

---

**Dominik Machaj\***

## ODPOWIEDŹ DYNAMICZNA WYSOKIEGO BUDYNKU Z TŁUMIKAMI I IZOLATORAMI DRGAŃ NA WYMUSZENIE SEJSMICZNE I WIATROWE

W artykule przedstawiono zagadnienie analizy dynamicznej modelu budynku narażonego na oddziaływania spowodowane trzęsieniem ziemi oraz silnym wiatrem. Omówiono założenia teoretyczne i wyprowadzenie równań ruchu. Pole prędkości wiatru wygenerowano na podstawie algorytmów metody WAWS. Całość obliczeń została przeprowadzona w specjalnie napisanym skrypcie programu MATLAB. Dzięki uniwersalności skryptu możliwe jest zadawanie dowolnych parametrów opisanego w artykule modelu obiektu oraz wprowadzanie elementów tłumiących drgania: izolatorów sejsmicznych oraz tłumików drgań. Zaprezentowano przykładowe analizy i płynące z nich wnioski.

### DYNAMIC RESPONSE OF A TALL BUILDING WITH DAMPERS AND VIBRATION ISOLATORS TO SEISMIC AND WIND LOADS

In this paper the dynamic analysis of a model of a building exposed to earthquakes and strong wind is presented. The theoretical assumptions and the derivation of equations of motion are shown. Wind velocities are generated on a basis of WAWS method. Calculations were carried out in a script in MATLAB, which was written especially for this purpose. Thanks to its generality it is possible to choose any parameters of described model. Moreover, this script allows to apply elements which reduce vibrations: seismic isolation and vibration dampers. Sample analyses and conclusions are presented.

## 1. WSTĘP

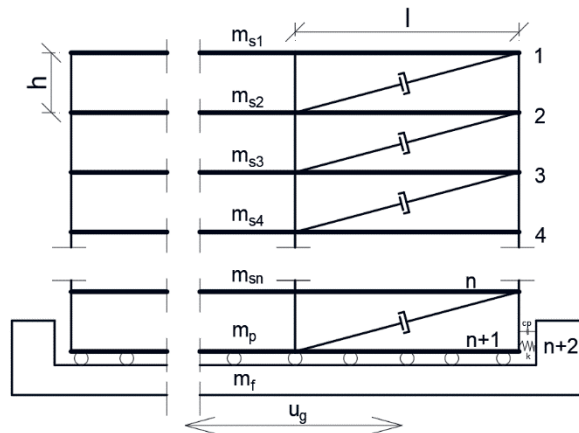
Wpływ oddziaływań dynamicznych na obiekty budowlane to złożony problem inżynierski. Odpowiedź obiektu najczęściej przejawia się w postaci wystąpienia drgań jego elementów. Pojawienie się nieprzewidzianych na etapie projektowania oddziaływań dynamicznych bądź ich wystąpienie w ponadprzeciętnej skali może spowodować katastrofalne skutki. Najbardziej narażone na niszczące efekty oddziaływań dynamicznych są obiekty posadowione na

---

\* AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Inżynierii Łądowej i Gospodarki Zasobami, Koło Naukowe Mechaniki Konstrukcji „Aksjator”.

terenach sejsmicznych. Ponadto duże zniszczenia mogą wywołać wstrząsy parasejsmiczne czy też silny wiatr. Ruch komunikacyjny (przejazdy pociągów, metra, tramwajów) nie jest aż tak niebezpieczny, jednakże może być przyczyną wystąpienia drgań zaburzających komfort użytkowania obiektów. Opracowano szereg metod redukcji negatywnych skutków oddziaływań dynamicznych [1]. Najczęściej stosowane są w tym celu różnego rodzaju tłumiki drgań lub specjalne izolatory (łożyska elastomerowo-olowiane).

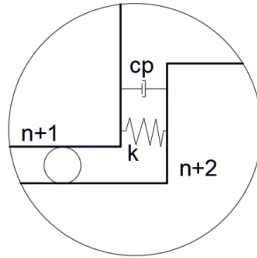
Tematem podjętym w niniejszym artykule jest analiza wpływów wybranych oddziaływań dynamicznych (wymuszenia kinematyczne i siłowe) na przyjęty model obliczeniowy budynku. Odpowiedź obiektu budowlanego wyznacza się za pomocą równań ruchu odpowiadających założonemu modelowi. Z powodu bardzo złożonych zależności między poszczególnymi elementami w konstrukcjach budowlanych nie jest możliwe dokładne odwzorowanie wybranego obiektu. Jednak dzięki uproszczeniom można uzyskać model, który odzwierciedli najważniejsze cechy dynamiczne konstrukcji [2]. Na rysunku 1 przedstawiono schemat przyjętego modelu konstrukcji, a na rysunku 2 – szczegóły połączenia struktury z fundamentem. Analizowano wielonawowy i wielopiętrowy budynek o konstrukcji szkieletowej. Pierwsze podstawowe założenie to jednorodność materiału w całej jego objętości oraz liniowość charakterystyk jego właściwości fizycznych. Następnie uproszczono warunki podporowe i kształt geometryczny układu. Założono, że fundament był utwierdzony w gruncie i w przypadku ruchów gruntu poruszał się tak samo jak on. Natomiast struktura budynku miała w pionie zablokowany przesuw, ale mogła się poruszać w poziomie (sztywne podparcie w pionie, a sprężyste w poziomie). Analizowany był ruch poziomy obiektu [3]. Budynek składał się ze sztywnych stropów oraz utwierdzonych w nich podatnych słupów. Obiekt opisano modelem płaskim.



**Rys. 1.** Schemat przyjętego modelu konstrukcji. Objaśnienia:  $m_{s1-n}$  – masa  $n$ -tego stropu,  $m_p$  – masa podłogi,  $m_f$  – masa fundamentu,  $u_g$  – ruch gruntu,  $c_p$  – zastępcze tłumienie,  $k$  – zastępcza sprężystość połączenia,  $h$  – wysokość kondygnacji,  $l$  – szerokość nawy

Można wybrać dowolną liczbę  $n$  kondygnacji o wysokości  $h$  każda oraz liczbę naw o szerokości  $l$  (rys. 1). Najniższy strop połączony jest z fundamentem za pomocą izolatorów sejsmicznych, które w modelu uwzględniono przez wprowadzenie zastępczej sprężystości ( $k$ ) i zastępczego

tłumienia ( $c_p$ ) (rys. 2) – wynika to z modelowania ich własności mechanicznych na ścinanie. Dzięki takim uproszczeniom możliwa była dyskretyzacja mas w poziomie stropów, co pozwoliło uchwycić dynamiczne właściwości konstrukcji (czyli w tym przypadku ruch poziomy stropów). W ten sposób ograniczono liczbę stopni swobody do niezbędnego minimum, czyli  $n + 2$ . Przyjęta liczba kondygnacji  $n$  dała  $n + 1$  stropów (ostatni strop, czyli „podłoga”  $n + 1$ , był połączony z fundamentem). Natomiast stopień swobody  $n + 2$  musiał być związany z fundamentem.



