

Akademia Górniczo – Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie



Wydział Metali Nieżelaznych
Katedra Struktury i Mechaniki Ciała Stałego

ROZPRAWA DOKTORSKA

Doświadczalna analiza anizotropii własności sprężystych monokryształów metali o strukturze A1

Autor: **Maciej Mazur**

Promotor: **Prof. dr hab. inż. Andrzej Korbel**

Kraków, 2011 r.

**Stanąłem na przełęczy... świat czarów przede mną!
Wzrok zdumiony weń topię - podziw duszę tłoczy...
Dołem - stawy czernieją, jak piór pawich oczy,
W górze - pieśń!... ale myślą stworzoną nadziemną.**

**Pieśń runami granitów pisana przede mną!
Skamieniały sen Stwórcy, dumny sen, uroczy!
Tam - ku krańcom pustyni gwiazda dnia się toczy,
Płoną szczyty - tam z głębin wstaje wieczór ciemno.**

**Siadłem; - cisza w górach - oko stawów drzymie'
Patrzę w Tatry, w te runy przedwiecznej zagadki;
Chciałbym przejrzeć, przeniknąć jej myśli olbrzymie.**

**Wiatr-bajarz lekkim palcem strunę marzeń trąca,
z wolna uchodzą z serca goryczy dostatki,
O! tu siedzieć i słuchać, i dumać bez końca!**

Franciszek Henryk Nowicki „Zawrat”

Tej Jedynej, którą odnalazłem dzięki Tatrom, za wsparcie, cierpliwość i poświęcenie... dziękuję



SPIS TREŚCI

SPIS TREŚCI.....	3
1 WPROWADZENIE	4
2.1 Uogólnione prawo Hooke'a – stałe sprężystości	6
2.2 Stałe sprężystości w ujęciu klasycznym - 3 niezależne.....	10
2.3 Podstawy fizyczne dynamicznej metody wyznaczania stałych sprężystości	18
2.4 Przesłanki do podjęcia badań nt. stałych sprężystości	24
2.5 Stałe sprężystości w ujęciu nowym – 4 niezależne.....	28
2.6 Weryfikacja założeń dynamicznej metody wyznaczania stałych sprężystości na drodze eksperymentalnej.....	31
3 CEL PRACY.....	37
4 BADANIA WŁASNE	38
4.1 Metodologia badań.....	38
4.1.1 Próby rozciągania.....	39
4.1.2 Badania z zastosowaniem fal ultradźwiękowych.....	43
4.1.2.1 Fale podłużne	44
4.1.2.2 Fale poprzeczne	45
4.2 Przewidywane i zmierzone wartości dla orientacji kubicznej.....	46
4.3 Pozostałe wyniki badań	50
4.3.1 Próby rozciągania.....	50
4.3.2 Badania z wykorzystaniem fal podłużnych	64
4.3.3 Badania z wykorzystaniem fal poprzecznych	65
4.4 Analiza wyników badań i podsumowanie.....	71
5 LITERATURA	75

1 WPROWADZENIE

Materiały anizotropowe są powszechnie stosowane i znajdują zastosowanie w bardzo wielu aplikacjach inżynierskich. Z tego powodu poprawne określenie ich własności mechanicznych ma zasadnicze znaczenie, aby pozwolić na optymalne ich wykorzystanie, a równocześnie zapewnić bezpieczeństwo użytkowników. Należy przy tym pamiętać, że makroskopowe własności mechaniczne ciał stałych, w szczególności materiałów metalicznych, są determinowane przez własności na poziomie mikrostrukturalnym i niższym tj. atomowym (komórki elementarnej). Z tego powodu budowę (strukturę) ciał odpowiedzialną za własności mechaniczne (sprężystość, plastyczność) należy rozpatrywać nie tylko w kategoriach makroskopowych tj. gdzie materiał stanowi homogeniczne continuum, lecz także w kategoriach materiału wybitnie dyskretnego. Zatem przyjęcie za pewnik i stosowanie w praktyce koncepcji „continuum materialnego” pozbawia konkretny materiał jego podstawowej cechy, jaką jest jego budowa wewnętrzna. Dotyczy to szczególnie kryształów, których charakterystyczna budowa wewnętrzna jest podstawowym elementem różniącym je od większości materiałów.

Dopóki na ciało nie działają siły zewnętrzne to pozostaje ono w równowadze. Nie oznacza to jednak, że nie działają żadne siły, lecz to, że siły o charakterze odpychającym jak i przyciągającym, działające pomiędzy atomami (zależne od rodzaju wiązania), wzajemnie się niwelują w wyniku czego ustala się między nimi równowagowa odległość. Jeśli jednak na taki układ zadziała siła zewnętrzna, usiłująca zbliżyć lub oddalić atomy, to reakcją ciała będą siły międzyatomowe przeciwdziałające temu działaniu i równoważące ją. Z tego powodu istotnym jest fakt, że co prawda, do rozważań można wybrać dowolny element wewnętrzny ciała, to jego przestrzenna orientacja będzie zawsze związana z określonym układem atomów w sieci, w których powstaje reakcja na zniekształcające działanie sił zewnętrznych.

Wielkość tej reakcji decyduje o cechach mechanicznych ciał stałych, a w szczególności o ich własnościach sprężystych.

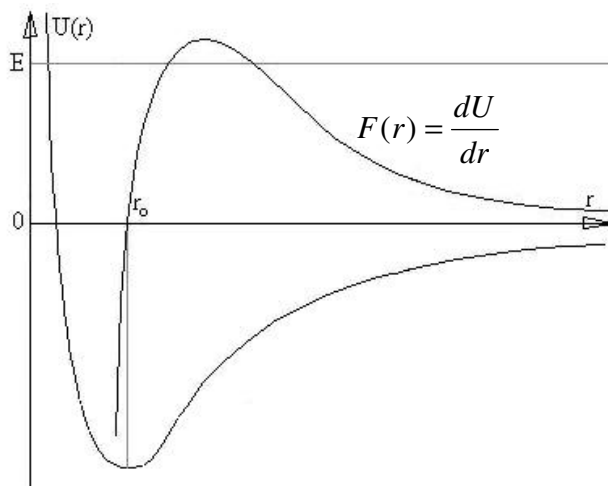
Znajomość wszystkich współczynników sprężystości charakteryzujących konkretny materiał jest konieczna zarówno dla celów modelowania, jak również określania zachowania się tych materiałów w warunkach obciążenia. Należy tutaj podkreślić fakt, że deformacja sprężysta zawsze poprzedza i towarzyszy deformacji plastycznej ciała. Oznacza to więc, że nie tylko sama jej znajomość jest niezwykle istotna, lecz również jej poprawność w sensie liczbowym, a ta z kolei jest pochodną sposobu wyznaczania stałych sprężystości, a więc cech materiału i założeń przyjętych, aby było to możliwe.

Inspiracją do podjęcia rozważań oraz przeprowadzenia badań doświadczalnych były zjawiska i problemy napotkane podczas prowadzenia wcześniejszych badań doświadczalnych dotyczących zagadnień własności sprężystych materiałów metalicznych [24, 25] oraz zagadnienia zawarte w ogólnodostępnej literaturze szerzej opisane w rozdziale 2.4.

2 SPREŻYSTOŚĆ KRYSZTAŁÓW

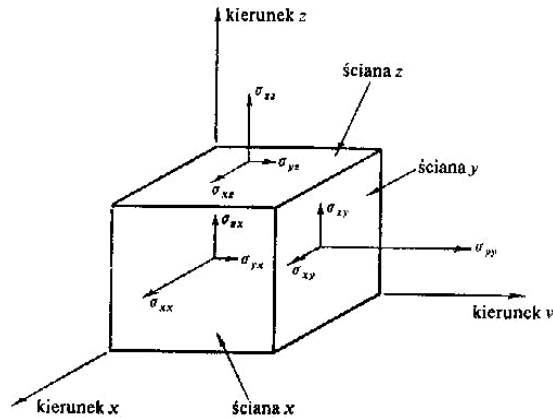
2.1 UOGÓLNIONE PRAWO HOOKE'A – STAŁE SPREŻYSTOŚCI

Energia oddziaływania międzyatomowego determinuje charakter i określa liczbowo związki fizyczne wiążące położenie elementów ciała (stan odkształcenia) z wielkością przyłożonych do niego sił (stan naprężenia). Przedstawmy, zatem graficznie siły międzycząsteczkowe występujące pomiędzy dwoma atomami (Rys. 1), przy założeniu, że są one w przybliżeniu kulisto-symetryczne. Ponieważ siła F działająca na każdy z atomów jest związana z energią potencjalną U zależnością $F=dU/dr$ to widać, że jedynie przy bardzo małych przemieszczeniach oddalenie (lub zbliżenie) atomów może być w przybliżeniu traktowane jako liniowa funkcja siły.



Rys. 1 Wykres zależności siły i energii potencjalnej w funkcji odległości r między dwoma atomami.

Rozważmy teraz siły działające na element ciała. W tym celu zdefiniujemy jednostkowy sześcian wewnątrz materiału (Rys.2). a jego ścianki poddamy działaniu naprężeń, jak na rysunku. Jak wynika z definicji naprężenia, czyli stosunku siły do powierzchni, na którą ona działa, siły działające na ścianki tego sześcianu określają jednocześnie naprężenia σ_{ij} . W każdym przypadku pierwsza cyfra indeksu wskazuje



Rys 2. Jednostkowy sześcian w prawoskrętnym układzie kartezjańskim

kierunek, a druga płaszczyznę działania naprężenia [32]. Taka indeksacja pozwala na przedstawienie dowolnego jednorodnego naprężenia σ_{ij} za pomocą tensora drugiego rzędu i zapisać w postaci:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dowolne odkształcenie jednorodne można przedstawić również za pomocą tensora drugiego rzędu:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Zakładając, że przemieszczenia (wychylenia) atomów poza pozycję równowagową są tak małe, że układ pozostaje w zakresie ściśle sprężystym o liniowym charakterze, to można przyjąć również, że odkształcenie w każdym kierunku będzie również liniowo zależne od odpowiednich składowych stanu naprężenia. Taką zależność w formie matematycznej definiuje tzw. uogólnione prawo Hooke'a:

$$\varepsilon_{kl} = \sum_{ij} S_{kl ij} \sigma_{ij}, \quad (3)$$

W zapisie równań tensorowych powszechnie wykorzystuje się tzw. notację sumacyjną Einsteina, pozwalającą na otrzymanie bardziej zwartej postaci równań. Konwencja ta mówi, że sumowania dokonujemy po powtarzających się wskaźnikach i dzięki temu możemy równanie (3) zapisać w postaci

$$\varepsilon_{kl} = S_{klij} * \sigma_{ij}, \quad (4)$$

gdzie ε_{kl} reprezentuje składowe tensora odkształceń, a σ_{ij} tensora naprężeń, natomiast współczynniki S_{ijkl} są stałymi podatności sprężystej. Można je również zapisać w formie:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} * \varepsilon_{kl}, \quad (5)$$

gdzie σ_{ij} reprezentuje składowe tensora naprężeń, a ε_{kl} tensora odkształceń, natomiast współczynniki C_{ijkl} są stałymi sztywności. Zarówno tensor naprężeń, tensor odkształceń, jak i współczynniki je wiążące (stałe sprężystości) występujące w równaniach 1 i 2 są tensorami odpowiednio drugiego i czwartego rzędu (dla współczynników S_{klij} oraz C_{ijkl}).

Stałe sprężystości są współczynnikami opisującymi własności fizyczne, które określają relację naprężenia i odkształcenia. Z postaci równania (4) wynika, że do pełnego opisu stanu odkształcenia potrzebnych jest dziewięć składowych (przy założeniu, że $i, j \in (1-3)$), a każda z nich jest liniowo zależna od wszystkich składowych stanu naprężenia, których również jest dziewięć. Oznacza to, że w najogólniejszym przypadku istnieje 81 stałych podatności sprężystej (6).

$$S_{ijkl} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1112} & S_{1113} & S_{1121} & S_{1122} & S_{1123} & S_{1131} & S_{1132} & S_{1133} \\ S_{1211} & S_{1212} & S_{1213} & S_{1221} & S_{1222} & S_{1223} & S_{1231} & S_{1232} & S_{1233} \\ S_{1311} & S_{1312} & S_{1313} & S_{1321} & S_{1322} & S_{1323} & S_{1331} & S_{1332} & S_{1333} \\ S_{2111} & S_{2112} & S_{2113} & S_{2121} & S_{2122} & S_{2123} & S_{2131} & S_{2132} & S_{2133} \\ S_{2211} & S_{2212} & S_{2213} & S_{2221} & S_{2222} & S_{2223} & S_{2231} & S_{2232} & S_{2233} \\ S_{2311} & S_{2312} & S_{2313} & S_{2321} & S_{2322} & S_{2323} & S_{2331} & S_{2332} & S_{2333} \\ S_{3111} & S_{3112} & S_{3113} & S_{3121} & S_{3122} & S_{3123} & S_{3131} & S_{3132} & S_{3133} \\ S_{3211} & S_{3212} & S_{3213} & S_{3221} & S_{3222} & S_{3223} & S_{3231} & S_{3232} & S_{3233} \\ S_{3311} & S_{3312} & S_{3313} & S_{3321} & S_{3322} & S_{3323} & S_{3331} & S_{3332} & S_{3333} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Z kolei z postaci równania (5) wynika, że do pełnego opisu stanu naprężenia również potrzebnych jest 81 współczynników zwanych stałymi sztywności (7).

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1121} & C_{1122} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1132} & C_{1133} \\ C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1221} & C_{1222} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1232} & C_{1233} \\ C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1321} & C_{1322} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1332} & C_{1333} \\ C_{2111} & C_{2112} & C_{2113} & C_{2121} & C_{2122} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2132} & C_{2133} \\ C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2221} & C_{2222} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2232} & C_{2233} \\ C_{2311} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2321} & C_{2322} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2332} & C_{2333} \\ C_{3111} & C_{3112} & C_{3113} & C_{3121} & C_{3122} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3132} & C_{3133} \\ C_{3211} & C_{3212} & C_{3213} & C_{3221} & C_{3222} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3232} & C_{3233} \\ C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3321} & C_{3322} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3332} & C_{3333} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Biorąc pod uwagę obydwie równania (4 i 5) równocześnie można stwierdzić, że obydwie tensory stałych sprężystości są między sobą związane następującą zależnością:

$$S_{ijkl} = C_{ijkl}^{-1} \quad (8)$$

Występowanie takiej zależności powoduje, że dla większej przejrzystości zamieszczonych poniżej rozważań przyjęto zasadę, że większość analiz będzie prezentowana na przykładach tensorów lub macierzy stałych sztywności C bez zamieszczania każdorazowo odpowiedników stałych podatności S , chyba, że będzie to niezbędne z punktu widzenia pokazania istoty analizy.

Spośród wspomnianych wcześniej 81 stałych sztywności C nie wszystkie są jednak niezależne od siebie nawzajem. Istnieją, bowiem, pewne zależności, które pozwalają stwierdzić, że wartość niektórych stałych może zależeć od wartości innych. Oznacza to, że koniecznym staje się określenie liczby stałych sprężystości, rzeczywiście niezbędnych do opisu związku, jaki zachodzi pomiędzy stanem naprężenia, a stanem odkształcenia. W tym celu przeprowadza się analizę liczby stałych niezależnych.

Biorąc pod uwagę, że zarówno odkształcenie jak i stan naprężenia posiadają własności tensorowe (tensory drugiego rzędu), to tensor zawierający współczynniki C_{ijkl} (stałe sztywności) również wykazuje własności tensora (tensor czwartego rzędu) [4]. Należy jednak mieć na uwadze fakt, że jego własności tensorowe nie wynikają z cech fizycznych współczynników, lecz z tego, że są one elementami łączącymi dwie tensorowe wielkości fizyczne - jest on więc tensorem materialnym. Przy takim założeniu przeprowadza się redukcję liczby niezależnych stałych sprężystości kryształów [6,7]. Aby było to jednak możliwe to potrzebne są dodatkowe warunki, które wyraża się za pomocą następujących trzech przesłanek:

- 1) Równowaga dynamiczna ciała w ujęciu makroskopowym
(warunek równowagi momentów),
- 2) Równość zmagazynowanej energii sprężystej
niezależnie od drogi na jakiej ten stan został osiągnięty,
- 3) Tożsamość charakterystycznych konfiguracji atomowych
dla ciał krystalicznych (symetrię kryształów).

l) Równowaga dynamiczna ciała w ujęciu makroskopowym (warunek równowagi momentów)

Tensor naprężeń musi być symetryczny, co wynika bezpośrednio ze spełnienia warunku równowagi momentów sił działających na wzajemnie prostopadłe ściany kryształu. Oznacza to, że można zapisać:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (9)$$

Natomiast symetria tensora odkształcenia wynika z możliwości przedstawienia dowolnego tensora drugiego rzędu, jako sumy tensora symetrycznego i tensora antysymetrycznego. Zdefiniujmy, zatem teraz, tensor dystorsji, jako:

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (10)$$

gdzie u_i oznacza składową przemieszczenia, a x_j jego kierunek.

Następnie, zgodnie z przedstawionym powyżej postulatem, przedstawmy go jako sumę tensorów - odkształcenia i obrotu [33]:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (11)$$

w taki sposób, że:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (e_{ij} + e_{ji}), \quad (12)$$

a

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (e_{ij} - e_{ji}) \quad (13)$$

Uwzględniając zależność 10 w wyrażeniu (12) otrzymamy:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (14)$$

Z powyższego wynika równość

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (15)$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że zakłada się tutaj, że w układzie odniesienia, związanym ze stanem obciążenia, reakcja ciała wyrażona za pomocą m.in. zmian postaciowych (składowe styczne lub ścinające) jest symetryczna.

Przy takim założeniu o symetryczności tensorów naprężenia i odkształcenia można zmniejszyć liczbę stałych materiałowych do 36 (sześć niezależnych składowych tensora naprężenia i sześć składowych tensora odkształcenia) i równania (4) i (5) zapisać w postaci macierzowej:

$$\sigma_i = C_{ij} * \varepsilon_j$$

oraz

$$\varepsilon_i = S_{ij} * \sigma_j$$
(16)

Składowe stanu naprężenia σ_{ij} zostały opisane wskaźnikami pojedynczymi $\sigma_j = \{ \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6 \}$ zastępującymi parę wskaźników „i,j” wg zasady [46]:

$$11 \Rightarrow 1, 22 \Rightarrow 2, 33 \Rightarrow 3 \text{ oraz } 12=21 \Rightarrow 6, 13=31 \Rightarrow 5, 23=32 \Rightarrow 4, \quad (17)$$

jak pokazano poniżej:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Analogicznej zmianie uległy również składowe stanu odkształcenia ε_{ij} opisane także za pomocą pojedynczych wskaźników $\varepsilon_j = \{ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6 \}$ wg tej samej zasady (17), lecz wprowadzając dodatkowo współczynnik $\frac{1}{2}$ przed składowymi określającymi odkształcenia styczne, jak pokazano poniżej:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2} \varepsilon_6 & \frac{1}{2} \varepsilon_5 \\ \frac{1}{2} \varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2} \varepsilon_4 \\ \frac{1}{2} \varepsilon_5 & \frac{1}{2} \varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Zmiany w notacji stanu naprężeń i odkształceń powodują, że zmieniają się również indeksy opisujące współczynniki sprężystości C_{ijkl} oraz S_{ijkl} . Zmiany indeksów w przypadku stałych sztywności C_{mn} przebiegają dokładnie wg zasady (17), a ich macierz przyjmuje postać:

$$C_{mn} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ \dots & & \dots & & & \dots \\ \dots & & & \dots & & \dots \\ \dots & & & & \dots & \dots \\ C_{61} & \dots & \dots & \dots & \dots & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

natomiast stałe podatności S_{mn} związane są ze stałymi S_{ijkl} poprzez zarówno zasadę (17) jak i dodatkowo muszą zostać przemnożone przez współczynnik p w taki sposób, że: $S_{mn} = p * S_{ijkl}$, przy czym wartość p określają następujące warunki:

$$\begin{aligned} p &= 1, \text{ gdy „m” i „n”} = 1 \text{ lub } 2 \text{ lub } 3; \\ p &= 2, \text{ gdy „m” lub „n”} = 4 \text{ lub } 5 \text{ lub } 6; \\ p &= 4, \text{ gdy „m” i „n”} = 4 \text{ lub } 5 \text{ lub } 6, \text{ jak pokazano poniżej;} \end{aligned} \quad (21)$$

$$S_{mn} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 2S_{14} & 2S_{15} & 2S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 2S_{24} & 2S_{25} & 2S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 2S_{34} & 2S_{35} & 2S_{36} \\ 2S_{41} & 2S_{42} & 2S_{43} & S_{44} & 4S_{45} & 4S_{46} \\ 2S_{51} & 2S_{52} & 2S_{53} & 4S_{54} & S_{55} & 4S_{56} \\ 2S_{61} & 2S_{62} & 2S_{63} & 4S_{64} & 4S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że dodatkowe współczynniki wprowadzono tylko w przypadku kontrakcji indeksów określających składowe tensora odkształceń oraz składowe macierzy podatności, natomiast w przypadku składowych tensora naprężeń jak i składowych macierzy sztywności żadne inne zmiany, oprócz zmiany samych indeksów wg zasady (17), nie występują.

2) Równość zmagazynowanej energii sprężystej niezależnie od drogi na jakiej ten stan został osiągnięty

W tym miejscu należy podkreślić fakt, że w związku z wprowadzeniem zapisu indeksów w postaci dwucyfrowej, macierz 36 stałych C_{mn} (lub odpowiednio S_{mn}) nie posiada już własności tensora, które były atrybutem stałych C_{ijkl} . Kolejne zmniejszenie liczby wyrazów niezależnych jest możliwe, gdy wykaże się, że następujące po sobie odkształcenia i to niezależnie od kolejności, prowadzą do dokładnie takiego samego stanu końcowego ciała, z punktu widzenia jego termodynamiki.

