AUTOMATYKA • 2011 • Tom 15 • Zeszyt 1

Piotr Bania*

Warunki normalności zasady maksimum Pontriagina dla zadań z ograniczeniami stanu końcowego

1. Wstęp

Zasada maksimum Pontriagina (ZMP) jest warunkiem koniecznym optymalności w zadaniach sterowania optymalnego. Obecność ograniczeń stanu końcowego może powodować, że sterowanie optymalne jest wyznaczane tylko przez ograniczenia zadania. Wówczas mnożnik Lagrange'a λ_0, związany z minimalizowanym funkcjonałem, jest równy zeru, i mówimy, że zadanie jest nienormalne. W przeciwnym przypadku zadanie jest normalne. Używa się również terminu *normalność zasady maksimum* (zob. Bettiol i Frankowska 2007). Pojęcie normalności zadania odgrywa zasadniczą rolę przy konstrukcji algorytmów optymalizacji. Mówiąc w uproszczeniu, w zadaniu nienormalnym rozwiązanie lokalnie nie zależy od minimalizowanego funkcjonału (zob. Findeisen *et al.* 1980 s. 473). Warunki normalności podane w niniejszym artykule są ogólniejsze niż warunki znane w dostępnej literaturze (zob. np. Fontes 2003, Ferreira i Fontes 2004).

Artykuł jest zorganizowany następująco. W części pierwszej przedstawiono wersję ZMP dla klasy zadań z ograniczeniami na stan końcowy i czas sterowania. W części drugiej przedstawiono przykłady zadań nienormalnych oraz podano i udowodniono warunek dostateczny istnienia normalnego mnożnika Lagrange'a. W części trzeciej omówiono przypadki szczególne, w których normalność zadania można sprawdzić przed jego rozwiązaniem. W części czwartej podano przykład, w którym w zależności od warunku początkowego, występują ekstremale normalne, nienormalne oraz sterowania osobliwe.

2. Zasada maksimum Pontriagina

Poniżej podamy wersję zasady maksimum Pontriagina dla klasy problemów sterowania optymalnego z ograniczeniami na stan końcowy i czas sterowania, przy zadanym warunku początkowym. Niech $\Delta \subset R$ będzie ograniczonym i domkniętym przedziałem oraz niech

* AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki, Katedra Automatyki, al. A. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków. E-mail:pba@agh.edu.pl

$[0,T] \subset \Delta$. Funkcję $u : [0,T] \to R^m$ będziemy nazywać sterowaniem. Zbiór dopuszczalnych wartości sterowania jest określony jak następuje

$$U = \{v \in R^m : u_{\min} \le v \le u_{\max}\}, u_{\min} < u_{\max}, u_{\min}, u_{\max} \in R^m \tag{1}$$

Zbiór sterowań dopuszczalnych jest określony relacją

$$U_{ad} = \{u \in L^\infty([0,T], R^m) : u(t) \in U\}. \tag{2}$$

Problem P. Należy znaleźć trójkę $(x,u,T) \in W^{1,\infty}([0,T],R^n) \times U_{ad} \times R_0^+$, zapewniającą minimum wskaźnika jakości

$$J(x,u,T) = \int_0^T L(x(t),u(t))dt + g(x(T),T) \tag{3}$$

przy ograniczeniach

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)),\ t \in [0,T],\ x(0) = x_0, \tag{4}$$

$$u \in U_{ad}, \tag{5}$$

$$c_k(x(T)) \le 0,\ k = 1,2,...,r, r \ge 1, \tag{6}$$

$$T_{\min} - T \le 0, \tag{7}$$

$$T - T_{\max} \le 0,\ 0 \le T_{\min} < T_{\max}, \tag{8}$$

gdzie $L : R^n \times R^m \to R,\ g : R^n \times R \to R,\ f : R^n \times R^m \to R^n,\ c_k : R^n \to R$ ■

Będziemy zakładać, że funkcje L,g,f,c_k, występujące w problemie P, spełniają jeden z dwóch podanych poniżej zestawów założeń.

Założenia CA1. Funkcje L,g,f,c_k są ciągłe względem wszystkich argumentów, pochodne cząstkowe $\nabla_\xi f(\xi,\upsilon)$, $\nabla_\xi L(\xi,\upsilon)$, istnieją i są ciągłe dla wszystkich $(\xi,\upsilon) \in R^n \times R^m$ oraz pochodne $\nabla_\xi g(\xi,\tau)$, $\nabla_\tau g(\xi,\tau)$, $\nabla_\xi c_k(\xi)$, istnieją i są ciągłe dla wszystkich $\xi \in R^n$, $\tau \in R$, $k \in \{1,2,...,r\}$. ■

Założenia CA2. Spełnione są założenia CA1 oraz pochodne cząstkowe $\nabla_\upsilon f(\xi,\upsilon)$, $\nabla_\upsilon L(\xi,\upsilon)$ istnieją i są ciągłe dla wszystkich $(\xi,\upsilon) \in R^n \times R^m$. ■

Przez rozwiązanie równania (4) będziemy rozumieć funkcję $x \in W^{1,\infty}([0,T],R^n)$, spełniającą równanie (4) dla prawie wszystkich $t \in [0,T]$ i taką, że $x(0) = x_0$.

Definicja 1 *(rozwiązania dopuszczalnego w problemie P, Alekseev et al. 1987)***.** *Jeżeli x jest rozwiązaniem równania (4) ze sterowaniem $u \in U_{ad}$, spełnione są ograniczenia (5–8) oraz $[0,T] \subset \mathrm{int}\Delta$, to trójkę (x,u,T) nazywamy rozwiązaniem dopuszczalnym problemu P.* ■

Definicja 2 *(minimum lokalnego w problemie P, Alekseev et al. 1987)*. *Rozwiązanie dopuszczalne* $(\bar{x},\bar{u},\bar{T})$ *nazywamy lokalnie optymalnym rozwiązaniem problemu P, jeżeli istnieje liczba* $\varepsilon > 0$*, taka że dla dowolnego rozwiązania dopuszczalnego* (x,u,T)*, spełniającego warunki*

$$|T-\overline{T}| < \varepsilon,\ |x(t)-\overline{x}(t)| < \varepsilon,\ \ \forall t \in [0,T] \cap [0,\overline{T}],$$

spełniona jest nierówność $J(x,u,T) \geq J(\bar{x},\bar{u},\bar{T})$. ■

Sterowania przedziałami ciągłe. Ponieważ przestrzeń L^{∞} jest bardzo „bogata", to w dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że sterowanie u jest funkcją przedziałami ciągłą oraz że $u(t) \in U$. Przyjmujemy umowę, że funkcje przedziałami ciągłe mają skończoną liczbę punktów nieciągłości w każdym przedziale skończonym, są ograniczone, prawostronnie ciągłe w $[0,T)$ oraz lewostronnie ciągłe w punkcie T. Zbiór sterowań spełniających powyższe warunki będziemy oznaczać przez $PC([0,T],U)$. Zbiór ten jest podzbiorem przestrzeni $L^{\infty}([0,T],R^m)$. Będziemy zakładać, że minimum w problemie P jest osiągane na sterowaniu $\overline{u} \in PC([0,\overline{T}],U)$. Wówczas rozwiązanie równania (4) jest funkcją różniczkowalną we wszystkich punktach, w których sterowanie jest ciągłe. Definiujemy hamiltonian

$$H(\psi,x,u,\lambda_0) = \psi^{\mathrm{T}} f(x,u) - \lambda_0 L(x,u) \tag{9}$$

gdzie $\psi \in W^{1,\infty}([0,T],R^n)$ oraz $\lambda_0 \in R$. Funkcję ψ, oraz mnożnik λ_0 odpowiadające rozwiązaniu optymalnemu, oznaczamy przez $\overline{\psi}$ i $\overline{\lambda_0}$. Wartość hamiltonianu (9) w chwili t, obliczoną na rozwiązaniu optymalnym, oznaczamy przez $\overline{H}(t) = H(\overline{\psi}(t),\overline{x}(t),\overline{u}(t),\overline{\lambda}_0)$.

