Publikacja ze zbiorów Biblioteki Głównej AGH w Krakowie

Biblioteka Główna
AGH w Krakowie

AGH

UCZELNIA
BADAWCZA
INICJATYWA DOSKONAŁOŚCI

**Digitalizacja dorobku naukowo-badawczego Profesorów AG w Krakowie
w latach 1919-1945. Część 2**

projekt dofinansowany ze środków budżetu państwa, przyznanych przez Ministra Nauki w ramach Programu Społeczna Odpowiedzialność Nauki II - moduł: Wsparcie dla bibliotek naukowych

01.12.2024-31.07.2026
BIBL/SP/0003/2024/02

Społeczna
Odpowiedzialność
Nauki II

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

Inż. WŁADYSŁAW TAKLIŃSKI
prof. Akad. Górn. w Krakowie

MECHANIKA TEORETYCZNA

(Tom 2)

Dynamika punktu materialnego

CZĘŚĆ III.

Nakładem Sekcji Wydawniczej Stud. Akad. Górn.

Inż. Władysław Takliński
Profesor Akademii Górniczej
w Krakowie.

M E C H A N I K A   T E O R E T Y C Z N A

T O M   II.

D Y N A M I K A   P U N K T U

I

D Y N A M I K A   U K Ł A D U   P U N K T Ó W   M A T E R I A L.

Nakładem Sekcji Wydawniczej
Stowarzyszenia Studentów Akademii Górniczej w Krakowie

Kraków 1938r.

M E C H A N I K A   T E O R E T Y C Z N A

D Y N A M I K A   P U N K T U

S P I S   R Z E C Z Y .

R o z d z i a ł III. K r z y w o l i n i o w y r u c h p u n k t u m a t e r i a l n e g o.

R o z d z i a ł IV. Z a s a d a p ó l, czyli z a s a d a i l o ś c i r u c h u.

R o z d z i a ł V. Z a s a d a P r a c y, czyli z a s a d a e n e r g i i k i n e t y c z n e j.

R o z d z i a ł VI. R u c h P u n k t u m a t e r i a l n e g o p o d d z i a ł a n i e m s i ł y ś r o d k o w e j.

Rozdział VII. Ruch punktu nieswobodnego po powierzchni.

ooooo0ooooo

R o z d z i a ł   I

Z a s a d y   d y n a m i k i .

W rozdziale pierwszym statyki podaliśmy prawo b e z w ł a d n o ś c i, będące jednocześnie zasadą dynamiki, zwaną też p i e r w s z y m   p r a w e m   N e w t o n a . Nadamy temu prawu brzmienie następujące:

P i e r w s z e   p r a w o   N e w t o n a ,

S w o b o d n y   p u n k t   m a t e r i a l n y   z a c h o w u j e   b e z   z m i a n y   l i c z e b n ą   w a r t o ś ć   i   k i e r u n e k   s w e j   p r ę d k o ś c i .

Prawo tego nie udowadniamy, lecz przyjmujemy je jako pewnik. Prawo powyższe jest ustalone na podstawie spostrzeżeń i doświadczeń praktycznych i, chociaż tych badań nie możemy uważać za bezwzględnie ścisłe, z powodu niemożliwości urzeczywistnienia zupełnej swobody punktu materialnego, to jednakże nie możemy wątpić o prawomocności wysłowionego wyżej pewnika, z powodu następujących faktów

1/gdy stawiamy doświadczenia nad ruchem bryły materialnej w coraz to doskonalszych warunkach, to ruch bryły stale przybliża się do ruchu według prawa bezwładności i

2/wszystkie wnioski i prawa ruchu, wynikające z tego i innych praw Newtona, potwierdzały się dotychczas i potwierdzają się obecnie w praktyce; przytoczone tu fakty odnoszą się nie tylko do pierwszego prawa Newtona, lecz i do dwóch praw następujących.

Wykażemy, że oba brzmienia tego prawa, podane przed chwilą i przytoczone w I rozdziale statyki, w zupełności są jednoznaczne. Rzeczywiście, gdy punkt materialny w pewnym momencie czasu posiada prędkość równą zeru, to według pierwszego prawa Newtona, ten punkt zachowuje prędkość stale równą zeru; ale z kinematyki wiemy, że gdy prędkość jest zerem, to punkt znajduje się w stanie spoczynku, spoczywający zaś punkt materialny, według prawa bezwładności ruchu, zachowuje bez zmiany swój stan spoczynku.

Gdy zaś swobodny punkt materialny w pewnym momencie czasu posiada prędkość nie równą zeru, wtedy według pierwszego prawa Newtona, ten punkt zachowuje liczebną wartość i kierunek swej prędkości; ale w kinematyce wykazaliśmy, że gdy punkt ruchomy posiada stale niezmienną, co do wielkości i kierunku, prędkość, to ruch jego jest jednostajny i prostoliniowy, zatem, na zasadzie prawa bezwładności ruchu, poruszający się swobodny punkt musi się poruszać jednostajnie i prostolinijnie c.b.d.o.

Gdy ruch punktu materialnego nie odpowiada prawu bezwładności, to musimy przyznać, że jakieś czynniki powodują zmianę prędkości punktu materialnego co do wartości liczebnej, lub kierunku lub oba razem, innymi słowy, gdy ruch punktu nie czyni zadość prawu bezwładności, muszą koniecznie istnieć jakieś czynniki, wywołujące przyspieszenie punktu ruchomego. Te czynniki mogą być różnego rodzaju, np. ciśnienie, przyciąganie punktu przez ziemię, naelektryzowanie punktu i t.p. Mechanika teoretyczna nie rozróżnia pochodzenia fizycznego tych czynników i nazywa je jedną wspólną nazwą: *siłami*. Możemy więc podać taką definicję pojęcia siły.

Siłą nazywamy czynnik, udzielający punktowi materialnemu *przyspieszenie*, t.j. zmieniający prędkość punktu materialnego liczebnie i kierunkowo.

Wiemy, że wszystkie ciała, spadające w próżni w pobliżu powierzchni kuli ziemskiej, poruszają się ruchem jednostajnie -zmiennym, siłę, wywołującę przy tym stałe przyspieszenie ciała, nazywamy *siłą ciężkości*, a udzielone przez nią ciału przyspieszenie - *przyspieszeniem ziemskim* lub *przyspieszeniem siły ciężkości*. Przybliżoną wartość tego przyspieszenia stanowi 9,81 mtr/sek^2 ; dla różnych miejsc na kuli ziemskiej błęd przytoczonej liczby nie przewyższa $\frac{1}{600}$ jej rzeczywistej wielkości.

Drugie prawo dynamiki ustala pijęcie o wartości liczebnej i o kierunku siły. To prawo wysłowimy w ten sposób:

Drugie prawo Newtona.

Siła, działająca na punkt materialny, posiada kierunek, zgodny z kierunkiem udzielonego punktowi przez nią przyspieszenia, a wartość liczebna siły jest proporcjonalną do tego przyspieszenia, przyczym współczynnik proporcjonalności dla tego punktu materialnego jest wielkością stałą.

Na podstawie tego prawa możemy napisać następujące równanie :

$$\overline{S} = m\overline{w} \quad \text{........................../1/}$$

przy czym: S, jak zwykle oznacza siłę, działającą na punkt materialny, w - udzielone przez nią punktowi przyspieszenie, a m- stały dla danego punktu, współczynnik proporcjonalności. Kreski nad literami S i w we wzorze /1/ wskazują, że mamy do czynienia z wektorami. Stosując równanie /1/ do siły ciężkości, i oznaczając ją przez G, a przyspieszenie ziemskie przez g, bądziemy mieli:

$$\overline{G} = m\overline{g} \quad \text{........................../2/}$$

Określenie. *Współczynnik proporcjonalności pomiędzy siłą, a udzielonym przez nią punktowi przyspieszeniem, nazywamy masą punktu materialnego.*

Aby lepiej wyjaśnić charakter tej nowej wielkości, rozpatrzymy następujące dwa zadania:

1/ na dwa punkty materialne działają siły, udzielające im jednakowe przyspieszenie; jaki jest stosunek przyłożonych sił ?

Oznaczając siły przez S_1 i S_2, przyspieszenie przez w, masy punktów przez m_1 i m_2, według wzoru /1/ otrzymamy : $S_1 = m_1 w$ i $S_2 = m_2 w$; skąd dzieląc je, znajdziemy, że :

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m_1}{m_2} \quad \text{..............................} /3/$$

t.j.: siły, udzielające dwom punktom materialnym jednakowe przyspieszenia, są proporcjonalne do mas tych punktów.

2/ Na dwa punkty materialne działają jednakowe siły; jaki jest stosunek przyspieszeń, udzielonych przez te siły tym punktom? Oznaczając siłę, przyspieszenia i masy punktów odpowiednio przez S, w_1, w_2, m_1, i m_2, będziemy mieli według /1/;

$$S = m_1 \cdot w_1 = m_2 \cdot w_2 \ ;$$

skąd : $$\frac{m_1 w_1}{m_2 w_2} = 1, \qquad \text{czyli: } \frac{w_1}{w_2} = \frac{w_2}{m_1}; \quad \text{.....................} /4/$$

t.j. przyspieszenia udzielone dwom punktom materialnym przez jedną i tę samą siłę, są odwrotnie proporcjonalne do mas tych punktów.

Wzory /3/ i /4/ mówią nam, że masa punktu jest wielkością charakteryzującą bezwładność punktu materialnego.

Trzecie prawo dynamiki dotyczy działania na punkt materialny kilku sił jednocześnie, mianowicie mówi ono:

" Jednoczesne działanie na punkt materialny kilku sił wywołuje przyspieszenie punktu, równe sumie geometrycznej przyspieszeń, które punkt otrzymałby, gdyby każda z sił działała nań w osobności."

Prawo to często nazywamy prawem niezależności działania sił. Z tego prawa wynika następujący ważny wniosek :

przyspieszenie punktu materialnego, wywołane przez działanie nań kilku sił, geometrycznie równe jest przyspieszeniu, udzielonemu temu punktowi przez wypadkową danych sił.

Rzeczywiście, przypuśćmy, że na punkt materialny o masie m działają siły S_1, S_2, S_3......S_n i niech przyspieszenia, udzielone temu punktowi przez każdą z tych sił w osobności, są : w_1, w_2, w_3...w_n a przyspieszenie udzielone wszystkiemi siłami jednocześnie, jest w. Wtedy na podstawie trzeciego prawa Newtona, będziemy mieli:

$$\overline{w} = \overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \overline{w}_3 + \dots\dots + \overline{w}_n$$

mnożąc obie strony tego równania przez masę m, znajdziemy, że :

$$m.\overline{w} = m.\overline{w}_1 + m.\overline{w}_2 + m.\overline{w}_3 + \dots + m.\overline{w}_n \; ; \dots\dots\dots\dots /5/$$

ale według wzoru /1/ mamy, że :

$$\overline{S}_1 = m.\overline{w}_1 , \; \overline{S}_2 = m.\overline{w}_2 , \dots\dots\dots \overline{S}_n = m.\overline{w}_n \; ;$$

więc wzór /5/ możemy przepisać tak :

$$m.\overline{w} = \overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \overline{S}_3 + \dots\dots\dots + \overline{S}_n \dots\dots\dots\dots /6/$$

Oznaczymy przez $\overline{W}$ wypadkową danych sił $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\overline{S}_3$,.....$\overline{S}_n$. otrzymaną według praw statyki, a przez $\mathfrak{w}$ - przyspieszenie, jakie ta wypadkowa udzieliłaby punktowi o masie m, wtedy według wzoru /1/ otrzymamy, że :

$$\overline{W} = m.\,\mathfrak{w} \dots\dots\dots\dots\dots\dots /7/$$

Ale ze statyki wiemy, że :

$$\overline{W} = \overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \overline{S}_3 + \dots\dots \overline{S}_n \dots\dots\dots\dots\dots\dots /8/$$

więc porównując wzory /6/, /7/ i /8/, znajdziemy :

$$\overline{w} = \mathfrak{w} \; ; \qquad \text{c.b.d.o.}$$

Czwarte prawo dynamiki jest jednocześnie szóstem prawem statyki /patrz statykę, rozdział I/; jest to mianowicie:

Trzecie prawo Newtona: "Każdemu działaniu odpowiada równe co do wartości, lecz odwrotnie skierowane przeciwdziałanie."

Z równania /1/ wynika, że :

$$m = \frac{S}{w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /9/$$

Zakładając we wzorze /9/ S = 1 i w = 1 znajdziemy, że i m = 1, t.j. : jednostka masy jest masą takiego punktu materialnego, któremu jednostka siły udziela jednostkę przyspieszenia. Z powyższego widzimy, że jednostka masy jest jednostką złożoną z jednostek siły i przyspieszenia ; ale z kinematyki wiemy, że jednostka przyspieszenia też jest jednostką, złożoną z jednostek długości i czasu, zatem jednostka masy jest jednostką złożoną z jednostek długości, czasu i siły. Widzimy więc, że wybór podstawowych jednostek długości, czasu i siły w zupełności określa jednostkę masy. Biorąc np. jako podstawowe jednostki: długości-centymetr, czasu - sekundę i siły - gram-wagę, otrzymamy, że : jednostka masy jest masą takiego punktu materialnego, któremu siła gram udziela przyspieszenia-centymetr/ /sekunda /².

Możemy postąpić inaczej, mianowicie: zakładając we wzorze /9/ m = 1 i w = 1, otrzymamy, S = 1, t.j. jednostka siły jest taką siłą, która jednostce masy udziela przyspieszenie równe jedności. Przy takim wyborze jednostek, jednostkami podstawowymi są, jednostki długości, czasu i masy; wtedy jednostka siły jest jednostką złożoną. Biorąc np. jako podstawowe jednostki: długościócentymetr, czasu - sekundę i masy - gram-masę t.j. masę jednego centymetra sześciennego wody przy pewnych warunkach fizycznych otrzymamy, że jednostka siły jest taką siłą, która masie równej gr. udziela przyspieszenie równe centymetr/ /sekunda /², taką siłę nazywamy dyną.

Mamy więc dwa układy podstawowych jednostek, przy czym pierwszy stosuje się najczęściej do badań technicznych, a drugi naukowych. Drugi układ zazwyczaj nazywamy układem " C - G - S ".

Jednostka długości tego układu - centymetr jest równą 0,01.długości platynowej linijki, znajdującej się w Paryżu i nazywającej się metrem - " metre prototype etalon";,

jednostka masy jest 0,001 częścią masy odważnika, znajdującego się w Paryżu i noszącego miano " kilograme prototype etalon ". Masa ta jest równą masie 1000 sześciennych centymetrów wody pod ciśnieniem 760 mm. słupa rtęci przy temperaturze 4°C.

Jednostką czasu jest 1 sekunda czasu średniego.

Ustalimy zależność pomiędzy jednostkami masy i siły tych dwóch układów jednostek podstawowych. W tym celu skorzystamy ze wzoru /2/; gdy jednostkami długości i czasu są centymetr i sekunda, wtedy :

$$g \cong 981 \frac{cm}{sek^2} .$$

Stosując to równanie do drugiego układu, założymy w nim m = 1, wtedy otrzymamy;

$$G \cong 981 \text{ dyn};$$

innymi słowy - masa jednego gramu waży w przybliżeniu 981 dyn.x/

Ale według pierwszego układu, masa jednego grama waży jeden gram-wagę; zatem mamy następujące zależności pomiędzy jednostkami siły pierwszego i drugiego /G.G.S/ układów 1 gram -waga /-siła / = 981 dyn. czyli odwrotnie

- 1 dyna $= \frac{1}{981}$ gram- wagi /-sił/. Przepisując równanie /2/ w postaci;

$$m = \frac{G}{g} ;$$

zastosujemy go do pierwszego układu jednostek, zakładając w nim G = 1 ;, wtedy $m = \frac{1}{981}$ jednostek masy pierwszego układu; ale ponieważ w układzie G.G.S/ /drugim/, gram-waga posiada masę równą jednemu gram-masie, więc 1 gram-masa = $\frac{1}{981}$ jednostek masy pierwszego układu, czyli odwrotnie 1 jedn. masy pierwszego układu = 981 gram-mas.

Oprócz jednostek gram-masa i gr.-waga /-siłą/, są używane i inne jednostki, np. kilogram-masa i kilogram-waga i t.p. przy czym zachodzą zależności, np. 1 kg.-waga = 1000 gr.-wag. = 981.000 dyn. i 1 kg.-masa = 1000 gr. -mas $= \frac{1000}{981}$ = 1,019 jednostek masy pierwszego układu, t.j. jednostka masy pierwszego układu jest nieco mniejszą od jednego kilograma-masy.

Zasady dynamiki, czyli prawa Newtona sprowadzają rozwiązanie zagadnień o ruchu punktu materialnego pod działaniem zadanych sił do zadania matematycznego.

Rzeczywiście, przypuśćmy, że na punkt materialny o danej masie m działa siła S, też zadana z góry; prócz tego znamy położenie i prędkość punktu ruchomego w pewnym momencie czasu $t = t_o$. musimy według tych danych wyznaczyć ruch punktu materialnego.

---

x/ więcej dokładna wartość g przedstawi się wzorem : g=9.80,6056 -2,5028, cos φ - 0,000003.h; przy czym φ jest szerckością geograficzną, a h jest wysokością miejsca obserwacji nad poziomem morza.

Siła S, działająca na punkt ruchomy, w ogólności zależy od położenia punktu, który określamy za pomocą jego współrzędnych, prędkości punktu i czasu t. Ponieważ muszą być zadane tak wartość liczebna jak i kierunek siły S, to wszystkie trzy rzuty tej siły na obrane osie współrzędnych, muszą być znanymi nam funkcjami wyżej wymienionych zmiennych x, y, z, x', y', z', i t. Oznaczając przez X, Y, i Z rzuty siły S na osie współrzędnych a przez α, β, i γ kąty, utworzone przez prostą działania siły S z temiż osiami współrzędnych, będziemy mieli zależności;

$$X = S.\cos\alpha = f_1/x,y,z,x',y',z',t/;$$

$$Y = S.\cos\beta = f_2/x,y,z,x',y',z',t/;\ldots\ldots\ldots\ldots/10/$$

$$Z = S.\cos.\gamma = f_3/x,y,z,x',y',z',t/;$$

według drugiego prawa Newtona - w każdym momencie czasu t zachodzi zależność;

$$S = m.w. -$$

Mnożąc obie strony tego równania kolejno przez $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ i oraz wiedząc z kinematyki, że :

$$w.\cos\alpha = x'' = \frac{d^2x}{dt^2};$$

$$w.\cos\beta = y'' = \frac{d^2y}{dt^2};$$

$$w.\cos\gamma = z'' = \frac{d^2z}{dt^2};$$

Na zasadzie wzoru /10/ otrzymamy następujące trzy równania różniczkowe;

$$mx'' = X = f_1/x,y,z,x',y',z',t/;$$

$$my'' = Y = f_2/x,y,z,x',y',z',t/;\ldots\ldots\ldots\ldots/11/$$

$$mz'' = Z = f_3/x,y,z,x',y',z',t/;$$

Otrzymane równania /11/ n a z y w a m y r ó w n a n i a m i r ó ż n i c z k o w y m i r u c h u p u n k t u m a t e r i a l n e g o M/x,y,z,/.

Zatem określenie ruchu punktu M, sprowadziło się do wyznaczenia takiego układu rozwiązań równań /11/, który by uczynił zadość warunkom początkowym, to znaczy że funkcje litery t, za pomocą których wyrażają się niewiadome x, y i z, były takie, iż czyniąc zadość równaniom /11/, te funkcje wraz ze swemi pierwszemi pochodnemi x', y', i z', jednocześnie przy $t = t_0$ przybierały zadane z góry wartości.

Jest rzeczą wiadomą, że ogólne rozwiązanie układu równań /11/ zawiera sześć stałych dowolnych; oznaczając je przez C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, i C_6, będziemy mieli następujące ogólne wyrażenia dla x, y i z:

$$x = F_1 /t, C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_6 /;$$

$$y = F_2 /t, C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_6/, \ldots\ldots\ldots /12/$$

$$z = F_3 /t, C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_6/;$$

Stałe dowolne $C_1, \ldots\ldots C_6$ określamy według " warunków początkowych ", polegających na tym, że wiemy z góry położenie i prędkość punktu ruchomego M w określonym momencie czasu $t = t_o$.-

Ponieważ położenie punktu określamy za pomocą trzech jego współrzędnych, a prędkość punktu = za pomocą trzech jej rzutów na osie współrzędnych, to oznaczając te współrzędne przez x_o, y_o, i z_o, a owe rzuty odpowiedni przez a, b i c otrzymamy zależności:

$$x_o = F_1 / t_o, C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots C_6/;$$

$$y_o = F_2 /t_o, C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots C_6/;$$

$$z_o = F_3 /t_o, C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots C_6/;$$

$$a = F_1' /t_o, C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots C_6/;$$

$$b = F_2' /t_o, C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots C_6/;$$

$$c = F_3' /t_o, C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots C_6/;$$

R o z d z i a ł II.

P r o s t o l i n i o w y r u c h p u n k t u m a t e r i a l n e g o .

Z łatwością domyślamy się, że ruch punktu swobodnego będzie prostoliniowym wtedy, gdy na ten punkt działa siła o kierunku stałym, a prędkość początkowa punktu posiada kierunek zgodny z kierunkiem siły. Rzeczywiście, wtedy przyspieszenie punktu będzie zgodnem z kierunkiem prędkości, zatem prędkość punktu materialnego może zmieniać się tylko co do wielkości liczebnej, kierunek prędkości pozostaje niezmiennym i dlatego tor punktu będzie linią prostą.

Łatwo przekonamy się o słuszności tego analitycznie. Przyjmijmy za oś OX prostą, po której porusza się punkt / rys.1/, wtedy równania ruchu punktu będą :

$$x = f/t/, \quad y = a, \quad z = b$$

Rys.1.

przyczym a i b są stałe. Z nich otrzymujemy :

$$x' = f'/t/, \quad z' = y' = 0 \; ..../1/$$

$$x^2 = f''/t/, \quad y'' = z'' = 0$$

Stąd wynika, że

$$mx^2 = X = mf''/t/, my'' = Y = 0, \quad mz'' = Z = 0;$$

t.j. rzuty na osie OY i OZ siły, działającej na punkt, są równe zeru, zatem siła jest stale równoległą do osi OX.

Zakładając w równania /1/ $t = t_0$ widzimy, że rzuty prędkości początkowej na osie OY i OZ są równe zeru, więc początkowa prędkość jest równoległą do osi OX, czyli do kierunku siły.

Obierając kierunek siły działającej na punkt za oś OX, będziemy określać położenie punktu na jego torze za pomocą jednej współrzędnej x. Zamiast trzech równań ruchu mamy więc tylko jedno :

$$mx'' = X. ..../2/$$

przy czym X jest sumą rzutów na oś OX wszystkich sił działających na punkt ruchomy. Ponieważ cosinus kąta pomiędzy kierunkiem siły składowej, a osią OX jest + 1 lub -1 w zależności od tego, czy owa siła jest skierowaną w stronę dodatnią, czy ujemną osi OX, więc X jest sumą algebraiczną.

Wśród sił, działających na punkt materialny mogą być następujące trzy rodzaje sił:

1/ Siły, zależne od położenia punktu ruchomego, t.j. od współrzędnej x, będącej odległością danego punktu od obranego początku współrzędnych. Siły te są t.zw. "siły pola", są to np. siły przyciągania, ciężkości siły elektryczne lub magnetyczne, siły sprężystości i.t.p.

2/ Siły zależne od prędkości punktu ruchomego. Zazwyczaj te siły powstają, jako opór ośrodka, w którym punkt porusza się.

3/ Siły zależne od czasu t. Te siły zwykle powstają, jako rezultat oddziaływania jakichbądź innych punktów, ruch których jest zadany.

Dlatego też w najogólniejszym wypadku X będzie zadaną funkcją wielkości, x, x' i t; równanie różniczkowe ruchu będzie w postaci :

$$mx'' = f/\,x, x', t\,/ \qquad \ldots\ldots /3/$$

Całkowanie tego równania w wypadku ogólnym jest niemożliwe. Rozpatrzymy więc te szczególne wypadki, kiedy całkowanie daje się sprowadzić do kwadratur. Mianowicie następujące wypadki.

1/ Funkcja f zależy tylko od jednej zmiennej t.

2/ Funkcja f zależy tylko od współrzędnej x i

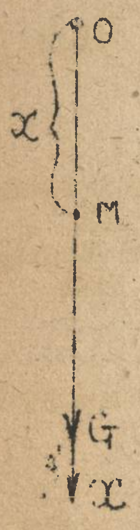
3/ Funkcja f zależy tylko od prędkosci punktu x'.

Rozpoczniemy od najprostszych wypadków.

Ruch bryły materialnej spadającej lub rzuconej pionowo do góry. Zbadamy z początku ruch w próżni, t.j. w ośrodku nie wytwarzającym żadnego oporu.

1/ Spadanie bryły materialnej bez prędkości początkowej.

Skierujemy oś OX pionowo ku dołowi /rys.2/. początek współrzędnych obierzemy w tym punkcie O, z którego bryła rozpoczęła spadać,



czas t będziemy liczyć począwszy od momentu rozpoczęcia spadania.

Jeżeli waga bryły jest G, wtedy jej masa będzie $m = \frac{G}{g}$, przy czym g jest przyspieszenie ziemskie = 9,81 mtr/sek^2.

Równanie ruchu bryły, ściślej mówiąc jej środka ciężkości, jest następujące:

$$\frac{G}{g}\,x'' = G\ ;$$

czyli ;
$$x'' = g \qquad \ldots\ldots /4/$$

Rys.2.

Warunki początkowe są : kiedy $t = 0$, wtedy musi być $x = x' = 0$, ponieważ bryła spada z punktu O bez prędkości początkowej.

Całkując równanie /4/ znajdziemy ;

$$x' = gt + C_1 \text{ i } x = \frac{1}{2}\,gt^2 + C_1 t + C_2.$$

Na zasadzie warunków początkowych, otrzymamy, że :

$$C_1 = C_2 = 0;$$

zatem ostatecznie mamy :

$$x' = gt \quad i \; x = \frac{1}{2} gt^2 \; ; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /5/$$

więc otrzymaliśmy znane prawa Galileusza. Robiąc we wzorach /5/ $x = h$, $x' = v$, przy czym h jest wysokością spadku, a v odpowiednia tej wysokości prędkość i oznaczając przez t czas spadku, otrzymamy wzory :

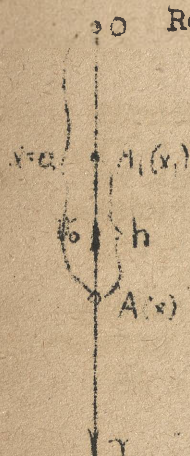
$$h = \frac{1}{2} gt^2, \quad v = gt = \sqrt{2gh}, \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \ldots\ldots\ldots /6/$$

Jako zastosowanie tych wzorów rozpatrzymy sposób mierzenia z dużą dokładnością małych okresów czasu. W artylerji dla określenia czasu lotu pocisków używa się c h r o n o g r a f L e B o u l a n g e r, którego urządzenie polega na tym, że poruszający się pocisk spotyka dwie ramy z rozpiętymi na nich przewodnikami elektrycznymi, które on przerywa. Odległość pomiędzy ramami wynosi 100 metrów. Gdy pocisk przerywa przewodnik pierwszej ramy, wtedy przerywa się prąd w elektromagniesie utrzymującym w położeniu pionowym długi / do 50 cm/ drąg żelazny, który zaczyna spadać. Gdy pocisk przerywa przewodnik drugiej ramy, wtedy inny elektromagnes oswabadza nóż, który robi na spadającym drągu kreskę, określającą wysokość spadku drąga. Według tej wysokości określimy czas lotu pocisku pomiędzy ramami a więc i prędkość pocisku. Jeżeli wysokość spadku drąga jest np. 163,5mm., wtedy wzory /6/ dają:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}1635}{9.81}} = 0{,}1826 \text{ sek.}, \quad v = \frac{100}{t} = \frac{100\sqrt{9.81}}{\sqrt{2 \cdot 0{,}16}} = 548 \text{ m/sek.}$$

3. R u c h b r y ł y m a t e r i a l n e j, r z u c o n e j p i o n o w o d o g ó r y.

Przypuśćmy, że bryła znajduje się w punkcie A /$x = a$/ i jest rzuconą pionowo do góry z początkową prędkością v_0 /rys.3./ Określimy ruch tej bryły.



Rys.3.

Równanie ruchu jest jak w przykładzie poprzednim: $x'' = g$, warunki początkowe: kiedy $t = 0$, wtedy musi być $x = a$, $x' = v_0$ ponieważ prędkość v_0 jest skierowaną do góry, a dodatnia oś ku dołowi.

Po całkowaniu znajdziemy :

$$x' = gt + C_1, \quad x = \frac{1}{2} gt^2 + C_1 t + C_2.$$

Warunki początkowe dają nam :

$$v_0 = C_1, \quad a = C_2 \quad \text{zatem}$$

$$x' = gt - v_0, \quad x = a - v_0 t + \frac{1}{2} gt^2 \ldots\ldots\ldots /7/$$

Widzimy, że bryła porusza się do góry dopóki rzut prędkości x' jest ujemny, t.j.

$t \ \frac{v_o}{g}$, gdy: $t = \frac{v_o}{g}$, wtedy prędkość jest zerem i bryła dosięgła najwyższego punktu, współrzędna którego jest

$$x_1 = a - \frac{1}{2}\cdot\frac{v_o^2}{g}.$$

Zatem wysokość h, na którą podniosła się bryła ponad punktem A jest:

$$h = \frac{1}{2}\cdot\frac{v_o^2}{g}.$$

Gdy $t > \frac{v_o}{g}$, to rzut prędkości x' jest wielkością dodatnią i więc bryła spada ku dołowi; w momencie $t_1 = \frac{2v_o}{g}$, x=a, t.j. w tym momencie bryła przechodzi przez punkt A i posiada przy tym prędkość $x' = v_o$. Widzimy, że czas podnoszenia się i spadania bryły jest jednakowy.

3. Ruch bryły materialnej w ośrodku wytwarzającym opór proporcjonalny do pierwszej potęgi prędkości.

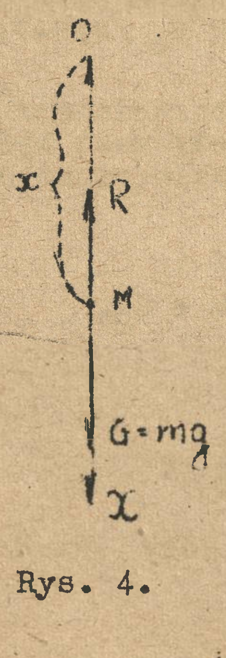
Oznaczając opór ośrodka np., powietrza przez R, będziemy mieć :

$$R = k.x'$$

przy czym k jest stały współczynnik proporcjonalności.

Niech w danym momencie czasu t bryła znajduje się w punkcie M/x/ / rys.4/ i porusza się ku dołowi z prędkością x' pod działaniem siły G, skierowanej wzdłuż osi OX ku dołowi i siły R, skierowanej do góry. Ponieważ rzuty tych sił na oś OX są + G i - R=kx', więc równanie ruchu będzie:

$$\frac{G}{g}x'' = G - kx' \qquad \text{/8/}$$



Rys. 4.

Jeżeliby w rozpatrywanym momencie czasu t bryła poruszała się do góry, wtedy siła R musi być skierowaną ku dołowi, t.j. jej rzut byłby wielkością dodatnią, a rzut prędkości x' byłby ujemny i dlatego mielibyśmy, że $R = -kx'$; równanie ruchu pozostałoby bez zmiany, więc wzór /8/ jest prawomocnym dla ruchu tak ku dołowi, jak i do góry.

Warunki początkowe są :

1/ Gdy bryła swobodnie spada z punktu O bez początkowej prędkości, wtedy

przy $t = 0$, musi być $x = x' = 0$............................/9/

2/ gdy bryła w momencie $t = 0$ została rzuconą pionowo do góry z początkową prędkością v_o z punktu A / $x=a$/, wtedy

przy $t = 0$, musi być $x = a$, $x' = -v_o$ ..../10/

W wypadku pierwszym zakładając $\frac{gk}{G} = \alpha$. przepiszemy równanie /8/ tak:

$$x'' = g - \alpha x' \qquad \text{............................/11/}$$

Całkując te równanie bezpośrednio, znajdziemy, że:

$$x' = gt - \alpha x + C_1 \qquad \text{........................./12/}$$

a na zasadzie /9/ mamy $C_1 = 0$, zatem

$$x' = gt - \alpha x \quad \text{lub} \quad x' + \alpha x = gt.$$

Otrzymaliśmy liniowe równanie różniczkowe, jego całka ogólna jest:

$$x = C_2 e^{-\alpha t} + \frac{g}{\alpha} \cdot t - \frac{g}{\alpha^2}.$$

Stałą dowolną C_2 określimy z warunku, że przy $t = 0$, $x = 0$:

$C_2 = \frac{g}{\alpha^2}$; więc

$$x = \frac{g}{\alpha^2} e^{-\alpha t} + \frac{g}{\alpha} t - \frac{g}{\alpha^2} \qquad \text{................./13/}$$

Gdy wartość t i α są nieznaczne, wtedy $e^{-\alpha t}$ możemy rozłożyć na szereg według potęg t, ograniczając się do kilku pierwszych wyrazów tego szeregu, wtedy wzór /13/ przepisze się tak:

$$x = \frac{g}{\alpha^2} / 1 - \frac{\alpha t}{1} + \frac{\alpha^2 t^2}{1.2} - \frac{\alpha^3 t^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^4 t^4}{1.2.3.4} / + \frac{g}{\alpha} t - \frac{g}{\alpha^2};$$

a po uproszczeniu :

$$x = \frac{1}{2} gt^2 / 1 - \frac{\alpha t}{3} + \frac{\alpha^2 t^2}{12} \qquad \text{........../................../14/}$$

Gdy $\alpha = 0$, wtedy otrzymujemy wypadek ruchu w próżni jak poprzednio

$$x = \frac{1}{2} gt^2,$$

Wzór /14/ wyjaśnia charakter hamowania ruchu bryły przez opór ośrodka .

W wypadku drugim stałą dowolną C_1 określamy z równania ;

$$\alpha a - v_o = C_1;$$

$$\text{więc}\quad x' = gt - \alpha x - v_o + \alpha .a;$$

$$\text{czyli}\quad x' + \alpha x = gt - v_o + \alpha .a.$$

Mamy znowu liniowe równanie pierwszego rzędu o stałym współczynniku przy x ; Jego całka ogólna jest ;

$$x = C_2e^{-\alpha t} + \frac{g}{\alpha}t - \frac{v_o}{\alpha} - \frac{g}{\alpha^2} + a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /15/$$

przy czym C_2 określamy z warunku, że

przy t = 0 musi być x = a ; t.j.;

$$a = C_2 - \frac{v_o}{\alpha} - \frac{g}{\alpha^2} + a$$

$$\text{czyli:}\quad C_2 = \frac{v_o}{\alpha} + \frac{g}{\alpha^2} ;$$

zatem ostatecznie mamy, iż ;

$$x = /\frac{v_o}{\alpha} + \frac{g}{\alpha^2}/e^{-\alpha t} + \frac{g}{\alpha}.t - \frac{v_o}{\alpha} + \frac{g}{\alpha^2} + a \ldots\ldots /16/$$

4. Ruch bryły materialnej w ośrodku wytwarzającym opór proporcjonalny do drugiej potęgi prędkości.

Doświadczenie wskazuje, że opór ośrodka, np. powietrza, jest proporcjonalny nie do pierwszej, lecz do drugiej potęgi prędkości, dopóki ta prędkość nie przekracza 330 m. na sekundę, t.j. jest mniejszą od prędkości dźwięku w powietrzu.

Dlatego zbadamy pionowy ruch bryły materialnej w ośrodku wytwarzającym opór proporcjonalny do drugiej potęgi prędkości. Opór ten wyrazi się za pomocą wzoru $R = kv^2$; przy czym v jest prędkością bryły.

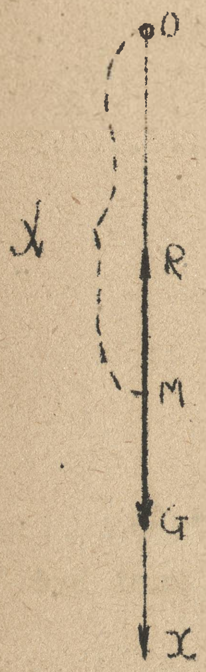
Niech w momencie czasu t bryła znajduje się w punkcie M/x/ /rys.5/ i porusza się ku dołowi, wtedy siła R jest skierowaną do góry,

$$R = kx'^2 ;$$

Ponieważ rzut jej na oś OX jest w i e l k o ś c i ą u j e m n ą, to d l a r u c h u k u d o ł o w i, równanie ruchu będzie :

$$\frac{G}{g} x'' = G - k/x'/^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /17/$$

Przypuśćmy teraz, że bryła porusza się do góry, wtedy siła będzie skierowaną k u d o ł o w i, a jej rzut na oś OX będzie w i e l k o ś c i ą d o d a t n i ą i równanie ruchu będzie:



Rys.5.

$$\frac{G}{g} x'' = G + k/x'/^2; \ldots\ldots\ldots\ldots /18/$$

Więc w orpatrywanym rodzaju ruchu postać równania ruchu zmienia się w zależności od tego w którą stronę odbywa się ruch, czy ku dołowi, czy też do góry. Jest rzeczą zrozumiałą, że ta okoliczność zachodzi zawsze, gdy opór ośrodka jest proporcjonalny do parzystej potęgi prędkości. O tem należy zawsze pamiętać przy układaniu równania ruchu.

Przypuśćmy, że bryła spada swobodnie z punktu O, wtedy równanie ruchu będzie miało postać /17/

Zakładając $\frac{gk}{G} = \alpha^2$, przepiszemy je tak :

$$x'' = g = \alpha^2 x'^2 \ldots\ldots\ldots\ldots /19/$$

warunki początkowe będą ; przy $t = 0$; musi być $x = x' = 0$.

Zamieniając $x' = v$, wtedy $x'' = \frac{dv}{dt}$; i równanie / 19/ przyjmie postać:

$$dv = / g - \alpha^2 v^2 /dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /20/$$

Oddzielając zmienne, otrzymamy :

$$dt = \frac{dv}{g - \alpha^2 v^2};$$

skąd całkując :

$$t + C_1 = \int \frac{dv}{g - \alpha^2 v^2} = \frac{1}{2g} \int \left[\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\sqrt{g}} v} + \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{g}} v} \right] dv = \frac{1}{2\alpha\sqrt{g}} \log \frac{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{g}} v}{1 - \frac{\alpha}{\sqrt{g}} v},$$

Warunki początkowe dają : przy $t = 0$, musi być : $x' = v = 0$, więc : $C_1 = 0$; i zatem :

$$t = \frac{1}{2\alpha\sqrt{g}} \log \frac{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{g}} v}{1 - \frac{\alpha}{\sqrt{g}} v}$$

czyli :

$$\frac{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{g}} v}{1 - \frac{\alpha}{\sqrt{g}} v} = e^{2t\alpha\sqrt{g}}$$

skąd wynika, że :

$$v = \frac{\sqrt{g}}{\alpha} \cdot \frac{e^{2t\alpha\sqrt{g}} - 1}{e^{2t\alpha\sqrt{g}} + 1} = \frac{dx}{dt} \qquad \text{..................../21/}$$

Co możemy napisać tak :

$$dx = \frac{\sqrt{g}}{\alpha} \cdot \frac{e^{t\alpha\sqrt{g}} - e^{-t\alpha\sqrt{g}}}{e^{t\alpha\sqrt{g}} + e^{-t\alpha\sqrt{g}}} \cdot dt$$

całkując znajdziemy :, że :

$$x = \frac{1}{\alpha^2} \log / e^{\alpha t\sqrt{g}} + e^{-\alpha t\sqrt{g}} / + C_2$$

Stałą całkowania C_2 określimy z warunku, że przy $t = 0$; musi być $x = 0$;

$$C_2 = -\frac{\log 2}{\alpha^2};$$

zatem ostatecznie będziemy mieć, że :

$$x = \frac{1}{\alpha^2} \log \frac{e^{\alpha t\sqrt{g}} + e^{-\alpha t\sqrt{g}}}{2} \qquad \text{......../22/}$$

Wzór /21/ pokazuje, że gdy t wzrasta, to prędkość v nie wzrasta nieograniczenie, jak to miało miejsce przy spadaniu w próżni, lecz zdąża do o k r e ś l o n e j granicy, równej $\frac{\sqrt{g}}{\alpha} = \sqrt{\frac{G}{k}}$

Oznaczając tę graniczną prędkość przez V, otrzymamy następującą wartość oporu, odpowiadającą prędkość V:

$$R = kV^2 = G;$$

t.j. odpowiedni opór ośrodka jest równy wadze bryły.

Wzory /21/ i /22/ możemy przepisać w taki sposób :

$$v = V\,\frac{e^{\frac{gt}{V}} - e^{\frac{-gt}{V}}}{e^{\frac{gt}{V}} + e^{\frac{-gt}{V}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /23/$$

$$x = \frac{V^2}{g}\log\frac{e^{\frac{gt}{V}} + e^{\frac{-gt}{V}}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /24/$$

Rozkładając otrzymane wyrażenia na szeregi, według potęg t i ograniczając się do pierwszych wyrazów, w wypadku małych wartości t, otrzymamy :

$$v = gt - \frac{1}{3}\,\frac{g^2t^2}{V^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x = \frac{1}{2}\,gt^2 - \frac{1}{12}\cdot\frac{g^3t^4}{V^2} + \ldots\ldots\ldots$$

Wyobraźmy teraz sobie, że bryła jest rzucona p i o n o w o d o g ó r y. Równanie ruchu będzie miało postać:

$$x'' = g + \alpha^2\,/x'/^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /25/$$

przy czym warunki początkowe są :

przy $t = 0$, musi być : $x = a$, $x' = -v_o$.

Zakładając $x' = v$, podobnie do poprzedniego, z równania /25/ znajdziemy :

$$dt = \frac{dv}{g + \alpha^2v^2},$$

skąd :

$$t + C_1 = \int\frac{dv}{g + \alpha^2v^2} = \frac{1}{g}\int\frac{dv}{1 + \left(\frac{\alpha v}{\sqrt{g}}\right)^2} = \frac{1}{\alpha\sqrt{g}}\,\text{arc tg}\,\frac{\alpha v}{\sqrt{g}};$$

Robiąc $t = 0$ i $v = -v_o$, znajdziemy .

$$C_1 = -\frac{1}{\alpha\sqrt{g}}\,\text{arc tg}\,\frac{\alpha v_o}{\sqrt{g}}$$

i więc : $\alpha\sqrt{g}\cdot t = \text{arc tg}\,\frac{\alpha v}{\sqrt{g}} + \text{arc tg}\,\frac{\alpha v_o}{\sqrt{g}} = \text{arc tg}\,\frac{v}{V} + \text{arc tg}\,\frac{v_o}{V}$;

W.J. Takliński Mechanika teoretyczna . Cz.II.

przy czym $V = \frac{\sqrt{g}}{\alpha}$.

Mamy dalej :

$$\mathrm{tg}\,/\alpha\,t\,\sqrt{g}\,/ = \frac{\frac{v}{V} + \frac{v_o}{V}}{1 - \frac{vv}{V^2}},$$

oznaczając $\alpha\sqrt{g} = \beta$, znajdziemy:

$$v = V.\frac{V.\sin\beta t - v_o.\cos\beta t}{V.\cos\beta t + v_o.\sin\beta t} = \frac{dx}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /26/$$

Całkujemy wtedy :

$$x = V.\int\frac{V.\sin\beta t - v_o\cos\beta t}{V.\cos\beta t + v_o\sin\beta t}\,dt = -\frac{V}{\beta}\log/V.\cos\beta t + v_o.\sin\beta t/+C_2$$

Stałą całkowania C_2 określimy z warunku, że: przy t=0 musi być x=a;

$$a = -\frac{V}{\beta}\log V + C_2,$$

dlatego też biorąc pod uwagę, że $= \frac{g}{V}$, znajdziemy ostatecznie :

$$x = a - \frac{V^2}{g}\log/\cos\frac{gt}{V} + \frac{v_o}{V}\sin\frac{gt}{V}/\ldots\ldots\ldots\ldots /27/$$

Wzory /26/ i /27/ są prawomocnymi dopóty, dopóki x' jest wielkością ujemną t.j. dopóki bryła podnosi się do góry.

Podnoszenie się bryły ustaje, w takim momencie czasu $t = t_1$, przy którym $v = x' = 0$, co nastąpi, gdy

$$V.\sin\beta t_1 - v_o.\cos\beta t_1 = 0,$$

czyli, gdy:

$$\mathrm{tg}\,\beta t_1 = \frac{v_o}{V}.$$

Odpowiednia wartość $x = x_1$ jest:

$$x_1 = a - \frac{V^2}{g}\log\frac{\sqrt{v_o^2 + V^2}}{V}$$

Stąd widzimy, że największa wysokość na którą bryła podnosi się jest równą

$$h = \frac{V^2}{g}\log\frac{\sqrt{v_o^2 + V^2}}{V}$$

W momencie następującym po $t = t_1$ bryła rozpoczyna spadać ku dołowi, przy czym równanie jej ruchu ma znowu postać następującą:

$$x'' = g - \alpha^2 x'^2 \text{..............................} /28/$$

a warunki początkowe są takie :

przy $t = t_1$ musi być $x = a - h$; i $x' = 0$.

Równanie /28/ całkujemy sposobem analogicznym do tego, jaki stosowaliśmy do równania /19/.

Ogólna postać równania różniczkowego prostoliniowego ruchu punktu materialnego jak już wiemy jest następująca:

$$mx'' = X; \text{..............................} /29/$$

Wyżej powiedzieliśmy, że całkowanie tego równania sprowadza się do kwadratury następujących trzech wypadkach szczególnych:

1/ kiedy X jest funkcją tylko czasu t,

2/ kiedy X jest tylko funkcją spółrzędnej punktu x i

3/ kiedy X jest funkcją tylko prędkości punktu $v = x'$.

5. W wypadku pierwszym równanie różniczkowe ruchu punktu materialnego przybiera postać następującą:

$$mx'' = f/t/ \text{..............................} /30/$$

przy czym f jest daną z góry funkcją czasu t.

Dzieląc obie części równania /30/ przez masę m i całkując, znajdziemy

$$x' = C_1 + \frac{1}{m}\int f/t/\ dt;$$

Zakładając, iż $\int f/t/\ dt = \varphi/t/$; przepiszemy poprzedni wzór w taki sposób :

$$x' = C_1 + \frac{1}{m}\varphi/t/ \text{..............................} /31/$$

Całkując po raz drugi, znajdziemy, że

$$x = C_2 + C_1 t + \frac{1}{m}\int \varphi/t/\ dt,$$

a oznaczając: $\int \varphi/t/\ dt = \psi/t/$, otrzymamy, że:

$$x = C_2 + C_1 t + \frac{1}{m}\psi/t/ \text{..............................} /32/$$

Stałe dowolne całkowania C_1 i C_2 określimy na zasadzie warunków granicznych, mianowicie przy $t = t_o$; musi być $x = a$, $x' = c$. Mamy więc :

$$c = C_1 + \frac{1}{m}\varphi\,/t_o/;$$

$$a = C_2 + C_1 t_o + \frac{1}{m}\psi\,/t_o/;$$

skąd wynika, że :

$$x' = c + \frac{1}{m}\left[\varphi/t/ - \varphi/t_o/\right] = c + \frac{1}{m}\int_{t_o}^{t} f/t/dt \quad \ldots/33/$$

i

$$x = a + \left[c - \frac{1}{m}\varphi\,/t_o/\right]/t - t_o/ + \frac{1}{m}\left[\psi/t/ - \psi/t_o/\right] \quad \ldots\ldots/34/$$

Ostatni wzór /34/ możemy napisać w prostszej postaci; w tym celu pomnożymy obie części równania :

$$x' = c + \frac{1}{m}\int_{t_o}^{t} f/t/\,dt$$

przez dt i scałkujemy w granicach od t_o do t, biorąc przy tym pod uwagę, że przy $t = t_o$ x staje się a. Wtedy znajdziemy:

$$x = a + c/t - t_o/ + \frac{1}{m}\int_{t_o}^{t} dt \int_{t_o}^{t} f/t/\,dt;$$

Oznaczając przez i zmienne całkowania, możemy poprzedni wzór napisać tak :

$$x = a + c/t - t_o/ + \frac{1}{m}\int_{t_o}^{t} d\xi \int_{t_o}^{\xi} f/\eta/\,d\eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots/35/$$

Aby podkreślić, że całka określona jest funkcją swej górnej granicy, a nie tej litery, która znajduje się pod znakiem całki i według której wykonywamy całkowanie. Widzimy więc, że całkowanie równania ruchu sprowadza się do wyznaczenia następujących całek określonych:

$$\int_{t_o}^{t} f/\xi/\,d\xi \quad \text{i} \quad \int_{t_o}^{t} d\xi \int_{t_o}^{\xi} f/\eta/\,d\eta$$

Wyznaczenie drugiej całki może być sprowadzone do wyznaczenia całki zwykłej, a nie dwukrotnej. Rzeczywiście oznaczając czasowo

$$\int_{t_o}^{t} f/\eta/\,d\eta = f_1/\xi/$$

t.j., że $f_1'/\xi/ = f/\xi/$ i $f_1/t_o/ = 0$, będziemy mieli:

$$\int_{t_0}^{t} d\xi \int_{t_0}^{\xi} f/\eta/d\eta = \int_{t_0}^{t} f_1/\xi/d\xi = \left[\xi f_1/\xi/ - \right.$$

$$\left. - \int \xi f_1'/\xi/d\xi \right]_{t_0}^{t} = tf_1/t/ - \int_{t_0}^{t} f'/\xi/d\xi$$

zauważywszy, że :

$$f_1/t/ = \int_{t_0}^{t} f/\xi/d\xi$$

i zatem $$tf_1/t/ = \int_{t_0}^{t} tf/\xi/d\xi$$

wtody $$tf_1/t/ - \int_{t_0}^{t} \xi f/\xi/d\xi = \int_{t_0}^{t} /t-\xi/.f/\xi/\,d\xi;$$

wzór /35/ napiszemy wtedy tak :

$$x = a + c/t - t_0/ + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} /t-\xi/.f/\xi/d\xi,$$

i więc zadanie sprowadziło się do wyznaczenia całek :

$$\int_{t_0}^{t} f/\xi/d\xi \quad i \quad \int_{t_0}^{t} \xi f/\xi/d\xi -$$

Przytoczone tu przekształcenie całek określonych jest szczególnie korzystne w tym wypadku, gdy funkcja f/t/ jest zadana nie analitycznie, a graficznie - wtedy powyższe dwie całki określone musimy obliczyć za pomocą jednej ze znanych metod przybliżonego obliczenia całek.

6. W w y p a d k u d r u g i m gdy siła X jest funkcją tylko spółrzędnej x, t j., gdy X = f/x/, przy czym f/x/ jest zadaną z góry funkcją, równanie różniczkowe ruchu punktu materialnego będzie miało postać:

$$mx'' = f/x/ \qquad /36/$$

Aby zcałkować równanie /36/, pomnożymy prawą jego stronę przez dx, a lewą przez x'dt = dx, wtedy znajdziemy :

$$mx''\,x'\,dt = f/x/dx.$$

Biorąc pod uwagę, że : $x''\,dt = dx'$ i $x' = v$, możemy go tak napisać:

$$mvdv = f/x/dx \;;$$

całkując znajdziemy, że:

$$\frac{1}{2}mv^2 + C_1 = \int f/x/dx = \varphi/x/,$$

Stałą całkowania określimy według warunków początkowych, mianowicie: przy $t = t_0$ musi być $x = a$ i $x' = v = c$.

Dlatego też :

$$\frac{1}{2} mc^2 + C_1 / \varphi /a/ ;$$

$$\text{i} \quad \frac{1}{2} m /v^2 - c^2/ = \varphi /x/ - \varphi /a/ = \int_a^x f/\xi/\, d\xi.$$

Ostatecznie mamy wyrażenie dla v^2 :

$$v^2 = c^2 + \frac{2}{m} \int_a^x f/\xi/ d\xi = F/x/.$$

Ale $v = x' = \frac{dx}{dt}$, więc :

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{F/x/}, \quad \text{czyli} \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{F/x/}}$$

Całkując znajdziemy :

$$t + C_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{F/x/}} = \psi /x/ ;$$

Ponieważ przy $t = t_o$ musi być $x = a$, więc

$$t_o + C_2 = \psi /a/ \quad \text{i ostatecznie}$$

$$t - t_o = \psi /x/ - \psi /a/ = \int_a^x \frac{d\xi}{\sqrt{F/\xi/}} \quad \text{..................../37/}$$

7. Punkt materialny o masie m znajduje się pod działaniem siły o wielkości proporcjonalnej do odległości jego od początku osi spółrzędnych i przyciągającej go ku początkowi tychże osi. W momencie początkowym $t = 0$, $x = a$, $X' = 0$. Wyznaczymy ruch punktu.

Oznaczając przez k stały spółczynnik proporcjonalności, otrzymamy następujące wyrażenie dla siły :

$$S = kx ;$$

ponieważ zaś przy dodatnich wartościach x siła S jest skierowaną ku początkowi osi spółrzędnych, to cos /S,X/ = - 1 i dlatego też

$$X = S.\cos/S,X/ = - kx.$$

Równanie ruchu będzie miało postać:

$$mx'' = kx \quad \text{....................................../38/}$$

Oznaczając $\frac{k}{m}$ przez α^2 przepiszemy je następująco :

$$x'' = -\alpha^2 x$$

skąd mamy, że :

$$v\,dv = -\alpha^2 x\,dx$$

Całkując, otrzymamy :

$$v^2 = C_1 - \alpha^2 x^2$$

Ponieważ przy x = a musi być $v = x' = C$,

więc $C_1 = C^2 + \alpha^2 a^2$ i dlatego

$$v^2 = C^2 + \alpha^2 a^2 - \alpha^2 x^2$$

Skąd wynika, że :

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{C^2 + \alpha^2 a^2 - \alpha^2 x^2},$$

czyli: $$dt = \frac{dx}{\pm\sqrt{C^2 + \alpha^2 a^2 - \alpha^2 x^2}} = \frac{dx}{\pm n\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha x}{n}\right)^2}}$$

przy czym n oznacza wyrażenie :

$$n = \pm\sqrt{C^2 + \alpha^2 a^2}.$$

Znak przed pierwiastkiem w drugiej części określimy na zasadzie tego, że przy x = a musi być v = C zatem przed pierwiastkiem musimy wziąć znak "+" i wtedy będziemy mieli:

$$dt = \frac{dx}{n\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha x}{n}\right)^2}}$$

Całkując znajdziemy :

$$t + C_2 = \frac{1}{\alpha} \arcsin \frac{\alpha x}{n},$$

czyli

$$\alpha(t + C_2) = \arcsin \frac{\alpha x}{n} \text{ - zatem :}$$

$$\frac{\alpha x}{n} = \sin \alpha(t + C_2) = \sin \alpha C_2 \cos \alpha t + \cos \alpha C_2 \sin \alpha t \quad \text{...../39/}$$

Ale według warunku początkowego, przy t = 0 musi być x = a, zatem

$$\frac{\alpha a}{n} = \sin C_2$$

Skąd wynika, że :

$$\cos\alpha\, C_2 = \frac{\sqrt{n^2 - \alpha^2 a^2}}{n} = \frac{C}{n},$$

Wstawiając otrzymane wyrażenia do wzoru /39/, znajdziemy

$$x = a\cos\alpha t + \frac{C}{\alpha}\sin\alpha t \qquad /40/$$

Zauważymy, że ten sam rezultat otrzymalibyśmy i inaczej, mianowicie całkując równanie

$$x'' + \alpha^2 x = 0$$

według ogólnego prawidła całkowania liniowych równań różniczkowych o stałych spółczynnikach. Jest rzeczą znaną, że ogólna całka takiego równania jest :

$$x = C_1\cos\alpha t + C_2\sin\alpha t.$$

Warunki początkowe pozwalają określić stałe dowolne C_1 i C_2 za pomocą dwóch równań:

$$a = C_1 \text{ i } C = \alpha C_2,$$

więc ostatecznie mamy, iż

$$x = a\cos\alpha t + \frac{C}{\alpha}\sin\alpha t,$$

t.j. wzór /40/.

8. W wypadku trzecim, gdy siła X wyraża się jako funkcja prędkości x' będziemy mieli:

$$X = f/x'/ = f/v/.$$

Równanie ruchu będzie:

$$mx'' = f/x'/ \qquad /41/$$

a zauważywszy, że: $x'' = \frac{dx'}{dt} = \frac{dv}{dt}$

będziemy mieli je w postaci :

$$m\frac{dv}{f/v/} = dt,$$

skąd całkując znajdziemy :

$$t + C_1 = m\int\frac{dv}{f/v/} = m\varphi/v/ \, ; \qquad /42/$$

Stałą C_1 określą nam warunki graniczne : przy $t = t_0$; musi być $v = C$; wtedy

$$t - t_0 = m\left[\varphi/v/ - \varphi/C/\right] = m\int_C^v \frac{d\xi}{f/\xi/} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /43/$$

Jeżeli po wypełnieniu ostatniej kwadratury, będziemy mogli rozwiązać otrzymane równanie względem v, wtedy otrzymamy:

$$v = F/t/ .$$

Zauważywszy, że $v = x' = \frac{dx}{dt}$, znajdziemy, iż:

$$dx = F/t/ \ dt;$$

Całkujemy, wtedy

$$x + C_2 = \int F/t/ \ dt = \Phi/t/;$$

Na zasadzie warunku porządkowego: przy $t = t_0$ musi być $x = a$, otrzymamy:

$$x = a + \Phi/t/ - \Phi/t_0/; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /44/$$

Jeżeli rozwiązanie równania /43/ względem v okaże się rzeczą niemożliwą, wtedy zwrócimy się do równania :

$$m\frac{dv}{f/v/} = dt.$$

Biorąc pod uwagę, że :

$$v = \frac{dx}{dt}, \text{ tj. } dt = \frac{dx}{v},$$

otrzymamy, iż :

$$dx = \frac{mvdv}{f/v/}$$

Całkując, znajdziemy :

$$x + C_2 = m\int \frac{vdv}{f/v/} = m\psi/v/;$$

Ale, ponieważ przy $v = C$ musi być $x = a$, więc :

$$a + C_2 = m\psi/C/;$$

i dlatego :

$$x = a + m\left[\psi/v/ - \psi/C/\right]; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /45/$$

Rugując z równań /43/ i /45/ literę v, otrzymamy zależność pomiędzy x i czasem t. C.b.d.o.