**Rys. 2.** Schemat zastępczego połączenia struktury z fundamentem.

Objaśnienia:  $c_p$  – zastępcze tłumienie połączenia,  $k$  – zastępcza sprężystość połączenia

Analizowana była odpowiedź dynamiczna obiektu (ruch poziomy stropów) na wymuszenia związane z trzęsieniem ziemi oraz występowaniem silnego wiatru. Oba te zjawiska należą do oddziaływań losowych (stochastycznych). Oddziaływanie sejsmiczne należy do kategorii wymuszeń kinematycznych (są one związane z ruchem fundamentów), a wiatr to oddziaływanie siłowe (pole prędkości wiatru powoduje powstanie pola sił przyłożonych do obiektu). W dalszej części artykułu przedstawiono wyprowadzenia koniecznych wzorów i zaprezentowano wyniki analiz. Obliczenia zostały przeprowadzone w specjalnie napisanym do tego celu skrypcie w programie MATLAB.

## 2. RÓWNANIA RUCHU

Wyprowadzenie równań ruchu było podstawowym zadaniem, jakie należało wykonać w celu przeprowadzenia dalszej analizy dynamicznej konstrukcji. Równania te wyprowadzono, stosując metodę przemieszczeń [3, 4]. Poniżej przedstawiono równanie ruchu układu tłumionego:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{F}_d(\dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{P} \quad (1)$$

gdzie:

- $\mathbf{M}$  – macierz mas wyznaczona po przyjęciu modelu konstrukcji i dyskretyzacji mas,
- $\mathbf{C}$  – macierz tłumienia konstrukcyjnego (tłumienie liniowe),
- $\mathbf{F}_d$  – macierz tłumienia urządzeń tłumiących (tłumienie nieliniowe),
- $\mathbf{K}$  – macierz sztywności konstrukcji wyznaczona według metody przemieszczeń,
- $\mathbf{P}$  – wektor sił zewnętrznych działających na konstrukcję (np. siły pochodzące od wiatru),

$\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}$  – kolejno wektory przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń danych punktów materialnych (kropki oznaczają pochodne po czasie).

Przez tłumienie liniowe/nieliniowe rozumie się charakter zależności macierzy tłumienia od prędkości konstrukcji. Tłumienie konstrukcyjne jest wprost proporcjonalne do prędkości, natomiast zastosowane tłumiki mogą nie być liniowo zależne od prędkości (tu kluczową rolę odgrywa wybrany typ tłumika i jego parametry). Siłę tłumiącą  $F$  powstającą w tłumiku wiśkotycznym w zależności od prędkości przemieszczeń tłoka względem obudowy tłumika  $v_T$  przedstawia poniższy wzór:

$$F(v_T) = c_t \cdot \text{sgn}(v_T) \cdot |v_T|^q \quad (2)$$

Współczynnik tłumienia oznaczono jako  $c_t$ , natomiast współczynnik  $q$ , odpowiadający za nieliniowość tłumika, zwykle należy do przedziału 0,3–1,95 [1]. Wartości te zależą od typu i budowy tłumika. Urządzenia montowane w celu redukcji drgań wywołanych trzęsieniem ziemi mają na ogół wartości  $q$  zbliżone do 0,5. Natomiast tłumiki zakładane w celu ograniczenia efektów parcia wiatru są konstruowane tak, aby zapewnić liniowy charakter tłumienia ( $q \approx 1,0$ ).

Rozmiary macierzy, a więc liczba równań w układzie, zależą od przyjętej liczby punktów materialnych, czyli od dyskretyzacji mas w założonym modelu konstrukcji. Przyjęty model konstrukcji składał się z dwóch części: fundamentu trwale związanego z gruntem i przejmującego powstałe w gruncie drgania (tzw. brzeg) oraz struktury, czyli pozostałych nadziemnych kondygnacji. Połączenie pomiędzy brzegiem a strukturą można było dowolnie zamodelować, zadając w programie jego sztywność i tłumienie. Zabieg ten pozwolił na analizę budynku poddanego oddziaływaniom kinematycznym, gdyż drgania gruntu oddziaływały bezpośrednio tylko na brzeg. Natomiast rodzaj połączenia brzegu ze strukturą umożliwia dokonanie optymalnego wyboru odpowiednich parametrów, tak aby występujące trzęsienie ziemi było dla struktury jak najmniej odczuwalne. W dalszych wyprowadzeniach indeks „ $b$ ” oznacza brzeg, a „ $s$ ” – strukturę.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s(t) \\ \mathbf{x}_b(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

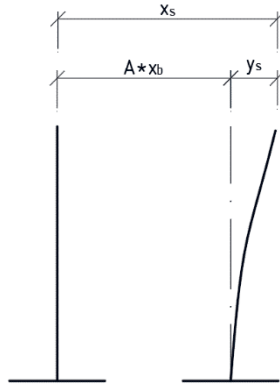
$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sb} \\ \mathbf{M}_{bs} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_s \\ \ddot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ss} & \mathbf{C}_{sb} \\ \mathbf{C}_{bs} & \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_s \\ \dot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ds}(\dot{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{F}_{db}(\dot{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sb} \\ \mathbf{K}_{bs} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_s \\ \mathbf{P}_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_b \end{bmatrix} \quad (4)$$

Powyżej przedstawiono początkowy wzór, w którym wyodrębniono strukturę o dowolnej liczbie kondygnacji oraz brzeg. Przy oddziaływaniu kinematycznym, np. trzęsieniu ziemi, dany jest ruch gruntu  $x_b(t)$  (fundamentu). Szukanymi natomiast wartościami są: ruch struktury  $x_s(t)$  oraz siła reakcji na fundament  $R_b(t)$ .