Twierdzenie 1 *(warunki konieczne optymalności dla problemu P, zasada maksimum Pontriagina)*. *Jeżeli spełnione są założenia CA1, trójka* $(\overline{x},\overline{u},\overline{T})$ *jest rozwiązaniem optymalnym problemu P, takim że* $\overline{u} \in PC([0,\overline{T}],U)$*, to istnieją mnożniki Lagrange'a* $\overline{\lambda}_k \geq 0$*,* $k = 0,1,2,...,r+2$ *oraz funkcja sprzężona* $\overline{\psi} \in W^{1,\infty}([0,\overline{T}],R^n)$*, takie że:*

a) spełniony jest warunek nietrywialności

$$\sum_{k=0}^{r+2} \overline{\lambda}_k > 0, \tag{10}$$

b) dla wszystkich $t \in [0,\overline{T}]$ *zachodzi warunek maksimum hamiltonianu*

$$\forall\, v \in U,\ \ H(\overline{\psi}(t),\overline{x}(t),v,\overline{\lambda}_0) \leq H(\overline{\psi}(t),\overline{x}(t),\overline{u}(t),\overline{\lambda}_0), \tag{11}$$

c) funkcja sprzężona $\overline{\psi}$ *spełnia dla prawie wszystkich* $t \in [0,\overline{T}]$*, równanie sprzężone*

$$\dot{\overline{\psi}} = -\nabla_x f(\overline{x},\overline{u})\overline{\psi} + \overline{\lambda}_0 \nabla_x L(\overline{x},\overline{u}), \tag{12}$$

d) spełnione są warunki transwersalności

$$\overline{\psi}(\overline{T}) = -\overline{\lambda}_0 \nabla_x g(\overline{x}(\overline{T}), \overline{T}) - \sum_{k=1}^{r} \overline{\lambda}_k \nabla c_k(\overline{x}(\overline{T})), \tag{13}$$

$$\overline{H}(\overline{T}) = \overline{\lambda}_0 \nabla_T g(\overline{x}(\overline{T}), \bar{T}) - \overline{\lambda}_{r+1} + \overline{\lambda}_{r+2}, \tag{14}$$

e) spełnione są warunki komplementarności

$$\overline{\lambda}_k c_k(\overline{x}(\overline{T})) = 0, k = 1, 2, ..., r, \tag{15a}$$

$$\overline{\lambda}_{r+1}(T_{\min} - \overline{T}) = 0, \tag{15b}$$

$$\overline{\lambda}_{r+2}(\overline{T} - T_{\max}) = 0, \tag{15c}$$

f) funkcja $\overline{H}(t)$ jest stała dla $t \in [0, \overline{T}]$. ■

Liczby λ_k, $k \in \{0, 1, 2, ..., r+2\}$, będziemy nazywać mnożnikami Lagrange'a w problemie P oraz będziemy pisać $\lambda = [\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{r+2}]^{\mathrm{T}}$. Dowód twierdzenia znajduje się w pracach Alekseev *et al.* 1987, s. 214–236, Ioffe i Tikhomirov 1974. Warunki konieczne optymalności dla problemu P, będziemy oznaczać skrótem WKO. Problem P jest na ogół niewypukły i może mieć nieskończenie wiele rozwiązań optymalnych. Trójkę $(\overline{x}, \overline{u}, \overline{T})$ spełniającą WKO dla problemu P będziemy nazywać ekstremalą. W problemie P liczba ekstremal może być nieskończona.

3. Warunki normalności problemu P

Zajmiemy się warunkami normalności problemu P (Fontes 2000a, Malanowski 2003). Jeżeli $\bar{\lambda}_0 > 0$, to dzieląc mnożniki $\bar{\lambda}_k$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ r+2$ oraz funkcję $\bar{\psi}$ przez $\bar{\lambda}_0 > 0$ widzimy, że tw. 1 będzie prawdziwe dla $\bar{\lambda}_0 = 1$. Możemy zatem przyjąć, że $\bar{\lambda}_0 \in \{0,\ 1\}$.

Przykład 1 *(nienormalne zadanie sterowania optymalnego)*. Należy znaleźć minimum wskaźnika jakości

$$J(x, u,\ T) = T + \int_0^T u(t)^2 dt, u(t) \in [-1,\ 1],$$

na trajektoriach systemu

$$\dot{x}_1(t) = 0,5, \dot{x}_2(t) = u(t), x_1(0) = 0, x_2(0) = \sqrt{5},$$

przy ograniczeniu stanu końcowego

$$c(x(T)) = x_1(T)^2 + x_2(T)^2 - 1 \leq 0.$$

Trójka ($\bar{x}(t) = [0,5t,\ \sqrt{5}-t]^{\mathrm{T}}$, $\bar{u}(t) = -1$, $\bar{T} = {}^4/_{\sqrt{5}}$) jest jedynym rozwiązaniem dopuszczalnym i jednocześnie optymalnym, a tw. 1 zachodzi dla $\bar{\lambda}_0 = 0$, $\bar{\lambda}_1 > 0$, $\psi_1(t) = -4\lambda_1 \Big/ \sqrt{5}$, $\psi_2(t) = -2\lambda_1 \Big/ \sqrt{5}$. Istnieje nieskończenie wiele mnożników Lagrange'a i funkcji sprzężonych odpowiadających rozwiązaniu optymalnemu. ∎

Przykład 2 *(nienormalne zadanie sterowania optymalnego, z dokładnie jednym rozwiązaniem i nieskończoną liczbą ekstremal)***.** Należy znaleźć minimum wskaźnika jakości

$$J(x,u,\ T) = T + \int_0^T u(t)^2 dt, u(t) \in [-2,\ 2],$$

na trajektoriach systemu

$$\dot{x}_1(t) = 0, \dot{x}_2(t) = u(t), x_1(0) = 1, x_2(0) = -1,$$

przy ograniczeniu stanu końcowego

$$c(x(T)) = x_1(T)^2 + x_2(T)^2 - 1 \leq 0. \tag{16}$$

Zbiór sterowań i horyzontów zapewniających spełnienie (16), jest określony warunkami

$$\int_0^T u(t)dt = 1, T > 0, u \in L^\infty([0,\ T], U). \tag{17}$$

Hamiltonian jest równy $H = \psi_2 u - \lambda_0 u^2$. Równania sprzężone mają postać $\dot{\psi}_1 = 0$, $\dot{\psi}_2 = 0$. Warunki końcowe na zmienne sprzężone są dane równościami $\psi_1(T) = -2\lambda_1$, $\psi_2(T) = 0$. Rozwiązanie równań sprzężonych wynosi $\psi_1(t) = -2\lambda_1$, $\psi_2(t) = 0$. Jeżeli $\lambda_0 = 1$, to z równości (14) mamy $1 + \bar{u}(\bar{T})^2 = 0$, co jest niemożliwe. Jeżeli $\lambda_0 = 0$, to $\bar{H}(t) = 0$, dla wszystkich $t \in [0,\ T]$ i każda trójka $(x,\ u,\ T)$ spełniająca (17), spełnia WKO podane w tw. 1. A zatem istnieje nieskończenie wiele ekstremal. Trójka ($\bar{x}(t) = [1,\ t-1]^{\mathrm{T}}$,$\bar{u}(t) = 1$, $\bar{T} = 1$) jest jedynym rozwiązaniem zadania oraz $J(\bar{x},\bar{u},\ \bar{T}) = 2$. Istnieje nieskończenie wiele mnożników Lagrange'a i funkcji sprzężonych odpowiadających rozwiązaniu optymalnemu. Ponieważ $\psi_2 \equiv 0$, to rozwiązanie optymalne jest osobliwe, a rząd osobliwości jest nieskończony (zob. Bonnard 1997). Wszystkie trajektorie fazowe odpowiadające rozwiązaniom dopuszczalnym, leżą na odcinku $x_1 = 1$, $x_2 \in [-1,\ 0]$. Zasada maksimum nie daje informacji o sterowaniu optymalnym. ∎