Rozpatrzone przed chwilą równanie spotkamy, badając ruch pociągu; wtedy siła X jest różnicą pomiędzy siłą ciągnącą, a oporem i przedstawia się jako pewna funkcja prędkości pociągu. Siła ta X jest zwykle zadaną nieanalitycznie, lecz graficznie, wtedy całki :

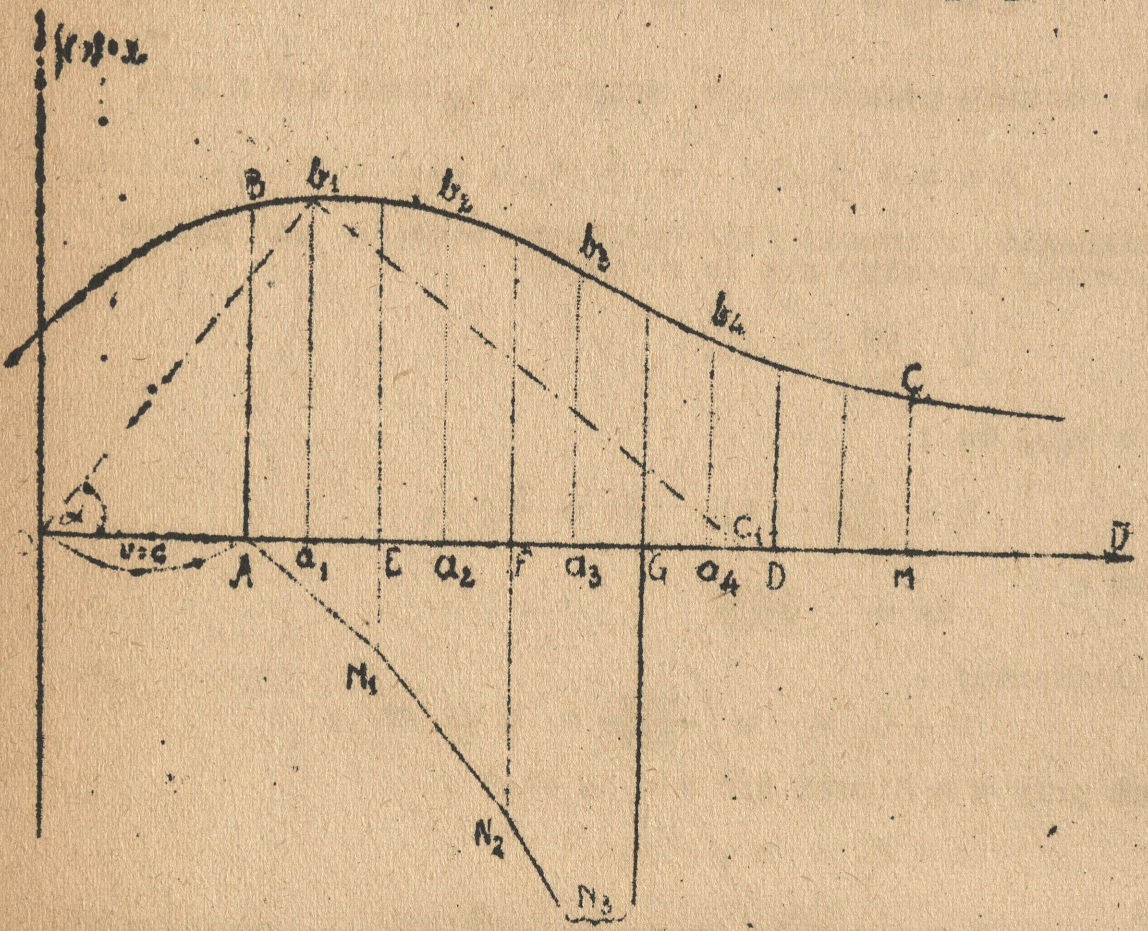
$$\int \frac{dv}{f/v/} \quad i \int \frac{vdv}{f/v/} \; ;$$

musimy wyznaczyć też sposobem graficznym, stosując metodę przybliżonych obliczeń. Zawdzięczając szczególnemu kształtowi podcałkowej funkcji w drugiej całce, możemy scałkować ją w taki sposób/rys.6/;

Niech krzywa linia BC przedstawia wykres funkcji f /v/, długość OA = c; prędkość początkowa według obranej skali rysunku.

Odłożymy na osi odciętych OV równe sobie odcinki : AE = EF = FG = ... = h, przy czym h weźmiemy dostatecznie małym.

Przez punkty A, E, F, G, ... i przez środki a_1, a_2, a_3, a_4.....odcinków AE, EF, FG....przeprowadzimy rzędne krzywej BC. Wtedy, łącząc koniec jakiejbądź rzędnej, np. a_1, b_1, z początkiem



Rys. 6.

spółrzędnych O, otrzymamy promień Ob_1, tworzący kąt α_1 z osią odciętych OV, tangens tego kąta jest

/patrz rys.6.str.26./ $\frac{a_1b_1}{Oa_1}$;

Ale a_1b_1 i Oa_1 przedstawiają odpowiednio $f/v_1/$ i v_1, zatem:

$tg\,\alpha_1 = k\frac{f/v_1/}{v_1}$, przy czym k jest pewien spółczynnik stały, zależny od wyboru skali rysunku. Dlatego też tg kąta, utworzonego prostą b_1c_1, prostopadłą do promienia Ob_1 z osią odciętych. OV jest równy $\frac{v_1}{f/v_1/}$. Zatem, gdy przeprowadzimy przez punkt A do przecięcia się z przedłużoną rzędną punktu E prostą AN_1, równoległą do prostej b_1c_1, to będziemy mieli:

$$EN_1 = h.\ \cot g\,\alpha_1 = hk\frac{v_1}{f/v_1/};$$

Podobnie do poprzedniego, budując promienie Ob_2, Ob_3........i odpowiednie prostopadłe b_2c_2, b_3c_3,.........znajdziemy:

$$FN_2 = EN_1 + hk\frac{v_2}{f/v_2/} = hk\left[\frac{v_1}{f/v_1/} + \frac{v_2}{f/v_2/}\right], \text{ i t.d.}$$

Ostatecznie otrzymamy:

$$MN_i = hk\left[\frac{v_1}{f/v_1/} + \frac{v_2}{f/v_2/} + \dots\dots\dots + \frac{v_i}{f/v_i/}\right];$$

Ponieważ zaś:

$$h\left[\frac{v_1}{f/v_1/} + \frac{v_2}{f/v_2/} + \dots\dots\dots + \frac{v_i}{f/v_i/}\right];$$

jest przybliżoną wartością całki:

$$\int_c^v \frac{vdv}{f/v/}$$

więc zbudowana krzywa linia $AN_1N_2N_3$.....N_i jest przybliżonym wykresem całki obliczanej.

9. Ruch harmoniczny.

Ruchem harmonicznym nazywamy ruch punktu materialnego, znajdującego się pod działaniem siły, przyciągającej go do początku spółrzędnych, proporcjonalnej do odległości tego punktu od początku.

Oprócz tej siły przyciągającej na punkt może działać:

1/ siła oporu ośrodka, którą możemy przypuścić proporcjonalną do pierwszej potęgi prędkości i

2/ siły zewnętrzne, zależne od czasu; te siły nazywamy siłami " w z b u d z a j ą c y m i ".

Ruch punktu materialnego pod działaniem tylko siły przyciągającej do początku spółrzędnych już rozpatrzyliśmy wyżej; mieliśmy wtedy równanie ruchu :

$$mx'' = -kx; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /46/$$

a, zakładając $\frac{k}{m} = {}^{2}$ w takiej postaci :

$$x'' + \alpha^2 x = 0;$$

przy czym jego całka ogólna jest :

$$x = C_1 \cos\alpha t + C_2 \sin\alpha t;$$

a warunki początkowe następujące : przy t = 0, musi być x = a i x'= C;

zatem;

$$C_1 = a; \qquad C_2 = \frac{G}{\alpha};$$

i więc ostatecznie :

$$x = a\cos\alpha t + \frac{C}{\alpha}\sin\alpha t;$$

Założymy, że:

$$a = n\cos\delta, \quad \frac{C}{\alpha} = n\sin\delta; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /47/$$

wtedy znajdziemy, że

$$n = \frac{1}{\alpha}\sqrt{C^2 + a^2\alpha^2} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{C}{a\alpha}.$$

Wzory /47/ określają jednoznacznie δ i dla x będziemy mieli wyrażenie :

$$x = n\cos/\alpha t - \delta/,$$

kładąc $\alpha = \frac{2\pi}{\tau}$, czyli $\tau = \frac{2\pi}{\alpha}$,

otrzymamy ostatecznie :

$$x = n\cos/\frac{2\pi t}{\tau} - \delta/; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /48/$$

Ostatni wzór wskazuje nam, że punkt ruchomy wykonywa ruch wahadłowy, przy czym spółrzędna punktu x zmienia się w granicach od/-n/ do /+n/, a trwanie całego wahnięcia punktu, t.j. czas, w ciągu którego punkt przechodzi ponownie przez to samo położenie, poruszając się w tym samym kierunku, jest τ. Ten czas τ trwania jednego całego wahnięcia punktu nazywamy " o k r e s e m d r g a n i a".

Wielkość wahnięcia w każdą stronę /n/ nazywamy a m p l i t u d ą d r g a ń, czyli w a h a ń, δ j e s t f a z ą p o c z ą t k o w ą.

Widzimy, że ruch harmoniczny posiada własność, iż jego o k r e s τ n i e z a l e ż y o d w a r u n k ó w p o c z ą t k o w y c h r u c h u; a m p l i t u d a i f a z a p o c z ą t k o w a p r z e c i w n i e s ą z a l e ż n e o d t y c h w a r u n k ó w p o c z ą t k o w y c h.

Okres drgań :

$$\tau = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad /49/$$

jest zależny tylko od masy /m/ punktu materialnego i od k, będącego siłą, z jaką punkt ruchomy jest przyciągany do początku spółrzędnych, gdy znajduje się w odległości od niego x = 1.

Przypuśćmy teraz, że punkt ruchomy jest pod działaniem nie tylko siły przyciągającej kx, lecz i oporu ośrodka, proporcjonalnego do pierwszej potęgi prędkości

$$R = \mu x'$$

przy czym μ jest stały spółczynnik proporcjonalności. Wtedy równanie ruchu punktu materialnego będzie miało postać:

$$mx'' = - kx - \mu x'; \qquad /50/$$

a kładąc $\frac{k}{m} = \alpha^2$ i $\frac{\mu}{m} = 2h$,

będziemy mieli :

$$x'' + 2hx' + \alpha^2 x = 0.$$

Otrzymaliśmy liniowe równanie drugiego rzędu o stałych spółczynnikach. Odpowiadające mu c h a r a k t e r y s t y c z n e równanie algebraiczne będzie :

$$y^2 + 2hy + \alpha^2 = 0.$$

Całka ogólna rownania /50/, jak wiemy będzie miała kształt, zależny od rodzaju pierwiastków rownania charakterystycznego. Pierwiastki te mogą być następujących trzech rodzajów:

1/ rzeczywiste sobie nierówne,

2/ rzeczywiste równe i

3/ urojone, zespolone.

Warunki początkowe weźmiemy następujące: przy $t = 0$ musi być: $x = a$, $x' = C$.

10. Drgania zanikające.

Rozpatrzymy z początku wypadek trzeci, jako najczęściej spotykający się w praktyce. W tym wypadku pierwiastki równania charakterystycznego są następujące :

$$y_1 = -h + \sqrt{h^2 - \alpha^2} = -h + i\lambda ,$$

$$y_2 = -h - \sqrt{h^2 - \alpha^2} = -h - i\lambda ;$$

przy czym : $\lambda = \sqrt{\alpha^2 - h^2}$, a $i = \sqrt{-1}$;

Wtedy całka ogólna równania /50/ będzie :

$$x = e^{-ht} /C_1 \cos\lambda t + C_2 \sin\lambda t/; \qquad /51/$$

Aby wyznaczyć stałe dowolne C_1 i C_2, zakładamy $t = 0$ i $x = a$, skąd $C_1 = a$. Następnie różniczkując równanie /51/ i robiąc w nim $t = 0$ i $x' = C$ znajdziemy :

$$C = \lambda C_2 - hC_1 = \lambda C_2 - ah ;$$

tj.

$$C_2 = \frac{C + ah}{\lambda} = b.$$

Więc całka ogólna /51/ przybierze postać taką :

$$x = e^{-ht} /a \cos\lambda t + b \sin\lambda t/;$$

a robiąc jak dawniej

$$a = n \cos\delta \quad i \quad b = n \sin\delta ,$$

tj:

$$n = \sqrt{a^2 + b^2} \quad i \quad tg\,\delta = \frac{b}{a} ;$$

otrzymamy, że :

$$x = ne^{-ht} \cos /\lambda t - \delta/; \qquad /52/$$

W celu zbadania tego wzoru napiszemy wyrażenie dla pochodnej x' i wyznaczymy te wartości dla t, przy których ta pochodna staje się równą zeru : $x' = 0$, w tych momentach czasu t punkt ruchomy dosięga swych położeń skrajnych .

Mamy, że :

$$x' = ne^{-ht}\left[-h\cos/\lambda t-\delta/-\lambda\sin/\lambda t-\delta/\right]$$

Poszukiwane wartości t określimy zatem z równania:

$$h\cos/\lambda t-\delta/+\lambda\sin/\lambda t-\delta/ = 0;$$

Skąd wynika, że :

$$\mathrm{tg}\,/\lambda t-\delta/ = -\frac{h}{\lambda}\;;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots/53/$$

a więc : $\lambda t-\delta/= \sigma + k\pi;$

czyli:

$$t = \frac{\pi}{\lambda}k + \frac{\sigma+\delta}{\lambda},\ i\ k = 0,1,2,3\ldots\ldots n\ldots/54/$$

a σ oznacza najmniejszą wartość argumentu $/\lambda t-\delta/$, czyniącego zadość równania /53/ i dającego dodatnią wartość dla czasu t.

Kładąc, jak dawniej.

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \tau_1,$$

oznaczając: $\frac{\sigma+\delta}{\lambda} = \varepsilon;$

i biorąc pod uwagę, że na mocy równania /53/, otrzymujemy wzór

$$\cos = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+h^2}} = \frac{\sqrt{\alpha^2-h^2}}{\alpha};$$

Widzimy, że pierwsze wahnięcie punktu materialnego posiada amplitudę;

$$x_o = A_o = ne^{-ht_o}\cos\sigma = \frac{n\sqrt{\alpha^2-h^2}}{\alpha}\,e^{-ht_o};$$

Te położenie punkt osiąga w momencie $t = t_o$, który możemy obliczyć ze wzoru /54/, zakładając w nim k = 0 tj.:

$$t_o = \frac{\sigma+\delta}{\lambda} = \frac{\sigma+\delta}{2\pi}\tau_1$$

Następnie punkt ruchomy zdąża do początku spółrzędnych i w momencie czasu $t = t_1$ osiąga skrajne położenie po drugiej stronie od tego początku :

Wartość t_1 obliczymy ze wzoru /54/, kładąc w nim k = 1 mianowicie:

$$t_1 = \frac{\pi}{\lambda} + \frac{\sigma+\delta}{\lambda} = t_0 + \frac{\tau_1}{2};$$

Odpowiedni argument jest : $\lambda t_1 - \delta = \sigma + \pi$

Zatem ; $\cos/\lambda t_1 - \delta/ = \cos/\delta + \pi/ = -\cos\sigma$;

i odpowiednia wartość amplitudy jest :

$$x_1 = -A_1 = -ne^{-h(t_0+\frac{\tau_1}{2})}\cos\sigma = -A_0 e^{\frac{h\tau_1}{2}}$$

Następnie punkt ruchomy porusza się znowu w kierunku wzrastających wartości spółrzędnych x i osiąga swe skrajne położenie w pewnym momencie czasu $t = t_2$, któremu we wzorze /54/ odpowiada wartość $k = 2$, tj.:

$$t_2 = \frac{2\pi}{\lambda} + \frac{\sigma+\delta}{\lambda} = t_0 + \tau_1;$$

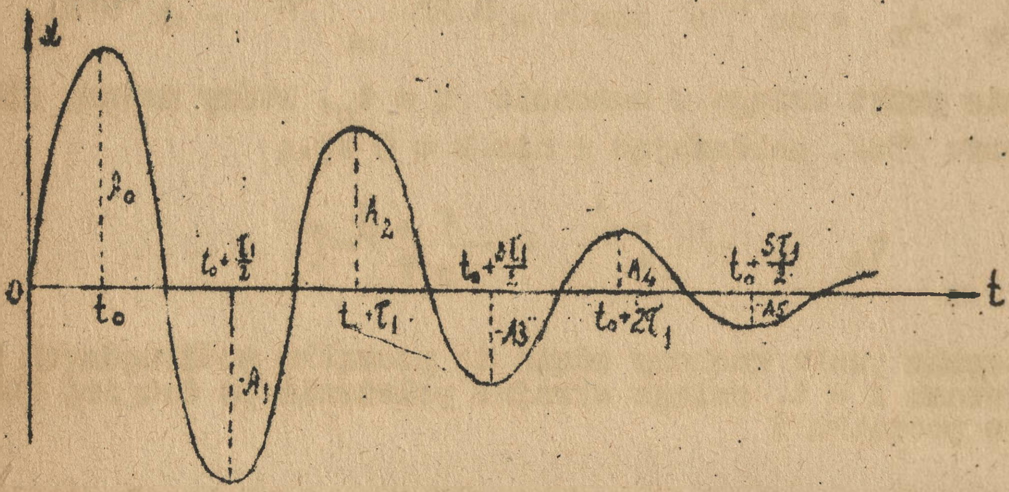
amplituda zaś wynosi :

$$x_2 = A_2 = ne^{-h(t_0+\tau_1)}\cos\sigma = A_0 e^{-h\tau_1} \text{ i t.d.}$$

Widzimy więc, że punkt ruchomy wykonywa szereg wahań, czyli drgań przy czym o k r e s t y c h d r g a ń j e s t s t a ł y i r ó w n a s i ę $\frac{\tau_1}{2}$, a amplitudy kolejnych drgań są następujące :

$$A_0; -A_0 e^{\frac{h\tau_1}{2}}; A_0 e^{-h\tau_1}; -A_0 e^{\frac{3h\tau_1}{2}} \text{ itd.};$$

tj. w i e l k o ś c i a m p l i t u d z m n i e j s z a j ą s i ę w e d ł u g p o s t ę p u g e o m e t r y c z n e g o o i l o r a z i e r ó w n y m $e^{\frac{-h\tau_1}{2}}$.



Rys. 7.

Jeżeli będziemy odkładać wzdłuż osi odciętych czas t, a w kierunku osi rzędnych wielkości x / rys. 7./, to otrzymamy wykres zależności pomiędzy czasem t, a odchyleniem punktu drgającego od początku spółrzędnych ; Widzimy z rysunku /7/, że rozpatrywane drgania są d r g a n i a m i z a n i k a j ą c y m i, ponieważ tych drgań stale, z biegiem czasu, zdąża do zera, jako granicy. Ponieważ okres tych drgań nie ulega zmianie, więc ruch ten nazywamy ruchem i z o c h r o n i c z n y m.

11. D r g a n i a a p e r i o d y c z n e /n i e o k r e s o w e/

W W y p a d k u d r u g i m, gdy pierwiastki równania charakterystycznego:

$$y^2 + 2hy + \alpha^2 = 0 ;$$

są sobie równe, tj. gdy równanie posiada pierwiastek podwójny, musi być:

$$\alpha^2 = h^2;$$

albowiem tylko wtedy:

$$y_1 = y_2 = - h.$$

W tym wypadku całka ogólna będzie miała postać następującą:

$$x = e^{-ht} /C_1 t + C_2/; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /55/$$

przy czym C_1 i C_2 określimy według warunków początkowych; otrzymamy, że:

$$C_2 = a, \quad c = - hC_2 + C_1 ;$$

czyli:

$$C_1 = c + ah = b \quad i \quad C_2 = a.$$

Dlatego też: $x = e^{-ht} / a + bt/.$

Skąd wynika, że :

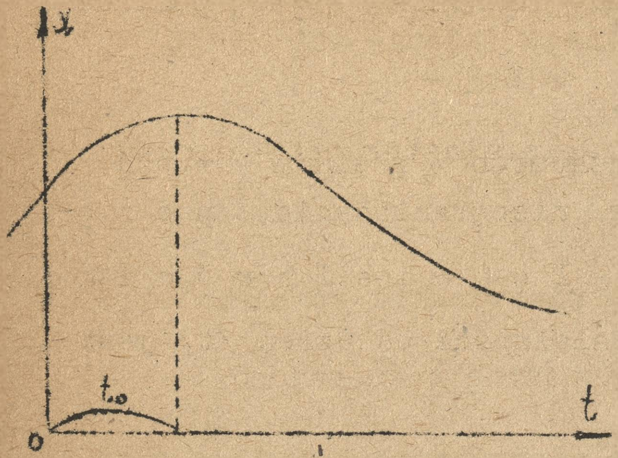
$$x' = e^{-ht} /b - ah - bht/ = e^{-ht}/c - bht/.$$

Gdy wielkości b i C dodatnie, wtedy równanie $x' = 0$ posiada jeden pierwiastek dodatni:

$$t = t_o = \frac{c}{bh} .$$

W momencie $t = t_o$ spółrzędna punktu ruchomego x posiada wartość m a x y m a l n ą, a następnie maleje nieograniczenie, p o z o s t a j ą c j e d n a k z e s t a l e w i e l k o ś c i ą d o d a t n i ą. Wykres zmian /x/ w zależności od czasu /t/ jest przedstawiony na rys. 8.;

W.J.Takliński - Mechanika teoretyczna.



Rys.8.

Z tego rysunku widzimy, że ruch ten n i e j e s t o k r e s o w y m, l e c z a p e r i o d y c z n y m, czyli nieokresowym.

W w y p a d k u t r z e c i m, gdy równanie charakterystyczne posiada pierwiastki rzeczywiste sobie nierówne:

$$y_1 = -h + \sqrt{h^2 - \alpha^2}$$

i

$$y_2 = -h - \sqrt{h^2 - \alpha^2},$$

widzimy, że te pierwiastki są oba ujemne; oznaczając je przez $-p$ i $-q$ napiszemy całkę ogólną w takiej postaci ;

$$x = C_1 e^{-pt} + C_2 e^{-qt} \ldots\ldots\ldots\ldots /56/.$$

Stałe C_1 i C_2 określimy według warunków początkowych, podobnie jak to już kilka razy robiliśmy; zobaczymy wtedy, że i ten ruch podobnie , jak poprzednio, jest n i e o k r e s o w y .

12. D r g a n i a w y m u s z o n e

Z j a w i s k o r e z o n a n s u

Wyobraźmy sobie, że punkt materialny znajduje się pod działaniem nietylko oporu proporcjonalnego do pierwszej potęgi prędkości punktu, lecz jednocześnie i pod działaniem pewnej siły zewnętrznej, będącej funkcją czasu t.

Najczęściej spotkamy w technice ten wypadek, gdy siła S przedstawia się wzorem :

$$S = kq \sin /\mu t + \omega /, \ldots\ldots\ldots\ldots /57/$$

lub jest sumą kilku podobnych wyrazów.

W tym wypadku równanie ruchu przybiera postać następującą;

$$mx'' = -kx - \eta x' + kq\sin/\mu t + \omega/ \ldots\ldots\ldots\ldots /58/$$

Dzieląc postronnie przez masę /m/ i oznaczając, jak poprzednio;

$$\frac{k}{m} = \alpha^2 \quad ; \quad \frac{\eta}{m} = 2h,$$

znajdziemy:

$$x'' + 2hx' + \alpha^2 x = \quad {}^{2} \sin/\mu t \;+\omega/.$$

Równanie charakteryszyczne dla powyższego równania liniowego jest ;

$$y^2 + 2hy + \alpha^2 = 0.$$

Rozpatrzymy tu tylko najważniejszy wypadek, gdy pierwiastki tego równania są urojone - zespolone,albowiem ten wypadek najczęściej spotyka się w praktyce.

Jest rzeczą znaną, że całka ogólna równania /58/składa się z dwóch części,mianowicie,zakładając że:

$$x = x_1 + x_2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /59/$$

będziemy mieli, że x_1 jest całką ogólną odpowiedniego równania bez wyrazu wolnego, tj.

$$x_1'' + 2hx_1' + \alpha^2 x_1 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /60/$$

a x_2 jest dowolną szczególną całką równania danego/58/,tj. spełnia warunek

$$x_2'' + 2hx_2' + \alpha^2 x_2 = q\alpha^2 \sin/\mu t + \omega/; \ldots\ldots\ldots\ldots /61/$$

Wiemy już, że ogólna całka równania /60/jest następująca:

$$x_1 = e^{-ht}/C_1 \cos\lambda t + C_2 \sin\lambda t/ \;;$$

przy czym :

$$\lambda = \sqrt{\alpha^2 - h^2} \,,$$

Szczególną całkę x_2 danego równania będziemy szukać w takiej postaci:

$$x_2 = A \sin/\mu t + \omega/ + B \cos/\mu t + \omega/; \ldots\ldots\ldots /62/$$

przy czym A i B są dowolne spółczynniki stałe: wybierzemy je w taki sposób, aby wyrażenie/62/ czyniło zadość równaniu /61/. Mamy, że :

$$x' = \mu A \cos/\mu t + \omega/ - \mu B \sin/\mu t + \omega/;$$

$$x'' = -\mu^2 \sin/\mu t + \omega/ - \mu^2 B \cos/\mu t + \omega/ \;;$$

wstawiając otrzymane wyrażenia na x' i x'' w równanie /61/, otrzymamy:

$$\left[/\alpha^2-\mu^2/A-2h\mu B\right] \sin/\mu t+\omega/ +\left[/\alpha^2-\mu^2/B+2h\mu A\right] \cos/\mu t+\omega/ =$$
$$= q\alpha^2 \sin/\mu t + \omega/.$$

Aby powyższa równość była tożsamością,tj.aby była prawomocną dla wszelkich wartości t, muszą być spełnione następujące warunki :

$$/\alpha^2-\mu^2/A - 2h\mu B = q\alpha^2 ,$$
i
$$/\alpha^2-\mu^2/B + 2h\mu A = 0.$$

Z nich wynika, że :

$$A = \frac{\alpha^2/\alpha^2-\mu^2/.q}{/\alpha^2-\mu^2/^2+4h^2\mu^2} ; \quad B = \frac{-2h\mu\alpha^2 q.}{/\alpha^2-\mu^2/^2+4h^2\mu^2} \quad \ldots\ldots/63/$$

Założymy :

$$A = K\cos\delta \quad i \quad B = K\sin\delta$$

wtedy:

$$K = \sqrt{A^2+B^2} = \frac{q\alpha^2}{\sqrt{/\alpha^2-\mu^2/^2+4h^2\mu^2}} \quad i \quad tg\delta = \frac{B}{A} ;$$

i dla x_2 będziemy mieli wzór :

$$x_2 = K\sin/\mu t + \omega + \delta/\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots/64/$$

Więc ogólna całka danego równania/58/lub/61/będzie:

$$x = x_1 + x_2 = e^{-ht}\left[C_1\cos\lambda t + C_2\sin\lambda t\right] + K\sin/\mu t+\omega+\delta/.;/65/$$

przy czym stałe dowolne C_1 i C_2 określimy z warunków początkowych ,mianowicie: przy $t = 0$ musi być $x = a$, $x' = C$.

Wyrażenie x_1 ma taką postać, jak w wypadku gdy siła $S = 0$ i punkt ruchomy waha się dookoła swego położenia równowagi $x = 0$, podlegając tylko przyciąganiu do początku spółrzędnych i oporu ośrodka.Podobne drgania nazywamy D r g a n i a m i s w o b o d n y m i .

Wyrażenie x_2 posiada amplitudę proporcjonalną do wielkości q, będącej maxymalną wielkością napięcia siły wzbudzającej $S = kq\sin/\mu t + \omega/$.Oprócz tego x_2 zmienia się w sposób podobny do S,mianowicie, posiada ten sam okres $\frac{2\pi}{\mu}$,lecz tylko nieco inną fazę początkową,różniącą się od fazy siły S o wielkość równą δ. Nadto x_2 staje się zerem, gdy siła S jest stale równą zeru. Drgania wyznaczone wzorem:

$$x = x_2 = K \sin/\mu t + \omega + \delta/$$

nazywamy d r g a n i a m i w y m u s z o n y m i.

Wzór /65/ mówi nam, że w wypadku oporu, zawdzieczając istnieniu czynnika e^{-ht} d r g a n i a s w o b o d n e z a n i k a j ą, i, kiedy ten czynnik stanie się dostatecznie małym, co nastąpi po upływie pewnego czasu, drgania swobodne staną się na tyle nieznacznymi, że w rzeczywistości r u c h p u n k t u m a t e r i a l n e g o b ę d z i e s k ł a d a ć s i ę t y l k o z d r g a ń w y m u s z o n y c h, s p o w o d o w a n y c h s t a ł y m d z i a ł a n i e m s i ł y w z b u d z a j ą c e j S.

Zbadamy wielkość amplitudy K drgań wymuszonych. Gdyby punkt ruchomy znajdował się w położeniu równowagi, to $x'' = x' = 0$; i wtedy / patrz /58/:

czyli :

$$kx = kq \sin/\mu t + \omega/;$$

$$x = q \sin/\mu t + \omega/;$$

innymi słowy, gdyby siła S działała na punkt s t a t y c z n i e, wtedy ta siła odchyliłaby nasz punkt od jego położenia równowagi x = 0 o długość, wynoszącą q podczas maxymalnego napięcia tej siły S.

Gdy zaś siła, wzbudzająca S działa na punkt d y n a m i c z n i e, to odchylenie punktu od położenia x=0 osiąga wielkość:

$$K = \frac{q\alpha^2}{\sqrt{/\alpha^2-\mu^2/^2+4h^2\mu^2}} = q\nu$$

Czynnik ν zależy od ilorazów $\frac{\mu}{\alpha}$ i $\frac{h}{\alpha}$, ponieważ możemy go napisać tak:

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{/1-\frac{\mu^2}{\alpha^2}/^2+4\frac{h^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\mu^2}{\alpha^2}}}$$

Jeżeli wprowadzimy wzamian α i μ odpowiednie okresy τ i T, to:

$$\tau = \frac{2\pi}{\alpha}, \qquad T = \frac{2\pi}{\mu},$$

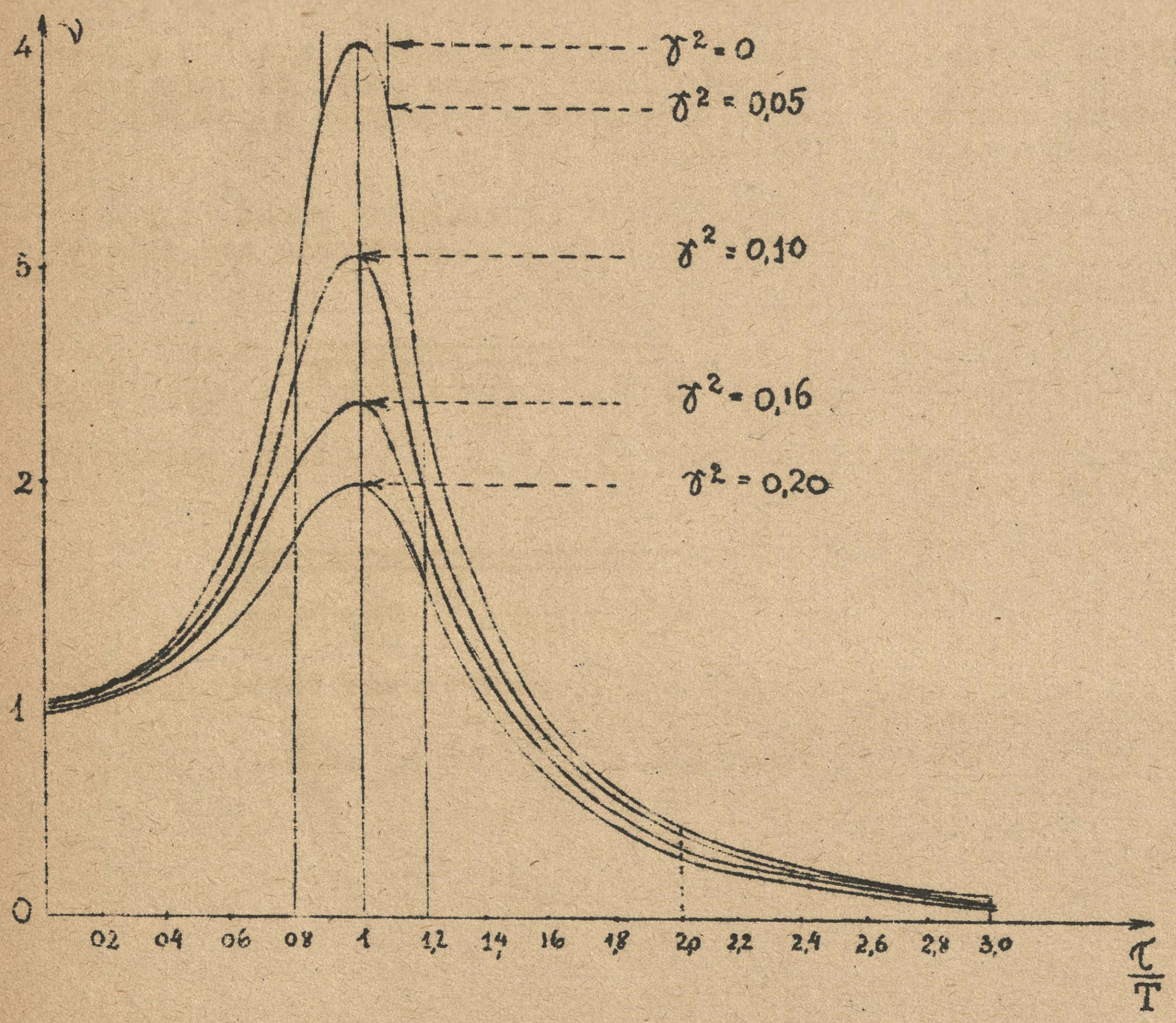
przy czym τ jest okres drgań swobodnych, gdy opór ośrodka nie istnieje, a T jest okres siły wzbudzającej S, wtedy:

$$\frac{h\tau}{2}\,\frac{h}{\alpha} = \frac{h\tau}{2\mu} ;$$

Ale wiemy, że $e^{\frac{h\tau}{2}}$ jest ilorazem postępu geometrycznego, według którego maleje amplituda swobodnych drgań, z powodu istnienia oporu ośrodka, zatem $\frac{h}{\alpha}$ wyraża ów iloraz i oznaczając $\frac{2h}{\alpha} = \gamma$, będziemy mieli, że:

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\tau^2}{T^2}\right)^2 + \frac{\tau^2}{T^2}\cdot\gamma^2}} ;$$

Żeby uwidocznić zależność pomiędzy ν i $\frac{\tau}{T}$, będziemy nadawać γ^2 wartości: 0,05; 0,10; 0,15; 0,20;.....i następnie zmieniać $\frac{\tau}{T}$ w granicach od 0 do $+\infty$; wtedy otrzymamy następujący wykres / rys.9./.



Widzimy, że wykreślone na rys.9 cztery krzywe, od $\frac{\tau}{T}=0$; do $\frac{\tau}{T}=0{,}8$; i od $\frac{\tau}{T}=1{,}2$; do $\frac{\tau}{T}=\infty$; są prawie że zgodne pomiędzy sobą i z krzywą odpowiadającą wartości $\gamma = 0$. Oprócz tego przy $\frac{\tau}{T}=0$; wszystkie one mają $\nu = 1$, następnie, gdy $\frac{\tau}{T}$ wzrasta do 0,8, ν wzrasta, ale nadzwyczaj powoli, dalej wzrost ν staje się szybszy i, wreszcie, gdy $\frac{\tau}{T}$ zdąża do jedności, wszystkie krzywe osiągają swoje maximum, w przybliżeniu równem $\nu = \frac{1}{\gamma}$. Krzywa zaś, odpowiadająca $\gamma = 0$, posiada przy $\frac{\tau}{T}=1$ asymptotę, równoległą do osi $O\nu$. Gdy iloraz $\frac{\tau}{T}$ wzrasta dalej od 1 aż do ∞. ν maleje z początku bardzo gwałtownie, następnie wolniej i wreszcie zdąża do zera, kiedy $\frac{\tau}{T} \longrightarrow \infty$

Z powyższego badania czynnika ν wnioskujemy, że: *gdy okres siły wzbudzającej S staje się bliskim do okresu drgań swobodnych punktu, to amplituda drgań wymuszonych nadzwyczaj szybko wzrasta i przekracza wielokrotnie amplitudę, odpowiadającą statycznemu działaniu siły wzbudzającej S.* Na tym polega zjawisko, zwane *rezonansem*, mające ogromne znaczenie tak w przyrodzie, jak i w technice.

Oprócz tego badanie powyższe wskazuje nam, że, jeżeli okres swobodnych drgań jest znacznie większy od okresu siły wzbudzającej S, to taka siła S wywiera bardzo nieznaczny wpływ na ruch punktu materialnego, ponieważ przybliżona wartość czynnika jest wtedy następująca:

$$\nu \cong \pm \left| \frac{1}{1-\frac{\tau^2}{T^2}} \right| = \frac{T^2}{\tau^2 - T^2} \quad ;$$

np., kiedy $\frac{\tau}{T} = 5$; wtedy:

$$\nu = \frac{1}{24} \quad ;$$

tj. amplituda drgań wymuszonych jest 24 razy mniejszą od tej, którą wytworzyłaby siła S, działając na punkt statycznie.

Zazwyczaj wielkość γ jest nieznaczną, wtedy, jeżeli $\frac{\tau}{T}$ znajduje się poza przedziałem od 0,8 do 1,2, to możemy obliczać ν według wzoru:

$$\nu = \frac{T^2}{\tau^2 - T^2}$$

który, ściśle rzecz biorąc, odpowiada $\delta = 0$, ponieważ poza wymienionym przedziałem ν, dla wszystkich niewielkich wartości δ, posiada zbliżone do siebie znaczenia. Wtedy amplituda drgań wymuszonych jest bardzo nieznacznie zależną od oporu ośrodka, który przejawia się tylko w tym, iż drgania swobodne zanikają.

Należy zwrócić jeszcze uwagę na ten wypadek szczególny, gdy $h = 0$; i $\mu = \alpha$;

Wtedy równanie ruchu punktu będzie takie :

$$x'' + \alpha^2 x = q\alpha^2 \sin/\alpha t + \omega/; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /66/$$

Całka szczególna tego równania już nie będzie miała kształtu:

$$x_2 = A \sin/\alpha t + \omega/ + B \cos/\alpha t + \omega/,$$

lecz tylko kształt następujący :

$$x_2 = Bt \cos/\alpha t + \omega/ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /67/$$

Rzeczywiście mamy :

$$x'' = - Bt\alpha^2 \cos/\alpha t + \omega/ - 2B\alpha \sin/\alpha t + \omega/;$$

a po podstawieniu wyrażenia /67/, znajdziemy, że :

$$- 2B\alpha = q\alpha^2, \text{ tj. } B = -\frac{q\alpha}{2};$$

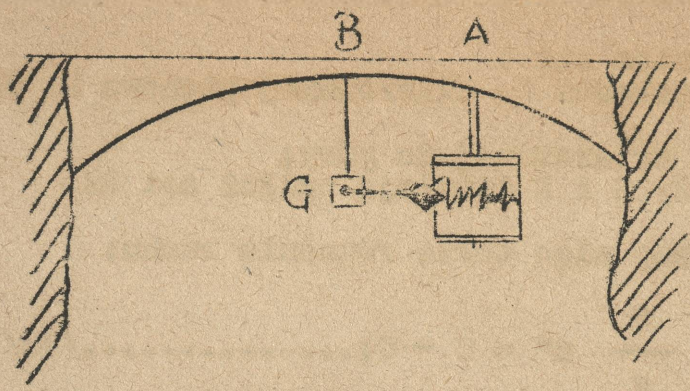
i więc :

$$x_2 = -\frac{1}{2} q\alpha t \operatorname{Cos}/\alpha t + \omega/ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /68/$$

Wzór /68/ mówi nam, że w tym wypadku amplituda drgań wymuszonych wzrasta wraz z czasem nieograniczenie.

Ruch harmoniczny posiada bardzo dużo zastosowań praktycznych, np. sprężyny różnego rodzaju, przyrządy do zapisywania drgań mostów, seismografy t.j. przyrządy do notowania trzęsienia ziemi i t.podobne. Urządzanie tych przyrządów jest przeważnie oparte na tym, że gdy okres swobodnych drgań punktu materialnego jest znacznie większy od okresu siły wzbudzającej S, tota siła S wywiera bardzo nieznaczne drgania wymuszone, swobodne zaś drgania przytem zanikają, jeżeli istnieje opór ośrodka zależny od prędkości punktu drgającego.

Aby zanotować drgania mostu, podwieszają do przęsła mostu na gumie ciężar G / rys.10/. Ciężar ten G posiada pióro, zapisując drgania na walcu, wprowadzonym w ruch obrotowy machanizmem zegarowym.



Rys.10.

Jest rzeczą zrozumiałą, że walec wykonywa takie same drgania w kierunku pionowym, jak punkty zaczepienia na moście walca A i gumy ciężaru B. Więc, jeżeli podwiesimy ciężar G w ten sposób, iż drgania jego punktu zaczepiania B na moście nie będą na niego wywierać wpływu, wtedy podczas drgań mostu, ciężar G pozostawałby nieruchomym i dlatego pióro zanotowałoby na papierze walca właśnie drgania mostu.

Mamy więc rozwiązać takie zadanie : w punkcie B/rys 11/ na moście jest podwieszony na gumie ciężar G; wyznaczyć drgania środka ciężkości tego ciężaru G, wiedząc, że punkt zaczepienia tego ciężaru B wykonywa zadane z góry drgania, określone wzorem :

$$\xi = a \sin/ kt + \omega/ \qquad \text{.........................} /69/$$

przy czym długość d i sprężystość gumy są takie, że gdy do niej podczas stanu spoczynku punktu B podwiesimy ciężar G, to ta guma wydłuży się o długość równą λ. Oprócz tego przypuszczamy, że ta guma posiada tę własność, że drgania swobodne ciężaru G szybko zanikają. Opór powietrza zaniedbujemy.

Wiemy, że środek ciężkości bryły materialnej porusza się tak, jak punkt materialny, o masie, równej masie danej bryły, pod działaniem wszystkich sił na bryłę działających. Przyjmiemy jako początek spółrzędnych O, to położenie /rys.12/ punktu G, które on zajmuje w stanie spoczynku i równowagi jako samego punktu G, tak i punktu zaczepienia B. Oś OZ skierujemy pionowo do góry i oznaczymy przez "z" długość OG, tj. spółrzędną punktu ruchomego G w momencie czasu t. Wtedy będziemy mieli, że długość:

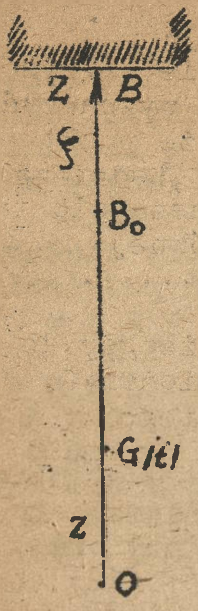
Rys.11.

$$BB_o = \xi a \sin/kt+\omega/$$

a długość $OB_o = d + \lambda$.

Oznaczając natężenie gumy przez N, będziemy mogli powiedzieć, że punkt G porusza się tak, jak punkt materialny o masie równej:

$$m = \frac{G}{g} \;;$$



pod działaniem sił :
1/ siły ciężkości G, skierowanej pionowo ku dołowi i
2/ siły N, skierowanej do góry;
obie te siły G i N działają wzdłuż osi OZ.

Mamy więc takie równanie ruchu:

$$\frac{G}{g} z'' = N - G; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /70/$$

Aby określić siłę N, wystarczy znaleść wydłużenie gumy i porównać je z wydłużeniem λ, wywartym przez siłę G; wtedy otrzymamy proporcję :

$$N : G = [/d + \lambda - z + \xi / - d] : \lambda ;$$

skąd

$$N = \frac{\lambda + \xi - z}{\lambda} G = G + G\frac{\xi}{\lambda} - G\frac{z}{\lambda} ;$$

Równanie /70/ przyjmie postać:

Rys.12.

$$z'' + \frac{zg}{\lambda} = \frac{g}{\lambda} a \sin/kt + \omega / ;$$

a kładąc

$$\frac{g}{\lambda} = \alpha^2$$

będziemy mieli :

$$z'' + \alpha^2 z = a\alpha^2 \sin/kt + \omega /.$$

Całka ogólna tego równania jest :

$$z = C_1 \cos\alpha t + C_2 \sin\alpha t + a\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - k^2} \sin/kt + \omega/ \ldots\ldots\ldots /71/$$

Gdy wprowadzimy do rachunku opór, wtedy pierwsze dwa wyrazy we wzorze /71/ będą miały czynnik e^{-ht}, a więc po upływie pewnego czasu drgania swobodne zanikną; dlatego też we wzorze /71/ niema potrzeby określać stałych dowolnych C_1 i C_2.

Co się zaś tyczy drgań wymuszonych, to one pozostaną prawie że bez zmiany, albowiem my tu przypuszczamy, że stosunek $\frac{\alpha}{k}$ znacznie odbiega od jedności. Będzie więc:

$$z = a\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - k^2} \sin /kt + \omega /;$$

a wprowadzając okresy τ i T:

$$\tau = \frac{2\pi}{\alpha} \quad \text{i} \quad T = \frac{2\pi}{k} ;$$

znajdziemy:

$$z = a\frac{-T^2}{\tau^2 - T^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \omega\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /72/$$

Przyrząd musimy urządzić tak, aby z' było możliwie małe. W tym celu robimy τ znacznie większe od T np. weźmiemy $\tau = 4T$ wtedy :

$$z = -\frac{1}{15}\, a \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \omega\right) = -\frac{1}{15}\xi \;;$$

Więc zaniedbując z, jako bardzo nieznaczne względem ξ, możemy w przybliżeniu uważać, że ciężar G jest nieruchomy. Wtedy przyrzęd nasz zanotuje na obracającym się wałku drgania

$$\xi = a \sin/kt + \omega/$$

mostu z przybliżeniem do $\frac{1}{15}$ ich rzeczyyistej wielkości, co w technice jest więcej, niż wystarczającym przybliżeniem.

Ażeby określić odpowiednią wartośćm wydłużenia λ, mamy zależność:

$$\alpha^2 = \frac{g}{\lambda} \quad \text{i} \quad \tau = \frac{2\pi}{\alpha} \;;$$

z których znajdziemy :

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /73/$$

P r z y k ł a d   l i c z e b n y .

Niech np. most robi 150 drgań na minutę, wtedy:

$$T = \frac{60}{150} = 0{,}4 \text{ sek.}$$

Jeżeli chcemy mieć $\pi = 4T = 1{,}6$ sek, to przyjmując,

$g = 9{,}8$,

znajdziemy według wzoru /73/:

$$1{,}6 = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{9{,}8}},$$

skąd

$$\lambda = \frac{/1{,}6/^2}{4\pi^2}\, 9{,}8 = 0{,}64 \text{ m}$$

Zatem musimy do przyrządu użyć taką gumę, która pod działaniem danego ciężaru G wydłużałaby się o długość większą lub równą 0,64 m, wtedy bowiem $\tau \geqslant 4T$, zauważywszy przytem, że wielkość ciężaru G jest zupełnie obojętną.

Powyższe rozważania wyjaśniają nam rolę, jaką spełniają sprężyny /resory/ w powozach ,mianowicie,drgania punktu zaczepienia /B/ nie udzielają się ciężarowi /G/,jeżeli on jest podwieszony w ten sposób, że okres jego drgań swobodnych jest bardzo znaczny w stosunku do okresu drgań punktu zaczepienia. Okres drgań swobodnych τ obliczamy za pomocą wzoru /73/,przy czym λ jest wtedy natężeniem sprężyny /resory/ pod działaniem ciężaru G powozu.Łatwo zrozumieć, że gdyby było odwrotnie, to jest okres drgań swobodnych τ byłby nieznacznym w stosunku do okresu T drgań punktu zaczepienia ciężaru /G/, to drgania tego punktu zaczepienia /B/ w zupełności udzieliłyby się ruchomemu ciężarowi /G/, albowiem wtedy stosunek

$$- \frac{T^2}{T^2 - \tau^2}$$

byłby niezmiernie bliskim jedności.

Rozdział III.

Krzywoliniowy ruch punktu materialnego.

Rozpatrzymy z początku ruch płaski. Gdy punkt materialny podczas ruchu stale pozostaje w jednej i tej samej płaszczyźnie, wtedy prędkość punktu jest zawartą w tej płaszczyźnie w każdym momencie czasu, a więc i w momencie początkowym. Przyrost prędkości, a zatem i przyspieszenie punktu musi być też zawarte w płaszczyźnie ruchu, stąd wnioskujemy, że i siła, działająca na ten punkt, jest stale skierowaną w tej płaszczyźnie, Widzimy więc, że płaszczyzna ruchu punktu materialnego może być pbraną jedynie płaszczyzna, przechodząca jednocześnie przez kierunek prędkości początkowej i przez początkową prostą działania sił.Jeżeli podczas ruchu siła będzie stale pozostawać w tej płaszczyźnie, wtedy tylko ruch punktu będzie płaskim.

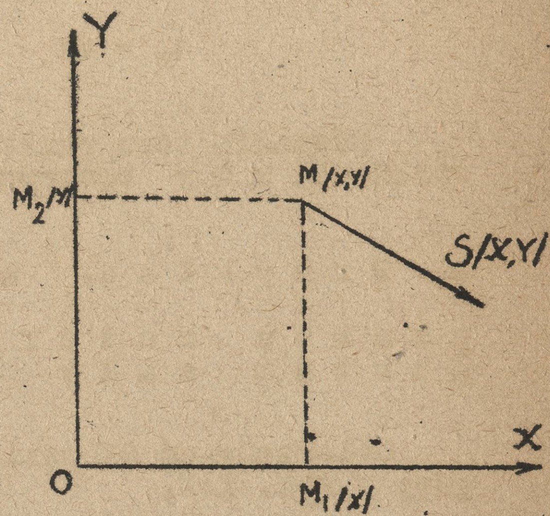
Weźmiemy prostopadłe osie spółrzędnych : OX i OY /rys.13/ i niech na punkt ruchomy M/ x,y/działa siła S, przy czym przez X i Y oznaczymy jej rzuty na obrane isie, wtedy równania różniczkowe ruchu punktu M będą:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X; \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /1/$$

Siła S może być zależną od czasu t, położenia punktu ruchomego /x y/ i od prędkości tego punktu /x', y'/, dlatego też w wypadku ogólnym X i Y mogą być funkcjami zmiennych t, x, y, x', y'.

Ogólna metoda całkowania równań /1/ przy dowolnej postaci funkcyj X i Y nie istnieje.

Najprostszy wypadek zachodzi wtedy, gdy możemy wyznaczyć ruchy rzutów M_1 i M_2 punktu M wzdłuż osi spółrzędnych OX i OY niezależnie od siebie. Aby to mogło być, jest rzeczą konieczną i wystarczającą, ażeby wyrażenie rzutu X nie zawierało liter y i y', a wyrażenie rzutu Y nie zawierało liter x i x', mianowicie musi być:



Rys. 13.

$$X = f_1/t, x, x'/;$$

$$Y = f_2/t, y, y'/;$$

Wtedy bowiem wyznaczenie k r z y w o l i n i o w e g o ruchu punktu M sprowadza się do wyznaczenia dwóch ruchów p r o s t o l i n i o w y c h rzutów tego punktu M_1 i M_2 na osie OX i OY.

Całkując równanie różniczkowe drugiego rzędu :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f_1/t, x, x'/ ;$$

otrzymamy całkę ogólną, zawierającą dwie stałe dowolne C_1 i C_2 , a całkując równanie :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f_2/ t, y, y' /$$

otrzymamy drugą całkę ogólną, zawierającą znowu dwie stałe dowolne C_3 i C_4.

Wielkości C_1, C_2, C_3 i C_4 określamy na podstawie danych początkowych:

przy $t = t_o$ /np. $t_o = 0$/, musi być :

$$x_o = a; \quad y_o = b; \quad x'_o = \alpha; \quad y'_o = \beta.$$

Równanie toru punktu M otrzymamy regując czas t z wyrażeń dla x i y będących funkcjami czasu.

1. Przykład. Krzywoliniowy ruch punktu materialnego pod działaniem siły ciężkości.

Obierzemy oś OX poziomo, a oś OY skierujemy pionowo do góry / rys. 14/,

Przypuśćmy, że w momencie początkowym t = 0, punkt ruchomy M znajduje się w początku spółrzędnych O.wtedy $x_o=y_o=0$; ponieważ prędkość początkowa v_o istnieje, więc:

$$x'_o = v_o \cos \xi = \alpha ;$$

i

$$y'_o = v_o \sin \xi = \beta .$$

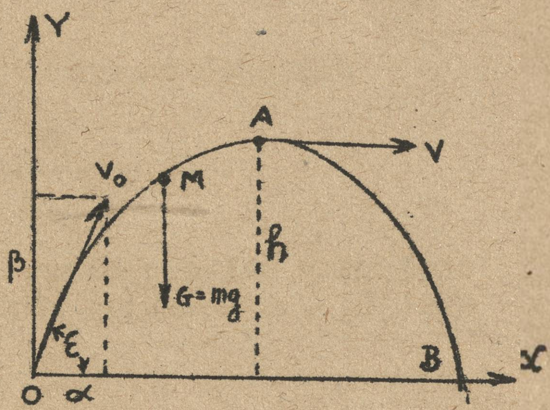
Na punkt M działa tylko siła ciężkości G = mg,skierowana pionowo ku dołowi,zatem

$$X = 0 ; \quad Y = - mg;$$

i równania ruchu są:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /2/$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = - mg; \ldots\ldots\ldots\ldots /3/$$



Rys.14.

Równanie /2/, biorąc pod uwagę warunki początkowe,daje nam:

$$x' = \alpha ; \quad x = \alpha t \quad ;$$

Z równania /3/ otrzymujemy :

$$y' = -gt + \beta \;;$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + \beta t \;;$$

Rugując z wyrażeń dla x i y czas t, znajdziemy równanie toru punktu M/xy/:

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x - \frac{g}{2\alpha^2} x^2 \text{..........................} /4/$$

Równanie /4/ jest równaniem paraboli o osi symetrii, równoległej do osi rzędnych OY.

Odległość OB nazywamy "d o n i o s ł o ś c i ą   l o t u" punktu materialnego M; dla wyznaczenia OB mamy równanie :

$$\frac{\beta}{\alpha} - \frac{g}{2\alpha^2} \cdot OB = 0$$

skąd :

$$OB = \frac{2\alpha\beta}{g} \;;$$

Ponieważ

$$\alpha = v_0 \cos\varepsilon \;, \qquad \beta = v_0 \sin\varepsilon \;;$$

więc :

$$OB = \frac{v_0^2 \; 2 \sin \quad \cdot \cos}{g} = \frac{v_0^2 \sin \quad 2}{g}$$

Widzimy więc, że przy danej wartości liczebnej prędkości początkowej v, donośność lotu będzie maximum, gdy kąt $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$; tj., gdy kierunek prędkości początkowej v_0 tworzy kąt $\varepsilon = 45^\circ$ z poziomem.

Obliczymy teraz największą wysokość h podniesienia się punktu M nad poziomem OB. Ponieważ w najwyższym punkcie toru A składowa prędkości y' musi być zerem, więc:

$$-gt + \beta = 0; \quad \text{skąd} \quad t = \frac{\beta}{g} \;;$$

$$h = y_{max} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\beta^2}{8} + \frac{\beta^2}{g} = \frac{1}{2} \; \frac{\beta^2}{g} \;;$$

Widzimy więc, że największa wysokość podniesienia się punktu M go góry w rozpatrywanym ruchu jest taką samą, jak w ruchu pionowym do góry z prędkością początkową równą β /patrz rozdział II,2/

$$h = \frac{v_o^2 \sin^2 \varepsilon}{2g};$$

więc przy danej wartości liczebnej prędkości początkowej v_o, h będzie największem, gdy $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ wtedy

$$h_{max} = \frac{v_o^2}{2g} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2g}.$$

2. P r z y k ł a d. K r z y w o l i n i o w y r u c h p u n k t u m-g o p o d d z i a ł a n i e m s i ł y c i ę ż k o ś c i w o ś r o d k u, w y t w a r z a j ą c y m o p ó r p r o p o r c j o n a l n y d o p i e r w s z e j p o t ę g i p r ę d k o ś c i p u n k t u /$R = m, n, v$/.

Rzuty siły są następujące :

$$X = -mnx'; \quad Y = -mg - mny'.$$

Równania ruchu po skróceniu przez masę m są :

$$x'' = -n.x' \dots\dots\dots\dots \text{/5/}$$

$$y'' = -g - ny' \dots\dots\dots\dots \text{/6/}$$

Całkujemy równanie /5/:

$$\frac{x''}{x'} = -n;$$

$$\log x' = nt + \lg C_1,$$

$$x' = C_1 e^{-nt},$$

Skąd, całkując jeszcze raz, otrzymamy

$$x = -\frac{C_1}{n} e^{-nt} + C_2.$$

Ale warunki początkowe dają nam

$$C_1 = \alpha \text{ ; i } C_2 = \frac{\alpha}{n} ,$$

jeżeli przy $t_o = 0$, $x_o = 0$ i $x'_o = \alpha$, wtedy ostatecznie:

$$x' = \alpha e^{-nt},$$

i

$$x = \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{n} e^{-nt} = \frac{\alpha}{n} /1 - e^{-nt}/ ;$$

Równanie /6/ rozpatrzyliśmy szczegółowo w rozdziale II, mieliśmy wtedy :

$$y = - \frac{g}{n^2} e^{-nt} - \frac{g}{n} t + \frac{g}{n^2} ;$$

gdy punkt swobodnie spada z położenia początkowego $y_o = 0$ bez prędkości początkowej /$y'_o = 0$ przy $t = 0$/, lub też :

$$y = / + \frac{\beta}{n} - \frac{g}{n^2} / e^{-nt} \frac{g}{n} t - \frac{\beta}{n} - \frac{g}{n^2} + a$$

gdy w momencie $t = 0$ punkt został rzucony pionowo do góry z prędkością początkową $y'_o = \beta$ z położenia początkowego $y_o = a$.