Aby tego dokonać rozważmy energię zmagazynowaną w kryształ odkształconym sprężystości [9]. Jeśli odkształcimy wspomniany kryształ o $d\varepsilon_{ij}$ to naprężenia działające na elementarny sześcian wyznaczony w jego wnętrzu wykonają pracę dW równą:

$$dW = \sigma_i d\varepsilon_{ij} \quad (23)$$

Poddajmy teraz ciało skończonym odkształceniom ε_1 , a następnie ε_2 oraz w odwrotnej kolejności i porównajmy rezultaty. W przypadku odkształcenia skończonego wartość energii wyznacza się poprzez scałkowanie wyrażenia (17a). Ponieważ pierwszym odkształceniem jest ε_1 to pozostałe ε_i wynoszą zero, więc praca przypadająca na jednostkę objętości równa jest

$$W_1 = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma_1 d\varepsilon_1 = \int_0^{\varepsilon_1} C_{11} \varepsilon_1 d\varepsilon_1 = \frac{1}{2} C_{11} \varepsilon_1^2 \quad (24)$$

Następnie poddajmy ciało odkształceniu ε_2 . Teraz wyrażenie na pracę przyjmie następującą postać:

$$W_2 = \int_0^{\varepsilon_2} \sigma_2 d\varepsilon_2 = \int_0^{\varepsilon_2} C_{22} \varepsilon_2 d\varepsilon_2 + \int_0^{\varepsilon_2} C_{21} \varepsilon_1 d\varepsilon_2 = \frac{1}{2} C_{22} \varepsilon_2^2 + C_{21} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad (25)$$

Sumując wyrażenia (24) i (25) otrzymamy wartość całkowitej energii zmagazynowanej W w jednostce objętości:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} C_{11} \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} C_{22} \varepsilon_2^2 + C_{21} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad (26)$$

Analogicznie wyznaczając wartość tej energii dla identycznych odkształceń, lecz w odwrotnej kolejności otrzymamy:

$$W = \frac{1}{2}C_{22}\varepsilon_2^2 + \frac{1}{2}C_{11}\varepsilon_1^2 + C_{12}\varepsilon_2\varepsilon_1 \quad (27)$$

Porównując współczynniki występujące w równaniach (26) i (27) wynika, że $C_{12} = C_{21}$ i ogólnie:

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (28)$$

W podobny sposób można wykazać, że:

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (29)$$

Oznacza to, że liczba niezależnych stałych zarówno sprężystości jak i sztywności redukuje się do 21.

3) Tożsamość charakterystycznych konfiguracji atomowych dla ciał krystalicznych (symetria kryształów)

Dalszą redukcję liczby stałych można przeprowadzić korzystając z anizotropowych własności ciał krystalicznych. Własności te, bardzo charakterystyczne i wyjątkowo łatwo zauważalne w przypadku kryształów, wprost prowadzą do argumentu, który można określić słowem „symetria”. Spośród wszystkich trzech przesłanek, które służą ograniczeniu liczby stałych niezależnych, to właśnie ten argument (jak również argument o równowadze momentów sił) posiada jednoznaczne uzasadnienie fizyczne. Opiera się ono na fakcie, że jednakowe pod względem krytalografii układy atomów muszą się charakteryzować dokładnie takimi samymi własnościami. To oznacza, że operacje symetrii na kryształach pozwalają przeprowadzać go „samego w sobie”. Taka własność kryształów powoduje, że transformując stałe sztywności (lub stałe podatności sprężystej) z jednego w drugi ekwiwalentny układ odniesienia można obniżyć ilość stałych, zerując te, które w wyniku operacji symetrii zmieniają znak (rozwińcie tego zagadnienia znajduje się w dalszej części pracy). Po zastosowaniu wszystkich możliwych transformacji do układów „symetrycznych” i każdorazowym zerowaniu kolejnych składowych macierzy stałych, w przypadku

kryształów wykazujących największą symetrię (układ regularny), i po uwzględnieniu dwóch wcześniejszych przesłanek, liczba stałych niezależnych (niezerowych) redukuje się do trzech. W zapisie z indeksem dwucyfrowym (skrótowym) podawane są one jako stałe materiałowe C_{11} , C_{12} i C_{44} , przy czym, należy tutaj zwrócić uwagę, że stałe te odnoszą się tylko i wyłącznie do takiej orientacji kryształu, w której stan naprężenia i odkształcenia zdefiniowane są w układzie krystalograficznym zgodnym z orientacją komórki elementarnej kryształu.

W przypadku wyboru innego, niż opisany wcześniej, układu odniesienia wymagane jest ponowne wyznaczenie stałych sprężystych, charakterystycznych dla tej konkretnej orientacji kryształu. To oznacza, że stałe sprężystości należy przedstawić w postaci tensora i dopiero wtedy przetransformować je do nowego układu. Taka transformacja polega na obliczeniu nowych wartości wszystkich stałych w docelowym ortogonalnym układzie odniesienia, przy wykorzystaniu prawa transformacji tensora czwartego rzędu, opisanego zależnością [34]:

$$C'_{mnpq} = a_{mi} a_{nj} a_{pk} a_{ql} C_{ijkl} , \quad (30)$$

przy czym wyrażenia $a_{mi} a_{nj} a_{pk} a_{ql}$ są tzw. cosinusami kierunkowymi. Ich wartość określana jest jako cosinus kąta pomiędzy odpowiednimi kierunkami tworzącymi osie „starego” (osie: x, y, z) i „nowego” (osie x', y', z') układu odniesienia.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left. \begin{array}{l} x' \\ y' \\ z' \end{array} \right\} \begin{array}{ccc} \cos_{xx'} & \cos_{yx'} & \cos_{zx'} \\ \cos_{xy'} & \cos_{yy'} & \cos_{zy'} \\ \cos_{xz'} & \cos_{yz'} & \cos_{zz'} \end{array} \end{array}$$

Rys. 3. Zestawienie kosinusów kątów pomiędzy osiami „starego” i „nowego” układu

Zebrane w postaci macierzy tworzą tzw. macierz transformacji:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Uwzględniając powyżej zaprezentowane argumenty pozwalające na redukcję stałych niezależnych Kittel [6] podaje zależności wiążące współczynniki sztywności i podatności dla układu regularnego:

$$\begin{aligned} C_{44} &= (S_{44})^{-1}, \\ C_{11} - C_{12} &= (S_{11} - S_{12})^{-1}, \\ C_{11} + 2C_{12} &= (S_{11} + 2S_{12})^{-1}. \end{aligned} \tag{32}$$

Po ich przekształceniu ze względu na S_{1111} (S_{11}) i S_{1122} (S_{12}) otrzymamy dokładnie takie same zależności jak wzory transformacyjne podawane przez Voigta [16], który wyprowadził je bazując na analizie prostego rozciągania kryształu o orientacji podstawowej i zapisał we wprowadzonym przez siebie po raz pierwszy formacie dwuindeksowym, a mianowicie:

$$S_{11} = (C_{11} + C_{12}) / (C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12}) \tag{33}$$

i

$$S_{12} = - C_{12} / (C_{11} - C_{12}) (C_{11} + 2C_{12}) \tag{34}$$

2.3 PODSTAWY FIZYCZNE DYNAMICZNEJ METODY WYZNACZANIA STAŁYCH SPRĘŻYSTOŚCI

W związku z faktem, że własności sprężyste materiałów przeznaczonych do szeroko pojętych zastosowań inżynierskich stanowią jedno z podstawowych kryteriów ich doboru, to istnieje cały szereg metod pozwalających na ich określenie, i które to zostały opisane w powszechnie dostępnej literaturze m.in. [1,8,13,22,36,40,41].

Zasadniczo metody te można podzielić na dwie grupy, tj. metody statyczne i dynamiczne.

Metody statyczne oparte są na bezpośrednich pomiarach naprężeń i odkształceń w trakcie wykonywanych testów wytrzymałościowych (rozciągania, ściskania, zginania, skręcania, itd.), a moduły sprężystości wyznaczone są na podstawie kąta nachylenia liniowej części wykresu zależności naprężenie-odkształcenie, czyli jako współczynniki proporcjonalności.

W metodach dynamicznych wykorzystuje się istniejące zależności pomiędzy wartościami modułów sprężystości, a prędkościami propagacji fal sprężystych określonymi na podstawie pomiarów [39,42,44,47-49]. Do tego rodzaju metod zaliczają się również metody wykorzystujące zjawisko rozpraszania promieni świetlnych lub rentgenowskich przez fonony [43], a także inne metody wykorzystujące fale sprężyste o częstotliwościach od kilku MHz do kilkudziesięciu GHz jak np. mikroskopia ultradźwiękowa mająca zastosowanie do badania własności sprężystych cienkich warstw [50].

Ze względu na to, że to właśnie za pomocą metody dynamicznej wyznaczono m.in. stałe sztywności kryształów miedzi, które stosowane są powszechnie w pracach naukowych [4], rozważania w tym rozdziale skupią się na podstawach fizycznych właśnie tego rodzaju metod.

Każdy materiał w sobie tylko właściwy sposób reaguje na obciążenie. Niezależnie jednak, z jakiego materiału zbudowane jest dane ciało stałe, to poddawane dynamicznym obciążeniom będzie reagowało równie dynamiczną zmianą kształtu. Oznacza to, że cząstki znajdujące się na jego powierzchni, pod wpływem działającej siły, zostają wprowadzone w ruch i zaczynają wykonywać drgania dookoła położenia równowagi, przekazując energię wszystkim cząstkom zajmującym sąsiadujące

położenia w przestrzeni ośrodka. Ta dynamiczna zmiana kształtu - zaburzenie - rozchodzi się w materiale w postaci fali sprężystej. Istotą ruchu falowego jest to, że wywołane w ośrodku zaburzenie przemieszcza się z określoną prędkością [4]. Umożliwia to, zatem, w oparciu o pomiary prędkości propagacji takiej fali w badanym ośrodku, wyznaczenie dla danego materiału stałych proporcjonalności (stałych sprężystości) pomiędzy odkształceniem, a naprężeniem go wywołującym [2]. Przy założeniu, że obciążenia jakim poddawane jest to ciało są niewielkie i charakteryzują się określoną częstością to powstała w ten sposób fala może być falą akustyczną [3]. Podstawową cechą fali akustycznej o małej amplitudzie jest fakt, że zależność naprężenie-przesunięcie (odkształcenie lokalne) cząstki w materiale jest ściśle liniowa. Dlatego też metale badane metodami akustycznymi wykorzystującymi taki właśnie rodzaj fal, z powodzeniem można traktować jako ośrodki doskonale sprężyste. To, z kolei, oznacza, że dla takich ośrodków można pominąć efekty nieliniowości i stosować prawa właściwe dla liniowej teorii sprężystości [5].

Struktura kryształów o charakterystycznej, dyskretnej naturze, powoduje jednak, że wartość stałych sprężystości jest funkcją orientacji krystalograficznej i zależy od kierunku obciążeń – wykazują one własności anizotropowe.

W celu otrzymania równania opisującego równowagę dynamiczną takiego ciała (anizotropowego ośrodka sprężystego) należy przyrównać iloczyn masy o jednostkowej objętości i jej przyspieszenia wzdłuż osi do wypadkowej siły działającej na to ciało. Jest to warunek równowagi dynamicznej Newtona. Gdy przyspieszenie wyrazimy jako drugą pochodną przemieszczenia po czasie, a siłę jako sumę składników naprężenia działających na powierzchni rozpatrywanej objętości, to równanie to przyjmie następującą postać:

$$\rho \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (35)$$

gdzie ρ jest gęstością, u_i przemieszczeniem w kierunku i , a σ_{ij} składową tensora naprężeń.

Wszystkie indeksy zmieniają się od 1 do 3 oznaczając kierunki wyznaczające układ kartezyjski.

Uwzględniając fakt, że naprężenie związane jest z odkształceniem poprzez równanie tensorowe zawierające moduły sprężystości w postaci tensora 4 rzędu (równanie 5) oraz, że odkształcenia zdefiniowane są jako symetryczny tensor wyrażony za pomocą przemieszczeń (równanie 14), to równanie sprężystości dla ośrodka anizotropowego przyjmie postać [31]:

$$\rho \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{jkl} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ C_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \right\} \quad (36)$$

Tensor C_{ijkl} jest symetryczny ze względu na zamiany indeksów i z j , k z l oraz pary ij z kl . W przypadku ośrodka jednorodnego moduły sprężystości nie zależą od punktu odniesienia, dlatego równanie (32) można zapisać w postaci:

$$\rho \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) = \sum_{jkl} C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} \quad (37)$$

W warunkach, jakie towarzyszą pomiarom z zastosowaniem ultradźwięków, długość fali jest wystarczająco mała w porównaniu do wymiarów próbki, aby można było przyjąć założenie, że impuls składający się z fal płaskich poruszających się w kierunku x_1 może zostać opisany za pomocą wielkości niezależnych od kierunku x_2 i x_3 . Z tego względu równania sprężystości ruchu upraszczają się i przyjmują postać:

$$\rho \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) = \sum_k C_{i1k1} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2} \quad (38)$$

Jeśli przyjmiemy, że wyrażenie na przemieszczenie fali płaskiej ma postać:

$$u_i = A_i e^{[i\omega(t - x_1/V)]}, \quad (39)$$

gdzie ω jest prędkością kątową, a V prędkością liniową, to równanie amplitud fali przyjmie formę:

$$\rho V^2 A_i - \sum_k C_{i1k1} A_k = 0 \quad (40)$$

Składowe tensora C_{ijkl} można określić uwzględniając zależności (18) i zapisać moduły sprężystości z indeksacją dwucyfrową.

Postać równania (40) oznacza, że jeżeli mają istnieć niezerowe rozwiązania, to macierz $\rho V^2 - \sum_k C_{i1k1}$ musi być osobliwa [14], a to z kolei oznacza, że należy rozwiązać równanie wyznacznikowe postaci [20]:

$$\det(\rho V^2 - \sum_k C_{i1k1}) = 0 \quad (41)$$

W przypadku rozchodzenia się fali równoległe do jednej z osi, na których zbudowana jest komórka kubiczna o orientacji podstawowej (100), równanie wyznacznikowe dla wartości dozwolonych dla prędkości fali upraszcza się do postaci:

$$\begin{vmatrix} C_{11} - \rho V^2 & 0 & 0 \\ 0 & C_{44} - \rho V^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} - \rho V^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (42)$$

Z postaci równania (42) widać od razu, że wyznacznik macierzy będzie zerowy tylko wtedy, gdy dowolny z diagonalnych członów będzie równał się zero. Z pierwszego możliwego pierwiastka wynika zależność pomiędzy prędkością propagacji sprężystej fali podłużnej V_L a stałą sztywności C_{11} i gęstością kryształu ρ :

$$V_L = \sqrt{(C_{11} / \rho)} \quad (43)$$

Pierwiastek drugi (w tym przypadku równy trzeciemu) wiąże prędkość propagacji fali poprzecznej V_T (powstałej na skutek obciążenia kryształu naprężeniem ścinającym) ze stałą sztywności C_{44} (i gęstością kryształu) za pomocą następującej zależności:

$$V_T = \sqrt{(C_{44} / \rho)} \quad (44)$$

Zmierzone prędkości rozchodzenia się fal sprężystych w kryształach, na podstawie związków (43) i (44), umożliwiają wyznaczenie stałych C_{11} i C_{44} w układzie

odniesienia zgodnym z układem krystalograficznym ($C_{11} = C_{1111}$ dla kierunku $\langle 100 \rangle$ i $C_{44} = C_{1212}$ w układzie kierunków $x_1 \parallel [100]$ i $X_2 \parallel [010]$).

Inaczej przedstawia się możliwość wyznaczenia trzeciej, niezależnej, stałej sztywności kryształu regularnego, $C_{12} = C_{1122}$, gdyż nie może ona zostać zmierzona wprost, lecz może być wyznaczona jedynie w sposób pośredni. W tym przypadku „pośredni” oznacza, że stała ta nie jest jedyną stałą sztywności powiązaną z wynikiem pomiaru i jej ostateczna wartość wymaga zastosowania dodatkowych operacji matematycznych. Wyznacza się ją bowiem w kryształ obciążonym jednoosiowym naprężeniem wzdłuż kierunku $\langle 110 \rangle$ sieci kryształu, tj. na podstawie pomiaru prędkości rozchodzenia się fali podłużnej na tym kierunku [36-38,47,48,51-55].

Wyznamy więc teraz wartość stałej C'_{1111} w nowym układzie odniesienia (obrót o kąt 45° względem nieruchomej osi X_3). W takim przypadku macierz transformacji przyjmie postać:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Korzystając z zależności (30) oraz macierzy stałych w układzie komórki (59) i macierzy transformacji (45) wartość stałej C'_{1111} będzie równa:

$$\begin{aligned} C'_{1111} &= a_{11}^4 C_{1111} + a_{11}^2 a_{12}^2 C_{1122} + a_{11}^2 a_{12}^2 C_{1212} + a_{11}^2 a_{12}^2 C_{1221} \\ &+ a_{11}^2 a_{12}^2 C_{2112} + a_{11}^2 a_{12}^2 C_{2121} + a_{11}^2 a_{12}^2 C_{2211} + a_{12}^4 C_{2222} \\ &= \frac{1}{2} C_{1111} + \frac{1}{2} C_{1122} + C_{1212} \end{aligned} \quad (46)$$

Analogicznie wyznaczając wartości pozostałych dwóch członów i używając zapisu dwuwskaznikowego równanie wyznacznikowe przyjmuje następującą formę:

$$\begin{vmatrix} \left[\frac{1}{2}(C_{11} + C_{12}) + C_{44} \right] - \rho V^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) - \rho V^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} - \rho V^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (47)$$

Jak widać tylko stała C'_{11} , wyznaczona dla kierunku $\langle 110 \rangle$ sieci, związana jest ze wszystkimi trzema stałymi sztywności (w układzie komórki elementarnej kryształu) C_{11} i C_{12} i C_{44} poprzez zależność:

$$C'_{11} = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12}) + C_{44} \quad (48)$$

W takim przypadku pierwszy pierwiastek (wg zależności (39)) będzie miał postać:

$$V_L = \sqrt{(C'_{11} / \rho)} \quad (49)$$

Podsumowując powyższe rozważania można powiedzieć, że w celu wyznaczenia stałych sztywności kryształu regularnego należy uznać za poprawne i zastosować założenia własności stałych sprężystości zaprezentowane w rozdziale 2.2, a następnie w oparciu o nie, przeprowadzić trzy pomiary prędkości propagacji fal sprężystych w kryształach odpowiednio zorientowanym względem impulsu ultradźwiękowego.

2.4 PRZESŁANKI DO PODJĘCIA BADAŃ NT. STAŁYCH SPRĘŻYSTOŚCI

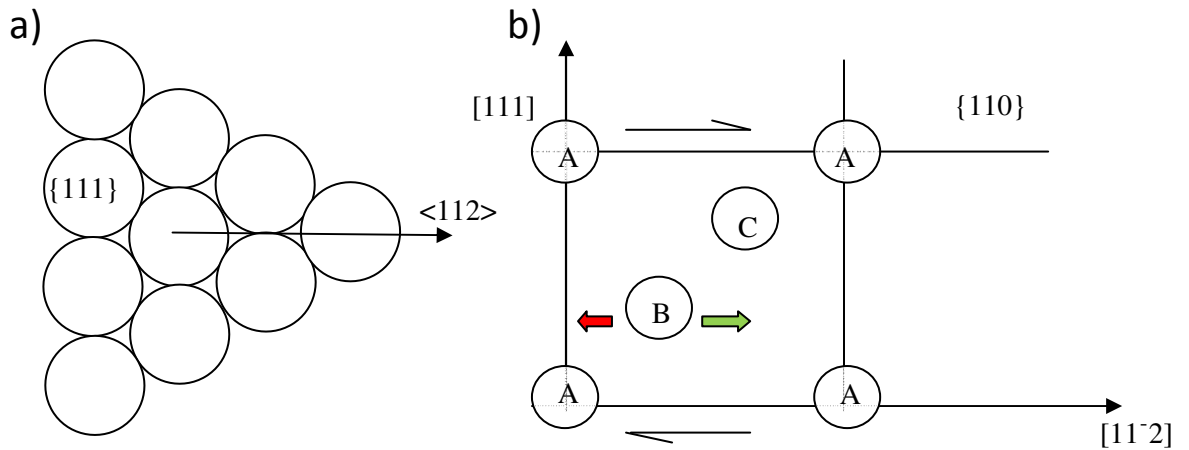
Poniżej zaprezentowano argumenty, które skłoniły do dokładniejszego przyjrzenia się zagadnieniu sprężystości kryształów i podjęcia badań, pozwalających na wykonanie analizy tego tematu na drodze eksperymentalnej.

Pierwszą przesłanką był brak publikowanych w literaturze danych doświadczalnych dotyczących wartości stałych sprężystości w różnych orientacjach, w szczególności innych od tych, na których przykładzie powszechnie wyznaczane są stałe sprężystości opisane w dostępnej literaturze. W związku z powyższym podjęto się wykonania wstępnych pomiarów anizotropii sprężystej w kryształach o sieci A1, zaprezentowanych w pracy [24]. Na podstawie wyników doświadczalnych zawartych w tej pracy stwierdzono, że najbardziej zbliżone wyniki do wartości teoretycznych otrzymano dla pomiarów przeprowadzonych na ścianach typu $\{111\}$, a więc ścianach o wysokiej symetrii. W przypadku pomiarów na pozostałych ścianach uzyskano wyniki zarówno pokrywające, jak i znacznie różniące się od wartości obliczonych na podstawie prawa transformacji.

Mając na uwadze fakt, że każde odkształcenie plastyczne poprzedzone jest odkształceniem sprężystym, to kolejnymi sugestiami ze strony zachowania się kryształów, aby podjąć problematykę analizy ich reakcji sprężystej była (poprzez analogię) anizotropia reakcji plastycznej (polaryzacja) występująca w przypadku stopów Cu-Al - bliźniakowanie mechaniczne (sieć A1), Zn - pasma ugięcia (sieć A3) oraz występowanie tzw. Non-Schmid effect w intermetalikach (sieć A2).

