

Lidia Dutkiewicz*, Edyta Kucharska*

Algorytmy wyznaczania dróg transportu w problemie szeregowania zadań z zasobami zależnymi od stanu

1. Wprowadzenie

W artykule przedstawiony zostanie specyficzny problem szeregowania zadań, w którym występuje konieczność transportu maszyn. W problemie tym należy wykonać pewien zbiór zadań z nieprzekraczalnymi terminami ich zakończenia. Zadanie nie polega jednak na zrealizowaniu operacji technologicznej, lecz na wykonaniu (wydrążeniu) przez maszynę odcinka drogi. Wykonana droga staje się nowym zasobem, tj. drogą niezbędną dla transportu maszyn realizujących pozostałe zadania. W związku z tym zasoby, niezbędne do realizacji zadań, są zmienne i ich dostępność zależy od aktualnego stanu systemu. W rozpatrywanym problemie uwzględniona została możliwość oczekiwania maszyn na udostępnienie zasobu. Możliwość ta ma wpływ na wyznaczanie dróg transportu maszyn.

Spośród całego zbioru dróg, którymi może być transportowana maszyna, można wyróżnić dwie charakterystyczne drogi:

- 1) najkrótszą drogę transportową,
- 2) najszybszą drogę transportową.

Rozwiązanie problemu polega na wyznaczeniu takiego ciągu decyzji szeregującego zadania, które minimalizuje całkowity koszt realizacji zadań z zachowaniem wymaganych terminów ukończenia zadań. Jest to problem należący do klasy problemów NP-trudnych [2]. Czas transportu maszyny i dostępność zasobów nie są znane *a priori*, dlatego też algorytm rozwiązujący optymalizujący ten problem musi być oparty na symulacji procesu [4].

2. Opis problemu

Przykładem rzeczywistego procesu powyższego problemu szeregowania jest realizacja prac przygotowawczych w kopalniach podziemnych. Prace te wykonywane są przed przystąpieniem do wydobycia surowców i polegają na wydrążeniu sieci wyrobisk koryta-

* Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

rzowych (nazywanych dalej również chodnikami). Chodniki te umożliwiają późniejszą eksploatację pól.

Sieć chodników reprezentowana jest poprzez nieskierowany graf

$$G = (W, C),$$

gdzie:

- W – zbiór wierzchołków grafu, reprezentujących miejsca krzyżowania się chodników,
- C – zbiór krawędzi grafu, reprezentujących chodniki.

Dla każdego z chodników określone są następujące parametry: numer c , długość $dl(c)$ oraz numery dwóch skrzyżowań, z którymi chodnik się łączy. W dalszej części przez $w_1(c)$ oznaczać będziemy ten węzeł chodnika c , w którym maszyna rozpoczyna jego drażenie, zaś $w_2(c)$ węzeł, w którym ukończy drażenie. Ponadto dla niektórych chodników narzucony jest nieprzekraczalny czas, w którym drażenie chodnika musi być ukończone oznaczony jako $limit(c)$.

Drażenie chodników wykonywane jest przy wykorzystaniu technologii opartych na dwóch różnych typach maszyn. Różnią się one znacznie prędkością drażenia oraz kosztami eksploatacji, a także sposobem transportu. Zbiór maszyn pierwszej technologii M_I (maszyny o większej prędkości drażenia i większym koszcie) oraz zbiór maszyn drugiej technologii M_{II} (maszyny o mniejszej prędkości drażenia i mniejszym koszcie) tworzą zbiór dostępnych zasobów produkcyjnych M .

Dla obu technologii znane są następujące parametry pracy:

- liczba maszyn reprezentująca daną technologię,
- prędkość drażenia chodnika maszyną m , $V_{dr}(m)$,
- koszt drażenia jednostki długości chodnika, $K_{dr}(m)$.

W przypadku maszyn pierwszego typu (kombajny) konieczne jest ich przetransportowanie, jeśli znajdują się w innym węźle niż ten, z którego mają rozpocząć drażenie kolejnego chodnika. Dodatkowo podana jest więc dla nich prędkość transportu $V_{tr}(m)$ oraz koszt transportu na jednostkę długości $K_{tr}(m)$. Z powodu bardzo małych wielkości, czas i koszt transportu w przypadku maszyn drugiego typu jest zaniedbywany i przyjmowany jako równy 0. Transport maszyny może odbywać się tylko chodnikami, które zostały już wydrażone.