Należy zauważyć, że wyznaczenie krzywoliniowego ruchu punktu ciężkiego w ośrodku, wytwarzającym opór proporcjonalny do d r u g i e j p o t ę g i p r ę d k o ś c i /$R = n m v^2$/, już nie daje się sprowadzić do wyznaczenia dwóch ruchów prostoliniowych rzutów tego punktu na osie spółrzędnych OX i OY.

Rzeczywiście, przypuszczając, że osie współrzędnych w dalszym ciągu są obrane tak, jak to jest wskazanem na rys. 14, będziemy mieli teraz takie równania ruchu po skróceniu przez masę m:

$$x'' = - n v x' ;$$

$$y'' = - g - n v y' ;$$

a ponieważ:

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2} ,$$

to oba powyższe równania zawierają i x' i y' jednocześnie i dlatego nie są odsiebie niezależnemi.

3. P r z y k ł a d. K r z y w o l i n i o w y r u c h p u n k t u m-g o p o d d z i a ł a n i e m s i -

ły przyciągania do środka nieruchomego, proporcjonalnej do odległości od tego środka /ruch środkowy/.

Jako środek nieruchomy obieramy początek współrzędnych O/ rys.15/. Na punkt ruchomy M/x y/ działa siła

$$S = k^2 m r ;$$

jej rzuty na osie OX i OY są odpowiednio:

$$X = -k^2 m\, r\frac{x}{r} = -k^2 mx;$$

$$Y = -k^2 mr\,\frac{y}{r} = -k^2 my .$$

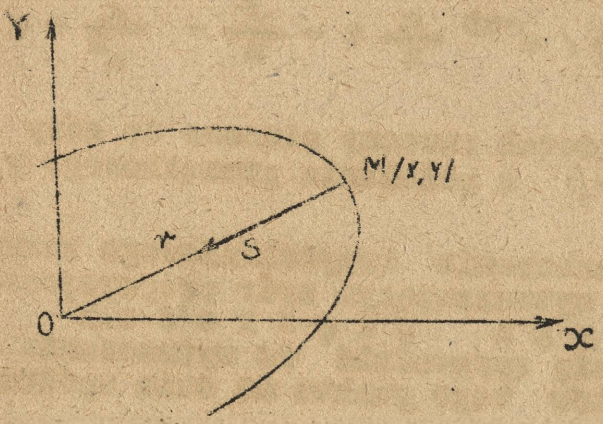
Równania ruchu po skróceniu przez masę m są :

$$\left.\begin{aligned} x'' &= -k^2 x; \\ y'' &= -k^2 y. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots /7/$$

Równania /7/ są od siebie niezależne;ich całki ogólne mają postać następującą:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos kt + \frac{\alpha}{k}\sin kt; \\ y &= b\cos kt + \frac{\beta}{k}\sin kt; \end{aligned}\right. ./8/$$

ponieważ przy t=0 mamy: $x_0 = a; y_0 = b;\ x'_0 = \alpha$ i $y'_0 = \beta$



Rys.15.

Rugując z równań /8/ czas t,znajdziemy równanie toru punktu ruchomego; ponieważ z jednej strony widzimy, że to równanie będzie stopnia drugiego względem x i y, a z drugiej strony równania /8/ mówią nam, że x i y mają zawsze wartości skończone, więc wnioskujemy, iż tor punktu M/x,y/jest elipsą.

4. Przykład. Krzywoliniowy ruch punktu m-go pod działaniem siły przyciągania do środka nieruchomego, proporcjonalnej do odległości od tego środka, w ośrodku wytwarzającym opór

p r o p o r c j o n a l n y d o p i e r w s z e j p o t ę g i p r ę d k o ś c i p u n k t u.

Rzuty siły S są następujące :

$$X = - k^2 mx - nmx' ;$$
$$y = - k^2 my - nmy'$$

Równania ruchu po skróceniu przez masę m:

$$x'' = - k^2 x - nx' ; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /9/$$
$$y'' = - k^2 y - ny' ;$$

Po scałkowaniu znajdziemy, że :

$$x = A e^{-\frac{nt}{2}} \cos / \lambda t - \delta_1 / ;$$
$$y = B e^{-\frac{nt}{2}} \cos / \lambda t - \delta_2 / ;$$

przy czym A, B, δ_1 i δ_2 są stałe dowolne, które określimy według danych początkowych, a:

$$\lambda = \sqrt{k^2 - \frac{n^2}{4}} = \frac{\sqrt{4k^2 - n^2}}{2} .$$

Jeżeli n ⟩ 2k, to mamy drgania zanikające w kierunku osi OX i w kierunku osi OY /patrz rozdział II,10/. Punkt ruchomy M/x,y/ wykonywa jednocześnie drgania, zanikające w dwóch wzajemnie - prostopadłych kierunkach.

Na zakończenie płaskiego ruchu krzywoliniowego podamy przykład, g d y r ó w n a n i a r ó ż n i c z k o w e r u c h u p u n k t u m a t e r i a l n e g o n i e m o g ą b y ć c a ł k o w a n e z o s o b n a, tj. g d y t e r ó w n a n i a s ą o d s i e b i e z a l e ż n e.

Rozpatrzymy krzywoliniowy ruch punktu m-go pod działaniem nań s i ł y c i ę ż k o ś c i w o ś r o d k u, w y t w a r z a j ą c y m o p ó r, w y r a ż a j ą c y s i ę z a p o m o c ą d o w o l n e j f u n k c j i p r ę d k o ś c i p u n k t u r u c h o m e g o :

$$R = m.g.f /v/$$

Niech w momencie początkowym t = 0 punkt ruchomy M/x,y/ znajduje się w początku współrzędnych 0, wtedy przy t = 0 mamy, $x_o = y_o = 0$; / rys. 16/. Jest rzeczą oczywistą, że punkt M, będąc rzuconym z położenia początkowego w 0 z pewną prędkością początkową v_o, tworzącą kąt ε_o z poziomem, wykreśli w pionowej płaszczyźnie XOY krzywą, zwróconą swą wklęsłością ku dołowi, ponieważ na punkt M stale działa siła ciężkości G = mg, skierowana pionowo ku dołowi. Opór ośrodka R jest skierowany zawsze w stronę przeciwną ruchowi punktu M.

Gdy rzutujemy równanie ruchu Newton a na styczną i normalną do toru punktu M, wtedy mamy następujące dwa równania ruchu / patrz Kinematykę /:

$$m\frac{dv}{dt} = -m g \sin \varepsilon - R; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots/10/$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = m g \cos \varepsilon ;$$

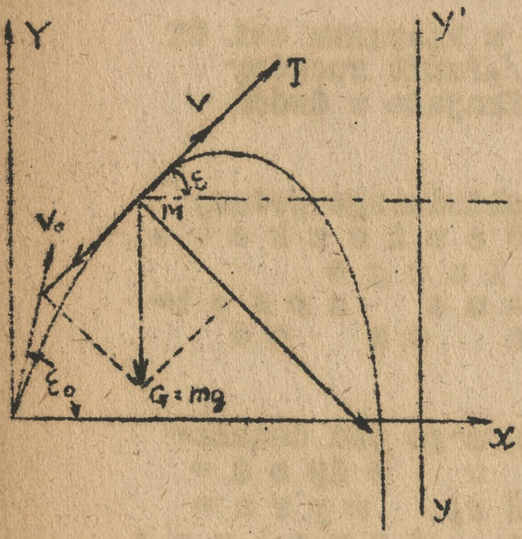
Ponieważ R = mg f/v/, a promień krzywizny toru

$$\rho = \frac{ds}{d\varepsilon} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varepsilon} = v \frac{dt}{d\varepsilon}$$

przy czym ds jest elementem łuku toru, a $d\varepsilon$, odpowiednim kątem styczności, to równanie /10/ możemy napisać w takiej postaci :

$$\frac{dv}{dt} = -g \left[\sin \varepsilon + f/v/\right]; \qquad ../11/$$

$$v \frac{d\varepsilon}{dt} = g \cos \varepsilon .$$



Rys.16.

Wyrugujemy z równań /11/ czas, tj. różniczkę dt, wtedy otrzymamy, że

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{d\varepsilon} = -\operatorname{tg} \varepsilon - \frac{1}{\cos \varepsilon} \cdot f/v/ \ldots./12/$$

Równanie /12/ daje możność wyznaczyć prędkość v; równanie to jest równaniem pierwszego rzędu względem v, całkując - znajdziemy v w funkcji kąta ε :

$$v = F/\varepsilon/ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots/13/$$

wtedy drugie równanie /11/ daje nam ;

$$F/\varepsilon/ \frac{d\varepsilon}{dt} = g \cos \varepsilon ,$$

skąd

$$\frac{F/\varepsilon/\ d\varepsilon}{\cos\varepsilon} = g\,dt .$$

~~Całkując znajdziemy, że~~ :

$$t = \frac{1}{g}\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon}\frac{F/\varepsilon/\,d\varepsilon}{\cos\varepsilon} . \qquad \text{........./14/}$$

Ale przecież

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\varepsilon \quad i \quad \frac{dy}{dt} = v\sin\varepsilon ,$$

więc :

$$dx = [F/\varepsilon/]^2 . \frac{d\varepsilon}{g} ,$$

i

$$dy = [F/\varepsilon/]^2 \operatorname{tg}\varepsilon\, \frac{d\varepsilon}{g}$$

stąd całkując znajdziemy :

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{g}\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon}[F/\varepsilon/]^2\, d\varepsilon , \\ y &= \frac{1}{g}\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon}[F/\varepsilon/]^2 \operatorname{tg}\varepsilon\, d\varepsilon \end{aligned}\right\} \text{......../15/}$$

i

Ze wzorów /15/ widzimy, że x i y są funkcjami parametru ε; jeżeli dla danej funkcji f/v/ będziemy mogli wyrugować z równań /15/ parametr ε, to otrzymamy tor punktu ruchomego. Rozpatrywane tu zagadnienie posiada doniosłe znaczenie w artylerii, ponieważ na wyrzucony z działa pocisk, działa tylko siłą ciężkości i opór powietrza, będący funkcją prędkości.

L e g e n d r e rozpatrzył szczegółowo wypadek, gdy $f/v/ = a+bv^n$, przy czym a, b i n są wielkościami dodatnimi i nadto przypuszczamy, że : $a < 1$; ponieważ już przy : $a = 1$, opór ośrodka byłby równy sile ciężkości punktu materialnego, co jest rzeczą niemożliwą fizycznie.

W tym wypadku równanie /12/ przybiera postać następującą :

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{d\varepsilon} = -\operatorname{tg}\varepsilon - \frac{a+bv^n}{\cos\varepsilon} ;$$

czyli :

$$\frac{1}{v^{n+1}} \cdot \frac{dv}{d\varepsilon} = -\frac{1}{v^n}\,/\operatorname{tg}\varepsilon + \frac{a}{\cos\varepsilon}/ - \frac{b}{\cos\varepsilon} ;$$

[illegible] edniego [illegible] nia prze [illegible]
[illegible] zakła [illegible]
dając

$$\frac{\xi}{[illegible]} = z \;;$$

znajdziemy :

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = nz/tg\,\varepsilon + \frac{a}{\cos\varepsilon}\,/ + \frac{bn}{\cos\varepsilon} \;;$$

Założymy jeszcze

$$z = p\cdot q,$$

wtedy otrzymamy następujące równanie :

$$p\,\frac{dq}{d\varepsilon} + q\,\frac{dp}{d\varepsilon} = npq/tg\,\varepsilon + \frac{a}{\cos\varepsilon}\,/ + \frac{bn}{\cos\varepsilon} \;;$$

Znajdziemy taką funkcję $q/\,\varepsilon\,/$; aby było przy dowolnym $p/\,\varepsilon\,/$

$$p\,\frac{dq}{d\varepsilon} = npq/tg\,\varepsilon + \frac{a}{\cos\varepsilon}\,/ \;; \qquad \text{.............../16/}$$

według tej funkcji określimy $p/\,\varepsilon\,/$ tak, ażeby :

$$q\,\frac{dp}{d\varepsilon} = \frac{bn}{\cos\varepsilon} \;; \qquad \text{............................./17/}$$

mając zaś $p/\,\varepsilon\,/$ i $q/\,\varepsilon\,/$, znajdziemy kolejno z i v .

Funkcję $q/\,\varepsilon\,/$ określimy z równania /16/, mianowicie, mamy :

$$\frac{dq}{d\varepsilon} = nq/tg\,\varepsilon + \frac{a}{\cos\varepsilon}\,/ \;;$$

skąd :

$$\log q = n\int /tg\,\varepsilon + \frac{a}{\cos\varepsilon}\,/d\,\varepsilon = n\left[a \log tg/\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon}{2}\,/ - \right.$$

$$\left. - \log\cos\varepsilon\right] = n \log \frac{\left[tg/\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon}{2}\,/\right]^{a}}{\cos\varepsilon}$$

a więc :

$$q/\,\varepsilon\,/ = \left\{\frac{\left[tg/\frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon}{2}\,/\right]^{a}}{\cos\varepsilon}\right\}^{n}$$

Równanie /17/ możemy napisać tak :

$$dp = \frac{bn}{q\cos\varepsilon}\,d\,\varepsilon \;,$$

skąd całkując znajdujemy $p/\varepsilon/$:

$$p/\varepsilon/ = bn \int \frac{d\varepsilon}{q/\varepsilon/ \cos\varepsilon} + \text{Const.}$$

Można wykazać, że tor punktu ruchomego M posiada asymptotę równoległą do osi rzędnych OY, i, że prędkość punktu v dąży do granicy :

$$\frac{1 - a^{\frac{1}{n}}}{b} ;$$

gdy czas t wzrasta nieograniczenie.

Jeżeli podczas ruchu punktu materialnego siła nań działająca S nie pozostaje stale w jednej i tej samej płaszczyźnie, przechodzącej przez kierunek początkowej prędkości i przez prostą działania siły S w momencie początkowym, to punkt ruchomy będzie zakreślać tor, będący krzywą przestrzenną; w tym wypadku musimy obrać trzy osie współrzędnych : OX, OY i OZ.

Niech na punkt ruchomy M/x,y,z/ działa siła S, rzuty której na owe osie są odpowiednio: X,Y i Z. Równania różniczkowe ruchu punktu M będą następujące :

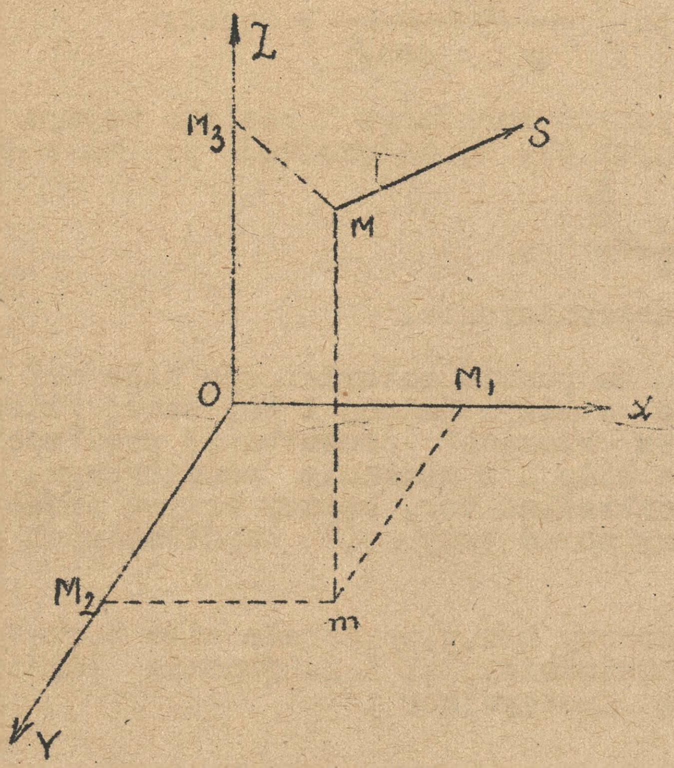
$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X ; \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y ; \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z ; \end{aligned}\right\} \qquad \text{/18/}$$

Rzuty X,Y i Z są funkcjami zmiennych: t,x,y,z,x',y', z', i wskazać ogólnego sposobu rozwiązania równań /18/ nie można.

Najprostszy wypadek jest ten, gdy równania /18/ możemy całkować każde z osobna, tj. gdy równania /18/ są od siebie n i e z a l e ż n e. Wtedy zadanie sprowadza się do określenia t r z e c h r u c h ó w p r o s t o l i n i o w y c h rzutów M_1, M_2 i M_3 danego punktu M na osie OXYZ /rys.17/

Ażeby tak było, jest rzeczą konieczną i wystarczającą aby X,Y i Z miały postacie następujące:

$$X = f_1/t,x,x'/ ;$$
$$Y = f_2/t,y,y'/ ;$$
$$Z = f_3/t,z,z'/ ;$$



Rys.17

Całkując w tym wypadku równania ruchu:

$$mx'' = f_1 /t,x,x'/;$$

$$my'' = f_2 /t,y,y'/;$$

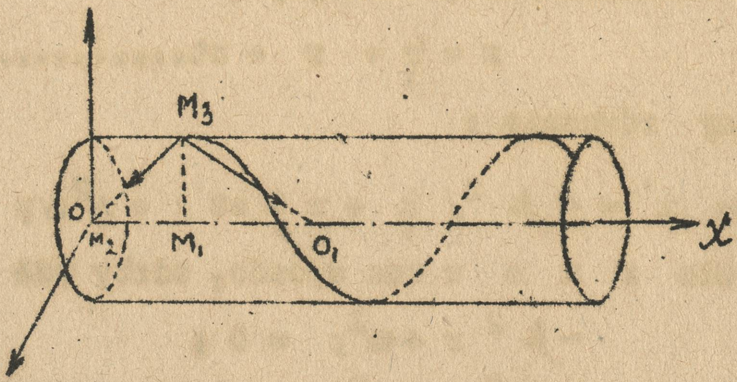
$$mz'' = f_3 /t,z,z'/;$$

Otrzymamy trzy całki ogólne, zawierające 6 stałych dowolnych $C_1, \dots\dots\dots C_6$; dla określenia których posłużą nam warunki początkowe zadania, mianowicie: $t = t_o$/ najczęściej $t_o = 0$/; musi być:

$$x_o = a;\ y_o = b;\ z_o = c,\ i\ x'_o = \alpha;\ y'_o = \beta;\ z_o = \gamma.$$

Przykład : Krzywoliniowy ruch punktu materialnego pod działaniem proporcjonalnych do odległości sił przyciągania do środka nieruchomego i do środka poruszającego się ruchem prostoliniowym i jednostajnym.

Jako środek nieruchomy obierzemy początek współrzędnych O, a jako ruchomy punkt O_1, jednostajnie poruszający się wzdłuż prostej OX /rys. 18/.



Rys. 18.

Równanie ruchu środka przyciągającego O_1 jest :

$$\xi = p + qt \;;$$

Jeżeli wartości liczebne sił przyciągania do środków O i O_1 są odpowiednio $K^2 m\,\overline{MC}$ i $n^2 m\,\overline{MO_1}$; to rzuty siły wypadkowej S na osie OX, OY i OZ będą następujące :

$$X = -K^2mx - n^2m\,/x - \xi/ = -m/K^2 + n^2/\,x + mn^2/p+qt/;$$

$$Y = -K^2my - n^2my = -m/K^2 + n^2/\,y\;;$$

$$Z = -m/K^2 + n^2/\,z\;;$$

Oznaczając dla skrótu : $K^2 + n^2 = \mu^2$

i skracając równania ruchu przez masę m, będziemy mieli ;

$$x'' = -\mu^2 x + n^2/p + qt/\;; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /19/$$

$$y'' = \mu^2 y\;; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /20/$$

$$z'' = -\mu^2 z\;; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /21/$$

Całki ogólne równań /20/ i 21/ są nam już znane, mianowicie; /patrz r.II.7/.

$$\left.\begin{aligned} y &= b\cos\mu t + \frac{\beta}{\mu}\sin\mu t\;; \\ z &= c\cos\mu t + \frac{\gamma}{\mu}\sin\mu t\;; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /22/$$

Aby scałkować równanie /19/, założymy :

$$x = \xi + r + st \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /23/$$

wtedy otrzymamy równanie :

$$\xi'' = x'' = -\mu^2/\xi + r + st/ + n^2./p + qt/;$$

Dobierzemy stałe r i s w ten sposób, ażeby one spełniały warunki;

$$-\mu^2 r + n^2 p = 0 ;$$

$$-\mu^2 s + n^2 q = 0 ;$$

a zatem musi być :

$$r = \frac{n^2 p}{\mu^2} ;$$

$$s = \frac{n^2 q}{\mu^2} ;$$

Wtedy równanie /19/ przyjmie postać następującą :

$$\xi'' = -\mu^2 \xi ; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /24/$$

Sprowadziliśmy zatem równanie /19/ do typu równań /20/ i /21/ i dlatego jedna całka ogólna jest :

$$x = /a - \frac{n^2 p}{\mu^2}/ \cos \mu t + /\frac{a}{\mu} - \frac{n^2 q}{\mu^2}/ \sin \mu t + \frac{n^2}{\mu^2}/ p + qt/;$$

Rugując czas t z dwóch równań /22/, otrzymamy, jak wiadomo równanie elipsy na płaszczyźnie YOZ; stąd wynika , że tor punktu ruchomego M znajduje się na walcu eliptycznym o osi symetrii OX. Ponieważ, gdy zmienna t otrzymuje przyrost równy $\frac{2\pi}{\mu}$, to współrzędna x punktu M otrzymuje przyrost równy:

$$\frac{2\pi n^2 q}{\mu^2} ;$$

więc tor punktu ruchomego posiada kształt linii śrubowej.

W zagadnieniu krzywoliniowego ruchu punktu materialnego doniosłe znaczenie posiadają dwa prawa, mianowicie: zasada pól- czyli zasada momentów ilości ruchu i zasada pracy, czyli zasada energii kinetycznej. Te zasady w wielu wypadkach dają możność bezpośrednio napisać całki równań różniczkowych punktu materialnego.

R o z d z i a ł IV.

Z a s a d a p ó l, czyli z a s a d a m o m e n t ó w i l o ś c i r u c h u.

Wiemy już, że równania różniczkowe ruchu swobodnego punktu materialnego $M/x,y,z/$ możemy napisać tak :

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= X; \\ my'' &= Y; \\ mz'' &= Z; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /1/$$

W wielu wypadkach powyższe trzy równania posiadają określonego typu t.zw. " p i e r w s z e c a ł k i ".Przypomnimy wkrótce, co to jest pierwsza całka ?

W pierwszym rozdziale dynamiki podaliśmy już kształt ogólnego rozwiązania układu równań /1/,mianowicie :

$$\left.\begin{aligned} x &= F_1/t, C_1, C_2,\ldots\ldots\ldots C_6/; \\ y &= F_2/t, C_1, C_2,\ldots\ldots\ldots C_6/; \\ z &= F_3/t, C_1, C_2,\ldots\ldots\ldots C_6/; \end{aligned}\right\} \ldots /2/$$

przy czym $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_6$ są tu stałe dowolne.Różniczkując równania /2/ względem czasu t, otrzymamy takie trzy równania:

$$\left.\begin{aligned} x' &= F_1'/t, C_1, C_2,\ldots\ldots\ldots C_6/; \\ y' &= F_2'/t, C_1, C_2,\ldots\ldots\ldots C_6/; \\ z' &= F_3'/t, C_1, C_2,\ldots\ldots\ldots C_6/; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots /3/$$

Jeżeli rozwiążemy układ z sześciu równań /2/ i /3/ względem sześciu niewiadomych $C_1, C_2, \ldots\ldots C_6$, to otrzymamy wyrażenia kształtu:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \Phi_1/t,x,y,z,x',y',z'/ ; \\ C_2 &= \Phi_2/t,x,y,z,x',y',z'/ ; \\ C_3 &= \Phi_3/t,x,y,z,x',y',z'/ ; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_6 &= \Phi_6/t,x,y,z,x',y',z'/ ; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots /4/$$

Zauważymy zaraz, że takie rozwiązanie równań /2/ i /3/ względem stałych $C_1, \ldots\ldots, C_6$ musi koniecznie istnieć, ponieważ w razie przeciwnym mielibyśmy pewną zależność pomiędzy wielkościami t, x, y, z, x', y', i z' w postaci równania :

$$\Omega/t, x, y, z, x', y', z'/=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /5/$$

nie zawierającego ani jednej stałej dowolnej $C_1, \ldots\ldots C_6$, jest to rzeczą niemożliwą, albowiem równanie /5/ istniałoby przy dowolnym t, a więc i przy $t = t_0$, tj. w momencie początkowym mielibyśmy zależność pomiędzy $t_0, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'$:

$$\Omega/t_0, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'/= 0;$$

zatem początkowe położenie punktu ruchomego $M/x_0, y_0, z_0/$ i jego prędkość początkowa $v_0/x_0', y_0', z_0'/$ nie mogłyby być obrane dowolnie i dlatego rozwiązanie /2/ nie byłoby ogólnym, co jest w sprzeczności z przyjętym założeniem c.b.d.o.

Równania /4/ mówią nam, że istnieją takie funkcje $\Phi_1, \Phi_2, \ldots\ldots \Phi_6$ zmiennych t, x, y, z, x', y', z', które zachowują podczas ruchu punktu materialnego wartości stałe $C_1, C_2, \ldots\ldots C_6$, pomimo iż zmienne t, x, y, z, x', y', z', podczas tego ruchu zmieniają się.

Funkcje $\Phi_1, \ldots\ldots\ldots \Phi_6$ nazywamy p i e r w s z e m i c a ł k a m i, lub prosto c a ł k a m i u k ł a d u /1/ równań ruchu różniczkowych.

Jest rzeczą zrozumiałą, że dowolna funkcja Ψ od całek układu równań /1/ jest też całką tego układu, mianowicie:

$$\Psi/\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots\ldots \Phi_6/=\Theta/t, x, y, z, x', y', z'/;$$

rzeczywiście, ponieważ podczas ruchu punktu materialnego funkcje $\Phi_1, \ldots\ldots, \Phi_6$ zachowują swe wartości $C_1, \ldots\ldots, C_6$ bez zmiany, więc i funkcja:

$$\Psi/\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots\ldots \Phi_6/\equiv \Psi/C_1, C_2, C_3, \ldots\ldots C_6/;$$

jest wielkością stałą, co wskazuje, że Θ jest też całką układu /1/.

Odwrotnie, gdy jakimś sposobem znaleźliśmy sześć niezależnych od siebie całek układu /1/, wtedy każda inna całka tego układu może być wyrażoną przez te sześć niezależnych.

Całkami niezależnymi nazywamy takie, pomiędzy którymi nie zachodzi żadna zależność typu;

$$\omega/\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\dots\dots\dots\dots\ \Phi_6/ = 0\ ;$$

nie zawierająca bezpośrednio ani jednej litery, t, x, y, z, x', y', z'.

Wykażemy, że niezależnych całek układ równań /1/ posiada tylko sześć. Rzeczywiście, przypuśćmy, że oprócz sześciu niezależnych całek $\Phi_1, \dots\dots, \Phi_6$; znaleźliśmy jeszcze siódmą całkę

$$\Psi/t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z'\ /;$$

musimy wykazać, że istnieje taka funkcja ;

$$\Omega/\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\dots\dots\dots\ \Phi_6/$$

która jest równą $\Psi/t, x, y, z, x', y', z'/$, przy wszelkich wartościach zmiennych t, x, y, z, x', y', z'.

Przypuśćmy, że układ równań /4/ rozwiązaliśmy względem x, y, z, x', y', z' i otrzymane wyrażenia wstawiliśmy w wyrażenie funkcji ;

$$\Psi/t,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z'\ /\ ;$$

wtedy otrzymamy następującą funkcję:

$$f\ /t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ \dots\dots\dots\dots C_6/;$$

Udowodnimy, że otrzymana funkcja f nie zawiera zmiennej czasu t. Rzeczywiście ponieważ $\Psi/t, x, y, z, x', y', z'/$, jest według przypuszczenia całką układu równań /1/, zatem funkcja Ψ musi zachowywać stałą wartość C, a więc i funkcja $f/t, C_1, C_2, C_3, \dots\dots\dots, C_6/$, z niej powstająca przez zamianę x, y, z, x', y', z', ich wartościami, też zachowuje wartość stałą C przy d o w o l n y m t, tj. mamy, że :

$$f/\ t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\dots\dots\dots\dots C_6/ \equiv C;$$

a ta równość mówi nam, że zmienna t w wyrażeniu f nie wchodzi, albowiem w wypadku przeciwnym podobna tożsamość jest niemożliwą. Zatem mamy, że :

$$f/C_1, C_2, C_3,\dots\dots\dots\dots C_6/ \equiv C\ ;$$

czyli tak :

$$\Psi = f / \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, \Phi_6 /;$$

tj. siódma całka układu równań /1/ jest funkcją sześciu niezależnych całek tegoż układu.

Jeżeli zdołamy jakimś sposobem znaleść sześć niezależnych całek /4/ układu równań /1/, wtedy zadanie wyznaczenia ruchu punktu materialnego możemy uważać za rozwiązane, ponieważ wystarczy rozwiązać układ równań /4/ względem niewiadomych x, y, z, x', y', z', aby otrzymać wyrażenia /2/ i /3/, innymi słowy : skończone równania ruchu danego punktu i wyrażenia rzutów jego prędkości na osie współrzędnych w każdym momencie czasu t.

Gdy posiadamy nie sześć niezależnych całek układu /1/, lecz mniejszą ich liczbę, np. chociażby jedną całkę tego układu, to rozwiązanie zadania upraszcza się, ponieważ, wyrażając za pomocą posiadanej całki jedną z pośród liter x, y, z, x', y', z', jako funkcję pozostałych i czasu t, mamy możność obniżyć rząd danego układu równań różniczkowych /1/.

W obecnym i następnych rozdziałach wykażemy takie kombinacje zmiennych x, y, z, x', y', z', które przy zachowaniu pewnych warunków są całkami układu /1/ równań różniczkowych ruchu punktu materialnego

Przypuśćmy, że mamy układ równań ruchu /1/

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= X ; \\ my'' &= Y ; \\ mz'' &= Z ; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /1/$$

przy czym X, Y, Z mogą być funkcjami zmiennych t,x,y,z, x', y',z'.

Pomnożywszy pierwsze równanie tego układu przez y, a drugie - przez x i następnie odejmując pierwsze od drugiego, otrzymamy :

$$m / y'' . x - x'' . y / = Y.x - X.y \ldots\ldots\ldots /6/$$

Wyrażenie stojące w nawiasie $y'' . x - x'' . y$ jest pochodną względem czasu t od wyrażenia $y' . x - x' . y$, rzeczywiście, mamy przecież, że :

$$/y' . x - x' . y/' = y''.x + y'x' - x''y - x'y' = y''x - x''y .$$

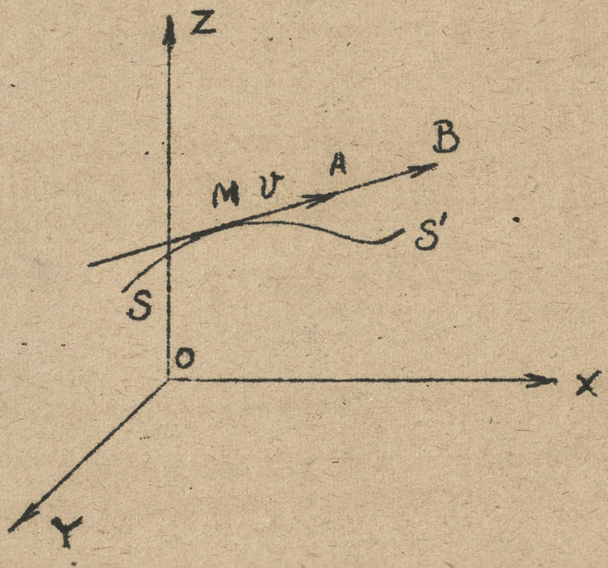
Dlatego równanie /6/ możemy przepisać w ten sposób :

$$\frac{d}{dt}\left[m/y'x - x'y/\right] = Y x - X.y \;;\ldots\ldots/7/$$

Wyrażenie, znajdujące się w prawej części równania/7/, jest momentem siły S/X,Y,Z/, działającej na punkt ruchomy o masie m, względem osi OZ./patrz statykę/. Aby zbadać lewą część równania /7/, wprowadzimy pojęcie o i l o ś c i r u c h u p u n k t u m a t e r i a l n e g o.

Określenie I l o ś c i ą r u c h u p u n k t u m a t e r i a l n e g o n a z y w a m y w e k t o r, w a r t o ś ć l i c z e b n a k t ó r e g o j e s t r ó w n a i l o c z y n o w i z m a s y p u n k t u m a t e r i a l n e g o i p r ę d k o ś c i t e g o p u n k t u, k i e r u n e k z a ś t e g o w e k t o r a j e s t z g o d n y z k i e r u n k i e m p r ę d k o ś c i.

Niech np. punkt M/X,y,z/ posiada masę m i prędkość $\overline{v} = \overline{AM}$ /rys.19/, wtedy wektor ilości ruchu przedstawi się odcinkiem $\overline{MB} = \overline{mv}$, skierowany wzdłuż stycznej do toru SS' w stronę ruchu punktu materialnego M.



Rys. 19.

Jednostka ilości ruchu jest jednostką złożoną, mianowicie:

jedn.il.ruchu=/jedn.masy/ x /jedn.prędk./= $\frac{\text{/jedn.masy/x/jedn.długości}}{}$ · /jedn.czasu/ $= M.L.T.^{-1}$

W jednostkach układu /C.G.S./ mamy:

$$\text{jedn.ilości ruchu} = \frac{/gr./\ x/\ cm/}{Sek.} = C.G.S.^{-1}$$

Rzuty ilości ruchu na osie współrzędnych OXYZ są następujące:

$\overline{MB}$, Cos/$\overline{MB}$,X/ = mv . cos/v,X/ = mx' ;

$\overline{MB}$, Cos/$\overline{MB}$,Y/ = mv . cos/v,Y/ = my' ;

$\overline{MB}$, Cos/$\overline{MB}$,Z/ = mv . cos/v.Z/ = mz' ;

Ponieważ ilość ruchu jest wektorem więc możemy rozpatrywać m o m e n t i l o ś c i r u c h u w z g l ę d e m p u n k t u i w z g l ę d e m o s i . Momenty ilości ruchu $\overline{mv}$ względem osi współrzędnych OX, OY i OZ, czyli rzuty momentu ilości ruchu względem początku współrzędnych O na te osie są następujące /patrz Statykę /.

$$M_X/\overline{mv}/ = m/z'y - y'z/ \;;$$

$$M_Y/\overline{mv}/ = m/x'z - z'x/ \;;$$

$$M_Z/\overline{mv}/ = m/y'x - x'y/ \;;$$

Skąd wynika, że

$$M/\overline{mv}/ = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2} = \sqrt{/y'x - x'y/^2 + /x'z - z'x/^2 + /z'y - y'z/^2}$$

Widzimy zatem, że pod znakiem pochodnej $\frac{d}{dt}$ w lewej części równania /7/ znajduje się moment ilości ruchu naszego punktu M/x,y,z/ względem osi OZ. Możemy więc wysłowić równanie /7/ w ten sposób ;

p o c h o d n a w z g l ę d e m c z a s u m o m e n t u i l o ś c i r u c h u w z g l ę d e m o s i /OZ/ j e s t r ó w n ą m o m e n t o w i s i ł y d z i a ł a j ą c e j n a p u n k t r u c h o m y w z g l ę d e m t e j ż e o s i O Z .

Zupełnie analogicznie do poprzedniego, mnożąc pierwsze równanie układu /1/ przez z, trzecie równanie tegoż układu – przez x i odejmując następnie trzecie równanie od pierwszego znajdziemy ;

$$m/x''.z - z''.x/ = X.z - Z.x \;;$$

czyli ;

$$\frac{d}{dt}\left[m/x'z - z'x/\right] = X.z - Z.x; \ldots\ldots\ldots\ldots /8/$$

Wreszcie mnożąc trzecie równanie przez y i odejmując od niego równanie drugie układu /1/ poprzednio pomnożone przez z, otrzymamy ;

$$m/z''y - y''z/ = Z.y - Y.z \;;$$

czyli ;

$$\frac{d}{dt}\left[m/z'y - y'z/\right] = Z.y - Yz \ldots\ldots\ldots /9/$$

Równania /7/, /8/ i /9/ mówią nam, że p o c h o d n a w z g l ę d e m c z a s u m o m e n t u i l o ś c i r u c h u w z g l ę d e m d o w o l n e j o s i j e s t r ó w n ą m o m e n t o w i s i ł y, d z i a ł a j ą c e j n a p u n k t r u c h o m y w z g l ę d e m t e j ż e o s i .

Powyższą własność ruchu punktu materialnego nazywamy "z a s a d ą m o m e n t ó w i l o ś c i r u c h u".

Przypuśćmy, że siła S, działająca na punkt ruchomy stale podczas ruchu znajduje się w jednej i tej samej płaszczyźnie, np. z osią OZ, innymi słowy : siła S stale jest albo do tej osi równoległą, albo też ją przecina. Wtedy moment siły względem osi OZ jest zerem, tj.:

$$Y.x - X.y = 0 ;$$

i równanie /7/ daje nam, że :

$$\frac{d}{dt}\left[m / y'x - x'y / \right] = 0;$$

skąd wyciągamy wniosek, że podczas ruchu punktu materialnego zachodzi taka zależność;

$$y'x - x'y = C_1 \text{ ,} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /10/$$

przy czym C_1 jest całą dowolną.

Zatem w rozpatrywanym wypadku :

$$y'x - x'y = C_1 ;$$

jest niczym innym, jak p i e r w s z ą c a ł k ą układu /1/ równań różniczkowych ruchu.

Podobnie, gdyby siła S działająca na punkt ruchomy, posiadała moment względem jakiej bądź innej osi równym zeru, to mielibyśmy :

$$X.z - Z.x = 0 ;$$

$$\text{i} \qquad Z.y - Y.z = 0 ;$$

skąd wynikałoby, że istnieją dwie p i e r w s z e c a ł k i układu /1/, mianowicie

$$x'z - z'x = C_2 ; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /11/$$

$$z'y - y'z = C_3 ; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /12/$$

Gdy siła S posiada momenty równe zeru jednocześnie względem trzech osi współrzędnych, co może być, gdy siła S stale przechodzi przez początek współrzędnych O, czyli innymi słowy, jest siłą ś r o d k o w ą, wtedy mamy naraz t r z y p i e r w s z e c a ł k i układu równań ruchu, zachodzą bowiem wtedy jednocześnie zależności /10/, /11/i /12/.

Podamy teraz geometryczną interpretację tych całek pierwszych. Weźmiemy np. wyrażenie $y'x - x'y$ i zrobimy w nim zamianę zmiennych, wprowadzając zamiast współrzędnych Kartezjusza, współrzędne biegunowe na płaszczyźnie XOY, mianowicie /rys.20/:

$$x = \rho\cos\alpha \; ; \; y = \rho\sin\alpha \; ;$$

Wtedy będziemy mieli:

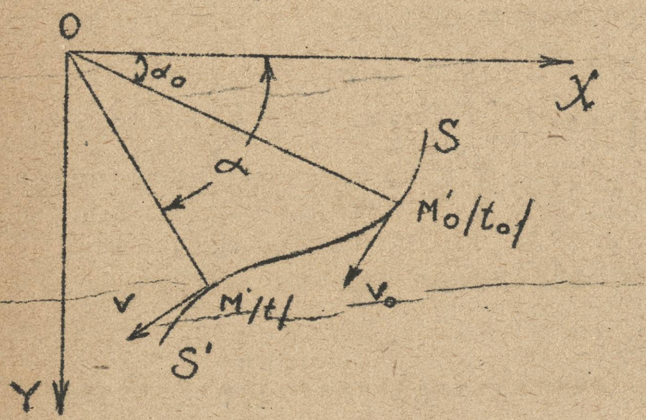
$$x' = \rho'\cos\alpha - \rho\alpha'\sin\alpha \; ,$$

i

$$y' = \rho'\sin\alpha + \rho\alpha'\cos\alpha \; ;$$

Z tych dwóch zależności wynika, że :

$$y'x - x'y = \rho^2\alpha' \; ;$$



Rys.20

Niech na rys. 20 krzywa linia SS' jest rzutem toru danego punktu na płaszczyznę XOY, M' jest rzutem punktu ruchomego M; M_o' jego położenie początkowe w momencie czasu $t=t_o$.

Rozpatrzymy pole płaszczyzny XOY, ograniczone przez promienie wodzące punktów M_o' i M' : OM_o' i OM' i łukiem krzywej linii SS' pomiędzy punktami M_o' i M_o : $\overset{\frown}{M_o M'}$; pole to S_1 jest pewną funkcją czasu t, albowiem ono zmienia się wraz z położeniem promienia wodzącego OM', punktu M'.

Łatwo przekonać się, że

$$d S_1 = \frac{1}{2}\rho^2 d\alpha \; ;$$

Zatem :

$$\frac{dS_1}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\alpha' \; ;$$

więc :

$$y' x - x'y = \rho^2\alpha' = 2\frac{dS_1}{dt} \; .$$

Dlatego też pierwsza całka /10/ równań ruchu /1/ może być przepisana w ten sposób :

$$\frac{dS_1}{dt} = \frac{1}{2}C_1 = \frac{1}{2}\rho^2\alpha' ,$$

czyli, oznaczając stałą liczbę $\frac{1}{2}C_1$ przez małą literę c_1, będziemy mieli :

$$\frac{dS_1}{dt} = c_1 = \frac{1}{2}\varrho^2\alpha' \text{ ..../13/}$$

całkując pierwszą całkę/13/, znajdziemy:

$$S_1 = c_1 /t - t_0/ \text{ ..../14/}$$

tj. pole, opisane przez promień wodzący rzutu punktu ruchomego na płaszczyznę współrzędnych XOY, zmienia się proporcjonalnie do czasu t.

Z powodu tej geometrycznej własności całki /10/ danego układu równań ruchu /1/, nazywamy tę całkę /10/ "całką pól".

Zupełnie tak samo równania :

$$x'z - z'x = C_2 \quad \text{i} \quad z'y - y'z = C_3,$$

wyrażają, iż pola, zakreślone przez rzuty promienia wodzącego punktu ruchomego M / x, y, z/ na płaszczyzny współrzędnych XOZ i YOZ, są proporcjonalne do czasu ich zakreślenia.

Jeżeli pomnożymy odpowiednio równania /10/,/11/ i /12/ przez x, y, z, a następnie dodamy do siebie, to jak łatwo widzieć lewa część okaże się zerem, i my otrzymamy zależność :

$$0 = C_1 x + C_2 y + C_3 z \text{ ..../15/}$$

Równanie /15/ mówi nam, że w wypadku istnienia wszystkich trzech pierwszych całek jednocześnie, tj. gdy siła S jest siłą środkową, tor punktu ruchomego jest krzywą płaską, przy czym płaszczyzna tej krzywej przechodzi przez początek współrzędnych O./rys.21./

Oprócz tego jest rzeczą oczywistą, że płaszczyzna ta przechodzi przez kierunek początkowej prędkości v_o punktu M.

Pole S_1 = pole $OM_o'M'$ jest rzutem na płaszczyznę XOY pola S to znaczy pola OM_oM, opisanego przez promień wodzący OM punktu ruchomego M. Ponieważ cosinus kąta, utworzonego przez płaszczyznę OM_oM i XOY,, jest równy :

$$\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}}$$

więc :

$$S_1 = S \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}} ;$$

Skąd wynika, że:

$$S = S_1 \frac{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}}{C_1}$$

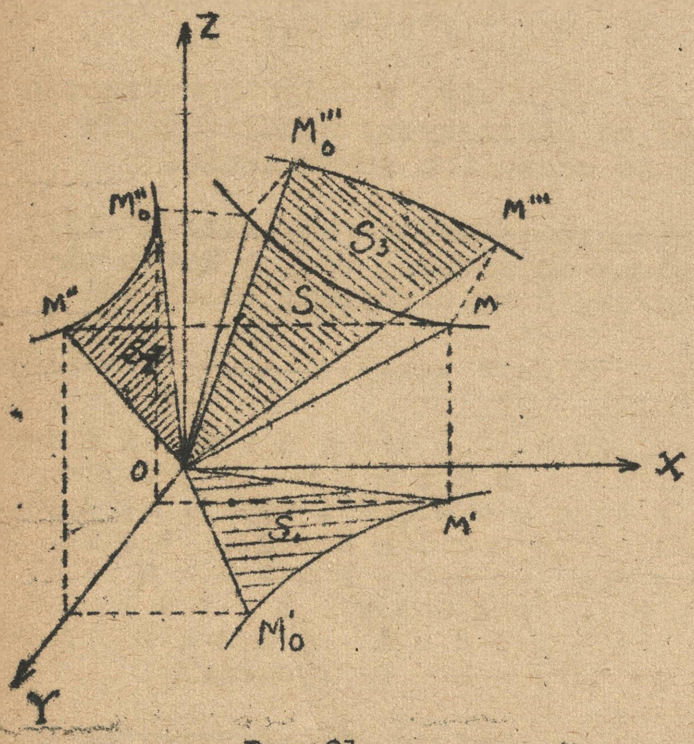
Ale mieliśmy, że :

$$S_1 = \frac{1}{2} C_1 / t - t_o / .$$

Dlatego też ostatecznie znajdujemy :

$$S = \frac{1}{2} / t - t_o / \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}$$

tj. pole OM_oM też jest proporcjonalne do czasu $t - t_o$ jego zakreślenia. Zatem mamy następujące twierdzenie:



Rys.21

jeżeli punkt materialny porusza się pod działaniem siły stale przechodzącej przez początek współrzędnych, to równania różniczkowe ruchu tego punktu posiadają następujące trzy całki pierwsze:

$$\left.\begin{aligned} y'x - x'y &= C_1 \\ x'z - z'x &= C_2 \\ z'y - y'z &= C_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{..........................} /16/$$

n a z y w a n e " c a ł k a m i p ó l " i w y r a ż a j ą c e , ż e r z u t y n a p ł a s z c z y z n y w s p ó ł r z ę d n y c h p o l a , o p i s a n e g o p r z e z p r o m i e ń w o d z ą c y d a n e g o p u n k t u r u c h o m e g o , s ą p r o p o r c j o n a l n e d o c z a s u i c h z a k r e ś l e n i a.

Prawo powyższe , noszące nazwę " z a s a d y p ó l ", należy do Newtona.

R o z d z i a ł V.

Z a s a d a p r a c y, c z y l i z a s a d a e n e r g i i k i n e t y c z n e j.

R ó w n a n i a ruchu punktu materialnego :

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= X ; \\ my'' &= Y ; \\ mz'' &= Z ; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots /1/$$

w wielu wypadkach posiadają prócz całek pól, jeszcze jedną całkę; aby ją otrzymać napiszemy następujące tożsamości:

$$\left.\begin{aligned} x'dt &= dx \\ y'dt &= dy \\ z'dt &= dz \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots /2/$$

a następnie pomnożymy odpowiednio pierwsze równanie /1/przez pierwszą równość /2/, drugie równanie /1/ przez drugą równość /2/, trzecie równanie /1/ przez trzecią równość /2/ i dodamy wzajemnie otrzymane rezultaty, wtedy znajdziemy, że :

$$m/x''x'dt + y''y'dt + z''z'dt/ = Xdx + Ydy + Zdz ;$$

lecz biorąc pod uwagę, że :

$$x''dt = dx' ,$$

$$y''dt = dy' ,$$

$$z''dt = dz' ,$$

przepiszemy poprzednią równość w ten sposób :

$$m/x'dx' + y'dy' + z'dz'/ = Xdx + Ydy + Zdz ;$$

Ponieważ zaś trójmian:

$$x'dx' + y'dy' + z'dz' = \frac{1}{2} d \left[x'^2 + y'^2 + z'^2 \right] = \frac{1}{2} d \ / v^2 /$$

przy czym v jest prędkością punktu ruchomego w rozpatrywanym momencie czasu t, więc ostatecznie mamy :

$$d/\frac{1}{2}mv^2/ = Xdx + Ydy + Zdz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /3/$$

W lewej części otrzymanego wzoru pod znakiem różniczki mamy wielkość $\frac{1}{2}mv^2$, t.j. połowę iloczynu masy punktu ruchomego i kwadratu jego prędkości; tę wielkość nazywamy s i ł ą ż y w ą , czyli e n e r g i ą k i n e t y c z n ą punktu materialnego o masie m i prędkości v. Wymiar siły żywej jest następujący :

$$\frac{/masa/ \; x \; /długość/^2}{/czas/^2} = ML^2T^{-2} ,$$

W jednostkach układu C G S, mamy :

$$\frac{/gr/ \; x \; /cm/^2}{/sek/^2} = G.C^2.S^{-2} .$$

Prawa część wzoru /3/ Xdx + Ydy + Zdz przedstawia t.zw. p r a c ę e l e m e n t a r n ą /c z ą s t e c z k o w ą/ siły S /X,Y,Z/, działającej na dany punkt, podczas przesunięcia dp /dx,dy,dz/.

Rzeczywiście z § 2 rozdziału VIII Statyki wiemy,że: e l e m e n t a r n ą p r a c ą s t a ł e j s i ł y j e s t i l o c z y n z w a r t o ś c i l i c z e b n e j s i ł y i r z u t u p r z e s u n i ę c i a p u n k t u j e j z a c z e p i e n i a n a k i e r u n e k s i ł y.

Zatem według tego określenia praca siły S/rys.22/podczas przesunięcia p punktu jej zaczepienia A w kierunku, tworzącym kąt α z kierunkiem siły S, jest następująca :

$$P = S.p.\cos\alpha .$$

Wyobraźmy sobie, że siła S została rozłożona na trzy jej składowe w kierunkach trzech osi współrzędnych OX,OY,OZ,tak, że:

$$X = S\cos/S,X/ ,$$

$$Y = S\cos/S,Y/ ,$$

$$Z = S\cos/S,Z/ ,$$

przesunięcie p też rozłożymy na trzy jego składowe w kierunkach tych osi :

$$p_x = p\cos\lambda ,$$
$$p_y = p\cos\mu ,$$
$$p_z = p\cos\nu ,$$

wtedy będziemy mieli, że :

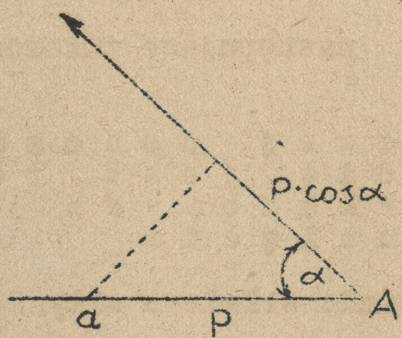
$$\cos\alpha = \cos/S,X/.\cos\lambda + \cos/S,Y/.\cos\mu + \cos/S,Z/.\cos\nu .$$

i zatem :

$$Sp\cos\alpha = S\cos/S,X/\ p\cos\lambda + S\cos/S,Y/p\cos\mu + S\cos/S,Z/.$$

$$p\cos\nu = Xp_x + Yp_y + Zp_z \qquad /4/$$

Zauważymy,że Xp_x jest pracą siły X podczas przesunięcia p_x, $Y.p_y$ jest pracą siły Y, a Zp_z jest pracą siły Z.



Rys.22.

Jeżeli siła S jest zmienną, a przesunięcie punktu - krzywoliniowe,wtedy dzieląc łuk krzywej Aa /rys.23/ na nieskończenie małe elementy, za pracę siły 9 podczas przesunięcia Aa punktu jej zaczepienia,uważamy granice sumy prac tej siły dla każdego takiego nieskończenie małego przesunięcia punktu jej zaczepienia.

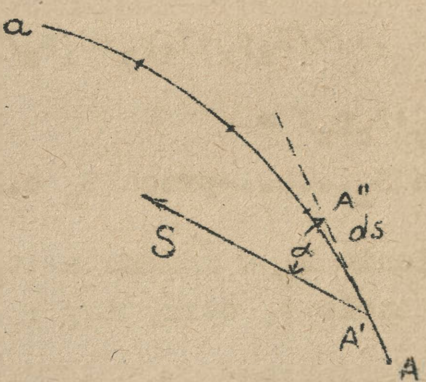
Niech równania krzywej Aa są następujące:

$$x = \varphi/t/, \quad y = \psi/t/, \quad z = \alpha/t/,$$

Jeżeli siła S jest też zadaną, jako funkcja czasu t, to jest, gdy wszystkie trzy jej składowe są znanymi nam funkcjami czasu t, a punkty A i a odpowiadają momentom czasu $t = t_o$ i $t=t_1$, wtedy według definicji będziemy mieli, że :

$$\text{praca siły } S = P = \lim\sum S.ds.\cos\alpha = \lim\sum S.\overline{A'A''}\cos\alpha .$$

Jeżeli współrzędne punktu A' są /x,y,z/, a punktu A $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$, wtedy możemy przy wyznaczeniu granicy sumy wziąć dx,dy i dz,zamiast Δx, Δy, Δz, i napisać, że :



Rys.23.

$$\lim\sum S.\overline{A'A''}.\cos\alpha =$$

$$= \int_{t_o}^{t1} /Xdx + Ydy + Zdz/ =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} /Xx' + Yy' + Zz'/\, dt \;;$$

ponieważ na zasadzie wzoru /4/, mamy :

$\overline{SA'A''} . \cos \alpha = X \Delta x + Y \Delta y + Z \Delta z = Xdx + Ydy + Zdz$ + nieskończenie małe wyższych rzędów.

Zatem trójmian :

$$Xdx + Ydy + Zdz = S\cos/S,ds/. /ds/$$

przedstawia pracę siły S/X,Y,Z/ podczas przesunięcia/dx,dy,dz/.

Z poprzedniego z łatwością wynika następujące twierdzenie:

P r a c a s i ł y w y p a d k o w e j p o d c z a s d o w o l n e g o p r z e s u n i ę c i a j e s t r ó w n ą s u m i e p r a c j e j s k ł a d o w y c h p o d c z a s t e g o ż p r z e s u n i ę c i a.

Rzeczywiście, niech wypadkowe W posiada składowe siły S_1, $S_2, S_3, \ldots\ldots S_n$. Oznaczymy przez X,Y,Z, składowe wypadkowej, a przez X_i, Y_i, Z_i, składowe siły S_i /i = 1,2,.........n/. Wtedy mamy, że :

$$X = X_1 + X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + X_n \;,$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + Y_n \;,$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + Z_n \;,$$

skąd praca siły :

$$W = Xpx+Ypy+Zpz = /X_1+X_2+\ldots+X_n/px + /Y_1+Y_2+\ldots+Y_n/py + $$
$$+ / Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n/pz =$$

$$= /X_1p_x+Y_1p_y+Z_1p_z/+/X_2p_x+Y_2p_y+Z_2p_z/+\ldots\ldots+/X_ip_x+Y_ip_y+Z_ip_z/+\ldots$$
$$\ldots\ldots+/X_np_x+Y_np_y+Z_np_z/ =$$

= praca S_1 + praca S_2 +.........+ praca S_1.......+praca S_n c.b.d.o.

Całkując równanie /3/ od położenia M_o w momencie t_o do położenia M punktu ruchomego w momencie t, otrzymamy :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = \int_{M_o}^{M} /Xdx+Ydy+Zdz/ = \int_{t_o}^{t} /Xx'+Yy'+Zz'/dt \;; \ldots\ldots /5/$$

Powyższy wzór wyraża następującą własność ruchu punktu materialnego :

p r z y r o s t e n e r g i i k i n e t y c z n e j p u n k t u r u c h o m e g o j e s t r ó w n y p r a c y s i ł y n a t e n p u n k t d z i a ł a j ą c e j p o d c z a s r o z p a t r y w a n e g o o k r e s u c z a s u .

Ta ważna własność ruchu punktu materialnego nie zawsze daje całkę równań ruchu, albowiem, aby obliczyć pracę siły, tj. znaleść całkę:

$$\int_{t_0}^{t} (Xx' + Yy' + Zz')dt \ ;$$

musimy posiadać wszystkie wielkości, znajdujące się pod znakiem całki w postaci funkcji czasu t, innymi słowy równania ruchu punktu materialnego muszą być już zcałkowanymi, a my przecież dopiero poszukujemy całkę tych równań. Lecz istnieje wiele takich wypadków, odpowiadających znacznej liczbie sił spotykanych w przyrodzie, kiedy możemy obliczyć powyższą całkę, tj. pracę siły, nie mając równań ruchu punktu zcałkowanymi, innymi słowy, nie znając toru punktu ruchomego. Wtedy powyższe prawo energii kinetycznej pozwoli nam napisać jedną całkę równań ruchu różniczkowych /1/.

Całkę pracy możemy obliczyć w tym wypadku, kiedy trójmian:

$$Xdx + Ydy + Zdz \ ;$$

jest r ó ż n i c z k ą z u p e ł n ą, tj. gdy istnieje taka funkcja

$$U(x, y, z),$$

różniczka zupełna której jest równą powyższemu trójmianowi, innymi słowy, gdy :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \equiv Xdx + Ydy + Zdz \ .$$

Ponieważ powyższa równość musi zachodzić dla d o w o l n y c h nieskończenie małych dx,dy,dz, więc ona jest równoważną z takiemi trzema równościami :

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x}, \\ Y &= \frac{\partial U}{\partial y}, \\ Z &= \frac{\partial U}{\partial z}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /6/$$

Zatem składowe siły, działającej na punkt ruchomy, w kierunkach osi współrzędnych OX, OY i OZ muszą być równe pochodnym cząstkowym względem odpowiednich współrzędnych od jednej i tej samej funkcji U/x,y,z/.