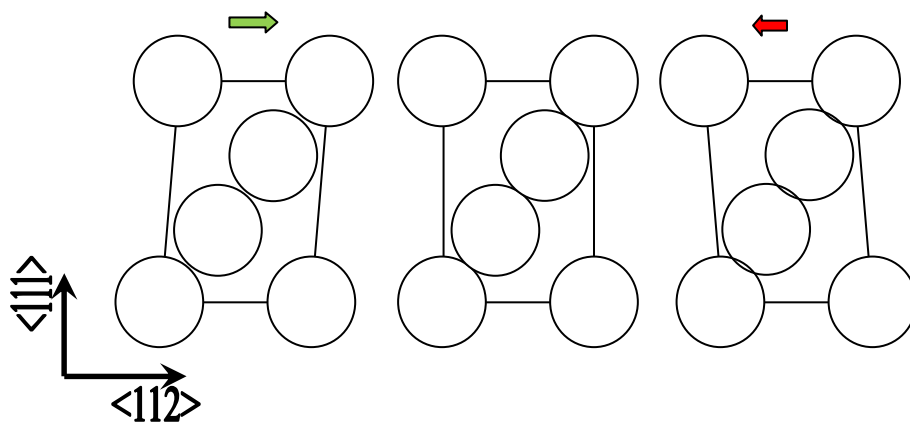
Ponieważ niniejsza praca dotyczy kryształów RSC to poniżej opisano jedynie zagadnienie bliźniakowania mechanicznego w kryształach stopu Cu-Al. Obszerny opis zjawisk występujących w trakcie odkształcania plastycznego cynku zawarty jest w pracy [27], natomiast przypadki występowania asymetrii odkształcenia plastycznego występującego podczas rozciągania i ściskania wraz z opisem charakterystyki non-Schmid effect-u można znaleźć w wielu powszechnie dostępnych pozycjach literaturowych np. [28-30].

Interesująca nas konfiguracja atomów (Rys. 4a i 4b) stanowi równocześnie jeden z systemów bliźniakowania w kryształach RSC. W rozpatrywanym przypadku naprę-



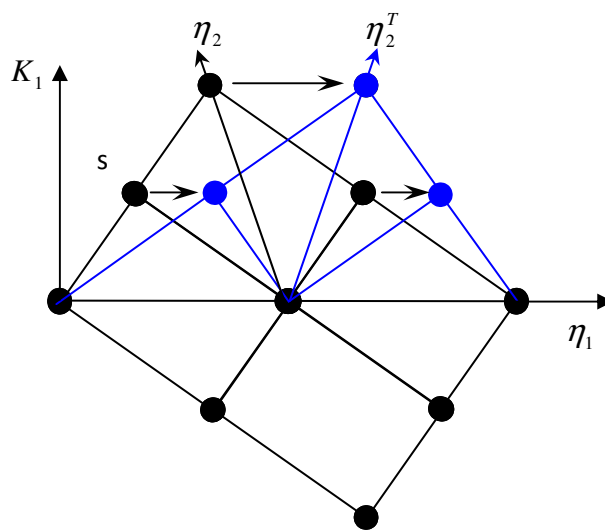
Rys. 4. Konfiguracja atomów kryształu RSC: a) rzut z kierunku $[111]$ na pojedynczą warstwę atomów w płaszczyźnie $\{111\}$; b) przekrój w płaszczyźnie (110) .

żenie działające podczas odkształcenia sprężystego w kierunku o zwrocie zgodnym z zieloną strzałką (Rys. 4c) potrzebne do wychylenia atomu z pozycji równowagi jest mniejsze niż w kierunku przeciwnym oznaczonym strzałką czerwoną. Rysunek 4c przedstawia „przerysowaną” sytuację, w której odkształcenie w kierunku pierwszym zachodzi łatwiej (przy mniejszym naprężeniu) niż w kierunku przeciwnym.

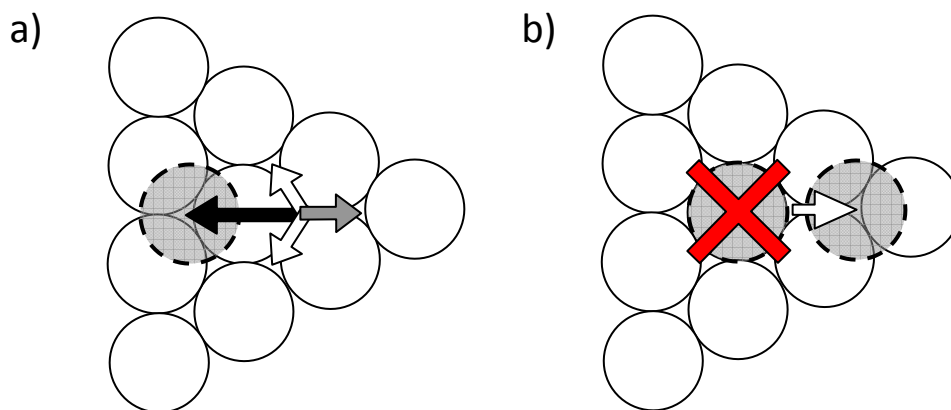


Rys. 4c. Konfiguracja pojedynczej warstwy atomów kryształu RSC - przekrój w płaszczyźnie (110) .

Również w przypadku powstawania bliźniaków w takiej konfiguracji można zaobserwować analogiczną sytuację gdzie płaszczyzna ścięcia K_1 należy do rodziny płaszczyzn $\{111\}$, a kierunek ścięcia η_1 do rodziny kierunków $\langle 112 \rangle$ (Rys. 5). W celu otrzymania takiego bliźniaka należy przemieścić o ten sam wektor kolejne płaszczyzny sieciowe. Rozpatrując przemieszczenie tych płaszczyzn na poziomie atomów je tworzących, można zauważyć, że istnieją dwie możliwości takiej operacji. Mianowicie atomy mogą się przemieszczać w tym samym kierunku, lecz ich ruch może mieć różne zwroty. Efekt końcowy będzie ten sam, lecz różnią się one wartością ścięcia wymaganego, aby atomy znalazły się we właściwej pozycji równowagowej.



Rys. 5. Bliźniak w metalu o sieci RSC pokazany w przekroju na płaszczyznę $\{110\}$, gdzie K_1 oznacza płaszczyznę ścięcia, η_1 kierunek ścięcia, a oraz s jego wartość [18].



Rys. 6. Ułożenie atomów na płaszczyźnie $\{111\}$ sieci RSC, a) strzałki białe i szare wskazują możliwe kierunki bliźniakowania natomiast czarna jeden z kierunków superbliźniakowania, b) warunek polaryzacji – w ramach dowolnego kierunku $\langle 112 \rangle$ dozwolony jest tylko jeden zwrot.

Obydwie sytuacje przedstawia rysunek 6a, przy czym wartość ściecia w przypadku pierwszym (oznaczonym strzałką szarą) wynosi $\sqrt{2}/2$, natomiast w przypadku drugim wynosi $\sqrt{2}$ (strzałka czarna). W metalach i stopach RSC obserwowano jedynie bliźniakowanie o wartości ściecia $\sqrt{2}/2$. Sytuacja odwrotna ($s=\sqrt{2}$) wydaje się fizycznie mało prawdopodobna ze względu na to, że podczas ruchu atomy musiałyby pokonać metastabilną, wysokoenergetyczną pozycję o konfiguracji atomów typu AA. W takim przypadku korzystniejszym jest wybór alternatywnych systemów deformacji bliźniaczej leżących na rozpatrywanej płaszczyźnie ściecia (kierunki zaznaczone białymi strzałkami). W nadstrukturach przewiduje się możliwość ściecia o wartości $\sqrt{2}$, gdyż bliźniakowanie o wartości ściecia $\sqrt{2}/2$ prowadziło do zaburzenia uporządkowania atomów, a tym samym powstania granicy antyfazowej [23].

Na rysunku 6b przedstawiono ważną właściwość bliźniakowania mechanicznego, która wynika z budowy komórki elementarnej kryształu RSC – dla wartości ściecia $s=\sqrt{2}/2$ przesunięcie atomów wzdłuż pewnych kierunków jest niemożliwe, ponieważ kolejne warstwy płaszczyzn $\{111\}$ musiałyby przyjąć konfigurację typu AA (pozycja zaznaczona czerwonym kolorem). W materiałach RSC efekt zabronienia niektórych kierunków bliźniakowania (po raz pierwszy przedstawiony w pracy [21]) nosi nazwę polaryzacji ściecia i jest jednym z czynników determinujących możliwość aktywacji danego systemu deformacji bliźniaczej [19].

Listę argumentów prowadzących wprost do podjęcia tematu doświadczalnej analizy zagadnienia anizotropii sprężystej kryształów jest zagadnienie związane z wyznaczaniem odwrotności macierzy tensora sztywności postaci (59), a tym samym obliczeniem jej wyznacznika, który wynosi zero. Problem ten opisany został szerzej w rozdziale 2.5.

2.5 STAŁE SPRĘŻYSTOŚCI W UJĘCIU NOWYM – 4 NIEZALEŻNE

Przedstawmy teraz stałe C_{ijkl} kryształu miedzi w formie pełnej macierzy tensora stałych sztywności (Tablica 1) tj. w postaci macierzy typu 9x9.

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} 168,42 & 0 & 0 & 0 & 121,42 & 0 & 0 & 0 & 121,42 \\ 0 & 75,359 & 0 & 75,359 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 75,359 & 0 & 0 & 0 & 75,359 & 0 & 0 \\ 0 & 75,359 & 0 & 75,359 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 121,42 & 0 & 0 & 0 & 168,42 & 0 & 0 & 0 & 121,42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 75,359 & 0 & 75,359 & 0 \\ 0 & 0 & 75,359 & 0 & 0 & 0 & 75,359 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 75,359 & 0 & 75,359 & 0 \\ 121,42 & 0 & 0 & 0 & 121,42 & 0 & 0 & 0 & 168,42 \end{bmatrix}$$

Tablica 1. Tensor stałych sztywności C_{ijkl} dla Cu w układzie kryształu [GPa].

Wiedząc, że tensor stałych sprężystości jest odwrotnością tensora sztywności, to również jego spróbujemy przedstawić w formie pełnej macierzy. Aby tego dokonać należy w pierwszej kolejności obliczyć wyznacznik macierzy wyjściowej, a więc macierzy tensora sztywności postaci (59). Okazuje się jednak, że wynosi on zero! Oznacza to, że macierz jest nieodwracalna, a tym samym nie jest możliwe znalezienie tensora stałych sprężystości bez wcześniejszej kontrakcji tensora sztywności do postaci macierzy w zapisie dwuwskaznikowym tj. macierzy typu 6x6.

W związku z powyższym jedynym sposobem zmniejszenia liczby stałych niezależnych z równoczesnym pominięciem stosowanego zabiegu przewskaznikowania w celu otrzymania takiej postaci macierzy, której wyznacznik byłby niezerowy, jest zastosowanie trzeciego argumentu (symetrii) bezpośrednio na ogólnej postaci macierzy 81 stałych.

Ponieważ kryształy kubiczne zbudowane są na kierunkach z rodziny $\langle 100 \rangle$, to posiadają one zarówno czterokrotne, jak i trzykrotne osie symetrii. Z tego powodu poddamy wspomnianą macierz (7) transformacjom do nowych układów odniesienia związanych z układem wyjściowym poprzez właśnie takie operacje symetrii. Ich

kolejność oraz wyjściowe i końcowe układy odniesienia przedstawiono w tablicy 2. W trakcie każdej kolejnej transformacji należy pamiętać, że z racji tego, że są to

A	x y z	Wyjściowy układ współrzędnych
B	y z x	Obrót układu A o 120° względem kierunku <111>
C	y -z -x	Obrót układu B o 180° względem kierunku <100>
D	-y -z x	Obrót układu C o 180° względem kierunku <010>
E	-z -x y	Obrót układu C o 120° względem kierunku <111>

Tablica 2. Możliwe zmiany notacji osi dla symetrii sześcienniej wyrażone za pomocą wskaźników osi tworzących układ wyjściowy

operacje symetrii, to ich przeprowadzenie nie może zmieniać wartości stałych sprężystości. Oznacza to, że gdy dany element macierzy, a właściwie jego rozwinięcie, nie jest identyczne z jego postacią sprzed operacji, to jedyną wartością, jaka w dalszym ciągu spełnia warunek tożsamości, jest zero i taką jego wartość należy przyjąć dla danej stałej sprężystości. W trakcie każdej operacji eliminuje się, więc kolejne składowe i po ostatniej z nich macierz stałych sprężystości przyjmuje postać:

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & 0 & 0 & 0 & C_{1122} & 0 & 0 & 0 & C_{1133} \\ 0 & C_{1212} & 0 & C_{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{1313} & 0 & 0 & 0 & C_{1331} & 0 & 0 \\ 0 & C_{2112} & 0 & C_{2121} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211} & 0 & 0 & 0 & C_{2222} & 0 & 0 & 0 & C_{2233} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & C_{2332} & 0 \\ 0 & 0 & C_{3113} & 0 & 0 & 0 & C_{3131} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3223} & 0 & C_{3232} & 0 \\ C_{3311} & 0 & 0 & 0 & C_{3322} & 0 & 0 & 0 & C_{3333} \end{bmatrix} \quad (50)$$

Wykorzystując fakt, że tensor naprężeń jest symetryczny, oraz to, że układ komórki elementarnej jest zbudowany na równoważnych kierunkach krystalograficznych typu <100>, można zapisać, że $\sigma_{11} \equiv \sigma_{22} \equiv \sigma_{33}$ oraz $\sigma_{23} \equiv \sigma_{31} \equiv \sigma_{21}$ [17]. Uwzględniając powyższe i korzystając z równania (5), a następnie porównując

współczynniki przy poszczególnych składowych deformacji, uzyskujemy możliwość dodatkowej redukcji liczby składowych macierzy stałych sprężystości, gdyż w wyniku tych operacji następujące równości są prawdziwe:

$$\begin{aligned}
 C_{1111} &= C_{2222} = C_{3333} \text{ i} \\
 C_{1122} &= C_{1133} = C_{2233} = C_{2211} = C_{3311} = C_{3322}, \text{ a także} \\
 C_{1212} &= C_{1313} = C_{2121} = C_{2323} = C_{3131} = C_{3232} \text{ oraz} \\
 C_{1221} &= C_{1331} = C_{2332} = C_{2112} = C_{3113} = C_{3223}.
 \end{aligned} \tag{51}$$

Dzięki powyższym równościom macierz można zapisać w następującej postaci:

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & 0 & 0 & 0 & C_{1122} & 0 & 0 & 0 & C_{1122} \\ 0 & C_{1212} & 0 & C_{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 & 0 & C_{1221} & 0 & 0 \\ 0 & C_{1221} & 0 & C_{1212} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & 0 & 0 & 0 & C_{1111} & 0 & 0 & 0 & C_{1122} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & C_{1221} & 0 \\ 0 & 0 & C_{1221} & 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1221} & 0 & C_{1212} & 0 \\ C_{1122} & 0 & 0 & 0 & C_{1122} & 0 & 0 & 0 & C_{1111} \end{bmatrix} \tag{52}$$

Widać, że do opisu własności sprężystych kryształu regularnego zorientowanego zgodnie z układem komórki elementarnej potrzebna jest znajomość czterech niezależnych stałych: C_{1111} , C_{1122} , C_{1212} oraz C_{1221} . Należy zauważyć, że taka postać macierzy oznacza, że warunek termodynamiczny w postaci niezależności pracy odkształcenia od kolejności deformacji jest jak najbardziej spełniony, gdyż zachodzi równość $C_{ijkl} = C_{klij}$. Jednocześnie, taka forma zapisu macierzy, a przede wszystkim nierówności $C_{ijkl} \neq C_{jikl}$ (np. $C_{1212} \neq C_{2112}$) i $C_{ijkl} \neq C_{ijlk}$ (np. $C_{1212} \neq C_{1221}$) powodują, że pomimo faktu symetryczności tej macierzy, to nie da się jej zastąpić macierzą 6x6!

Wniosek jaki nasuwa się w związku z tym faktem, prowadzi do poddania w wątpliwość zasadności stosowania zapisu dwuwskaźnikowego, a to z kolei zmusza do dokładniejszego prześledzenia i weryfikacji podstaw fizycznych dynamicznej metody wyznaczania wartości stałych sprężystości.

2.6 WERYFIKACJA ZAŁOŻEŃ DYNAMICZNEJ METODY WYZNACZANIA STAŁYCH SPRĘŻYSTOŚCI NA DRODZE EKSPERYMENTALNEJ

W świetle argumentów zaprezentowanych w poprzednim rozdziale, należy ponownie przeanalizować tok rozumowania zaprezentowany w rozdziale 2.3. Konieczność tej analizy spowodowana jest pojawiającą się wątpliwością, co do jednoznaczności sposobu wyznaczenia stałej C_{12} . Jej potwierdzeniem byłaby możliwość uzyskania innej wartości tej stałej przy założeniu, że wartości stałych C_{11} , C_{44} i C'_{11} , są takie same, i równocześnie otrzymać postać macierzy stałych sztywności, której liczbę składowych niezależnych zredukowano wyłącznie poprzez symetrię sieci tj. macierz typu (52). Bardzo istotnym i wartym szczególnego podkreślenia jest fakt, że wartości, których stałość się tutaj zakłada, są wartościami zmierzonymi.

Rozważmy, zatem równanie (48) opisujące stałą C'_{11} (C'_{1111} dla kierunku $\langle 110 \rangle$ sieci), której wartość, zależy od wszystkich trzech stałych, i w oparciu, o którą „wylicza się” stałą $C_{12} = C_{1122}$. Jednakże, uwzględniając założenie o braku równości pomiędzy stałymi typu C_{ijkl} i C_{ijlk} to rozważane równanie przyjmuje postać:

$$C'_{1111} = \frac{1}{2} (C_{1111} + C_{1122} + C_{1212} + C_{1221}) \quad (53)$$

W powyższym równaniu „wytłuszczone” stałe są wyznaczane podczas bezpośredniego pomiaru. Jak widać tylko trzy spośród pięciu są wielkościami mierzonymi, co oznacza, że pozostałe dwie mogą teoretycznie tworzyć nieskończoną liczbę stałych. Co więcej, oznacza to również, że możliwe jest znalezienie takich rozwiązań (innych od powszechnie uznanych i stabelaryzowanych), które byłyby nie tylko zgodne z wynikami pomiarów prędkości trzech fal propagujących w kryształach, lecz również zgodne z warunkiem jego symetrii. Innymi słowy istnieje wiele par wartości stałych C_{1122} i C_{1221} , które będą spełniały powyższe warunki.

Jak wspomniano w poprzednim rozdziale, macierz postaci (59) jest macierzą nieodwracalną. W związku z tym, nasuwa się więc pytanie, jak wyliczono wartości stałych S_{ij} , które można znaleźć w tablicach fizycznych, dla kryształów regularnych oznaczanych jako S_{11} , S_{12} i S_{44} . Okazuje się, że wzory transformacyjne wyprowadzono

przyjmując, że stałe typu $C_{1221} = 0$ [4, 7], bo właśnie przy takich założeniach składowe macierzy odwrotnej (S_{1111} , S_{1212} , S_{1122} czyli odpowiednio S_{11} , S_{12} i S_{44}) przyjmują wartości zgodne z danymi literaturowymi (Tablica 4).

W celu uwidocznienia tego problemu przeprowadzono obliczenia na przykładzie kryształu Cu. Najpierw wyliczono ile wynosiłaby stała $C'_{11} = C'_{1111}$ w kierunku [110]. Obliczenia oparto na prawie transformacji (30) i otrzymano, że stała sprężystości w tym kierunku ma wartość 220,279 GPa. W świetle wcześniej pokazanego sposobu wyznaczania stałych, oznacza to, że pomiar prędkości fali podłużnej, rozchodzącej się w kierunku $\langle 110 \rangle$ kryształu miedzi pozwolił na otrzymanie właśnie takiej wartości

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} 168,42 & 0 & 0 & 0 & 121,42 & 0 & 0 & 0 & 121,42 \\ 0 & 75,359 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 75,359 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 75,359 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 121,42 & 0 & 0 & 0 & 168,42 & 0 & 0 & 0 & 121,42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 75,359 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 75,359 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 75,359 & 0 \\ 121,42 & 0 & 0 & 0 & 121,42 & 0 & 0 & 0 & 168,42 \end{bmatrix}$$

Tablica 3. Macierz stałych C_{ijkl} dla Cu w układzie kryształu ($C_{1221} = 0$) [GPa].

$$S_{ijkl} = \begin{bmatrix} 0,0150 & 0 & 0 & 0 & -0,0063 & 0 & 0 & 0 & -0,0063 \\ 0 & 0,0133 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0133 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0133 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0063 & 0 & 0 & 0 & 0,0150 & 0 & 0 & 0 & -0,0063 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0133 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0133 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0133 & 0 \\ -0,0063 & 0 & 0 & 0 & -0,0063 & 0 & 0 & 0 & 0,0150 \end{bmatrix}$$

Tablica 4. Macierz stałych sprężystości kryształu miedzi $S_{ijkl} = C_{ijkl}^{-1}$ [GPa⁻¹]

tej stałej. Taki wynik pomiaru, a następnie przyjęcie założenia o zerowej wartości stałej C_{1221} implikuje, zgodnie z zależnością (53), wartość stałej C_{1122} równą 196,779 GPa (Tablica 5). Jednakże uwzględniając taką wartość stałej C_{1122}

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} 168,42 & 0 & 0 & 0 & 196,779 & 0 & 0 & 0 & 196,779 \\ 0 & 75,359 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 75,359 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 75,359 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 196,779 & 0 & 0 & 0 & 168,42 & 0 & 0 & 0 & 196,779 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 75,359 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 75,359 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 75,359 & 0 \\ 196,779 & 0 & 0 & 0 & 196,779 & 0 & 0 & 0 & 168,42 \end{bmatrix}$$

Tablica 5. Macierz stałych C_{ijkl} w układzie kryształu ($C_{1221}=0$ i $C_{1122}= 196,779$) [GPa].

w macierzy stałych sztywności, to po jej odwróceniu macierz współczynników S_{ijkl} przyjmuje ewidentnie błędne wartości [50] ($S_{1111}= -0,0229$, a więc wartość ujemną, natomiast stała $S_{1122}= 0,0123$ czyli dodatnią) – Tablica 6.

$$S_{ijkl} = \begin{bmatrix} -0,0229 & 0 & 0 & 0 & 0,0123 & 0 & 0 & 0 & 0,0123 \\ 0 & 0,0133 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0133 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0133 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0123 & 0 & 0 & 0 & -0,0229 & 0 & 0 & 0 & 0,0123 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0133 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0133 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0133 & 0 \\ 0,0123 & 0 & 0 & 0 & 0,0123 & 0 & 0 & 0 & -0,0229 \end{bmatrix}$$

Tablica 6. Macierz stałych podatności S_{ijkl} kryształu Cu w układzie podstawowym przy założeniu $C_{1221}=0$ i $C_{1122}= 196,779$ [GPa⁻¹]

W celu uzyskania stałych S_{ijkl} o wartościach logicznych, a więc spełniających warunki, że $S_{1111} > 0$ oraz $S_{1122} < 0$ należy znaleźć inną wartość stałej C_{1221} , która jak wykazały wcześniejsze obliczenia nie może być równa zero. Poniżej zaprezentowano

kilka możliwych kombinacji stałych C_{1122} i C_{1221} , które spełniają zarówno powyższe warunki, jak i równanie (53), przedstawiając je w postaci macierzy – Tablice 7, 8 i 9. Zaprezentowano również odpowiadające im macierze odwrotne zawierające nowe wartości stałych sprężystości – Tablice 10, 11 oraz 12.