Przykład 3 *(nienormalne zadanie sterowania optymalnego, w którym WKO są spełnione zarówno przy $\overline{\lambda}_0 = 0$, jak i przy $\overline{\lambda}_0 = 1$)***.** Należy znaleźć minimum wskaźnika jakości

$$J(x,u,\ T) = T + \int_0^T (x_1(t)-1)dt + \rho(x_1(T)-1)^2, \rho \geq 1,$$

na trajektoriach systemu

$$\dot{x}_1(t) = u_1(t), \dot{x}_2(t) = u_2(t), x_1(0) = 0, x_2(0) = -1, u_1(t) \in [0,\ 1], u_2(t) \in [-1,\ 1],$$

przy ograniczeniu stanu końcowego

$$c(x(T)) = (x_1(T)+1)^2 + x_2(T)^2 - 1 \le 0.$$

Trójka $(\bar{x}(t) = [0,\ t-1]^{\mathrm{T}},\ \bar{u}(t) = [0,\ 1]^{\mathrm{T}},\ \bar{T} = 1)$ jest rozwiązaniem zadania oraz $J(\bar{x}, \bar{u},\ \bar{T}) = \rho$. Hamiltonian jest równy $H = \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 - \lambda_0(x_1 - 1)$. Równania sprzężone mają postać $\dot{\psi}_1 = \lambda_0$, $\dot{\psi}_2 = 0$. Warunki końcowe na zmienne sprzężone są dane równościami $\psi_1(T) = 2(\rho\lambda_0 - \lambda_1)$, $\psi_2(T) = 0$. Jeżeli $\bar{\lambda}_0 = 0$ i $\bar{\lambda}_1 > 0$, to $\bar{\psi}_1(t) = -2\bar{\lambda}_1$, $\bar{\psi}_2(t) = 0$, $\bar{H}(t) = 0$ i WKO są spełnione. Jeżeli $\bar{\lambda}_0 = 1$ i $\bar{\lambda}_1 = \rho + 0{,}5$, to $\bar{\psi}_1(t) = t-2$, $\bar{\psi}_2(t) = 0$, $\bar{H}(t) = 1$ i WKO są również spełnione. A zatem WKO są spełnione zarówno przy $\bar{\lambda}_0 = 0$, jak i przy $\bar{\lambda}_0 = 1$. Zasada maksimum nie daje informacji o sterowaniu u_2. Istnieje nieskończenie wiele mnożników Lagrange'a i funkcji sprzężonych odpowiadających rozwiązaniu optymalnemu. ■

Klasę ekstremal normalnych oznaczamy przez ***N*** (*normal*). Klasę ekstremal nienormalnych oznaczamy przez ***A*** (*abnormal*). Oprócz tego wyróżniamy podklasę $A_{0/1}$, ekstremal nienormalnych, w których WKO są spełnione zarówno przy $\bar{\lambda}_0 = 0$, jak i przy $\bar{\lambda}_0 = 1$ oraz podklasę A_0, ekstremal nienormalnych, spełniających WKO tylko przy $\bar{\lambda}_0 = 0$. Zachodzą oczywiste równości $A = A_0 \bigcup A_{0/1}$ i $A_0 \bigcap A_{0/1} = \emptyset$. Niech będą spełnione założenia tw. 1 i niech trójka $(\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{T})$ spełnia WKO dla problemu P. Przyjmujemy następującą definicję.

Definicja 3 *(ekstremali normalnej, nienormalnej i normalności problemu P)***.**

1) $(\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{T}) \in A \Leftrightarrow (\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{T})$ *spełnia WKO dla problemu P, przy* $\bar{\lambda}_0 = 0$,
2) $(\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{T}) \in N \Leftrightarrow (\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{T}) \notin A$,
3) $(\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{T}) \in A_0 \Leftrightarrow (\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{T}) \in A$ *i nie spełnia WKO dla problemu P, przy* $\bar{\lambda}_0 = 1$,
4) $(\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{T}) \in A_{0/1} \Leftrightarrow (\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{T}) \in A$ *i* $(\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{T}) \notin A_0$,

Ekstremalę spełniającą 1) nazywamy nienormalną. Ekstremalę spełniającą 2) nazywamy normalną. Problem P jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy każda jego ekstremala jest normalna. W przeciwnym przypadku problem P jest nienormalny. ■

W przykładach 1 i 2 wszystkie ekstremale są klasy A_0. W przykładzie 3, ekstremala jest klasy $A_{0/1}$. Ekstremale klasy $A_{0/1}$, maja podobne własności jak ekstremale klasy A_0. Dlatego, pomimo iż ekstremale klasy $A_{0/1}$ można uznać za normalne, z punktu widzenia konstrukcji algorytmów optymalizacji wygodniej jest przyjąć, że ekstremale te są nienormalne.

Definicja 4 *(wariacji sterowania u)***.** *Niech* $u \in U_{ad}$. *Funkcję* $\delta u \in PC([0,T], R^m)$, *taką że* $u + \delta u \in U_{ad}$, *nazywamy dopuszczalną wariacją sterowania u. Zbiór*

$$\tilde{U}_{ad}(u) = \{\delta u \in PC([0,T], R^m) :\ u + \delta u \in U_{ad}\}, \tag{18}$$

będziemy nazywać zbiorem dopuszczalnych wariacji sterowania u. ■

Definicja 5. *Niech będą spełnione założenia CA2. Równaniem wariacyjnym dla problemu P, nazywamy równanie*

$$\delta \dot{x} = (\nabla_x f(\bar{x}, \bar{u}))^{\mathrm{T}} \delta x + (\nabla_u f(\bar{x}, \bar{u}))^{\mathrm{T}} \delta u, \ \delta x(0) = 0, \ \delta u \in \tilde{U}_{ad}(\bar{u}), \ t \in [0, \ \bar{T}]. \tag{19}$$

■

Definicja 6. *Zbiorem ograniczeń aktywnych w punkcie końcowym nazywamy zbiór*

$$\mathrm{A} = \{k \in \{1, \ 2, \ ..., \ r+2\} :$$

$$(c_k(\bar{x}(\bar{T})) = 0 \wedge k \in \{1, \ 2, \ ..., \ r\}) \vee (k = r+1 \wedge \bar{T} = T_{\min}) \vee (k = r+2 \wedge \bar{T} = T_{\max})\}.$$

Niech

$$s_k = \begin{bmatrix} \nabla c_k(\bar{x}(\bar{T})) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, k = 1, \ 2, \ ..., \ r, s_{r+1} = \begin{bmatrix} 0_{n\times 1} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, s_{r+2} = \begin{bmatrix} 0_{n\times 1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

■

Definicja 7. *Stożkiem dodatnim w punkcie końcowym nazywamy zbiór*

$$C^+ = \{\xi \in R^{n+2} : \xi = \sum_{k\in \mathrm{A}} \alpha_k s_k, \ \alpha_k \geq 0, \ \sum_{k\in \mathrm{A}} \alpha_k > 0\}, \ gdy \ \mathrm{A} \neq \emptyset,$$

$$C^+ = \{\emptyset\}, \ gdy \ \mathrm{A} = \emptyset.$$ ■

Definicja 8 *(funkcjonału Lagrange'a)***.** *Funkcję*

$$\mathrm{L} : W^{1,\infty}([0,T], R^n) \times (L^\infty[0,T], R^m) \times R \times W^{1,\infty}([0,T], R^n) \times R^{r+3} \to R,$$

$$\mathrm{L}(x, u, T, \psi, \lambda) = \lambda_0 \int_0^T L(x,u)dt + \lambda_0 g(x(T), T) + \int_0^T \psi^{\mathrm{T}}(\dot{x} - f(x,u))dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} \lambda_k c_k(x(T)) + \lambda_{r+1}(T_{\min} - T) + \lambda_{r+2}(T - T_{\max}) \tag{21}$$

nazywamy funkcjonałem Lagrange'a dla problemu P. ■

Do dalszych rozważań wygodnie jest przyjąć następujące oznaczenia

$$\nabla_x f = \nabla_\xi f(\xi, \upsilon)|_{\xi = x(t), \ \upsilon = u(t)}, \nabla_u f = \nabla_\upsilon f(\xi, \upsilon)|_{\xi = x(t), \ \upsilon = u(t)},$$
$$\nabla_x L = \nabla_\xi L(\xi, \upsilon)|_{\xi = x(t), \upsilon = u(t)}, \nabla_u L = \nabla_\upsilon L(\xi, \upsilon)|_{\xi = x(t), \upsilon = u(t)},$$
$$L_T = L(x(T), u(T)), f_T = f(x(T), u(T)), g_T = g(x(T), T),$$
$$c_{k,T} = c_k(x(T)), \nabla g_T = \nabla_\xi g(\xi, \ \tau)|_{\xi = x(T), \ \tau = T},$$
$$\nabla c_{k,T} = \nabla_\xi c_k(\xi)|_{\xi = x(T)}, \nabla_T g_T = \nabla_\tau g(\xi, \tau)|_{\xi = x(T), \ \tau = T}.$$