Funkcja U/x,y,z/ nazywa się f u n k c j ą s i ł ;- funkcję zaś V/x,y,z/ = - U/x,y,z/ nazywamy f u n k c j ą p o t e n c j a l n ą i mówimy, że w tym wypadku siły X,Y,Z posiadają potencjał sił.

Z równań /6/ wynikają następujące trzy zależności :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{\partial Y}{\partial x}; \\ \frac{\partial Y}{\partial z} &= \frac{\partial Z}{\partial y}; \\ \frac{\partial X}{\partial z} &= \frac{\partial Z}{\partial x}; \end{aligned}\right\} \qquad \text{..................../7/}$$

Rzeczywiście,np. pierwsze dwa równania/6/ dają nam, że :

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big/\frac{\partial U}{\partial x}\Big/ = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

i

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big/\frac{\partial U}{\partial y}\Big/ = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y};$$

a biorąc pod uwagę, że rezultat różniczkowania nie zależy od porządku różniczkowania, otrzymujemy pierwszą zależność/7/.

W rachunku całkowym udowania się, że warunki/7/ są nietylko niezbędne, lecz i wystarczające do istnienia funkcji sił U/x,y,z/, tj. aby trójmian

$$Xdx + Ydy + Zdz ;$$

był różniczką zupełną, równą dU; wtedy siły posiadają potencjał sił.

Gdy warunki /7/ są spełnione, wtedy, aby wyznaczyć funkcję sił U/x,y,z/, postępujemy w ten sposób: niech mamy :

$$dU = Xdx + Ydy + Zdz ; \text{........................../8/}$$

przy czym X,Y i Z są znane nam funkcje zmiennych x,y,z; utworzymy całkę:

$$\int X/x,y,z/dx = \omega/x,y,z/; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots /9/$$

przy czym, przy całkowaniu jej, uważamy zmienne y i z, jako stałe parametry. Następnie po znalezieniu funkcji $\omega/x,y,z/$ weźmiemy jej różniczkę zupełną:

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\omega}{\partial z}dz = Xdx + \frac{\partial\omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\omega}{\partial z}dz;$$

albowiem ze wzoru /9/ wynika, że :

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = X/x,y,z/.$$

Odejmując otrzymane wyrażenie $d\omega$ ze wzoru /8/, znajdziemy różnicę :

$$dU - d\omega = /Y - \frac{\partial\omega}{\partial y}/dy + /Z - \frac{\partial\omega}{\partial z}/dz;$$

n i e z a w i e r a j ą c ą z m i e n n e j - x. Rzeczywiście, wtedy pochodna względem x od tej różnicy musi być równą zeru; owa pochodna jest :

$$\left/\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\right/dy + \left/\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial x}\right/dz = \left/\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right/dy +$$

$$+\left/\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right/dz = 0. \qquad \text{C.b.d.o.}$$

Założymy :

$$y - \frac{\partial\omega}{\partial y} = M; \qquad Z - \frac{\partial\omega}{\partial z} = N;$$

i otworzymy całkę :

$$\int M/y,z/\,dy = \varphi/y,z/; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots /10/$$

przy czym znowu przy całkowaniu tej całki uważamy z, jako wielkość stałą.

Bierzemy różniczkę zupełną znalezionej funkcji $\varphi/Y,z/$, mamy :

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = Mdy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz;$$

ponieważ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = M/y,z/ ;$$

i odejmujemy ją od wyrażenia Mdy + Ndz, wtedy otrzymujemy różnicę :

$$dU - d\omega - d\varphi = /N - \frac{\partial \varphi}{\partial z}/dz ;$$

n i e z a w i e r a j ą c ą j u ż, a n i x, a n i t e ż y, l e c z t y l k o j e d n o Z.

Utworzymy i zcałkujemy następującą całkę :

$$\int / N - \frac{\partial \varphi}{\partial z} / dz = \psi/z/ + C; \qquad \text{..............} /11/$$

przy czym C jest stałą dowolną całkowania.

Mamy więc, że

$$\int /dU - d\omega - d\varphi / = \psi/z/ + C ;$$

skąd :

$$U = \omega/x,y,z/ + \varphi/y,z/ + \psi/z/ + C.$$

Powyższy wzór daje nam poszukiwaną funkcję sił U/x,y,z/, albowiem jej różniczka zupełna jest równą trójmianowi:

$$Xdx + Ydy + Zdz .$$

Rzeczywiście, na podstawie wzorów /9/,/10/ i /11/, mamy, że :

$$dU = d\omega + d\varphi + d\psi = Xdx + \frac{\partial \omega}{\partial y}dy + \frac{\partial \omega}{\partial z}dz + /Y - \frac{\partial \omega}{\partial y}/dy +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial y}dz + Zdz - \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Łatwo zauważyć, że powyższa metoda jest osnuta na tym, że wyrażenia :

$$M = Y - \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad i \quad N = Z - \frac{\partial \omega}{\partial z} ;$$

nie zawierają zmiennej x, a wyrażenie :

$$N - \frac{\partial \varphi}{\partial z} ;$$

nie zawiera jednocześnie zmiennych x i y.

Warunek, że M i N nie zawierają zmiennej x, analitycznie wyraża się w ten sposób:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad i \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0;$$

Ale :

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$$

i

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = \frac{\partial X}{\partial y};$$

więc:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y};$$

zatem, gdy pierwszy z warunków /7/ jest spełniony, wtedy $\frac{\partial M}{\partial x} = 0$, tj. M litery x nie zawiera. Analogicznie, gdy są spełnione pozostałe dwa warunki /7/, wtedy N nie zawiera litery x, a wyrażenie $N - \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ nie zawiera ani litery x, ani też litery y. Zatem warunki /7/ są konieczne i wystarczające dla istnienia potencjału danych sił.

Wyobraźmy więc sobie, że dane siły posiadają funkcję sił U/x,y,z/, którą wyznaczymy powyżej przytoczonym sposobem, wtedy równość :

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Xdx + Ydy + Zdz;$$

możemy przepisać w ten sposób :

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dU(x,y,z).$$

Całkując, znajdziemy :

$$\frac{mv^2}{2} = U(x,y,z) + C_1$$

przy czym : $v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$,

więc ostatecznie :

$$\frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) - U(x,y,z) = C_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /12/$$

Ze wzoru /12/ widzimy, że funkcja :

$$\frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) - U(x,y,z)$$

stale podczas ruchu punktu materialnego zachowuje wielkość stałą C_1. Więc wzór /12/ daje nam c a ł k ę r ó w n a ń r u c h u /1/. Stałą C_1 określimy na podstawie danych początkowych.

Całkę /12/ nazywamy c a ł k ą e n e r g i i k i n e t y c z n e j, c z y l i s i ł y ż y w e j.

Ponieważ :

$$dU/x,y,z/ = Xdx + Ydy + Zdz$$

jest pracą wykonaną przez siłę o składowych X,Y,Z w kierunkach osi współrzędnych podczas nieskończenie małego przesunięcia /dx,dy,dz/ punktu jej zaczepienia, tj. elementarną pracą tej siły, więc podczas przesunięcia od pewnego punktu M_1 o współrzędnych $/x_1,y_1,z_1/$ do jakiegoś punktu M_2 $/x_2,y_2,z_2/$ praca całkowita będzie następująca :

$$\int_{M_1}^{M_2} / Xdx + Ydy + Zdz / = \int_{t_1}^{t_2} /Xx' + Yy' + Zz'/ dt =$$

$$= U/ x_2,y_2,z_2/ - U/ x_1,y_1,z_1/ = U_2 - U_1 .$$

Widzimy więc, że gdy potencjał siły U jest niezależny od czasu t, wtedy praca skończona nie zależy, ani od drogi, wzdłuż której dany punkt przesunął się od położenia początkowego M_1 do położenia końcowego M_2, ani też od czasu, zużytego przez ten punkt na owe przesunięcie.

Należy zauważyć, iż funkcja sił U /x,y,z/ może być funkcją j e d n o z n a c z n ą, l u b t e ż w i e l o z n a c z n ą.

Gdy U jest funkcją jednoznaczną, wtedy wartości U_1 i U_2 - pozostają bez zmiany niezależnie od drgi, wzdłuż której punkt ruchomy przechodzi od położenia M_1 do położenia M_2.

W obecnym wypadku praca skończona na drodze pomiędzy położeniami M_1 i M_2 jest niezależna od kształtu tej drogi i w zupełności określa się końcowymi położeniami punktu ruchomego.

Gdy zaś funkcja sił U jest wieloznaczną, wtedy znaczenia U_1 i U_2 naogół zależą od kształtu drogi, zakreślonej przez punkt ruchomy pomiędzy położeniami końcowymi M_1 i M_2. Zatem przy potencjale wieloznacznym praca skończona naogół jest zależną od kształtu drogi. W tym wypadku należy wiedzieć jeżeli nie dokładnie tor punktu ruchomego, to chociażby pewne jego własności.

Gdy potencjał sił jest jednoznaczny i my bierzemy pracę wzdłuż całej tej drogi zamkniętej, wtedy ta praca siły S wzdłuż całej tej drogi jest równą zeru /rys.24/.

Gdy zaś potencjał sił jest wieloznaczną funkcją zmiennych x,y,z, wtedy praca wzdłuż zamkniętej drogi naogół nie jest równą zeru.

Jako przykład wieloznacznego potencjału sił rozpatrzymy następujący ruch / rys. 25/ : niech na punkt materialny działa siła :

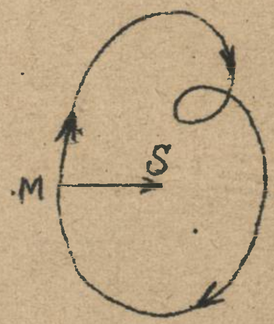
$$S = \frac{km}{r};$$

pozostająca stale prostopadłą do promienia wodzącego r punktu ruchomego. Rzuty siły S/X,Y/ na osie współrzędnych OX, OY są:

$$X = -\frac{km}{r}\sin\theta = -\frac{km}{r}\cdot\frac{y}{r};$$

$$Y = \frac{km}{r}\cos\theta = \frac{km}{r}\cdot\frac{x}{r}.$$

Praca elementarna siły S jest wtedy taka :



Rys.24.

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{km}{r^2}/xdy - ydx/ = \frac{km/xdy-ydx/}{x^2+y^2} =$$

$$= km\frac{\frac{xdy - ydx}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = km\frac{d/\frac{y}{x}/}{1+\frac{y^2}{x^2}} =$$

$$= km\, d/\operatorname{arctg}\frac{y}{x}/ = dU.$$

Więc funkcja sił jest :

$$U = km \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

lecz

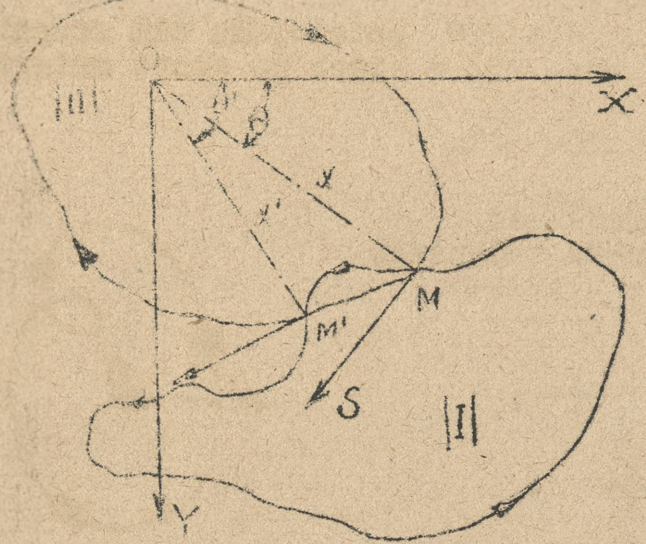
$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta .$$

zatem ostatecznie znajdziemy :

$$U = km\theta .$$

Gdy punkt ruchomy zakreśli tor /I/, omijający początek współrzędnych O, wtedy praca siły S wzdłuż tej zamkniętej drogi będzie równą zeru, rzeczywiście :

$$U_2 - U_1 = km\theta - km\theta = 0,$$



Rys. 25

przy czym θ jest kątem odpowiadającym początkowemu położeniu punktu ruchomego M.

Gdy zaś punkt M' zakreśli tor /II/, zawierający wewnątrz siebie początek O, wtedy praca wzdłuż tego zamkniętego toru będzie już nie zerem, lecz :

$$U_2 - U_1 = km\, \theta \Big|_{\theta'}^{\theta' + 2\pi} = $$

$$= 2km\pi \neq 0.$$

Jeżeli punkt M' obejdzie tor /II/ p razy, wtedy praca wzdłuż otrzymanego toru zamkniętego będzie taką:

$$U_2 - U_1 = km\, \theta \Big|_{\theta'}^{\theta' + 2\pi p} = 2km\pi p \neq 0.$$

Z powyższego przykładu widzimy, że praca wzdłuż zamkniętej drogi może być nie równą zeru, albowiem w tym przykładzie funkcja sił, czyli potencjał $U = km \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ jest funkcją wieloznaczną zmiennych x i y .

Wyobraźmy sobie, że punkt ruchomy M/ x,y,z/ zajął położenie $M_o/x_o, y_o, z_o/$, i siła nań działająca posiada potencjał sił U/ x,y,z/. Wtedy pewnemu położeniu $/x_o, y_o, z_o/$ punktu M odpowiada określona wartość potencjału U:

$$U / x_o, y_o, z_o / = C.$$

Przyrównamy funkcję U/ x,y,z/, przy czym x,y,z są wielkościami zmiennymi, do stałej C, otrzymamy następujące równanie :

$$U /x,y,z/ = C.$$

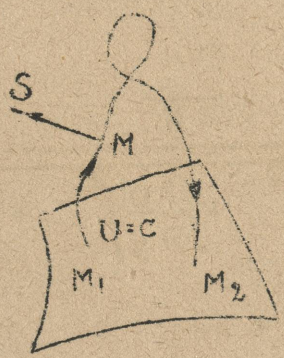
Równanie to przedstawia powierzchnię, przechodzącą przez punkt przestrzeni $M_o/x_o, y_o, z_o/$; funkcja sił we wszystkich punktach tej powierzchni posiada jednakową wartość stałą, równą C. Powierzchnia ta nazywa się p o w i e r z c h n i ą r ó w n y c h p o t e n c j a ł ó w, czyli e k w i p o t e n c j a l n ą p o w i e r z c h n i ą. Stałą C nazywamy p a r a m e t r e m p o w i e r z c h n i .

Gdy potencjał jest jednoznaczny, wtedy praca wykonana przez siłę, działającą na punkt M, gdy on, po wyjściu z pewnego punktu M_1 na powierzchni równych potencjałów, zakreśli jakąś drogę i powróci do drugiego położenia M_2 na tej samej powierzchni $U = C$ położonego, będzie koniecznie równą zeru, ponieważ we wszystkich punktach powierzchni $U = C$ potencjał posiada wartość stałą /rys. 26/.

Jeżeli mamy dwie powierzchnie równych potencjałów :

$$U(x,y,z) = C_1 \quad \text{i} \quad U(x,y,z) = C_2$$

wtedy praca, wykonana przez siłę podczas przesunięcia z jakiego bądź położenia na jednej powierzchni /C_1/ do jakiego bądź położenia na drugiej powierzchni /C_2/, zawsze jest jedną i tą samą i równa się r ó ż n i c y wartości parametrów tych powierzchni : $C_2 - C_1$.



Rys. 26.

Ze wzoru /12/ wynika, że każdy raz, kiedy punkt ruchomy, podczas swego ruchu, przechodzi przez jedną i tę samą powierzchnię równych potencjałów, to on posiada jednakową co do wartości liczebnej prędkość v; zmienia się tylko kierunek prędkości v.

Ponieważ kierunek siły $S(X,Y,Z)$ jest określony za pomocą wzorów :

$$\cos(S,X) = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};$$

$$\cos(S,Y) = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};$$

$$\cos(S,Z) = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};$$

a cosinusy kątów pomiędzy normalną dodatnią N do powierzchni równych potencjałów ;

$$U(x,y,z) - C = 0$$

i temiż osiami współrzędnych CX, OY i OZ są następujące :

$$\cos/N,X/ = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\sqrt{\left/\frac{\partial U}{\partial x}\right/^2 + \left/\frac{\partial U}{\partial y}\right/^2 + \left/\frac{\partial U}{\partial z}\right/^2}}$$

$$\cos/N,Y/ = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\sqrt{\left/\frac{\partial U}{\partial x}\right/^2 + \left/\frac{\partial U}{\partial y}\right/^2 + \left/\frac{\partial U}{\partial z}\right/^2}}$$

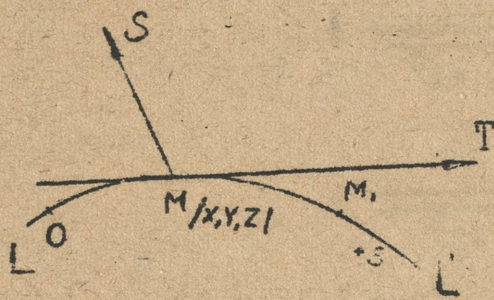
$$\cos/N,Z/ = \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{\sqrt{\left/\frac{\partial U}{\partial x}\right/^2 + \left/\frac{\partial U}{\partial y}\right/^2 + \left/\frac{\partial U}{\partial z}\right/^2}}$$

przy czym $\frac{\partial U}{\partial x} = X$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Y$, $\frac{\partial U}{\partial z} = Z$,

więc kierunek siły S i normalne N są zgodne ze sobą,innymi słowy :

siła S, posiadająca potencjał i działająca na punkt materialny, jest skierowaną wzdłuż dodatniej normalnej do odpowiedniej powierzchni równych potencjałów.

Wyznaczymy wyrażenie rzutu siły S, posiadającej potencjał sił U/x,y,z/,na kierunek stycznej do danej krzywej linii.Niech /rys.27/ LL' jest ową krzywą linią a MT styczną w punkcie M na tej krzywej.Obierzemy dowolnie punkt O na krzywej LL' i będziemy uważali go, jako początek łuku krzywej.Styczną MT skierujemy w stronę wzrastających,czyli dodatnich łuków.Gdy punkt M przesunie się w położenie M_1 na krzywej LL'



Rys.27.

odległe od początkowego o łuk ds, wtedy współrzędne punktu M_1 będą następujące :

$$x + ds\frac{dx}{ds};\quad y + ds\frac{dy}{ds};\quad z + ds\frac{dz}{ds}.$$

Uważając współrzędne x,y,z za funkcje łuku s, będziemy mieli:

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz=\Big/\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial U}{\partial Y}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds}\Big/ds=$$

$$=\frac{dU}{ds}ds.$$

Z drugiej zaś strony trójmian :

$$\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds}=$$

$$=S\left[\cos/S,X/\cdot\cos/T,X/+\cos/S,Y/\cdot\cos/T,Y/+\cos/S,Z/\cdot\cos/T,Z/\right]=$$

$$=S\cos/S,T/;$$

więc:

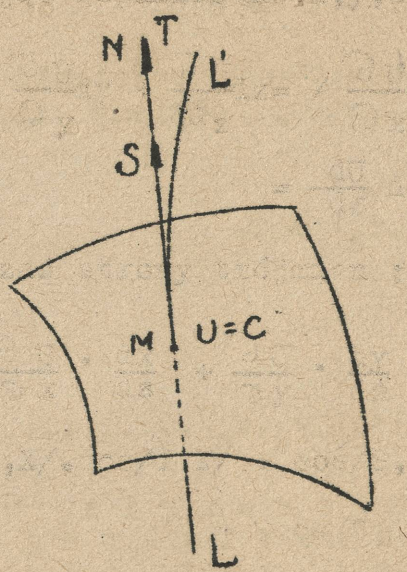
$$S\cos/S,T/=\frac{dU}{ds}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /13/$$

Przypuśćmy teraz, że krzywa LL' przecina prostopadle powierzchnię równych potencjałów U = C/ rys.28/.Wtedy styczna MT do krzywej LL' w punkcie przecięcia się M będzie jednocześnie normalną w tym punkcie M do powierzchni równych potencjałów. Oznaczając przez dn element normalny, możemy powyższy element krzywej ds zamienić przez różniczkę dn, będącą też wielkością dodatnią. Na zasadzie wzoru /13/ mamy więc, że :

$$S\cdot\cos/S,N/=\frac{dU}{dn}=$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dn}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dn}+$$

$$+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dn}.$$



Rys.28.

Wyrażenie $\frac{dU}{dn}$ nazywamy zwykle p o c h o d n ą n o r m a l n ą .Lecz wiemy już, że siła mająca potencjał, jest skierowaną wzdłuż normalnej do powierzchni U / C, zatem jej rzut na normalną jest + S, lub też - S;

stąd wynika, że :

$$\frac{dU}{dn} = S, \text{ gdy } \frac{dU}{dn} > 0 ;$$

i

$$\frac{dU}{dn} = - S; \text{ gdy } \frac{dU}{dn} < 0.$$

Gdy pochodna normalna $\frac{dU}{dn}$ jest dodatnią, wtedy wartość potencjału $U/x,y,z/$ wzrasta wraz z N, tj. w kierunku normalnej, albowiem różniczka $dn > 0$. W tym wypadku normalną MN nazywamy d o d a t n i ą. Dodatnia normalna jest skierowaną w tę stronę przestrzeni, w której różnica $U/x,y,z/-C$, będąca na powierzchni równych potencjałów $/U = C/$ zerem, jest wielkością dodatnią.

W i ę c s i ł a, m a j ą c a p o t e n c j a ł i p r z y ł o ż o n a d o p u n k t u m a t e r i a l n e g o j e s t z a w s z e s k i e r o w a n ą w z d ł u ż d o d a t n i e j n o r m a l n e j d o p o w i e r z c h n i r ó w n y c h p o t e n c j a ł ó w, p r z e c h o d z ą c e j p r z e z r o z p a t r y w a n y p u n k t.

Określimy we wzorze /12/, przedstawiającym całkę energii kinetycznej, stałą dowolną C_1. Gdy warunki początkowe są takie, że przy $t = t_o$, musi być

$x = x_o$, $y = y_o$, $z = z_o$ i $/x'/_o = a$, $/y'/_o = b$, $/z'/_o = c$, tj.:

$$v_o^2 = a^2 + b^2 + c^2 ,$$

innymi słowy, gdy wiemy zgóry początkowe położenie i początkową prędkość punktu ruchomego, wtedy będziemy mieli :

$$\frac{mv_o^2}{2} = U/x_o,y_o,z_o/ = C_1 ;$$

a więc musi być

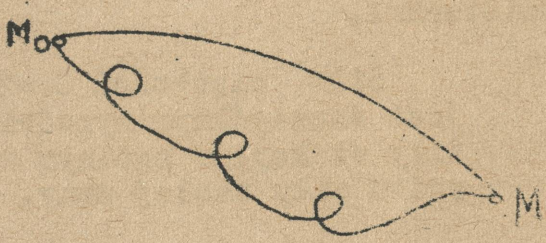
$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2} = U/x,y,z/ - U/x_o,y_o,z_o/ \qquad /14/$$

Z a t e m p r z y r o s t e n e r g i i k i n e t y c z n e j p u n k t u m a t e r i a l n e g o j e s t r ó w n y r ó ż n i c y w a r t o ś c i p o t e n c j a ł u d l a k o ń c o w y c h p o ł o ż e ń p u n k t u.

Gdy U jest funkcją jednoznaczną, wtedy wartości U, jak wiemy, nie zależą od kształtu drogi pomiędzy odpowiednimi położeniami $/x_o,y_o,z_o/$ i $/x,y,z/$ punktu ruchomego.

Więc przy j e d n o z n a c z n y m p o t e n c j a l e p r z y r o s t e n e r g i i k i n e t y c z n e j n i e z a l e ż y o d k s z t a ł t u d r o g i p o m i ę d z y k o ń c o w y m i p o ł o ż e n i a m i p u n k t u.

Dla dowolnej drogi pomiędzy tymi punktami /Rys.29/ otrzymamy jeden i ten sam przyrost energii kinetycznej. Możemy wtedy powiedzieć, że przy jednoznacznym potencjale $U/x,y,z/$ równanie /14/ wyraża p r a w o z a c h o w a n i a e n e r g i i k i n e t y c z n e j, c z y l i s i ł y ż y w e j p u n k t u m a t e r i a l n e g o.



Rys.29.

Jeżeli zaś potencjał $U/x,y,z/$ jest funkcją wieloznaczną, wtedy równanie /14/ chociaż pozostaje prawomocnem, lecz już nie wyraża prawa zachowania energii kinetycznej, albowiem przyrost siły żywej może być zależnym od kształtu drogi pomiędzy punktami końcowymi M_o i M.

Oznaczając we wzorze /14/:

$$\frac{mv_o^2}{2} - U/x_o,y_o,z_o/ = h ;$$

będziemy mieli :

$$\frac{mv^2}{2} = U / x,y,z/ + h \qquad /15/$$

a po wprowadzeniu wzamian funkcji sił $U/x,y,z/$ funkcję potencjalną $V/x,y,z/$ otrzymamy :

$$\frac{mv^2}{2} + V / x,y,z/ = h \qquad /16/$$

Wielkość $V/x,y,z/$ nazywamy zazwyczaj e n e r g i ą p o t e n c j a l n ą punktu materialnego.

Wzór /16/ wyraża własność ruchu punktu pod działaniem sił, posiadających potencjał, z w a n e p r a w e m z a c h o w a n i a e n e r g i i. To prawo możemy wysłowić w ten sposób:

P o d c z a s r u c h u p u n k t u m a t e r i a l n e g o p o d d z i a ł a n i e m s i ł, p o s i a d a j ą c y c h p o t e n c j a ł, s u m a e n e r g i i k i n e t y c z n e j i p o t e n c j a l n e j p o z o s t a j e s t a l e n i e z m i e n n a.

Istnieje wiele sił mających potencjał; najprostsze pośród nich są: s i ł a c i ę ż k o ś c i, s i ł y p r z y c i ą g a n i a i o d p y c h a n i a, gdy są zależne jedynie od odległości od środka.

W w y p a d k u s i ł y c i ę ż k o ś c i, obierając oś OZ pionowo skierowaną ku dołowi, będziemy mieli, że :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = mg .$$

Więc wypada, że praca elementarna siły ciężkości jest :

$$Xdx + Ydy + Zdz = mgdz = dU$$

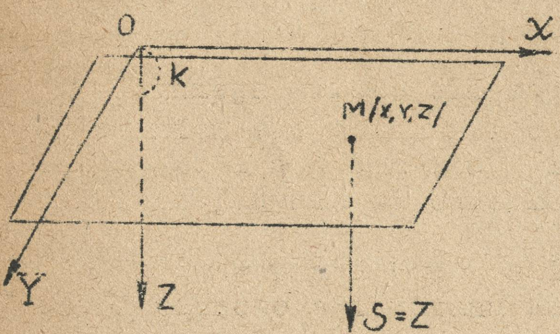
i dlatego :

$$U = mgz + C,$$

przy czym C jest stałą dowolną całkowania. Powierzchnie równych potencjałów są wtedy następujące /rys.30/:

$$mgz - C = 0, \text{ czyli : } Z = k,$$

przy czym k jest parametrem powierzchni.



Rys.30.

Siła ciężkości S =Z=mg jest szczególnym wypadkiem siły stałej; w ogólnym wypadku siły stałej mamy, że:

$$X = A, \quad Y = B, \quad Z = C$$

i praca elementarna tej siły jest:

$$Xdx + Ydy + Zdz = Adx + Bdy + Cdz = d/Ax + By + Cz/ = dU,$$

skąd wynika, iż potencjał jest taki

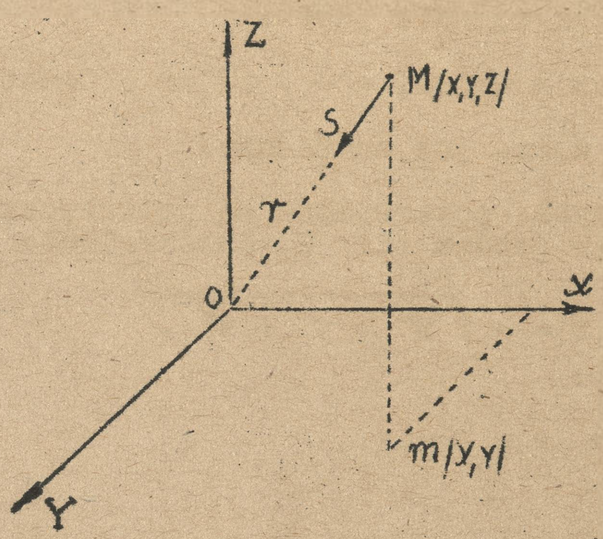
$$U /x,y,z/ = Ax + By + Cz + Const.$$

Powierzchnie równych potencjałów są płaszczyznami do siebie równoległymi, mianowicie :

$$Ax + By + Cz = k$$

i k jest parametrem tych płaszczyzn.

W w y p a d k u s i ł ś r o d k o w y c h ,tj. sił skierowanych do stałego środka, których wartość liczebna jest zależną jedynie od odległości od tego środka, obierzmy ó środek, jako początek współrzędnych /rys.31/.



Rys.31.

Niech na punkt ruchomy M działa siła S, skierowana wzdłuż promienia, wodzące go MO od M ku początkowi w wypadku siły przyciąga i od początku O ku punktowi M w wypadku siły odpychania. Oznaczymy długość OM = r, wtedy mamy, że:

$$OM^2 = r^2 = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Założyliśmy wyżej, ż wartość liczebna siły S jest j e d y n i e f u n k c j ą r tj.

$$S = f/r/ ;$$

Wtedy mamy wzory :

$$X = S \cos/S,X/ ;$$

$$Y = S \cos/S,Y/ ;$$

$$Z = S \cos/S,Z/ ;$$

a więc jest oczywistem, że

$$\cos/S,X/ = \cos/OM,X/ = \pm \frac{x}{r} ;$$

$$\cos/S,Y/ = \cos/OM,Y/ = \pm \frac{y}{r} ;$$

$$\cos/S,Z/ = \cos/OM,Z/ = \pm \frac{z}{r} ;$$

przy czym znak "+" odpowiada kierunkowi od O ku M, tj. sile odpychania, a "-" kierunkowi od M ku O, tj. sile przyciągania, jak na rys. 31. Więc mamy :

$$X = \pm \frac{x}{r} \cdot f/r/ ;$$

$$Y = \pm \frac{y}{r} \cdot f/r/ ;$$

$$Z = \pm \frac{z}{r} \cdot f/r/ ;$$

dlatego też praca elementarna takich sił jest :

$$Xdx + Ydy + Zdz = \pm \frac{xdx + ydy + zdz}{r} \cdot f/r/ ;$$

Ale:

$$xdx + ydy + zdz = \frac{1}{2} d/x^2 + y^2 + z^2/= \frac{1}{2}d/r^2/ = rdr ;$$

zatem :

$$Xdx + Ydy + Zdz = \pm f/r/ dr',$$

innymi słowy, powyższy trójmian jest różniczką zupełną i dlatego odpowiednia funkcja sił jest :

$$U/x,y,z/ = \pm \int f/r/ dr + Const. = \pm \int S. dr + Const.= F/r/.$$

Znaki $\pm$ mają tu znane już znaczenia.

Powierzchnie równych potencjałów są powierzchniami kul, o środkach położonych w środku siły S. Rzeczywiście :

$$U = F/r/ \quad i \quad r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

więc :

$$U = Const., \text{ gdy } r = Const.,$$

czyli :

$$x^2 + y^2 + z^2 = k.$$

C.b.d.o.

W szczególnym wypadku, gdy siła S jest siłą przyciągania, lub odpychania według prawa Newton'a, wtedy potencjał jest :

$$U = \pm \int Sdr + Const. = \pm \int \frac{km}{r^2} dr + Const. = \mp \frac{km}{r} + Const.$$

Możemy uogólnić poprzedni wypadek, mianowicie, gdy punkt ruchomy znajduje się pod działaniem kilku sił, skierowanych do środków s t a ł y c h i zależnych jedynie od odleg- od tych środków. Dla prostoty ograniczymy się do dwóch środków przyciągania.

Niech mamy dwa stałe, nieruchome środki przyciągania O_1 i O_2 o współrzędnych $/a_1,b_1,c_1/$ i $/a_2,b_2,c_2,/$ i niech na punkt $M/x,y,z/$ działają od nich powstałe siły :

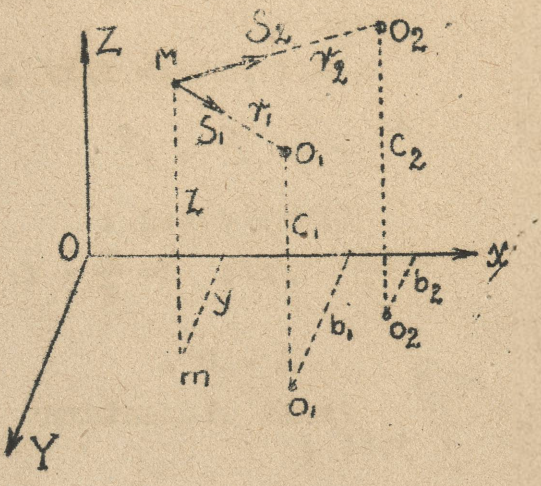
$$S = f_1 /r_1/ \text{ i } S_2 = f_2 /r_2/ ,$$

przy czym oczywiście / rys. 32/:

$$r_1^2=/a_1-x/^2+/b_1-y/^2+/c_1-z/^2;$$

$$r_2^2=/a_2-x/^2+/b_2-y/^2+/c_2-z/^2;$$

wtedy będziemy mieli:



Rys.32

$$X = X_1 + X_2 \;;$$
$$Y = Y_1 + Y_2 \;;$$
$$Z = Z_1 + Z_2 \;;$$

przy czym :

$$X_1 = S_1 . \cos/S_1, X/ = S_1 \cos/MO_1, X/ = f_1/r_1/\frac{a_1 - x}{r_1} \;;$$

$$Y_1 = S_1 . \cos/S_1, Y/ = S_1 \cos/MO_1, Y/ = f_1/r_1/\frac{b_1 - y}{r_1} \;;$$

$$Z_1 = S_1 . \cos/S_1, Z/ = S_1 \cos/MO_1, Z/ = f_1/r_1/ . \frac{c_1 - z}{r_1} \;;$$

i analogicznie wzory dla X_2, Y_2 i Z_2 ; więc praca elementarna dwóch sił S_1 i S_2 :

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{/a_1 - x/dx + /b_1 - y/dy + /c_1 - z/dz}{r_1} . f_1/r_1/ + \frac{/a_2 - x/dx + /b_2 - y/dy + /c_2 - z/dz}{r_2} . f_2/r_2/ .$$

Ale wiemy, że :

$$/a_1 - x/dx + /b_1 - y/dy + /c_1 - z/dz = - r_1 dr_1 \;;$$

i

$$/a_2 - x/dx + /b_2 - y/dy + /c_2 - z/dz = - r_2 dr_2 \;;$$

więc otrzymamy ostatecznie, że :

$$Xdx + Ydy + Zdz = - f_1/r_1/dr_1 - f_2/r_2/dr_2 \;;$$

a więc funkcja sił będzie :

$$U = - \int f_1/r_1/dr_1 - \int f_2/r_2/dr_2 + \text{Const.}$$

Analogicznie postąpilibyśmy w wypadku wielu środków O_1, $O_2 . . . . O_n$.

Rozpatrzymy jeszcze jeden przykład wyznaczania potencjału w niech siła S, działająca na punkt, jest prostopadłą do osi stałej i zależy jedynie od odległości punktu do tej osi.

Obierzmy oś OZ, jako daną oś /rys.33/, i załóżmy np.,że siła S jest siłą odpychającą, wtedy otrzymamy:

$$S = f\,/M'M/ = f/r/\ ;$$

i

$$r = x^2 + y^2$$

Dlatego też :

$$X = \frac{x}{r}\cdot f/r/;\quad Y = \frac{y}{r}\cdot f/r/;$$

$$Z = 0\,.$$

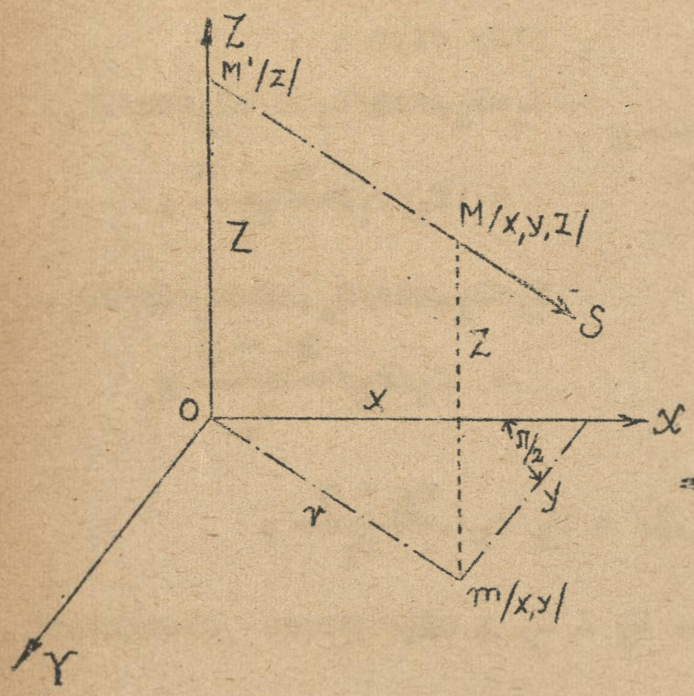
Praca elementarna jest :

$$Xdx + Ydy + Zdz =$$

$$= \frac{xdx + ydy}{r} f/r/ = f/r/dr.$$

Skąd potencjał :

$$U = \int f/r/dr + C = F/r/ + C.$$



Rys.33.

Zauważywszy jeszcze, że gdy składowe w kierunkach obranych osi współrzędnych siły S, działającej na punkt ruchomy, zależą jedynie od odpowiedniej współrzędnej, innymi słowy, gdy mamy :

$$X = f_1/x/\ ;\quad y = f_2/y/\ ;\quad z\ /\ f_3/z/\ ;$$

wtedy jest rzeczą oczywistą, że praca elementarna takiej siły S, będzie miała postać:

$$Xdx + Ydy + Zdz = f_1/x/dx + f_2/y/dy + f_3/z/\,dz;$$

i zawsze istnieje potencjał :

$$U/x,y,z/ = \int f_1/x/dx + \int f_2/y/dy + \int f_3/z/dz + \text{Const}.$$

W wypadku szczególnym może zdarzyć się, że :

$$f_1/x/ = f_2/y/ = 0\ ;$$

innymi słowy na punkt ruchomy działa siła $S=Z=f_3/z/$,prostopadła do stałej płaszczyzny XOY i zależna jedynie od odległości Z do tej płaszczyzny;

wtedy funkcja sił U będzie :

$$U/z/ = \int f_3/z/dz + \text{Const.}$$

Zasada energii kinetycznej posiada wiele różnych zastosowań w zagadnieniach technicznych. Np., gdy mamy możność obliczyć pracę sił, działających na bryłę, poruszającą się ruchem postępowym, wtedy możemy określić zmianę, czyli przyrost prędkości tej bryły, i odwrotnie, według zmiany prędkości ruchu bryły, możemy określić wartość liczebną siły S, nań działającej.

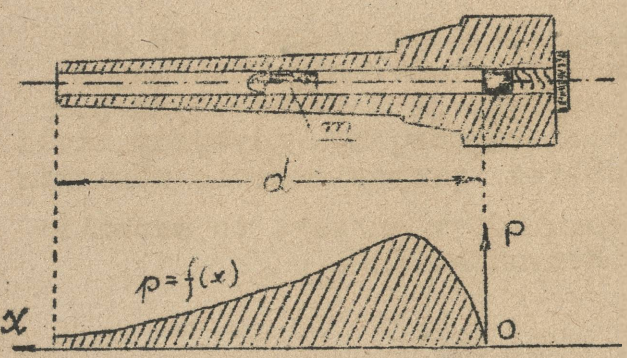
Tak np. jeżeli jest nam znany wykres zależności ciśnienia gazów prochowych od długości drogi, zakreślonej przez pocisk wewnątrz lufy działa, wtedy bezpośrednio możemy otrzymać prędkość początkową, z jaką pocisk wylatuje z lufy działa. Rzeczywiście, oznaczając przez p ciśnienie gazów, przez m - masę pocisku, przez s - pole przekroju lufy działa, prostopadłego do jego osi i przez d - długość tej lufy, będziemy mieli, że :

$$\frac{mv^2}{2} = \int_0^d S.dx = s\int_0^d p/x/dx,$$

ponieważ, siła S, działająca na pocisk wewnątrz działa jest stale równą iloczynowi s.p = S. Całkę

$$\int_0^d p/x/dx,$$

otrzymamy, obliczając według znanych sposobów przybliżonego wyznaczenia pola, ograniczonego krzywą, zadaną graficznie /rys.34/ i przedstawiającą zależność ciśnienia od drogi, przebytej przez pocisk.



Rys.34.

Albo też, niech mamy wagon kolejowy i przypuśćmy, że graniczna wielkość ugięcia sprężyny jego zderzaków jest a cm, a waga wagonu jest G tonn. Jaka musi być sprężystość obu zderzaków, ażeby one były w stanie pochłonąć /amortyzować/ zderzenie wagonu, puszczonego z prędkością V m/sek.

Energia kinetyczna wagonu jest :

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{2}.$$

Jeżeli sprężystość sprężyn zderzaka oznaczymy przez τ tonno/cm, wtedy praca wykonana podczas ugięcia się sprężyny od O aż do a cm, jest następująca :

$$P = \int_0^a \tau x dx = \frac{1}{2}\tau x^2 \Big|_0^a = \frac{1}{2}\tau a^2 \text{ tonna.cm.}$$

Praca wyznaczona przez parę zderzaków jest więc równą $\tau . a^2$ i dlatego będziemy mieli równanie energii kinetycznej:

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{(100v)^2}{2} = \tau a^2 ,$$

przy czym, oczywiście należało energię kinetyczną wagonu wyrazić w tonna/cm, ponieważ sprężystość sprężyn jest nam zadaną w tej mierze, a nie w tonnach x m.

Jeżeli np. waga wagonu, G = 20 tonn, v = 2 m/sek,a ugięcie sprężyn a = 10 cm, wtedy otrzymamy z powyższego równania :

$$\frac{20}{981} \cdot \frac{(200)^2}{2} = 100 . \tau ,$$

Skąd poszukiwana sprężystość :

$$\tau \cong 4,1 \text{ tonna/cm.}$$

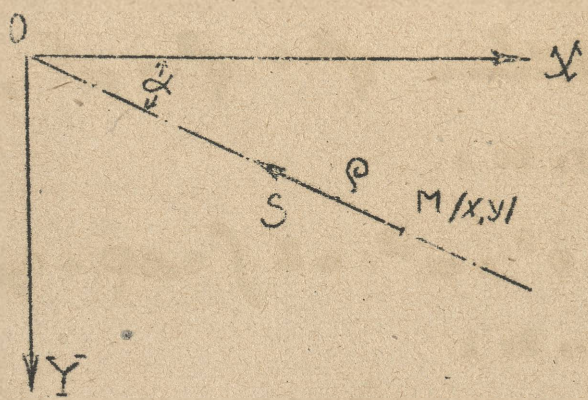
W podobnych obliczeniach należy zwracać uwagę na te jednostki, w których są wyrażone zadane wielkości; wstawiając je do wzorów, koniecznie musimy wyrazić je w jednakowych jednostkach miary, aby uniknąć wielkich błędów, np. gdybyśmy mieli prędkość wagonu V w metr/sek, lub też przyśpieszenie ziemskie g $\cong$ 9,81 m/sek^2; a prędkość wagonu 100 v cm/sek. to zrobilibyśmy w obu wypadkach błąd o współczynniku 100.

R o z d z i a ł VI.

R u c h p u n k t u m a t e r i a l n e g o p o d d z i a ł a n i e m s i ł y ś r o d k o w e j .

W rozdziale IV, na podstawie zasady pół, widzieliśmy,że gdy na punkt materialny działa siła środkowa, tj. siła skierowana do stałego środka, wtedy tor punktu jest krzywą płaską o płaszczyźnie, przechodzącej przez kierunek początkowej prędkości punktu ruchomego i przez środek, do którego siła jest skierowaną.

Obierzmy ten środek, jako początek współrzędnych O, a płaszczyznę ruchu, jako płaszczyznę współrzędnych XOY/rys.35/.



Rys. 35.

Podczas ruchu punktu M pod wpływem siły środkowej S mają miejsce: "zasada pól" i " zasada energii kinetycznej".

Zasada pól daje nam /patrz rozdział IV - /10/ następującą całkę pól:

$$y'x - x'y = C_1;$$

przy czym stała całkowania C_1 jest według danych początkowych:

$$C_1 = y'_o x_o - x'_o y_o .$$

Oznaczając przez ρ i α współrzędne biegunowe punktu M/x,y/ na obranej płaszczyźnie, będziemy mieli poprzednią całkę w następującej postaci :

$$\rho^2 \frac{d\alpha}{dt} = \rho^2 \dot{\alpha} = C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /1/$$

Zasada energii kinetycznej /rozdział V/ daje nam zależność w postaci ogólnej :

$$d\frac{mv^2}{2} = Xdx + Ydy + Zdz .$$

Dla dowolnej siły środkowej $\pm$ S mamy następujące wyrażenia jej rzutów na osie OX i OY :

$$X = \pm S . \frac{x}{\rho} ,$$

$$Y = \pm S . \frac{y}{\rho} ,$$

$$Z = 0 ,$$

gdzie znak "+" odpowiada sile odpychającej, a znak " - " sile przyciągającej.
Praca elementarna jest:

$$Xdx + Ydy + Zdz = \pm S.\frac{xdx + ydy}{\rho} = \pm S.\frac{d/x^2+y^2/}{2\rho} =$$

$$= \pm S . \frac{2\rho\, d\rho}{2\rho} = \pm S. d\rho = dU ;$$

i zasada energii kinetycznej daje następującą całkę :

$$\frac{mv^2}{2} = U + C_2 = \pm \int S.d\varrho + C_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /2/$$

Przekształcimy nieco wzór /2/ ; przy współrzędnych biegunowych mamy następujące wyrażenie dla prędkości punktu v/ patrz cz. II - Kinematyka /:

$$v^2 = \frac{d\varrho^2 + \varrho^2 d\alpha^2}{dt^2} = \varrho'^2 + \varrho^2 \cdot \alpha'^2 ,$$

więc ze wzoru /2/ otrzymamy, że :

$$\frac{m}{2} \cdot / \varrho'^2 + \varrho^2 \cdot \alpha'^2 / = \pm \int S.d\varrho + C_2.$$

Całka pól /1/ daje nam, że :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha' = \frac{C_1}{\varrho^2} ,$$

więc :

$$\frac{m}{2} / \varrho'^2 + \frac{C_1^2}{\varrho^2} / = \pm \int S.d\varrho + C_2 ,$$

różniczkując znajdziemy :

$$m/ \varrho' .d\varrho' - \frac{C_1^2}{\varrho^3} . d\varrho / = \pm S\, d\varrho \ldots\ldots\ldots /3/$$

Obierając kąt biegunowy α, jako zmienną niezależną, będziemy mieli :

$$\varrho' = \frac{d\varrho}{dt} = \frac{d\varrho}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\varrho}{d\alpha} \cdot \frac{C_1}{\varrho^2} = - C_1 \frac{d/\frac{1}{\varrho}/}{d\alpha} \ldots\ldots /4/$$

Dzieląc równanie /3/ przez różniczkę $d\alpha$, otrzymamy :

$$m/ \varrho' \frac{d\varrho'}{d\alpha} - \frac{C_1^2}{\varrho^3} \cdot \frac{d\varrho}{d\alpha} / = \pm S.\frac{d\varrho}{d\alpha} ;$$

wstawiając do niego zamiast ϱ' i $\frac{d\varrho'}{d\alpha}$ ich wyrażenie według wzoru /4/, znajdziemy :

$$m \left[\frac{C_1}{\varrho^2} \frac{d\varrho}{d\alpha} /-C_1 . \frac{d^2/\frac{1}{\varrho}/}{d\alpha^2}/ - \frac{C_1^2}{\varrho^3} \cdot \frac{d\varrho}{d\alpha} = \pm S.\frac{d\varrho}{d\alpha} .\right.$$

Ponieważ ϱ nie jest stałe, lecz zmienne, więc pochodna $\frac{d\varrho}{d\alpha}$ nie jest równą zeru, a więc mamy prawo podzielić obie części poprzedniego wzoru przez $\frac{d\rho}{d\alpha}$

wtedy :

$$\pm S = - \frac{mC_1^2}{\rho^2} \cdot \left[\frac{d^2/\frac{1}{\rho}/}{d\alpha^2} + \frac{1}{\rho} \right] ;$$

lub ostatecznie otrzymujemy wzór, zwany wzorem B i n e - t 'a:

$$S = \mp \frac{mC_1^2}{\rho^2} \cdot \left[\frac{d^2/\frac{1}{\rho}/}{d\alpha^2} + \frac{1}{\rho} \right] \ldots\ldots\ldots\ldots /5/$$

Należy zauważyć, że przed chwilą zrobiliśmy przypuszczenie, że ρ nie jest wielkością stałą, lecz koniecznie zmienną ale może być wypadek, gdy podczas ruchu ρ pozostaje stałe: $\rho = \rho_o$ = Const.,innymi słowy, gdy ruch jest obrotowy o promieniu ρ_o. Więc wzór Binet 'a w tym wypadku nie może być stosowany.

Wzór Binet'a daje możność określić siłę środkową, gdy jest zadany tor punktu, zakreślony pod działaniem tej siły. Rzeczywiście, wyrażając równanie zadanej krzywej /toru/ we współrzędnych biegunowych, przy czym biegun obieramy w danym środku siły, będziemy mieli zależność :

$$\rho = \Phi\,/\alpha/ ;$$

a wstawiając w równanie /5/, znajdziemy bezpośrednio wartość liczebną siły S, działającej na punkt o masie m, w zależności od promienia wodzącego ρ punktu ruchomego.Zatem, jaki by nie był płaski tor punktu, zawsze możemy wyznaczyć taką siłę środkową, jako funkcję odległości ρ , że punkt pod wpływem tej siły zakreśli zadany z góry tor. Jedynie tylko początkowe położenie punktu musi znajdować się na zadanej krzywej, a początkowa prędkość tego punktu musi być styczną do tej krzywej.

Zauważywy, że ze wzoru /3/, przyjmując czas t, jako zmienną niezależną, otrzymujemy :

$$m/\rho' \cdot \rho'' - \frac{C_1^2}{\rho^3} \cdot \rho'/ = S \cdot \rho' ,$$

a po skróceniu przez ρ' , znajdziemy, że :

$$m/\rho'' - \frac{C_1^2}{\rho^3}/ = S ;$$

czyli ostatecznie :

$$\rho'' = \frac{1}{m} S + \frac{C_1^2}{\rho^3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /6/$$

Otrzymane równanie charakteryzuje ruch punktu M wzdłuż jego promienia wodzącego.

Wzór Binet'a pozwala rozwiązać i odwrotne zadanie : zadana jest zależność siły środkowej od odległości punktu ruchomego od odpychającego, lub przyciągającego środka; wyznaczyć tor, zakreślony przez ten punkt ?

Gdy siła jest zadaną nam funkcją ρ , tj.

$$S = f/\rho/,$$

wtedy wzór Binet 'a /5/ możemy uważać, jako różniczkowe równanie poszukiwanego toru ; całkując to równanie, znajdziemy równanie tego toru w postaci skończonej.

Jako przykład rozpatrzymy ruch planet dookoła słońca. Wiemy, że astronom J. K e p l e r , opierając się na wynikach obserwacji, ustalił następujące prawo ruchu planet:

1/ Wszystkie planety poruszają się dookoła słońca wzdłuż elips, w ognisku których znajduje się środek słońca.

2/ Pola wycinków eliptycznych, zakreślonych przez promień wodzący, a łączący planety ze środkiem słońca, są proporcjonalne do czasu ich zakreślenia i:

3/ Kwadraty okresów obrotów planet dookoła słońca są proporcjonalne do sześcianów dużych pół osi, zakreślonych przez nie elips.

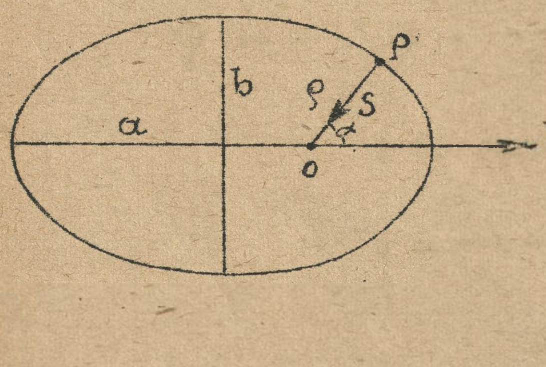
Opierając się na tych własnościach toru planety, wyznaczymy siłę, która na nie działa, przyjmując słońce jako nieruchome. Oznaczymy promień, wodzący planety przez ρ ,kąt, utworzony przez promień wodzący z dużą osią elipsy przez α ; pół osie elipsy - dużą przez a, małą przez b; okres obrotu planety dookoła słońca przez T/ rys. 36/. Na zasadzie pierwszego prawa J. Keplera, równanie toru jakiej bądź planety w płaszczyźnie jej ruchu jest :

$$\rho = \frac{p}{1 + e.\cos\alpha}, \ldots /7/$$

gdy oś biegunowa jest zgodną z dużą osią elipsy, a biegun znajduje się w ognisku O tej elipsy, przy czym parametr p jest :

$$p = a/1 - e^2/,$$

a e jak zwykle oznacza mimośród liczbowy elipsy.



Rys. 36.

Z równania toru /7/ wynika, że ;

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{p} / 1 + e.\cos\alpha /,$$

więc :

$$\frac{d / \frac{1}{\varrho} /}{d\alpha} = - \frac{e}{p} \sin\alpha$$

i

$$\frac{d^2 / \frac{1}{\varrho} /}{d\alpha^2} = - \frac{e}{p} \cos\alpha .$$

Wstawiając powyższe wyrażenia do wzoru Binet'a, otrzymamy, że siła przyciągająca jest :

$$S = - \frac{mC_1^2}{\varrho^2} \left[- \frac{e}{p} \cos\alpha + \frac{1}{p} / 1 + e.\cos\alpha / \right] = - \frac{mC_1^2}{p} \cdot \frac{1}{\varrho^2}, \ldots . /8/$$

przy czym m jest masą planety. Ze wzoru /8/ widzimy, że poszukiwana siła S jest proporcjonalną do masy, odwrotnie - proporcjonalną do kwadratu odległości i, że ta siła jest siłą przyciągającą, albowiem w wyrażeniu siły mamy znak "-".

Wyrażeniu /8/, siły S możemy nadać nieco inny kształt, korzystając z drugiego prawa Kepler'a. Mianowicie, ponieważ pole elipsy, zakreślonej przez planetę w czasie T jest :

$$\pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2},$$

/albowiem $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - a^2e^2 = a^2/1 - e^2/$; oczywiście $e = \frac{c}{a}$ / a ze wzoru /13/ rozdziału IV mamy ;

$$\frac{dS_1}{dt} = \frac{1}{2} \varrho^2 \alpha' = \frac{1}{2} C_1 ,$$

przy czym S_1 jest odpowiedniem polem, więc otrzymamy, że :

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi a^2\sqrt{1 - e^2}}{T} = \frac{1}{2} \varrho^2 \alpha' = \frac{1}{2} C_1 ;$$

zatem stała całki pól C_1, jest ;

$$C_1 = \frac{2\pi ab}{T} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1 - e^2}}{T}$$

i dlatego

$$\frac{C_1^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^4/1 - e^2/}{T^2 . a/1 - e^2/} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} . \qquad ..../9/$$

Ponieważ zaś, według trzeciego prawa Kepler'a: dla wszystkich planet, obracających się dookoła słońca, stosunek $\frac{a^3}{T^2}$ posiada jedną i tę samą wartość δ^2, więc dla wszystkich planet współczynnik $\frac{C_1^2}{p}$ ze wzoru/8/ jest :

$$\frac{C_1^2}{p} = 4\pi^2 \delta^2 = K^2 ;$$

przy czym, $K = 2\pi\delta$ jest wielkością stałą dla wszystkich planet i dlatego też może być określoną, gdy znamy ruch kuli ziemskiej i, przyjmując, jako jednostkę długości, dużą pół,oś orbity kuli ziemskiej, będziemy mieli :

$$a = 1 \; ; \quad T = 365{,}2563635 \text{ dób średniego czasu}$$

$$K = \frac{2\pi}{365{,}2563635} \cong 0{,}0172021 \qquad ..../10/$$

Otrzymana liczba K nazywa się w astronomii " S t a ł ą G a u s s 'a .

Więc, jeżeli, jako jednostkę długości, obierzemy dużą pół oś ziemskiej orbity, a czas będziemy mierzyć średnimi dobami, wtedy siła, działająca na planetę, znajdującą się w odległości ρ od środka słońca, będzie wyrażać się w sposób następujący :

$$S = - \frac{K^2 m}{\rho^2} \qquad ..../11/$$

Kwadrat stałej Gauss'a K^2 jest to siła przyciągania / znak "-" /, jaką wywiera słońce na jednostkę masy, gdy ona znajduje się od słońca na jednostkę odległości. Wzór /11/ mówi nam, że planety poruszają się pod działaniem s i ł y p r z y c i ą g a n i a d o s ł o ń c a o d w r o t n i e - p r o p o r c j o n a l n e j d o k w a d r a t u o d l e g ł o ś c i p l a n e t y o d s ł o ń c a i p r o p o r c j o n a l n e j d o m a s y t e j p l a n e t y . Jest to prawo N e w t o n 'a .

Rozpatrzymy teraz o g ó l n e z a g a d n i e n i e u r u c h u p u n k t u m a t e r i a l n e g o p o d d z i a ł a n i e m s i ł y ś r o d k o w e j , z a l e ż n e j j e d y n i e o d o d l e g ł o ś c i .