Bezwzględne przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia struktury to złożenie dwóch ruchów: dynamicznego, związanego z oscylacją drgającego wspornika oraz statycznego, spowodowanego przesuwaniem się brzegu. Matematycznie opisują to równania:

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{y}_s + \mathbf{A}\mathbf{x}_b, \quad \dot{\mathbf{x}}_s = \dot{\mathbf{y}}_s + \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}_b, \quad \ddot{\mathbf{x}}_s = \ddot{\mathbf{y}}_s + \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}}_b \quad (5)$$

Na rysunku 3 wyodrębniono oba ruchy („A” jest wektorem jednostkowym).



Rys. 3. Złożenie ruchu statycznego i dynamicznego wspornika

Macierz mas jest macierzą diagonalną, zatem:

$$\mathbf{M}_{sb} = 0, \mathbf{M}_{bs} = 0.$$

Rozpisując równanie struktury, otrzymuje się:

$$\mathbf{M}_{ss}\ddot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{C}_{ss}\dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{C}_{sb}\dot{\mathbf{x}}_b + \mathbf{F}_{ds}(\dot{\mathbf{x}}_s) + \mathbf{K}_{ss}\mathbf{x}_s + \mathbf{K}_{sb}\mathbf{x}_b = \mathbf{P}_s \quad (6)$$

Następnie biorąc pod uwagę rozbiecie dwóch ruchów, uzyskuje się:

$$\mathbf{M}_{ss}(\ddot{\mathbf{y}}_s + \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}}_b) + \mathbf{C}_{ss}(\dot{\mathbf{y}}_s + \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}_b) + \mathbf{C}_{sb}\dot{\mathbf{x}}_b + \mathbf{F}_{ds}(\dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{K}_{ss}(\mathbf{y}_s + \mathbf{A}\mathbf{x}_b) + \mathbf{K}_{sb}\mathbf{x}_b = \mathbf{P}_s \quad (7)$$

Niewiadome związane z komponentem dynamicznym ruchu należy umieścić z jednej strony równania:

$$\mathbf{M}_{ss}\ddot{\mathbf{y}}_s + \mathbf{C}_{ss}\dot{\mathbf{y}}_s + \mathbf{K}_{ss}\mathbf{y}_s = \mathbf{P}_s - \mathbf{F}_{ds}(\dot{\mathbf{x}}_s) - \mathbf{M}_{ss}\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}}_b - \mathbf{C}_{sb}\dot{\mathbf{x}}_b - \mathbf{C}_{ss}\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_{ss}\mathbf{A}\mathbf{x}_b - \mathbf{K}_{sb}\mathbf{x}_b \quad (8)$$

Poniższy wektor jednostkowy jest tożsamy z:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sb} \quad (9)$$

Natomiast macierz tłumienia konstrukcyjnego przedstawia się następująco:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (10)$$

gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  – współczynniki związane z tłumieniem konstrukcyjnym modelu.

Biorąc pod uwagę zależności (9) oraz (10), wykonuje się kolejne przekształcenia:

$$\mathbf{M}_{ss}\ddot{\mathbf{y}}_s + \mathbf{C}_{ss}\dot{\mathbf{y}}_s + \mathbf{K}_{ss}\mathbf{y}_s = \mathbf{P}_s - \mathbf{F}_{ds}(\dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{M}_{ss}\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}}_b - \beta\mathbf{K}_{sb}\dot{\mathbf{x}}_b - (\alpha\mathbf{M}_{ss} + \beta\mathbf{K}_{ss})\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}_b \quad (11)$$

$$\mathbf{M}_{ss}\ddot{\mathbf{y}}_s + \mathbf{C}_{ss}\dot{\mathbf{y}}_s + \mathbf{K}_{ss}\mathbf{y}_s = \mathbf{P}_s - \mathbf{F}_{ds}(\dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{M}_{ss}\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}}_b - \beta\mathbf{K}_{sb}\dot{\mathbf{x}}_b - \alpha\mathbf{M}_{ss}\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}_b - \beta\mathbf{K}_{ss}\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}_b \quad (12)$$

$$\mathbf{M}_{ss}\ddot{\mathbf{y}}_s + \mathbf{C}_{ss}\dot{\mathbf{y}}_s + \mathbf{K}_{ss}\mathbf{y}_s = \mathbf{P}_s - \mathbf{F}_{ds}(\dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{M}_{ss}\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}}_b - \beta\mathbf{K}_{sb}\dot{\mathbf{x}}_b - \alpha\mathbf{M}_{ss}\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}_b + \beta\mathbf{K}_{ss}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sb}\dot{\mathbf{x}}_b \quad (13)$$

$$\mathbf{M}_{ss}\ddot{\mathbf{y}}_s + \mathbf{C}_{ss}\dot{\mathbf{y}}_s + \mathbf{K}_{ss}\mathbf{y}_s = \mathbf{P}_s - \mathbf{F}_{ds}(\dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{M}_{ss}\mathbf{A}(\ddot{\mathbf{x}}_b - \alpha\dot{\mathbf{x}}_b) \quad (14)$$

Dla ułatwienia zapisuje się:

$$\mathbf{M}_{ss}\mathbf{A} = -\mathbf{M}_{ss}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sb} = -\mathbf{D}_{sb} \quad (15)$$

Stosowana metoda rozwiązania zagadnienia wymaga utworzenia poniższego układu dwóch równań:

$$\mathbf{M}_{ss}\ddot{\mathbf{y}}_s + (\alpha\mathbf{M}_{ss} + \beta\mathbf{K}_{ss})\dot{\mathbf{y}}_s + \mathbf{K}_{ss}\mathbf{y}_s = \mathbf{P}_s - \mathbf{F}_{ds}(\dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{D}_{sb}(\ddot{\mathbf{x}}_b - \alpha\dot{\mathbf{x}}_b) \quad (16)$$

$$\mathbf{M}_{ss}\dot{\mathbf{y}}_s - \mathbf{M}_{ss}\dot{\mathbf{y}}_s = 0 \quad (17)$$

Układ tych równań można zapisać macierzowo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}}_s \\ \dot{\mathbf{y}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ss} & \mathbf{K}_{ss} \\ -\mathbf{M}_{ss} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_s \\ \mathbf{y}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_s \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ds}(\dot{\mathbf{x}}) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{sb}(\ddot{\mathbf{x}}_b - \alpha\dot{\mathbf{x}}_b) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Dzięki zastosowanemu zabiegowi wystarczy rozwiązać układ równań różniczkowych pierwszego rzędu (tzw. równanie stanu, postać Cauchy'ego) zamiast układu drugiego rzędu, gdyż:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}}_s \\ \dot{\mathbf{y}}_s \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{y}}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_s \\ \mathbf{y}_s \end{bmatrix} = \mathbf{y} \quad (19)$$