W rozważanym modelu przyjęto następujące ograniczenia technologiczne i czasowe sposobu wykonywania prac przygotowawczych: prace rozpoczynają się w czasie $t_0 = 0$ w węźle nazwanym początkowym w_0 , a kończą w momencie wydrażenia wszystkich chodników. Chodnik może być drażony tylko przez jedną maszynę dowolnej technologii. Podjęte prace w chodniku realizowane są bez przerw. Chodnik, w którym zakończono drażenie, może służyć jako droga transportowa. Przyjęto uproszczenie, iż w chodniku możliwy jest transport kilku maszyn jednocześnie w obie strony. Nie uwzględnia się możliwości wystąpienia awarii maszyn oraz nie są planowane i przeprowadzane remonty maszyn w czasie trwania prac. Cała sieć chodników znajduje się w płaszczyźnie poziomej, prędkość drażenia i prędkość transportu są więc stałe. Nie jest rozpatrywana również możliwość wystąpienia różnicy w twardości skał poszczególnych chodników.

Prace muszą być zaplanowane w taki sposób, aby koszt całkowity był minimalny oraz dotrzymane zostały terminy ukończenia pewnych chodników.

3. Transport maszyn

W przedstawionym zagadnieniu niezwykle istotną rolę odgrywa transport maszyn. Konieczność transportu zachodzi wtedy, gdy maszyna ma rozpocząć drażnienie określonego chodnika, a aktualnie znajduje się w innym miejscu niż jeden z końców tego chodnika. Jak już zostało to wcześniej zaznaczone, transport maszyny może odbywać się tylko chodnikami wcześniej ukończonymi.

Dokładny model rozważanego zagadnienia, należący do klasy modeli algebraiczno-logicznych, zaprezentowany został w [5]. W modelu tym stan systemu określany jest jako $s = (x, t)$, gdzie x to stan właściwy procesu, a t – czas bieżący. Droga, którą transportuje się maszynę, wyznaczana jest w momencie podjęcia decyzji o drażeniu danego chodnika i później nie jest zmieniana. Liczba potencjalnych dróg, którymi może być transportowana maszyna, zależy więc od aktualnego stanu systemu. Im bardziej zaawansowane są prace, tym liczba wydrążonych chodników wzrasta i jednocześnie znacznie zwiększa się liczba możliwych dróg, które mogą posłużyć do transportu maszyny.

W rozważanym problemie przyjmujemy, że wyznaczając drogę transportu dla maszyny, oprócz aktualnie wydrążonych chodników bierzemy pod uwagę pewne dodatkowe chodniki, których terminy ukończenia są znane. Dla tych chodników podjęto bowiem już wcześniej decyzję o drażeniu, ale decyzja ta nie została jeszcze całkowicie zrealizowana. Zatem nie wszystkie chodniki, którymi odbywa się transport maszyny, muszą być wydrążone już w momencie wyznaczania drogi dla tego transportu.

W związku z powyższym, konieczne jest uwzględnienie możliwości oczekiwania maszyny w sytuacji, kiedy nie wszystkie chodniki na wyznaczonej dla niej trasie transportu są ukończone. Mamy tu do czynienia z oczekiwaniem maszyny na udostępnienie zasobu. Należy zaznaczyć, iż wprowadzenie możliwości oczekiwania pozwala na rozpatrywanie większej ilości potencjalnych dróg transportu dla maszyny. Drogi uwzględniające dodatkowe chodniki mogą okazać się lepsze niż drogi, które zawierają tylko chodniki ukończone do danej chwili.

Definicja drogi transportowej dla rozważanego zagadnienia jest następująca:

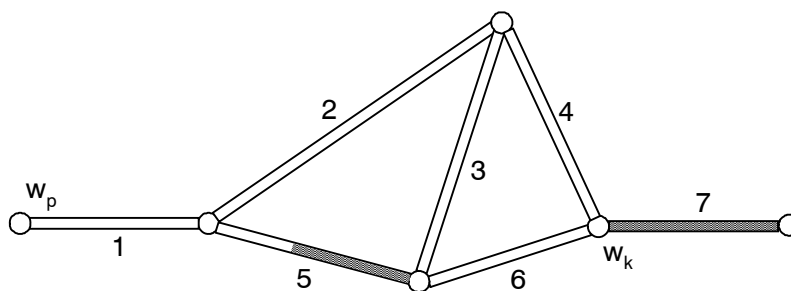
Definicja 1. Drogą transportową dla maszyny m w stanie s nazywamy drogę w sieci chodników łączącą węzeł, w którym znajduje się maszyna m w jednym z węzłów chodnika c , który ta maszyna ma drażyć. Droga ta składa się z takich chodników, które w danym stanie są już ukończone lub chodników, dla których decyzja o drażeniu jest w trakcie realizacji i czas ich ukończenia jest znany.