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} 168,42 & 0 & 0 & 0 & 136,779 & 0 & 0 & 0 & 136,779 \\ 0 & 75,359 & 0 & 60,000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 75,359 & 0 & 0 & 0 & 60,000 & 0 & 0 \\ 0 & 60,000 & 0 & 75,359 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 136,779 & 0 & 0 & 0 & 168,42 & 0 & 0 & 0 & 136,779 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 75,359 & 0 & 60,000 & 0 \\ 0 & 0 & 60,000 & 0 & 0 & 0 & 75,359 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 60,000 & 0 & 75,359 & 0 \\ 136,779 & 0 & 0 & 0 & 136,779 & 0 & 0 & 0 & 168,42 \end{bmatrix}$$

Tablica 7. Macierz stałych sztywności kryształu miedzi C_{ijkl} w układzie podstawowym przy założeniu $C_{1221} = 60$ [GPa].

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} 168,42 & 0 & 0 & 0 & 146,779 & 0 & 0 & 0 & 146,779 \\ 0 & 75,359 & 0 & 50,000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 75,359 & 0 & 0 & 0 & 50,000 & 0 & 0 \\ 0 & 50,000 & 0 & 75,359 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 146,779 & 0 & 0 & 0 & 168,42 & 0 & 0 & 0 & 146,779 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 75,359 & 0 & 50,000 & 0 \\ 0 & 0 & 50,000 & 0 & 0 & 0 & 75,359 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50,000 & 0 & 75,359 & 0 \\ 146,779 & 0 & 0 & 0 & 146,779 & 0 & 0 & 0 & 168,42 \end{bmatrix}$$

Tablica 8. Macierz stałych sztywności kryształu miedzi C_{ijkl} w układzie podstawowym przy założeniu $C_{1221} = 50$ [GPa].

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} 168,42 & 0 & 0 & 0 & 156,779 & 0 & 0 & 0 & 156,779 \\ 0 & 75,359 & 0 & 40,000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 75,359 & 0 & 0 & 0 & 40,000 & 0 & 0 \\ 0 & 40,000 & 0 & 75,359 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 156,779 & 0 & 0 & 0 & 168,42 & 0 & 0 & 0 & 156,779 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 75,359 & 0 & 40,000 & 0 \\ 0 & 0 & 40,000 & 0 & 0 & 0 & 75,359 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40,000 & 0 & 75,359 & 0 \\ 156,779 & 0 & 0 & 0 & 156,779 & 0 & 0 & 0 & 168,42 \end{bmatrix}$$

Tablica 9. Macierz stałych sztywności kryształu miedzi C_{ijkl} w układzie podstawowym przy założeniu $C_{1221} = 40$ [GPa].

$$S_{ijkl} = \begin{bmatrix} 0,0218 & 0 & 0 & 0 & -0,0098 & 0 & 0 & 0 & -0,0098 \\ 0 & 0,0362 & 0 & -0,0289 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0362 & 0 & 0 & 0 & -0,0289 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0289 & 0 & 0,0362 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0098 & 0 & 0 & 0 & 0,0218 & 0 & 0 & 0 & -0,0098 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0362 & 0 & -0,0289 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0289 & 0 & 0 & 0 & 0,0362 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0289 & 0 & 0,0362 & 0 \\ -0,0098 & 0 & 0 & 0 & -0,0098 & 0 & 0 & 0 & 0,0218 \end{bmatrix}$$

Tablica 10. Macierz stałych podatności kryształu Cu w układzie podstawowym przy założeniu $C_{1221} = 60$ GPa [GPa⁻¹]

$$S_{ijkl} = \begin{bmatrix} 0,0315 & 0 & 0 & 0 & -0,0147 & 0 & 0 & 0 & -0,0147 \\ 0 & 0,0237 & 0 & -0,0157 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0237 & 0 & 0 & 0 & -0,0157 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0157 & 0 & 0,0237 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0147 & 0 & 0 & 0 & 0,0315 & 0 & 0 & 0 & -0,0147 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0237 & 0 & -0,0157 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0157 & 0 & 0 & 0 & 0,0237 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0157 & 0 & 0,0237 & 0 \\ -0,0147 & 0 & 0 & 0 & -0,0147 & 0 & 0 & 0 & 0,0315 \end{bmatrix}$$

Tablica 11. Macierz stałych podatności kryształu Cu w układzie podstawowym przy założeniu $C_{1221} = 50$ GPa [GPa⁻¹]

$$S_{ijkl} = \begin{bmatrix} 0,0579 & 0 & 0 & 0 & -0,0279 & 0 & 0 & 0 & -0,0279 \\ 0 & 0,0184 & 0 & -0,0098 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0184 & 0 & 0 & 0 & -0,0098 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0098 & 0 & 0,0184 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0279 & 0 & 0 & 0 & 0,0579 & 0 & 0 & 0 & -0,0279 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0184 & 0 & -0,0098 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0098 & 0 & 0 & 0 & 0,0184 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0098 & 0 & 0,0184 & 0 \\ -0,0279 & 0 & 0 & 0 & -0,0279 & 0 & 0 & 0 & 0,0579 \end{bmatrix}$$

Tablica 12. Macierz stałych podatności kryształu Cu w układzie podstawowym przy założeniu $C_{1221} = 40\text{GPa}$ [GPa^{-1}]

Nowe wartości pozostałych stałych sprężystości otrzymane przy założeniu różnych wyjściowych wartości stałej C_{1221} zastosowano w dalszej części pracy do obliczenia przewidywanych wartości liczby Poissona dla różnych orientacji kryształów miedzi. Umożliwiły one dokonania porównania zarówno wyników pomiarów z wartościami „teoretycznymi”, jak również jednoczesnego skonfrontowania „trafności” przewidywanych wartości dla modelu w ujęciu „klasycznym” (trzy stałe sprężystości) i „nowym” (cztery stałe). Zestawienie wspomnianych wartości liczbowych znajduje się w tabeli 6.

3 CEL PRACY

O poprawności teorii i jej założeń świadczy zgodność eksperymentu z wynikami przez nią przewidywanymi. W związku z powyższym zagadnienia przedstawione w poprzednich rozdziałach, powodują, że niezbędnym staje się sprawdzenie zgodności wyników pomiarów eksperymentalnych: dynamicznych (pomiar prędkości fal ultradźwiękowych) oraz statycznych (pomiar zmian geometrii kryształów w próbie rozciągania – pomiar liczby Poissona) z modelem teoretycznym, który uwzględnia wszystkie trzy argumenty zaprezentowane w rozdziale 2.2.

W oparciu o zasygnalizowany powyżej problem naukowy oraz przesłanki przedstawione w rozdziale 2.3 sformułowano temat niniejszej pracy.

Dodatkowo postawiono pytanie powiązane z problemem głównym, a mianowicie:

Czy zależność 48 oparta na 3 przesłankach omówionych w rozdziale 2.2 i określająca wartość stałej C_{12} pozwala na jej jednoznaczne wyznaczenie?

Rozważenie tematu pracy oraz próba odpowiedzi na powyższe pytanie stanowi cel niniejszej pracy.

4 BADANIA WŁASNE

4.1 METODOLOGIA BADAŃ

Badania doświadczalne na monokryształach stanowiły istotę analizy zagadnienia. Pierwszym etapem było wykonanie pomiarów na kryształach o orientacji kubicznej. Następnie wykonano pomiary na próbkach o takiej samej geometrii, lecz pochodzących z kryształów o innych orientacjach.

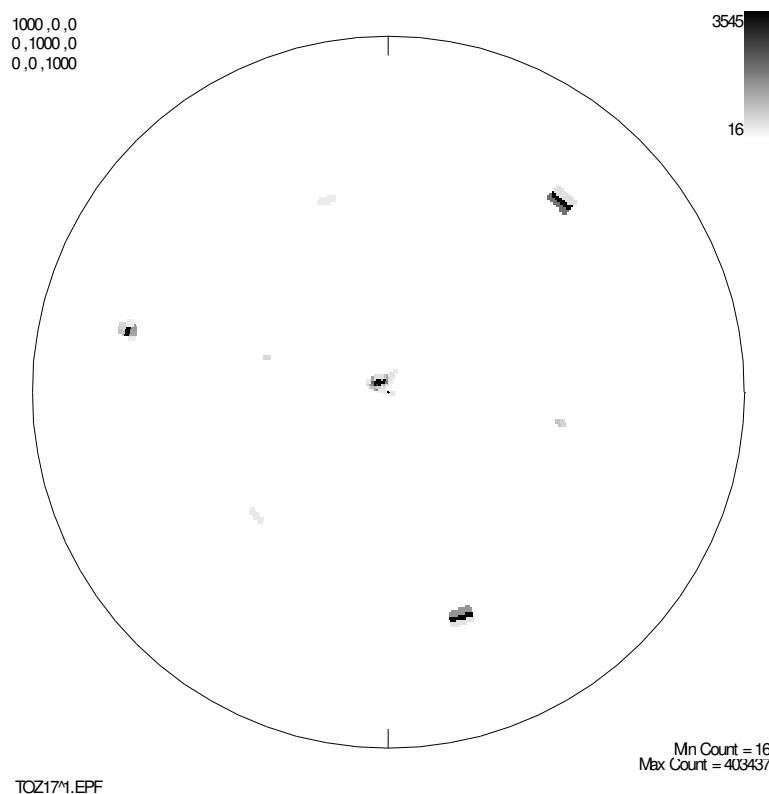
Podsumowując, program badań obejmował przeprowadzenie następujących eksperymentów:

1. Wykonanie pomiarów zmian geometrii monokryształów w warunkach deformacji sprężystej w trakcie próby jednoosiowego rozciągania – pomiar współczynnika Poissona, na przykładzie kryształów miedzi:
 - a.) o orientacji kubicznej,
 - b.) o orientacjach innych niż te o wysokiej symetrii.
2. Przeprowadzenie pomiarów prędkości propagacji fal sprężystych podłużnych oraz poprzecznych w kryształach o różnych orientacjach, w tym o orientacji podstawowej.

4.1.1 PRÓBY ROZCIĄGANIA

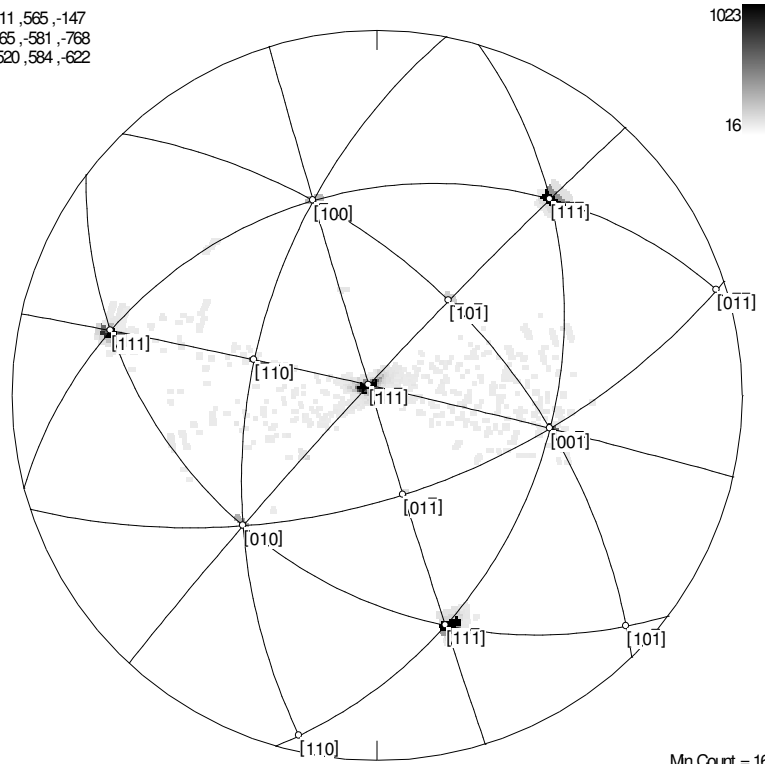
Badania przeprowadzono na monokryształach Cu o geometrii 150x10x10[mm] i orientacjach przedstawionych na rys. 9 oraz w tabelicy 13. Wszystkie kryształy zostały wyhodowane w laboratorium Katedry Struktury i Mechaniki Ciała Stałego metodą Basińskiego - pionowego gradientu temperatury.

Orientacja kryształów została określona poprzez zarejestrowanie rentgenowskich figur biegunowych pochodzących od płaszczyzn typu {111}, a następnie ich rozwiązanie w sposób półautomatyczny w programie „Rzut Stereo2”. Metoda ta polega na skorelowaniu siatki przedstawiającej trójkąty podstawowe z wyświetlonym obrazem tekstury (Rys. 7 i 8). Orientację uzyskuje się tu bezpośrednio z macierzy obrotu układu rzutu stereograficznego siatki względem układu projekcji obrazu. Poprzez jednoczesne pozycjonowanie trójkątów podstawowych do wszystkich dostępnych pików teksturowych osiąga się dokładność rozwiązania poniżej 1°.



Rys. 7. Przykład zarejestrowanej figury biegunowej wykonanej przy wykorzystaniu dyfrakcji od płaszczyzn {111}.

811,565,-147
265,-581,-768
-520,584,-622



Min Count = 16
Max Count = 403437

TOZ17*.EPF

Rys. 8. Figura biegunowej wraz z graficznym rozwiązaniem w postaci siatki trójkątów podstawowych.

		h	k	l
Cu01	KW	-862	387	324
	KP	-64	-721	689
	KN	501	573	647

		h	k	l
Cu02	KW	415	-847	330
	KP	578	526	622
	KN	-701	-67	708

		h	k	l
Cu03	KW	764	201	612
	KP	-435	861	260
	KN	-474	-465	746

		h	k	l
Cu04	KW	-821	515	245
	KP	-125	-582	802
	KN	556	628	543

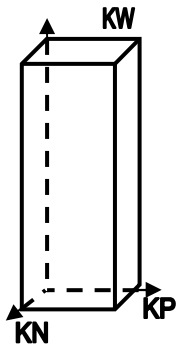
		h	k	l
Cu05	KW	707	609	-358
	KP	-641	766	37
	KN	297	203	932

		h	k	l
Cu06	KW	990	50	-127
	KP	-28	986	163
	KN	133	-158	978

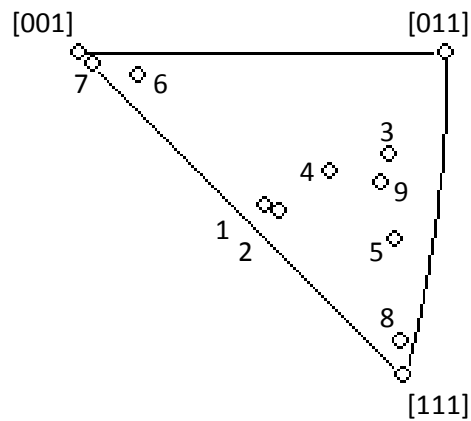
		h	k	l
Cu07	KW	999	27	29
	KP	-27	999	14
	KN	-29	-14	999

		h	k	l
Cu08	KW	-526	618	-582
	KP	-749	-14	661
	KN	400	785	471

		h	k	l
Cu09	KW	757	-600	-255
	KP	505	788	-350
	KN	412	136	900

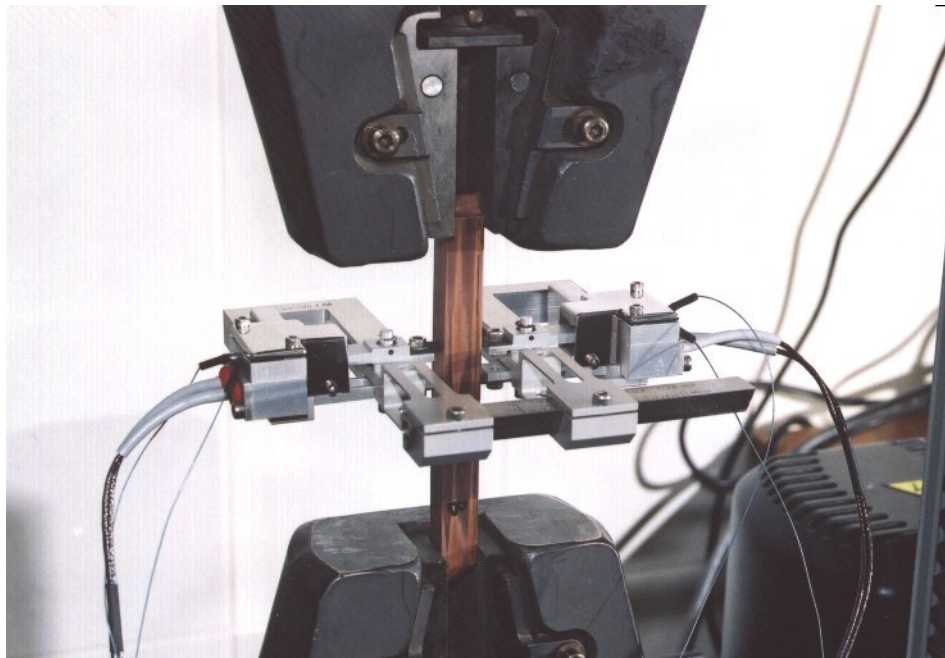


Tablica 13. Orientacje kryształów wyrażone za pomocą wskaźników Millera



Rys. 9. Przedstawienie orientacji kryształów w trójkącie podstawowym

Rozciąganie kryształów przeprowadzono na maszynie wytrzymałościowej INSTRON. Do pomiarów odkształceń i naprężeń podczas tych prób użyto dwuosowego ekstensometru o rozdzielczości pomiarowej $\pm 0,25\%$ wartości mierzonej, który widoczny jest na rys. 10. Baza pomiarowa na kierunku wzdłużnym dla wszystkich próbek wynosiła 12,5 mm, a na kierunkach poprzecznych ustawiana była indywidualnie dla każdej próbki (w przybliżeniu jej szerokość). Wszystkie próbki poddawano próbie rozciągania z prędkością 0,1 mm/min.



Rys.10. Dwuosowy ekstensometr podczas pomiaru

Ponieważ liczbę Poissona definiuje się jako stosunek odkształcenia poprzecznego do odkształcenia wzdłużnego

$$\nu = -\varepsilon_p / \varepsilon_w \quad (54)$$

to podczas rozciągania należało zmierzyć przewężenie jak i wydłużenie względne próbki. Dzięki zastosowaniu dwuosiowego ekstensometru (rys. 11), który umożliwiał jednoczesny pomiar obydwóch wielkości z odpowiednio dużą częstotliwością zbierania danych (5 pomiarów na sekundę), można było wyznaczać linię trendu w układzie ϵ_p vs. ϵ_w (na wykresach oznaczonych odpowiednio Strain1(T) oraz Strain2(L)) z wystarczającą dokładnością, a tym samym bezpośrednio mierzyć liczbę Poissona będącą współczynnikiem kierunkowym tejże prostej (Rys 13-52). Analogicznie wyznaczano wartość modułu Younga E w układzie naprężenie rzeczywiste σ (True stress) vs. wydłużenie (Strain2(L)) poprzez określenie współczynnika kierunkowego prostej - linii trendu (Rys 53-92). Wszystkie pomiary wykonano w taki sam sposób dla obydwóch ścian kryształów poddanych rozciąganiu.

Zakładając, że osią rozciągania jest kierunek 1, a kierunki prostopadłe do ścian rozciąganego monokryształu oznaczy się jako 2 i 3, to wyrażenia na współczynniki Poissona dla tych ścian przyjmą formę odpowiednio:

$$v_1 = - \epsilon_{22} / \epsilon_{11} \quad \text{oraz} \quad v_2 = - \epsilon_{33} / \epsilon_{11}. \quad (55)$$

Ponieważ poszczególne odkształcenia, zgodnie z zależnościami (16), można przedstawić jako następujące iloczyny:

$$\epsilon_{22} = S_{2211} \sigma_{11}, \quad \epsilon_{33} = S_{3311} \sigma_{11} \quad \text{oraz} \quad \epsilon_{11} = S_{1111} \sigma_{11}, \quad (56)$$

to po uwzględnieniu powyższych zależności wzory (55) przyjmują następującą postać:

$$\text{w przypadku ściany 2:} \quad v_1 = - S_{2211}/S_{1111}, \quad (57)$$

$$\text{w przypadku ściany 3:} \quad v_2 = - S_{3311}/S_{1111}. \quad (58)$$

Należy pamiętać, że powyższe wzory określają wartość liczby Poissona dla wartości stałych podatności w układzie kryształu.

Ze względów statystycznych na każdy pomiar składało się 40 serii pomiarowych.

4.1.2 BADANIA Z ZASTOSOWANIEM FAL ULTRADŹWIĘKOWYCH

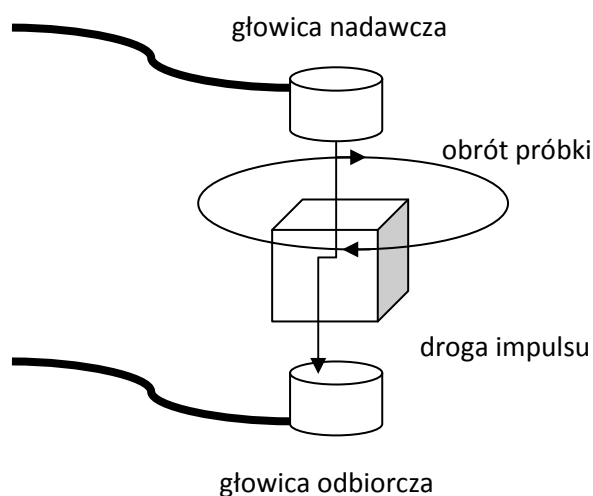
W przypadku pomiarów ultradźwiękowych zastosowano próbki będące wycinkami wspomnianych powyżej monokryształów. Zostały one wycięte w taki sposób, aby spełniały warunki geometryczne dla próbek przeznaczonych do tego rodzaju badań, tj. aby ich wymiary zewnętrzne były wielokrotnie większe od długości zastosowanej fali, a kształt próbki był prostopadłościanem, którego wszystkie ściany przeciwległe były do siebie równoległe [2,3,10].