Po ostatecznym przekształceniu otrzymamy:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{P}_s \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ss} & \mathbf{K}_{ss} \\ -\mathbf{M}_{ss} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ds}(\dot{\mathbf{x}}) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{sb}(\ddot{\mathbf{x}}_b - \alpha\dot{\mathbf{x}}_b) \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (20)$$

Równanie takie można rozwiązać w programie MATLAB np. funkcją „ode45”. Wynikiem są poziome przemieszenia, prędkości i przyspieszenia poszczególnych mas względem brzegu, czyli ruch struktury. Powyższe wyprowadzenie równań ruchu dało podstawy do napisania skryptu w programie MATLAB służącego do obliczania odpowiedzi budynku na wymuszenia kinematyczne. W szybki sposób można również oddziaływania te zmienić na siłowe, np. spowodowane wiatrem. Wtedy ruch brzegu nie występuje (brak wymuszeń kinematycznych, przyspieszenia i prędkości brzegu mają wartości zerowe), natomiast wektor sił nie będzie już zerowy (wektor ten jest zerowy w przypadku, gdy wiatr nie występuje). Wartości wektora sił działających na budynek są ustalane na podstawie numerycznej symulacji pola prędkości wiatru.

### 3. NUMERYCZNA SYMULACJA POLA PRĘDKOŚCI WIATRU

Opis oddziaływania wiatru na konstrukcje jest zagadnieniem bardzo trudnym. Jednak na podstawie charakterystyk probabilistycznych pola prędkości wiatru otrzymanych w trakcie badań w skali naturalnej można utworzyć symulację numeryczną tego pola. Jedną z kilku najprostszych, lecz wykorzystywanych w praktyce metod jest metoda WAWS (*weighted amplitude wave superposition*). Została ona opracowana w latach 70. ubiegłego stulecia i była później rozwijana. Początkowo można było symulować przepływ tylko w jednym punkcie i jednym kierunku, natomiast ostateczna wersja pozwala na symulację pola przepływu w kilku punktach przestrzeni trójwymiarowej. Rozdział ten oraz wyprowadzenie wzorów napisano na podstawie [5].

Do silnych wiatrów zalicza się te, których prędkość przekracza 10 m/s. Dane pomiarowe i symulacyjne na ogół przedstawiają wiatry wiejące z prędkością około 15–25 m/s. Odpowiedź budynku głównie na takie pole prędkości wiatru była przedmiotem analizy w tej pracy, jednak symulacja dopuszczała silniejsze podmuchy (szczególnie dla wyższych wysokości), więc rozważane były również prędkości przekraczające 40 m/s. Zagadnienia związane z wystąpieniem warunków ekstremalnych (tornado, wielkie huragany) nie były rozważane. Symulację pola prędkości wiatru uproszczono do jednego wymiaru i jednego kierunku. Oznacza to, że wiatr wiał stale w kierunku prostopadłym do budynku.

Na początku należało przyjąć widmo gęstości mocy na podstawie badań struktury wiatru oraz założyć pozostałe warunki początkowe. Przyjmuje się, że prędkością odniesienia jest zwykle prędkość średnia 10-minutowa na wysokości 10 m nad terenem. Wynika to stąd, że średnie prędkości wiatrów z czasów uśredniania powyżej 5 min są prawie takie same. Natomiast do końca roku 1975 w Polsce mierzono średnie 2-minutowe, dopiero później zmieniono je na 10-minutowe. Spowodowane chropowatością podłoża pulsacje prędkości wiatru o okresach dłuższych niż 5 min prawie nie występują. Oznacza to, że niezależnie od typu terenu średnia prędkość mierzona w czasie ponad 5 min jest prawie identyczna jak uśredniona z dłuższej chwili czasowej (np. z 10 min). Natomiast prędkość szczytową można określić, uśredniając prędkość np. z 2 lub 5 s.

Od wielu lat zastanawiano się, co lepiej opisuje pionowy profil wiatru: funkcja potęgowa czy logarytmiczna. W dokumencie ISO/TC 98/SC 3/WG 2N 42 E/36 z 1977 roku [6] znaleźć można wzory obu funkcji, natomiast w latach późniejszych przewagę zyskał pogląd, że

skuteczniejsza jest funkcja logarytmiczna podana w normie PN-EN 1991-1-4 2005 [7]. Poniżej przedstawiono wzór logarytmiczny na prędkość średnią 10-minutową w danym terenie:

$$\bar{v}(z) = \bar{v}_A(10) \cdot k_2 \cdot \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (21)$$

gdzie  $\bar{v}_A(10)$  to prędkość średnia 10-minutowa w terenie otwartym, rolniczym na wysokości 10 m nad terenem (jest to wcześniej wspomniana prędkość odniesienia). Wartość wysokości nad terenem  $z$  należy do przedziału od  $H_{\min}$  do  $H_{\max}$ . Prędkość wiatru jest stała poniżej wartości minimalnej i powyżej wartości maksymalnej. W przypadku gdy brak jest lokalnych wyników pomiarów prędkości wiatru, można skorzystać z wzoru:

$$\bar{v}_A(10) = 0,63 \cdot v_g \quad (22)$$

gdzie  $v_g$  to prędkość wiatru gradientowego, niezależna od rodzaju terenu, i stała dla danego obszaru geograficznego. W obliczeniach przyjęto  $v_g = 30$  m/s.

W zależności od rodzaju terenu przyjęto kolejne wartości współczynników w powyższym wzorze logarytmicznym (21). Założono, że analizowany w pracy budynek znajdował się w centrum miasta, a zatem:

- parametr  $z_0 = 1,0$  m,
- współczynnik  $k_2 = 0,27$ ,
- minimalna wysokość  $H_{\min} = 15$  m,
- maksymalna wysokość  $H_{\max} = 200$  m.