Ponadto przyjmiemy umowę, że kreska nad danym wyrażeniem będzie oznaczała, że jest ono obliczane na sterowaniu optymalnym, np. $\nabla\bar{c}_{k,T} = \nabla_\xi c_k(\xi)|_{\xi=\bar{x}(\bar{T})}$. Przy powyższych oznaczeniach, pierwsza wariacja funkcjonału Lagrange'a jest określona wzorem

$$\begin{aligned}\delta \mathrm{L}(x,u,T,\psi,\lambda)(\delta x,\ \delta u,\delta T) = {} & \lambda_0 \textstyle\int_0^T ((\nabla_x L)^{\mathrm{T}}\delta x + (\nabla_u L)^{\mathrm{T}}\delta u)dt + \lambda_0 L_T \delta T + \\ & + \lambda_0(\nabla_T g_T \delta T + (\nabla g_T)^{\mathrm{T}}(\delta x(T) + f_T \delta T)) + \\ & + \textstyle\int_0^T \psi^{\mathrm{T}}(\delta \dot{x} - (\nabla_x f)^{\mathrm{T}}\delta x - (\nabla_u f)^{\mathrm{T}}\delta u)dt + \\ & + \textstyle\sum_{k=1}^r \lambda_k (\nabla c_{k,T})^{\mathrm{T}}(\delta x(T) + f_T \delta T) + (\lambda_{r+2} - \lambda_{r+1})\delta T.\end{aligned} \tag{22}$$

Pierwszą wariację funkcjonału Lagrange'a, obliczaną na rozwiązaniu optymalnym będziemy oznaczać przez

$$\delta\bar{\mathrm{L}}(\delta x,\delta u,\delta T) = \delta \mathrm{L}(\bar{x},\bar{u},\bar{T},\bar{\psi},\bar{\lambda})(\delta x,\delta u,\delta T). \tag{23}$$

Lemat 1. *Niech będą spełnione założenia CA1. Jeżeli WKO dla problemu P są spełnione przy $\bar{\lambda}_0 = 0$, to:*

1) $\exists k \in \{1, 2, \ ,r\}$, takie że $c_k(\bar{x}(\bar{T})) = 0$, 2)$\sum_{k=1}^r \bar{\lambda}_k > 0$, 3) $C^+ \neq \emptyset$.

Lemat 2. *Jeżeli trójka $(\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{T})$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu P, takim że $\bar{u} \in PC([0,\bar{T}],U)$, $\bar{\psi}$ jest optymalną funkcją sprzężoną, $\bar{\lambda}_k \geq 0$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ r+2$ są optymalnymi mnożnikami Lagrange'a oraz spełnione są założenia CA2, to dla wszystkich $\delta u \in \tilde{U}_{ad}(\bar{u})$oraz dowolnych wariacji stanu δx i horyzontu δT zachodzi nierówność*

$$\delta\bar{\mathrm{L}}(\delta x,\delta u,\delta T) \geq 0. \tag{24}$$

Dowody lematów 1 i 2 znajdują się w dodatku A.

Twierdzenie 2. *Niech będą spełnione założenia CA2 i niech trójka $(\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{T})$ będzie (lokalnie) optymalnym rozwiązaniem problemu P, takim że $\bar{u} \in PC([0,\bar{T}],U)$. Jeżeli ekstremala $(\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{T})$ jest nienormalna to:*

1) *istnieje wskaźnik $k \in \{1,\ 2,\ \dots,\ r\}$, taki że $c_k(\bar{x}(\bar{T})) = 0$ i istnieje $\xi \in C^+$, takie że*
2) $[\, f(\bar{x}(\bar{T}),\bar{u}(\bar{T}))^{\mathrm{T}}\ \ -1\ \ 1\,]\ \xi = 0$ *i*
3) $\forall v \in U$, $[\,(f(\bar{x}(\bar{T}),v) - f(\bar{x}(\bar{T}),\bar{u}(\bar{T})))^{\mathrm{T}}\ 0\ 0\,]\ \xi \geq 0$ *i*
4) $\forall \delta u \in \tilde{U}_{ad}(\bar{u})$, *rozwiązanie równania wariacyjnego (20) spełnia warunek* $[\,\delta x(\bar{T})^{\mathrm{T}}\ 0\ 0\,]\ \xi \geq 0$. ■

Dowód twierdzenia 2. Zakładamy, że ekstremala $(\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{T})$ jest nienormalna, a zatem WKO dla P są spełnione przy $\bar{\lambda}_0 = 0$. Punkt 1) wynika bezpośrednio z lematu 1. Niech

$$\xi = \sum_{k=1}^r \bar{\lambda}_k \begin{bmatrix} \nabla c_k(\bar{x}(\bar{T})) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \bar{\lambda}_{r+1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \bar{\lambda}_{r+2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Z lematu 1 i z definicji stożka C^+ wynika, że $C^+ \neq \emptyset$ i $\xi \in C^+$. Z (9), (13) i (14) otrzymujemy $f(\bar{x}(\bar{T}),\bar{u}(T))^{\mathrm{T}} \sum_{k=1}^{r} \bar{\lambda}_k \nabla c_k(\bar{x}(\bar{T})) - \bar{\lambda}_{r+1} + \bar{\lambda}_{r+2} = 0$, co można zapisać w równoważnej postaci $[\, f(\bar{x}(\bar{T}),\bar{u}(\bar{T}))^{\mathrm{T}} \ -1 \ 1\,]\ \xi = 0$, stąd 2). Z warunku maksimum hamiltonianu (11) w chwili końcowej i ze wzoru (13) mamy

$$\forall v \in U, (f(\bar{x}(\bar{T}),v) - f(\bar{x}(\bar{T}),\bar{u}(T)))^{\mathrm{T}} \sum_{k=1}^{r} \bar{\lambda}_k \nabla c_k(\bar{x}(\bar{T})) \geq 0,$$

co można zapisać w równoważnej postaci

$$\forall v \in U,\ [\,(f(\bar{x}(\bar{T}),v) - f(\bar{x}(\bar{T}),\bar{u}(\bar{T})))^{\mathrm{T}} \ 0 \ 0\,]\ \xi \geq 0, \text{ stąd 3).}$$

Niech $\delta u \in \tilde{U}_{ad}(\bar{u})$ i niech funkcja δx spełnia równanie wariacyjne (20). Podstawiając w równości (23) $\bar{\lambda}_0 = 0$, $\delta T = 0$ i korzystając z lematu 2 mamy $\delta x(\bar{T})^{\mathrm{T}} \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla c_k(\bar{x}(\bar{T})) \geq 0$, co można zapisać w równoważnej postaci $[\,\delta x(\bar{T})^{\mathrm{T}} \ 0 \ 0\,]\ \xi \geq 0$, stąd 4). ■

Komentarz. Z warunków 1–4) wynika, że w zadaniu nienormalnym, punkt końcowy trajektorii optymalnej musi leżeć na brzegu zbioru dopuszczalnego oraz, że za pomocą małej zmiany sterowania lub horyzontu nie można wprowadzić trajektorii do wnętrza zbioru dopuszczalnego.

