diskret. Anal.*, 31:5–16, 1977.
- [3] K. Appel, W. Haken,, J. Koch. Every planar map is four colorable. *Illinois Journal of Mathematics*, 21(3):429–567, 1977.
- [4] L.W. Beinke, R.J. Wilson. On the edge-chromatic number of a graph. *Discrete Mathematics*, 5(1):15–20, 1973.
- [5] D. Blanuša. Problem četiriju boja. *Hrvatsko Prirodoslovno Društvo Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II*, 1:31–42, 1946.
- [6] D. Blanuša. Problem cetiriju boja. *Hrvatsko Priordoslorno Društvo Glasnik, Mat-Fiz., Ast, Ser. II*, 1:31–42, 1946.
- [7] J.A. Bondy, U.S.R. Murty. *Graph Teory*. Elsevier Science Publishing Co., Inc., 2008.
- [8] O.V. Borodin. Structural properties of plane graphs without adjacent triangles and an application to 3-colorings. *J. Graph Theory*, 21(2):183–186, 1996.
- [9] O.V. Borodin, A.N. Glebov, A. Raspaud,, M.R. Salavatipour. Planar graphs without cycles of length from 4 to 7 are 3-colorable. *J. Combin. Theory Ser. B*, 93:303–311, 2005.
- [10] O.V. Borodin, A.V. Kostochka, B. Lidický,, M. Yancey. Short proofs of coloring theorems on planar graphs. *European Journal of Combinatorics*, 36:314–321, 2014.
- [11] R. L. Brooks. On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Philos. Soc*, 37(2):194–197, 1941.
- [12] Y. Bu, W. Wang. Some sufficient conditions for a planar graph of maximum degree six to be class 1. *Discrete Mathematics*, 306(13):1440–1445, 2006.
- [13] F. Castagna, G. Prins. Every generalized petersen graph has a tait coloring. *Pacific J. Math*, 40:53–58, 1972.
- [14] G. Chartrand, P. Zhang. *Chromatic Graph Theory*. Chapman & Hall/CRC, 2009.
- [15] B. Descartes. Network colourings. *Math. Gazette*, 32:67–69, 1948.

-
- [16] G.A. Dirac. A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, 27:85–92, 1952.
- [17] K. Edwards, D.P. Sanders, P.D. Seymour, Thomas R. Three-edge-colouring doublecross cubic graphs. *J. Combin. Theory Ser. B.*, 119:66–95, 2016.
- [18] L. Euler. Elementa doctrinae solidorum. *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 4:109–140, 1758.
- [19] S. Fiorini. On the chromatic index of outerplanar graphs. *J. Combin. Theory Ser. B.*, 18:35–38, 1975.
- [20] S Fiorini, R.J. Wilson. *Edge-colourings of graphs*. Pitman Publishing Limited, 1977.
- [21] D. R. Fulkerson. Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra. *Math. Programming*, 1:168–194, 1971.
- [22] L.I. Golovina, I.M. Yaglom. *Induction in geometry*. D.C. Heath & Co., 1963.
- [23] H. Grötzsch. Ein dreifarbensatz für dreikreisfreie netze auf der kugel. *Math.-Naturwiss.*, 8:109–120, 1958.
- [24] D.A. Holton. *The Petersen Graph*. Cambridge University Press, 1993.
- [25] I. J. Holyer. The np-completeness of edge coloring. *SIAM J. Comput.*, 10:718–720, 1981.
- [26] R. Isaacs. Infinite families of non-trivial trivalent graphs which are not tait colorable. *Amer. Mat. Monthly*, 82:221–239, 1975.
- [27] F. Jaeger. Tait’s theorem for graphs with crossing number at most one. *Ars Combinatorica*, 9:283–287, 1980.
- [28] M. Kochol. Snarks without small cycles. *J. Combin. Theory (B)*, 67:34–47, 1996.
- [29] D. König. Über graphen und ihrer anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre. *Math. Ann.*, 77:453–465, 1916.
- [30] D. König. Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 77:453–465, 1916.
- [31] A. V. Kostochka, M. Yancey. Ore’s conjecture for $k=4$ and Grötzsch theorem. *Combinatorica*, 34(3):323–329, 2014.
- [32] H. Kronk, M. Radlowski, B. Franen. On the line chromatic number of triangle-free graphs. *Abstract in Graph Theory Newsletter*, 3:3, 1974.

-
- [33] D. Leven, Z. Galil. Np completeness of finding the chromatic index of regular graphs. *Journal of Algorithms*, 4:35–44, 1983.
- [34] R.M.R. Lewis. *A Guide to Graph Colouring*. Springer, 2016.
- [35] L.S. Mel'nikov. The chromatic class and the location of a graph on a closed surface. *Mat. Zametki*, 7:405–411, 1970.
- [36] R. Naserasr, R. Škrekovski. The Petersen graph is not 3-edge-colorable - a new proof. *Discrete Mathematics*, 268(3):325–326, 2003.
- [37] N. Robertson, P.D. Seymour, Thomas R. Tutte's edge-colouring conjecture. *J. Combin. Theory Ser. B.*, 70:166–183, 1997.
- [38] N. Robertson, P.D. Seymour, Thomas R. Cyclically 5-connected cubic graphs. *J. Combin. Theory Ser. B.*, 125:132–167, 2017.
- [39] N. Robertson, P.D. Seymour, Thomas R. Excluded minors in cubic graphs. *J. Combin. Theory Ser. B.*, 138:219–285, 2019.
- [40] D.P. Sanders, P.D. Seymour, Thomas R. Edge 3-coloring cubic apex graphs. *w przygotowaniu*, .
- [41] G. Szekeres, H.S. Wilf. An inequality for the chromatic number of a graph. *Journal of Combinatorial Theory*, 4(1):1–3, 1968.
- [42] P.G. Tait. Remarks on the colourings of maps. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 10:729, 1880.
- [43] V.G. Vizing. The chromatic class of a multigraph. *Kibernetika*, 3:29–39, 1965.
- [44] V.G. Vizing. Critical graphs with a given chromatic class. *Diskret. Analiz*, 5:9–17, 1965.
- [45] V.G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret. Anal.*, 3:25–30, 1965.
- [46] V. I. Voloshin. Graph coloring: History, results and open problems. *Alabama Journal of Mathematics*, Spring/Fall 2009.
- [47] W. Wang, Y. Chen. A sufficient condition for a planar graph to be class 1. *Theoretical Computer Science*, 385(1):71–77, 2007.
- [48] L. Zhang. Every planar graph with maximum degree 7 is of class 1. *Graphs Combin.*, 16:467–495, 2000.