Wspomniane wcześniej gęstości widmowe mocy prędkości silnego wiatru to wzory empiryczne opracowane przez różnych autorów w trakcie ich badań nad strukturą silnego wiatru. Dlatego też funkcje te są dosyć różnorodne. Wpływ na to miały warunki podczas prowadzenia pomiarów. Do najbardziej popularnych gęstości widmowych mocy należą (w nawiasach podano daty ich opracowania): spektrum Davenporta (1961), spektrum Harrisa (1968, 1970), spektrum Kaimala (1972), spektrum Simiu (1974, 1977), uogólnione spektrum von Kármána (1982). W tej symulacji wykorzystano ostatnie z wymienionych spektrum, którego wzór (przy składowej wzdłuż średniego kierunku wiatru) przedstawiono poniżej:

$$G(z, f) = \frac{4 \cdot m}{(1 + 70,7 \cdot m^2)^{5/6}} \quad (23)$$

Widmo gęstości mocy  $G$  jest zależne od wysokości nad terenem  $z$  oraz częstotliwości wiatru  $f$ . Natomiast wartości kolejnych współczynników w powyższym wzorze to:

$$m = \frac{L \cdot f}{\bar{v}(z)} \quad (24)$$

$$L = 300 \cdot \left(\frac{z}{350}\right)^r \quad (25)$$

$$r = 0,437 + 0,153 \log z_0 \quad (26)$$

Po przyjęciu wybranego widma można wyznaczyć macierz  $\mathbf{G}$  wymaganą w metodzie WAWS. Poniżej przedstawiono wzór na dany wyraz tej macierzy:

$$G_{lk}(z_l, z_k, f) = \sqrt{G(z_l, f) \cdot G(z_k, f)} \cdot e^{-(\alpha_{lk} + i\varphi_{lk})} \quad (27)$$

Wartości spektrum pod pierwiastkiem przyjmowane są dla kondygnacji  $l$  oraz  $k$  budynku i dla danej częstotliwości wiatru. Natomiast  $\alpha_{lk}$  to koherencja pionowa, a  $\varphi_{lk}$  – faza wzajemnej gęstości mocy w osi pionowej:

$$\alpha_{lk}(z_l, z_k, f) = \frac{2 \cdot f \cdot C_z \cdot |z_l - z_k|}{\bar{v}(z_l) + \bar{v}(z_k)} \quad (28)$$

$$\varphi_{lk}(z_l, z_k, f) = \varphi_0 \cdot \frac{2 \cdot f \cdot (z_l - z_k)}{\bar{v}(z_l) + \bar{v}(z_k)} \quad (29)$$

Można przyjąć następujące wartości wymaganego współczynnika koherencji pionowej  $C_z = 10$  [8] oraz współczynnika pionowej gęstości widmowej mocy  $\varphi_0 = 11$ . Przechodząc do ostatecznego wzoru na wektor prędkości wiatru w czasie, należy wybrać dolny ( $f_0$ ) i górny ( $f_1$ ) zakres częstotliwości wiatru. Najczęściej są to wartości z zakresu od 0,001 Hz do 1–3 Hz. Można je dobrać na podstawie półlogarytmicznego wykresu gęstości widmowej mocy prędkości silnego wiatru. Różnicę częstotliwości  $\Delta f = f_1 - f_0$  dzieli się na  $N$  przedziałów, które będą potrzebne do dalszych obliczeń. Na ogół jest to liczba z zakresu 20–1000. Następnie należy wyznaczyć kolejne częstotliwości, dla których będą obliczane macierze  $\mathbf{G}$ :

$$f_i = f_0 + \frac{\Delta f}{2N} + i \frac{\Delta f}{N} \quad (30)$$

W powyższym wzorze  $i$  to kolejne liczby od 0 do  $N - 1$ . Zatem otrzymuje się tyle częstotliwości, ile założonych przedziałów widma o szerokości  $\Delta f$ . Dla całego zbioru częstotliwości  $f_i$  wyznacza się macierze  $\mathbf{G}$  zgodnie z wypisanymi wcześniej zależnościami. Kolejnym krokiem w opisywanej metodzie symulacji pola prędkości wiatru jest wyznaczenie macierzy  $\mathbf{H}$ . Zachodzi poniższa zależność:

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^T = 2\Delta f\mathbf{G} \quad (31)$$

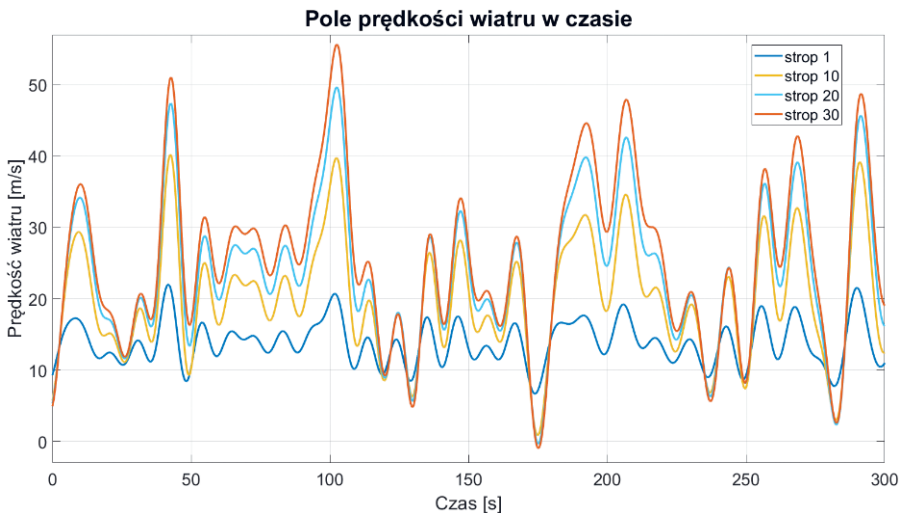
Jest to rozłożenie macierzy wzajemnych gęstości widmowych mocy  $2\Delta f\mathbf{G}$  na dwie trójkątne macierze hermitowskie – tu macierz  $\mathbf{H}$  jest macierzą trójkątną dolną. Ostateczny wzór na pole prędkości wiatru w zależności od czasu  $t$  przedstawia się następująco:

$$v_n(t) = \bar{v}(z_n) + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^n |H_{nj}(f_i)| \cos[2\pi(f_i + \delta f_i)(t + t_{nj}) + \varphi_i + \Phi_{nj}(f_i)] \quad (32)$$