Zaprzeczając tezie twierdzenia 2, otrzymujemy warunki dostateczne normalności zadania.

Twierdzenie 3. *Niech będą spełnione założenia CA2 i niech trójka $(\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{T})$ będzie (lokalnie) optymalnym rozwiązaniem problemu P, takim że $\bar{u} \in PC([0,\bar{T}],U)$.*
Jeżeli zachodzi co najmniej jeden z warunków

1) $c_k(\bar{x}(\bar{T})) < 0$, *dla wszystkich* $k \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ r\}$,
2) $\forall \xi \in C^+$, $[\, f(\bar{x}(\bar{T}),\bar{u}(\bar{T}))^{\mathrm{T}} \ -1 \ 1\,]\ \xi \neq 0$
3) $\forall \xi \in C^+$, $\exists\, v \in U$, $[\,(f(\bar{x}(\bar{T}),v) - f(\bar{x}(\bar{T}),\bar{u}(\bar{T})))^{\mathrm{T}} \ 0 \ 0\,]\ \xi < 0$
4) $\forall \xi \in C^+$, $\exists\, \delta u \in \tilde{U}_{ad}(\bar{u})$, *takie że rozwiązanie równania wariacyjnego (20) spełnia warunek* $[\,\delta x(\bar{T})^{\mathrm{T}} \ 0 \ 0\,]\ \xi < 0$,

to ekstremala $(\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{T})$ jest normalna. ■

4. Przypadki szczególne

Z twierdzeń 2 i 3 wynika, że sprawdzenie normalności zadania jest na ogół możliwe dopiero po jego rozwiązaniu. Poniżej rozważymy, ważny z punktu widzenia zastosowań przypadek szczególny, w którym normalność zadania można stwierdzić bez jego rozwiązywania. Będziemy zakładać, że w problemie P występuje tylko jedno ograniczenie stanu końcowego ($r = 1$), oraz że horyzont może być dowolnie duży ($T_{\max} = \infty$).

Twierdzenie 4. *Niech będą spełnione założenia CA2, oraz niech* $r = 1$, $T_{\max} = \infty$. *Jeżeli dla każdego* ξ *spełniającego warunek* $c_1(\xi) = 0$, *istnieje wektor* $v \in U$, *taki że*

$$(\nabla c_1(\xi))^{\mathrm{T}} f(\xi, v) < 0, \tag{25}$$

to problem P jest normalny. ■

Dowód. Przypuśćmy, że ekstremala $(\bar{x},\ \bar{u},\ \bar{T})$ jest nienormalna., oraz że $\bar{u} \in PC([0,\bar{T}],U)$. Z lematu 1 mamy $c_1(\bar{x}(\bar{T})) = 0$. Bezpośrednio z (27) $\nabla c_1(\bar{x}(\bar{T})) \neq 0$. Na mocy twierdzenia 2, istnieje wektor $\xi \in C^+$, taki że

$$[\, f(\bar{x}(\bar{T}), \bar{u}(\bar{T}))^{\mathrm{T}}\ \ -1\ \ 1\,]\ \xi = 0, \tag{26}$$

$$\forall v \in U, [\, (f(\bar{x}(\bar{T}), v) - f(\bar{x}(\bar{T}), \bar{u}(\bar{T})))^{\mathrm{T}}\ \ 0\ \ 0\,]\ \xi \geq 0. \tag{27}$$

Załóżmy że oba ograniczenia są aktywne. Z definicji stożka C^+ mamy

$$\xi = [\alpha_1 \nabla c_k(\bar{x}(\bar{T}))^{\mathrm{T}}\ \ \alpha_2\ \ 0]^{\mathrm{T}}, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 > 0. \tag{28}$$

Jeżeli $\alpha_2 > 0$, to na mocy (28) otrzymujemy $\alpha_1 f(\bar{x}(\bar{T}), \bar{u}(\bar{T}))^{\mathrm{T}} \nabla c_1(\bar{x}(\bar{T})) = \alpha_2 > 0$, skąd $\alpha_1 > 0$. Niech $\eta = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^{\mathrm{T}} = \alpha_1 \nabla c_1(\bar{x}(\bar{T}))$. Z nierówności (29) mamy

$$\forall v \in U, f(\bar{x}(\bar{T}), v)^{\mathrm{T}} \eta \geq f(\bar{x}(\bar{T}), \bar{u}(\bar{T}))^{\mathrm{T}} \eta \geq 0.$$

Z założenia (27) mamy $f(\bar{x}(\bar{T}), v)^{\mathrm{T}} \eta < 0$ dla pewnego $v \in U$. A zatem $f(\bar{x}(\bar{T}), v)^{\mathrm{T}} \eta \geq 0$ i jednocześnie $f(\bar{x}(\bar{T}), v)^{\mathrm{T}} \eta < 0$ co jest niemożliwe. Jeżeli ograniczenie horyzontu nie jest aktywne, to $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 > 0$, oraz $f(\bar{x}(\bar{T}), \bar{u}(\bar{T}))^{\mathrm{T}} \eta = 0$ i ponownie otrzymujemy sprzeczność. Stąd wniosek, że każda ekstremala jest normalna, zatem P jest normalny. ■

Rozpatrzymy teraz zadanie, w którym celem sterowania jest doprowadzenie stanu systemu (4) do pewnego otoczenia punktu równowagi. Tego typu zadania są często spotykane w praktyce. Zakładamy, że system (4) ma zerowy punkt równowagi, tzn. $f(0,0) = 0$, oraz że $0 \in intU$. W systemie (4) stosujemy sprzężenie zwrotne $u = \mathrm{K}(x)$, gdzie funkcja $\mathrm{K} : R^n \to U$ jest ciągła i $\mathrm{K}(0) = 0$. Wówczas równanie (4) może być zapisane jako

$$\dot{x} = f(x, \mathrm{K}(x)). \tag{29}$$

Niech funkcja $V : R^n \to R$, spełnia warunki $V \in C^1(R^n)$, $V(0) = 0$, $V(\xi) > 0$ dla $\xi \neq 0$ oraz niech $\Omega = \{\xi \in R^n : V(\xi) \leq \alpha\}$, $\alpha > 0$, $\alpha \in R$. Jeżeli istnieje liczba $\alpha > 0$, taka że dla każdego $\xi \in \Omega \backslash \{0\}$spełniony jest warunek

$$(\nabla V(\xi))^{\mathrm{T}} f(\xi, \mathrm{K}(\xi)) < 0, \tag{30}$$

to V jest funkcjonałem Lapunowa systemu (31) w zbiorze Ω (zob. Mitkowski 1991, s.117). Jeżeli V jest funkcjonałem Lapunowa systemu (31) w zbiorze Ω oraz w problemie P przyjmiemy $r = 1$, $T_{\max} = \infty$, $c_1(x) = V(x) - \alpha$, to z (32) i twierdzenia 4 wynika natychmiast, że problem P jest normalny. Zbiór Ω, funkcje K oraz funkcjonał Lapunowa V można skonstruować następująco. Niech $A = \nabla_x f(0,0)^{\mathrm{T}}$, $B = \nabla_u f(0,0)^{\mathrm{T}}$, gdzie f oznacza prawą stronę równania (4). Jeżeli para (A, B) jest stabilizowalna, to istnieje macierz K, taka że macierz $A_K = A + BK$ jest wykładniczo stabilna oraz równanie Lapunowa

$$A_K^{\mathrm{T}} H + H A_K = -G, \text{ gdzie } G = G^{\mathrm{T}} > 0, \tag{31}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $H = H^{\mathrm{T}} > 0$ (zob. Mitkowski 1991, s. 81). Niech

$$\mathrm{K}(x) = Kx.$$

Jeżeli macierz A_K jest wykładniczo stabilna oraz macierz H spełnia (33), to $V(x) = x^{\mathrm{T}} H x$, jest funkcjonałem Lapunowa systemu (31) w otoczeniu zera. Biorąc dostatecznie małą liczbę $\alpha > 0$ oraz przyjmując $c_1(x) = x^{\mathrm{T}} H x - \alpha$ widzimy, że problem P jest normalny. Liczbę α można wyznaczyć metodami numerycznymi (zob. np. Bania 2008, s. 114–120).