Długość tej drogi równa się sumie długości chodników wchodzących w jej skład.

W danym stanie s istnieje bardzo duża ilość możliwych dróg transportowych. Ze względu na kryterium kosztowe w rozpatrywanym problemie ważne jest, żeby wybrać możliwie najtańszą drogę. Taką najtańszą drogą jest droga o najmniejszej długości, gdyż koszt transportu zależy od czasu przeznaczonego na przejazd maszyny tą drogą. Dzięki temu, że rozpatrujemy chodniki, które są aktualnie w trakcie realizacji, mamy szansę na znalezienie krótszej drogi niż tej złożonej tylko z chodników ukończonych do chwili wyznaczania drogi transportowej. Droga transportowa o najmniejszej długości nie zawsze jest

jednak jednocześnie drogą, którą transport odbywa się w najkrótszym czasie. Należy podkreślić, że czas poświęcony na transport jest istotny ze względu na konieczność spełnienia ustalonych dla tego problemu ograniczeń czasowych. Wybranie takiej drogi transportowej, dzięki której maszyna w najkrótszym czasie dotrze na miejsce, zwiększa szansę na znalezienie rozwiązania dopuszczalnego.

Podajmy przykład wyznaczania najlepszej transportowej dla maszyny. Na rysunku 1 przedstawiony jest fragment sieci chodników, w którym: chodniki 1, 2, 3, 4, 6 są wydrążone, chodnik 5 jest aktualnie drążony, a chodnik 7 jest niewydrążony. Fragmenty niewydrążone oznaczone są ciemnym kolorem. W węźle w_p znajduje się maszyna m , która ma drążyć chodnik 7. W związku z tym, maszyna ta musi zostać przetransportowana do węzła w_k . Jeżeli rozpatrywalibyśmy tylko chodniki ukończone do danej chwili, to istnieją dwie drogi transportowe: (1, 2, 3, 6) i (1, 2, 4). W tym przypadku drogą najkrótszą jest droga (1, 2, 4). Możliwość oczekiwania maszyny na ukończenie chodnika 5 pozwala nam na wybranie jeszcze jednej drogi transportowej, złożonej z chodników: 1, 5 i 6. Droga ta jest krótsza od wcześniej wyznaczonej drogi (1, 2, 4). Czas oczekiwania na ukończenie chodnika 5 może być jednak bardzo długi. W takiej sytuacji maszyna szybciej dotrze do węzła w_k , jeżeli będzie transportowana dłuższą drogą (1, 2, 3, 5).



Rys. 1. Wyznaczanie najlepszej drogi transportowej dla maszyny

Dla rozważanego zagadnienia przyjmujemy następujące definicje najkrótszej drogi transportowej oraz najszybszej drogi transportowej:

Definicja 2. Najkrótszą drogą transportową dla maszyny m w stanie $s = (x, t)$ nazywamy tę spośród wszystkich dróg transportowych, dla której suma długości chodników wchodzących w jej skład jest najmniejsza.

Definicja 3. Najszybszą drogą transportową dla maszyny m w stanie $s = (x, t)$ nazywamy tę spośród wszystkich dróg transportowych, którą maszyna m pokona w najkrótszym czasie, przy uwzględnieniu oczekiwania maszyny na ukończenie chodników wchodzących w jej skład.

Przy podejmowaniu decyzji o drążeniu chodnika należy zawsze określić, jaką drogą ma być przeprowadzony ewentualny transport – najkrótszą czy najszybszą. W przypadku

gdy wybrana droga wymaga oczekiwania maszyny, przyjmujemy, że maszyna ta najpierw czeka przez stosowny odcinek czasu, a następnie przejeżdża całą trasę bez zatrzymywania. Po dotarciu do wyznaczonego węzła maszyna od razu rozpoczyna drażnienie.