Ponieważ siła, działająca na punkt ruchomy, jest siłą środkową, więc zachodzą jednocześnie : " zasada pól " i "zasada energii kinetycznej ", zatem posiadamy dwie całki równań ruchu : całkę pól i całkę energii kinetycznej. Zauważymy, że nasza siła środkowa zależy j e d y n i e od odległości :

$$S = f/\rho/,$$

więc, jak wiemy z poprzedniego, istnieje funkcja potencjalna.

$$U = \pm \int f/\rho/\, d\rho + \mathrm{Const} = F/\rho/;$$

i dlatego całka energii kinetycznej jest :

$$\frac{mv^2}{2} = U + h,$$

a zauważywszy, że przy współrzędnych biegunowych :

$$v^2 = \rho'^2 + \rho^2 \alpha'^2$$

przepiszemy ostatnią całkę w taki sposób :

$$\rho'^2 + \rho^2 \alpha'^2 = 2U + 2h \dots\dots\dots\dots\dots /12/$$

Całka pól jest :

$$\rho^2 \alpha' = C; \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots /13/$$

Eliminując czas t, otrzymamy różniczkowe równanie toru punktu ruchomego;

Ponieważ $\rho^4 \alpha'^2 = C^2$, więc $\alpha'^2 = \frac{C^2}{\rho^4}$

a wstawiając do /12/, otrzymamy, że :

$$\rho'^2 + \frac{C^2}{\rho^2} = 2F/\rho/ + 2h;$$

ale :

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\alpha} \cdot \alpha' \quad \text{i} \quad \alpha' = \frac{C}{\rho^2},$$

więc :

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\alpha} \cdot \frac{C}{\rho^2}$$

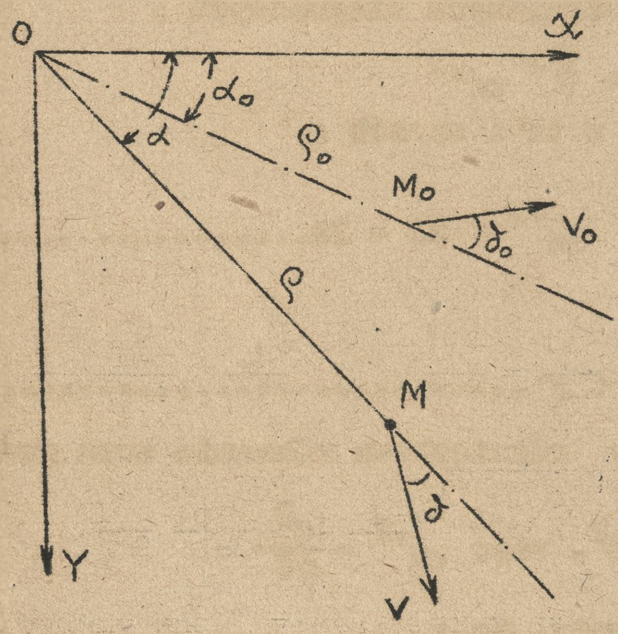
i dlatego różniczkowe równanie toru możemy przepisać tak:

$$\frac{1}{\rho^4}\left(\frac{d\rho}{d\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{c^2}\left[2\,F(\rho) + 2h\right],$$

czyli :

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\alpha} = \pm\frac{1}{c}\sqrt{2\,F(\rho) + 2h - \frac{c^2}{\rho^2}} \quad \text{..........(14)}$$

Zbadamy znak przed pierwiastkiem kwadratowym we wzorze /14/. Zawsze możemy mierzyć kąt biegunowy α w taką stronę, aby w momencie początkowym $t = t_0$ ten kąt wzrastał, innymi słowy, żeby było $(\alpha')_0 > 0$. Wtedy ze wzoru /13/ widzimy z łatwością, że $C > 0$, a dlatego znak prawej części wzoru /14/ zależy jedynie od znaku pochodnej $\frac{d\rho}{d\alpha}$; ale wiemy, że: $\frac{d\rho}{d\alpha} = \frac{\rho'}{\alpha'}$ i ponieważ $(\alpha')_0 > 0$, więc znak $\frac{d\rho}{d\alpha}$ zależy tylko od znaku ρ', które może być $>$, $<$, lub $= 0$.



Rys. 37.

Gdy więc $(\rho')_0 > 0$, wtedy przed pierwiastkiem /14/ należy przyjąć znak " + ".

Gdy $(\rho')_0 < 0$, wtedy we wzorze /14/ bierzemy znak " - ".

Gdy wreszcie $(\rho')_0 = 0$, wtedy v_0 jest prostopadłe do swego promienia wodzącego ρ_0 $(v_0 \perp \rho_0)$, i na rys. 37 kąt $\delta_0 = \frac{\pi}{2}$ /. Rzeczywiście, ponieważ $v^2 = \rho'^2 + \rho^2\alpha'^2$ i $(\rho')_0 = 0$, więc $v_0 = \rho_0^2\alpha_0'^2$, i dlatego prędkość v_0, nie posiadając składowej w kierunku promienia wodzącego ρ_0, jest prostopadłą do tego promienia /patrz Kinematyka, rodział V, wzór /13//.

W tym wypadku znak przed pierwiastkiem /14/ określimy według znaku drugiej pochodnej $\ddot{\rho}$ w momencie początkowym $t = t_0$. Rzeczywiście, ze wzoru /6/, mamy, że :

$$\varrho'' = \frac{1}{m} S + \frac{c^2}{\varrho^3} .$$

Ażeby określić $/\varrho''/_0$, musimy wiedzieć S_0. Ponieważ przy $t = t_0$ musi być $\varrho = \varrho_0$, $\alpha = \alpha_0$/możemy uważać np. $\alpha_0 = 0$/, $\varrho' = /\varrho'/_0$ i $\alpha' = /\alpha'/_0$, czyli inaczej $v = v_0$ i $/\widehat{v_0, \varrho_0}/ = \delta_0$, więc według /13/ znajdziemy :

$$\varrho_0^2 \alpha_0' = c ,$$

a ponieważ możemy napisać, że :

$$\varrho^2 \alpha' = \varrho \cdot \varrho \alpha' = \varrho v \sin/v, \varrho/.$$

więc wypada, że :

$$c = \varrho_0 v_0 \sin/v_0, \varrho_0/ = \varrho_0 v_0 \sin \delta_0 .$$

Wzór /12 / daje nam :

$$2h = \varrho_0'^2 + \varrho_0^2 \alpha_0'^2 - 2U_0 = v_0^2 - 2F/\varrho_0/.$$

Zatem , mając ϱ_0 i c, znajdziemy :

$$/\varrho''/_0 = \frac{1}{m} S_0 + \frac{c^2}{\varrho_0^3} = \frac{1}{m} f/\varrho_0/ + \frac{c^2}{\varrho_0^3} .$$

Jeżeli wypadnie, że $/\varrho''/_0 > 0$, wtedy przed pierwiastkiem /14/ bierzemy znak " + " ;

Jeżeli zaś wypadnie, że $/\varrho''/_0 < 0$, wtedy przed tym pierwiastkiem musimy obrać znak " - ".

Wreszcie może zdarzyć się , że $/\varrho''/_0 = 0$, tj.

$$\frac{1}{m} f/\varrho_0/ + \frac{c^2}{\varrho_0^2} = 0,$$

co może być jedynie wtedy, gdy nasza siła środkowa S jest s i ł ą p r z y c i ą g a j ą c ą, innymi słowy $S = - f/\varrho/$, albowiem wtedy :

$$f/\rho_0/ = -m\frac{c^2}{\rho_0^3} < 0.$$

W tym wypadku wszystkie pochodne względem czasu t od ρ w momencie początkowym są równe zeru ; rzeczywiście, dla $/\rho'''/_0$ mamy wyrażenie :

$$/\rho'''/_0 = \left[\frac{d}{dt}/\frac{1}{m}\,S + \frac{c^2}{\rho^3}/\right]_0 = \frac{1}{m}\,f'/\rho_0/\rho_0' - 3\,\frac{c^2}{\rho_0^4}\rho_0',$$

lecz $/\rho'/_0 = 0$, więc i $/\rho'''/_0 = 0$. Analogicznie wszystkie następne pochodne rzędów wyższych od ρ względem czasu t w momencie początkowym będą też równe zeru, ponieważ one wyrażają się w postaci sumy iloczynów, każdy z pośród których zawiera jako czynnik pochodne poprzednich rzędów niższych.

Biorąc pod uwagę szereg Taylor'a dla :

$$\rho = \rho_0 \pm \rho_0'/t - t_0/ + \frac{1}{1.2}\rho_0''/t-t_0/^2 + \frac{1}{1.2.3}\rho_0'''/t-t_0/^3 + \ldots$$

wnioskujemy, że ponieważ $/\rho^{/i/}/_0 = 0$, przy czym i przybiera wartości 1,2,3,........∞, to ρ /t/ podczas trwania ruchu punktu materialnego, pozostaje stałym tj. $\rho = \rho_0$.

Widzimy więc, że w tym wypadku punkt ruchomy zakreśla o b w ó d k o ł a o promieniu równym ρ_0.

Wyznaczymy równanie ruchu dla tego szczególnego wypadku. Ponieważ ρ jest stałe, więc ze związku :

$$\rho^2\alpha' = c\,;$$

wynika, że i prędkość kątowa obrotu α' też jest wielkością stałą : $\alpha' = \alpha_0' =$ Const., skąd wynika, iż kąt α jest liniową funkcją czasu t:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_0' \cdot t\,;$$

i więc ruch na obwodzie koła $\rho = \rho_0$ jest j e d n o - s t a j n y .

Przypuśćmy, że przed pierwiastkiem we wzorze /14/ wypadło przyjąć znak " + " , tj.

$$\frac{1}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{d\alpha} = \frac{1}{C}\sqrt{2F/\varrho/ + 2h - \frac{C^2}{\varrho^2}}$$

Oddzielając zmienne i całkując je, otrzymamy :

$$C.\int\frac{d\varrho}{\varrho^2\sqrt{2F/\varrho/ + 2h - \frac{C^2}{\varrho^2}}} = \alpha - D. \quad\text{........./15}$$

przy czym stała całkowania D określa się według danych początkowych : przy $t = t_0$ / np. $t_0 = 0$/ musi być $\alpha = \alpha_0$ i $\varrho = \varrho_0$.

Równanie /15/ jest różniczkowym równaniem toru punktu materialnego. Całkując jeszcze raz, znajdziemy skończone równanie tegoż toru :

$$\varrho = \Phi/\alpha/ \text{ ; ..../16/}$$

Według /13/ mamy, że :

$$\varrho^2\alpha' = \left[\Phi/\alpha/\right]^2 \alpha' = C.$$

Mnożąc przez dt i całkując, otrzymamy ;

$$\int\varrho^2 d\alpha = \int\left[\Phi/\alpha/\right]^2 d\alpha = Ct + C' \text{ ;}$$

skąd znajdziemy :

$$\alpha = \alpha/t/,$$

a z równania /16/ otrzymamy :

$$\varrho = \varrho/t/,$$

mamy więc parametryczne równania toru punktu ruchomego.

Możemy też postąpić inaczej, mianowicie, ze wzoru /12/, na podstawie /13/, mamy, że :

$$\varrho'^2 + \frac{C^2}{\varrho^2} = 2F/\varrho/ + 2h$$

skąd :

$$\varrho' = \pm\sqrt{2F/\varrho/ + 2h - \frac{C^2}{\varrho^2}},$$

przy czym znak przed pierwiastkiem obieramy analogicznie do poprzedniego. Weźmiemy np. " + " ; pomnożymy przez dt, oddzielimy zmienne i scałkujemy, wtedy okaże się, że :

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{2F/\rho/ + 2h - \frac{c^2}{\rho_2}}} = t - \tau$$

przy czym τ określimy według danych początkowych. Wypełniając kwadraturę całki znajdziemy :

$$\rho = \Psi /t/.$$

wtedy będziemy mieli, że :

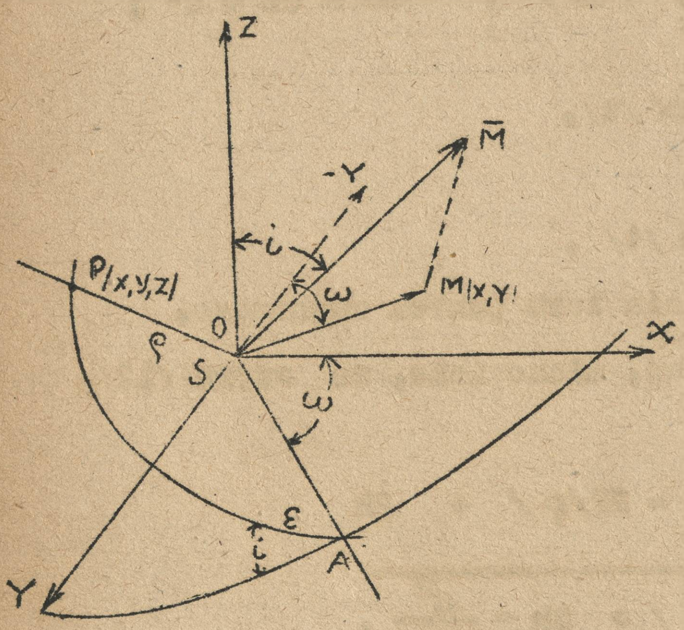
$$\alpha = \int \frac{c}{\rho^2} dt + A = \int \frac{Cdt}{\left[\Psi /t/ \right]^2} + A ,$$

i więc w ogólności :

$$\alpha = \alpha /t/ .$$

Powyższe rozumowania przedstawiają ogólną metodę rozwiązania zagadnienia z ruchu punktu materialnego pod działaniem siły środkowej, zależnej tylko od odległości. Zadanie daje się zawsze sprowadzić do kwadratur, zawdzieczając całkom pól i energii kinetycznej /12/ i /13/.

Newton, który wyprowadził prawo /11/ z praw Kepler'a, powziął i rozwiązał następujące zagadnienie : o k r e ś l i ć r u c h p u n k t u m a t e r i a l n e g o, p r z y c i ą g a n e g o d o n i e r u c h o m e g o ś r o d k a z s i ł ą o d w r o t n i e - p r o p o r c j o n a l n ą d o k w a d r a t u o d l e g ł o ś c i o d t e g o ś r o d k a . Ponieważ to zagadnienie stosuje się zazwyczaj do badania ruchów ciał niebieskich, planet i komet, dookoła słońca, więc obierzmy osie współrzędnych w taki sposób, jak to czynią w astronomii, a mianowicie: początek współrzędnych O / rys.38/ obierzmy w środku nieruchomego słońca, płaszczyznę XOY zróbmy



Rys.38.

płaszczyzną ekliptyki, tj. orbity ziemskiej, oś OY skierujemy do punktu wiosennego równonocy, oś OX - w lewo od osi OY i oś OZ - do północnej półkuli. Planetę lub kometę rozpatrujemy, jako punkt materialny o masie równej m.

Oznaczając przez K^2 siłę przyciągania jednostki masy na jednostkę długości, otrzymamy wyrażenie siły S:

$$S = - \frac{K^2 m}{\varrho^2}$$

Niech w momencie początkowym :

$$t = t_0 = 0: \; x = x_0 \quad y = y_0, \; z = z_0, \; x' = x_0', \; y' = y_0' \quad z' = z_0' .$$

Ponieważ siła S jest funkcją tylko odległości ϱ, więc istnieje następujący potencjał :

$$U/x,y,z/ = - \int \frac{K^2 m d\varrho}{\varrho^2} = \frac{K^2 m}{\varrho} / \frac{K^2 m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /17/$$

Ruch jest płaski; ponieważ środek siły S obraliśmy z początków współrzędnych, więc ruch będzie odbywać się w płaszczyźnie / patrz rozdział XIV, wzór /15/ /:

$$C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0 ;$$

Przechodząc przez początek współrzędnych O, przy czym stałe C_1, C_2 i C_3 mają takie wyrażenie :

$$C_1 = y_0'.x_0 - x_0'.y_0,$$

$$C_2 = x_0'.z_0 - z_0'.x_0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /18/$$

$$C_3 = z_0'.y_0 - y_0'.z_0.$$

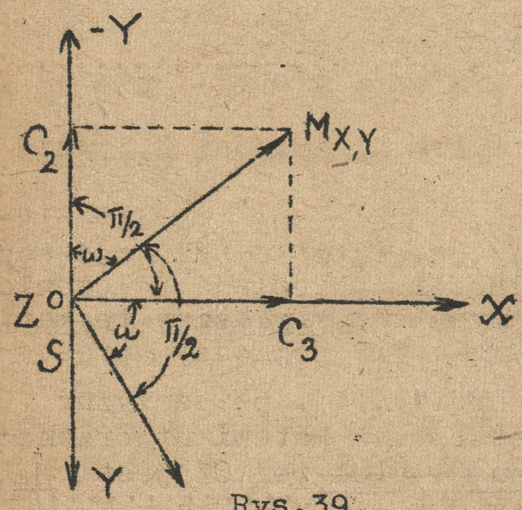
Przez "i" oznaczymy kąt pochylenia płaszczyzny orbity planety do płaszczyzny ekliptyki /XOY/, a przez ω długość węzła. Wielkości "i" i "ω" w zupełności określają położenie płaszczyzny orbity względem obranych osi. Wyrazimy te kąty przez C_1, C_2 i C_3. Kąt i jest równy kątowi pomiędzy prostopadłymi do płaszczyzn ekliptyki i orbity, tj. płaszczyzny ruchu planety; dlatego ten kąt jest równy kątowi utworzonemu osią OZ i momentem ilości ruchu M, albowiem OZ jest $\perp$ do XOY, a M jest $\perp$ do płaszczyzny $C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0$.

Więc mamy, że :

$$\cos i = \cos/Z,\overline{M}/ = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}}$$

Rzut momentu ilości ruchu $\overline{M}$ na płaszczyznę XOY jest prostopadły do prostej OA, ponieważ ten rzut znajduje się w płaszczyźnie ZOM, a prosta OA jest $\perp$ do płaszczyzny ZOM /rys.39/. Dlatego też :

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{C_3}{C_2} .$$



Rys.39.

Zatem wiedząc C_1, C_2 i C_3, znajdziemy położenie płaszczyzny ruchu planety, czyli płaszczyznę orbity. Wielkości C_1, C_2 i C_3 określają nam dane początkowe według wzorów /18/.

Aby wyznaczyć tor /orbitę/ punktu ruchomego, użyjemy wzoru /14/; na zasadzie /17/ mamy, że :

$$\frac{1}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{d\alpha} = \pm\frac{1}{c}\sqrt{\frac{2K^2m}{\varrho} + 2h - \frac{c^2}{\varrho^2}}$$

Weźmiemy np. " + " przed pierwiastkiem, wtedy całkując, znajdziemy, że :

$$\int \frac{d\varrho}{\varrho^2\sqrt{\frac{2K^2m}{c^2\varrho} + \frac{2h}{c^2} - \frac{1}{\varrho^2}}} = \alpha - \gamma .$$

Jest to różniczkowe równanie ruchu planety lub komety.

Załóżmy $\frac{1}{\varrho} = u$; wtedy :

$$-\int \frac{du}{\sqrt{\frac{2K^2m}{C^2}u - u^2 + \frac{2h}{C^2}}} = \alpha - \gamma .$$

Przeształcimy pierwiastek całki poprzedniej, mamy :

$$\sqrt{\frac{2K^2m}{C^2}u - u^2 + \frac{2h}{C^2}} = \sqrt{\frac{2h}{C^2} + \frac{K^4m^2}{C^4} - /u - \frac{K^2m}{C^2}/^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{K^4m^2}{C^4}\left[/1 + \frac{2hC^2}{K^4m^2}/ - /u\frac{C^2}{K^2m} - 1/^2\right]}$$

Wtedy ostatnia całka wyrazi się :

$$-\int \frac{d/\frac{C^2}{K^2m}u/}{\sqrt{/1 + \frac{2hC^2}{K^4m^2}/ - /u\frac{C^2}{K^2m} - 1/^2}}$$

Założymy :

$$\frac{C^2}{K^2m} = p, \quad a \quad \sqrt{1 + \frac{2hC^2}{K^4m^2}} = e \quad \text{..........} /19/$$

Wykażmy, że e jest wielkością rzeczywistą, a nie urojoną; dlatego musimy pokazać:

$$1 + \frac{2hC^2}{K^4m^2} > 0 .$$

Rzeczywiście, my posiadamy całkę energii kinetycznej /patrz wz. /12//:

$$\rho'^2 + \rho^2\alpha'^2 = \frac{2K^2m}{\rho} + 2h.$$

Odrzućmy w lewej części dodatnią wielkość ρ'^2, wtedy okaże się, że:

$$\rho^2\alpha'^2 < \frac{2K^2m}{\rho} + 2h ,$$

czyli tak :

$$2h > \rho^2 \alpha'^2 - \frac{2K^2 m}{\rho}.$$

Dodamy do obu części po $\frac{K^4}{c^2} m^2$, wtedy będziemy mieli,że:

$$\frac{K^4}{c^2} m^2 + 2h > \rho^2 \alpha'^2 + \frac{K^4 m^2}{c^2} - \frac{2K^2 m}{\rho} = \frac{c^2}{\rho^2} - 2\frac{K^2 m}{\rho} + \frac{K^4 m^2}{c^2} =$$

$$= / \frac{c}{\rho} - \frac{K^2 m}{c} /^2 .$$

tj.

$$2h + \frac{K^4}{c^2} m^2 > 0 .$$

Mnożąc przez $\frac{c^2}{K^4 m^2}$, znajdziemy :

$$1 + \frac{2hc^2}{K^4 m^2} > 0. \qquad \text{C.b.d.o.}$$

Po podstawieniu, otrzymamy :

$$-\int \frac{d\,/pu/}{\sqrt{e^2 - /pu - 1/^2}} = \alpha - \vartheta ,$$

skąd wynika po całkowaniu :

$$\arccos \frac{pu - 1}{e} = \alpha - \vartheta ,$$

i dlatego

$$\frac{pu - 1}{e} = \cos /\alpha - \vartheta/,$$

skąd :

$$u = \frac{1 + e \cos/\alpha - \vartheta/}{p} ,$$

a ponieważ

$$u = \frac{1}{\rho} ,$$

więc ostatecznie mamy, że:

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos/\alpha - \gamma/} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /20/$$

jest skończone równanie orbity planety lub komety.

Z wyrażenia /19/ dla e widzimy, że :

$$e < 1, \text{gdy } h < 0 ;$$
$$e = 1, \text{gdy } h = 0$$
$$\text{i} \quad e > 1, \text{gdy } h > 0 .$$

W pierwszym wypadku równanie /20/ przedstawia elipsę, w drugim - p a r a b o l ę, a w trzecim h i p e r b o l ę. Wielkość e zależy jedynie tylko od znaku h.

Gdy $h < 0$ i więc $e < 1$, wtedy całka energii kinetycznej daje :

$$2h = v_o^2 - 2\,\frac{K^2 m}{o} .$$

Stąd widzimy, że gdy orbita jest elipsą, wtedy :

$$v_o^2 < 2\,\frac{K^2 m}{\rho_o}\ , \text{ czyli } v_o < K\sqrt{\frac{2m}{\rho_o}} .$$

Więc charakter toru zależy całkowicie od prędkości w momencie początkowym ; gdy tor jest parabolą lub hiperbolą, wtedy mamy odpowiednio :

$$v_o = K\sqrt{\frac{2m}{\rho_o}}$$

lub

$$v_o > K\sqrt{\frac{2m}{\rho_o}}$$

Gdyby przed znanym pierwiastkiem trzeba było przyjąć znak " - ", wtedy, przenosząc ten minus do prawej części wzoru i wypełniając całkowanie, otrzymalibyśmy we wzorze /20/ $/-\alpha/$ zamiast α ; biorąc w tym wypadku zamiast stałej dowolnej całkowania $-\gamma$ stałą $+\gamma$, otrzymamy równanie toru w tej samej postaci /20/ :

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos/-\alpha + \gamma/} = \frac{p}{1 + e\cos/\alpha - \gamma/} \quad \ldots\ldots /20a/$$

Planety poruszają się wzdłuż elips, a komety najczęściej wzdłuż parabol. Z całki energii kinetycznej wynika, że w każdem położeniu planety jej prędkość:

$$v < K\sqrt{\frac{2m}{\rho_o}},$$

a w każdem położeniu komety jej prędkość :

$$v = K\sqrt{\frac{2m}{\rho_o}},$$

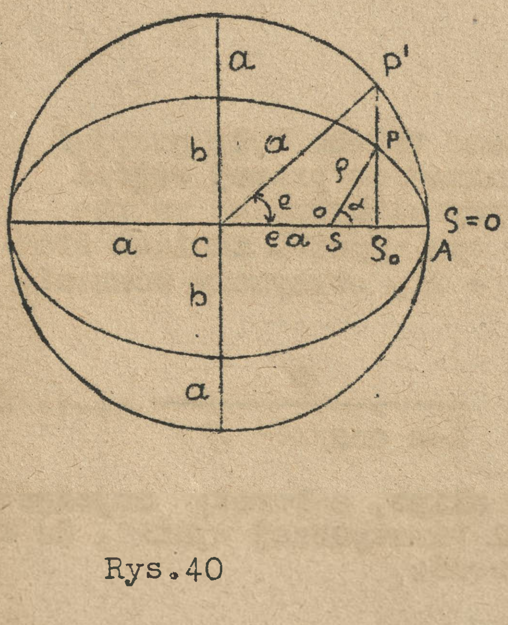
Ze wzoru /20/ widzimy, że ρ staje się najmniejszem, gdy $\alpha = \gamma$, więc γ jest tą wartością α, która odpowiada najmniejszej odległości poruszającego się punktu od przyciągającego środka /słońca/. Jeżeli będziemy mierzyć kąt α od najmniejszego promienia wodzącego, wtedy stała $\gamma = 0$ i równanie toru przyjmie postać prostszą:

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /21/$$

Najbliższe położenie A planety, lub komety od słońca nazywamy " perihelium ".

Aby wyznaczyć równania skończone ruchu, musimy znaleść zależność pomiędzy α i czasem t, wtedy równanie /21/ da nam wyrażenie ρ przez czas t.

W tym celu postąpimy tak : wprowadzimy nowy kąt ε , zwany " mimośrodkową anomalią " /rys.40/ i znajdziemy zależność pomiędzy nim a czasem t. Następnie z łatwością znajdziemy zależność pomiędzy ε a kątem α , zwanym " zwykłą anomalią ". Mając te zależności otrzymamy odrazu poszukiwaną zależność pomiędzy α i t.



Rys.40

Z rys. 40 mamy, że

$$a\cos\varepsilon = ea + \rho\cos\alpha \ldots\ldots\ldots /22/$$

Z równania toru /21/wynika, że :

$$\rho + \rho e \cos\alpha = p,$$

lecz wiemy, że parametr

$$p = a/1 - e^2/,$$

więc :

$$\rho + \rho e.\cos\alpha = a/1 - e^2/,$$

Skąd znajdziemy, że :

$$\rho \cos\alpha = \frac{a/1 - e^2/ - \rho}{e}.$$

Wstawiając to wyrażenie do wzoru /22/, będziemy mieli :

$$a \cos\varepsilon = ea + \frac{a/1 - e^2/ - \rho}{e},$$

skąd otrzymamy ρ :

$$\rho = a/\cancel{e^2} + 1 - \cancel{e^2} - e\cos\varepsilon/ = a/1 - e\cos\varepsilon/ \ldots \ldots\ldots /23/$$

Ze wzorów /23/ i /21/ wynika :

$$\frac{p}{1 + e\cos\alpha} = a/1 - e\cos\varepsilon/,$$

a ponieważ

$$p = a/1 - e^2/,$$

więc po wstawieniu do wzoru poprzedniego :

$$\frac{a/1 - e^2}{1 + e\cos\alpha} = a/1 - e\cos\varepsilon/,$$

skąd :

$$1 - e^2 = /1 - e\cos\varepsilon/ /1 + e\cos\alpha/ = 1 + e\cos\alpha - e\cos\varepsilon -$$
$$- e^2\cos\varepsilon\cos\alpha = 1 - e\cos\varepsilon + e\cos\alpha/1 - e\cos\varepsilon/.$$

Znajdziemy wyrażenie dla cos α mamy :

$$\cos\alpha = \frac{a/\cos\mathcal{E} - e/}{a/1 - e.\cos\mathcal{E}/} = \frac{\cos\mathcal{E} - e}{1 - e.\cos\mathcal{E}} ;$$

Napiszemy wyrażenia dla $1 - \cos\alpha$ i dla $1 + \cos\alpha$, mianowicie :

$$1 - \cos\alpha = \frac{1 - e.\cos\mathcal{E} - \cos\mathcal{E} + e}{1 - e.\cos\mathcal{E}} = \frac{/1 + e//1 - \cos\mathcal{E}/}{1 - e.\cos\mathcal{E}}$$

i

$$1 + \cos\alpha = \frac{/1 - e/ / 1 + \cos\mathcal{E}/}{1 - e\cos\mathcal{E}} \quad ..../24/$$

Korzystając ze wzoru trygonometrii i wzorów /24/, będziemy mieli :

$$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-\cos\mathcal{E}}{1+\cos\mathcal{E}} = \frac{1+e}{1-e}\,tg^2\frac{\mathcal{E}}{2} ;$$

skąd znajdujemy, że :

$$tg\frac{\mathcal{E}}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\cdot tg\frac{\alpha}{2} \quad ..../25/$$

Wzór /25/ daje nam zależność pomiędzy $\mathcal{E}$ i α . Wyznaczymy teraz zależność pomiędzy $\mathcal{E}$ i t; całka pól $\varrho^2\frac{d\alpha}{dt} = C$ daje nam ; $dt = \frac{\varrho^2}{C}d\alpha$ wstawiając zamiast ϱ jego wyrażenie /21/, otrzymamy :

$$dt = \frac{p^2 d\alpha}{/1 + e.\cos\alpha/^2 C} =$$

$$= \frac{p^2 d\alpha}{C\left[\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} + e/\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}/\right]^2} =$$

$$= \frac{p^2 d\alpha}{C\left[/1 + e/\cos^2\frac{\alpha}{2} + /1 - e/\sin^2\frac{\alpha}{2}\right]^2} =$$

$$= \frac{p^2 d\alpha}{C/1 + e/^2\cos^4\frac{\alpha}{2}\left[1 + \frac{1 - e}{1 + e}\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right]^2} ;$$

A na podstawie /25/ przepiszemy tak :

$$dt = \frac{p^2\cos^4\frac{\varepsilon}{2}\,d\alpha}{C/1 + e/^2\cos^4\frac{\alpha}{2}} ;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /26/$$

oprócz tego mamy, że :

$$\frac{d\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2d\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = 2\sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\,d\mathrm{tg}\frac{\varepsilon}{2} = 2\sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\cdot\frac{d\varepsilon}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}\ \frac{1}{2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\cdot\frac{d\varepsilon}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}} ,$$

ponieważ zaś:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1 + e}{1 - e}\cdot\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}} ,$$

więc:

$$\frac{d\alpha}{\cos^4\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\cdot\frac{d\varepsilon}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}\cdot /1 + \frac{1 + e}{1 - e}\cdot\mathrm{tg}^2\frac{\varepsilon}{2}/ =$$

$$= \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\cdot\frac{d\varepsilon}{/1 - e/\cos^4\frac{\varepsilon}{2}}\cdot /1 - e\cdot\cos\varepsilon/ =$$

$$= \sqrt{\frac{1 + e}{/1 - e/^3}}\cdot\frac{1 - e\cos\varepsilon}{\cos^4\frac{\varepsilon}{2}}\cdot d\varepsilon ;$$

Wtedy wzór /26/ dla dt daje nam wyrażenie :

$$dt = \frac{p^2 \cos^4 \frac{\varepsilon}{2} . /1 - e\cos \varepsilon /}{C/1 + e/^2 . \cos^4 \frac{\varepsilon}{2}} . \sqrt{\frac{1 + e}{/1 - e/^3}} . d\varepsilon =$$

$$= \frac{p^2 d\varepsilon}{C/1 - e^2/^{3/2}} . /1 - e. \cos \varepsilon / ;$$

Na podstawie wzoru $p = a/1 - e^2/$ i pierwszego wzoru /19/, znajdziemy, że :

$$p^2 = \sqrt{p} . \sqrt{p^3} = \frac{C}{K\sqrt{m}} a^{3/2} /1 - e^2/^{3/2},$$

a wstawiając ostatnie wyrażenie do wzoru dla dt, będziemy mieli:

$$dt = \frac{a^{3/2}}{K\sqrt{m}} . /1 - e.\cos \varepsilon /. \ d\varepsilon .$$

Całkując, otrzymamy

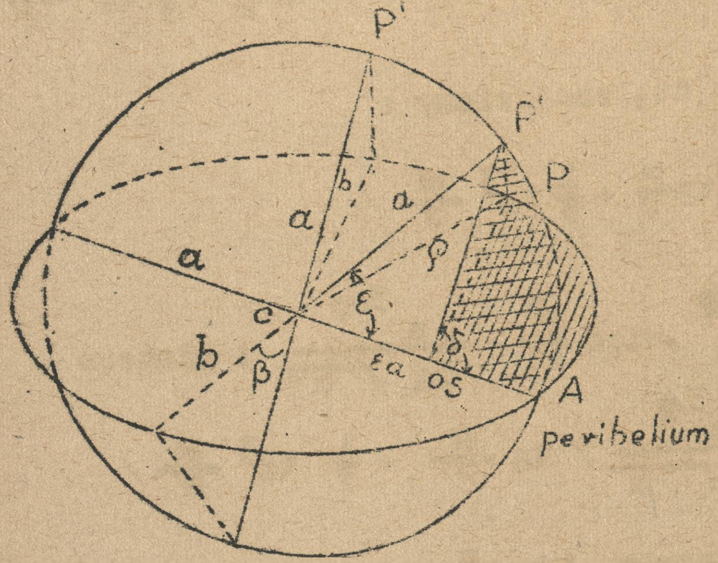
$$\frac{a^{3/2}}{K\sqrt{m}} / - e. \sin \varepsilon / = t - \tau ;$$

przy czym stałą τ określimy według danych początkowych; zatem zakładając masę m = 1 będziemy mieli poszukiwaną zależność pomiędzy ε i t:

$$\varepsilon - e \sin \varepsilon = \frac{K}{a^{3/2}} / t - \tau /............/27/$$

Wzory /25 i /27/ pozwalają ustalić zależność $\alpha = \alpha /t/$, a więc i $\varrho = \varrho /t/$. Równanie /27/ wyraża, że p o l e w y c i n k a e l i p t y c z n e g o, z a k r e ś l o n e g o p r z e z p r o m i e ń w o d z ą c y p l a n e t y j e s t p r o p o r c j o n a l n e d o c z a s u j e g o z a k r e ś l e n i a / rys. 41/.

Rzeczywiście, gdy $\varepsilon = 0$, wtedy /27/ mówi nam, że $t = \tau$, więc „ τ " jest to czas przechodzenia planety przez perihelium A. Z geometrii analitycznej wiemy, że elipse możemy roz-



Rys. 41.

patrywać, jako rzut koła na płaszczyznę, pochyloną do płaszczyzny elipsy /rzutów / pod kątem β takim, że

$\cos\beta = \frac{b}{a}$. Dlatego też pole wycinka eliptycznego AOP =/pole AOP'/. $\frac{b}{a}$, ale pole AOP'=pole ACP' – pole $\triangle$ OCP'= $\frac{1}{2}a^2\,\varepsilon$ – – $\frac{1}{2}a$ ea sin ε = $\frac{1}{2}a^2/\varepsilon$ – e.sin ε /.

Więc rzut tego pola na płaszczyznę elipsy jest

$$AOP = \frac{1}{2}\,ab\,/\,\varepsilon - e.\sin\varepsilon\,/.$$

Na podstawie /27/, możemy przepisać go tak :

$$\text{pole AOP} = \frac{1}{2}\,ab.\,\frac{K}{a^{3/2}}\,/t - \tau/ = \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\,.\,\frac{K}{a^{3/2}}\,./t - \tau/=$$

$$= \frac{K}{2}\sqrt{a/1-e^2/}\,.\,/\,t - \tau/ = \frac{K}{2}\sqrt{p}\,.\,/\,t - \tau\,/,$$

tj. pole AOP jest proporcjonalne do czasu $t - \tau$ jego zakreślenia, przy czym p i K są stałe, charakteryzujące tor i intensywność siły przyciągania S.

Gdy tor, czyli orbita komety jest p a r a b o l ą, wtedy **ruch jest** prostszy; w tym wypadku mimośród $e = 1$ i równanie **toru jest :**

$$\rho = \frac{p}{1+\cos\alpha}.$$

Całka pól $\rho^2\frac{d\alpha}{dt} = C$ daje nam :

$$dt = \frac{\rho^2}{C}\,d\alpha = \frac{p^2\,d\alpha}{C/1+\cos\alpha/^2} = \frac{p^2\,d\alpha}{4C\cos^4\frac{\alpha}{2}}$$

Ponieważ zaś :

$$\int \frac{d\alpha}{\cos^4 \frac{\alpha}{2}} = 2 \int /1 + tg^2 \frac{\alpha}{2}/d/tg \frac{\alpha}{2}/ = 2/tg\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3} tg^3 \frac{\alpha}{2}/,$$

więc całkując wyrażenie dla dt, znajdziemy :

$$t - \tau = \frac{p^2}{2C}/tg\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3} tg^3 \frac{\alpha}{2}/$$

Ale

$$p^2 = \sqrt{p} \cdot \sqrt{p^3} = \frac{C}{K\sqrt{m}} p^{3/2} \text{ ,więc } \frac{p^2}{2C} = \frac{p^{3/2}}{2K\sqrt{m}} \text{ i dlatego}$$

$$t - \tau = \frac{p^{3/2}}{2K\sqrt{m}} / tg \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3} tg^3 \frac{\alpha}{2} /$$

Zazwyczaj zamiast $\frac{p}{2}$ wprowadzamy q, tj. $\frac{p}{2} = q$, wtedy :

$$tg \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3} tg^3 \frac{\alpha}{2} = \frac{K\sqrt{m}}{\sqrt{2q^3}} / t - \tau /.$$

Zakładając m = 1, będziemy mieli ostatecznie :

$$tg \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3} tg^3 \frac{\alpha}{2} = \frac{K}{\sqrt{2q^3}} / t - \tau /, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /28/$$

przy czym $q = \frac{p}{2}$ jest odległością ogniska od wierzchołka paraboli, a zatem najkrótszą odległością komety do słońca; "τ" zaś jest czasem przechodzenia komety przez perihelium.

Gdy tor punktu jest h i p e r b o l ą, wtedy e > 1. W tym wypadku parametr

$$p = a/e^2 - 1/ ,$$

i dla tg $\frac{\varepsilon}{2}$ znajdziemy takie wyrażenie :

$$tg \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \cdot tg \frac{\alpha}{2} .$$

Postępując analogicznie

$$dt = \frac{p^2}{C/e^2 - 1/^{3/2}} \cdot \frac{e - \cos\varepsilon}{\cos^2\varepsilon} d\varepsilon .$$

Po scałkowaniu będziemy mieli :

$$t - \tau = \frac{p^2}{C/e^2 - 1/^{3/2}} \int \frac{e - \cos\varepsilon}{\cos^2\varepsilon} d\varepsilon =$$

$$= \frac{p^2}{C/e^2 - 1/^{3/2}} \cdot \left[e\mathrm{tg}\,\varepsilon - \int \frac{d\varepsilon}{\cos\varepsilon} \right] =$$

$$= \frac{p^2}{C/e^2 - 1/^{3/2}} \cdot \left[e\mathrm{tg}\,\varepsilon - \lg \mathrm{tg}/ \frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon}{2} / \right] .$$

Ponieważ parametr :

$$p = \frac{C^2}{K^2 m} ,$$

więc

$$p^{3/2} = a^{3/2}/e^2 - 1/^{3/2} \quad \text{i} \quad p^2 = a^{3/2} / e^2 - 1/^{3/2} . \frac{C}{K\sqrt{m}} .$$

Dlatego też wypada, że :

$$e . \mathrm{tg}\,\varepsilon - \lg \mathrm{tg} / \frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon}{2} / = \frac{K\sqrt{m}}{a^{3/2}} /t - \tau /$$

Gdy zaś m = 1,wtedy: $e . \mathrm{tg}\,\varepsilon - \lg \mathrm{tg}/ \frac{\pi}{4} + \frac{\varepsilon}{2} / =$

$$= \frac{K}{a^{3/2}} / t - \tau / \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /29/$$

Gdy kometa porusza się wzdłuż hiperboli, to oczywiście wzdłuż tej jej gałęzi, która jest zwróconą wklęsłością do słońca. " τ " jest czasem przechodzenia komety przez perihelium, albowiem wtedy mimośrodkowa anomalia $\varepsilon = 0$.

R o z d z i a ł VII.

R u c h p u n k t u n i e s w o b o d n e g o p o p o w i e r z c h n i .

W poprzednich rozdziałach rozpatrywaliśmy ruch swobodnego punktu materialnego, tj. punktu nieskrępowanego żadnymi przeszkodami i dlatego mogącego otrzymać pod działaniem przyłożonych doń sił, dowolne, co do wartości liczebnej i kierunku, prędkości i przyspieszenia. W rozdziałach obecnym i następującym rozpatrzymy ruch punktu nieswobodnego, tj.takiego, który zmuszony podczas trwania ruchu pozostawać stale na danej powierzchni lub linii krzywej, które mogą być nieruchomymi, lub ruchomymi, W niniejszym rozdziale rozpatrzymy wypadek najprostszy,mianowicie r u c h p u n k t u m a t e r i a l n e g o p o d a n e j p o w i e r z c h n i n i e r u c h o m e j .

Wiemy, że równanie dowolnej powierzchni nieruchomej ma postać jak niżej :

$$f/ x,y,z/ = 0, \qquad /1/$$

jest to zależność pomiędzy współrzędnymi punktu, znajdującego się na danej powierzchni.

Powierzchnia, po której porusza się punkt, jest, albo powierzchnią r z e c z y w i s t ą, np. powierzchnia kuli, lub płaszczyzny materialnej, albo powierzchnią g e o m e t r y c z n ą, nieistniejącą w rzeczywistości, którą my sobie wyobrażamy : np. punkt M, połączony z nieruchomym punktem O za pomocą nierozciągliwego prętu długości d, może poruszać się jedynie po geometrycznej powierzchni kuli o promieniu równym d.

Prędkość i przyspieszenie punktu, poruszającego się po danej powierzchni, czynią zadość pewnym warunkom. Aby je otrzymać, przypuśćmy, że współrzędne punktu ruchomego są wyrażone w postaci funkcji czasu t, mianowicie :

$$x = \varphi /t/ ; \quad y = \psi /t/ ; \quad z = \chi /t/ ; \qquad /2/$$

i ponieważ, według przypuszczenia, punkt ruchomy podczas ruchu pozostaje stale na danej powierzchni /1/, więc jego współrzędne muszą czynić zadość równaniom /1/, innymi słowy trzy funkcje φ , ψ , i χ muszą być takimi, żebyśmy przy dowolnej wartości t, mieli t o ż s a m o ś c i o w o :

$$f\left[\varphi/t/,\ \psi/t/,\ \chi/t/\right] = 0 \ldots\ldots\ldots /3/$$

Jeżeli zaś pewna funkcja tożsamościowo jest zeru równą, wtedy i wszystkie jej pochodne też są równe zeru tożsamościowo; różniczkując więc tożsamość/3/ względem czasu t, otrzymamy szereg nowych tożsamości, w których wstawimy:

x,y,z zamiast φ /t/, ψ /t/, χ /t/, x', y', z' zamiast φ'/t/, ψ'/t/, χ'/t/ itd., wtedy okaże się, że :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot x' + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot y' + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot z' = 0 \ldots /4/$$

i

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot x'' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + \frac{\partial f}{\partial z} z'' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} x'y' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} x'z' +$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} y'z' + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} z'^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots /5/$$

Równania /4/ i /5/ wyrażają zależności, które muszą zachodzić pomiędzy rzutami na osie współrzędnych OXYZ prędkości i przyśpieszenia punktu, podczas jego ruchu po nieruchomej powierzchni/1/.

Równanie /4/ posiada prostą interpretację geometryczną: przeprowadźmy w punkcie M na danej powierzchni /1/ normalną MN do tej powierzchni /rys. 42/, przy czym jeden kierunek tej normalnej uważamy, jako dodatni, a drugi, jako ujemny. Wiemy, że cosinus'y kątów, utworzonych przez normalną z osiami współrzędnych, są następujące :

$$\cos/N,X/ = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\pm\sqrt{/\frac{\partial f}{\partial x}/^2 + /\frac{\partial f}{\partial y}/^2 + /\frac{\partial f}{\partial z}/^2}}$$

$$\cos/N,Y/ = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\pm\sqrt{/\frac{\partial f}{\partial x}/^2 + /\frac{\partial f}{\partial y}/^2 + /\frac{\partial f}{\partial z}/^2}} \ldots\ldots\ldots /6/$$

i

$$\cos/N,Z/ = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\pm\sqrt{/\frac{\partial f}{\partial x}/^2 + /\frac{\partial f}{\partial y}/^2 + /\frac{\partial f}{\partial z}/^2}}$$

przy czym dodatniemu kierunkowi normalnej MN odpowiada znak "+" przed pierwiastkiem, a ujemnemu znak "-".

Dzieląc obie strony równości /4/ przez pierwiastek:

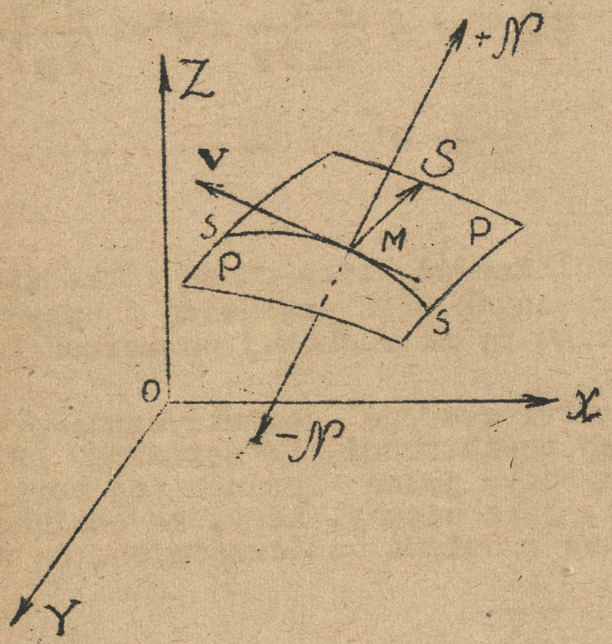
$$\pm\sqrt{\left/\frac{\partial f}{\partial x}\right/^2 + \left/\frac{\partial f}{\partial y}\right/^2 + \left/\frac{\partial f}{\partial z}\right/^2}\ ,$$

otrzymamy zależność w takiej postaci :

$$x'\cos/N,X/ + y'.\cos/N,Y/ + z'.\cos/N,Z/ = 0,$$

czyli :

$$v.\cos/v,N/ = 0. \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /7/$$



Rys.42.

Równanie/7/ mówi nam, że rzut prędkości punktu ruchomego na normalną jest równy zeru. Stąd wynika jedno z dwóch: albo v = 0, tj. punkt znajduje się w stanie spoczynku, albo, gdy punkt porusza si, wtedy $\cos/v,N/= 0$ i więc $/\widehat{v,N}/ = 90^0$. Zatem warunek prędkości /4/ wyraża, że prędkość punktu, poruszającego się po nieruchomej powierzchni, jest stale prostopadłą do normalnej. MN, czyli innymi słowy, jest stale zawartą w płaszczyźnie stycznej do danej powierzchni/1/.

Powierzchnia rzeczywista może być bezwzględnie gładką lub chropowatą. Narazie rozpatrzymy wypadek powierzchni gładkiej; do tego wypadku odnosi się też wypadek powierzchni geometrycznej, którą, oczywiście przyjmuje się zawsze za doskonale gładką.

Gdy punkt porusza się po powierzchni, to ta powierzchnia staje się oporą i oddziaływa na punkt ruchomy z pewną nieznaną nam siłą R, będącą " p r z e c i w d z i a ł a n i em p o w i e r z c h n i ". Jeżeli do sił zewnętrznych S, działających na dany punkt ruchomy M, dołączymy przeciwdziałanie powierzchni R, wtedy możemy uważać dany punkt M, jako zupełnie swobodny. Dlatego też równania ruchu tego punktu możemy napisać tak :

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= X + R_x ; \\ my'' &= Y + R_y ; \\ mz'' &= Z + R_z ; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /8/$$

przy czym, jak zwykle X,Y,Z oznaczają składowe wzdłuż osi współrzędnych siły zewnętrznej S, a R_x, R_y, R_z składowe wzdłuż tychże osi przeciwdziałania powierzchni R.

Doświadczenia wskazują, że gdy **p o w i e r z c h n i a j e s t b e z w z g l ę d n i e g ł a d k ą, tj. p u n k t p o r u s z a s i ę p o n i e j b e z t a r c i a w t e d y p r z e c i w d z i a ł a n i e t a k i e j t a k i e j p o w i e r z c h n i j e s t s k i e r o w a n e z g o d n i e z n o r m a l n ą d o t e j p o w i e r z c h n i.**

Na zasadzie tego prawa możemy napisać :

$$R_x = R.\cos/N,X/,$$

$$R_y = R.\cos/N,Y/,$$

$$R_z = R.\cos/N,Z/,$$

a zakładając celem uproszczenia wzorów, że :

$$\frac{R}{\sqrt{/\frac{\partial f}{\partial x}/^2 + /\frac{\partial f}{\partial y}/^2 + /\frac{\partial f}{\partial z}/^2}} = \lambda \ldots\ldots\ldots\ldots /9/$$

i korzystając ze wzorów /6/ otrzymamy :

$$R_x = \lambda . \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$R_y = \lambda . \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$R_z = \lambda . \frac{\partial f}{\partial z},$$

Na podstawie otrzymanych wzorów, równania ruchu punktu po gładkiej powierzchni nieruchomej /8/ przybiorą postać następującą:

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} ; \\ my'' &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} ; \\ mz'' &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} ; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /10/$$

Otrzymane przed chwilą równania ruchu /10/ wraz z równaniem /1/ pozwalają rozwiązać następujące dwa zadania:

1/ Wyznaczyć ruch punktu po powierzchni i

2/ określić kierunek i wartość liczebną nieznanego nam przeciwdziałania powierzchni R.

Mamy więc razem cztery niewiadome x,y,z,R i cztery równania /10/ i /1/.

Ogólny sposób całkowania równań /10/ jest następujący: rugując z równań /10/, otrzymamy:

$$\frac{mx'' - X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{my'' - Y}{\frac{\partial f}{\partial y}} ;$$

i

$$\frac{mx'' - X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{mz'' - Z}{\frac{\partial f}{\partial z}} ; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /11/$$

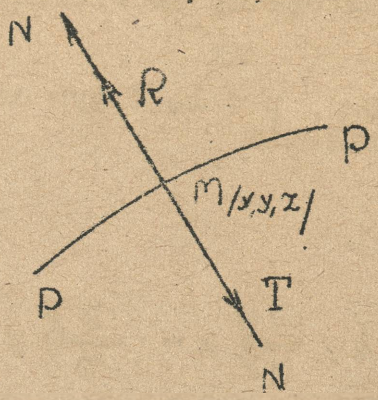
Następnie korzystając z równania powierzchni /1/, wyrażamy jedną współrzędną przez dwie pozostałe, np. x przez y i z, i otrzymane wyrażenie podstawimy w równaniu/11/, w rezultacie otrzymamy dwa różniczkowe równania drugiego rzędu; całkując je, otrzymamy dwie całki ogólne, zawierające cztery stałe dowolne C_1, C_2, C_3 i C_4, które wyznaczymy za pomocą warunków początkowych y_0, z_0, y'_0, z'_0.

Mając y i z w postaci funckji czasu t, x otrzymamy z równania /1/ a λ z równań /10/. Mając λ z łatwością znajdziemy R na zasadzie wzoru /9/,

$$R = /mx'' - X/ \frac{\pm\sqrt{\left/\frac{\partial f}{\partial x}\right/^2 + \left/\frac{\partial f}{\partial y}\right/^2 + \left/\frac{\partial f}{\partial z}\right/^2}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

Jeżeli powyższy wzór da nam dodatnią wartość dla R tj. ze znakiem "+",wtedy przeciwdziałanie powierzchni jest skierowane zgodnie z dodatnią normalną; jeżeli zaś ze znakiem "-",wtedy zgodnie z kierunkiem ujemnej normalnej.

Zgodnie z trzecim prawem Newton'a /patrz rozdział I/ każdemu działaniu odpowiada równe co do wartości,lecz odwrotnie skierowane przeciwdziałanie; więc jeżeli powierzchnia wywiera na punkt materialny M pewne ciśnienie R, to i odwrotnie punkt M działa na powierzchnię z pewną siłą T,równą co do wartości liczebnej, lecz wprost przeciwnie skierowaną. Tę siłę T nazywamy " c i ś n i e n i e m " punktu materialnego M na powierzchnię /1/. Jest rzeczą zrozumiałą, że sposoby wyznaczenia ciśnienia T i przeciwdziałania R są identyczne.



Rys.43.

W rozdziałach IV i V widzieliśmy, że w wielu wypadkach ruchu swobodnego punktu mają miejsce całki pól i całki energii kinetycznej, czyli żywej siły. Istnienie podobnej całki znakomicie ułatwia rozwiązanie zadań.

Dlatego też zbadamy, kiedy te całki mają miejsce w wypadku ruchu punktu po bezwzględnie gładkiej i nieruchomej powierzchni.

Rozpatrzymy z początku z a s a d ę e n e r g i i k i n e t y c z n e j.

Pomnożymy równania ruchu /10/ odpowiednio przez :

$$x'dt = dx, \quad y'dt = dy \quad i \quad z'dt = dz$$

i dodajemy wzajemnie, wtedy będziemy mieli :

$$m/x''x'+y''y'+z''z'/dt = Xdx+ Ydy+ Zdz+ \lambda \Big/ \frac{\partial f}{\partial x}dx+ \frac{\partial f}{\partial y}dy+ \frac{\partial f}{\partial z}dz \Big/ .$$

Ale na zasadzie równości /4/, mamy, że :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx+ \frac{\partial f}{\partial y}dy+ \frac{\partial f}{\partial z}dz = \Big/ \frac{\partial f}{\partial x}\cdot x'+ \frac{\partial f}{\partial y}\cdot y'+ \frac{\partial f}{\partial z}\cdot z' \Big/ dt = 0,$$

zatem powstaje, że :

$$m./x''x' + y''y' + z''z'/dt = Xdx + Ydy + Zdz ,$$

czyli ostatecznie :

$$\frac{1}{2}\, mdv^2 = Xdx + Ydy + Zdz \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /12/$$

Zatem zasada energii kinetycznej dla punktu, poruszającego się po powierzchni, wyraża się zupełnie tak samo, jak to mieliśmy już w rozdziale V dla punktu swobodnego.

Równanie /12/ mówi, że g d y s i ł y z e w n ę t r z n e S/X,Y,Z/, d z i a ł a j ą c e n a p u n k t M, p o s i a d a j ą f u n k c j ę s i ł U, n i e z a l e ż n ą o d c z a s u t w s p o s ó b w y r a ź n y, w t e d y Z a s a d a e n e r g i i k i n e t y c z n e j d a j e c a ł k ę e n e r g i i k i n e t y c z n e j. Mianowicie otrzymujemy zależność:

$$\frac{mv^2}{2} - U\,/x,y,z/ = C \qquad \text{........................./13/}$$

Całka ta ma ten sam kształt, jak dla punktu swobodnego, ponieważ praca przeciwdziałania R bezwzględnie gładkiej powierzchni jest zawsze równa zeru, albowiem kierunek tego przeciwdziałania jest stale prostopadły do kierunku przesunięcia punktu na powierzchni.

Zbadamy teraz Z a s a d ę p ó l. W tym celu na podstawie równań /10/ ułożymy wyrażenie

$$m/\,y''x - x''y/\ ;$$

znajdziemy, że :

$$m/y''x - x''y/ = Yx - Xy + \lambda\,/\,\frac{\partial f}{\partial y}x - \frac{\partial f}{\partial x}y\,/.$$

Całkę pól mamy wtedy, gdy

$$y''x - x''y = 0,$$

albowiem wtedy

$$y'x - x'y = C_1 \quad ,$$

czyli dla współrzędnych biegunowych :

$$\varrho^2\,\alpha' = 2.\,\frac{dS_1}{dt} = C_1\,.$$

Ażeby to było przy każdej dowolnej wartości współczynnika , musi być jednocześnie :

$$Yx - Xy - 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}x - \frac{\partial f}{\partial x}y = 0\,.$$

Pierwszy z tych warunków mówi nam, że moment siły zewnętrznej S, działającej na punkt względem osi OZ musi być równy zeru, tj. siła S musi albo przecinać oś OZ, albo być do niej równoległą.

Drugi warunek głosi, że normalna do powierzchni /1/, w rozpatrywanym położeniu punktu M/x,y,z/,przecina oś OZ.Rzeczywiście, równania normalnej do powierzchni /1/ jak wiemy z geometrii różniczkowej, są :

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial f}{\partial z}} \qquad \text{................/14/}$$

Aby tą normalna przecinała oś OZ, jest rzeczą konieczną, żeby wartości $\xi = 0$; i $\eta = 0$; czyniły zadość równaniom /14/, tj. żeby było :

$$\frac{-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{-y}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

czyli tak :

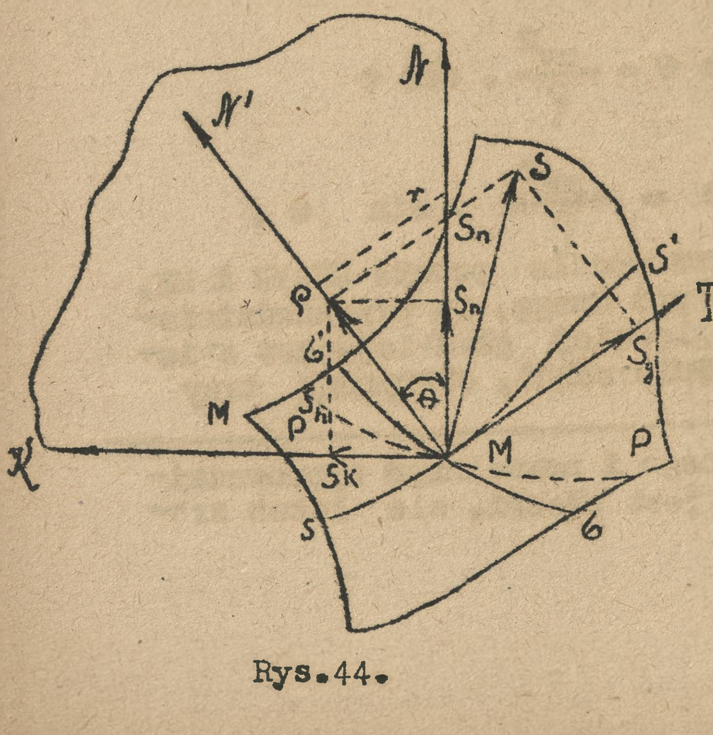
$$\frac{\partial f}{\partial y} x - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot y = 0 .$$ C.b.d.o.