Do pomiarów ultradźwiękowych stosowano prototyp UZP-1 (INCO VERITAS) (odpowiednik defektoskopu DI-40, ale o większym wzmocnieniu i zwiększonej dokładności pomiaru czasu przejścia fali do 0,01 μ s) z przetwornikami do fal podłużnych $f = 10$ MHz, poprzecznych $f = 2-4$ MHz. Dodatkowo przy pomiarach falami poprzecznymi stosowano specjalnie wykonany wzmacniacz. Jako ośrodek sprzęgającego przetworniki z badaną próbką lub wzorcami stosowano olej (lub ciekłą parafinę) dla przetworników fal podłużnych, natomiast w przypadku fal poprzecznych stosowano balsam kanadyjski (jeden z rodzajów żywicy). Wzorce stosowano do skalowania i zerowania aparatu ultradźwiękowego.

Znanych jest wiele metod pomiaru prędkości propagacji fal ultradźwiękowych w ciałach stałych [3,11,12]. W badaniach wykonanych na potrzeby niniejszej pracy zastosowano metodę echa, polegającą na pomiarze czasu przejścia fali przez materiał od momentu wytworzenia impulsu i wprowadzenia go do badanego materiału, poprzez jego odbicie się (w tym przypadku od ścianki próbki) i powrotu do głowicy nadawczo-odbiorczej oraz metodę przejścia, polegającą na pomiarze czasu przejścia fali przez materiał od momentu wytworzenia przez głowicę nadawczą i wprowadzenia go do badanego materiału do momentu dotarcia do głowicy odbiorczej umieszczonej po przeciwnej stronie badanej próbki [11].

4.1.2.1 FALE PODŁUŻNE

Pomiary rozchodzenia się fali podłużnej wykonano dla każdej prostopadłościennej próbki w trzech nawzajem prostopadłych kierunkach stosując metodę przejścia (dwa przetworniki) lub metodę echa (jeden przetwornik).

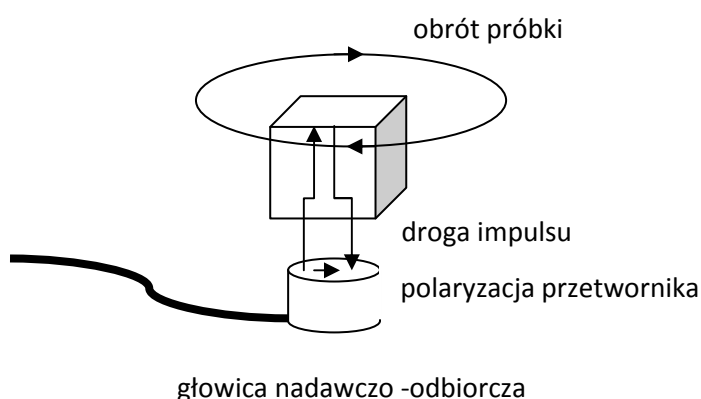


Rys. 11. Schematyczny zestaw pomiarowy do badań z wykorzystaniem fal podłużnych – metoda przejścia

W każdej z tych metod mierzono prędkość w oparciu o pierwszy impuls oraz o kilka następnych ech. Rozstęp wyznaczonych prędkości z kilku kolejnych ech w danej serii pomiarowej nie przekraczał 0,3%. Dla każdej badanej próbki wykonano po kilka serii pomiarowych, a na każdą z nich składało się przynajmniej 5 niezależnych pomiarów wykonanych dla danego kierunku próbki oraz na wzorcach.

4.1.2.2 FALE POPRZECZNE

W pomiarach falami poprzecznymi korzystano ze specjalnych typów przetworników (IPPT PAN), które pozwalały na wprowadzanie fal dokładnie prostopadle do ścian próbki (polaryzacja przetworników równoległa do tej powierzchni). W badaniach stosowano metodę przejścia i metodę echa. W metodzie przejścia oba przetworniki spolaryzowane były równolegle, a między nimi obracano próbkę w trakcie pomiaru o zadany kąt (15°). W metodzie echa również obracano próbkę w trakcie pomiaru o taki sam kąt (rys. 12). Taki sposób przeprowadzenia pomiarów pozwolił na określenie zmian mierzonych prędkości fali poprzecznej w zależności od zorientowania monokryształu i kierunku polaryzacji fali poprzecznej w trakcie pomiaru. Równocześnie dla niektórych próbek określano zmiany amplitudy impulsu fali (tłumienie) w zależności od kierunku polaryzacji fali względem wyróżnionego kierunku próbki.



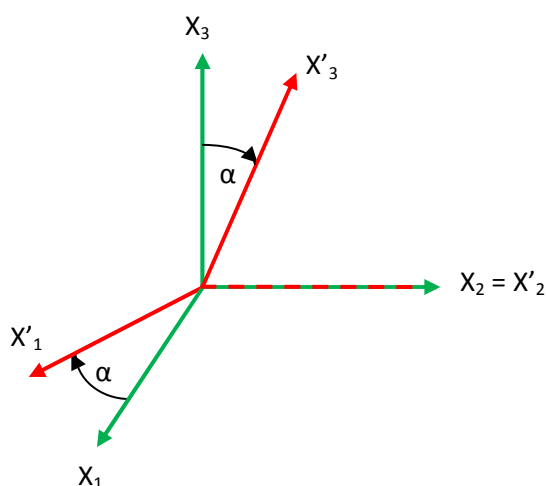
Rys. 12. Schematyczny zestaw pomiarowy do badań z wykorzystaniem fal poprzecznych – metoda echa

4.2 PRZEWIDYWANE I ZMIERZONE WARTOŚCI DLA ORIENTACJI KUBICZNEJ

W celu zweryfikowania zastosowanych metod pomiarowych pierwsze pomiary (jako odniesienie) postanowiono wykonać na kryształach miedzi o orientacji kubicznej, gdyż w przypadku takiej orientacji były dostępne dane porównawcze (tabelaryczne). Ponieważ kryształ oznaczony Cu07 posiadał orientację praktycznie kubiczną (odchylenie w granicach błędów pomiarowych tj. $<1^\circ$), to właśnie on był traktowany jako kryształ referencyjny - do porównania otrzymanych wyników z danymi literaturowymi. Wykonano następujące badania:

- a.) pomiary prędkości fal poprzecznych – stała C_{1212}
- b.) próby rozciągania – moduł Younga i liczba Poissona

Wyznamy teraz wartość stałej C_{1212} (C_{44}) podczas obrotu prostokątnego układu współrzędnych o kąt α wokół jednej z tworzących go osi (Rys.13). Przyjmijmy, że osią tą będzie oś X_2 . Wybrana stała określa związek pomiędzy naprężeniem ścinającym σ_{12} a składową ε_{12} tensora odkształceń, zdefiniowanych w nowym (obróconym) układzie współrzędnych. Przyjmijmy, że wyjściowym układem współrzędnych będzie układ zbudowany na kierunkach $X_1 = [100]$,



Rys. 13. Obrót ortogonalnego układu wokół osi X_2 o kąt α

$X_2 = [010]$, $X_3 = [001]$, a więc będzie układem odpowiadającym komórce elementarnej kryształu. Z tego powodu wyjściowy tensor stałych sprężystości wygląda następująco:

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & C_{12} & 0 & 0 & 0 & C_{12} \\ 0 & C_{44} & 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & C_{44} & 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & 0 & 0 & 0 & C_{11} & 0 & 0 & 0 & C_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & C_{44} & 0 \\ C_{12} & 0 & 0 & 0 & C_{12} & 0 & 0 & 0 & C_{11} \end{bmatrix} \quad (59)$$

Dokonajmy teraz transformacji stałych do nowego układu odniesienia. Pamiętając, że oś X_2 pozostaje równoległa do krawędzi komórki (kierunku $[010]$) kryształu, a osie X_1 i X_3 tworzą kąty α i $90^\circ - \alpha$ odpowiednio z kierunkami $[100]$ i $[001]$, to macierz transformacji przyjmuje następującą formę:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (60)$$

Opierając się teraz na zależności (30) oraz korzystając z macierzy stałych w układzie komórki (59) i macierzy transformacji (31) obliczmy wartość stałej C'_{1212} podczas określonego wcześniej obrotu układu odniesienia:

$$\begin{aligned} C'_{1212} &= a_{11} a_{22} a_{11} a_{22} C_{1212} + a_{13} a_{22} a_{13} a_{22} C_{3232} \\ &= \cos^2 \alpha C_{1212} + \sin^2 \alpha C_{3232} = C_{44} \end{aligned} \quad (61)$$

Taki wynik oznacza, że, w jednej z płaszczyzn tworzących komórkę elementarną, niezależnie od rozmieszczenia w niej atomów i charakteru wiązań między tymi atomami, moduł na ścinanie nie zależy od kąta α - jest izotropowy. Podkreślmy, że wynik jest stały bez względu na kierunek, a więc we wszystkich

kierunkach leżących w płaszczyźnie (010). Dodatkowo, jeśli uwzględnimy argument o symetrii tensorów zarówno naprężenia jak i deformacji, a tym samym uznamy, że prawdą jest, iż $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ oraz $C_{ijkl} = C_{jikl}$, to również w przypadku całej rodziny płaszczyzn należących do pasa $\langle 010 \rangle$ moduł na ścinanie będzie miał tę samą wartość, jeżeli kierunek ścicia jest zgodny z tą osią.

Zbadajmy teraz, w jakim stopniu wartości modułu na ścinanie wyliczone na podstawie transformacji tensora są zgodne z wartościami otrzymanymi na drodze doświadczalnej. W tym celu wykonano pomiary na wszystkich trzech ścianach prostopadłościennej próbki wyciętej z kryształu oznaczonego 07. Pomiary wykonywane były ze zmienną polaryzacją fali poprzecznej tj. w kierunkach leżących w płaszczyźnie ściany i odległych od siebie o 45° . Wykonano po 4 serie pomiarowe na każdej ścianie próbki, po kilka pomiarów w każdym z kierunków, a wartości średnie zamieszczono w tabeli 1.

Kierunek	Płaszczyzna badania					
	A		B		C	
	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Wartość średnia	Odchylenie standardowe
1	2909,8	27,8	2871,3	30,9	2875,0	17,7
2	2890,3	23,4	2865,3	13,5	2863,0	24,4
3	2875,2	20,4	2841,8	7,8	2887,2	9,3
4	2898,9	36,2	2843,9	29,8	2867,9	20,1
Σ	2893,5	27,9	2855,6	24,4	2873,3	19,2

Tabela 1. Wartości prędkości fali poprzecznej zmierzone na ścianach próbki kryształu miedzi o orientacji kubicznej [m/s].

Korzystając z zależności (40) otrzymanym wartościom prędkości fali ultradźwiękowej wyliczono odpowiadające im wartości stałej C'_{44} przedstawione w Tabeli 2.

Wielkość	Płaszczyzna badania					
	A		B		C	
	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Wartość średnia	Odchylenie standardowe
\overline{V}_T	2893,5	27,9	2873,3	19,2	2855,6	24,4
C'_{44}	75,018	0,007	73,971	0,003	73,063	0,005

Tabela 2. Prędkości fali poprzecznej zmierzone na ścianach próbki kryształu miedzi o orientacji kubicznej [m/s] i odpowiadające im obliczone wartości stałej C'_{44} [GPa].

Jak wynika z tabel 1 i 2 wartości prędkości fal, a tym samym stałych C'_{44} na każdej ze ścian są praktycznie takie same, niezależnie od obrotu próbki względem kierunku polaryzacji sygnału w płaszczyźnie badania. Tym samym potwierdza to otrzymany wynik teoretyczny (61), mówiący o izotropii tej stałej w płaszczyznach typu {100}. Również wartość otrzymanych stałych praktycznie pokrywa się z tabelaryczną wynoszącą 75,359 GPa, a różnica wynosi maksymalnie 3%.

Taki wynik oznacza, że zastosowana metoda badawcza jest wiarygodna, a wykonanie pomiarów poprawne oraz to, że występuje pełna zgodność modelu teoretycznego z doświadczeniem w przypadku kryształu o orientacji kubicznej.

Na kryształach 07 o orientacji zgodnej z komórką elementarną wykonano również pomiary zmian jego geometrii w warunkach deformacji sprężystej. Osiągnięto to podczas prób jednoosiowego rozciągania i dokonano pomiarów współczynnika Poissona oraz modułu Younga. Wyniki zebrano razem z pozostałymi wynikami dla kryształów o innych orientacjach w tabeli 3. Również podczas tego badania osiągnięto zgodność z danymi literaturowymi na akceptowalnym poziomie różnicy do 15%.

4.3 POZOSTAŁE WYNIKI BADAŃ

4.3.1 PRÓBY ROZCIĄGANIA

W tabeli 3 zebrano wyniki otrzymane podczas prób rozciągania przeprowadzonych na poszczególnych kryształach. Zaprezentowano uśrednione wartości modułu Younga oraz liczby Poissona dla wszystkich zbadanych kryształów wraz z wartościami obliczonymi na podstawie prawa transformacji. Następnie zamieszczono przykładowe zestawienie wartości tych współczynników dla kryształu Cu 05. Na kolejnych stronach zaprezentowano również przykładowe wykresy zależności ε_p vs. ε_w (liczba Poissona) oraz σ vs. ε_w (moduł Younga) dla kryształu nr 06 dla kolejnych prób rozciągania. Zamieszczono również przykładowy wykres wartości modułu Younga w płaszczyźnie ściany bocznej próbki kryształu 03 oraz 06.

Cu01	ν_1	ν_2	E
KP	0,784	X	116,52
	0,741		115,87
śr. KP	0,762		116,20
KN	X	0,308	100,87
		0,316	97,24
śr. KN		0,312	99,05
średnia	0,762	0,312	107,63
Trans.	0,393	0,256	111,53

Cu02	ν_1	ν_2	E
KP	0,228	X	87,96
	0,307		100,97
śr. KP	0,268		94,47
KN	X	0,642	91,20
		0,629	96,31
śr. KN		0,635	93,76
średnia	0,268	0,635	94,11
Trans.	0,224	0,490	117,34

Cu03	ν_1	ν_2	E
KP	0,617	X	136,02
	0,720		127,40
śr. KP	0,669		131,71
KN	X	0,157	112,54
		0,181	118,15
śr. KN		0,169	115,35
średnia	0,669	0,169	123,53
Trans.	0,537	0,133	134,42

Cu04	ν_1	ν_2	E
KP	0,584	X	107,40
	0,580		95,64
śr. KP	0,582		101,52
KN	X	0,238	112,01
		0,195	106,23
śr. KN		0,217	109,12
średnia	0,582	0,217	105,32
Trans.	0,461	0,186	123,45

Cu05	ν_1	ν_2	E
KP	0,089	X	157,61
	0,109		151,14
śr. KP	0,099		154,38
KN	X	0,918	169,23
		0,793	156,55
śr. KN		0,855	162,89
średnia	0,099	0,855	158,63
Trans.	0,121	0,601	159,26

Cu06	ν_1	ν_2	E
KP	0,471	X	64,47
	0,474		64,64
śr. KP	0,473		64,56
KN	X	0,447	66,63
		0,441	67,93
śr. KN		0,444	67,28
średnia	0,473	0,444	65,92
Trans.	0,454	0,366	69,14

Cu07	ν_1	ν_2	E
KP	0,472	X	67,18
	0,475		66,73
śr. KP	0,473		66,95
KN	X	0,484	69,11
		0,480	68,92
śr. KN		0,482	69,01
średnia	0,473	0,482	67,98
Trans.	0,420	0,416	66,87

Cu08	ν_1	ν_2	E
KP	0,354	X	163,85
	0,409		159,93
śr. KP	0,381		161,89
KN	X	0,389	182,37
		0,263	178,17
śr. KN		0,326	180,27
średnia	0,381	0,326	171,08
Trans.	0,306	0,234	188,12

Cu09	ν_1	ν_2	E
KP	0,245	X	109,64
	0,258		106,27
śr. KP	0,252		107,96
KN	X	0,584	99,36
		0,657	99,20
śr. KN		0,621	99,28
średnia	0,252	0,621	103,62
Trans.	0,115	0,508	139,91

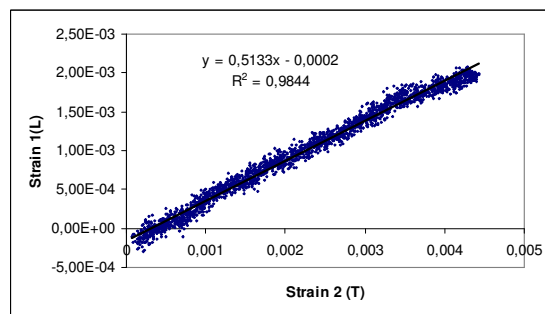
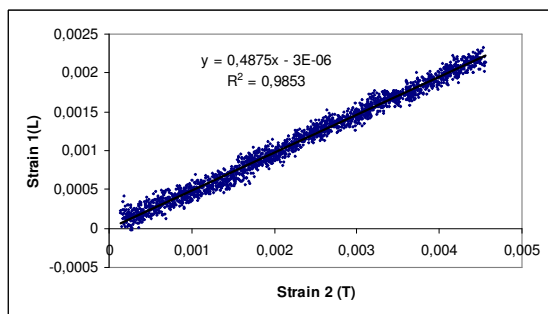
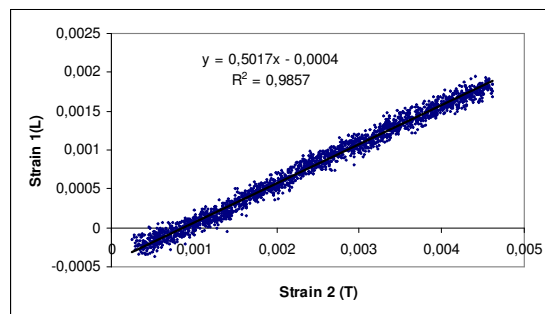
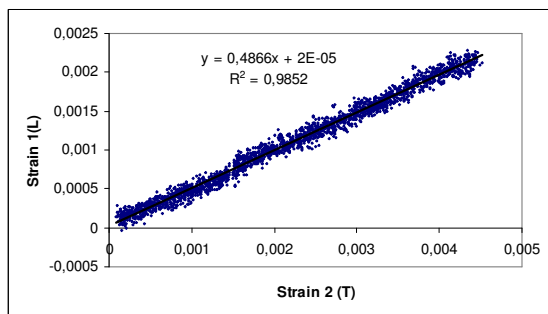
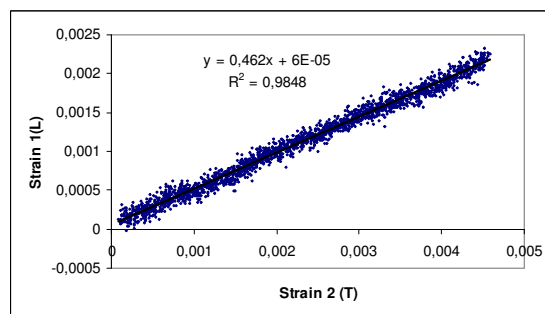
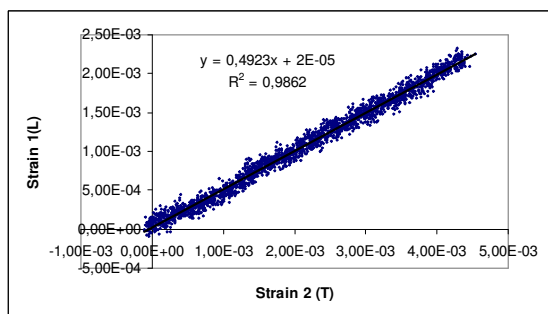
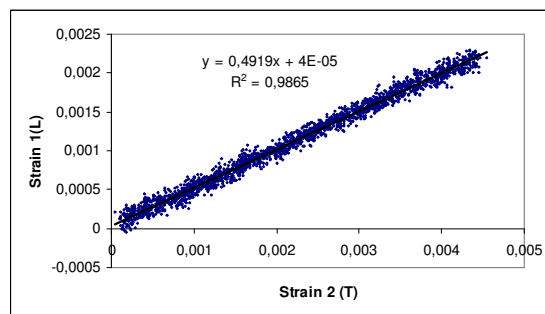
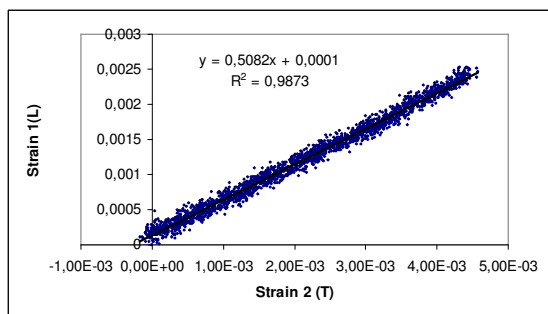
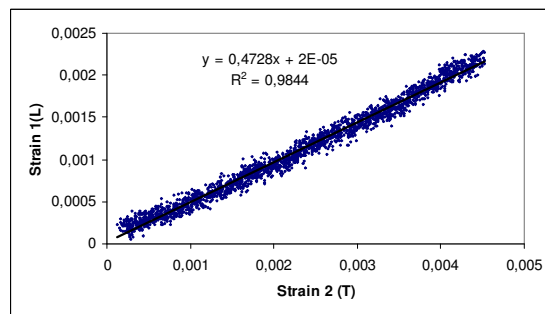
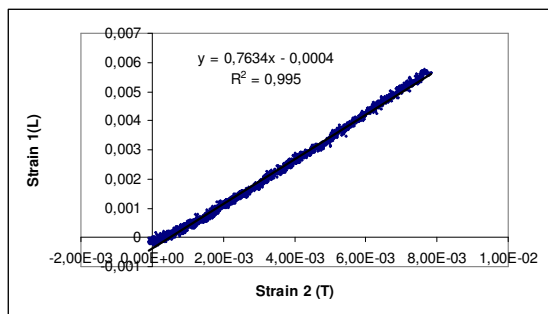
Tabela.3. Zestawienie wartości liczb Poissona oraz modułów Younga - zmierzonych (KP, KN) oraz obliczonych na podstawie prawa transformacji (Trans.)