5. Przykład

Rozważamy system opisany równaniami

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = -w(x_2), \dot{x}_2 = u, x_1(0) = x_{01}, x_2(0) = x_{02}, \\ &w(x_2) = ((x_2 - b)^2 - 1)^2, \text{ gdy } x_2 \in [b-1, b+1], \\ &w(x_2) = 0, \text{ gdy } x_2 \notin [b-1, b+1],\ b = 1{,}5,\ u \in [-1, 1]. \end{aligned} \tag{32}$$

Należy znaleźć minimum wskaźnika jakości

$$J(x, u, T) = T \tag{33}$$

przy ograniczeniu stanu końcowego

$$c(x_1(T), x_2(T)) = x_1(T)^2 + x_2(T)^2 - 1 \leq 0 \tag{34}$$

Jeżeli $c(x_{01}, x_{02}) \leq 0$, to rozwiązanie zadania jest trywialne $\bar{u} = 0$, $\bar{T} = 0$. Dalej będziemy zakładać, że $c(x_{01}, x_{02}) > 0$. Szukamy sterowania, które doprowadza stan systemu (34) do brzegu kuli jednostkowej w najkrótszym czasie. Do wyznaczenia struktury sterowania optymalnego wykorzystamy twierdzenie 1, a następnie przeprowadzimy prostą optymalizację czasów przełączeń. Hamiltonian wynosi

$$H = -\psi_1 w(x_2) + \psi_2 u \tag{35}$$

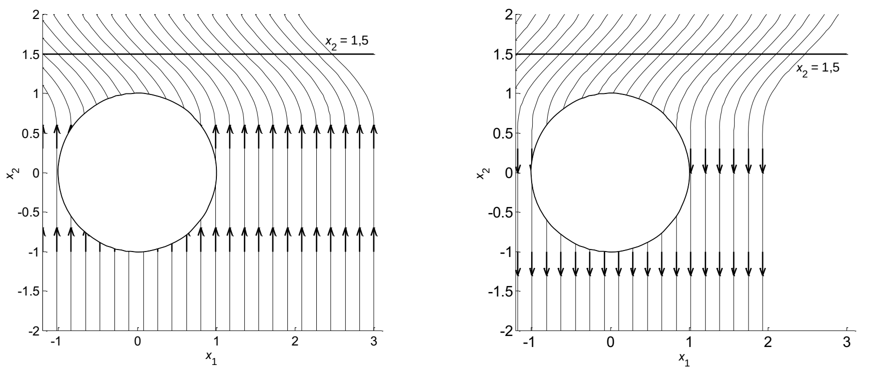
Równania sprzężone mają postać

$$\dot{\psi}_1 = 0,\ \dot{\psi}_2 = w'(x_2)\psi_1,\ \psi_1(T) = -2\lambda_1 x_1(T),\ \psi_2(T) = -2\lambda_1 x_2(T) \tag{36}$$

Z warunku maksimum hamiltonianu mamy

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \psi_2(t) > 0, \\ -1, & \text{gdy } \psi_2(t) < 0. \end{cases}$$

a) b)



Rys. 1. Trajektorie systemu (34) przy sterowaniu: a) +1 i b) –1 oraz prosta $x_2 = b$ i zbiór dopuszczalnych stanów końcowych $c(x_1, x_2) \leq 0$

Niech $\Theta \subset [0, T]$ będzie przedziałem o niepustym wnętrzu. Jeżeli

$$\psi_2(t) = 0,\ \ \text{dla wszystkich } t \in \Theta \tag{37}$$

to warunek maksimum hamiltonianu nie pozwala wyznaczyć sterowania optymalnego. Mówimy wówczas, że sterowanie jest osobliwe w przedziale czasu Θ (zob. Bonnard 1997). Ponieważ funkcja ψ_2 znika w Θ, to również jej pochodne względem czasu znikają. Aby wyznaczyć sterowanie osobliwe różniczkujemy równość (39) dwukrotnie względem t oraz korzystamy z równań stanu i równań sprzężonych

$$\dot{\psi}_2(t) = w'(x_2(t))\psi_1(t) = 0, \tag{38}$$
$$\ddot{\psi}_2(t) = w''(x_2(t))\psi_1(t)u(t) = 0,\ t \in \Theta. \tag{39}$$

Z twierdzenia 1 wynika, że ψ_1 nie może znikać w przedziale Θ. Z warunków istnienia osobliwości skończonego rzędu (zob. Bonnard 1997), z równości (39)–(41) i z tw. 1 wynika, że w przedziale osobliwości muszą być spełnione warunki $w'(x_2(t)) = 0$, $w''(x_2(t)) \neq 0$, $x_2 \in (b-1, b+1)$ stąd $x_2(t) = b$, oraz sterowanie osobliwe $u_s(t) = 0$, $t \in \Theta$. Sterowanie optymalne może przyjmować co najwyżej trzy wartości –1, 0, 1, a sterowanie osobliwe może wystąpić, gdy trajektoria optymalna ma punkt wspólny z prostą $x_2 = b$. Analizując rysunek 1, można łatwo zauważyć, że liczba przełączeń jest nie większa niż dwa, oraz że sterowanie optymalne może mieć następujące struktury

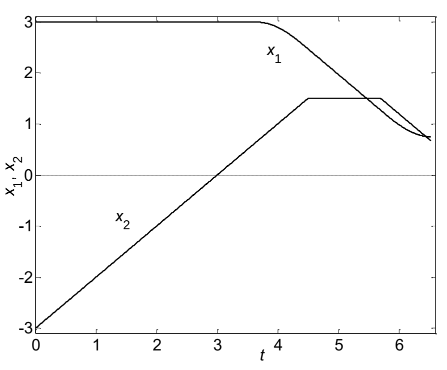
a) +1, b) –1, c) +1, 0, -1, d) –1, 0, -1, e) 0, -1.

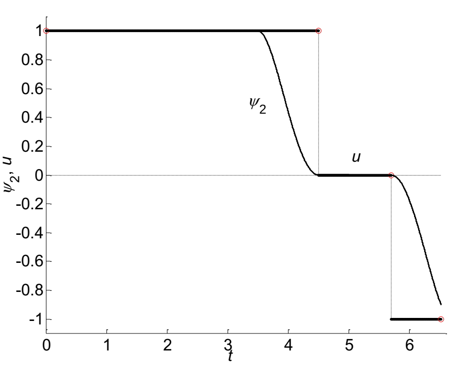
Jeżeli struktura sterowania jest poprawnie dobrana, to wskaźnik jakości (35) zależy tylko od co najwyżej dwóch czasów przełączeń i horyzontu. W przypadkach c i d optymalny horyzont i czasy przełączeń sterowania można dobrać, minimalizując pomocniczy wskaźnik jakości

$$Q(\tau_1, \tau_2, T) = T + \rho(c(x(T)) - 1)_+^2, \ 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T.$$

Liczba $\rho > 0$ jest odpowiednio dużym współczynnikiem kary, a τ_1 i τ_2 oznaczają czasy przełączeń sterowania. W przypadku e występuje jedno przełączenie. W przypadkach a i b, pomocniczy wskaźnik jakości jest funkcją jednej zmiennej – horyzontu. W oparciu o powyższą ideę można skonstruować metodę numeryczną, która optymalizuje czasy przełączeń oraz w razie potrzeby dodaje nowe przełączenia (szczegóły zob. Szymkat i Korytowski 2007, Bania 2008 rozdz. 6). Na rysunku 2 pokazano trajektorię i sterowanie optymalne oraz funkcję ψ_2 dla $x_{01} = 3$, $x_{02} = -3$. Zgodnie z zasadą maksimum, poza przedziałem osobliwości znak sterowania i znak funkcji ψ_2 są takie same. W przedziale osobliwości funkcja ψ_2 znika, a sterowanie jest wyznaczane z warunków (39–41).