Zatem, aby zasada pól miała miejsce w płaszczyźnie XOY, normalna w dowolnym punkcie /x,y,z/ na powierzchni /1/ musi przecinać oś OZ. Taką własność posiadają jedynie powierzchnie obrotowe z osią obrotu OZ. Możemy więc wypowiedzieć następujące twierdzenie:

P o d c z a s r u c h u p u n k t u m a t e r i a l n e g o p o p o w i e r z c h n i o b r o t o w e j o o s i o b r o t u, z g o d n i e j z o s i ą w s p ó ł r z ę d n y c h O Z, i s t n i e j e c a ł k a p ó l w p ł a s z c z y ź n i e X O Y, j e ż e l i t y l k o s i ł a z e w n ę t r z n a d z i a ł a j ą c a n a p u n k t, p r z e c i n a o ś O Z, l u b j e s t d o n i e j r ó w n o l e g ł ą.

R ó w n a n i a ruchu /10/ nazywamy " r ó ż n i c z k o w y m i r ó w n a n i a m i r u c h u L a g r a n g e'a".

Przytoczymy tu inną postać równań ruchu po gładkiej powierzchni nieruchomej zwanych często " e q u a t i o n s i n t r i n s e q u e s ". Punkt materialny, poruszający się po danej powierzchni, zakreśla na tej powierzchni pewien tor, będący w wypadku ogólnym krzywą linią skośną. Na rys.44 ten tor oznaczyliśmy przez ss'. Obierzmy na nim dowolny punkt, będący położeniem punktu M ruchomego w rozpatrywanym momencie czasu t, i przeprowadźmy w tym punkcie styczną MT, którą skierujemy w stronę wzrastających łuków krzywej ss', przy czym te łuki będziemy mierzyć od dowolnie obranego początku O na naszym torze.



Rys.44.

Przetniemy daną powierzchnię płaszczyzną normalną do toru ss' w punkcie M, w przecięciu otrzymamy pewną krzywą płaską $\sigma\sigma'$. Jest rzeczą zrozumiałą, że normalna do danej powierzchni PP, przeprowadzona w punkcie M na tej powierzchni, jest zarazem normalną do krzywej płaskiej $\sigma\sigma'$ w tymże punkcie M; oznaczmy ją przez MN.

Niech dalej r oznacza promień krzywizny głównego normalnego przecięcia powierzchni PP w punkcie M/ na rys.44 oznaczyliśmy je linią przerywaną/. Prosta MN' jest główną normalną toru ss', a ρ promień pierwszej krzywizny tego toru w punkcie M".

Niech θ oznacza kąt pomiędzy prostymi MN i MN'. Ponieważ główna normalna MN' jest zawsze prostopadłą do stycznej MT, więc płaszczyzna NMN' jest prostopadłą do prostej MT.

Z geometrii różniczkowej mamy wzór M e u s n i e r 'a dający zależność pomiędzy ρ i r:

$$\rho = r.\cos\theta \qquad \text{/15/}$$

Rozłóżmy siłę zewnętrzną S, przyłożoną do punktu M, na dwie składowe :

1/ w kierunku stycznej MT mamy:

$$S_t = S.\cos/S,T/ = m\,\frac{dv}{dt}$$

i 2/ w kierunku głównej normalnej MN' mamy :

$$S_{n'} = S.\cos/S,N'/ = m\,\frac{v^2}{\rho},$$

przy czym m jest masą punktu M, a v jego prędkością,/ patrz cz. II Kinematyki, rodz. III^x/.

Drugą składową $S_{n'}$, rozłożymy znowu na dwie wzdłuż dwóch wzajemnie prostopadłych prostych : normalnej do powierzchni MN i prostej MK, prostopadłej do MN i leżącej razem z prostymi MN' i MN w jednej i tej samej płaszczyźnie, normalnej do stycznej MT. Otrzymamy, że:

$$S_n = S_{n'}\,.\,\cos\theta = \frac{mv^2}{\rho}\,.\,\cos\theta$$

i

$$S_k = S_{n'}\,\sin\theta = \frac{mv^2}{\rho}\,.\,\sin\theta\,.$$

Przyjmując trzy wzajemnie prostopadłe proste MT, MN i MK, jako osie współrzędnych i biorąc pod uwagę, że przeciwdziałanie R powierzchni PP, jako bezwzględnie gładkiej, jest skierowane wzdłuż normalnej do tej powierzchni, otrzymamy trzy równania ruchu :

x/ Wzory dla przyśpieszenia stycznego i normalnego wyprowadziliśmy w przypuszczeniu, że tor jest płaski, ale łatwo zrozumieć, że one mają miejsce i w wypadku ogólnym, gdy tor jest skośny, ponieważ przyśpieszenie punktu znajduje się zawsze w płaszczyźnie krzywizny, tj. w płaszczyźnie MTN'

$$\left.\begin{aligned} m\cdot\frac{dv}{dt} &= S_t ,\\ \frac{mv^2}{\varrho}\cos\theta &= S_n + R ;\\ \frac{mv^2}{\varrho}\sin\theta &= S_k ;\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /16/$$

Równania /16/ możemy napisać nieco inaczej ; zakładając:

$$\frac{\varrho}{\sin\theta} = \varrho_g ,$$

przy czym ϱ_g nazywamy " k r z y w i z n ą g e o d e z y j - n ą " , i korzystając ze wzoru /15/ Meusnier á, przepiszemy równania /16/ w ten sposób :

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= S_t ,\\ \frac{mv^2}{r} &= S_n + R ,\\ \frac{mv^2}{\varrho_g} &= S_k ;\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /17/$$

Równania /17/ są równaniami, zwanymi :"equations intrinseques ".

Gdy siły zewnętrzne S posiadają potencjał U/x,y,z/ i więc mamy całkę energii kinetycznej :

$$\frac{mv^2}{2} = U - C,$$

wtedy drugie równanie /17/ pozwala wyznaczyć przeciwdziałanie R powierzchni /1/, nie wiedząc ruchu punktu, jeżeli tylko znamy promień krzywizny r głównego przecięcia normalnego danej powierzchni. Rzeczywiście mamy, że :

$$R = \frac{mv^2}{r} - S_n = \frac{2}{r}/U - C/ - S_n \ldots\ldots\ldots\ldots /18/$$

Pozostałe dwa równania /17/ określają ruch punktu;

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= S_t \\ \frac{mv^2}{\rho_g} &= S_k \end{aligned}\right\} \quad\text{i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /19/$$

Rozpatrzymy ruch punktu po bezwzględnie gładkiej nieruchomej powierzchni w tym szczególnym wypadku, gdy siły zewnętrzne S albo zupełnie nie są przyłożone do danego punktu, albo też stale podczas jego ruchu znajdują się w stanie wzajemnej równowagi.

W tym wypadku wypadkowa :

$$S = 0$$

i dlatego X = Y / Z / 0 .

Równanie powierzchni jest określone za pomocą wzoru /1/, mianowicie :

$$f/x,y,z/ = 0.$$

Równanie Lagrange'a /10/ przybiera postać taką :

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \\ my'' &= \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y}, \\ mz'' &= \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /20/$$

Siły posiadają potencjał sił, ponieważ :

$$d\frac{mv^2}{2} = Xdx + Ydy + Zdz = dU = 0 ;$$

więc całka energi kinetycznej jest :

$$\frac{mv^2}{2} = C ; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /21/$$

skąd wynika, że prędkość punktu jest stałą: $v = v_o$, przy czym v_o oznacza początkową wartość prędkości. Dlatego też mamy, że :

$$w_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_o}{dt} = 0,$$

tj. przyśpieszenie styczne jest stale równe zeru.

Pozostaje więc tylko składowa przyśpieszenia w kierunku głównej normalnej do toru, mianowicie :

$$w_{n'} = \frac{v^2}{\rho}$$

i dlatego

$$w = \frac{v^2}{\rho},$$

przy czym ρ jest promień pierwszej krzywizny toru.

Widzimy zatem, że przyśpieszenie punktu M jest skierowane wzdłuż głównej normalnej do toru, innymi słowy wzdłuż promienia krzywizny ρ. Z drugiej strony równania /20/ dają nam, że :

$$x'' : y'' : z'' = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z},$$

tj. przyśpieszenie "w" punktu M jest skierowane wzdłuż normalnej do powierzchni /1/.

Porównując te dwa rezultaty, przychodzimy do wniosku, że n o r m a l n a /MN/ d o p o w i e r z c h n i /1/ j e s t z a r a z e m g ł ó w n ą n o r m a l n ą /MN'/ d l a t o r u, z a k r e ś l o n e g o n a t e j p o w i e r z c h n i p r z e z p u n k t r u c h o m y /M/, p o d d z i a ł a n i e m s i ł, d l a k t ó r y c h S=0.

Linie krzywe, położone na danej powierzchni i posiadając własność, że ich główna normalna jest zgodną z normalną do powierzchni w tym samym punkcie, nazywają się " k r z y w y m i g e o d e z y j n y m i ".

Jest rzeczą oczywistą, że przeciwdziałanie powierzchni R jest następujące :

$$R = mw = mw_{n'} = \frac{mv^2}{\rho}$$

Ten sam rezultat otrzymamy użytkując równania /17/, które w naszym szczególnym wypadku przybiorą postać :

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= 0 ; \\ \frac{mv^2}{r} &= R ; \\ \frac{mv^2}{\rho_g} &= 0 . \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots /22/$$

Pierwsze z nich daje, że v jest stałe: $v = v_o$, trzecie mówi nam, że $\rho_g = \infty$, albowiem $v \neq 0$, ponieważ w wypadku przeciwnym $v_o = 0$ i punkt pozostawałby nieruchomym.

Ale wiemy, że $\rho_g = \frac{\rho}{\sin\theta}$, więc $\theta = 0$, tj. normalna do powierzchni jest zgodną z główną normalną do toru punktu ruchomego, a dlatego tor ten jest krzywą geodezyjną. Równanie drugie z rzędu pozwala obliczyć przeciwdziałanie powierzchni R:

$$R = \frac{mv^2}{r} = \frac{mv^2}{\rho},$$

ponieważ $\theta = 0$, a wzór Meusnier'a daje, że $\rho = r \cos\theta$; zatem $\rho = r$. C.b.d.o.

Widzimy więc, że zapomocą mechaniki możemy określić krzywą geodezyjną na danej powierzchni, wyobrażając sobie, że wzdłuż poszukiwanej linii porusza się punkt, na której nie działają żadne siły zewnętrzne.

Jako przykład rozpatrzymy wypadek, gdy dana powierzchnia /1/ jest p o w i e r z c h n i ą o b r o t o w ą. Weźmy układ współrzędnych cylindrycznych z, r i θ. Równanie dowolnej powierzchni obrotowej obrotowej będzie wtedy następujące:

$$z = f/r/ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots /23/$$

Wyznaczymy krzywą geodezyjną dla tej powierzchni. Zależność pomiędzy współrzędnymi prostokątnymi Karteziusza /x,y,z/ i współrzędnymi cylindrycznymi są następujące:

$$x = r\cos\theta ,$$

$$y = r\sin\theta ,$$

$$z = z ,$$

skąd znajdziemy że:

$$v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 + r^2\theta'^2 + z'^2 .$$

Całka energii /21/ daje nam, że $v = v_o$, zatem będziemy mieli ją w takiej postaci :

$$r'^2 \left[1 + f'^2/r/ \right] + r^2 \theta'^2 = v_o^2 \text{ , ...} /24/$$

ponieważ na podstawie /23/ mamy, że :

$$z' = f'/r/ \cdot r' .$$

Ponieważ mamy do czynienia z powierzchnią obrotową, więc istnieje prócz tego całka pól :

$$r^2 \theta' = C_1 \text{ ....} /25/$$

Osią obrotu powierzchni /23/ jest oś OZ, dlatego też, aby napisać równanie poszukiwanej krzywej geodezyjnej, wyznaczymy równanie rzutu tej krzywej na płaszczyznę XOY prostopadłą do osi obrotu powierzchni /23/. W tym celu wyeliminujemy czas t, z równań /24/ i /25/ i otrzymamy, że :

$$\frac{1}{r^4} \cdot \left[1 + f'^2/r/ \right] \cdot / \frac{dr}{d\theta} /^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{v_o^2}{C_1^2} ,$$

skąd znajdziemy, że :

$$\frac{dr}{d\theta} = \sqrt{\frac{\frac{v_o^2 r^4}{C_1^2} - r^2}{1 + f'^2/r/}}$$

Oddzielając zmienne r i θ i całkując, otrzymamy :

$$C_1 \cdot \int \sqrt{\frac{1 + f'^2/r/}{v_o^2 r^2 - C_1^2}} \cdot \frac{dr}{r} = \theta + \text{Const.}$$

Wykonując całkowanie dla danej funkcji f/r/, otrzymamy równanie poszukiwanego ruchu :

$$\theta = F/r/ \text{ , ...} /26/$$

które zarazem jest równaniem powierzchni cylindrycznej o tworzących, równoległych do osi OZ, i o podstawie położonej na płaszczyźnie XOY i mającej równanie /26/. Powierzchnie /23/ i /26/, przecinając się wzajemnie, dają poszukiwaną krzywą.

geodezyjną, równania której z tego względu są :

$$z = f/r/ \ ,$$

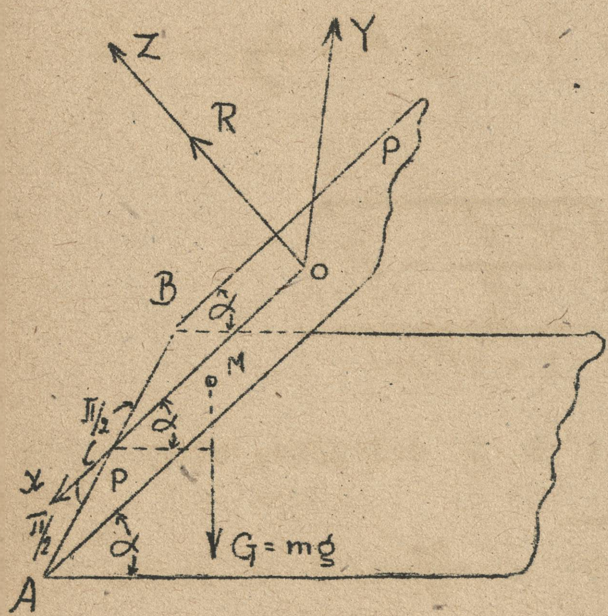
$$\theta = F/r/ \ .$$

W wypadku powierzchni nieobrotowej,wyznaczenie na niej krzywej geodezyjnej staje się bardzo trudne; np. dla elipsoidy trójosiowej dokonał tego Jacobi, zawdzieczając powodzenie rozwiązania trafnie obranym współrzędnym eliptycznym

Ruch punktu ciężkiego po gładkiej równi pochyłej, tworzącej kąt α z poziomem.

Przyjmiemy daną płaszczyznę, jako płaszczyznę współrzędnych XOY, przy czym oś OX skierujemy tak, aby OX $\perp$ AB/rys.45/ tj. do prostej przecięcia się danej płaszczyzny PP z poziomem; oś OZ skierujemy prostopadle do danej płaszczyzny, do góry. Wtedy równanie /1/ powierzchni będzie :

$$z = 0.$$



Rys. 45.

Warunki początkowe są : przy $t = 0$ musi być:

$$x = x_0; \ y = y_0; \ z = 0;$$

$$x_0' = a; \ y_0' = b; \ z_0' = 0 \ .$$

Różniczkowe równania /10/ Lagrange'a dają nam:

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= mg.\sin\alpha; \\ my'' &= 0 \ ; \\ mz'' &= -\,mg\cos\alpha + R; \end{aligned}\right\} \ ./27/$$

Całkując pierwsze równanie/27/, otrzymujemy:

$$x = A + Bt + \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha \ .$$

Na podstawie warunków początkowych,znajdujemy wartości stałych dowolnych A i B

$$A = x_0 \ ; \qquad B = a \ ;$$

więc ostatecznie :

$$x = x_0 + at + \frac{1}{2} gt^2 \sin\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /28/$$

Całkując drugie równanie /27/ i biorąc pod uwagę warunki początkowe, otrzymamy :

$$y = y_0 + bt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /29/$$

Trzecie równanie /27/ wyznacza wartość przeciwdziałania równi pochyłej, mianowicie :

$$R = mg.\cos\alpha ;$$

albowiem $z'' = 0$; widzimy, że R jest liczebnie równe składowej siły ciężkości G, wziętej wzdłuż prostopadłej do równi. Znak "+" wskazuje, że przeciwdziałanie R jest skierowane wzdłuż dodatniej normalnej, tj. wzdłuż dodatniej osi OZ.

Równania /27/ i /29/ mówią nam, że ruch punktu ciężkiego po bezwzględnie gładkiej równi pochyłej odbywa się zupełnie tak samo, jak w próżni, jedynie tylko przyśpieszenie jest nie g, lecz $g \sin\alpha$. Gdy $\alpha = \frac{\pi}{2}$, wtedy i ta różnica przestaje istnieć, otrzymujemy bowiem wtedy rzeczywisty ruch w próżni z przyśpieszeniem ziemskim g. Równania /28/ i /29/ wykazują, że punkt M zakreśla na równi pochyłej pewną parabolę, parametryczne równania której są :

$$x = x_0 + at + \frac{1}{2} gt^2 \sin\alpha ; \quad y = y_0 + bt.$$

Ruch punktu po powierzchni stożka obrotowego pod działaniem siły, przyciągającej w kierunku prostopadłym do osi stożka i odwrotnie - proporcjonalnej do sześcianu odległości od tej osi.

Oznaczmy przez k siłę przyciągającą jednostkę masy na odległości równej jednostce, wtedy wyrażenie danej siły S będzie następujące :

$$S = -\frac{km}{r^3}.$$

Równanie powierzchni stożka obrotowego dla współrzędnych cylindrycznych jest :

$$r = \mu \cdot z \, ;$$

a w prostokątnych Kartezjusza :

$$x^2 + y^2 = \mu^2 . z^2 \quad ;$$

przy czym: $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ ./rys.46/.

Siła S oczywiście posiada potencjał U:

$$U = -\int \frac{km}{r^3}\, dr = \frac{km}{2r^2} \quad ;$$

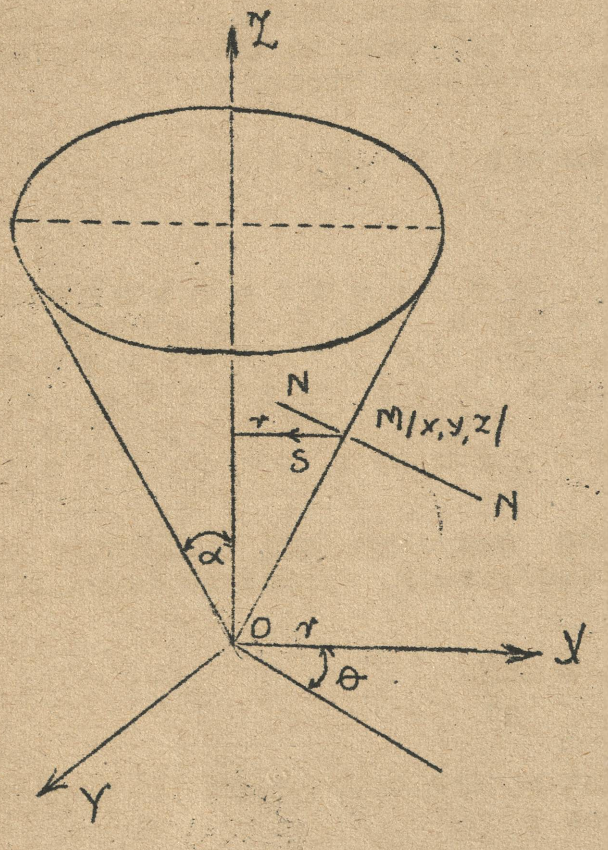
więc zasada energii kinetycznej daje nam całkę :

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{km}{2r^2} = C \; ;$$

czyli po skróceniu przez $\frac{m}{2}$:

$$v^2 - \frac{k}{r^2} = c; \; .... /30/$$

przy czym $c = \frac{2C}{m}$.



Rys. 46

Ponieważ dana powierzchnia jest obrotową i siła zewnętrzna S, działająca na punkt, przecina stale oś OZ obrotu tej powierzchni, więc istnieje całka pól w płaszczyźnie XOY, prostopadłej do osi OZ, mianowicie :

$$y'x - x'y = r^2\theta' = C_1 .. /31/$$

Stałe dowolne C i C_1 określimy na mocy warunków początkowych ; przy t = 0 musi być:

$$x = x_o ; \; y = y_o ;$$

$$x' = a \, ; \; y' = b.$$

Te dane określają z_o i / $z'/_o$, rzeczywiście równanie stożka daje nam :

$$z_o = \frac{\sqrt{x_o^2 + y_o^2}}{\mu} \; ;$$

przy czym przed pierwiastkiem wzięliśmy znak "+",albowiem u nas zawsze $z > 0$.

Różniczkując równanie stożka, otrzymamy, że: $xx' + yy' = \mu^2 zz'$, skąd obliczymy $/z'/_0$:

$$/z'/_0 = \frac{x_0 a + y_0 b}{\mu^2 z_0}$$

Wyznaczymy ruch punktu; w tym celu przepiszemy całkę energii kinetycznej/30/ tak:

$$r'^2 + r^2 \theta'^2 + z'^2 = \frac{k}{r^2} + c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /32/$$

Ponieważ $r = \mu z$, więc $r' = \mu z'$.Równanie/31/ daje nam wyrażenie dla θ:

$$\theta' = \frac{C_1}{r^2} = \frac{C_1}{\mu^2 z^2} .$$

Wstawiając otrzymane wyrażenia do równania /32/,znajdziemy, że :

$$\mu^2 . z'^2 + \frac{C_1^2}{\mu.^2 z^2} + z'^2 = \frac{k}{\mu.^2 z^2} + c ;$$

czyli :

$$/1 + \mu^2/ \mu^2 z^2 z'^2 = k - C_1^2 + c.\ \mu.^2 z^2 ;$$

skąd wynika, że :

$$\mu . zz' \sqrt{1 + \mu^2} = \sqrt{k - C_1^2 + c.\ \mu.^2 z^2}$$

Przed pierwiastkiem bierzemy znak "+" lub "-" w zależności od tego, czy z wzrasta - czy też maleje podczas ruchu punktu,Przypuśćmy, że trzeba wziąść "+", wtedy oddzielając zmienne, otrzymamy, że :

$$\frac{\mu \sqrt{1 + \mu^2}\ z.\ dz}{\sqrt{k - C_1^2 + c. \mu^2 . z^2}} = dt.$$

Całkując znajdziemy :

$$t+\tau=\sqrt{1+\mu^2}\int\frac{\mu z dz}{\sqrt{k-C_1^2+c\mu^2 z^2}}=\frac{\sqrt{1+\mu^2}}{c\mu}\cdot\sqrt{k-C_1^2+c\cdot\mu^2 z^2};$$

skąd otrzymujemy, że :

$$k-C_1^2+c\cdot\mu^2 z^2=\frac{c^2\mu^2}{1+\mu^2}/t+\tau/^2;$$

przy czym stałą całkowania τ określimy z warunku, że przy $t = 0$ musi być : $z = z_0$.

Rozwiązując ostatnie równanie względem z, znajdziemy:

$$z=\frac{1}{\mu\sqrt{c}}\cdot\sqrt{\frac{c^2\mu^2}{1+\mu^2}/t+\tau/^2-k+C_1^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /33/$$

Mając wyrażenie z, jako funkcję czasu t, z łatwością znajdziemy r i θ, też jako funkcje czasu t, ponieważ mamy:

$$r=\mu\cdot z$$

$$\theta'=\frac{C_1}{r^2}=\frac{C_1}{\mu^2 z^2}.$$

Całkując drugie równanie względem czasu t, otrzymamy zależność pomiędzy θ i t. Pozostaje nam wyznaczyć przeciwdziałanie powierzchni R. Różniczkowe równania ruchu /10/ Lagrange'a dają nam, że :

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= -\frac{km}{r^3}\cdot\frac{x}{r}+2\lambda x;\\ my'' &= -\frac{km}{r^3}\cdot\frac{y}{r}+2\lambda y;\\ mz'' &= -2\lambda\cdot\mu^2 z;\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /34/$$

przy czym :

$$\frac{R}{\sqrt{/\frac{\partial f}{\partial x}/^2+/\frac{\partial f}{\partial y}/^2+/\frac{\partial f}{\partial z}/^2}}=\lambda=\frac{R}{\sqrt{4x^2+4y^2+4\mu^4 z^2}}=$$

$$= \frac{R}{2\mu z\sqrt{1+\mu^2}}$$

Z ostatniego równania /34/ znajdziemy R, rzeczywiście:

$$R = -\frac{mz''}{\mu}\sqrt{1+\mu^2};$$

przy czym z" obliczymy, różniczkując dwukrotnie wyrażenie /33/

Małe wahania wahadła sferycznego.

Zbadamy bardzo pouczający ruch wahadła sferycznego, przypuszczając, że jego wahania są małe. Przypuśćmy, że mamy punkt materialny, połączony za pomocą sztywnego i nierozciągliwego pręta z nieruchomym punktem O, dookoła którego ten pręt może zupełnie swobodnie obracać się. Udzielimy temu punktowi M o masie m prędkość początkową v_o, o kierunku poziomym; wtedy tor naszego punktu będzie pewną krzywą skośną, leżącą na powierzchni geometrycznej kuli, której środek znajduje się w punkcie zawieszenia O, a promień jest równy długości pręta d. Takie wahadło nazywamy "wahadłem sferycznym"

Obierzmy w punkcie zawieszenia O początek współrzędnych prostokątnych OXYZ i wyobraźmy sobie, że w momencie początkowym t = O punkt ruchomy M zajmuje położenie M_o. Oś OZ skierujemy pionowo ku dołowi, płaszczyznę współrzędnych ZOX przeprowadzimy przez punkt M_o, wtedy oś OY będzie równoległą do prędkości początkowej v_o /rys. 47/.

Oznaczając przez R natężenie pręta OM, będziemy mieli następujące równa ruchu wahadła sferycznego.

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= -R\frac{x}{d}; \\ my'' &= -R\frac{y}{d}; \\ mz'' &= mg - R\frac{z}{d}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /34/$$

przy czym równanie powierzchni geometrycznej, po której porusza się punkt M, innymi słowy równanie połączenia, jest :

$$x^2 + y^2 + z^2 - d^2 = 0;$$

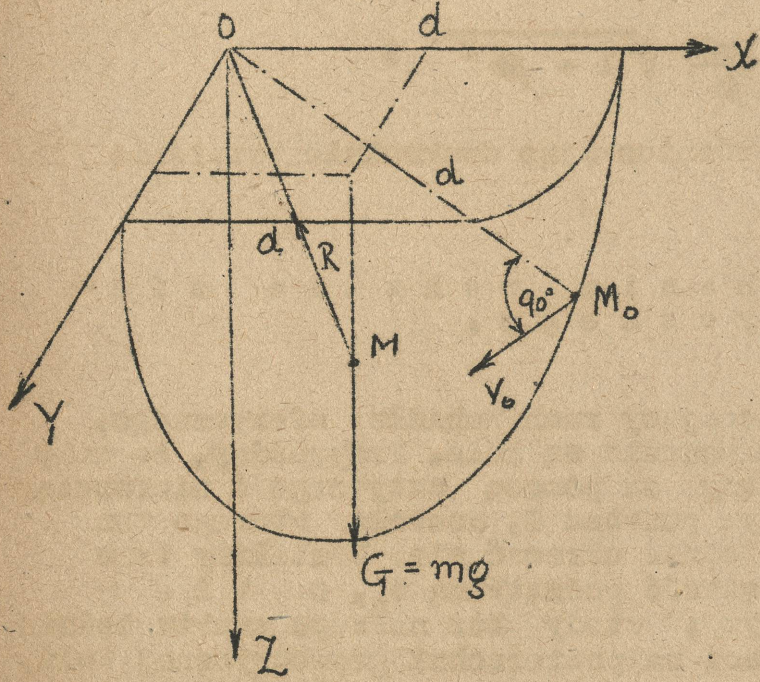
czyli :

$$z = \sqrt{d^2 - /x^2 + y^2/} \quad ..../35/$$

Warunki początkowe są następujące: przy $t = 0$ musi być ;

$x=x_0$; $y=0$; $x'=0$; $y'=b$

Powiedzieliśmy wyżej, że ograniczymy się wypadkiem, gdy wahania są małe: Małymi wahaniami nazywamy takie, dla których stosunki $\frac{x_0}{d}$ i $\frac{b\tau}{d}$, /przy czym τ oznacza czas trwania jednego całego wahnięcia wahadła/, są wielkościami małymi. Dlatego też, rozkładając równanie /35/ według potęg wzrastających będziemy mogli ograniczyć się wyrazami zawierającymi "małe wielkości" w pierwszej potędze.



Rys. 47.

Równanie kuli /35/ daje nam, po rozwinięciu, że :

$$z = d\, /1 - \frac{x^2 + y^2}{2d^2} + .../; \quad ..../36/$$

widzimy więc, że w pierwszym przybliżeniu, możemy przyjąć:

$$z = d \;;$$

wtedy trzecie równanie grupy /34/ daje, że :

$$R = mg \;;$$

i dlatego pierwsze i drugie równania /34/ przybiorą postać taką:

$$\left.\begin{aligned} x'' + \frac{g}{d} \cdot x = 0 \;; \\ y'' + \frac{g}{d} \cdot y = 0 \;; \end{aligned}\right\} ..../37/$$

Całkując je /patrz rozdz. II, §§ 7 i 9/, znajdziemy ich całki ogólne, mianowicie

$$x = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt \ ;$$

$$y = C_3 \cos nt + C_4 \sin nt \ ;$$

które, na podstawie warunków początkowych, przedstawią się jak niżej :

$$\left.\begin{aligned} x &= x_o \cos nt \ ; \\ y &= a \sin nt \ ; \end{aligned}\right\} \qquad \text{..............................} /38/$$

przy czym wprowadziliśmy tu oznaczenia :

$$n = \sqrt{\frac{g}{d}} = \frac{2\pi}{\tau} \quad \text{i} \quad a = \frac{b}{n} \ ;$$

i dlatego okres wahań τ jest :

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$$

Zdawałoby się, że otrzymane rozwiązania zadania /38/ są ścisłe w przybliżeniu do wyrazów pierwszego rzędu małości względem x_o i a,/czyli b/,ponieważ w równaniu /36/ odrzuciliśmy wyrazy drugiego i wyższych rzędów małości względem wielkości x_o i a.

Tymczasem podobny wniosek jest zgoła błędny.Rzeczywiście, aby o tym przekonać się, wstawimy do równania /36/ zamiast x i y ich wyrażenia /38/, wtedy z łatwością otrzymamy , że :

$$z = d./1 - \frac{x_o^2\cos^2 nt}{2d^2} - \frac{a^2\sin^2 nt}{2d^2}/ =$$

$$= d.\left[1 - \frac{1}{4d^2}/x_o^2 + x_o^2 \cos 2\,nt + a^2 - a^2 \cos 2\,nt/\right] =$$

$$= d./1 - \frac{x_o^2 + a^2}{4d^2} - \frac{x_o^2 - a^2}{4d^2} \cos 2\,nt\ /;$$

a oznaczając dla uproszczenia wzorów :

$$\alpha^2 = \frac{x_o^2 + a^2}{4d^2} \ ; \qquad 2\beta^2 = \frac{x_o^2 - a^2}{4d^2} \ ;$$

otrzymamy ostatecznie, że :

$$z = d/1 - \alpha^2 - \beta^2 \cos 2nt/ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /39/$$

Zauważymy, że umyślnie wprowadziliśmy oznaczenia α^2 i β^2, a nie α i β ; aby podkreślić, że są to wielkości d r u g i e g o r z ę d u m a ł o ś c i względem wielkości x_0 i a ; oprócz tego, oczywiście, przypuszczamy tu, że:

$$x_0 > a$$

Różniczkując wyrażenie /39/ dwukrotnie, będziemy mieli:

$$z'' = 4n^2 d\, \beta^2 \cos 2nt = 4g\, \beta^2 \cos 2nt.$$

Wstawiając znalezione wyrażenia dla z i z'' w równanie ruchu :

$$mz'' = mg - R\frac{z}{d},$$

znajdziemy równanie dla R:

$$4mg\,\beta^2 \cos 2nt = mg - R/1 - \alpha^2 - \beta^2 \cos 2nt/;$$

skąd obliczymy niewiadome przeciwdziałanie powierzchni /połączenia/:

$$R = mg\frac{1 - 4\beta^2 \cos 2nt}{1 - \alpha^2 - \beta^2 \cos 2nt} =$$

$$= mg/1 - 4\beta^2 \cos .2nt/ /1 - \alpha^2 - \beta^2 \cos 2nt/^{-1} =$$

$$= mg/1 - 4\beta^2 \cos 2nt/ / 1 + \alpha^2 + \beta^2 \cos 2nt + \alpha^4 +$$

$$+ 2\alpha^2\beta^2 \cos 2nt + \beta^4 \cos^2 2nt/ = mg\Big[1 + /\alpha^2 +$$

$$+ \alpha^4 - \frac{3\beta^4}{2}/ - /3\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2/ \cos 2nt +$$

$$- \frac{3}{2}\beta^4 \cos 4nt + \ldots\Big] = mg\left[1 + \varphi/t/\right].$$

W takim razie pierwsze dwa równania /34/ dadzą nam, że :

$$x'' + n^2 x\left[1 + \varphi/t/\right] = 0 ;$$

$$y'' + n^2 y\left[1 + \varphi/t/\right] = 0 .$$

Zakładając:

$$k^2 = n^2 \cdot \left(1 + \alpha^2 + \alpha^4 - \frac{3}{2}\,{}^4\right);$$

przepiszemy poprzednie równania w ten sposób :

$$x'' + k^2 x = n^2 \left[\left(3\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2\right)\cos 2nt + \frac{3}{2}\beta^4 \cos 4nt \right] x; \quad \ldots./40/$$

$$y'' + k^2 y = n^2 \left[\left(3\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2\right)\cos 2nt + \frac{3}{2}\beta^4 \cos 4nt \right] y;$$

Zdawałoby się, że gdy podstawimy w prawe części poprzednich równań /40/ zamiast x i y ich wyrażenia przybliżone/38/:

$$x = x_0 \text{ const };$$

$$y = a \sin nt ;$$

to, ponieważ prawe części, otrzymanych w ten sposób równości, są trzeciego rzędu małości względem α i β, więc moglibyśmy je odrzucić, jeżeli chcemy mieć tylko wyrazy pierwszego i drugiego rzędu. Jednak tak nie jest ; rzeczywiście, przymując pod uwagę zależności znane z trygonometrii :

$$\cos 2nt \cdot \cos nt = \frac{1}{2}\left(\cos 3nt + \cos nt\right);$$

$$\cos 2nt \cdot \sin nt = \frac{1}{2}\left(\sin 3nt - \sin nt\right);$$

$$\cos 4nt \cdot \cos nt = \frac{1}{2}\left(\cos 5nt + \cos 3nt\right);$$

$$\cos 4nt \cdot \sin nt = \frac{1}{2}\left(\sin 5nt - \sin 3nt\right);$$

przedstawimy równania /40/ tak :

$$x'' + k^2 x = x_0\left(\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2\right)n^2 \cos nt + x_0\left(\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2 + \frac{3}{2}\beta^4\right) \cdot$$

$$\cdot\, n^2 \cos 3nt + \frac{3}{4} x_0 \beta^4 n^2 \cos 5nt ;$$

$$y'' + k^2 y = -a\left(\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2\right)n^2 \sin nt + a\left(\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2 - \frac{33}{4}\beta^4\right) \cdot$$

$$\cdot\, n^2 \sin 3nt + \frac{3}{4} a\beta^4 n^2 \sin 5nt ;$$

Całki ogólne tych równań liniowych są następujące :

$$x = C_1\cos \bar{k}t + C_2\sin \bar{k}t + x_0\frac{\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2}{\bar{k}^2 - n^2}\, n.^2\cos nt +$$

$$+ x_0\frac{\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2 + \frac{3}{4}\beta^4}{9n^2 - \bar{k}^2} \cdot n^2\cos 3\,nt + \frac{3}{4}x_0\frac{\beta^4}{25n^2 - \bar{k}^2}\, n^2\cos 5nt.$$

$$y = C_3\cos \bar{k}t + C_4\sin \bar{k}t - a.\frac{\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2}{\bar{k}^2 - n^2}\, n^2\sin nt +$$

$$+ a.\frac{\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2 + \frac{3}{4}\beta^4}{9n^2 - \bar{k}^2} \cdot n^2\sin 3\,nt + \frac{3}{4}\,a\,\frac{\beta^4}{25n^2 - \bar{k}^2}\, n^2\sin 5\,nt.$$

Ponieważ : $\bar{k}^2 = n^2/\,1 + \alpha^2 + \alpha^4 - \frac{3\beta^4}{2}\,/\,;$

więc różnica : $\bar{k}^2 - n^2 = n^2\alpha^2 + n^2/\,\alpha^4 - \frac{3\beta^4}{2}\,/\,;$

jest m a ł ą r z ę d u d r u g i e g o względem x_0 i a; dlatego też wyrazy :

$$x_0.\frac{\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2}{\bar{k}^2\ \ n^2}\, n^2\cos nt \quad \text{i:} \; - a\frac{\frac{3}{2}\beta^2 + \alpha^2\beta^2}{\bar{k}^2 - n^2}.n^2\sin nt;$$

n i e s ą t r z e c i e g o r z ę d u m a ł o ś c i, jak to wydawało się na pierwszy rzut oka, lecz p i e r w s z e g o r z ę d u m a ł o ś c i.

Widzimy więc, że nawet w pierwszym przybliżeniu nie mamy prawa ich odrzucić, lecz przeciwnie musimy je zachować. Ostatnie zaś wyrazy w wyrażeniach dla x i y są rzeczywiście małymi trzeciego rzędu, albowiem różnica :

$$9n^2 - \bar{k}^2 \cong 8n^2 - n^2\alpha^2 - n^2/\,\alpha^4 - \frac{3\beta^4}{2}\,/;$$

jest wielkością zawsze skończoną, nie zaś nieskończenie małą, jak to jest dla $\bar{k}^2 - n^2$. Jeżeli więc ograniczymy się do wyrazów jedynie pierwszego rzędu małości, wtedy te ostatnie wyrazy mamy prawo odrzucić i dlatego otrzymamy :

$$
\left.\begin{aligned}
x &= C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{3}{2}\,x_0\,\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cos nt\ ;\\
y &= C_3\cos kt + C_4\sin kt - \frac{3}{2}\,a\,\frac{\beta^2}{\alpha^2}\sin nt\ ;
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots/41/
$$

Warunki początkowe dają dla stałych dowolnych C_1, C_2, C_3 i C_4 następujące równania :

$$
C_1 + \frac{3}{2}x_0\,\frac{\beta^2}{\alpha^2} = x_0\ ;\quad kC_2 = 0\ ;
$$

$$
C_3 = 0;\quad kC_4 \cdot \frac{3}{2}\,a\,\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot n = b = an\ .
$$

skąd obliczamy stałe całkowania :

$$
C_1 = x_0 - \frac{3}{2}\,x_0\,\frac{\beta^2}{\alpha^2} = x_0/1 - \frac{3}{2}\,\frac{x_0^2 - a^2}{x_0^2 + a^2}/\ ;\quad C_2 = C_3 = 0\ ;
$$

$$
C_4 = \frac{an}{k}\,/1 + \frac{3}{2}\,\frac{x_0^2 - a^2}{x_0^2 + a^2}/ = a/1 + \frac{3}{2}\,\frac{x_0^2 - a^2}{x_0^2 + a^2}\ ;
$$

ponieważ :

$$
k = n/1 + \frac{1}{2}\,\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots/.
$$

Ostatecznie będziemy mieli następujące rozwiązania naszego zadania :

$$
\left.\begin{aligned}
x &= x_0/1 - \frac{3}{2}\,\frac{x_0^2 - a^2}{x_0^2 + a^2}/.\cos kt + \frac{3}{2}\,x_0\,\frac{x_0^2 - a^2}{x_0^2 + a^2}.\cos nt;\\
y &= a/1 + \frac{3}{2}\,\frac{x_0^2 - a^2}{x_0^2 + a^2}/.\sin kt - \frac{3}{2}\,a\,\frac{x_0^2 - a^2}{x_0^2 + a^2}.\sin nt\ ;
\end{aligned}\right\}\ldots/42/
$$

Widzimy, że nie można zamieniać kt przez nt; rzeczywiście, chociaż mamy, że :

$$
k = n/1 + \frac{1}{2}\,\alpha^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots/\ ;
$$

to jednak z biegiem czasu t wzrasta nieograczenie i dlatego różnica argumentów kt i nk :

$$
kt - nt = \frac{1}{2}\,\alpha^2\,nt + \ldots\ldots\ldots\ldots
$$

wkrótce osiągnie wielkość skończoną.

Ruch punktu, określony za pomocą wzorów /38/, posiada charakter zupełnie odmienny, aniżeli ruch punktu, wyznaczony ze wzoru /42/. Rzeczywiście, tor punktu, równania ruchu którego są /38/;

$$x = x_0 \cos nt ; \qquad y = a \sin nt ;$$

jest e l i p s ą s t a ł ą, o osiach symetrii, skierowanych wzdłuż osi współrzędnych OX i OY ;

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /43/$$

Aby zbadać charakter toru, określonego za pomocą równań ruchu /42/ przekształcimy te równania w następujący sposób:

$$x = x_0 \cos kt + 3x_0 \cdot \frac{x_0^2 - a^2}{x_0^2 + a^2} \cdot \sin \frac{k+n}{2} t . \sin \frac{k-n}{2} t ;$$

$$y = y_0 a \sin kt + 3a . \frac{x_0^2 - a^2}{x_0^2 + a^2} . \cos \frac{k+n}{2} t \sin \frac{k-n}{2} t ;$$

Te równania dają nam, że podczas pierwszego całego wahnięcia wahadła innymi słowy, póki czas t zmienia się od wartości 0 do wartości $\tau_1 = \frac{2\pi}{k}$, tor punktu będzie mało się różnić od elipsy/43/. Jednakże ten tor będzie stale z biegiem czasu t odbiegać od elipsy /43/, albowiem drugie wyrazy x i y zawierają czynnik $\sin \frac{k-n}{2} t$, który w przybliżeniu jest równy ;

$$\sin \frac{k-n}{2} t \cong \frac{k-n}{2} t \cong \frac{\alpha^2 n}{4} t \cong \frac{\alpha^2}{4} \cdot \frac{2\pi}{\tau_1} \cdot t \cong \frac{\pi \alpha^2 t}{2\tau_1} ;$$

i dlatego, gdy t zmienia się w granicach od 0 do $\tau_1 = \frac{2\pi}{k}$, wtedy $\sin \frac{k-n}{2} t$ jednostajnie wzrasta od wartości 0 do wartości 0 do wartości, równej $\frac{\pi \cdot \alpha^2}{2}$.

Układając wyrażenie ;

$$xx' + yy' = v.d.\cos/v,d/$$

i przyrównując je do zera, otrzymamy wartość t, przy której $\cos/v,d/ = 0$. tj. kierunek prędkości punktu ruchomego staje się prostopadłym do kierunku pręta, łączącego ten punkt z punktem zawieszenia O. Innymi słowy, otrzymamy moment t_1, w którym punkt ruchomy przechodzi przez wierzchołek swego toru.

Otrzymana w ten sposób wartość t_1 będzie różnić się od wartości $\tau_1 = \frac{2\pi}{k}$ o wielkości drugiego rzędu małości i dlatego, żeby tę wartość t_1 obliczyć, musimy we wzorach dla x,y,x' i y' uwzględnić wyrazy drugiego rzędu małości.

Obliczmy współrzędne x i y w tym momencie czasu $t = t_1$. Biorąc w przybliżeniu dla wartości drugiego rzędu małości, że $t_1 = \tau_1$, znajdziemy :

$$x = x_0 + /\text{ wyrazy trzeciego rzędu małości}/ \cong x_0$$

i

$$y \cong 3 . a . \frac{x_0^2 - a^2}{x_0^2 + a^2} . \cos/2\pi - \frac{\pi\alpha^2}{2}/ . \sin\frac{\pi\alpha^2}{2} \cong \frac{3}{2} a \pi \alpha^2 \frac{x_0^2 - a^2}{x_0^2 + a^2} ;$$

a ponieważ :

$$\alpha^2 = \frac{x_0^2 + a^2}{4d^2} ;$$

więc ostatecznie mamy :

$$y \cong \frac{3}{8} \pi a . \frac{x_0^2 - a^2}{d^2}$$

Wyrażenia dla x i y w momencie, czasu $t = \tau_1$ pokazują nam, że podczas jednego całego wahnięcia wahadła duża oś elipsy $x_0 . a$ więc i cała elipsa obróci się w kierunku ruchu o pewien kąt γ, przy czym :

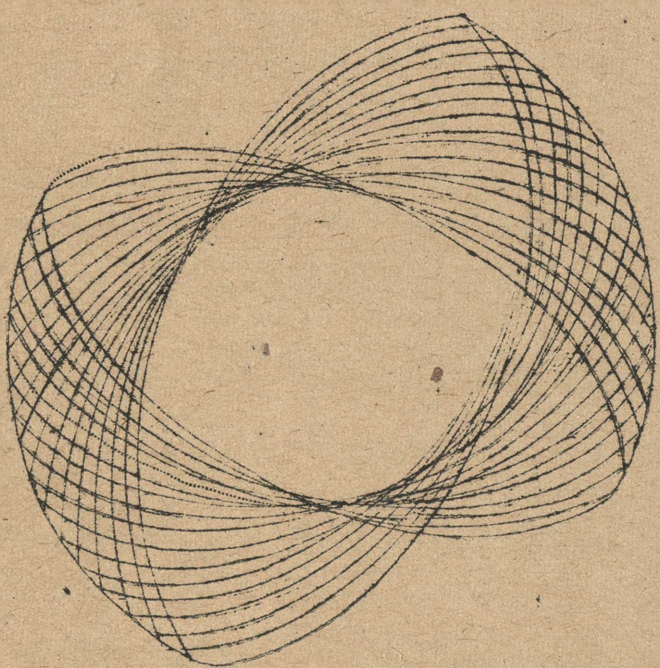
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{3}{8} \pi \frac{a}{x_0} . \frac{x_0^2 - a^2}{d^2} ,$$

czyli inaczej :

$$\gamma = \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{8} \pi \frac{a}{x_0} . \frac{x_0^2 - a^2}{d^2} .$$

Powyższe rozumowania w sposób dobitny wykazują, że podczas przybliżonego całkowania różniczkowych równań ruchu, o d r z u c a n i e w y r a z ó w j a k i e g o b ą d ź r z ę d u m a ł o ś c i w r ó w n a n i a c h r ó ż n i c z k o w y c h n i e z a w s z e o d p o w i a d a o d r z u c e n i u w y r a z ó w t e g o ż r z ę d u m a ł o ś c i w s k o ń c z o n y c h r ó w n a n i a c h r u c h u, innymi słowy, w całkach ogólnych danych równań różniczkowych. Przeciwnie ten rząd może być zupełnie inny, np. w rozpatrzonym zadaniu, odrzucając w równaniach różniczkowych wyrazy t r z e c i e g o r z ę d u m a ł o ś c i, my tym samym odrzuciliśmy w całkach ogólnych tych równań odpowiednie wyrazy, których rząd okazał się n i e t r z e c i m, l e c z p i e r w s z y m.

Rys.48. przedstawia poziomy rzut ruchu środka ciężkości /bezwładności / sferycznego wahadła, którego długość d=3,34 metra, a skala rysunku jest 1: 10,5.Rysunek 48 został otrzymany w ten sposób: na końcu stalowego drutu długości 3,34 m, został zawieszony ołowiany walec, którego wysokość i średnica są równe 10 cm, a waga wynosi blisko 8 kg. Wzdłuż osi tego walca jest wyświdrowany otwór średnicy 1,5 cm i w nim umieszczono maleńką żarówkę elektryczną. W odległości 2,5 m pod cylindrem ulokowano fotograficzny aparat, zwrócony objektywem do góry, tak, że jego klisza jest poziomą.Gdy wahadło sferyczne puszczono w ruch, wtedy obraz żarówki w postaci punktu świecącego, poruszając się nad kliszą, da nam na niej fotografię krzywej będącej rzutem toru, zakreślonego przez środek ciężkości wahadła sferycznego. Jest rzeczą zrozumiałą, że krzywa,otrzymana w ten sposób, różni się od toru punktu ruchomego, albowiem jest jego rzutem ; jednakże ta różnica nie zmienia zasadniczo charakteru krzywej i dlatego z rys. 48 możemy sądzić o kształcie toru wahadła sferycznego dla małych wahań.



Rys.48

R ó w n a n i a r ó w n o w a g i p u n k t u m a t e r i a l n e g o, z n a j d u j ą c e g o s i ę n a b e z w z g l ę d n i e g ł a d k i e j p o w i e r z c h n i. Równania równowagi otrzymamy, gdy założymy w różniczkowych równaniach ruchu /10/, że :

$$x'' = y'' = z'' = 0.$$

Równania te będą następujące :

$$\left.\begin{aligned} X + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 ;\\ Y + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 ;\\ Z + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial z} &= 0 ; \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots /44/$$

przy czym :

$$\lambda = \frac{R}{\sqrt{\left/\frac{\partial f}{\partial x}\right/^2 + \left/\frac{\partial f}{\partial y}\right/^2 + \left/\frac{\partial f}{\partial z}\right/^2}}$$

Trzy równania /44/ wraz z równaniem powierzchni f/x,y,z/ = 0 pozwalają wyznaczyć położenie równowagi punktu na danej bezwzględnie / gładkiej powierzchni /1/ pod działaniem zadanych sił S/X,Y,Z/,tj. możemy obliczyć x,y,z i R.

Rugując λ z równań równowagi /44/, znajdujemy, że :

$$\frac{X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial f}{\partial z}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots /45/$$

Równania /45/ wyrażają k o n i e c z n y i w y s t a r c z a j ą c y w a r u n e k r ó w n o w a g i punktu materialnego na danej bezwzględnie -gładkiej powierzchni /1/, mianowicie :

w y p a d k o w a s i ł z a d a n y c h S, p r z y ł o ż o n y c h d o p u n k t u, m u s i b y ć s k i e r o w a n ą w z d ł u ż n o r m a l n e j d o p o w i e r z c h n i.

Na zakończenie obecnego rozdziału rozpatrzymy r u c h p u n k t u p o c h r o p o w a t e j p o w i e r z c h n i n i e r u c h o m e j.

Gdy punkt materialny porusza się po chropowatej powierzchni, wtedy prócz normalnego przeciwdziałania R powierzchni, na punkt ruchomy działa jeszcze o p ó r t a r c i a T.

Doświadczenia wskazują, że siła tarcia, przyłożona do punktu, jest skierowaną w kierunku wprost p r z e c i w n y m do p r ę d k o ś c i punktu, a w a r t o ś ć l i c z e b n a t e j s i ł y j e s t r ó w n ą b e z w z g l ę d n e j w a r t o ś c i n o r m a l n e g o p r z e c i w d z i a ł a n i a R, p o m n o ż o n e m u p r z e z pewien o k r e ś l o n y w s p ó ł c z y n n i k μ, zwany " w s p ó ł c z y n n i k i e m t a r c i a d l a r u c h u", czyli inaczej " d y n a m i c z n y m w s p ó ł c z y n n i k i e m t a r c i a.". Współczynnik μ charakteryzuje chropowatość danej powierzchni. Mamy więc zależność:

$$T = \mu \cdot |R| \qquad /46/$$

Współczynnik tarcia dla ruchu jest mniejszy od współczynnika tarcia dla równowagi. Ponieważ cosinusy kątów, utworzonych prędkością punktu v z osiami współrzędnych OXYZ, są odpowiednio równe stosunkom :

$$\frac{x'}{v}, \frac{y'}{v}, \frac{z'}{v}$$

to, na podstawie powyższych własności siły tarcia, jej rzuty na osi OXYZ będą :

$$T \cdot \cos/T,X/ = \mu \cdot R/-\frac{x'}{v}/ = -\mu\frac{x'}{v} \cdot |R|;$$

$$T \cdot \cos/T,Y/ = -\mu\frac{y'}{v} \cdot |R|;$$

$$T \cdot \cos/T,Z/ = -\mu\frac{z'}{v} \cdot |R|;$$

Dołączając do zadanych sił zewnętrznych S, działających na dany punkt, normalne przeciwdziałanie R i siłę oporu tarcia T, możemy uważać ten punkt, jako zupełnie swobodny; dlatego też różniczkowe równania ruchu będą następujące :

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= X + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \mu\frac{x'}{v} \cdot R; \\ my'' &= Y + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \mu\frac{y'}{v} \cdot R \\ mz'' &= Z + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial z} - \mu\frac{z'}{v} \cdot R; \end{aligned}\right\} \qquad /47/$$

gdzie :
$$v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Trzy równania ruchu /47/ i jedno równanie powierzchni /1/

$$f/x,y,z/ = 0$$

pozwalają wyznaczyć cztery niewiadome x,y,z i R; opór tarcia T obliczymy ze wzoru /46/,albowiem współczynnik tarcia jest znany.

Jako przykład zbadamy prostoliniowy ruch ciężkiego punktu po nieruchomej i chropowatej równi pochyłej, tworzącej kąt α z poziomem.

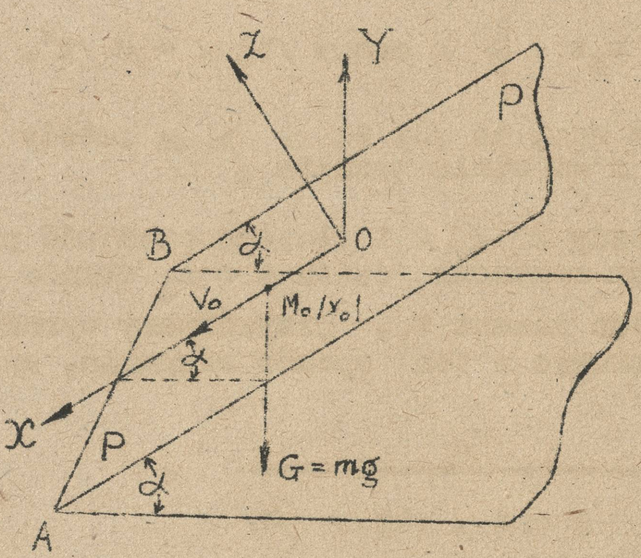
Przyjmując równię pochyłą za płaszczyznę współrzędnych XOY, oś OX skierujemy prostopadle do linii przecięcia się płaszczyzny równi z płaszczyzną poziomu, a oś OZ weźmiemy prostopadle do równi i skierujemy ją do góry /rys.49/. Wtedy równanie równi będzie :

$$f/x,y,z/ = z = 0$$

Przypuśćmy, że prędkość początkowa v_0 jest skierowaną wzdłuż osi OX ku dołowi,wtedy

$$v_0 = x'_0 > 0$$

i różniczkowe równania ruchu /47/ dadzą:



Rys.49.

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= mg.\sin\alpha - \mu|R|; \\ my'' &= 0 ; \\ mz'' &= mg.\cos\alpha + R ; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /48/$$

ponieważ :
$$\lambda = R$$

Biorąc pod uwagę, że z" = 0, z trzeciego równania /48/ znajdziemy ;
$$R = mg \cos\alpha ,$$

Wstawiając otrzymaną wartość R w pierwsze równanie /48/, będziemy mieli, że :

$$mx'' = mg \sin\alpha - \mu\, mg \cos\alpha ;$$

czyli po skróceniu przez nasze M:

$$x'' = g/ \sin\alpha - \mu \cos\alpha / = g \cos\alpha /tg\alpha - \mu /.$$

Wyrażenie dla przyśpieszenia punktu x" daje nam, że punkt porusza się ruchem jednostajnie - przyśpieszonym. Ponieważ w momencie początkowym :

$$t = 0, \text{ mamy } ; x = x_0, x'_0 = v_0,$$

więc, całkując ostatnie równanie, znajdziemy :

$$x' = v_0 + g \cos\alpha /tg\alpha - \mu/ . t$$

i

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g \cos\alpha /tg\alpha - \mu /t^2.$$

Wyrażenie dla x" daje nam, że gdy $tg\,\alpha > \mu$, wtedy $x'' > 0$, i dlatego prędkość punktu $x'=v$ stale wzrasta ;

Gdy zaś $tg\,\alpha < \mu$, wtedy $x'' < 0$ i dlatego prędkość punktu zmniejsza się i w pewnym momencie czasu $t = t_1$ stanie się równą zeru. Aby obliczyć ten moment t_1, przyrównamy wyrażenie dla x' do zeru, i z otrzymanego w ten sposób równania, znajdziemy t_1,

$$t_1 = -\frac{v_0}{g \cos\alpha /tg\alpha - \mu/} .$$

Ponieważ przypuściliśmy, że $tg\alpha - \mu < 0$, więc przy $v_0 > 0$, mamy, że : $t_1 > 0$; innymi słowy, moment czasu $t = t_1$ następuje po momencie początkowym $t = 0$. Punkt ruchomy M zatrzymuje się w momencie t_1 i następnie pozostaje w spoczynku. Gdyby prędkość początkowa v_0 była skierowaną wzdłuż osi OX do góry, wtedy $v_0 = x'_0 < 0$ a więc pierwsze równanie ruchu /48/ przedstawiłoby się jak niżej :

$$mx'' = mg \sin\alpha + \mu |R| ;$$

i dlatego następujące wzory zawierałyby $tg\,\alpha + \mu$ zamiast $tg\,\alpha - \mu$, jak dotychczas.