Kryształ Cu 05 ściana (-641 766 37)				Kryształ Cu 05 ściana (297 203 932)			
nr próby	odrzucone	E	R ²	nr próby	odrzucone	E	R ²
1	43,783		0,9506	1	153,75		0,9868
2		154,22	0,9862	2		169,79	0,9877
3		156,00	0,9881	3		167,09	0,9884
4		153,19	0,9894	4		176,44	0,9870
5		157,30	0,9901	5		173,00	0,9868
6		156,73	0,9893	6		164,48	0,9891
7		159,58	0,9899	7		168,40	0,9883
8		157,42	0,9888	8		168,88	0,9891
9		161,68	0,9879	9		173,49	0,9883
10		158,36	0,9873	10		172,98	0,9879
11		168,38	0,9875	11		168,76	0,9877
12		156,33	0,9904	12		173,19	0,9881
13		157,02	0,9879	13		166,78	0,9890
14		149,25	0,9907	14		166,28	0,9889
15		157,03	0,9904	15		168,35	0,9886
16		161,94	0,9885	16		168,20	0,9883
17		152,91	0,9900	17		167,41	0,9889
18		158,02	0,9889	18		166,74	0,9888
19		159,91	0,9885	19		165,85	0,9884
20		159,33	0,9883	20		169,30	0,9878
21	144,17		0,9901	21	148,36		0,9881
22		149,68	0,9896	22		157,54	0,9896
23		145,36	0,9904	23		152,69	0,9900
24		152,90	0,9902	24		152,95	0,9887
25		161,75	0,9883	25		155,11	0,9902
26		149,46	0,9898	26		154,60	0,9902
27		150,51	0,9896	27		154,76	0,9888
28		153,07	0,9899	28		157,67	0,9897
29		149,88	0,9906	29		160,43	0,9895
30		152,56	0,9903	30		154,95	0,9897
31		149,31	0,9916	31		156,65	0,9894
32		151,36	0,9909	32		156,02	0,9895
33		151,16	0,9902	33		158,07	0,9906
34		152,09	0,9904	34		155,22	0,9989
35		149,66	0,9906	35		160,97	0,9903
36		154,57	0,9899	36		155,56	0,9871
37		148,12	0,9910	37		158,83	0,9880
38		150,34	0,9906	38		157,27	0,9990
39		150,02	0,9905	39		158,64	0,9894
40		149,89	0,9901	40		156,50	0,9901
średnia i odch. st. 154,38 4,89				średnia i odch. st. 162,89 6,97			

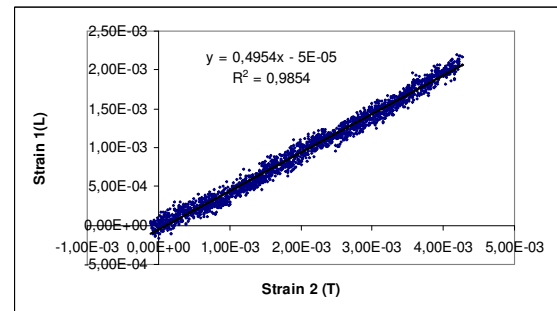
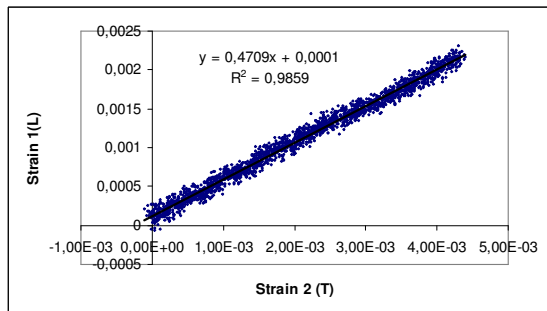
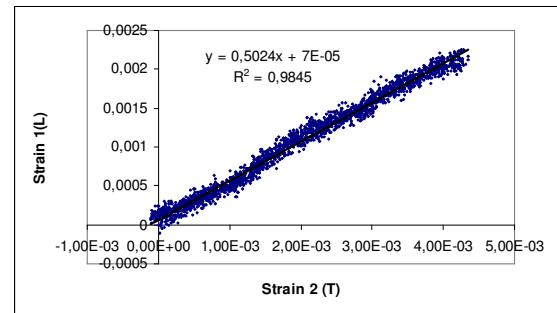
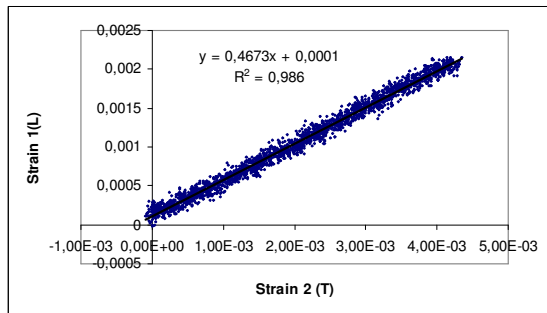
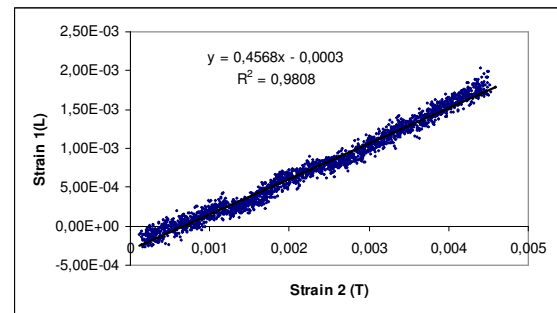
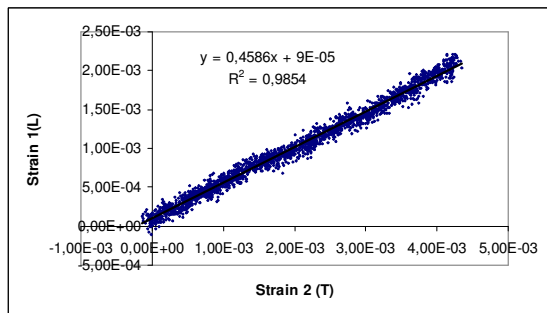
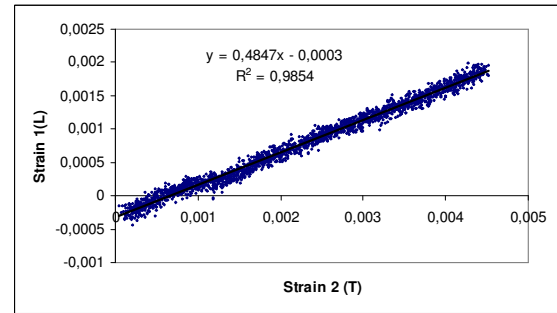
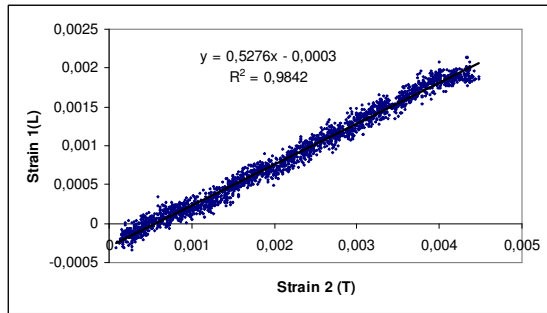
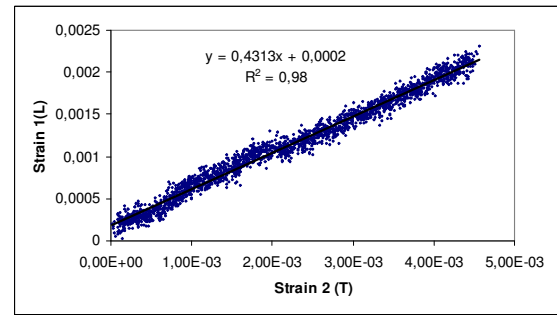
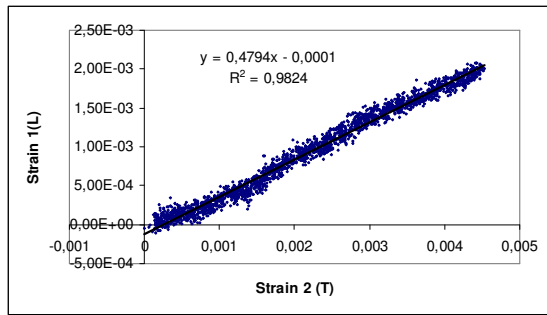
Tabela 4. Zestawienie wyników pomiaru modułu Younga (E) wraz ze współczynnikiem determinacji R² dla każdego pomiaru oraz odchyleniem standardowym dla całej serii pomiarowej dla kryształu 05.

Kryształ Cu 05 ściana (-641 766 37)				Kryształ Cu 05 ściana (297 203 932)			
nr próby	odrzucone	v	R ²	nr próby	odrzucone	v	R ²
1	0,1266		0,9374	1	0,8051		0,9682
2		0,1364	0,5777	2		0,7960	0,9552
3		0,1006	0,4228	3		0,9048	0,9631
4		0,0712	0,2678	4		0,9505	0,9643
5		0,1137	0,4735	5		0,9478	0,9690
6		0,0516	0,1617	6		0,8549	0,9686
7		0,0686	0,2419	7		0,8954	0,9682
8		0,1228	0,5125	8		0,9419	0,9677
9		0,0804	0,2892	9		0,9627	0,9672
10		0,1070	0,4338	10		0,9307	0,9607
11		0,1508	0,5573	11		0,9337	0,9646
12		0,0842	0,2944	12		0,9745	0,9672
13		0,1397	0,4488	13		0,9152	0,9688
14		0,0374	0,0871	14		0,9397	0,9688
15		0,0393	0,0944	15		0,9388	0,9698
16		0,0827	0,2969	16		0,8929	0,9659
17		0,0547	0,1656	17		0,8762	0,9659
18		0,0819	0,2955	18		0,9246	0,9680
19		0,0781	0,2971	19		0,8931	0,9644
20		0,0815	0,3020	20		0,9703	0,9703
21	0,1655		0,6603	21	0,8587		0,9719
22		0,1092	0,4218	22		0,8441	0,9707
23		0,1259	0,4950	23		0,8478	0,9745
24		0,1051	0,4237	24		0,8231	0,9674
25		0,1319	0,4831	25		0,8063	0,9660
26		0,0940	0,4073	26		0,7787	0,9647
27		0,0949	0,3668	27		0,7603	0,9626
28		0,1645	0,6619	28		0,7722	0,9685
29		0,0895	0,3340	29		0,7962	0,9650
30		0,1121	0,4718	30		0,7877	0,9714
31		0,0973	0,3849	31		0,7706	0,9671
32		0,1053	0,4461	32		0,7694	0,9679
33		0,0918	0,3622	33		0,7789	0,9649
34		0,1167	0,4765	34		0,8093	0,9680
35		0,1522	0,6190	35		0,8198	0,9634
36		0,1199	0,4975	36		0,7684	0,9620
37		0,0619	0,2125	37		0,8056	0,9702
38		0,1340	0,5462	38		0,7812	0,9680
39		0,0730	0,2929	39		0,8286	0,9693
40		0,0994	0,4067	40		0,7152	0,9626
średnia i odch. st. 0,099 0,031				średnia i odch. st. 0,855 0,074			

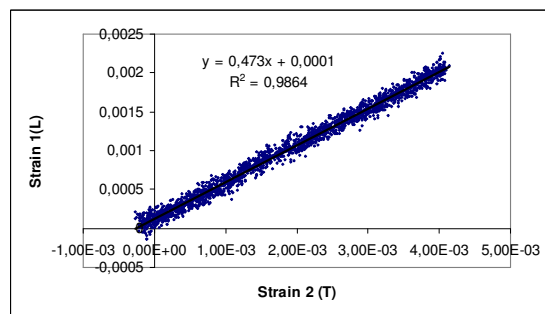
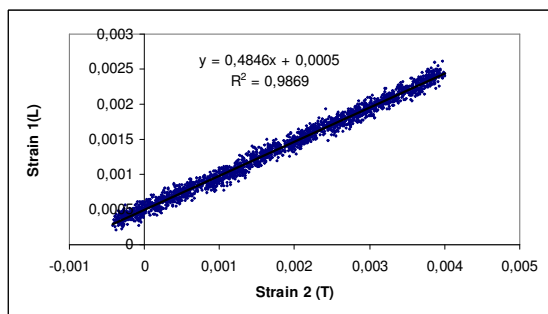
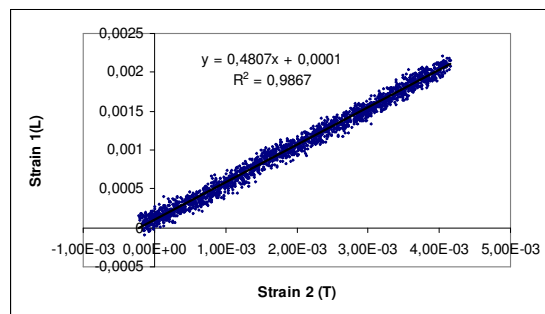
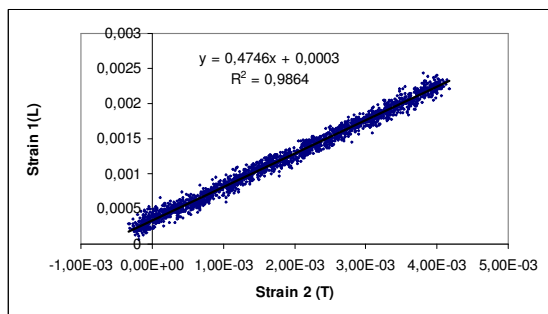
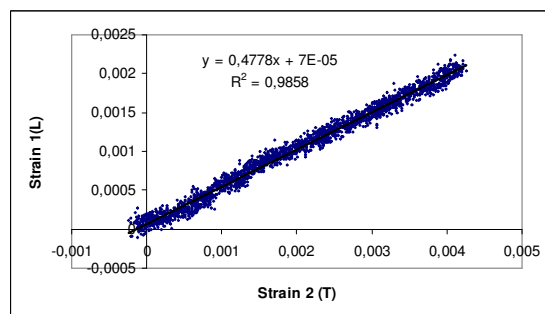
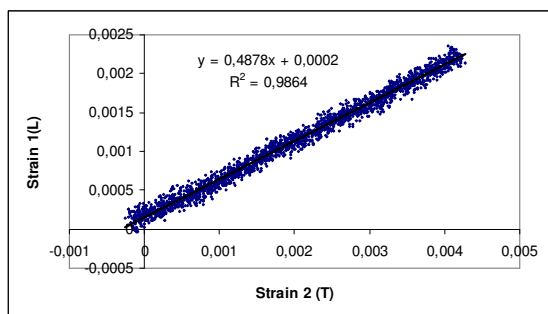
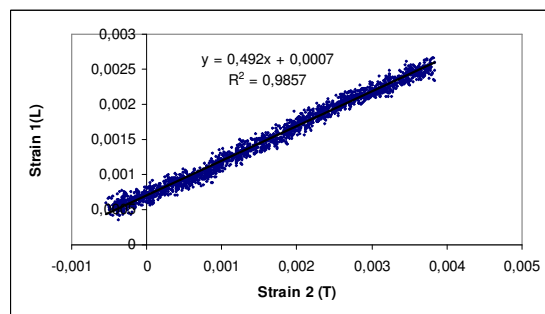
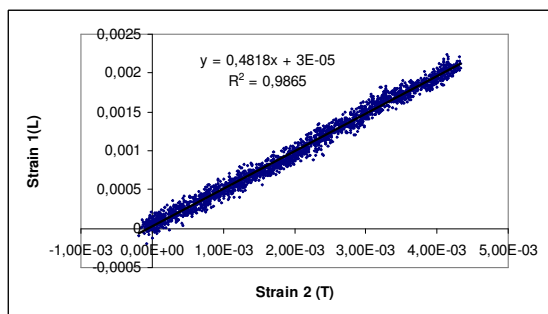
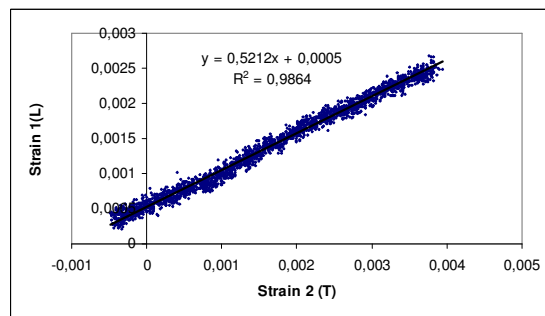
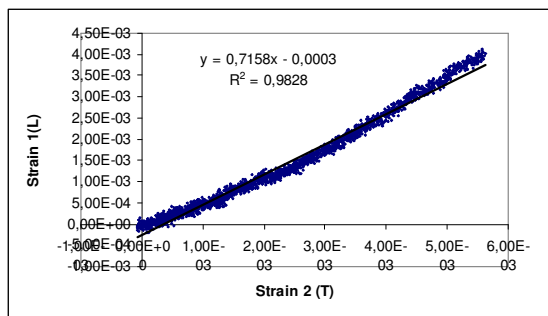
Tabela 5. Zestawienie wyników pomiarów liczby Poissona (v) wraz ze współczynnikiem determinacji R² dla każdego pomiaru oraz odchyleniem standardowym dla całej serii pomiarowej dla kryształu 05.



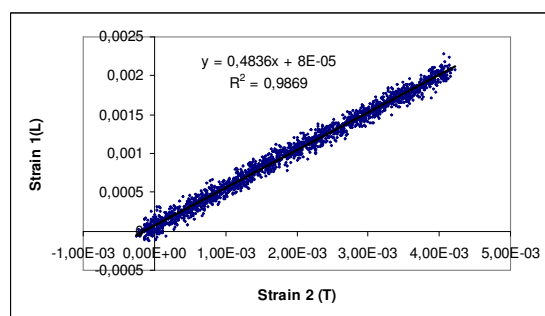
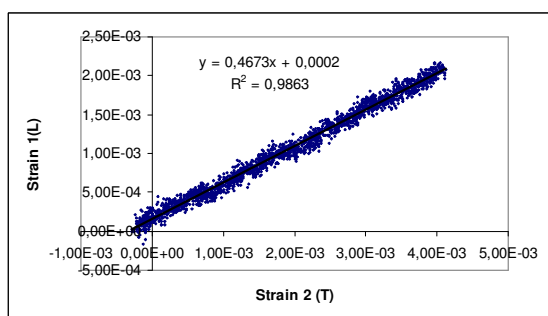
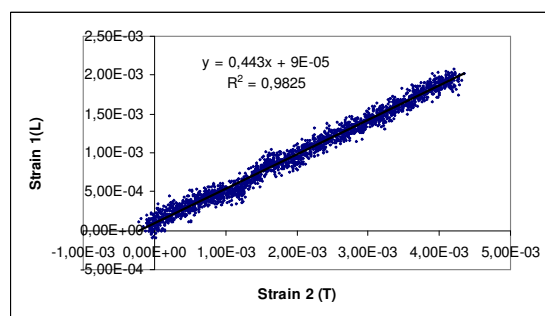
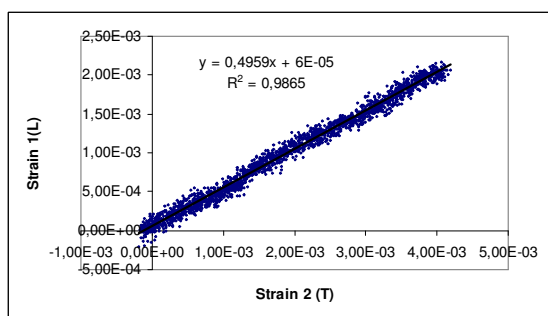
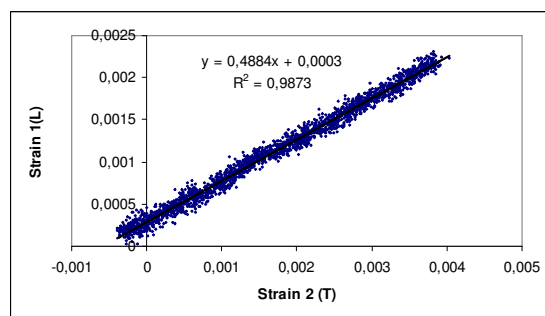
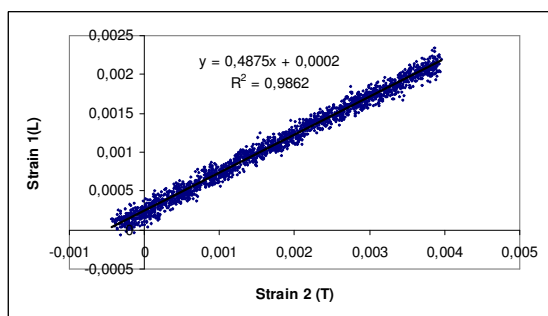
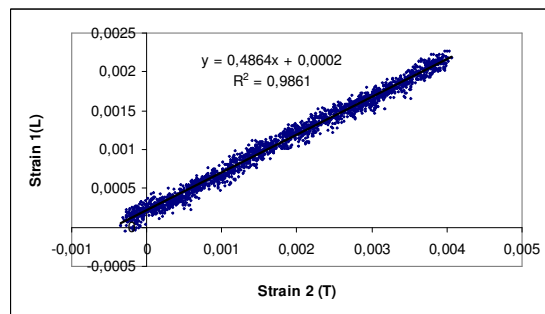
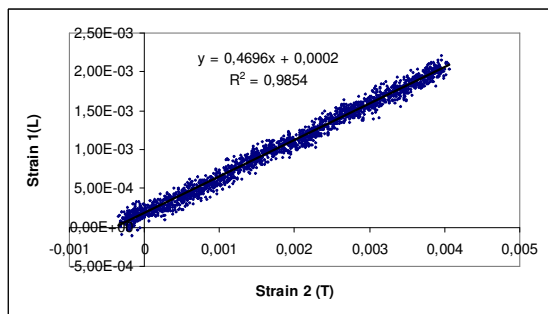
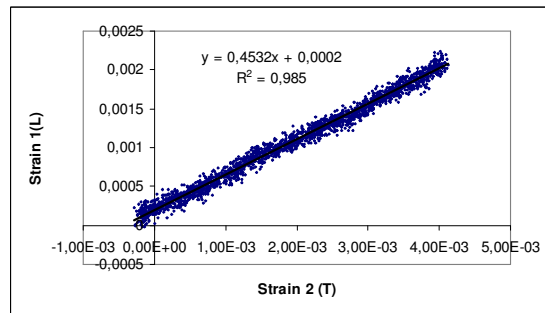
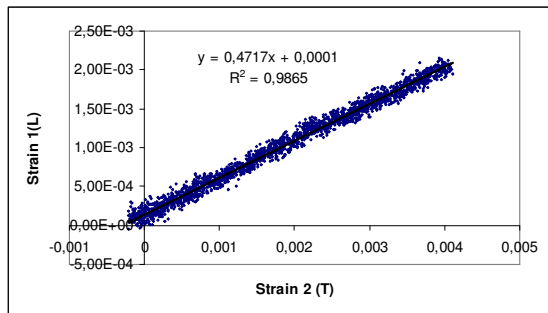
Rys.14-23. Wykresy zależności ϵ_p vs. ϵ_w - pomiary nr 1 – 10 na ścianie KN – kryształ 06