4. Algorytmy

Do wyznaczania zarówno najkrótszej drogi transportowej, jak i najszybszej drogi transportowej dla ustalonej maszyny m nie można wykorzystać znanych algorytmów szukania najoszczędniejszej drogi w grafie (np. Dijkstry czy Forda). W naszym przypadku bowiem oprócz długości takiej drogi potrzebujemy informacji, czy maszyna będzie musiała oczekiwać na ukończenie pewnych chodników, a jeśli tak, to jak długo. W związku z tym, zostały skonstruowane algorytmy szukania odpowiednio najkrótszej i najszybszej drogi w grafie, w którym niektóre krawędzie są dostępne po pewnym czasie. Algorytmy te oparte są na algorytmie Dijkstry.

Aby zastosować przedstawione poniżej algorytmy, należy na podstawie grafu G reprezentującego strukturę połączeń sieci chodników zbudować graf G' . Graf ten jest podgrafem częściowym grafu G . Krawędziami grafu G' są te krawędzie grafu G , które odpowiadają chodnikom w danym stanie już ukończonym, lub chodnikom, dla których decyzja o drażeniu jest w trakcie realizacji i czas ich ukończenia jest znany. Wierzchołkami grafu G' są wszystkie te wierzchołki grafu G , które są przyległe do krawędzi $c_{ij} \in C'$ (i i j to odpowiednio wierzchołki przyległe krawędzi c).

Każdej krawędzi $c_{ij} \in C'$ przyporządkowujemy wagę, której wartość równa jest czasowi przejazdu maszyny m chodnikiem odpowiadającym tej krawędzi. Wagę tę oznaczamy $\bar{c}_{ij}$.

Ponadto każda krawędź ma przyporządkowaną liczbę rzeczywistą dodatnią $\tau(c_{ij})$, która określa czas ukończenia drażenia odpowiadającego jej chodnika, pomniejszony o wartość czasu t dla aktualnego stanu procesu $s = (x, t)$.

4.1. Najkrótsza droga transportowa

Poniżej przedstawiony jest algorytm wyznaczający najkrótszą drogę pomiędzy podanymi wierzchołkami: początkowym w_p i końcowym w_k w grafie G' .

Każdemu wierzchołkowi w grafu G' przyporządkowujemy trzy cechy:

- 1) cechę tymczasową $r(w)$,
- 2) cechę stałą $R(w)$,
- 3) cechę pomocniczą $\theta(w)$.

Cechę tymczasową wierzchołka możemy interpretować jako czas przejazdu rozpatrywanej maszyny aktualnie znalezionej najkrótszą drogą z węzła początkowego do węzła reprezentowanego przez ten wierzchołek, natomiast cechę stałą wierzchołka jako już ustalony czas przejazdu najkrótszą drogą. Cechę pomocniczą można określić jako „oczekiwanie”, czyli całkowity czas, jaki maszyna poświęciła na czekanie w drodze do tego węzła.

Kroki algorytmu są następujące:

Krok 1.

Cechom wierzchołka początkowego w_p : stałej $R(w_p)$ oraz tymczasowej $r(w_p)$ nadajemy wartość równą 0. Początkowe wartości cech stałych i tymczasowych pozostałych wierzchołków $w \in W'$ przyjmujemy równe nieskończoność

$$R(w) = \begin{cases} 0 & \text{dla } w = w_p \\ \infty & \text{dla } w \neq w_p \end{cases} \quad (1a)$$

$$r(w) = \begin{cases} 0 & \text{dla } w = w_p \\ \infty & \text{dla } w \neq w_p \end{cases} \quad (1b)$$

Dla wszystkich wierzchołków przyjmujemy wartość cechy pomocniczej $\theta(w)$ równą 0

$$\theta(w) = 0 \quad \text{dla } w \in W' \quad (2)$$

Jako wierzchołek „ostatnio ustalony” w^* przyjmujemy wierzchołek początkowy, czyli $w^* = w_p$.

Krok 2.

Dla każdego wierzchołka w przyległego do wierzchołka w^* i dla którego cecha stała $R(w)$ wynosi nieskończoność, sprawdzamy czy

$$r(w) > R(w^*) + \bar{c}_{w^* w} \quad (3)$$

Jeżeli powyższa nierówność jest spełniona, to:

- aktualizujemy wartość cechy tymczasowej

$$r(w) = R(w^*) + \bar{c}_{w^* w} \quad (4)$$

- aktualizujemy wartość cechy pomocniczej $\theta(w)$, która ma być równa wartości cechy pomocniczej $\theta(w^*)$ wierzchołka „ostatnio ustalonego” powiększonej o wartość „oczekiwania” wyznaczoną dla tego połączenia, czyli

$$\theta(w) = \theta(w^*) + \max(0, \tau(c_{w^* w}) - R(w^*) - \theta(w^*)) \quad (5)$$

Krok 3.