Jest to wektor o długości takiej jak przyjęta liczba kondygnacji  $n$ . Sumy przebiegają po liczbie przedziałów widma oraz po liczbie kondygnacji. Wartość  $\delta f_i$  to losowa liczba z przedziału  $\left[-\frac{\Delta f}{2N\cdot s}; +\frac{\Delta f}{2N\cdot s}\right]$ , gdzie  $s$  należy do przedziału 10–50, a  $\varphi_i$  to losowa wartość z przedziału  $[0; 2\pi)$ . Elementy macierzy  $\mathbf{H}$  przedstawić należy w postaci wykładniczej, gdzie  $|H_{nj}(f_i)|$  oraz  $\Phi_{nj}(f_i)$  to odpowiednio moduły i fazy wyrazów zespolonych. Natomiast  $t_{nj}$  oznacza czas przepływu powietrza wzdłuż średniego kierunku wiatru między dwoma punktami. Wartość tę wyznacza się ze wzoru:

$$t_{nj} = \frac{x_n}{\bar{v}(z_n)} - \frac{x_j}{\bar{v}(z_j)} \quad (33)$$

Wartości w mianownikach to wspomniane wcześniej prędkości średnie 10-minutowe (wzór (21)) dla punktów na wysokościach  $z_n$  oraz  $z_j$ , a  $x_n$  oraz  $x_j$  to wysokości tych punktów. W przypadku gdy  $x_n = x_j$ , wartość  $t_{nj} = 0$ . W ostatecznym rozrachunku otrzymano wektor prędkości wiatru dla zadanego czasu  $t$ . Poszczególne elementy tego wektora to prędkości dla kolejnych kondygnacji budynku, dlatego należało ustalić ich liczbę oraz wysokość. Poniżej (rys. 4) przedstawiono wygenerowane na podstawie opisanego algorytmu pole prędkości wiatru, jakie zostało zastosowane w analizach. Przyjęto, że czas trwania symulacji wynosi 5 min (300 s). Wiatr w porywach na najwyższych kondygnacjach przekraczał nawet 50 m/s, a przeciętnie jego prędkość oscylowała w granicach 20–30 m/s.



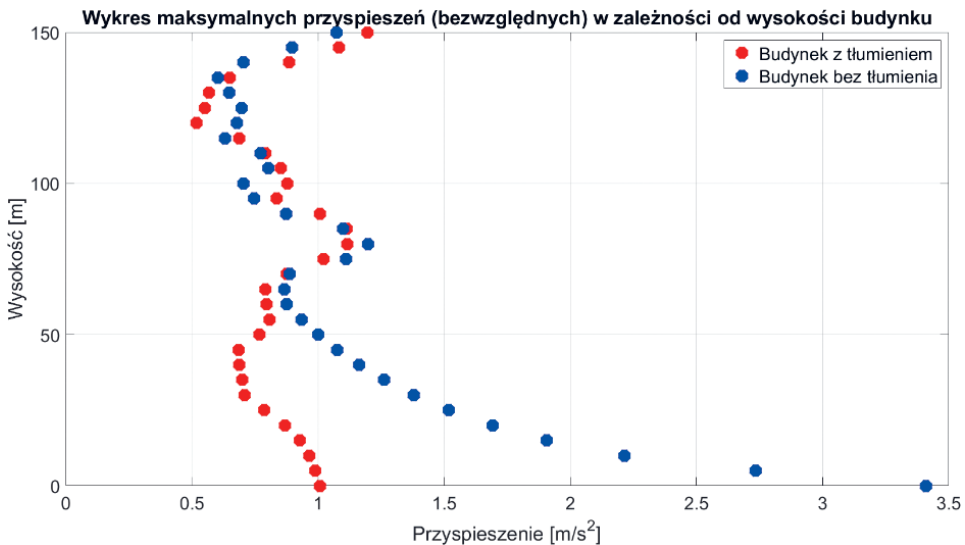
Rys. 4. Wykres wygenerowanego w programie MATLAB pola prędkości wiatru w czasie

## 4. WYNIKI

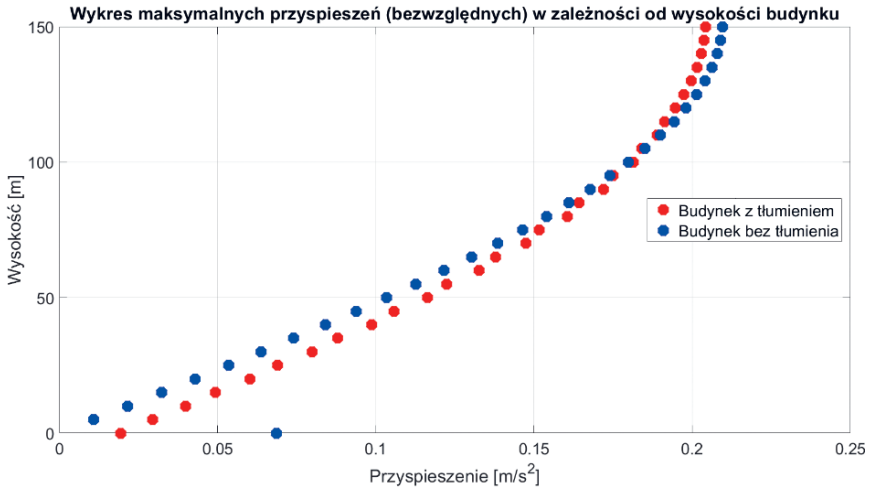
Analizie poddano budynek mający 30 kondygnacji o wysokości 5 m każda oraz 5 naw, których długość wynosiła po 10 m (por. rys. 1). Przyjęto, że odległość pomiędzy ramami również wyniosła 10 m. Słupy miały przekrój kwadratowy o boku 0,5 m i wykonane były

z materiału (żelbetu) o module Younga równym 30 GPa. Ciężar właściwy żelbetu przyjęto jako równy 2500 kg/m<sup>3</sup>. Biorąc pod uwagę wymiary stropu i powyższy ciężar właściwy, przyjęto, że masa stropu wyniosła 650 t. Ponadto dla najniższego stropu założono, że jego masa to pięciokrotność powyższej wartości, a masa fundamentu – dziesięciokrotność. Przyjęto współczynniki tłumienia konstrukcyjnego wynoszące  $\alpha = 0,0217$  oraz  $\beta = 0,0197$ . W przypadku tzw. stanu podstawowego, gdzie nie występowały tłumiki drgań ani izolatory sejsmiczne, założono zastępczą sztywność izolatorów jako  $10^{13}$  N/m, dzięki czemu odwzorowano sztywne połączenie fundamentu z najniższym stropem (drżania fundamentu przenosiły się bezpośrednio na najniższy strop). Nie występowało w tym przypadku tłumienie przy połączeniu struktury z fundamentem ani tłumienie wiskotycznych tłumików drgań. Ponadto analizie poddano budynek z przykładową izolacją drgań (przypadek 1) oraz z tłumikami drgań rozmieszczonymi na 15 najniższych kondygnacjach (przypadek 2). Na zakończenie przedstawiono połączenie wybranej izolacji i schematu tłumików (przypadek 3). Opisane modele poddano obciążeniu sejsmicznemu (czasowy przebieg poziomych drgań gruntów zanotowany podczas trzęsienia ziemi El Centro 1940) oraz wiatrowemu (na podstawie wygenerowanego pola prędkości wiatru). Prezentację wyników ograniczono do przedstawienia na pionowych profilach maksymalnych przyspieszeń poszczególnych stropów. Kolor niebieski odpowiadał stanowi podstawowemu, a czerwony oznaczał wybrany przypadek tłumienia.