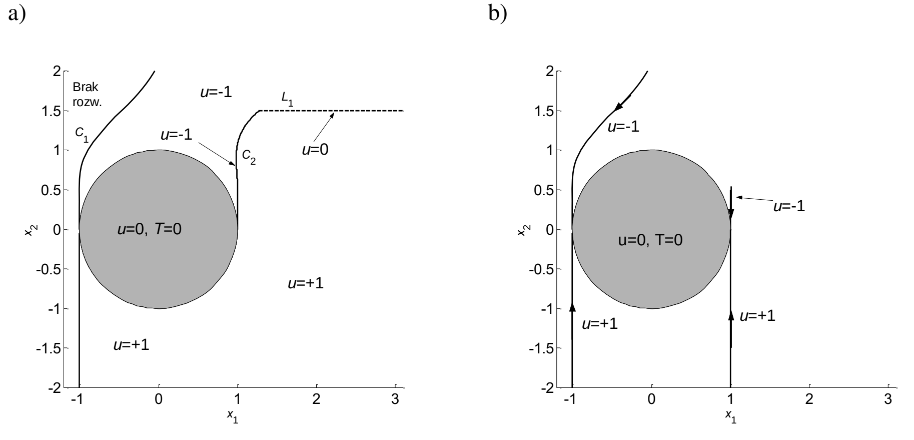
a) b)



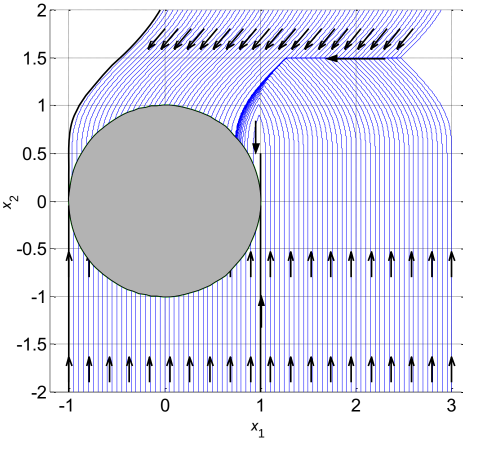


Rys. 2. Trajektoria czasooptymalna (a) oraz sterowanie czasooptymalne i funkcja ψ_2 (b) przy warunku początkowym $x_{01} = 3$, $x_{02} = -3$

Na rysunku 3a pokazano wartości sterowania optymalnego w zależności od stanu wyliczone metodami numerycznymi (zob. Szymkat i Korytowski 2007, Bania 2008). Na lewo od linii C_1 nie istnieją rozwiązania zadania. Na półprostej L_1 sterowanie jest osobliwe. Na linii C_2 dla $x_2 \in (0,5,1,5)$ sterowanie zmienia znak, a dla $x_2 \in (0,0,5]$ jest równe –1. Na rys. 3b pokazano trajektorie odpowiadające wszystkim rozwiązaniom nienormalnym. Można łatwo sprawdzić, że żaden z warunków normalności podanych w twierdzeniu 3 nie jest spełniony.

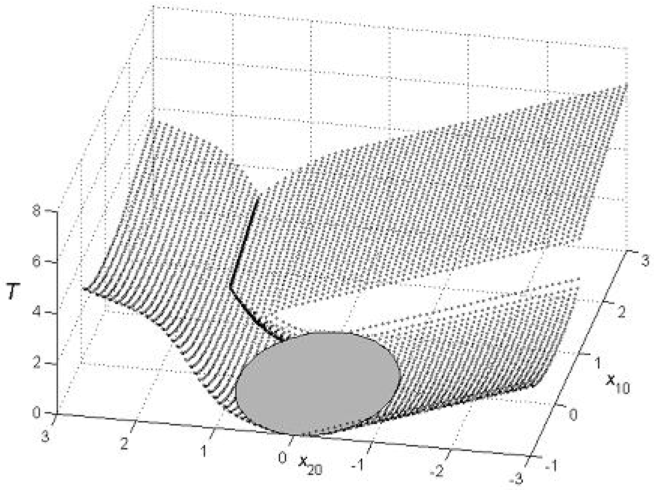


Rys. 3. Wartości sterowania optymalnego (a) oraz trajektorie odpowiadające rozwiązaniom nienormalnym (b)



Rys. 4. Trajektorie czasooptymalne. Strzałkami zaznaczono kierunek ruchu

Na rysunku 4 pokazano trajektorie czasooptymalne przy różnych warunkach początkowych. Na rysunku 5 pokazano optymalne wartości wskaźnika jakości w zależności od warunku początkowego. Funkcję tę nazywa się funkcją optymalnej jakości lub funkcją wartości (*value function*). Funkcja optymalnej jakości jest nieciągła. Nieciągłość występuje na półprostej $x_1 = 1, x_2 < 0,5$ odpowiadającej rozwiązaniom nienormalnym. Na półprostej L_1 i na linii C_1 funkcja optymalnej jakości jest nieróżniczkowalna.



Rys. 5. Funkcja optymalnej jakości

6. Wnioski

W artykule podano i udowodniono warunki dostateczne normalności zasady maksimum Pontriagina dla zadań z ograniczeniami stanu końcowego. Z przeanalizowanych przykładów wynika, że istnieją zadania, w których warunki konieczne optymalności są spełnione zarówno przy $\lambda_0 = 0$, jak i $\lambda_0 = 1$ (zob. przykład 3). Nie istnieje zatem ostry podział na zadania normalne i nienormalne. Nienormalność zadania występuje często, gdy trajektoria optymalna w punkcie końcowym jest styczna do brzegu zbioru dopuszczalnych stanów końcowych. Ekstremale nienormalne mogą występować na granicy obszaru tych warunków początkowych, dla których nie istnieją rozwiązania zadania. W zadaniach nienormalnych na ogół istnieje nieskończenie wiele mnożników Lagrange'a i funkcji sprzężonych odpowiadających rozwiązaniu optymalnemu, a liczba ekstremal może być nieskończona (zob. przykłady 1 i 2). Optymalna wartość wskaźnika jakości może być nieciągłą funkcją warunku początkowego (zob. Frankowska 2002), a punkty nieciągłości mogą występować na trajektoriach nienormalnych. Wynika stąd, że trajektoria i sterowanie optymalne zależą na ogół w sposób nieciągły od warunku początkowego. Modyfikując nieco ostatni przykład można pokazać, że optymalny stan końcowy może również zależeć w sposób nieciągły od stanu początkowego, a zatem wrażliwość trajektorii optymalnych na zmiany warunków początkowych może być nieskończona. Mogą istnieć rozwiązania jednocześnie nienormalne i osobliwe (zob. przykład 2).

Istnieje związek pomiędzy sterowalnością systemu (4) i występowaniem nienormalności zadania. Jeżeli linearyzacja równania (4) jest sterowalna w każdym punkcie $(\xi, v) \in R^n \times U$, to problem będzie normalny. Nienormalność zadania może być sygnałem ostrzegającym o błędnym sformułowaniu problemu. Wykrywanie nienormalności zadania lub stwierdzenie, że zadanie jest normalne odgrywa istotną rolę w konstrukcji numerycznych algorytmów optymalizacji dynamicznej. Jeżeli bowiem posługujemy się algorytmem, bazującym na tw. 1 w postaci normalnej ($\lambda_0 = 1$), a zadanie jest nienormalne, to nie można stwierdzić czy otrzymane rozwiązanie spełnia warunki konieczne optymalności. Pomimo wielu prób autorowi nie udało się skonstruować przykładu zadania normalnego, w którym żaden z warunków normalności (zob. tw. 3) nie byłby spełniony. Można zatem postawić hipotezę, że podane warunki normalności są jednocześnie konieczne i dostateczne.

Dodatek A.