Spośród wszystkich wierzchołków, dla których cecha stała $R(w)$ wynosi nieskończoność, wybieramy wierzchołek w_z o najmniejszej cesze tymczasowej

$$w_z = w \Leftrightarrow r(w_z) = \min_{u \in W'} r(u) \wedge R(u) = \infty \quad (6)$$

Ustalamy wartość cechy stałej tego wierzchołka na wartość równą jego cesze tymczasowej

$$R(w_z) = r(w_z) \quad (7)$$

Za wierzchołek „ostatnio ustalony” w^* przyjmujemy wyznaczony wierzchołek w_z , czyli

$$w^* = w_z.$$

Jeżeli wierzchołek końcowy w_k jest oznaczony cechą stałą $R(w_k) < \infty$, to algorytm kończy działanie. W przeciwnym przypadku przechodzimy do Kroku 2.

Po zakończeniu obliczeń otrzymujemy wielkość $R(w_k)$, która równa jest sumie wag krawędzi należących do wyznaczonej minimalnej drogi w grafie, oraz wielkość cechy oczekiwania $\theta(w_k)$. W rozpatrywanym zagadnieniu prac przygotowawczych w kopalni wielkość $R(w_k)$ odpowiada sumie czasów przejazdu chodnikami tworzącymi najkrótszą drogę łączącą węzeł początkowy (w którym stoi maszyna) z węzłem docelowym (w którym maszyna ma rozpocząć drążenie). Wielkość $\theta(w_k)$ odpowiada czasowi oczekiwania maszyny na ukończenie chodników wchodzących w skład wyznaczonej w ten sposób drogi transportowej. Suma tych dwóch wielkości: $R(w_k) + \theta(w_k)$ odpowiada całkowitemu czasowi transportu maszyny.

4.2. Najszybsza droga transportowa

Poniżej przedstawiony jest algorytm wyznaczający najszybszą drogę pomiędzy podanymi wierzchołkami: początkowym w_p i końcowym w_k w grafie G' .

Każdemu wierzchołkowi w grafu G' przyporządkowujemy trzy cechy:

- 1) cechę tymczasową $r(w)$,
- 2) cechę stałą $R(w)$,
- 3) cechę pomocniczą $\theta(w)$.

Cechę tymczasową wierzchołka możemy interpretować jako aktualnie najkrótszy czas dotarcia rozpatrywanej maszyny do danego węzła reprezentowanego przez ten wierzchołek, natomiast cechę stałą węzła jako już znaleziony najlepszy taki czas. Cechę pomocniczą można określić jako „oczekiwanie”, czyli całkowity czas, jaki maszyna poświęciła na czekanie w drodze do tego węzła.

Kroki algorytmu są następujące:

Krok 1.

Cechom wierzchołka początkowego w_p : stałej $R(w_p)$ oraz tymczasowej $r(w_p)$ nadajemy wartość równą 0. Początkowe wartości cech stałych i tymczasowych pozostałych wierzchołków $w \in W'$ przyjmujemy równe nieskończoność.

$$R(w) = \begin{cases} 0 & \text{dla } w = w_p \\ \infty & \text{dla } w \neq w_p \end{cases} \quad (8a)$$

$$r(w) = \begin{cases} 0 & \text{dla } w = w_p \\ \infty & \text{dla } w \neq w_p \end{cases} \quad (8b)$$

Dla wszystkich wierzchołków przyjmujemy wartość cechy pomocniczej $\theta(w)$ równą 0.

$$\theta(w) = 0 \quad \text{dla } w \in W' \quad (9)$$

Jako wierzchołek „ostatnio ustalony” w^* przyjmujemy wierzchołek początkowy, czyli $w^* = w_p$.

Krok 2.