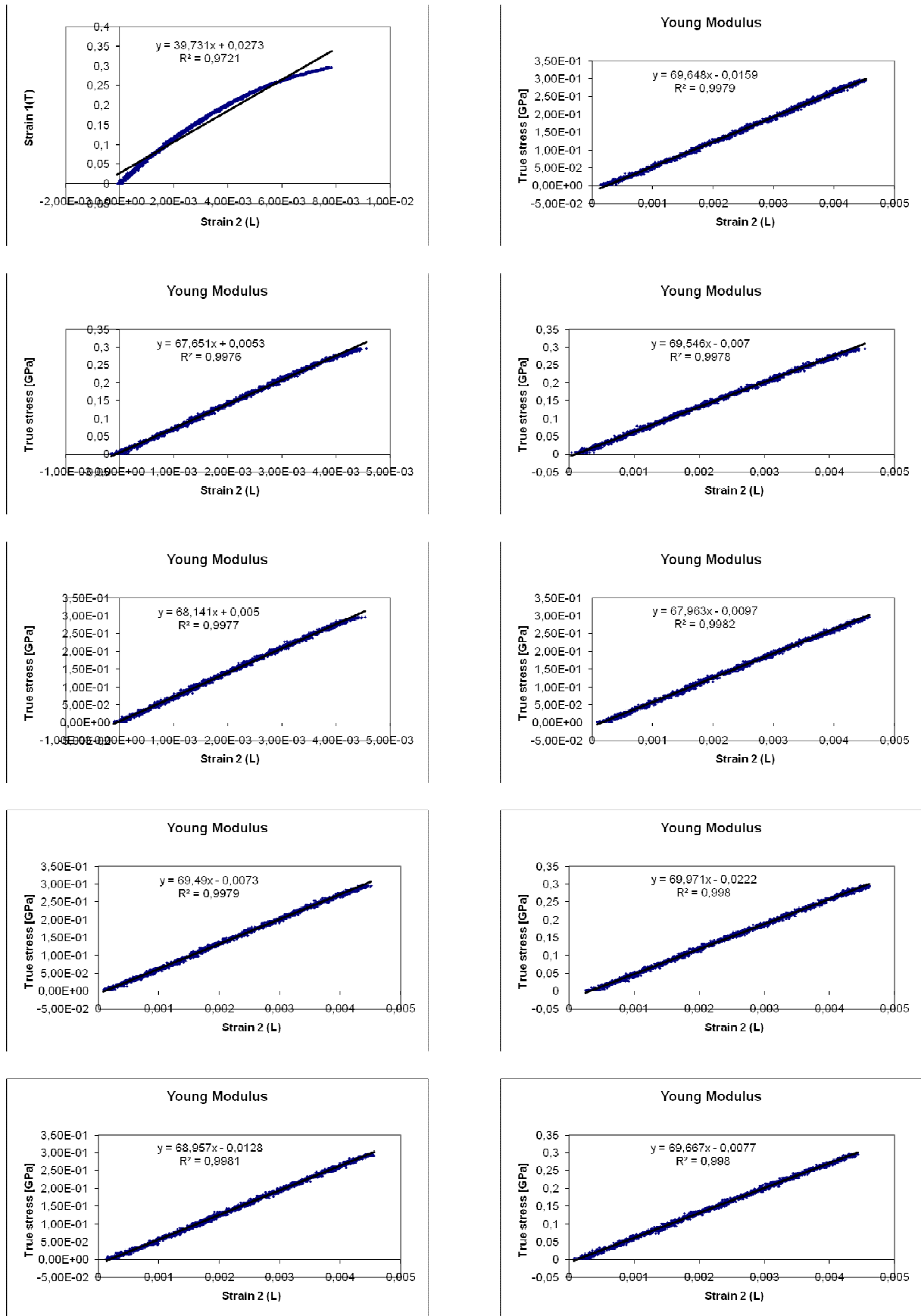
Rys.24-33. Wykresy zależności ϵ_p vs. ϵ_w - pomiary nr 11 – 20 na ścianie KN – kryształ 06



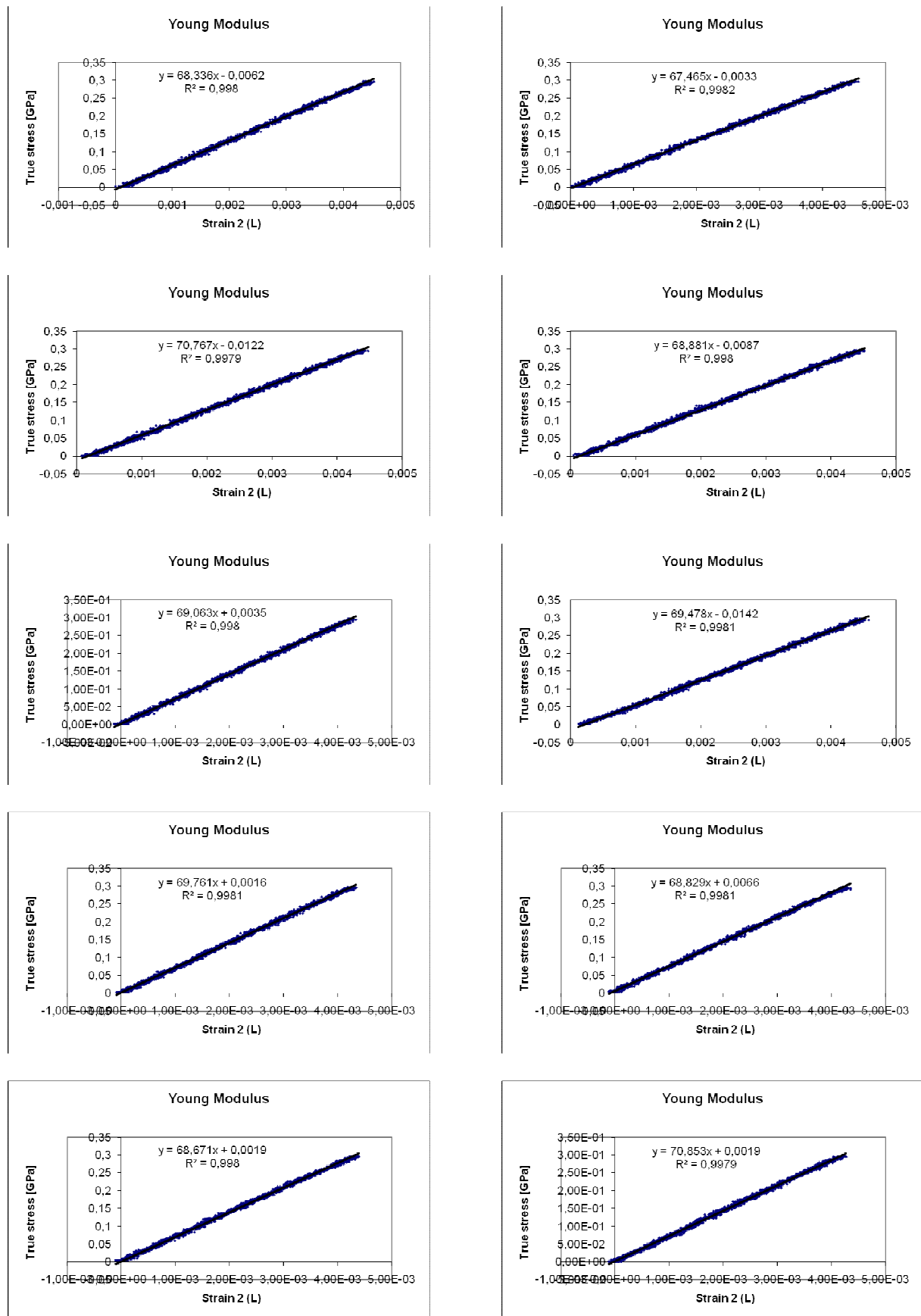
Rys.34-43. Wykresy zależności ϵ_p vs. ϵ_w - pomiary nr 21 – 30 na ścianie KN – kryształ 06



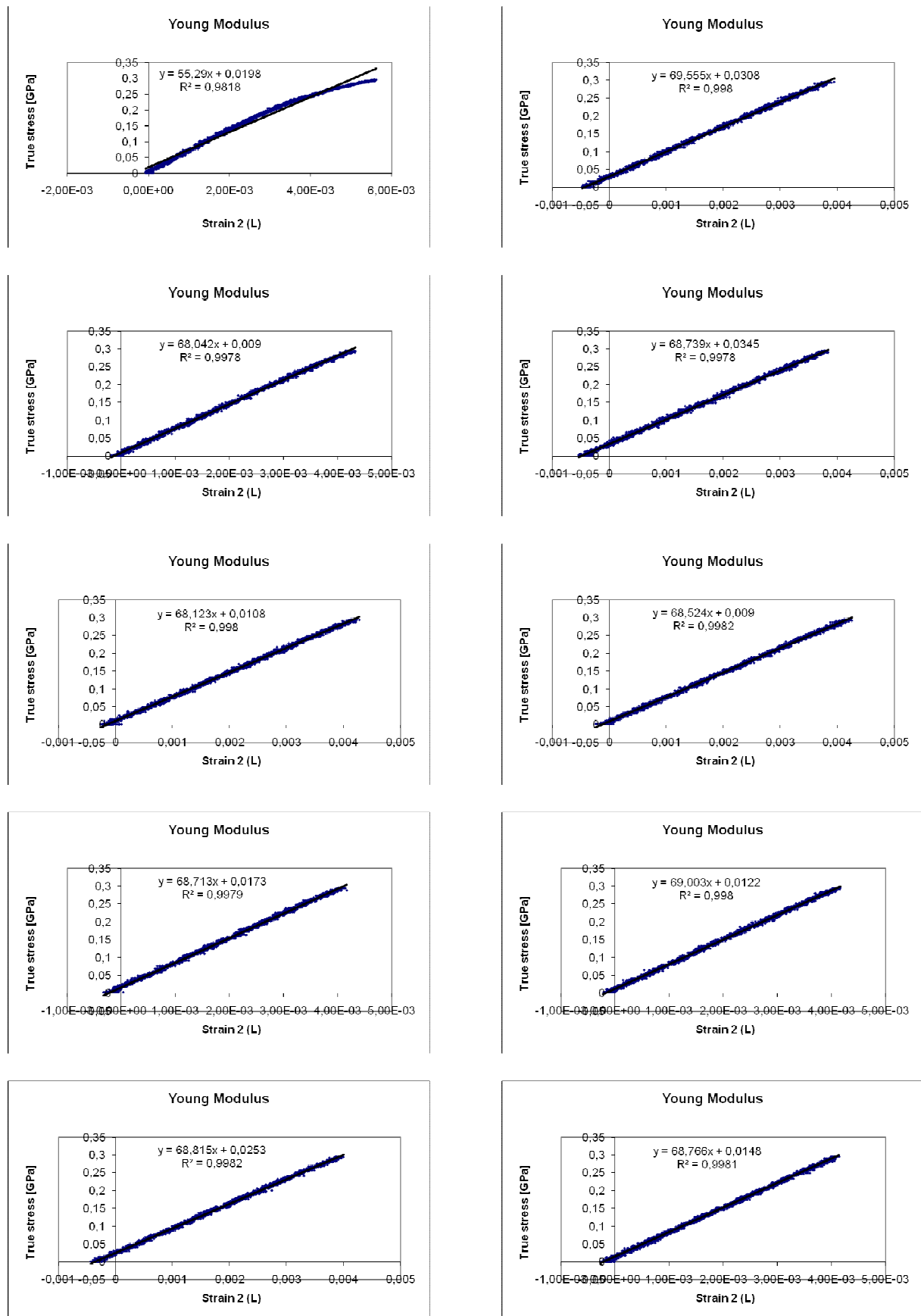
Rys.44-53. Wykresy zależności ϵ_p vs. ϵ_w - pomiary nr 31 – 40 na ścianie KN – kryształ 06



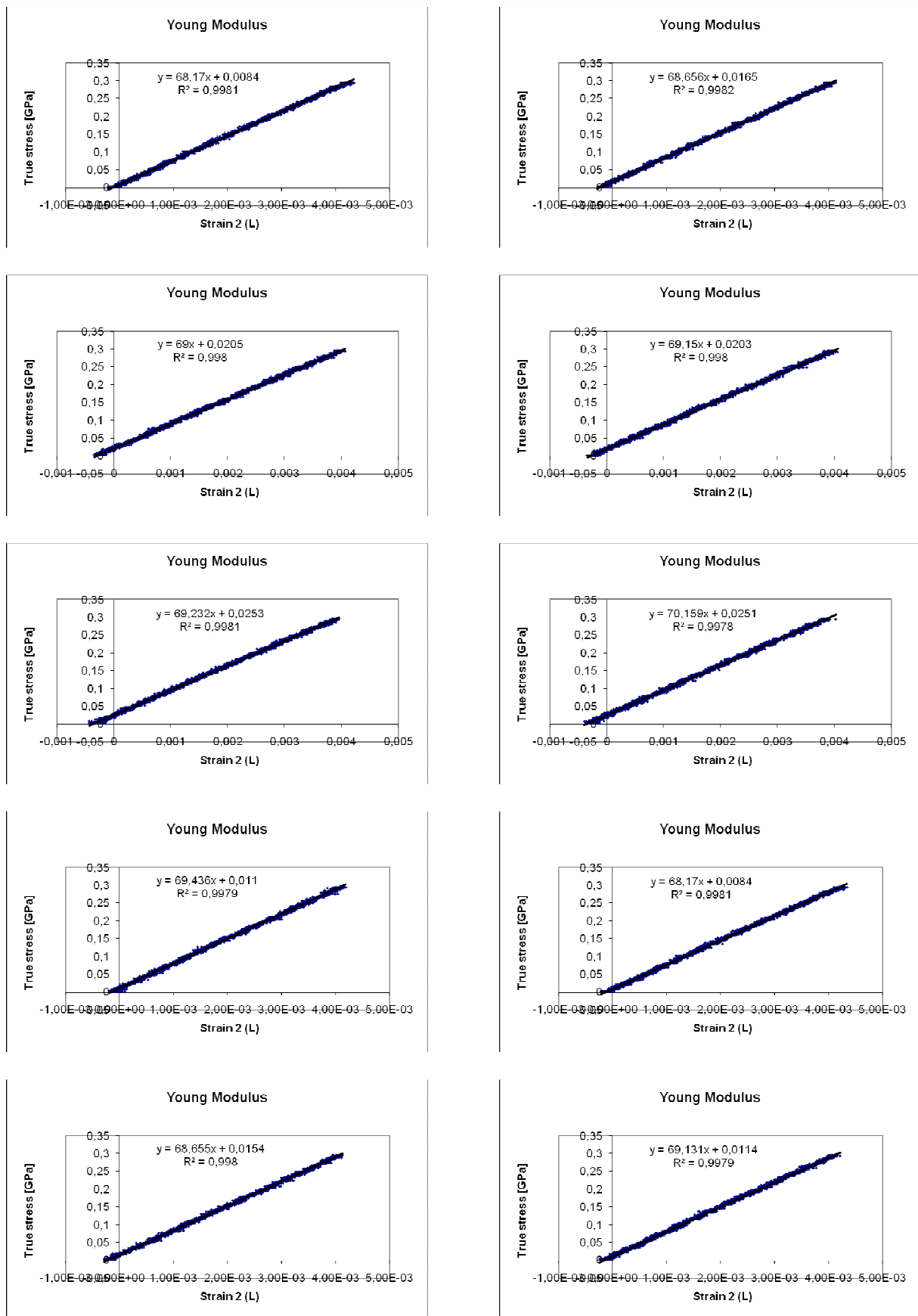
Rys.54-63. Wykresy zależności σ vs. ϵ_w - pomiary nr 1 – 10 na ścianie KP – kryształ 06



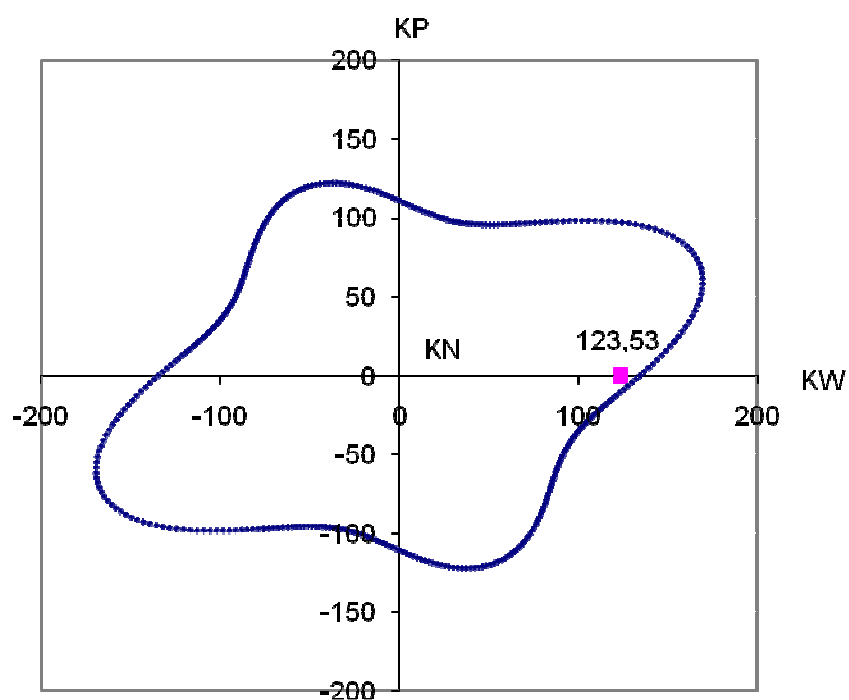
Rys.64-73. Wykresy zależności σ vs. ϵ_w - pomiary nr 11 – 20 na ścianie KP – kryształ 06



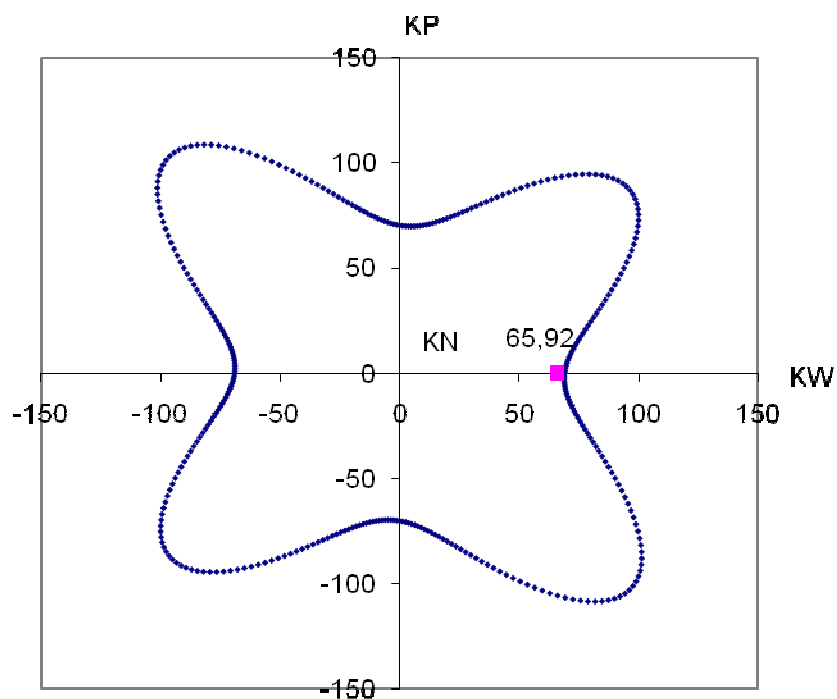
Rys.74-83. Wykresy zależności σ vs. ϵ_w - pomiary nr 21 – 30 na ścianie KP – kryształ 06



Rys.84-93. Wykresy zależności σ vs. ϵ_w - pomiary nr 31 – 40 na ścianie KP – kryształ 06



Rys. 93a. Przewidywane wartości modułu Younga w płaszczyźnie (-474 -465 746) - kolor niebieski oraz wartość otrzymana w wyniku pomiaru - różowy kwadrat



Rys. 93b. Przewidywane wartości modułu Younga w płaszczyźnie (133 -158 978) - kolor niebieski oraz wartość otrzymana w wyniku pomiaru - różowy kwadrat

Rysunki 93a i 93b przedstawiają wykresy wartości modułu Younga w jednej z płaszczyzn stanowiących ściany boczne badanych monokryształów – odpowiednio nr 03 i 06. Wartością modułu Younga jest długość promienia wodzącego. Podczas próby rozciągania kryształu 03 mierzono wartość tego parametru w kierunku [764 201 612] i jego wartość średnia z pomiarów przeprowadzonych na dwóch ścianach wyniosła 123,53 [GPa], natomiast w przypadku kryształu 06 odpowiednio w kierunku [990 50 -127] a wartość zmierzona to 65,92 [GPa].

W tabeli 6 zaprezentowano możliwe wartości liczby Poissona dla poszczególnych orientacji kryształów, dla każdej z dwóch ścian – oznaczonych 1 i 2, przy założeniu różnych wartości stałej C_{1221} . W przypadku, gdy wynosi ona 20, to podobnie jak w omawianym wcześniej przypadku (dla $C_{1221} = 0$), po odwróceniu macierzy stałe S_{ijkl} przyjmują nielogiczne wartości (Tablica 5 i 6), a tym samym wykluczają taką wartość tej stałej. Podana jest ona tutaj tylko w celu zaprezentowania szerszego spektrum zmian wartości, jakie mogłyby przyjąć współczynniki Poissona (ν_1 oraz ν_2). Zaprezentowano również wartości zmierzone oraz różnice procentowe pomiędzy tymi wartościami, a wyliczonymi dla poszczególnych wariantów założonej wartości stałej sztywności.