Dowód lematu 1. Przypuśćmy, że $\bar{\lambda}_0 = 0$ i $\forall k,\ c_k(\bar{x}(\bar{T})) < 0$. Wtedy z (15a) otrzymujemy $\bar{\lambda}_k = 0$ dla $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r$. Na mocy (9), (12), (13), (14) i (15d) mamy $\bar{\psi} \equiv 0$, $\bar{\lambda}_{r+1} = \bar{\lambda}_{r+2} = 0$. Stąd $\bar{\lambda}_k = 0$ dla $k = 0, 1,\ 2,\ \ldots,\ r+2$, co jest sprzeczne z warunkiem (10), mówiącym że $\sum_{k=0}^{r+2} \bar{\lambda}_k > 0$. Ponieważ co najmniej jedno ograniczenie jest aktywne, to $C^+ \neq \{\phi\}$. Przypuśćmy, że $\bar{\lambda}_0 = 0$ i $\bar{\lambda}_k = 0$ dla $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r$, wtedy z (9), (13) i (14) wynika, że $\bar{\psi}(\bar{T}) = 0$, $\bar{H}(\bar{T}) = 0$. Na mocy (8), (15b) i (15c) mamy $\bar{\lambda}_{r+1} = \bar{\lambda}_{r+2} = 0$. Stąd $\bar{\lambda}_k = 0$ dla $k = 0, 1,\ 2,\ \ldots,\ r+2$, co jest sprzeczne z warunkiem (10). ∎

Dowód lematu 2. Całkując przez części wyrażenie $\int_0^{\bar{T}} \bar{\psi}^{\mathrm{T}} \delta \dot{x}\, dt$ i pamiętając, że $\delta x(0) = 0$, otrzymujemy

$$\int_0^{\bar{T}} \bar{\psi}^{\mathrm{T}} \delta \dot{x}\, dt = \bar{\psi}^{\mathrm{T}}(\bar{T})\, \delta x(\bar{T}) - \int_0^{\bar{T}} \dot{\bar{\psi}}^{\mathrm{T}} \delta x\, dt. \tag{40}$$

Wstawiając to wyrażenie do (23) i korzystając z (12), (13) i (14) widzimy, że wyrażenia przy δx, $\delta x(T)$ i δT znikają, stąd

$$\delta \bar{\mathrm{L}}(\delta x,\ \delta u, \delta T) = -\int_0^{\bar{T}} ((\nabla_u \bar{f}\bar{\psi} - \lambda_0 \nabla_u \bar{L})^{\mathrm{T}}\, \delta u) dt. \tag{41}$$

Z założeń CA2 i z (9) wynika, że pochodna $\nabla_u H(\bar{\psi}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}_0) = \nabla_u \bar{f}\, \bar{\psi} - \bar{\lambda}_0 \nabla_u \bar{L}$, jest dobrze określona. Podstawiając to wyrażenie do (43), otrzymujemy

$$\delta \bar{\mathrm{L}}(\delta x,\ \delta u, \delta T) = -\textstyle\int_0^{\bar{T}} (\nabla_u H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\lambda}_0))^{\mathrm{T}}\, \delta u(t)) dt, \text{ gdzie } \delta u \in \tilde{U}_{ad}(\bar{u}). \quad (\textbf{??})$$

Z warunku maksimum hamiltonianu (11) i z wypukłości zbioru U wynika, że nierówność

$$H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t) + \tau \delta u(t)) \leq H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)), \tag{42}$$

jest spełniona dla wszystkich $\tau \in [0,\ 1]$, $\delta u \in \tilde{U}_{ad}(\bar{u})$, $t \in [0, \bar{T}]$. Korzystając z nierówności (45) i z definicji pochodnej hamiltonianu względem u, otrzymujemy

$$(\nabla_u H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)))^{\mathrm{T}} \tau \delta u(t) + o(\tau \delta u(t)) \leq 0.$$

Przechodząc do granicy $\tau \to 0^+$ mamy $(\nabla_u H(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)))^{\mathrm{T}} \delta u(t) \leq 0$ dla wszystkich $t \in [0, \bar{T}]$ i $\delta u \in \tilde{U}_{ad}(\bar{u})$. A zatem $\delta \bar{\mathrm{L}}(\delta x, \delta u, \delta T) \geq 0$ dla wszystkich $\delta u \in \tilde{U}_{ad}(\bar{u})$ oraz dowolnych wariacji stanu δx i horyzontu δT. ■

Dodatek B. Oznaczenia

$H > 0$ – macierz dodatnio określona, H^{T} – macierz transponowana do macierzy H

$L^{\infty}(\Delta,\ R^r)$ – przestrzeń funkcji mierzalnych istotnie ograniczonych na odcinku $\Delta \subset R$, z normą $||\xi||_{\infty} = \operatorname*{esssup}_{t \in \Delta} |\xi(t)|$

$W^{1,\infty}(\Delta,\ R^r)$ – przestrzeń funkcji absolutnie ciągłych na odcinku $\Delta \subset R$, z normą $||\xi||_{1,\infty} = \max\ (||\xi||_{\infty},\ ||\dot{\xi}||_{\infty})$

$|x|_H = \sqrt{x^{\mathrm{T}} H x}$ – norma wektora w R^n z macierzą wag $H = H^{\mathrm{T}} > 0$; $|x| = |x|_I$

R – przestrzeń liczb rzeczywistych

$R_0^+ = \{t \in R :\ t \geq 0\}$ – zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych

$PC([0,T], R^m)$ – przestrzeń funkcji przedziałami ciągłych o wartościach w R^m

$\nabla_x q(x,y,z) = \left(\frac{\partial q}{\partial x_1}, \frac{\partial q}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial q}{\partial x_n} \right)^{\mathrm{T}}$ – gradient funkcji q względem zmiennej x

$\nabla_x f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ – transponowana macierz Jacobiego funkcji $f : R^n \to R^m$

$(x)_+ = \begin{cases} x, \text{ gdy } x \geq 0, \\ 0, \text{ gdy } x < 0. \end{cases}$

$intU$ – wnętrze zbioru U

Literatura

[1] Alekseev V. M., Tikhomirov V. M., Fomin S. V. (1987). *Optimal Control*. Consultants Bureau, New York. A division of Plenum Publishing Corporation.

[2] Bania P. (2008). *Algorytmy sterowania optymalnego w nieliniowej regulacji predykcyjnej*. Rozprawa doktorska. AGH Kraków.

[3] Bettiol P., Frankowska H. (2007). *Normality of the maximum principle for non convex constrained Bolza problems*. J. Diff. Eqs., 243, 256–269.

[4] Bonnard B. (1997). *Singular trajectiories, feedback equivalence and the time optimal control problem*. Rozdz. 2. w: B. Jakubczyk, W. Respondek (eds): *Geometry of Feedback and Optimal Control*. Marcel Dekker, New York-Basel-Hong Kong, 79–110.

[5] Ferreira M.M.A., Fontes F.A.C.C. (2004). *Nondegeneracy and Normality in Necessary Conditions of Optimality: An Overview*. In Proceedings of the 6th Portuguese Conference on Automatic Control – CONTROLO 2004, Faro, Portugal, 7–9 June.

[6] Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A. (1980). *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*. PWN, Warszawa.

[7] Fontes F.A.C.C. (2000a). *Normality in the necessary conditions of optimality for control problems with state constraints*. In: Proceedings of the IASTED Conference on Control and Applications. Cancun, Mexico.

[8] Frankowska H. (2002). *Value Function in Optimal Control*. ICTP Lecture Notes, 115 pages, Summer School of Mathematical Control Theory, September 3–28, 2001.

[9] Hartl R.F., Sethi S.P., Vickson G. (1995). *A Survey of the Maximum Principles for Optimal Control Problems with State Constraints*, SIAM Review, 37 (1995), pp. 181–218.

[10] Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. (1979): *Theory of Extremal Problems*. North Holland-Amsterdam-New York-Oxford.

[11] Malanowski K. (2003). *On normality of Lagrange multipliers for state constrained optimal control problems*. Optimization **52**(1), 75–91.

[12] Mitkowski W. (1991). *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT, Warszawa.

[13] Szymkat M., Korytowski A. (2007). *Evolution of structure for direct control optimization*. Discussiones Mathematicae Differential Inclusions, Control and Optimization 27 (2007) 165–193.