Dla każdego wierzchołka w przyległego do wierzchołka w^* i dla którego cecha stała $R(w)$ wynosi nieskończoność, sprawdzamy czy

$$r(w) > R(w^*) + \bar{c}_{w^* w} + \max(0, \tau(c_{w^* w}) - R(w^*)) \quad (10)$$

Jeżeli powyższa nierówność jest spełniona, to:

- aktualizujemy wartość cechy tymczasowej

$$r(w) = R(w^*) + \bar{c}_{w^* w} + \max(0, \tau(c_{w^* w}) - R(w^*)) \quad (11)$$

- aktualizujemy wartość cechy pomocniczej $\theta(w)$, która jest równa wartości cechy pomocniczej $\theta(w^*)$ wierzchołka „ostatnio ustalonego”, powiększonej o wartość wyznaczoną dla tego połączenia, czyli

$$\theta(w) = \theta(w^*) + \max(0, \tau(c_{w^* w}) - R(w^*)) \quad (12)$$

Krok 3.

Spośród wszystkich wierzchołków, dla których cecha stała $R(w)$ wynosi nieskończoność, wybieramy wierzchołek w_z o najmniejszej cesze tymczasowej

$$w_z = w \Leftrightarrow r(w_z) = \min_{w \in W'} r(w) \quad \wedge \quad R(w) = \infty \quad (13)$$

Ustalamy wartość cechy stałej tego wierzchołka na wartość równą jego cesze tymczasowej

$$R(w_z) = r(w_z) \quad (14)$$

Za wierzchołek „ostatnio ustalony” w^* przyjmujemy wybrany wierzchołek w_z , czyli $w^* = w_z$.

Jeżeli wierzchołek końcowy w_k jest oznaczony cechą stałą $R(w_k) < \infty$, to algorytm kończy działanie. W przeciwnym przypadku przechodzimy do Kroku 2.

Po zakończeniu obliczeń otrzymujemy wielkość $R(w_k)$ oraz $\theta(w_k)$ końcowego wierzchołka wyznaczonej drogi. W rozpatrywanym zagadnieniu prac przygotowawczych w kopalni znaleziona minimalna droga odpowiada szukanej najszybszej drodze transportowej dla danej maszyny łączącej węzeł początkowy (w którym stoi maszyna) z węzłem docelowym (w którym maszyna ma rozpocząć drażenie). Wielkość $R(w_k)$ odpowiada całkowitemu czasowi, który niezbędny jest na przeprowadzenie transportu maszyny m tą drogą (wliczony jest tu zarówno czas przejazdu jak i ewentualny czas oczekiwania). Natomiast dodatkowo wielkość $\theta(w_k)$ odpowiada samemu czasowi oczekiwania maszyny na ukończenie chodników wchodzących w skład wyznaczonej w ten sposób drogi transportowej.

5. Podsumowanie

W artykule przedstawiono specyficzny problem szeregowania zadań, w którym występuje konieczność transportu maszyn. W problemie tym zasoby, niezbędne do realizacji zadań, są zmienne i ich dostępność zależy od aktualnego stanu systemu. Zaprezentowano problem wyboru najlepszej drogi transportowej dla maszyn z uwzględnieniem możliwości oczekiwania. Zaproponowane zostały algorytmy wyznaczania najkrótszej drogi oraz najszybszej drogi w grafie, w którym niektóre krawędzie dostępne są po pewnym określonym czasie. Algorytmy te zostały wykorzystane w symulacji procesu połączonej z optymalizacją, za pomocą której wyznaczano rozwiązanie minimalizujące koszty drażenia sieci chodników z zachowaniem ograniczeń czasowych.

Literatura

- [1] Dudek-Dyduch E.: *Formalizacja i analiza problematyki dyskretnych procesów produkcyjnych*. Półrocznik AGH, Automatyka, z. 54, Kraków 1990 (praca habilitacyjna)
- [2] Dudek-Dyduch E.: *Learning based algorithm in scheduling*. Journal of Intelligent Manufacturing (JIM), vol. 11, No. 2, 2000, 135–143
- [3] Dudek-Dyduch E.: *Systemy informacyjne zarządzania produkcją*. Kraków, Wydawnictwo Poldex 2002
- [4] Dudek-Dyduch E., Dutkiewicz L., Kucharska E.: *Formalny model symulacji procesów decyzyjnych jako model algebraiczno-logiczny*. Zeszyty naukowe Politechniki Białostockiej, Białystok 2005
- [5] Dutkiewicz L., Kucharska E.: *Model dla problemu szeregowania zadań z zasobami zależnymi od stanu systemu*. Półrocznik AGH, Automatyka