Na podstawie przypadku 1 (rys. 5, 6) można zauważyć, że w warunkach trzęsienia ziemi izolacja sejsmiczna skutecznie zmniejszyła maksymalne przyspieszenia powstające w stropach do około połowy wysokości obiektu. Natomiast sposób ten nie wpłynął pozytywnie na budynek narażony na działanie silnego wiatru (wartości pozostały na bardzo podobnym poziomie).

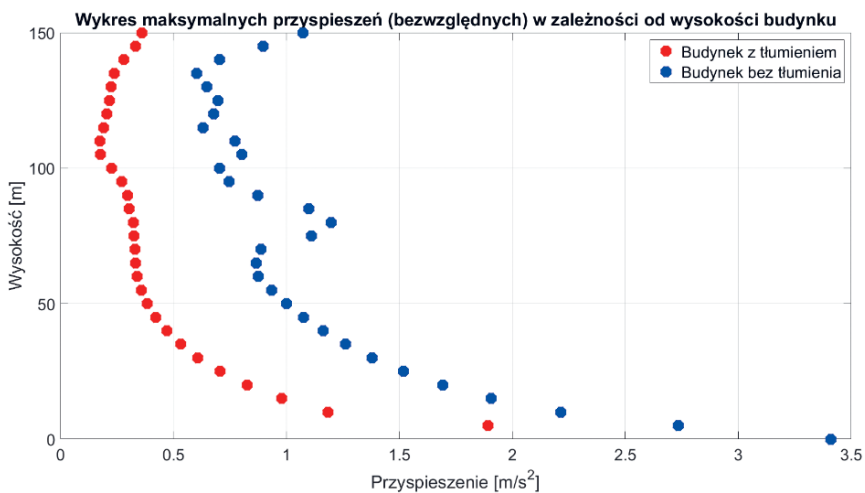


**Rys. 5.** Profil wysokościowy maksymalnych przyspieszeń stropów wygenerowany w programie MATLAB (obciążenie sejsmiczne, budynek z izolatorami sejsmicznymi)

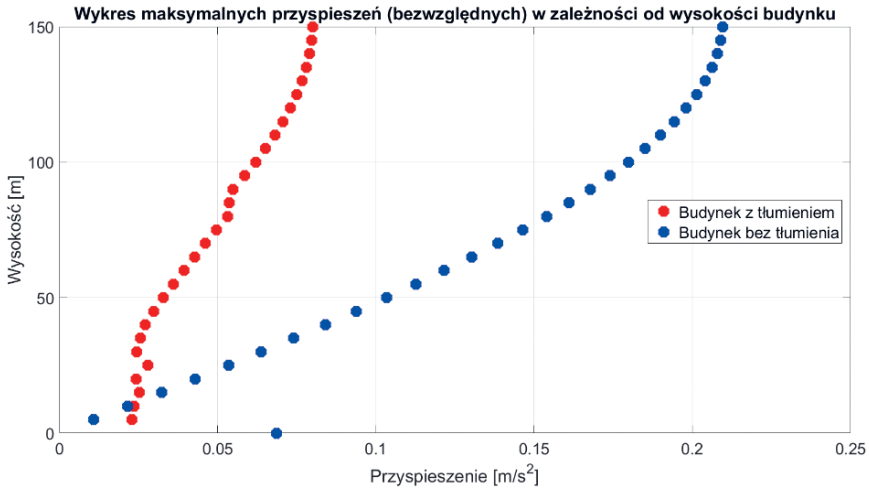


**Rys. 6.** Profil wysokościowy maksymalnych przyspieszeń stropów wygenerowany w programie MATLAB (obciążenie wiatrowe, budynek z izolatorami sejsmicznymi)

Po przeanalizowaniu wykresów z przypadku 2 (rys. 7, 8), gdzie tłumiki drgań były rozmieszczone równomiernie na 15 najniższych kondygnacjach, można stwierdzić, że sposób ten skutecznie zmniejszył drgania spowodowane oboma oddziaływaniami. Co prawda najniższe kondygnacje budynku narażonego na działanie trzęsienia ziemi nie były należycie tłumione ze względu na sztywne połączenie struktury z fundamentem (i dlatego konieczne było stosowanie izolacji sejsmicznej), jednak już na wyższych kondygnacjach wartości spadły dość znacznie. W przypadku oddziaływania silnego wiatru pozytywne efekty były jeszcze bardziej widoczne.

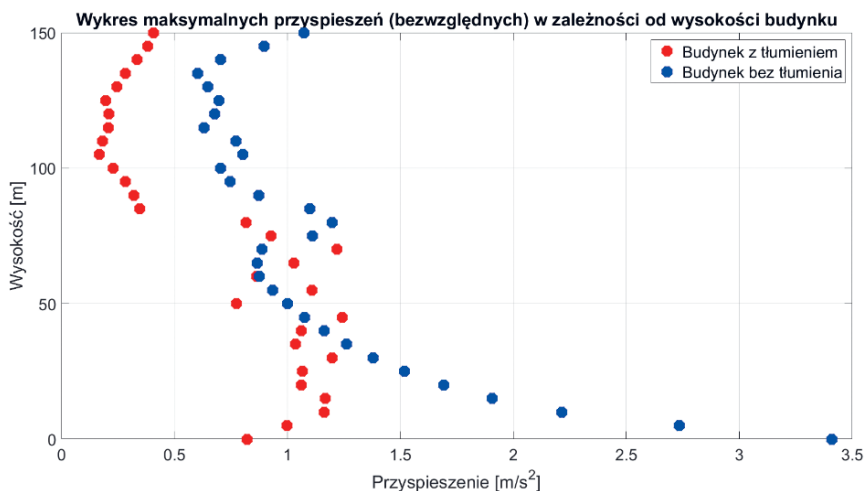


**Rys. 7.** Profil wysokościowy maksymalnych przyspieszeń stropów wygenerowany w programie MATLAB (obciążenie sejsmiczne, budynek z tłumikami drgań)