R o z d z i a ł VIII.

R u c h p u n k t u nie/s w o b o d n e g o p o l i n i i k r z y w e j.

Rozpatrzymy jedynie wypadek, gdy linia krzywa jest nieruchomą, tj. równanie tej krzywej nie zawiera czasu t. W postaci ogólnej równanie krzywej możemy uważać, jako przecięcie się dwóch powierzchni.

$$f_1/x,y,z/ = 0, \quad i \quad f_2/x,y,z/ = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots /1/$$

W wypadku szczególnym, gdy krzywa jest linią płaską, wtedy, przyjmując płaszczyznę tej krzywej, jako płaszczyznę współrzędnych XOY, będziemy mieli następujące równania:

$$f/ x,y/ = 0, \quad z = 0 \; ; \ldots\ldots\ldots\ldots /2/$$

Pierwsze równanie /2/ jest równaniem powierzchni pewnego cylindra o podstawie $f/x,y/ = 0$ i o tworzących, równoległych do osi OZ, a drugie równanie /2/ jest równaniem płaszczyzny XOY.

Zadana krzywa podobnie jak powierzchnia w poprzednim rozdziale VII. może być krzywą r z e c z y w i s t ą, albo też g e o m e t r y c z n ą, tj. w rzeczywistości nieistniejącą, lecz będącą warunkiem ruchu punktu materialnego. Krzywa rzeczywista może być b e z w z g l ę d n i e g ł a d k ą, albo też c h r o p o w a t ą.

Z początku zbadamy wypadek krzywej b e z w z g l ę d n i e - g ł a d k i e j, do której zalicza się oczywiście ruch punktu po krzywej geometrycznej.

Gdy punkt materialny porusza się po krzywej /1/, wtedy podczas swego ruchu ten punkt stale znajduje się na dwóch powierzchniach:

$$f_1/x,y,z/ = 0, \quad i \quad f_2/x,y,z/ = 0.$$

Zatem możemy powiedzieć, że punkt materialny porusza się jednocześnie po dwóch powierzchniach; ponieważ przypuściliśmy, że dana krzywa jest bezwzględnie gładką, więc i powierzchnie również są bezwzględnie gładkimi i dlatego przeciwdziałania R_1 i R_2 tych powierzchni są skierowane wzdłuż normalnych do tych powierzchni. Dołączając do danych sił zewnętrznych S, działających na punkt materialny, przeciwdziałania R_1 i R_2 możemy uważać nasz punkt, jako zupełnie swobodny i z tej przyczyny równania ruchu będą miały postać następującą :

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}; \\ my'' &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}; \\ mz'' &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /3/$$

przy czym :

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{R_1}{\sqrt{/\frac{\partial f_1}{\partial x}/^2 + /\frac{\partial f_1}{\partial y}/^2 + /\frac{\partial f_1}{\partial z}/^2}} \\ &\text{i} \\ \lambda_2 &= \frac{R_2}{\sqrt{/\frac{\partial f_2}{\partial x}/^2 + /\frac{\partial f_2}{\partial y}/^2 + /\frac{\partial f_2}{\partial z}/^2}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots /4/$$

Trzy równania ruchu /3/ wraz z dwoma równania ruchu /1/ krzywej dają nam razem pięć równań, skąd możemy znaleść x,y,z, jako funkcje czasu t, a takie niewiadome przeciwdziałania R_1 i R_2.

Jeżeli wartość przeciwdziałania okaże się ze znakiem "+", wtedy kierunek tego przeciwdziałania jest zgodny z kierunkiem dodatniej normalnej, jeżeli zaś ze znakiem "-", wtedy kierunek tego przeciwdziałania jest zgodny z kierunkiem ujemnej normalnej.

Gdy krzywa wywiera na punkt ruchomy pewne przeciwdziałanie, wtedy według trzeciego prawa Newtona punkt materialny oddziaływa na krzywą z siłą równą co do wartości liczebnej, lecz wprost przeciwnie skierowaną; tę siłę nazywamy "c i ś n i e n i e m" punktu materialnego na krzywą.

W wypadku krzywej płaskiej jej równania są podane za pomocą wzorów /2/. Przypuśćmy z początku, że wypadkowa 6 sił, działających na punkt, znajduje się na płaszczyźnie krzywej, wtedy jej rzuty są ; $X, Y, Z = 0$.

Równania ruchu/3/ dają :

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x};\\ my'' &= Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y};\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots/5/$$

$$\lambda = \frac{R}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} ;\ldots\ldots\ldots\ldots/5/$$

przy czym trzecie równanie przeszktałca się w tożsamość $0 = 0$.

Równania /5/ wraz z równaniem $f/x,y,z/ = 0$ pozwolą nam określić niewiadome x,y i R, jako funkcje czasu t.

Rugując λ z równań ruchu /5/, otrzymamy, że :

$$\frac{mx'' - X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{my'' - Y}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Wstawiając w te równania wyrażenie dla y, obliczone z równania $f/x,y,z/ = 0$, i całkując względem x, otrzymamy x jako funkcje czasu t i stałych dowolnych C_1 i C_2. Mając zaś x, obliczymy z łatwością y i R.

Jeżeli wypadkowa sił S, przyłożonych do punktu ruchomego, nie jest zawartą w płaszczyźnie krzywej, wtedy rzuty tej wypadkowej są : X,Y, Z i różniczkowe równania ruchu /3/ dadzą nam ;

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= X + \lambda\,.\frac{\partial f}{\partial x};\\ my'' &= Y + \lambda\,.\frac{\partial f}{\partial y};\\ mz'' &= Z + R_2;\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots/6/$$

ponieważ $\lambda_2 = R_2$ jest normalne przeciwdziałanie płaszczyzny krzywej, tj. $z = 0$. Mamy, że $z'' = 0$, zatem trzecie równanie /6/ przepisze się w ten sposób :

$$R_2 = - Z,$$

tj. przeciwdziałanie płaszczyzny jest równe, co do wartości liczebnej, lecz wprost przeciwnie skierowane od składowej siły S w kierunku prostopadłym do tej płaszczyzny. Współrzędne x i y obliczymy podobnie, jak w wypadku poprzednim.

W wypadku ogólnym, aby całkować równania /3/ postępujemy jak niżej : z równań /1/ obliczymy dwie współrzędne, jako funkcje trzeciej, albo najlepiej, przedstawimy równania krzywej w postaci parametrycznej, tj. wyrazimy wszystkie trzy współrzędne w funkcjach jednego parametru zmiennego σ :

$$x = \varphi/\sigma/; \quad y = \psi/\sigma/; \quad z = \chi/\sigma/ \ldots\ldots /7/$$

Zauważyć trzeba, że funkcje φ , ψ i χ są tego rodzaju, iż wstawiając wyrażenia /7/ w równania /1/, otrzymamy tożsamość. Zazwyczaj parametr σ jest łukiem krzywej /1/, który mierzymy od obranego na tej krzywej początku łuków. Ponieważ z równań /1/ wypada, że :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}.dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}.dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}.dz = 0 ;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}.dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}.dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}.dz = 0 ;$$

więc mnożąc równania ruchu /3/ odpowiednio przez wyrażenia :

$$dx = x'dt; \quad dy = y'dt; \quad dz = z'dt ;$$

i dodając następnie wzajemnie, znajdziemy, że :

$$m/x''x' + y''y' + z''z'/dt = Xdx = Ydy = Zdz ;$$

czyli :

$$\frac{1}{2}\, md/v^2/ = /Xx' + Yy' + Zz'/.dt; \ldots\ldots\ldots\ldots /8/$$

przy czym, jak wiadomo :

$$v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 .$$

Na zasadzie wzorów /7/, mamy, że :

$$x' = \varphi'/\sigma/\,\sigma' ; \quad y' = \psi'/\sigma/\,\sigma'; \quad z' = \chi'/\sigma/\,\sigma' \ldots\ldots /9/$$

Ponieważ zaś w wypadku ogólnym siły X,Y,Z są funkcjami zmiennych x,y,z,x',y',z' i t, więc na podstawie wzorów /7/ i /9/ widzimy, że X,Y,Z są funkcjami trzech zmiennych : σ, σ' i t, mianowicie :

$$X = X/\sigma, \sigma', t/ ;$$
$$Y = Y/\sigma, \sigma', t/ ;$$
$$Z = Z/\sigma, \sigma', t/ .$$

A w takim razie równanie /8/ przepisze się w ten sposób:

$$\frac{1}{2} m \frac{d}{dt}\left[\left\{\varphi'^2/\sigma/+\psi'^2/\sigma/+\chi'^2/\sigma/\right\}\sigma'^2\right]=$$

$$=\left[X\varphi'/\sigma/+Y\psi'/\sigma/+Z\chi'/\sigma/\right].\sigma' \quad \ldots/10/$$

Równanie /10/ jest różniczkowym równaniem drugiego rzędu względem niewiadomej funkcji σ /t/.Jeżeli scałkujemy go, wtedy znajdziemy σ, jako funkcję czasu i stałych dowolnych, a w takim razie wzory /7/ dadzą nam x,y,z w zależności od t.

Gdy siły S/X,Y,Z/ są zależne jedynie od położenia punktu ruchomego, tj. od x,y,z, i zupełnie nie są zależne od prędkości tego punktu, a także od czasu t w sposób wyraźny, w takim razie całkowanie równania /10/ sprowadza się do kwadratury;tj. do obliczenia całek funkcji.Rzeczywiście, w obecnym wypadku trójmian :

$$X.\varphi'/\sigma/+Y.\psi'/\sigma/+Z.\chi'/\sigma/;$$

będzie funkcją tylko σ; oznaczając tę funkcję przez F/σ/, będziemy mieli:

$$\frac{1}{2} md/v^2/ = F/\sigma/.d\sigma ;$$

Skąd, za pomocą całkowania otrzymamy, że :

$$\frac{mv^2}{2}=\int F/\sigma/\,d\sigma + C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots/11/$$

Ponieważ :

$$v^2=\left[\varphi'^2/\sigma/+\psi'^2/\sigma/+\chi'^2/\sigma/\right].\sigma'^2=\Phi/\sigma/\sigma'^2;$$

Więc równanie /11/ da nam, że :

$$\frac{1}{2}m\,\Phi/\sigma/./\frac{d\sigma}{dt}/^2=\int F/\sigma/\,d\sigma+C_1=\Omega/\sigma/;$$

skąd znajdziemy wyrażenie dla $\frac{d\sigma}{dt}$:

$$\sigma'=\frac{d\sigma}{dt}=\pm\sqrt{\omega/\sigma/};\ldots\ldots/12/$$

przy czym

$$\omega/\sigma/=\frac{2.\Omega/\sigma/}{m.\Phi/\sigma/}.$$

Oddzielając zmienne w równaniu /12/ i całkując, otrzymamy:

$$t + \tau = \int \frac{d\sigma}{\pm\sqrt{\omega/\sigma/}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /13/$$

Znak przed pierwiastkiem, określamy na podstawie równania /12/ i warunków początkowych, albowiem, w momencie początkowym $t = 0$, położenie i prędkość punktu są nam zadane, a dlatego, że jest znaną i wartość $/\frac{d\sigma}{dt}/_{t=0}$.

Jeżeli siły S, przyłożone do punktu materialnego, posiadają potencjał sił, niezależny od czasu t w sposób wyraźny, wtedy równanie /8/ całkujemy bez poprzedniego przekształcenia, mianowicie, otrzymujemy jego całkę pierwszą:

$$\frac{mv^2}{2} = U/x,y,z/ + C \; ;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /14/$$

przy czym U/x,y,z/ jest odpowiednią funkcją sił, a C / stałą całkowania. Następnie, zamieniając w równaniu /14/ x,y,z i v ich wyrażeniami, będącymi funkcjami σ i σ', otrzymamy różniczkowe równanie rzędu pierwszego, które całkujemy już, jak poprzednio.

Gdy po scałkowaniu równań ruchu, otrzymamy x,y, z jako funkcje czasu t, wtedy z równań /3/ obliczymy λ_1 i λ_2, a równania /4/ dadzą nam przeciwdziałania krzywej R_1 i R_2.

Dla obliczenia przeciwdziałań R_1 i R_2 wystarcza tylko jedna kwadratura, dająca v^2 w funkcji zmiennej σ. Dlatego też w wypadku sił, mających potencjał, możemy obliczyć R_1 i R_2 zupełnie bez kwadratur, ponieważ potencjał sił daje nam odrazu zależność /14/ pomiędzy v^2 i x,y,z, które z łatwością wyrażamy przez σ. Wykażemy to rzeczywiście z cz.II - Kinematyki /rozdział III/ wiemy, że rzuty przyśpieszenia "w" punktu ruchomego na kierunki stycznej i głównej normalnej do toru punktu są następujące :

$$\left.\begin{aligned} w_t &= w.\cos/w,T/ = \frac{dv}{dt} \; ; \\ w_n &= w.\cos/w,N/ = \frac{v^2}{\rho} \; ; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /15/$$

przy czym ρ oznacza promień pierwszej krzywizny toru. Ponieważ przyśpieszenie punktu "w" znajduje się w płaszczyźnie krzywizny, więc rzut przyśpieszenia na binormalną toru jest równy zeru, tj.:

$$w_b = w.\cos/w,B/ = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /16/$$

Z geometrii różniczkowej wiemy, że :

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{/d^2ydz - d^2zdy/^2 + /d^2xdz - d^2zdx/^2 + /d^2ydx - d^2xdy/^2}{/dx^2 + dy^2 + dz^2/^3};$$

dlatego, gdy tor punktu jest wyrażony w równaniach parametrycznych /7/, wtedy za pomocą różniczkowania wzorów /7/ otrzymamy ρ, jako funkcję zmiennej s.

Dalej, kierunek głównej normalnej N do krzywej /1/ jest określony za pomocą wzorów :

$$\cos/N,X/ = \rho \cdot \frac{d/\frac{dx}{ds}/}{ds};$$

$$\cos/N,Y/ = \rho \cdot \frac{d/\frac{dy}{ds}/}{ds};$$

$$\cos/N,Z/ = \rho \cdot \frac{d/\frac{dz}{ds}/}{ds};$$

przy czym

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 .$$

Kierunek binormalnej określa się tak :

$$\cos/B,X/ = \rho \cdot \frac{d^2ydz - d^2zdy}{ds^3};$$

$$\cos/B,Y/ = \rho \cdot \frac{d^2xdz - d^2zdx}{ds^3};$$

$$\cos/B,Z/ = \rho \cdot \frac{d^2ydx - d^2xdy}{ds^3};$$

Zatem, gdy na punkt materialny działa siła zewnętrzna S, a przeciwdziałanie krzywej /1/ jest R, wtedy w każdym momencie czasu przyśpieszenie w jest skierowane wzdłuż wypadkowej. W tych dwóch sił S i R, a wartość liczebna jest równą:

$$w = \frac{W}{m} .$$

Mamy więc geometryczne równanie :

$$\overline{W} = m. \overline{w}.$$

Rzutując to równanie na kierunki stycznej, głównej normalnej i binormalnej do krzywej /1/ i zauważywszy, że rzut sumy geometrycznej $\overline{W} = \overline{S} + \overline{R}$ jest równy sumie algebraicznej rzutów danej siły S i niewiadomego przeciwdziałania R, będziemy mieli następujące równania ruchu:

$$mw_t = S.\cos/S,T/ + R\cos/R,T/;$$

$$mw_n = S.\cos/S,N/ + R\cos/R,N/;$$

$$mw_b = S.\cos/S,B/ + R\cos/R,B/;$$

Ponieważ zaś, według przypuszczenia, krzywa /1/ jest bezwzględnie gładka, więc opór tarcia nie istnieje, i dlatego przeciwdziałanie krzywej R jest prostopadłe do stycznej tj.

$$\cos/R,T/ = 0.$$

Biorąc pod uwagę wzory /15/ i /16/, otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} m \cdot \frac{dv}{dt} &= S.\cos/S,T/ ; \\ m \cdot \frac{v^2}{\rho} &= S.\cos/S,N/ + R.\cos/R,N/; \\ 0 &= S.\cos/S,B/ + R.\cos/R,B/; \end{aligned}\right\} \quad ..../17/$$

Ostatnie dwa równania /17/ pozwalają obliczyć: $R/\overline{R}=\overline{R}_1+\overline{R}_2/$, ponieważ przypuszczamy, że v^2 jest nam już znane, a $\cos/N,B/=0$.

Zbadamy teraz najważniejsze wypadki ruchu punktu materialnego po bezwzględnie gładkiej krzywej /1/.

W a h a d ł o k o ł o w e /m a t e m a t y c z n e/.

Przypuśćmy, że sztywny pręt nierozciągliwy i nieważący jest w jednym końcu zawieszony na poziomej osi O, dookoła której może swobodnie obracać się bez tarcia w płaszczyźnie pionowej, prostopadłej do tej osi, a na drugim jego końcu znajduje się punkt materialny M o masie m.

Wskutek tego połączenia punkt M, pod działaniem siły ciężkości G = mg, zakreśla w pionowej płaszczyźnie obwód koła o promieniu, równym długości pręta MO = d. /rys.50/.

Z początku rozpatrzymy ruch wahadła pomijając opór powietrza, masę zaś pręta OM stale będziemy pomijać. Jeżeli wahadło zakreśla takie wahnięcia, że punkt M pozostaje zawsze na dolnej połowie obwodu koła, wtedy zamiast sztywnego i nierozciągliwego pręta OM możemy wziąć nierozciągliwą linę długości d. Zauważymy, że odległość OM = d często nazywają "d ł u g o ś c i ą w a h a d ł a".

Na zasadzie warunków początkowych obliczymy stałą całkowania C_1:

$$C_1 = v_0^2 - 2\,gd$$

i dlatego ostatecznie :

$$v^2 = v_0^2 + 2\,g/\,z - d/ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /19/$$

Zakładając w równaniu /19/ v = 0 i, rozwiązując otrzymane równanie względem z otrzymamy współrzędne z_1 tego punktu na obwodzie koła, w którym punkt ruchomy M zatrzymuje się, innymi słowy znajdziemy skrajne położenie punktu ruchomego:

$$z_1 = d - \frac{v_0^2}{2g} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /20/$$

Mogą zajść następujące wypadki :

1/ $z_1 > -d$;

2/ $z_1 = -d$;

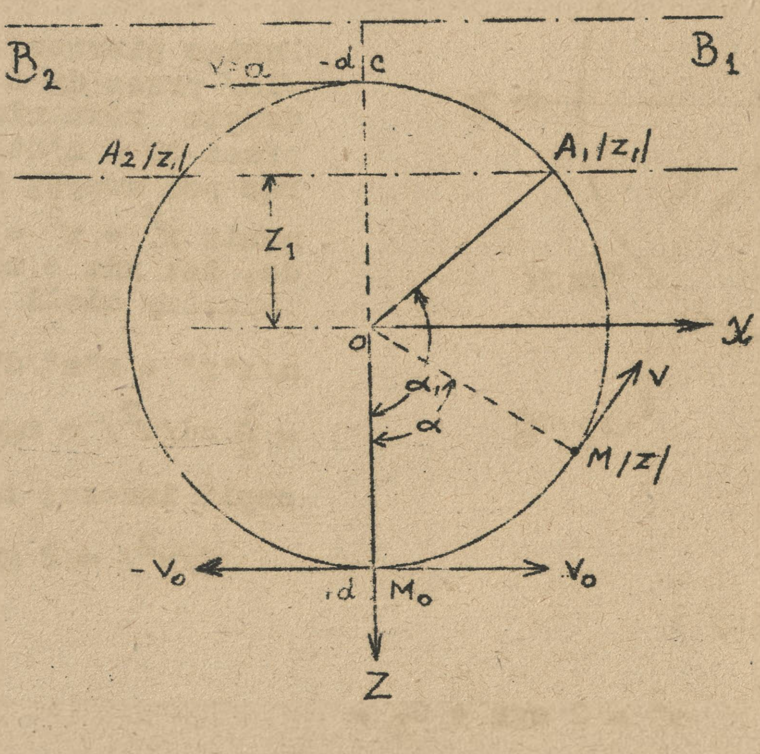
3/ $z_1 < -d$.

W wypadku 1/ punkt ruchomy M po wyjściu z położenia początkowego M_o z prędkością v_o, przyjdzie do punktu A_1 na obwodzie koła /rys.51/ o współrzędnej $z = z_1$ mając prędkość równą zeru: v = o. Zatem punkt A_1 będzie najwyższym położeniem punktu ruchomego M, tj. będzie skrajnym punktem na torze tego punktu. Od tego położenia A_1 punkt M, pod wpływem siły G rozpocznie ruch ku dołowi i przyjdzie do punktu M_o, mając prędkość v, spełniającą warunek :

$$v^2 = v_0^2 \;;$$

Skąd wypada, że:

$$v = -v_0 \,,$$



Rys.51

Obierzmy początek współrzędnych OXYZ w punkcie zawieszenia wahadła, oś OZ skierujemy ku dołowi, a oś OX skierujemy w kierunku poziomym w płaszczyźnie obwodu koła. Wtenczas równania tego koła będą:

$$x^2 + z^2 = d^2 ; \quad y = 0;$$

czyli w postaci parametrycznej :

$$x = d \sin \alpha ; \quad y = 0 ; \quad z = d \cos \alpha$$

Różniczkowe równania ruchu wahadła we współrzędnych prostokątnych są następujące :

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= - R. \frac{x}{d} ; \\ mz'' &= mg - R. \frac{z}{d} ; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /18/$$

Przy czym R oznacza przeciwdziałanie koła, a rzuty siły zewnętrznej, tj. wagi punktu M, są:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = mg.$$

Niech warunki początkowe są następujące:

przy $t = 0$ musi być :

$$z = z_o = d; \quad v = v_o .$$

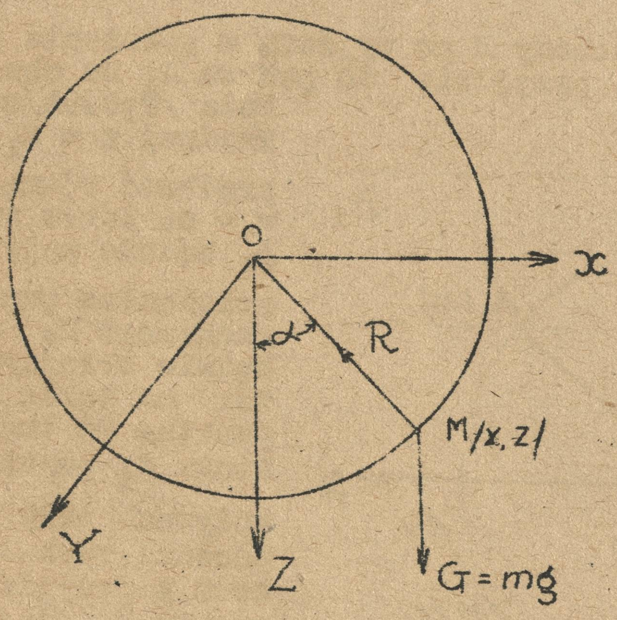
Mnożąc pierwsze równanie /18/ przez $dx = x'.dt$, a drugie równanie /18/ przez $dz = z'dt$ i biorąc pod uwagę, iż z równania $x^2 + z^2 = d^2$ wypada, że: $xdx + zdz = 0$, będziemy mieli :

$$m/x''x' + z''z'/dt =$$

$$= \frac{1}{2} md/v^2/ = mgdz;$$

czyli inaczej :

$$d/v^2/ = 2 gdz.$$



Rys.50.

Całkując otrzymamy :

$$v^2 = 2 egz + C_1 .$$

ponieważ, kierunek ruchu jest przeciwnym do obranego przez nas / rys. 51/ kierunku mierzenia dodatnich kątów α i dlatego, podczas spadku od A_1 do M_o, α stale maleje. Dalej punkt ruchomy podnosi się aż do punktu A_2 o współrzędnej równej z_1 i otrzymuje tam prędkość $v = 0$. Widzimy więc,

że w wypadku 1/ r u c h p u n k t u j e s t r u c h e m w a h a d ł o w y m p o m i ę d z y s k r a j n y m i p o ł o ż e n i a m i A_1 i A_2.

W wypadku 3/, gdy $z_1 < -d$, punkt ruchomy w swym ruchu od położenia M_o do góry musiałby osiągnąć poziom B_1B_2/rys.51/ ażeby jego prędkość v stała się równą zeru. Zatem, gdy punkt przyjdzie do wierzchołka C o współrzędnej $z = -d$, a który jest położony niżej od poziomy B_1B_2, wtedy jego prędkość osiągnie wartość, nierówną zeru, lecz podaną przez wzór:

$$v^2 = -4\,gd + v_o^2$$

Ponieważ zaś $z_1 < -d$, więc wzór /20/ mówi nam, że :

$$\frac{v_o^2}{2g} > 2d\ ;$$

Skąd wynika, że różnica :

$$v_o^2 - 4\,dg > 0,$$

a oznaczając ją przez a^2, przyjdziemy do wniosku, że wartość liczebna prędkości punktu ruchomego w położeniu C jest równą a. Równanie /19/ mówi nam, że pomiędzy położeniami M_o i C prędkość v nigdzie nie staje się równą zeru, dlatego też znak jej wartości a w położeniu C jest ten sam, co i znak jej wartości v_o w położeniu M_o. Stąd wnioskujemy, że w wypadku 3/ r u c h p u n k t u m a t e r i a l n e g o M j e s t n i e w a h a d ł o w y, l e c z o b r o t o w y w z d ł u ż o b w o d u k o ł a w j e d n ą i t ę s a m ą s t r o n ę, określoną kierunkiem początkowej prędkości v_o w położeniu M_o.

Wreszcie w wypadku 2/, gdy $z_1 = -d$, punkt materialny M, poruszając się od położenia M_o do góry, osiągnie położenie najwyższe C; przy czym prędkość jego w stanie się równą zeru. Dlatego też nic n i e m o ż e m y p o w i e d z i e ć o t y m, j a k i b ę d z i e d a l s z y r u c h p u n k t u m a t e r i a l n e g o: nie wiemy, czy ten punkt pozostanie w położeniu tej równowagi nietrwałej, czy spadnie tą samą drogą z powrotem, czy też spadnie po drugiej stronie punktu C.

Na największą wagę zasługuje wypadek 1/ z powodu jego zastosowań, dlatego też rozpatrzymy go szczegółowo. Mamy więc równanie :

$$v^2 = v_o^2 + 2\,g./z - d/ = 2\,g/\,z - z_1/;$$

przy czym :

$$\frac{v_o^2}{2g} < 2d \quad \text{i} \quad z_1 = d - \frac{v_o^2}{2g} > -d\,.$$

Oznaczając /rys. 51/ przez α_1 kąt $\widehat{M_oOA_1}$, będziemy mieli, że:

$$d \cos \alpha_1 = z_1$$

i równanie przybierze postać taką :

$$\alpha'^2\,.d^2 = 2g\,/\cos\alpha - \cos\alpha_1/.d\,;$$

a ponieważ z trygonometrii wiemy, że :

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{i} \quad \cos\alpha_1 = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha_1}{2};$$

więc otrzymamy, że :

$$\alpha'^2 d = 4g/\sin^2\frac{\alpha_1}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\,/.$$

skąd wynika :

$$\frac{d\alpha}{2\sqrt{\sin^2\frac{\alpha_1}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{g}{d}}.dt\,.$$

Całkując w granicach od 0 do α, będziemy mieli :

$$\sqrt{\frac{g}{d}}\,.\,t = \int_0^{\alpha}\frac{d\alpha}{2\sqrt{\sin^2\frac{\alpha_1}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

albowiem przy $t = 0$, kąt $\alpha = 0$.

Obliczymy czas T, w ciągu którego punkt ruchomy M przechodzi od położenia M_o do położenia A_1; mamy wzór :

$$T = \sqrt{\frac{d}{g}} \int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{2\sqrt{\sin^2\frac{\alpha_1}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}} .$$

Aby obliczyć powyższą całkę, której odpowiednia całka nieokreślona nie istnieje,założymy :

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \varepsilon \sin\frac{\alpha_1}{2} \quad \text{i} \quad \sin\frac{\alpha_1}{2} = k ;$$

wtedy :

$$\sin\frac{\alpha}{2} = k.\varepsilon$$

czyli:

$$\frac{\alpha}{2} = \arcsin k.\varepsilon ;$$

dlatego:

$$\frac{d\alpha}{2} = \frac{k d.\varepsilon}{\sqrt{1 - k^2.\varepsilon^2}}$$

i

$$\sqrt{\sin^2\frac{\alpha_1}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}} = k\sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Ponieważ granice dla α są 0 i α_1, więc granice dla ε są odpowiednio 0 i 1.

Będziemy więc mieli, że :

$$T = \sqrt{\frac{d}{g}} . \int_0^1 \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 - k^2.\varepsilon^2} . \sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

Ponieważ wartość $k^2 < 1$, więc możemy rozłożyć $\frac{1}{\sqrt{1 - k^2\varepsilon^2}}$ w szereg według dodatnich potęg $k^2.\varepsilon^2$, mianowicie według wzoru Newton'a,mamy :

$$/1 - k^2\varepsilon^2/^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2\varepsilon^2 + \frac{1.3}{2.4}k^4\varepsilon^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6\varepsilon^6 + \ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{1.3.5.\ldots\ldots/2n - 1/}{2.4.6.\ldots\ldots.2n} k^{2n}\varepsilon^{2n} + \ldots\ldots$$

i dlatego wzór dla T da nam :

$$T\sqrt{\frac{g}{d}} = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}k^2\varepsilon^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\varepsilon^4 + \ldots\right)\frac{d\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \quad \ldots /21/$$

Całka :

$$\int_0^1 \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \Big|\arcsin\varepsilon\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Aby obliczyć pozostałe całki sumy wzoru /21/, założymy, że:

$$F_{2n} = \int_0^1 \varepsilon^{2n} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

Całkując powyższą całkę przez części będziemy mieli:

$$F_{2n} = \int_0^1 \varepsilon^{2n-1} \frac{\varepsilon\, d\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \Big|-\varepsilon^{2n-1}\sqrt{1-\varepsilon^2}\Big|_0^1 + /2n-1/.$$

$$\int_0^1 \varepsilon^{2n-2}\sqrt{1-\varepsilon^2}\cdot d\varepsilon = /2n-1/\int_0^1 \varepsilon^{2n-2}\frac{1-\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\cdot d\varepsilon =$$

$$= /2n-1/\cdot F_{2n-2} - /2n-1/\,F_{2n}.$$

Więc mamy zależność pomiędzy F_{2n} i F_{2n-2}:

$$F_{2n} = \frac{2n-1}{2n} F_{2n-2}.$$

Na podstawie tego wzoru napiszemy szereg równości ;

$$F_{2n-2} = \frac{2n-3}{2n-2}\cdot F_{2n-4};$$

$$F_{2n-4} = \frac{2n-5}{2n-4}\cdot F_{2n-6};$$

$$F_{2n-6} = \frac{2n-7}{2n-6}\cdot F_{2n-8};$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot F_0 \;;$$

$$F_0 = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Podstawiając kolejno, znajdziemy wyrażenie dla całki F_{2n} :

$$F_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdots\cdots\cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Zatem wzór /21/ przepiszemy jak niżej :

$$T \cdot \sqrt{\frac{g}{d}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + /\tfrac{1}{2}/^2 k^2 + /\tfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}/^2 k^4 + /\tfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}/^2 k^6 + \cdots\cdots\right];$$

przy czym $k = \sin\frac{\alpha_1}{2}$, a kąt α_1, będący największym odchyleniem wahadła, nazywamy " o b s z e r n o ś c i ą   w a h a n i a".

Aby obliczyć czas, potrzebny punktowi M na przejście od położenia skrajnego A_1 z powrotem do położenia M_o, musimy znaleść wartość całki :

$$\int_{\alpha_1}^{0} \frac{-d\alpha}{2\sqrt{\sin^2\frac{\alpha_1}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

przy czym mieliśmy znak "−", ponieważ $d\alpha$ jest teraz stale ujemne, a element całki musi pozostać dodatnim. Wystarczy zmienić porządek granic, biorąc jednocześnie przed całką znak "−", ażeby przekonać się, że ten okres czasu jest równy T. Widzimy więc, że czas trwania jednego całego wahnięcia punktu M, tj. czas potrzebny na odbycie drogi od położenia początkowego M_o, np. do punktu A_1, od tego punktu A_1 z powrotem do punktu M_o, dalej w lewo do punktu A_2, i wreszcie od punktu A_2 z powrotem do położenia początkowego M_o, jest równy :

$$\tau = 4T ,$$

czyli

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}\left[1 + /\tfrac{1}{2}/^2 k^2 + /\tfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}/^2 k^4 + /\tfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}/^2 k^6 + \cdots\cdots\right] \quad \ldots/22/$$

Gdy odchylenia wahadła są małe, wtedy wielkość k jest też małą, np, jeżeli obszerność wahań jest $\alpha_1 = 2^o$, wtedy $k = \sin\frac{\alpha_1}{2} = \sin 1^o \cong \frac{1}{57}$. Pomijając wyrazy, zawierające k, będziemy mieli przybliżony wzór, powszechnie znany z fizyki elementarnej :

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots/23/$$

Z tego wzoru widzimy, że w wahadle kołowym nieskończenie małe wahnięcia są niezależne od ich obszerności; takie wahania nazywamy "równoczesnymi", czyli "izochronicznymi".

Jest to twierdzenie Galileusza.

Więcej ścisły wzór otrzymamy, gdy zamienimy w przybliżeniu $\sin \frac{\alpha_1}{2}$ przez jego kąt $\frac{\alpha_1}{2}$; wtedy mamy, że: $k = \frac{\alpha_1}{2}$, i, zachowując we wzorze /22/ dwa pierwsze wyrazy, otrzymamy:

$$\tau = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{d}{g}} \cdot /1 + \frac{\alpha_1}{16}/ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots /24/$$

Okres wahań τ jest więc zależny od obszerności tych wahań; im ta obszerność jest większa, tym jest większy okres τ, zatem wahania wahadła matematycznego są ściśle mówiąc nierównoczesne, czyli aperiodyczne /nieokresowe/. Wzory /23/ i /24/ wskazują nam, że czas trwania wahnięcia zależy od długości wahadła d i od przyśpieszenia ziemskiego g, a zatem od miejsca na powierzchni ziemi, w którym je obserwujemy.

W wypadku drugim, gdy punkt ruchomy M w położeniu początkowym M_o posiada taką prędkość początkową v_o, że ruch punktu jest obrotowym o stałym kierunku ruchu, wtedy równanie energii kinetycznej jest:

$$v^2 = 2g/z - d/ + v_o^2 = 2g/z + \frac{v_o^2}{2g} - d/ = 2g/z + C/;$$

przy czym oznaczyliśmy:

$$C = \frac{v_o^2}{2g} - d.$$

Ponieważ według przypuszczenia $\frac{v_o^2}{2g} > 2d$, więc C jest wielkością dodatnią i większą od d. Dlatego też suma $z + C$ jest stale dodatnią. Wyrażając wszystkie wielkości przez kąt α, otrzymamy:

$$\alpha'^2 d^2 = 2g/d \cos\alpha + C/ = 2g./d + C - 2d \sin^2\frac{\alpha}{2}/ =$$

$$= 2g/d + C/ . /1 - \frac{2d}{d+C} . \sin^2\frac{\alpha}{2}/;$$

a zakładając dla skrótu:

$$\frac{2d}{d + C} = k^2$$

i oddzielając zmienne α i t, znajdziemy:

$$\frac{\sqrt{2g(d + C)}}{d}\, dt = \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \ell^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

Całkując w granicach od 0 do α, będziemy mieli:

$$\frac{\sqrt{2g(d + C)}}{d} \cdot t = \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \ell^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

Ażeby znaleść czas τ całego obrotu punktu ruchomego po obwodzie koła, musimy założyć $\alpha = 2\pi$, więc:

$$\frac{\sqrt{2g(d + C)}}{d} \cdot \tau = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \ell^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

W celu obliczenia otrzymanej całki, zauważymy, że :

$$\int_0^{2\pi} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}$$

i zakładając w drugiej całce $\alpha = 2\pi - \beta$, będziemy mieli:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \ell^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = -\int_{\pi}^{0} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \ell^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}} = \int_0^{\pi} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \ell^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}};$$

co wskazuje nam, że czas trwania półobrotów od M_o do C i od C do M_o jest jednakowy. Dlatego możemy napisać, że :

$$\frac{\sqrt{2g(d + C)}}{d} \cdot \tau = 2 \cdot \int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \ell^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

Zakładając :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \varepsilon\ ; \quad \text{czyli}\ \frac{\alpha}{2} = \arcsin \varepsilon\ ;$$

będziemy mieli, że :

$$\frac{d\alpha}{2} = \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

Ponieważ granica dla α są 0 i π, więc granice dla ε są odpowiednio 0 i 1, dlatego:

$$\frac{\sqrt{2g/d + C/}}{d}\cdot T = 4\cdot\int_0^1 \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\sqrt{1-\ell^2\varepsilon^2}}$$

Tą całkę już poprzednio obliczyliśmy, mamy więc, że :

$$T = 2\pi\frac{d}{\sqrt{2g/d + C/}}\cdot\left[1 + /\tfrac{1}{2}/^2\cdot\ell^2 + /\frac{1.\ 3}{2.\ 4}/^2\ell^4 + \dots\right];$$

przy czym :

$$\ell^2 = \frac{2d}{d + C}.$$

Wreszcie w wypadku trzecim, gdy $\frac{v_o^2}{2g} = 2d$, zasada energii kinetycznej daje :

$$v^2 = 2g./\,z - d/ + v_o^2 = 2g./\,z - d + \frac{v_o^2}{2g}/ = 2g/\,z + d/\,;$$

co, po wprowadzeniu zmiennej α, przepiszemy w ten sposób:

$$\alpha'^2\cdot d^2 = 2g/\cos\alpha + 1/.d = 4gd.\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Oddzielając zmienne α i t i całkując w granicach od 0 do α, otrzymamy:

$$t = \sqrt{\frac{d}{g}}\cdot\int_0^\alpha \frac{d\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{d}{g}}.\log tg/\,\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}/.$$

Ostatni wzór wskazuje, że gdy kąt odchylenia wahadła α przybliża się do wartości π, wtedy czas t dąży do nieskończoności; zatem w wypadku trzecim punkt ruchomy M przybliża się a s y m p t o t y c z n i e do najwyższego punktu C na obwodzie koła, nie osiągając jego nigdy. Ten rezultat staje się bardziej oczywistym, gdy przepiszemy ostatni wzór w ten sposób:

$$tg/\,\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}/ = e^{t.\sqrt{\frac{g}{d}}};$$

rzeczywiście, wartość $\alpha = \pi$ odpowiada wartości $t = \infty$.

Przystąpmy teraz do obliczenia przeciwdziałania R naszego połączenia. Zastosowując wzory /17/ mamy, że :

$$m \cdot \frac{v^2}{d} = G \cdot \cos/G,N/ + R \cdot \cos/R,N/.$$

W obecnym wypadku $\varrho = d$, a kierunek głównej normalnej N jest zgodnym z kierunkiem promienia koła OM/rys.52/, zatem :

$$\cos/G,N/ = \cos/\pi - \alpha/ = -\cos\alpha\ ;\ \cos/R,N/=1;$$

i dlatego :

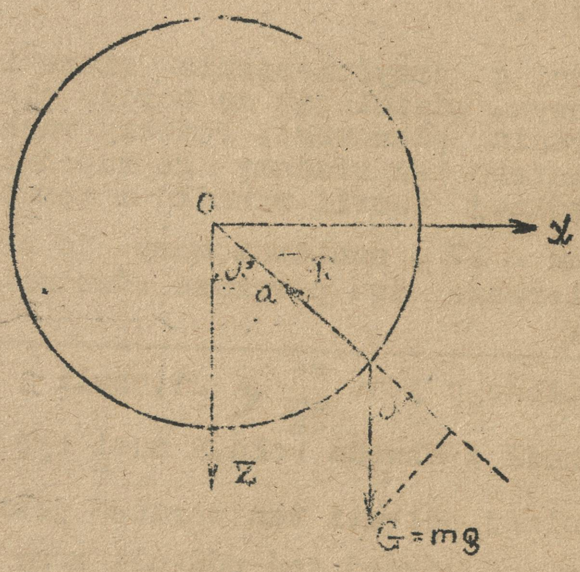
$$R = \frac{mv^2}{d} + mg \cdot \cos\alpha = \frac{m}{d} \cdot / v^2 + g \cdot z /.$$

Ale mieliśmy, że :

$$v^2 = 2g/ z - d/ + v_c^2 = 2g/ z - d + \frac{v_0^2}{2g} / = 2g/ z - z_1/;$$

więc dlatego

$$R = \frac{mg}{d} / 3z - 2z_1/ ;$$



Rys. 52

przy czym z_1 jest rzędną najwyższego położenia, osiąganego przez punkt ruchomy M. Dodatnie przeciwdziałanie R jest skierowane wzdłuż promienia ku jego środkowi O, więc, gdybyśmy zawiesili punkt materialny na giętkiej linie nierozciągliwej, to podobna lina może dać nam w postaci natężenia jedynie dodatnie przeciwdziałanie; jeżeli więc punkt ruchomy osiągnie taki poziom, że przeciwdziałanie R staje się równe zeru, to, ponieważ R nie może stać się ujemnym, wtedy punkt ruchomy zejdzie z obwodu koła /albowiem lina schyliła się/ i dalej będzie poruszać się wzdłuż paraboli. Przeciwdziałanie R staje się równe zeru, wtedy gdy:

$$z = \frac{2}{3} z_1 ;$$

co może zdarzyć się jedynie tylko na górnej półkuli; zatem punkt może zejść z obwodu koła też jedynie na górnej półkuli .

Aby punkt materialny M mógł zakreślić całkowite koło, warunek $\frac{v_0^2}{2g} > 2d$ nie wystarcza, albowiem potrzeba, żeby w punkcie najwyższym C, o współrzędnej równej − d, przeciwdziałanie R było dodatnie, innymi słowy – musi być spełniony warunek ;

$$-3d - 2\left(d - \frac{v_0^2}{2g}\right) > 0;$$

czyli :

$$\frac{v_0^2}{g} > 5d.$$

Stąd wnioskujemy, że punkt materialny M, zawieszony na linie, i posiadający w najniższym położeniu M_0 na obwodzie koła początkową prędkość v_0, skierowaną poziomo, zejdzie z obwodu tego koła, gdy:

$$\sqrt{2gd} < v_0 < \sqrt{5gd}$$

Gdy zaś $v_0 < \sqrt{2gd}$ lub $v_0 > \sqrt{5gd}$, wtedy punkt materialny będzie poruszał się stale wzdłuż obwodu koła, przytem w wypadku pierwszym ruch jego będzie wahadłowy x/, a w wypadku drugim – obrotowy o niezmiennym kierunku ruchu.

Małe wahania wahadła kołowego.

W celu określenia wartości g przyśpieszenia ziemskiego posługujemy się wahadłem kołowym, udzielając mu bardzo nieznacznych odchyleń α od położenia pionowego. Podobny ruch spotyka się bardzo często, dlatego też zbadamy go zupełnie niezależnie od poprzedniej ogólnej teorii wahadła matematycznego. Zastosujemy równania ruchu / 17/, ponieważ mamy do czynienia z ruchem płaskim, więc pierwsze dwa powyższe równania /17/ dadzą nam, że / rys. 53/:

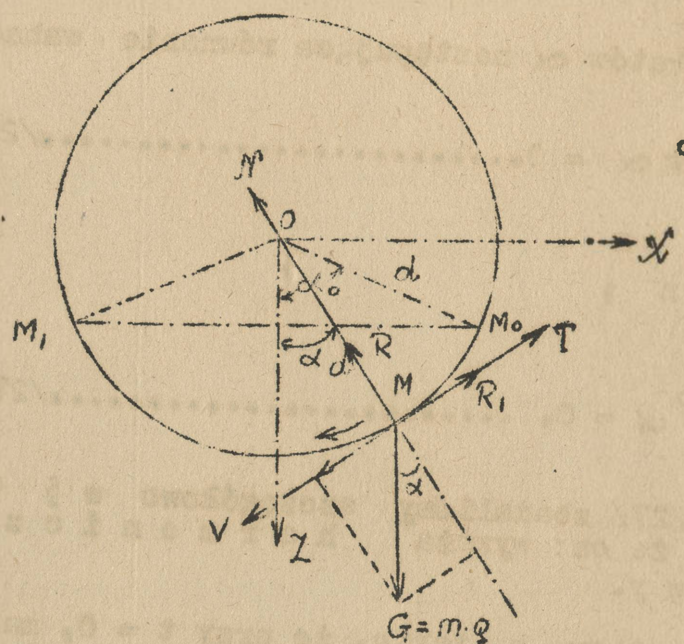
---

x/ Wiemy, że warunek ruchu wahadłowego jest $\frac{v_0^2}{2g} < 2d$, czyli $v_0^2 < 4gd$; aby punkt nie zszedł z obwodu koła, R musi być > 0, skąd wynika, że $z > \frac{2}{3}z_1$; na dolnej półkuli ten warunek jest zawsze spełniony, na górnej zaś półkuli mamy jednocześnie $z > \frac{2}{3}z_1$ i $z < \frac{2}{3}z_1$; zatem dla wszystkich punktów toru z jest $> \frac{2}{3}z_1$ jedynie tylko na torach znajdujących się całkowicie na dolnej półkuli; dla dolnej półkuli mamy $z_1 > 0$, ponieważ zaś:

$$m.\frac{dv}{dt} = -\ G.\sin\alpha\ ;$$

$$m.\frac{v^2}{d} = -\ G.\cos\alpha + R.$$

Drugie równanie określa wartość liczebną przeciwdziałania R obwodu koła /połączenia /, a pierwsze, po zamianie w nim:



Rys.53.

$v = \alpha' d;\quad G = mg;$

przepisze się następująco:

$$\alpha''.d + g\ \sin\alpha = 0 \quad \ldots\ldots /25/$$

Odchylenia α będziemy uważać, jako małe, gdy możemy w przybliżeniu zamienić $\sin\alpha$ przez α, a $\cos\alpha$ przez 1; innymi słowy: możemy ograniczyć się w rozłożeniach $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ w szeregi jedynie pierwszymi wyrazami tych szeregów:

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120} \ldots\ldots$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} \ldots$$

Zamieniając $\sin\alpha$ przez α dopuszczamy się " względnego błędu" będącego stosunkiem $\frac{\alpha^3}{6}$, a zamieniając $\cos\alpha$ przez 1, dopuszczamy się względnego błędu $\frac{\alpha^2}{2}$. Dlatego też, gdy nam wystarcza dokładność do 0,01, to kąt α będzie "mały", jeżeli spełnia warunek:

$$\frac{\alpha^2}{2} < \frac{1}{100},\ \text{tj.}\ \alpha^2 \leqslant \frac{1}{50};$$

czyli $\alpha \leqslant \frac{1}{7}$ i dlatego $\alpha^0 \leqslant 8^0$;

jeżeli zaś chcemy mieć dokładność do 0,000001, wtedy kąt "mały" określimy ze

---

$$z_1 = d - \frac{v_0^2}{2g};$$

więc $\frac{v_0^2}{2g} \leqslant d$, czyli $v_0^2 \leqslant 2\ gd$. Widzimy stąd, że warunek, a b y p u n k t p o z o s t a w a ł s t a l e n a o b w o d z i e k o ł a p o d c z a s r u c h u w a h a d ł o w e g o j e s t:

$$v_0^2 < 4\ gd \quad \text{i} \quad v_0^2 \leqslant 2\ gd,$$

skąd wynika:

$$v_0^2 \leqslant 2\ gd\ -$$

$$\frac{\alpha^2}{2} \leqslant 0,000001 .$$

Stąd $\alpha \leqslant \frac{1}{1,500}$ i więc $\alpha^{0} \leqslant 0^{0}2'$.

Zatem w zależności od dokładności, którą chcemy mieć, w każdym oddzielnym wypadku określamy odpowiednie pojęcia o " małości " odchyleń α

Mamy więc dla małych kątów α następujące równanie wahadła kołowego:

$$\alpha'' d + g\alpha = 0 \text{.........................} /26/$$

Zakładając:

$$\frac{g}{d} = n^2 ;$$

będziemy mieli:

$$\alpha'' + n^2\alpha = 0. \text{........................} /27/$$

Ostatnie równanie /27/ zbadaliśmy szczegółowo w § 9 rozdziału IIgo i wiemy, że ono wyraża h a r m o n i c z n y r u c h w a h a d ł o w y.

Jeżeli warunki początkowe są takie, że przy $t = 0$, musi być : $\alpha = \alpha_0$ i $\alpha' = 0$/ $v_0 = 0$/, wtedy całka ogólna równania /27/ jest następująca:

$$\alpha = \alpha_0 . \cos \frac{2\pi t}{\tau} ;$$

przy czym okres wahań :

$$\tau = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{d}{g}}$$

Wyobraźmy teraz sobie, że wahadło matematyczne, zakreślając małe wahania, porusza się nie w próżni, jak to miało miejsce dotychczas, lecz w ośrodku, wytwarzającym o p ó r R_1, p r o p o r c j o n a l n y d o p i e r w s z e j p o t ę g i p r ę d k o ś c i v p u n k t u r u c h o m e g o M. Mamy wtedy, że :

$$R_1 = \mu . v = \mu \alpha' d$$

i ponieważ opór jest zawsze skierowany w stronę wprost przeciwną do ruchu, więc równanie ruchu wahadła przybierze postać jak niżej :

$$m\alpha'' d = . mg \alpha - \mu\alpha' d ;$$

a zakładając :

$$\frac{g}{d} = n^2 \quad i \quad \frac{\mu}{m} = 2h ;$$

będziemy mieli:

$$\alpha'' + 2h\alpha' + n^2\alpha = 0. \;..................../28/$$

Równanie /28/ też zbadaliśmy już poprzednio w § 9 rozdziału IIgo; widzieliśmy tam, że, gdy warunki początkowe są:

przy $t = 0$, musi być : $\alpha = \alpha_0$ i $\alpha' = 0$;

wtedy całka ogólna równania /28/ jest taka:

$$\alpha = \alpha_0 . e^{-ht} . \left[\cos kt + \frac{h}{k} \sin kt \right] ;$$

przy czym :

$$k = \sqrt{n^2 - h^2} .$$

Zazwyczaj h bywa bardzo nieznaczne w porównaniu z n, tj. ułamek $\frac{h}{n}$ jest wielkością małą, dlatego możemy napisać, że okres wahań τ_1 wahadła, np. w powietrzu, wyraża się tak:

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{n\sqrt{1 - \frac{h^2}{n^2}}} = \frac{2\pi}{n} . /1 + \frac{1}{2}.\frac{h^2}{n^2} + .../= \tau ./1 + \frac{1}{2}\frac{h^2}{n^2} + .../$$

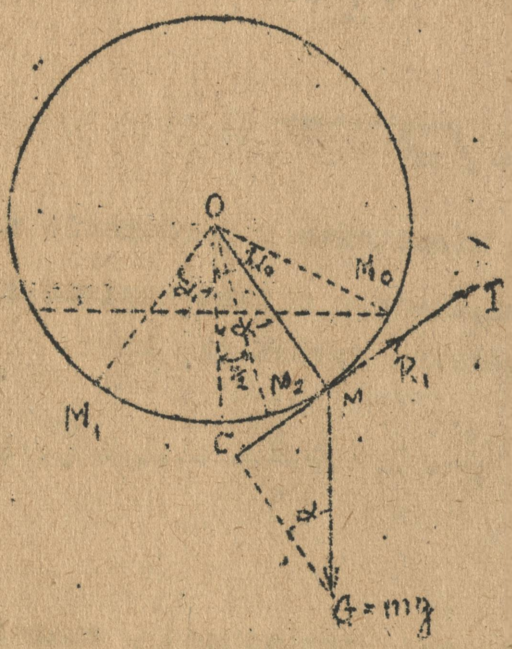
Wzór ten wskazuje, że okres wahań τ_1 wahadła w ośrodku, wytwarzającym opór, proporcjonalny do pierwszej potęgi prędkości ruchu, jest bardzo bliski do okresu wahań τ tego samego wahadła w próżni. W p ł y w o p o r u o ś r o d k a u w y d a t n i a s i ę w tem, ż e w i e l k o ś c i k o l e j n y c h o d c h y l e ń /a m p l i t u d/ w a h a d ł a z m n i e j s z a j ą s i ę w e d ł u g p o s t ę p u g e o m e t r y c z n e g o o i l o r a z i e r ó w n y m $e^{-\frac{h\tau_1}{2}}$ /patrz § 10, rodz. II/. Wahania wahadła kołowego w takim ośrodku są więc z a n i k a j ą c y m i, albowiem amplituda ich zdąża do zera.

Przypuśćmy teraz, że o p ó r o ś r o d k a R_1 jest p r o p o r c j o n a l n y d o d r u g i e j p o t ę g i p r ę d k o ś c i r u c h u w a h a d ł a, przy czym odchylenia wahadła nadal uważamy za małe. Niech w momencie początkowym $t = 0$; punkt ruchomy M/rys. 54/ znajduje się w położeniu M_o, określonym przez odpowiednie odchylenie α_o, i że jego prędkość początkowa $v_o = 0$.

Z położenia początkowego M_o punkt ruchomy porusza się ku dołowi w kierunku najniższego położenia C, przy czym kąt α stale maleje i dlatego prędkość punktu $v = \alpha'.d$ jest wielkością ujemną. Opór ośrodka R_1 jest skierowany w kierunku przeciwnym do ruchu punktu M, tj. w kierunku dodatnich kątów α, dlatego rzut tego oporu R_1 na kierunek stycznej MT do obwodu koła jest następujący:

$$R_1 = +\mu.v^2 = +\mu/\alpha'.d/^2 ;$$

R_1 będzie posiadać stale znak " + " dopóty, dopóki α' jest wielkością ujemną, innymi słowy dopóki punkt ruchomy M nie osiągnie swego skrajnego najwyższego położenia M_1 po drugiej stronie pionu OC /rys. 54/. Podczas ruchu punktu materialnego M od położenia M_1 z powrotem ku M_o, opór ośrodka będzie skierowany w kierunku ujemnych kątów α i dlatego rzut jego na kierunek stycznej będzie inny:



Rys.54.

$$R_2 = -\mu.v^2 = -\mu./\alpha'.d/^2.$$

Zatem równanie ruchu punktu materialnego M będzie następujące:

$$m.\alpha''.d = -mg\alpha + \mu/\alpha'.d/^2,$$

gdy $\alpha' < 0$ ..../29/

i

$$m.\alpha''.d = -mg\alpha - \mu/\alpha'.d/^2 ;$$

gdy $\alpha' > 0$ ..../30/

Widzimy więc, że równanie ruchu zmienia swą postać wraz ze zmianą kierunku ruchu, tj. prędkości v punktu M: musimy korzystać ze wzoru /29/, gdy punkt M porusza się od M_o do M_1 i ze wzoru /30/, gdy punkt M porusza się od M_1 ku M_o i t.d.

Rozpatrzymy równanie /29/, gdy $\alpha' < 0$; przepiszemy go w ten sposób:

$$\alpha'' + n^2\alpha = k.\alpha'^2 \;......................./31/$$

przy czym:

$$n^2 = \frac{g}{d}, \qquad k = \frac{\mu \cdot d}{m}.$$

Warunki początkowe są:

przy $t = 0$, musi być: $\alpha = \alpha_0$; $\alpha' = 0$.

Równanie /31/ daje się sprowadzić do kwadratur, ale, gdy, odchylenia wahadła α są małe, wtedy o wiele prościej jest zastosować przybliżone całkowanie mianowicie, przypuśćmy, że znaleźliśmy całkę tego równania i określiliśmy stałe całkowania, wtedy ogólne rozwiązanie będzie miało postać:

$$\alpha = \Phi\,/t, \alpha_0/;$$

przy czym funkcja Φ jest tego rodzaju, że przy $\alpha_0 = 0$, Φ staje się też zerem zupełnie niezależnie od czasu t, albowiem punkt M, znajdujący się w położeniu C/ rys. 54/ i nieposiadający początkowej prędkości /$\alpha' = 0$/, zawsze w tym położeniu pozostawać będzie, tj. $\alpha = 0$ niezależnie od czasu t. Dlatego też, gdy rozłożymy tę funkcję Φ w szereg według dodatnich potęg wartości początkowego odchylenia α_0, to to rozłożenie nie będzie zawierać wyrazu swobodnego, czyli będzie miało postać:

$$\alpha = \Phi/t, \alpha_0/ = \alpha_0 \cdot f_1/t/ + \alpha_0^2 \cdot f_2/t/ + \alpha_0^3 \cdot f_3/t/ + \ldots\ldots\ldots \quad /32/$$

przy czym $f_1/t/$; $f_3/t/$ i t.d. są funkcje tylko czasu t.