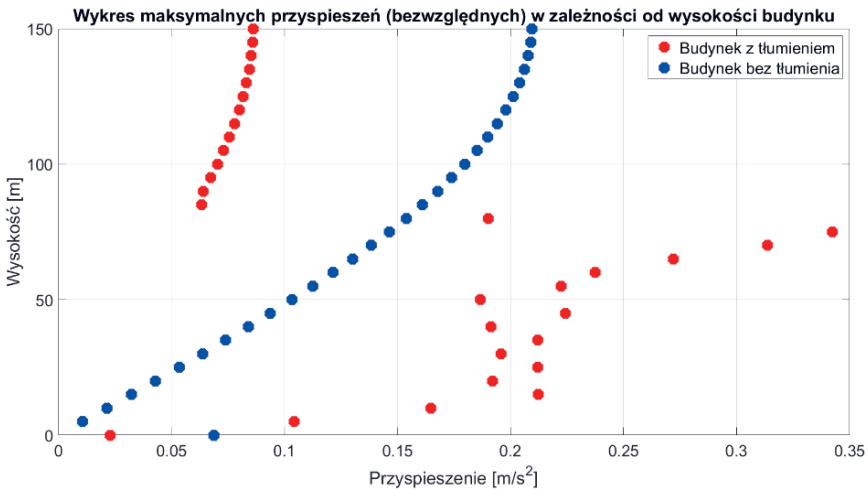


Rys. 8. Profil wysokościowy maksymalnych przyspieszeń stropów wygenerowany w programie MATLAB (obciążenie wiatrowe, budynek z tłumikami drgań)

W analizowanym przypadku 3 połączono oba wcześniejsze sposoby tłumienia. Analogiczne wykresy przedstawiono na rysunkach 9 i 10. Połączenie to okazało się lepsze w odniesieniu do oddziaływań powstałych na skutek trzęsienia ziemi, gdyż wytłumiono również najniższe kondygnacje, a wzrosty maksymalnych wartości przyspieszeń stropów nastąpiły tylko dla kilku kondygnacji w środku wysokości. W przypadku obciążenia wiatrem współdziałanie tłumików i izolacji spowodowało znaczne skoki przyspieszeń. Jednak wartości te i tak były znacznie mniejsze niż te powodowane trzęsieniem ziemi.



Rys. 9. Profil wysokościowy maksymalnych przyspieszeń stropów wygenerowany w programie MATLAB (obciążenie sejsmiczne, oba przypadki tłumienia)



Rys. 10. Profil wysokościowy maksymalnych przyspieszeń stropów wygenerowany w programie MATLAB (obciążenie wiatrowe, oba przypadki tłumienia)

## 5. WNIOSKI

Zagadnienie opisywane w tej pracy jest bardzo złożone. Wykonanie analiz w takiej formie było możliwe dzięki przyjęciu do obliczeń uproszczonego modelu konstrukcji. Pozwolił on na zaobserwowanie pewnych ogólnych zmian zachodzących w odpowiedzi budynku na zadane obciążenia w odniesieniu do zastosowanego sposobu tłumienia. Gdyby rozważany obiekt istniał, to wartości rzeczywiste byłyby nieco różne od wyników otrzymanych na podstawie przyjętego modelu. Wpływ na to ma wiele czynników, np. inne rozłożenie mas w rzeczywistości, niedokładności w przyjętych parametrach materiałowych, wpływ pominiętych w obliczeniach ścian wypełniających itp. Jednak metodologia taka jest powszechnie stosowana w tego typu zagadnieniach [3, 4]. Po wykonaniu analiz widać, jak ważną rolę odgrywa odpowiednie projektowanie obiektów poddanych oddziaływaniom ekstremalnym. Budynki i budowle posadowione na terenach sejsmicznych lub wystawione na działanie silnego wiatru muszą spełniać wyższe warunki bezpieczeństwa.

Przeprowadzone w tym artykule analizy pozwoliły na zaobserwowanie pewnych tendencji. Izolacja to rozwiązanie bardzo skuteczne w przypadku drgań gruntu, gdyż „odcina” je od obiektu. W warunkach działania wiatru nie jest to jednak metoda odpowiednia, ponieważ pole sił może przy niskiej sztywności połączenia rozkołysać budynek. W tym przypadku wskazane jest zastosowanie samych tłumików drgań. Ta metoda nie jest z kolei odpowiednia w odniesieniu do oddziaływań spowodowanych trzęsieniem ziemi, gdyż nie są wtedy tłumione najniższe kondygnacje i konieczne jest współdziałanie obu wspomnianych metod. Jak widać, zadanie ograniczenia negatywnych wpływów zarówno trzęsień ziemi, jak i silnego wiatru jest skomplikowane, ponieważ charakter wymuszenia obu oddziaływań jest odmienny. Korzystne sposoby ograniczenia drgań powodowanych trzęsieniami ziemi mogą wzmacniać odpowiedź budynku wymuszaną wiatrem. Dlatego w dalszej perspektywie będą rozważane zagadnienia optymalizacyjne pozwalające osiągnąć kompromis między tymi dwoma przeciwstawnymi efektami.

## LITERATURA

- [1] Lewandowski R., *Redukcja drgań konstrukcji budowlanych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2014.
- [2] Rucka M., Wilde K., *Dynamika budowli z przykładami w środowisku MATLAB®*, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2019.
- [3] Soong T.T., Dargush G.F., *Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering*, John Wiley & Sons, Chichester – New York – Weinheim – Brisbane – Singapore – Toronto 1997.
- [4] Xu Y.-L., He J., *Smart Civil Structures*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton – London – New York 2017.
- [5] Flaga A., *Inżynieria wiatrowa: podstawy i zastosowania*, Wydawnictwo „Arkady”, Warszawa 2008.
- [6] ISO/TC 98/SC 3/WG 2N 42 E/36: *Wind Loads on Structures*. Draft Proposal for an ISO Standard, 1977.
- [7] PN-EN 1991-1-4:2005, *Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje – Część 1-4: Oddziaływania ogólne – Oddziaływania wiatru*.
- [8] Borri C., *Generation Procedures of Stationary Random Processes Simulating Wind Time Series*, Sezione Strutture, 11/88, Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale – Università degli Studi di Firenze, Firenze 1988.