Wyznaczymy te funkcje tak, żeby wielkość /32/ czyniła zadość równaniu /31/ i warunkom początkowym przy dowolnej małej wartości α_0 z dokładnością do wyrazów takiego rzędu małości względem α_0, do jakiego my bierzemy wyrazy w rozłożeniu /32/ funkcji Φ /t, α_0/. W tym celu, na podstawie wzoru /32/, obliczymy α' i α''; otrzymane wyrażenia podstawimy w równanie /31/ i zrobimy redukcję wyrazów, zawierających jednakowe potęgi α_0. Mianowicie, mamy, że:

$$\alpha'^2 = \alpha_0^2 \cdot f_1'^2 + 2\alpha_0^3 \cdot f_1' \cdot f_2' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha'' = \alpha_0 f_1'' + \alpha_0^2 \cdot f_2'' + \alpha_0^3 \cdot f_3'' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wstawiając do równania /31/, będziemy mieli:

$$\alpha_0 \cdot f_1'' + \alpha_0^2 \cdot f_2'' + \alpha_0^3 \cdot f_3'' + \ldots + n^2/\alpha_0 \cdot f_1 + \alpha_0^2 \cdot f_2 + \alpha_0^3 \cdot f_3 + \ldots/ =$$

$$k/\alpha_0^2 \cdot f_1'^2 + 2\alpha_0^3 \cdot f_1' f_2' + \ldots\ldots\ldots\ldots/;$$

czyli po redukcji :

$$\alpha_0/f_1'' + n^2 f_1/ + \alpha_0^2/f_2'' + n^2 f_2 - k \cdot f_1'^2/ + \alpha_0^3/f_3'' + n^2 f_3 -$$

$$- 2k \cdot f_1' f_2'/ + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$

Biorąc np. tylko wyrazy, zawierające α_0 i α_0^2 i pomijając pozostałe, począwszy od α_0^3, będziemy mieli następujące warunki dla funkcyj $f_1, f_2, \ldots\ldots$, aby wyrażenie /32/ czyniło zadość równaniu /31/ w przybliżeniu do wyrazów trzeciego rzędu małości względem α_0:

$$\left.\begin{aligned} f_1'' + n^2 f_1 &= 0; \\ f_2'' + n^2 f_2 &= k f_1'^2; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /33/$$

Ażeby napisać początkowe warunki dla funkcyj $f_1, f_2, \ldots\ldots$ skorzystamy ze wzorów :

$$\alpha = \alpha_0 f_1/t/ + \alpha_0^2 \cdot f_2/t/ + \ldots\ldots.$$

i

$$\alpha' = \alpha_0 f_1'/t/ + \alpha_0^2 \cdot f_2'/t/ + \ldots\ldots.$$

w których założymy $t = 0$; $\alpha = \alpha_0$ i $/\alpha'/_{t=0} = \alpha_0' = 0$.

Wtedy otrzymamy równości ;

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_0 \cdot f_1/0/ + \alpha_0^2 \cdot f_2/0/ + \ldots\ldots \\ &\text{i} \\ 0 &= \alpha_0 \cdot f_1'/0/ + \alpha_0^2 \cdot f_2'/0/ + \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /34/$$

z których wypada, że:

$$f_1/0/ = 1 \; ; \; f_2/0/ = 0 \; ; \; f_3/0/ = 0 \; ; \ldots\ldots$$

$$f_1'/0/ = 0 \; ; \; f_2'/0/ = 0 \; ; \; f_3'/0/ = 0 \; ; \ldots\ldots$$

albowiem równości /34/ muszą zachodzić dla dowolnych wartości α_o, innymi słowy muszą być tożsamościami. Równania /33/ i warunki /34/ w zupełności określają niewiadome funkcje f_1 i f_2. Rzeczywiście, całka pierwszego równania /33/:

$$f_1'' + n^2 f_1 = 0$$

jest

$$f_1/t/ = C_1 \cos nt + C_2 . \sin nt \; ;$$

a warunki początkowe :

przy $t = 0$, musi być : $f_1/0/ = 1$; $f_1'/0/ = 0$,

określają stałe całkowania C_1 i C_2, mianowicie:

$$C_1 = 1 \; ; \quad C_2 = 0 \; ;$$

więc ostatecznie całka ogólna będzie :

$$f_1 /t/ = \cos nt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /35/$$

Podstwaiając otrzymane wyrażenie dla $f_1/t/$ w drugie równanie/33/, otrzymamy:

$$f_2'' + n^2 f_2 = k . n^2 . \sin^2 nt \; ;$$

czyli :

$$f_2'' + n^2 f_2 = \frac{kn^2}{2} / 1 - \cos 2 nt/.$$

Warunki początkowe są następujące :

przy $t = 0$, musi być $f_2/0/ = 0$; $f_2' /0/ = 0$.

Całka ogólna poprzedniego równania liniowego z wyrazem wolnym jest następująca:

$$f_2/t/ = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + \frac{k}{2} + \frac{k}{6} \cdot \cos 2\,nt;$$

a stałe dowolne C_1 i C_2 określimy za pomocą warunków początkowych:

$$0 = C_1 + \frac{k}{2} + \frac{k}{6} \quad \text{i} \quad 0 = n\,C_2\,;$$

skąd okazuje się, że :

$$C_1 = -\frac{2}{3}\,k \quad \text{i} \quad C_2 = 0.$$

Dlatego też całka ogólna będzie ostatecznie :

$$f_2/t/ = -\frac{2}{3}\,k \cdot \cos nt + \frac{k}{2} + \frac{k}{6} \cdot \cos 2\,nt. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /36/$$

Wstawiając wyrażenia /35/ i /36/ do szeregu /32/, otrzymamy niewiadomą funkcję $\alpha = \Phi\,/t,\ \alpha_0/$, mianowicie :

$$\alpha = /\alpha_0 - \frac{2}{3}\,k\,\alpha_0^2/ \cdot \cos nt + \frac{k\alpha_0^2}{2}\,/1 + \frac{1}{3}\cos 2\,nt/ \ldots\ldots /37/$$

Zupełnie analogicznie moglibyśmy obliczyć α nie z dokładnością do wyrazów trzeciego rzędu małości względem α_0, lecz do wyrazów dowolnego rzędu małości względem α_0.

Równanie /37/ określa ruch wahadła jedynie wtedy, gdy $\alpha' < 0$, tj. do tego momentu czasu $t = t_1$, w którym funkcja α' staje się ponownie równa zeru. Gdy zaś $\alpha' = 0$, wtedy prędkość $v = \alpha' \cdot d$ punktu ruchomego M też jest równą zeru, a więc punkt zatrzymuje się, to położenie punktu M jest najwyższym położeniem M_1, które punkt osiąga po lewej stronie pionu OC na rys.54. Od tego położenia M_1 punkt ruchomy M zaczyna poruszać się z powrotem ku położeniu M_0, przy czym kąt α stale wzrasta i dlatego teraz $\alpha' > 0$. Obliczymy moment $t = t_1$, w którym zachodzi zmiana kierunku ruchu ; w tym celu przyrównamy do zera wyrażenie dla α', obliczone ze wzoru /37/, otrzymamy :

$$\alpha' = -n/\alpha_0 - \frac{2}{3}\,k\alpha_0^2/ \cdot \sin nt - \frac{kn \cdot \alpha_0^2}{3} \sin 2\,nt = 0. \quad \ldots\ldots /38/$$

Najbliższy moment t_1 po momencie początkowym $t = 0$, w których α' jest równe zeru, jest najmniejszym / po zerze/ dodatnim pierwiastkiem równania /38/; wszystkie zaś pierwiastki równania /38/ są zawarte we wzorze :

$$t = \pm\,\lambda \cdot \frac{\pi}{n}\ ; \text{ przy czym } \lambda = 0,1,2,3,\ldots\ldots\ldots$$

Dodatnie pierwiastki z pośród nich, oczywiście są :

$$t = +\lambda \cdot \frac{\pi}{n} ; \quad /\lambda = 0,1,2,3,......../$$

Skąd widzimy, że najmniejszy dodatni pierwiastek po zerze jest:

$$t_1 = \frac{\pi}{n} .$$

Odpowiednia wartość odchylenia /amplitudy/ jest największym odchyleniem wahadła po lewej stronie pionu OC/rys.54/; oznaczamy ją przez α_1, wtedy wzór /37/ da nam :

$$\alpha_1 = -/\alpha_0 - \frac{2}{3}k\alpha_0^2/ + \frac{k\alpha_0^2}{2}/1 + \frac{1}{3}/ = -/\alpha_0 - \frac{4}{3}k\alpha_0^2/$$

Widzimy więc, że wahadło po lewej stronie pionu OC/rys.54/ nie osiąga poziomu położenia początkowego M_0, lecz zatrzymuje się w swym ruchu ku górze w punkcie M_1, którego odchylenie α_1 jest mniejsze od odchylenia początkowego α_0, o wielkość równą $\frac{4}{3}k\alpha_0^2$. To zmniejszenie się amplitudy jest spowodowane oporem ośrodka ;

$$R_1 = +\mu/\alpha'.d/^2 = + \frac{km}{d}./\alpha'.d/^2 = +\alpha'^2.k.m.d ;$$

gdy ten opór przestaje istnieć, wtedy $k = 0$ i $\alpha_1 = -\alpha_0$, tj. w próżni, jak już widzieliśmy poprzednio, amplituda wahań pozostaje bez zmiany.

Od położenia najwyższego po stronie lewej punkt ruchomy M, pod wpływem siły ciężkości $G = mg$, porusza się z powrotem po przez najniższe swe położenie C w stronę M_0. Podczas tego ruchu $\alpha' > 0$, i dlatego musimy wziąć równanie /30/ :

$$m\alpha''d = -mg\alpha - \mu/\alpha'.d/^2 ;$$

przy czym warunki początkowe teraz są już takie : przy

$$t = t_1 = \frac{\pi}{n}, \text{ musi być } : \alpha = \alpha_1 = -/\alpha_0 - \frac{4}{3}k\alpha_0^2/ \text{ i } \alpha' = 0.$$

Postępując zupełnie analogicznie do poprzedniego, otrzymamy całkę równania /30/:

$$\alpha = /\alpha_1 - \frac{2}{3} k \alpha_1^2 /. \cos nt - \frac{k \alpha_1^2}{2} /1 + \frac{1}{3}\cos 2nt/;$$

która będzie prawomocną od momentu $t_1 = \frac{\pi}{n}$, aż do momentu $t_2 = \frac{2\pi}{n}$, w którym punkt ruchomy M osiągnie swe najwyższe położenie M_2 po stronie prawej od pionu OC/rys.54/ i w którym α po raz trzeci z rzędu stanie się równym zeru. Odchylenie tego wahnięcia, czyli jego amplituda α_2 będzie:

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{4}{3} k . \alpha_1^2 .$$

Z powyższego wnioskujemy, że kolejne wahnięcia wahadła kołowego w ośrodku, wytwarzającym opór proporcjonalny do drugiej potęgi prędkości ruchu wahadła, posiadają stały okres:

$$\tau = \frac{2\pi}{n} = 2\pi . \sqrt{\frac{d}{g}} ;$$

lecz obszerność tych wahań stale maleje według prawa:

$$\alpha_{p+1} = \alpha_p - \frac{4}{3} k \alpha_p^2 ;$$

przy czym α_{p+1} oznacza bezwzględną wartość amplitudy p+1 z rzędu wahnięcia, a α_p - bezwzględną wartość amplitudy p-go wahnięcia wahadła. Sposób przybliżonego całkowania różniczkowych równań, zastosowany w powyższym zagadnieniu stosuje się często z dobrym wynikiem w podobnych zadaniach.

Wahadło cykloidalne.

Zbadamy ruch punktu materialnego M wzdłuż krzywej, zwanej cykloidą pod działaniem siły ciężkości G = mg.

Przypuśćmy, że podstawa cykloidy jest poziomą, płaszczyzna cykloidy - pionową, i, że cykloida jest obróconą wklęsłością do góry. Zastosujemy pierwsze równanie /17/:

$$m. \frac{dv}{dt} = S.\cos/S,T/. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /17/$$

Oznaczmy przez s łuk cykloidy, odmierzony od najniższego położenia O na cykloidzie /rys.55/; ten łuk będziemy uważali, jako dodatni, gdy jest położony w prawo od obranego początku łuków O, i, jako ujemny, gdy jest położony w lewo od O. Podczas ruchu punktu M, łuk s wzrasta lub zmniejsza się; gdy łuk (s) wzrasta, wtedy :

$$v = + \frac{ds}{dt} \;;$$

a, gdy zmniejsza się, wtedy :

$$v = - \frac{ds}{dt} \;;$$

przy czym v oznacza prędkość punktu ruchomego. Mamy więc, że lewa część równania /17/, jest równą:

$$m.\frac{dv}{dt} = \pm\, m.\frac{d^2s}{dt^2} \;.$$

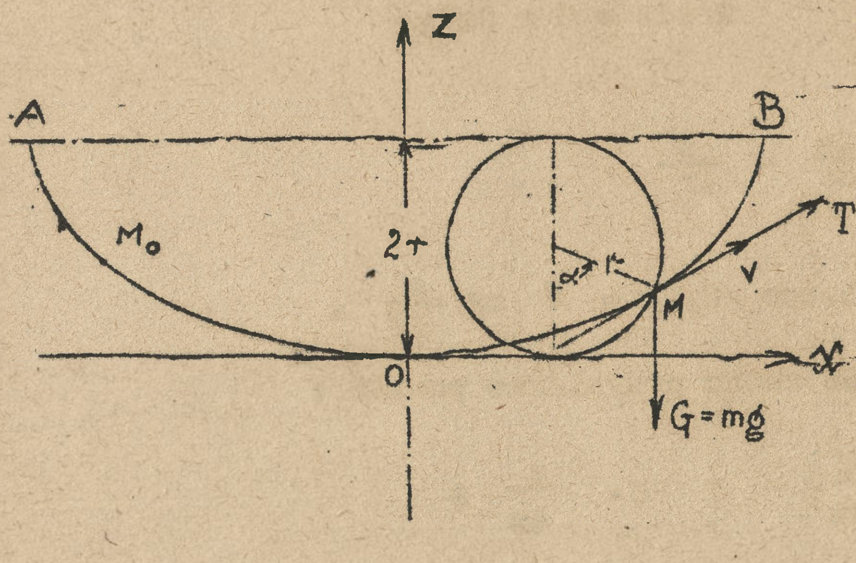
Obliczymy teraz prawą część tego równania, mianowicie rzut siły S na kierunek stycznej MT, mamy, że :

$S = G = mg$ i $\cos/G,T/ = -\cos/Z,v/$,

więc :

$S.\cos/S,T/ = -mg.\cos/Z,v/$,

przy czym OZ jest kierunkiem osi współrzędnych, skierowanej pionowo do



Rys.55.

góry /rys. 55/. Ale z Kinematyki wiemy, że :

$$\cos/v,z/ = \frac{z'}{v} = \frac{z'dt}{v.dt} = \frac{dz}{ds} \;; \text{ gdy łuk s wzrasta}$$

i

$$\cos/v,z/ = -\frac{dz}{ds} \text{, gdy łuk s zmniejsza się,}$$

zatem ostatecznie :

$$S.\cos/S,T/ = \mp\, mg.\frac{dz}{ds} \;.$$

Ażeby obliczyć pochodną $\frac{dz}{ds}$, musimy mieć zależność pomiędzy łukiem s i rzędną z tego samego punktu M na cykloidzie. Parametryczne równania cykloidy są /rys. 55/:

$$x = r / \alpha + \sin\alpha /; \quad z = r / 1 - \cos\alpha /;$$

skąd znajdujemy różniczkę łuku :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = 2\, r.\cos\frac{\alpha}{2}\, d\alpha ;$$

całkując, będziemy mieli:

$$s = 4\, r.\sin\frac{\alpha}{2} ;$$

czyli ostatecznie :

$$s^2 = 16\, r^2.\, \sin^2\frac{\alpha}{2} = 16\, r^2.\, \frac{1}{2} / 1 - \cos\alpha / = 8\, rz.$$

Różniczkując znajdziemy :

$$2\, sds = 8\, r\, dz ;$$

Skąd :

$$\frac{dz}{ds} = \frac{s}{4r} .$$

Dlatego też:

$$S.\cos /S,T/ = \mp mg\frac{s}{4r} .$$

Różniczkowe równanie ruchu przybierze postać :

$$\pm m.\frac{d^2s}{dt^2} = \mp mg.\frac{s}{4r} ;$$

czyli, po skróceniu przez masę m:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{4r}\, s.$$

Różniczkowe równanie tego kształtu mieliśmy w § 7 rodziału IIgo, gdy rozpatrywaliśmy prostoliniowy ruch punktu materialnego pod działaniem siły przyciągania, do nieruchomego środka, proporcjonalnej do odległości od tego środka jego całką ogólną jest :

$$s = s_0 \cos \sqrt{\frac{g}{4r}}\,.\,t + /s'/_0 .2.\sqrt{\frac{r}{g}}\,.\sin\sqrt{\frac{g}{4r}}\,.t.$$

Poprzednie równanie wyraża harmoniczny ruch, amplituda którego jest :

$$\sqrt{s_0^2 + \frac{4r}{g}\,.\,/\,s'/_0^2}\,.$$

Obierzmy skrajne położenie punktu ruchomego /np.A/, jako położenie początkowe M_0, wtedy $/s'/_0 = 0$, albowiem w położeniu A prędkość $v_0 = /\,\frac{ds}{dt}\,/_0 = 0$. W takim razie amplituda wahań staje się równą s_0, a skończone równanie ruchu przybiera postać prostszą:

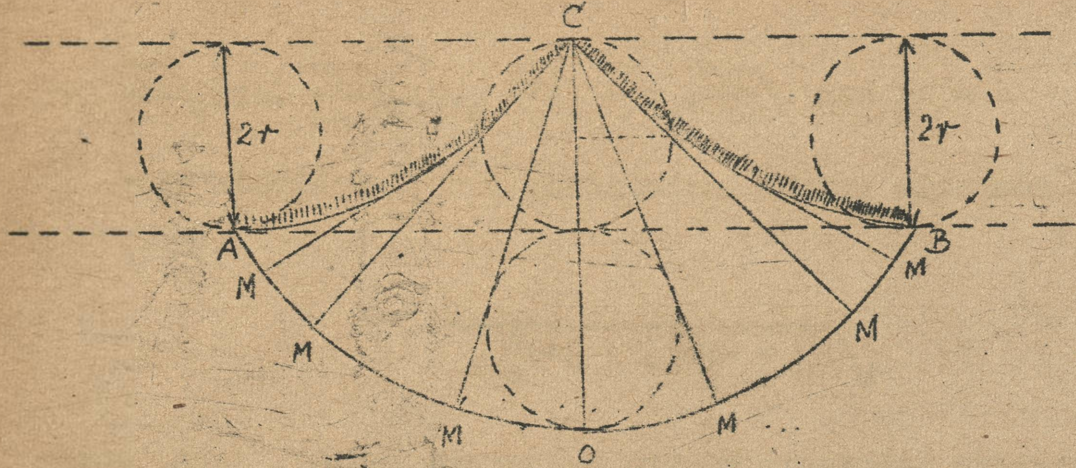
$$s = s_0 .\cos\sqrt{\frac{g}{4r}}\,.\,t.$$

Czas trwania jednego wahnięcia wahadła cykloidalnego wynosi :

$$\tau = \pi .\sqrt{\frac{4r}{g}}\,,$$

tj. *okres wahań wahadła cykloidalnego nie zależy od obszerności /amplitudy/ wahań, lecz tylko od promienia koła, tworzącego cykloidę i od przyśpieszenia ziemskiego* g. Zatem wahania wahadła cykloidalnego są *izochroniczne*, czyli inaczej *równoczesne*, gdy zaś wahania wahadła kołowego, jak widzieliśmy wyżej, są *nierównoczesne*.

Cykloidalne wahadło zbudował Huygens /1629 - 1695/, korzystając z obwiedni cykloidy, która, jak wiemy z geometrii różniczkowej, jest też cykloidą i przytem równą danej. Profil ACB /rys.56/ jest obwiednią cykloidy AOB; w punkcie C jest zawieszona gięta i nierozciągliwa lina CM, o długości równej $4\,r$; na końcu tej liny znajduje się kulka M. Podczas wahań punktu M, lina CM nakręca się na profil ACB, i dlatego punkt M zakreśla właśnie cykloidę AOB .



Rys. 56.

Równania równowagi punktu materialnego M na bezwzględnie gładkiej krzywej, określonej za pomocą równań.

$$f_1/x,y,z/ = 0 ; \quad f_2 /x,y,z/ = 0 \quad ;........../1/$$

otrzymujemy z różniczkowych równań ruchu /3/, zakładając w nich:

$$x'' = y'' = z'' = 0 ;$$

mianowicie będziemy mieli:

$$\left.\begin{array}{l} X + \lambda_1 \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = 0; \\ Y + \lambda_1 \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial y} = 0; \\ Z + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial z} = 0; \end{array}\right\} ..../39/$$

Zauważymy, że warunki równowagi możemy też otrzymać i z równań ruchu /17/ mianowicie, zakładając w pierwszym równaniu $\frac{dv}{dt} = 0$, znajdziemy:

$$S.\cos/ S,T/ = 0 .$$

Zatem warunkiem koniecznym i wystarczającym dla równowagi punktu materialnego na bezwzględnie gładkiej krzywej jest: aby dana siła S, działająca na ten punkt była prostopadłą do kierunku stycznej, tj. żeby ta siła S znajdowała się w płaszczyźnie normalnej do krzywej.

Na zakończenie obecnego rozdziału powiemy parę słów o ruchu punktu materialnego po linii krzywej chropowatej. Gdy punkt materialny porusza się po krzywej chropowatej, wtedy oprócz normalnego przeciwdziałania R, istnieje jeszcze opór tarcia, którego kierunek działania jest wprost przeciwnym do kierunku prędkości v punktu ruchomego, a wartość liczebna jest równą iloczynowi bezwzględnej wartości normalnego przeciwdziałania i współczynnika μ tarcia dla ruchu, często też zwanego dynamicznym współczynnikiem tarcia. Biorąc pod uwagę siłę tarcia, na podstawie równań /17/, będziemy mieli następujące różniczkowe równania ruchu punktu materialnego po chropowatej krzywej:

$$\left.\begin{aligned} m.\frac{dv}{dt} &= S.\cos/S,T/ - \mu.\left|R\right| \\ m.\frac{v^2}{\rho} &= S.\cos/S,N/ + R.\cos/R,N/ \\ 0 &= S.\cos/S,B/ + R.\cos/R,B/ \end{aligned}\right\} \ldots\ldots/40/$$

Z równań /40/ widzimy, że opór tarcia wchodzi jedynie tylko w pierwsze równanie ruchu, co jest zupełnie zrozumiałem fizycznie. Jeżeli zrobimy w równaniach /40/ v=0 i zamienimy współczynnik μ tarcia dla ruchu przez odpowiedni współczynnik tarcia dla równowagi, wtedy będziemy mieli trzy równania równowagi punktu materialnego na chropowatej linii krzywej /1/.

Rozdział IX.

Względny ruch punktu materialnego.

Dotychczas przypuszczaliśmy, że osie współrzędnych, względem których rozpatrujemy ruch punktu materialnego, są n i e r u c h o m e. Ale ponieważ nawet ziemia nasza jest ruchomą, więc powstaje pytanie: w j a k i s p o s ó b wyznaczyć ruch punktu względem osi współrzędnych, ruch których jest zadany względem drugiego układu osi współrzędnych, który uważamy, jako bezwzględnie nieruchomy.

W cz. II- Kinematyki - / rozdział VII/ wykazaliśmy,że:

1/ b e z w z g l ę d n a p r ę d k o ś ć v_b p u n k t u jest geometryczna sumą jego prędkości względnej v_w i prędkości unoszenia v_u:

$$\overline{v_b} = \overline{v_w} + \overline{v_u}$$

2/ b e z w z g l ę d n e p r z y ś p i e s z e n i e w_b punktu jest geometryczną sumą trzech jego przyśpieszeń: przyśpieszenia ruchu względnego w_w, przyśpieszenia ruchu unoszenia w_u i przyśpieszenia zwrotnego, czyli C o r i o l i s'a w_c. Mamy więc równość geometryczną:

$$\overline{w_b} = \overline{w_w} + \overline{w_u} + \overline{w_c} \qquad \text{/1/}$$

Ta równość wyraża k i n e m a t y c z n e t w i e r d z e n i e C o r i o l i s'a. Wiemy z kinematyki, że wartość liczebna przyśpieszenia Coriolis'a jest:

$$w_c = 2\omega v_w \sin / \overline{\omega}, \overline{v_w}/; \qquad \text{/2/}$$

przy czym v_w jest względna prędkość punktu ruchomego M, a ω - wartość liczebna chwilowej prędkości kątowej obrotu ruchomych osi $O'\xi\eta\zeta$. Wzór /2/ daje nam,że przyśpieszenie Cariolis'a w_c staje się równe zeru, gdy 1/ $\omega = 0$, tj. w wypadku p o s t ę p o w e g o r u c h u u n o s z e n i a, innymi słowy, gdy osie $O'\xi\eta\zeta$ podczas swego ruchu stale pozostają do siebie równoległe; wtedy $\overline{w_b} = \overline{w_w} + \overline{w_u}$; 2/ $v_w = 0$,tj. w wypadku, gdy punkt ruchomy M znajduje się w stanie "w z g l ę d n e g o s p o c z y n k u", innymi słowy jest nieruchomy względem osi $O'\xi\eta\zeta$; wtedy $\overline{w_b}=\overline{w_u}$;

3/ $\sin(\overline{\omega}, \overline{v_w}) = 0$, tj., gdy względna prędkość punktu v_w jest równoległą do chwilowej osi obrotu układu $O'\xi\eta\zeta$.

Przypuśćmy teraz, że d a n a s i ł a S d z i a ł a n a p u n k t m a t e r i a l n y - o masie m, wtedy oczywiście p r z y ś p i e s z e n i e w_b r u c h u b e z w z g l ę d n e g o będzie nam też znane, albowiem, według drugiego prawa Newton'a zachodzi zależność :

$$\overline{S} = m\,\overline{w_b}\ .$$

Przypuśćmy dalej, że j e s t n a m z a d a n y r u c h u n o s z e n i a p u n k t u M, tj. r u c h r u c h o m y c h o s i w s p ó ł r z ę d n y c h $O'\xi\eta\zeta$. W e d ł u g t y c h d a n y c h u ł o ż y m y r ó ż n i c z k o w e r ó w n a n i e w z g l ę d n e g o r u c h u p u n k t u m a t e r i a l n e g o M, i n n y m i s ł o w y - r u c h u w z g l ę d e m o s i r u c h o m y c h $O'\xi\eta\zeta$.

Równanie /1/ jest równoważne trzem równaniom algebraicznym, które otrzymamy, rzutując geometryczną równość/1/ na ruchome osie współrzędnych $O'\xi\eta\zeta$; będziemy mieli:

$$\left.\begin{aligned} w_{b\xi} &= w_{w\xi} + w_{u\xi} + w_{c\xi} \\ w_{b\eta} &= w_{w\eta} + w_{u\eta} + w_{c\eta} \\ w_{b\zeta} &= w_{w\zeta} + w_{u\zeta} + w_{c\zeta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /3/$$

Mnożąc równania /3/ przez masę punktu m i biorąc pod uwagę, że:

$$m.w_{b\xi} = S.\cos(S,\xi) = \Xi; \qquad m.w_{b\eta} = Y; \quad m.w_{b\zeta} = Z;$$

przy czym Ξ ,Y, Z s ą r z u t y n a r u c h o m e o s i e w s p ó ł r z ę d n y c h $O'\xi\eta\zeta$ siły S, działającej na punkt ruchomy M, otrzymamy, że:

$$\left.\begin{aligned} \Xi - m.w_{u\xi} - m.w_{c\xi} &= m.w_{w\xi} \\ Y - m.w_{u\eta} - m.w_{c\eta} &= m.w_{w\eta} \\ Z - m.w_{u\zeta} - m.w_{c\zeta} &= m.w_{w\zeta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /4/$$

Zauważymy, że gdy punkt ruchomy M, jest nieswobodny, wtedy X, Y, Z zawierają rzuty przeciwdziałań połączeń na ruchome osie $O'\xi\eta\zeta$. Ponieważ zaś

$$w_{w\xi} = \frac{d^2\xi}{dt^2}; \quad w_{w\eta} = \frac{d^2\eta}{dt^2}; \quad w_{w\zeta} = \frac{d^2\zeta}{dt^2};$$

więc równania /4/ przepiszemy jak niżej.

$$\left.\begin{aligned} X - m.w_{u\xi} - m.w_{c\xi} &= m.\frac{d^2\xi}{dt^2}; \\ Y - m.w_{u\eta} - m.w_{c\eta} &= m.\frac{d^2\eta}{dt^2}; \\ Z - m.w_{u\zeta} - m.w_{c\zeta} &= m.\frac{d^2\zeta}{dt^2}; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /5/$$

przy czym z rozdziału VII Kinematyki /wzory 20/, wiemy, że :

$$w_{c\xi} = 2./v_{w\zeta}.q - v_{w\eta}.r/ = 2/q.\frac{d\zeta}{dt} - r.\frac{d\eta}{dt}/ ;$$

$$w_{c\eta} = 2./v_{w\xi}.r - v_{w\zeta}.p/ = 2/r.\frac{d\xi}{dt} - p.\frac{d\zeta}{dt}/ ; \ldots\ldots /6/$$

$$w_{c\zeta} = 2./v_{w\eta}.p - v_{w\xi}.q/ = 2/p.\frac{d\eta}{dt} - q.\frac{d\xi}{dt}/ ;$$

a wielkości p, q i r, będące rzutami prędkości kątowej ω na osie $O'\xi\eta\zeta$, są nam znane, jako funkcje czasu t, albowiem ruch układu $O'\xi\eta\zeta$ jest zadany. Równania /5/ są *r ó ż n i c z k o w e r ó w n a n i a w z g l ę d n e g o r u c h u p u n k t u m a t e r i a l n e g o*. Te równania zawierają oprócz siły S, będącej wypadkową sił, bezpośrednio działających, i przeciwdziałań połączeń, o ile one istnieją, jeszcze dwie inne siły, mianowicie : $-m\bar{w}_u$ i $-m\bar{w}_c$. Siłę wartość liczebna której jest mw, a kierunek, jest wprost przeciwny do kierunku przyśpieszenia $\bar{w}$, nazywamy *s i ł ą b e z w ł a d n o ś c i*. Zatem siła $-m\bar{w}_u$ jest siłą bezwładności ruchu unoszenia, a siła $-m\bar{w}_c$ jest siłą bezwładności Coriolis'a. Wtedy równania ruchu /5/ wyrażają *d y n a m i c z n e t w i e r d z e n i e C o r i o l i s'a*, które wysłowimy w ten sposób: *w r u c h u w z g l ę d n y m, d o ł ą c z a j ą c d o s i ł c z y n n y c h i s i ł p r z e c i w d z i a ł a ń p o ł ą c z e ń /o i l e o n e i s t n i e j ą/ s i ł ę b e z w ł a d n o ś c i, s p o w o d o w a n ą p r z y ś p i e s z e n i e m u n o s z e n i a, i s i ł ę b e z w ł a d n o ś c i, s p o w o d o w a n ą p r z y ś p i e s z e n i e m C o r i o l i s'a, u w a ż a m y r u c h p u n k t u m a t e r i a l n e g o, j a k o s w o b o d n y*.

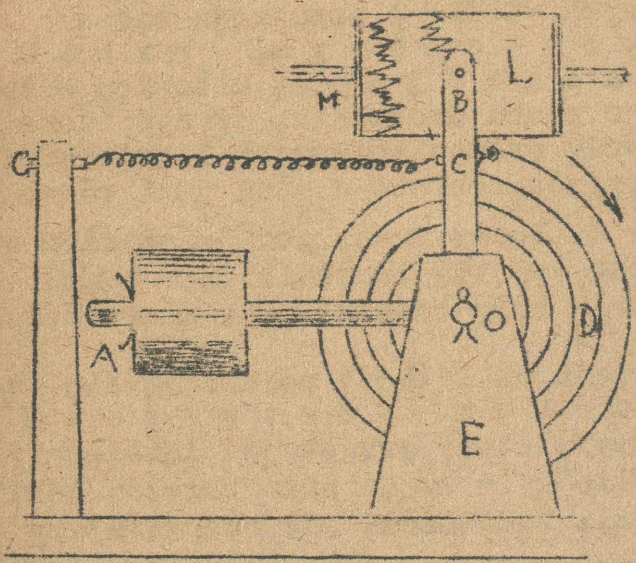
Siły bezwładności unoszenia i Coriolis'a przestają istnieć, gdy ruchome osie współrzędnych $O'\xi\eta\zeta$ poruszają się w przestrzeń ruchem postępowym, prostoliniowym i jednostajnym, albowiem w tym wypadku, z powodu postępowego ruchu unoszenia, przyśpieszenie Coriolis'a $w_c = 0$, a z powodu prostoliniowości i jednostajności ruchu unoszenia, jego przyśpieszenie w_u też jest równe zeru: $w_u = 0$. W tym wypadku względny ruch, pod działaniem danych sił S/ Ξ, Y, Z/ będzie odbywać się zupełnie tak samo, jak gdyby ruchome osie $O'\xi\eta\zeta$ były bezwzględnie nieruchome.

Gdy ruchome osie współrzędnych $O'\xi\eta\zeta$ poruszają się w przestrzeni tylko ruchem postępowym /który może być krzywoliniowy/, wtedy przestaje istnieć tylko siła bezwładności Coriolis'a $- m\overline{w}_c$, a siła bezwładności unoszenia $- m\overline{w}_u$ istnieje nadal. Podobnież, gdy rozpatrujemy względny spoczynek punktu materialnego, musimy do sił zewnętrznych i przeciwdziałań połączeń / o ile one istnieją/ dołączyć siłę bezwładności ruchu unoszenia, mianowicie $- m\overline{w}_u$, albowiem w tym wypadku $v_w = 0$ i dlatego /patrz wzór 2/ $w_c = 0$. Równania względnej równowagi, otrzymamy z równań względnego ruchu /3/, zakładając w nich $\xi'' = \eta'' = \zeta'' = 0$; mamy:

$$\left.\begin{aligned} \Xi - m.w_{u\xi} &= 0; \\ Y - m.w_{u\eta} &= 0; \\ Z - m.w_{u\zeta} &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad \text{/7/}$$

W celu wyjaśnienia siły bezwładności ruchu unoszenia $-mw_u$. rozpatrzymy następujący przyrząd, mający praktyczne zastosowanie. Jest to przyrząd japońskiego profesora Milna nazwany sejsmometrem dla badania pionowych drgań pociągu, doznanych z powodu niejednorodności budowy plantu i nieprostoliniowości i niejednostajności ruchu pociągu. Urządzenie tego sejsmometru jest oparte na istnieniu siły bezwładności ruchu unoszenia.

Prostokątna dźwignia AOB/rys.57/ jest swobodnie osadzoną na poziomej osi O, na jej poziomym ramieniu OA znajduje się duża masa m; a na ramieniu pionowym OB w punkcie C jest umocowany koniec spiralnej sprężyny D, drugi koniec której jest umocowany na podstawie E. Obok punktu C jest przymocowana druga sprężyna K, która odciąga ramię OB w kierunku przeciwnym działaniu sprężyny D. Wyobraźmy sobie, że cały przy-

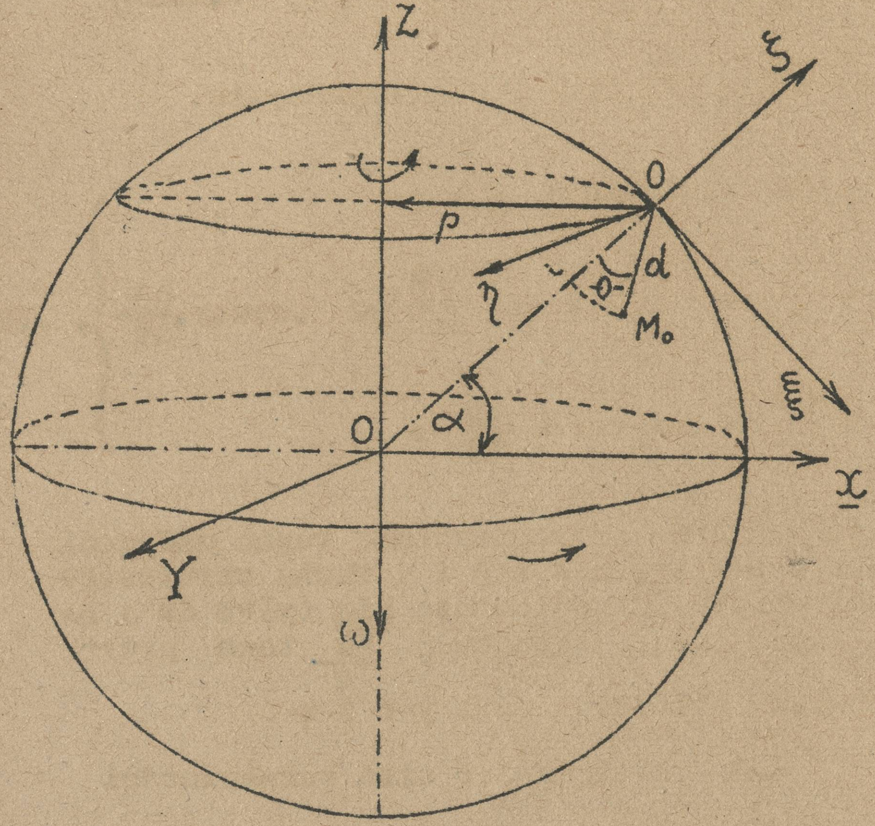


Rys.57.

rząd , a więc i oś O, opuszcza się gwałtownie ku dołowi w kierunku pionowym, wtedy masa m, z powodu powstającej przy tym ruchu siły bezwładności unoszenia mw_u, dążąc do zachowania swego położenia początkowego, unosi ku górze koniec A ramienia AO. Wtedy dźwignia AOB obraca się dookoła osi O i jej koniec B odchyla się w prawo od położenia początkowego. Te odchylenia zapisuje pióro L na poziomym walcu obrotowym M, wprowadzonym w ruch obrotowy mechanizmem zegarowym. Sprężyny D i K przyprowadzają dźwignię AOB w położenie pierwotne. Jeżeli ustawimy taki przyrząd w poruszającym się pociągu, wtedy otrzymamy na walcu M wykres, dający nam naoczne pojęcie o trwałości i równości kolejowego plantu.

Ażeby dać chociażby jeden przykład zastosowania równań względnego ruchu /5/, rozpatrzymy w a h a d ł o F o u c a u l t'a . W roku 1851 francuski fizyk Foucault przeprowadził doświadczenie, które w sposób naoczny wykazało obracanie się elipsoidy ziemskiej dookoła jej osi, na podstawie widocznego odchylenia się płaszczyzny wahań wahadła.

Mianowicie, Foucault wykazał, że, jeżeli wyobrazimy sobie wahadło, zawieszone na północnym biegunie ziemskim, wtedy płaszczyzna jego wahań obróci się w ciągu 24 godzin o kąt 360° w kierunku ruchu wskazówki zegara. Ponieważ zaś płaszczyzna wahań wahadła w rzeczywistości pozostaje niezmienną, więc widoczne dla obserwatora odchylenie płaszczyzny wahadła jest spowodowane obracaniem się ziemi o kąt 360° w ciągu 24 godzin w kierunku przeciwnym ruchu wskazówki zegara. Jeżeli wahadła zawiesimy nie na biegunie, a w miejscu, którego szerokość geograficzna jest α /rys. 58 /, wtedy czas trwania widocznego obrotu płaszczyzny wahań wahadła o kąt 360° będzie większy od 24 godzin, mianowicie $-24 \operatorname{cosec} \alpha$ godzin. Na równiku, gdzie $\alpha = 0$, widoczne odchylenie się płaszczyzny wahań wahadła przestaje istnieć.



Rys.58.

Obierzmy nieruchome osie współrzędnych OXYZ, jak to jest wskazane na rys.58: początek O w środku ziemi, oś OZ - skierujemy na północ, a osie OX i OY w płaszczyźnie równika.

Osie ruchome $O'\xi\eta\zeta$, niezmiennie związane z ziemią, weźmiemy w ten sposób: przyjmijmy miejsce obserwacji na ziemi, jako początek O', oś $O'\zeta$ skierujemy pionowo do góry, oś $O'\xi$ skierujemy w płaszczyźnie południka ku południu, a oś $O'\eta$ - prostopadle do płaszczyzny południka ku zachodowi.

Ziemia obraca się dookoła osi OZ ze stałą prędkością kątową:

$$\omega = \frac{2\pi}{24.60.60} = \frac{2\pi}{86.164} \cong \frac{1}{13.700} \ .$$

geometrycznie ta prędkość przedstawia się, jako wektor $\overline{O\omega}$ /rys.58/, skierowany wzdłuż ujemnej osi OZ, albowiem obracanie się ziemi odbywa się od zachodu ku wschodowi, tj. od dodatniej osi OY ku dodatniej osi OX, i dlatego też prędkość kątowa ω została odłożoną wzdłuż ujemnej osi OZ. Stąd wnioskujemy, że rzuty prędkości kątowej ω na osie ruchome $O'\xi\eta\zeta$ są następujące:

$$\left.\begin{aligned} \omega.\cos/\omega,\xi/ &= p = \omega.\cos\alpha\ ; \\ \omega.\cos/\omega,\eta/ &= q = \omega.\cos\frac{\pi}{2} = 0\ ; \\ \omega.\cos/\omega,\zeta/ &= r = \omega.\cos/\frac{\pi}{2}+\alpha/ = -\omega.\sin\alpha \end{aligned}\right\} \ldots /8/$$

Ze wzorów /6/, na podstawie wyrażeń /8/, otrzymamy, że:

$$\left.\begin{aligned} w_{c\xi} &= 2./q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt}/ = 2\omega.\sin\alpha\,\frac{d\eta}{dt}\ ; \\ w_{c\eta} &= 2./r.\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\zeta}{dt}/ = -2\omega.\sin\alpha\,\frac{d\xi}{dt} - 2\,.\cos\omega.\frac{d\zeta}{dt} \\ w_{c\zeta} &= 2./p\frac{d\eta}{dt} - q.\frac{d\xi}{dt}/ = 2\omega.\cos\alpha\,\frac{d\eta}{dt}\ ; \end{aligned}\right\}; \ ./9/$$

W rozpatrywanym wypadku przyśpieszenie ruchu unoszenia w_u, z powodu j e d n o s t a j n o ś c i ruchu obrotowego ziemi dookoła jej osi obrotu OZ, sprowadza się tylko do d o ś r o d k o w e j /normalnej/ składowej $\frac{v_u^2}{\varrho}$ tego przyśpieszenia w_u, albowiem składowa s t y c z n a $\frac{dv_u}{dt} = \frac{d/\varrho.\omega/}{dt} = \varrho\frac{d\omega}{dt} = 0.$ Dlatego też siła bezwładności ruchu unoszenia $-m.w_u$ staje się s i ł ą o d ś r o d k o w ą, mianowicie $-m.\frac{v_u^2}{\varrho}$, przy czym ϱ jest odległość miejsca obserwacji O' od osi ziemskiej OZ. Ale ta siła wchodzi w skład siły ciężkości G = mg ruchomego punktu wahadła, która to w rzeczywistości jest w y p a d k o w ą s i ł y p r z y c i ą g a n i a z i e m s k i e g o i s i ł y o d ś r o d k o w e j. Nie wiedząc wartości Ξ, Y i Z, wiemy jednak, że różnice:

$$\left.\begin{aligned} \Xi - m.w_{u\xi} &= G.\cos/G,\xi/ = 0; \\ Y - m.w_{u\eta} &= G.\cos/G,\eta/ = 0; \\ Z - m.w_{u\zeta} &= g.\cos/G,\zeta/ = -G = -mg\ ; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /10/$$

Obierzmy początek współrzędnych O', jako punkt zawieszenia wahadła, o długości równej d i przypuśćmy, że w momencie początkowym wahadło zostało odchylone od kierunku pionowego w płaszczyźnie południka o mały kąt θ i następnie puszczono go bez prędkości początkowej .Oprócz siły ciężkości G, działającej na masę wahadła, działa na nią jeszcze przeciwdziałanie liny, na której jest zawieszona ta masa m.

Rzuty tego natężenia R na osie $O'\xi\eta\zeta$ są następujące:

$$\left.\begin{aligned} R\cos/R,\xi/ &= -R\frac{\xi}{d}\,; \\ R\cos/R,\eta/ &= -R\frac{\eta}{d}\,; \\ R\cos/R,\zeta/ &= -R\frac{\zeta}{d}\,; \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots/11/$$

Podstawiając wyrażenia /9/, /10/ i /11/ do równań ruchu względnego /5/ i skracając je przez masę m, będziemy mieli:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -2\omega.\sin\alpha.\frac{d\eta}{dt} - R\frac{\xi}{d}\,; \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= +2\omega.\sin\alpha.\frac{d\xi}{dt} + 2.w.\cos\alpha\frac{d\zeta}{dt} - R\frac{\eta}{d} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -2\omega.\cos\alpha.\frac{d\eta}{dt} - g + R\frac{\zeta}{d}\,; \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots/12/$$

Ograniczymy się do wypadku,gdy wahania wahadła są bardzo nieznaczne,tj. gdy kąt θ jest bardzo bliski do zera. Wtedy, jako pierwsze przybliżenie możemy przyjąć, że :

$$\eta \cong d;$$

oprócz tego,ponieważ wartość ω jest nieznaczną, więc zaniedbany w trzecim równaniu /12/ wyraz $2\,\omega.\cos\alpha\,\frac{d\eta}{dt}$.

W takim razie trzecie równanie /12/ da nam, że: R = g i pierwsze dwa równania /12/ przybiorą postać :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -2\omega.\sin\alpha.\frac{d\eta}{dt} - g.\frac{\xi}{d}\,; \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= 2\omega.\sin\alpha.\frac{d\xi}{dt} - g.\frac{\eta}{d}\,; \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots/13/$$

Warunki początkowe są:

$$\text{przy } t = 0, \text{musi być: } \xi_0 = d.\sin\theta\ ;\ \eta_0 = 0 \qquad \Big/\frac{d\xi}{dt}\Big/_0 = 0\ ;\ \Big/\frac{d\eta}{dt}\Big/_0 = 0\ ; \qquad \text{........../14/}$$

Układ równań liniowych /13/ o współczynnikach stałych może być scałkowany do końca zupełnie ściśle, ale z powodu tego, że ω jest wielkością bardzo małą, wygodniej jest całkować równania /13/ sposobem przybliżonym, rozkładając rozwiązanie według potęg ω i pomijając w tym rozłożeniu wszystkie wyrazy, oprócz wyrazów, zawierających ω w pierwszej potędze. Aby otrzymać pierwsze przybliżenie, odrzucimy w równaniach /13/ wyrazy, zawierające czynnik $\omega\xi'$ wtedy, zakładając:

$$\frac{g}{d} = n^2,$$

będziemy mieli:

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} + n^2.\ \xi_1 = 0$$

i

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} + n^2.\ \eta_1 = 0,$$

skąd, na podstawie warunków początkowych /14/, znajdziemy, że:

$$\xi_1 = \xi_0.\cos nt\ ;\ \eta_1 = 0.$$

Wstawiając otrzymane wyrażenia dla ξ_1 i η_1 zamiast ξ i η w równaniach /13/, otrzymamy dla drugiego przybliżenia :

$$\xi_2'' + n^2.\ \xi_2 = 0\ ; \qquad \eta_2'' + n^2\eta_2 = -2\omega\xi_0.n.\sin\alpha.\sin nt. \qquad \text{........../15/}$$

skąd wynika, na podstawie warunków początkowych /14/, że :

$$\xi_2 = \xi_0.\cos nt\ ;$$

$$\eta_2 = C_1\cos nt + C_2\sin nt + At.\ \cos nt\ ;$$

gdzie C_1 i C_2 są stałe całkowania, które określimy według warunków początkowych, a wyraz AT cos nt jest dowolne rozwiązanie równania /15/, przy czym A jest nieokreślony współczynnik, który należy się wyznaczyć w ten sposób, ażeby wielkość At cos nt czyniła zadość równaniu /15/. Podstawiając wyrażenie At cos nt zamiast η_2 w równaniu /15/, otrzymamy ;

$$- An^2 t \cos nt - 2 An \sin nt + An^2 \cos nt = -2\omega \xi_0 n \sin\alpha \sin nt \;;$$

skąd wypada, że

$$A = \omega \xi_0 \sin\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /16/$$

Dla określenia stałych całkowania C_1 i C_2 mamy warunki :

$$0 = C_1 \;; \quad 0 = C_2 n + A = C_2 n + \omega \xi_0 \sin \;;$$

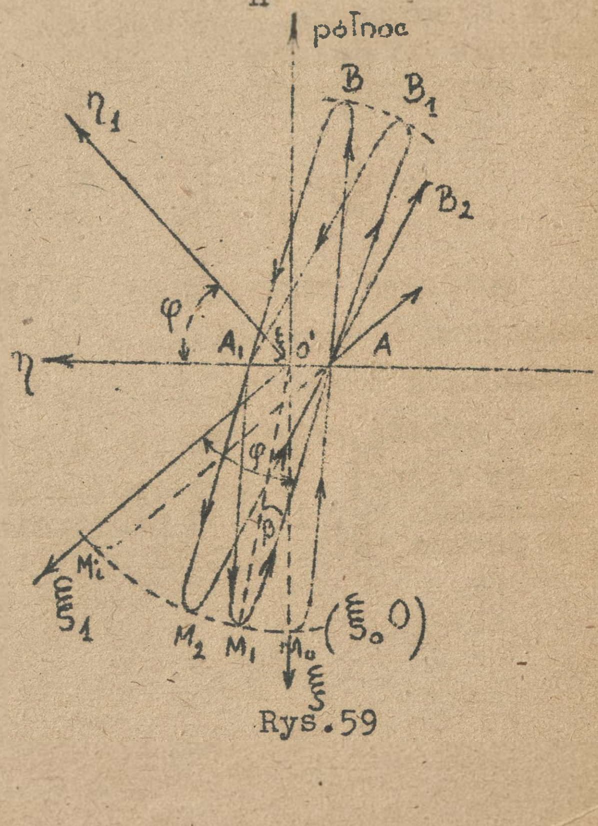
zatem

$$C_1 = 0 \;; \quad C_2 = - \frac{\omega \xi_0}{n} \cdot \sin\alpha .$$

Dlatego też drugie przybliżenie będzie :

$$\xi_2 = \xi_0 \cos nt \;;$$

$$\eta_2 = \xi_0 \omega \sin\alpha /t.\cos nt - \frac{1}{n} \sin nt/\ldots\ldots /17/$$



Rys.59

Zbadamy otrzymane rozwiązanie zadania. Osie ruchome O' ξ η ζ obraliśmy w ten sposób: dodatni kierunek osi O' ξ skierowaliśmy wzdłuż południka, przechodzącego przez miejsca obserwacji na powierzchni ziemi O', ku południu, a oś O' η - ku zachodowi. W momencie początkowym t = 0 masa wahadła znajdowała się w położeniu M_o /rys.58/ w płaszczyźnie południka ; dlatego też rzut poziomy tego położenia okaże się na osi O' ξ. Na rys.59 ten rzut oznaczyliśmy przez M_o/ ξ_o, 0/. Gdy wahadło rozpocznie ruch, wtedy wzory

/17/ dają nam, że wahadło nie będzie pozostawać w płaszczyźnie południka /O' ξ/ lecz odchyli się od tego południka, ponieważ η_2 nie jest równe zeru. To odchylenie jest bardzo nieznaczne tak, że po upływie czasu

$$t = \frac{\tau}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{n},$$

wahadło /raczej jego rzut poziomy / przyjdzie nie do położenia O', lecz do położenia A, którego współrzędne są :

$$\xi = 0, \eta = - \frac{\xi_0}{n} \cdot \omega \cdot \sin\alpha;$$

n.p. w doświadczeniu Foucault'a w Paryżu, którego szerokość geograficzna $\alpha = 48^0 50'$, wynosi:

$$\eta \cong - \frac{\xi_0}{n} \cdot \frac{1}{17500} \cdot$$

Po upływie czasu $t = \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$, wahadło zajmie położenie B, którego współrzędne według równan /17/ są :

$$\xi = -\xi_0, \quad \eta = -\xi_0 \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2} \cdot \sin\alpha = -\xi_0 \cdot \omega \cdot \frac{\pi}{n} \sin\alpha.$$

Po upływie czasu $t = \frac{3\tau}{4} = \frac{3\pi}{2n}$, będziemy mieli:

$$\xi = 0, \quad \eta = -\frac{\xi_0}{n} \cdot \omega \cdot \sin\alpha \cdot \sin/\frac{3\pi}{2}/ = \frac{\xi_0}{n} \cdot \omega \cdot \sin\alpha.$$

t.j. wahadło zajmie położenie A_1.

i wreszcie, po upływie czasu $t = \tau = \frac{2\pi}{n}$, wahadło przyjdzie nie do położenia początkowego M_0/ξ_0, 0/, lecz położenia M_1 o współrzędnych:

$$\xi = \xi_0 \quad i \quad \eta = \xi_0 \cdot \omega \cdot \tau \cdot \sin\alpha = \xi_0 \cdot \omega \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot \sin\alpha.$$

Ponieważ wielkość $O'A = O'A_1 = \frac{\xi_0}{n} \cdot \omega \cdot \sin\alpha$, jest bardzo nieznaczną w porównaniu z wielkością $O'M_0 = \xi_0$, to obserwator będzie miał wrażenie, że część toru wahadła M_0B jest na pozór linią prostą, podobnie jak i część następna BM_1. Obserwator zauważy tylko, że następne wahnięcie wahadła rozpoczyna się nie z położenia M_0, lecz z położenia M_1, położonego od położenia M_0 o pewien kąt β, przy czym :

$$tg\beta = \frac{M_oM_1}{M_oO'} = \frac{\xi_o\cdot\omega\cdot\tau.\sin\alpha}{\xi_o} = \omega.\tau.\sin\alpha.$$

czyli $\beta = \mathrm{arc\ tg}/\omega.\tau.\ \sin\alpha/.$

Wykażemy jeszcze, że w czasie jednego całego wahnięcia wahadła, t.j. w czasie τ ; widoczne dla obserwatora odchylenie się płaszczyzny wahań wahadła, stanowi stale kąt $\beta = \mathrm{arc\ tg}/\omega.\tau.\sin\alpha/$, nie zależnie od tego, czy wahnięcia wahadło rozpoczyna od położenia M_o, położonego w płaszczyźnie południka miejsca obserwacji, czy też od jakiego bądź położenia M_1, położonego w płaszczyźnie pionowej, tworzącej dowolny kąt φ /azymut/ z płaszczyzną południka / np. w pionowej płaszczyźnie $\xi O\eta$, dla której azymut $\varphi = \frac{\pi}{2}$./ /rys.58 i 59§. W tym celu weźmy w poziomej płaszczyźnie miejsca obserwacji $\xi O'\eta$ osie współrzędnych $\xi_1 O'\eta_1$, przy czym nowa oś $O'\xi_1$ tworzy kąt φ ze starą osią $O'\xi$. Wtedy znane wzory z geometrii analitycznej dadzą nam zależności:

$$\xi = \xi_1.\cos\alpha - \eta_1.\sin\alpha\ ;$$

$$\eta = \xi_1.\sin\alpha + \eta_1.\cos\alpha\ ;$$

Robiąc zamianę zmiennych w równaniach /13/, otrzymamy następujące równania ;

$$/\xi_1'' + 2.\omega.\eta_1'.\sin\alpha + n^2\xi_1/.\cos\varphi - /\eta_1'' - 2\omega.\xi_1'\sin\alpha + n^3\eta_1/\sin\varphi = 0;$$

$$/\xi_1'' + 2\omega.\eta_1'\sin\alpha + n^2\xi_1/\sin\varphi + /\eta_1'' - 2\omega.\xi_1'.\sin\alpha + n^2\eta_1/\cos\varphi = 0;$$

Skąd wynika, że :

$$\xi_1'' + 2.\omega.\eta_1'.\sin\alpha + n^2\xi_1 = 0\ ;$$

$$\eta_1'' - 2.\omega.\xi_1'.\sin\alpha + n^2\eta_1 = 0\ .$$

Gdy np. rozpatrujemy wahnięcie, rozpoczynające się od położenia M_1, znajdującego się na osi $O'\xi_1$, wtedy warunki początkowe są : t = 0, musi być :

$$/\xi_1/_o = \xi_o, /\eta_1/_o = 0; \left(\frac{d\xi_1}{dt}\right)_o = /\xi_1'/_o = 0;\ \left(\frac{d\eta_1}{dt}\right)_o = /\eta_1'/_o = 0\ .$$

Zatem widzimy, że podczas tego wahnięcia, wahadło zakreśli względem osi $\xi_1 O' \eta_1$ zupełnie taki sam tor, jaki to wahadło zakreśliło względem osi $\xi O' \eta$ podczas swego pierwszego wahnięcia. Innymi słowy, podczas trwania jednego całego wahnięcia wahadła, płaszczyzna jego wahań, widoczna dla obserwatora, odchyli się w kierunku zachodnim o kąt $\beta = \operatorname{arc\,tg}(\omega . \tau . \sin\alpha)$. Zatem obserwator będzie miał wrażenie, że podczas wahań wahadła, jego płaszczyzna stale obraca się w kierunku zachodnim ze stałą prędkością kątową Ω; ponieważ $\omega . \tau . \sin\alpha$ jest bardzo nieznaczne, więc możemy przyjąć w przybliżeniu, że: $\beta \cong \omega . \tau . \sin\alpha$; w takim razie owa prędkość kątowa wynosi w przybliżeniu:

$$\Omega \cong \omega . \sin\alpha ;$$

Skąd widzimy, że na biegunach, gdzie $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, rzecz zrozumiała $\Omega = \pm\,\omega$, a na równiku, gdzie $\alpha = 0$, $\Omega = 0$, tj. na równiku doświadczenie Foucault'a nie osiąga skutku, albowiem obserwator nie zauważy żadnego widocznego odchylenia się płaszczyzny wahań wahadła. W doświadczeniu Foucault'a w Paryżu było:

$$d = 67 \text{ metr.}; \quad \tau = \frac{2\pi}{n} = 2\pi . \sqrt{\frac{d}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{67}{9{,}8}} = 16 \text{ sekund};$$

$$\xi_0 = 3 \text{ mtr}.$$

Ale

$$\Omega \cong \omega . \sin\alpha \cong \frac{\sin\alpha}{13.700} \cong \frac{\sin(48^\circ 50')}{13.700} \cong \frac{1}{17.500};$$

więc wielkość odchylenia się w kierunku zachodnim położenia początkowego wahadła w czasie trwania jednego całego wahnięcia była równą:

$$\breve{M_0 M_1} = \breve{M_i M_{i+1}} = \xi_0 \Omega . \tau \cong \xi_0 . \tau . \omega . \sin\alpha \cong 3000 \frac{16}{17.500} \cong 3 \text{ mm}.$$

i dlatego te odchylenia były widoczne dla obserwatorów"

oooooOooooo