Omówienie znaczenia użytych kolorów znajduje się w podrozdziale 4.4.

Nr Próbki	Liczba Poissona - wynik pomiaru	C ₁₂₂₁ [GPa]	20	40	50	55	60	65	70	75,36	80	90	100
			Liczba Poissona - wartości obliczone za pomocą prawa transformacji tensora										
1	$\nu_1 = \mathbf{0,762}$	$\nu_1 =$	0,547	0,489	0,462	0,448	0,435	0,421	0,408	0,393	0,380	0,351	0,322
	odch. st. = 0,037	delta [%]	28,2	35,8	39,4	41,2	42,9	44,7	46,5	48,5	50,2	53,9	57,8
	$\nu_1 = \mathbf{0,312}$	$\nu_2 =$	0,307	0,298	0,289	0,284	0,278	0,271	0,264	0,256	0,248	0,230	0,210
	odch. st. = 0,026	delta [%]	1,5	4,5	7,4	9,1	11,1	13,2	15,5	18,1	20,6	26,3	32,8
2	$\nu_1 = \mathbf{0,268}$	$\nu_1 =$	0,224	0,240	0,240	0,239	0,236	0,233	0,229	0,224	0,219	0,207	0,191
	odch. st. = 0,060	delta [%]	16,1	10,4	10,3	10,9	11,7	12,9	14,3	16,2	18,0	22,8	28,6
	$\nu_1 = \mathbf{0,635}$	$\nu_2 =$	0,696	0,613	0,576	0,559	0,542	0,526	0,508	0,490	0,475	0,441	0,408
	odch. st. = 0,065	delta [%]	-9,5	3,6	9,3	12,1	14,8	17,2	20,1	22,9	25,3	30,5	35,9
3	$\nu_1 = \mathbf{0,669}$	$\nu_1 =$	0,877	0,719	0,660	0,634	0,608	0,584	0,561	0,537	0,517	0,475	0,434
	odch. st. = 0,083	delta [%]	-31,2	-7,6	1,2	5,2	9,0	12,6	16,0	19,6	22,6	28,9	35,1
	$\nu_1 = \mathbf{0,169}$	$\nu_2 =$	0,016	0,098	0,118	0,124	0,129	0,132	0,133	0,133	0,132	0,127	0,117
	odch. st. = 0,035	delta [%]	90,6	42,0	30,2	26,4	23,7	21,9	21,1	21,0	21,6	24,9	30,6
4	$\nu_1 = \mathbf{0,582}$	$\nu_1 =$	0,685	0,593	0,553	0,534	0,516	0,498	0,480	0,461	0,445	0,410	0,375
	odch. st. = 0,080	delta [%]	-17,8	-1,9	5,0	8,2	11,4	14,4	17,5	20,7	23,5	29,5	35,5
	$\nu_1 = \mathbf{0,217}$	$\nu_2 =$	0,175	0,197	0,199	0,199	0,197	0,194	0,191	0,186	0,181	0,169	0,154
	odch. st. = 0,058	delta [%]	19,3	9,0	8,0	8,3	9,1	10,3	11,9	14,1	16,3	22,0	29,08
5	$\nu_1 = \mathbf{0,099}$	$\nu_1 =$	-0,097	0,064	0,096	0,106	0,113	0,118	0,120	0,121	0,120	0,114	0,104
	odch. st. = 0,031	delta [%]	197,6	35,6	3,2	-7,0	-14,1	-18,8	-21,3	-22,0	-21,1	-15,3	-4,8
	$\nu_1 = \mathbf{0,855}$	$\nu_2 =$	0,910	0,670	0,598	0,567	0,539	0,513	0,488	0,601	0,443	0,400	0,359
	odch. st. = 0,074	delta [%]	-6,4	21,7	30,1	33,7	37,0	40,0	42,9	29,7	48,3	53,3	58,1
6	$\nu_1 = \mathbf{0,473}$	$\nu_1 =$	-0,261	0,618	0,546	0,523	0,504	0,486	0,470	0,454	0,441	0,413	0,385
	odch. st. = 0,026	delta [%]	155,3	-30,7	-15,6	-10,7	-6,6	-2,9	0,5	3,9	6,7	12,7	18,6
	$\nu_1 = \mathbf{0,444}$	$\nu_2 =$	1,262	0,331	0,369	0,374	0,376	0,375	0,371	0,366	0,360	0,345	0,327
	odch. st. = 0,036	delta [%]	-184,3	25,5	17,0	15,7	15,4	15,7	16,4	17,6	18,9	22,3	26,4
7	$\nu_1 = \mathbf{0,473}$	$\nu_1 =$	0,500	0,490	0,469	0,460	0,451	0,441	0,431	0,420	0,411	0,389	0,366
	odch. st. = 0,028	delta [%]	-5,7	-3,5	0,8	2,8	4,8	6,8	8,9	11,2	13,2	17,8	22,7
	$\nu_1 = \mathbf{0,482}$	$\nu_2 =$	0,523	0,474	0,461	0,453	0,445	0,436	0,427	0,416	0,407	0,386	0,363
	odch. st. = 0,020	delta [%]	-8,6	1,7	4,3	6,0	7,7	9,5	11,4	13,6	15,5	19,9	24,6
8	$\nu_1 = \mathbf{0,381}$	$\nu_1 =$	0,449	0,396	0,370	0,358	0,345	0,332	0,320	0,306	0,293	0,266	0,238
	odch. st. = 0,043	delta [%]	-17,9	-3,8	2,9	6,2	9,5	12,8	16,2	19,9	23,1	30,2	37,6
	$\nu_1 = \mathbf{0,326}$	$\nu_2 =$	0,304	0,288	0,276	0,269	0,261	0,253	0,244	0,234	0,225	0,205	0,182
	odch. st. = 0,087	delta [%]	6,7	11,6	15,4	17,6	19,9	22,4	25,1	28,1	30,9	37,3	44,3
9	$\nu_1 = \mathbf{0,252}$	$\nu_1 =$	-0,200	0,028	0,073	0,088	0,099	0,107	0,112	0,115	0,116	0,114	0,106
	odch. st. = 0,042	delta [%]	179,4	89,0	71,0	65,2	60,8	57,7	55,6	54,3	53,9	54,8	57,8
	$\nu_1 = \mathbf{0,621}$	$\nu_2 =$	1,058	0,746	0,660	0,624	0,592	0,563	0,536	0,508	0,486	0,440	0,396
	odch. st. = 0,061	delta [%]	-70,6	-20,3	-6,4	-0,6	4,5	9,3	13,7	18,1	21,7	29,2	36,2

Tabela 6. Zestawienie obliczonych wartości liczb Poissona w zależności od wartości stałej C₁₂₂₁ oraz różnic procentowych (delta) w odniesieniu do wartości zmierzonych

4.3.2 BADANIA Z WYKORZYSTANIEM FAL PODŁUŻNYCH

W tabeli 7 przedstawiono uśrednione wyniki pomiarów prędkości propagacji fali podłużnej. W ten sposób zbadano prostopadłościennie próbki uzyskane z kryształów 01, 05 oraz 08, których ściany były równoległe do płaszczyzn o wskaźnikach podanych w tabeli 8. Następnie w tabeli 9 zaprezentowano zestawienie prędkości fal oraz odpowiadające im wartości stałej C'_{1111} wyliczone zgodnie ze równaniem (49) oraz wartości tej stałej uzyskane na podstawie prawa transformacji $C'_{11}(t)$.

Kryształ	Płaszczyzna badania					
	A		B		C	
	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Wartość średnia	Odchylenie standardowe
01	4977,2	27,9	4940,2	14,4	5138,1	13,0
05	4682,5	11,0	4912,3	21,9	5062,8	9,2
08	5094,3	7,4	4898,4	13,2	5152,2	10,0

Tabela 7. Wyniki pomiarów prędkości fali podłużnej [m/s].

Kryształ	A	B	C
01	501 573 647	-862 387 324	-64 -721 689
05	297 203 932	-641 766 37	707 609 -358
08	-749 -14 661	400 785 471	-526 618 -582

Tabela 8. Wskaźniki ścian, na których przeprowadzone zostały pomiary prędkości fali podłużnej.

Kryształ	V [m/s]	C'_{1111} [GPa]	$C'_{11}(t)$ [GPa]	$\Delta C'$ [%]	V [m/s]	C'_{1111} [GPa]	$C'_{11}(t)$ [GPa]	$\Delta C'$ [%]	V [m/s]	C'_{1111} [GPa]	$C'_{11}(t)$ [GPa]	$\Delta C'$ [%]
01	4977,2	221,0	220,0	0,4	4940,2	217,7	211,0	3,2	5138,1	235,5	236,0	-0,2
05	4682,5	195,6	192,0	1,9	4912,3	215,2	218,0	-1,3	5062,8	228,6	230,0	-0,6
08	5094,3	231,5	224,0	3,3	4898,4	214,0	219,0	-2,3	5152,2	236,8	236,0	0,3

Tabela 9. Wyniki pomiarów prędkości fali podłużnej V [m/s] oraz odpowiadające im wartości stałej C'_{1111} oraz wartości tej stałej wyliczone przy pomocy prawa transformacji $C'_{11}(t)$

4.3.3 BADANIA Z WYKORZYSTANIEM FAL POPRZECZNYCH

W tabeli 10 przedstawiono uśrednione wyniki pomiarów prędkości propagacji fali spolaryzowanej poprzecznie. W ten sposób zbadano prostopadłościennie próbki uzyskane z kryształów 01, 05, 07, 08 oraz 09, których ściany były równoległe do płaszczyzn o wskaźnikach podanych w tabeli 11.

Następnie zamieszczono przykładowe dane szczegółowe dla jednej z próbek – kryształu Cu 05 (tabele 12-14) oraz przedstawiono je w formie wykresów kołowych (Rys. 94-96). Przedstawiono również uśrednione wartości zmierzonych prędkości w formie wykresów liniowych dla poszczególnych ścian tej samej próbki (Rys.97-99). Dodatkowo zamieszczono wykresy liniowe przedstawiające prędkości fal poprzecznych odpowiadających wyliczonym na podstawie prawa transformacji oraz zależności (44) wartościom stałych C'_{1212} w płaszczyznach równoległych do ścian próbki (Rys. 100-102).

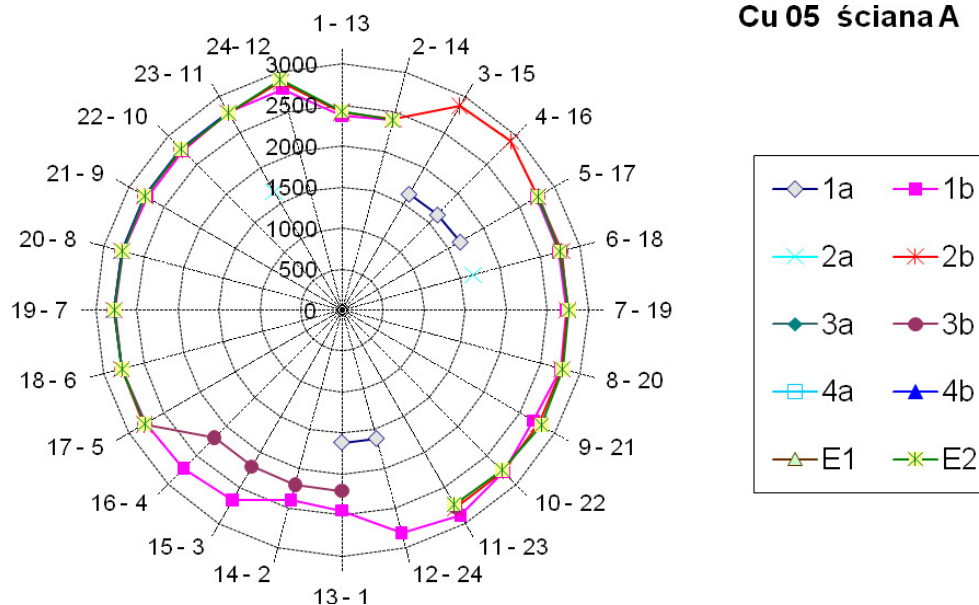
Kryształ	Płaszczyzna badania					
	A		B		C	
	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Wartość średnia	Odchylenie standardowe
01	1635,4	5,3	2174,4	92,7		
	2894,1	17,0	2622,9	21,3	2045,6	16,6
05	1642,1	18,9	1649,7	9,6	1869,5	11,1
	2772,1	7,5	2881,3	5,1	2555,5	8,2
07	2893,5	27,9	2873,3	19,2	2855,6	24,4
08	1649,0	21,5	1979,0	43,0	2062,9	20,0
	2887,7	31,7	2518,0	26,5	2150,9	29,6
09	1925,7	5,1	1781,7	7,0	1346,4	8,2
	2503,7	9,7	2692,3	11,2	2850,2	7,3

Tabela 10. Wyniki pomiarów prędkości fali poprzecznej [m/s].

Kryształ	A	B	C
01	501 573 647	-862 387 324	-64 -721 689
05	297 203 932	-641 766 37	707 609 -358
07	-29 -14 999	-27 999 14	999 27 29
08	-749 -14 661	400 785 471	-526 618 -582
09	505 788 -350	757 -600 -255	412 136 900

Tabela 11. Wskaźniki ścian, na których przeprowadzone zostały pomiary prędkości fali poprzecznej.

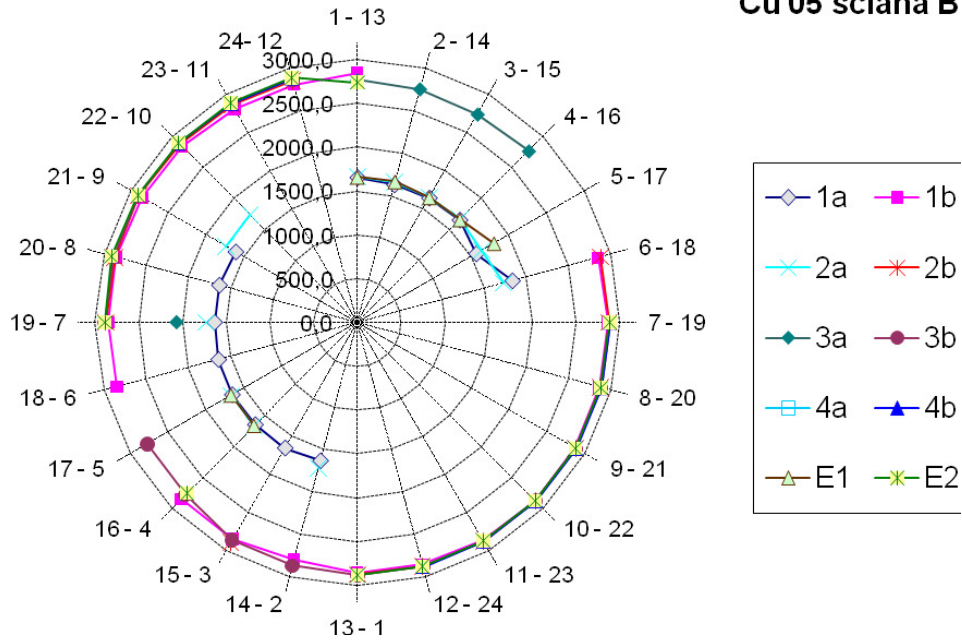
Cu 05 ściana A



Rys. 94 / Tabela 12. Wartości prędkości propagacji fali poprzecznej [m/s] w zależności od kierunków polaryzacji leżących w płaszczyźnie ściany A kryształu Cu 05 dla kolejnych ech sygnału – widoczne rozdzielenie na falę a i b.

Kierunek polaryzacji	Kolejne echa fal a i b									
	1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b	E1	E2
1 - 13		2364,8		2405,9						2419,7
2 - 14		2401,7		2403,2						2396,6
3 - 15	1633,7			2868,6						
4 - 16	1643,6			2905,2						
5 - 17	1661,4	2739,9		2761,4		2763,7				2758,8
6 - 18		2734,9	1657,1	2771,6		2761,9				2747,5
7 - 19		2732,1		2743,3		2765,9				2766,2
8 - 20		2755,1		2778,0						2781,2
9 - 21		2691,3		2772,6						2806,6
10 - 22		2787,4		2773,7						2758,6
11 - 23		2886,5		2775,5		2763,4				2737,0
12 - 24	1623,2	2807,5								
13 - 1	1614,5	2443,7				2202,7				
14 - 2		2397,3				2201,5				
15 - 3		2672,8				2201,8				
16 - 4		2729,2				2197,6				
17 - 5		2763,1		2784,1		2775,8				2770,7
18 - 6		2772,2		2782,3		2782,1		2779,1		2771,9
19 - 7		2761,3		2776,8		2781,7		2775,4		2769,4
20 - 8		2757,6		2778,0		2777,3		2774,9		2769,4
21 - 9		2741,4		2777,4		2777,3		2776,0		2773,4
22 - 10		2741,4		2753,6		2770,0		2773,9		2771,0
23 - 11		2787,0	1660,9	2770,6		2768,2		2779,1		2769,4
24 - 12		2788,8		2873,8						2909,5

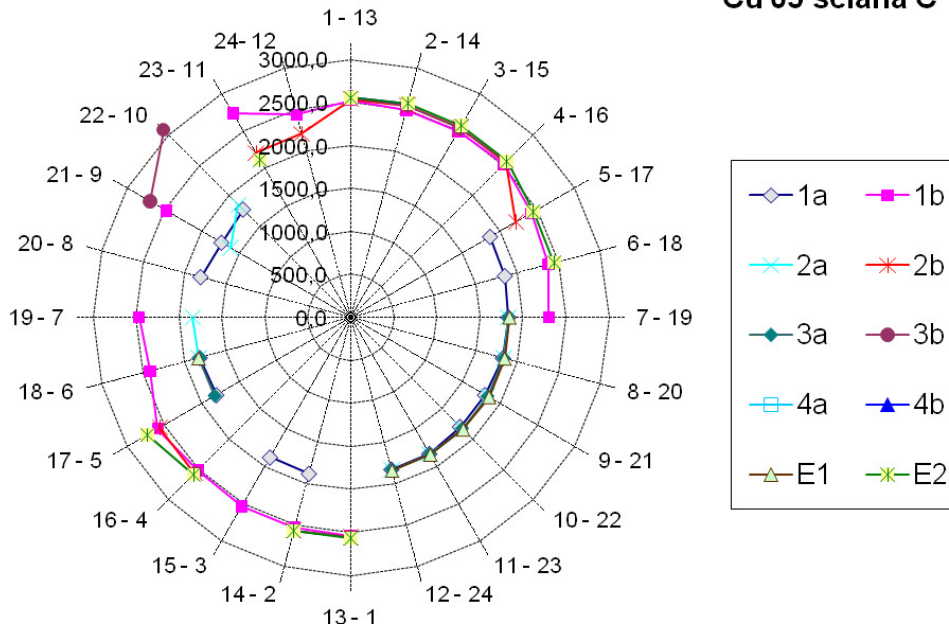
Cu 05 ściana B



Rys. 95 / Tabela 13. Wartości prędkości propagacji fali poprzecznej [m/s] w zależności od kierunków polaryzacji leżących w płaszczyźnie ściany B kryształu Cu 05 dla kolejnych ech sygnału – widoczne rozdwojenie na falę a i b.

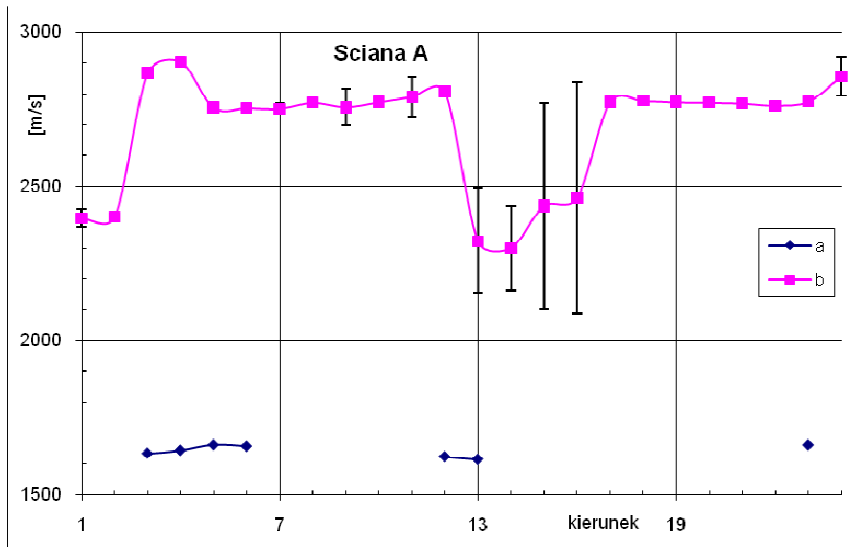
Kierunek polaryzacji	Kolejne echa fal a i b									
	1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b	E1	E2
1 - 13	1652,4	2844,6	1660,2		2767,1				1658,5	2738,9
2 - 14	1624,6		1654,7		2757,9				1664,5	
3 - 15	1637,5		1645,9		2743,2				1644,5	
4 - 16	1650,9		1658,7		2764,5				1657,0	
5 - 17	1565,5		1640,3						1803,6	
6 - 18	1829,7	2848,2	1733,0	2879,4						
7 - 19		2862,4		2874,3		2887,2		2887,9		2882,2
8 - 20		2862,4		2877,3		2885,9		2885,6		2879,7
9 - 21		2870,3		2879,4		2885,6		2887,1		2880,1
10 - 22		2880,4		2878,6		2881,9		2885,3		2876,1
11 - 23		2874,3		2885,6		2887,1		2884,4		2876,1
12 - 24		2858,4		2878,6		2886,7		2889,1		2884,2
13 - 1		2858,4		2876,6		2886,7				2884,0
14 - 2	1636,7	2798,0	1723,4			2872,3				
15 - 3	1657,0	2856,8		2898,8		2870,2				
16 - 4	1653,0	2848,2	1667,9			2779,9			1669,8	2753,9
17 - 5	1653,2		1664,7			2774,6			1664,8	
18 - 6	1643,9	2844,6								
19 - 7	1633,5	2850,5	1730,1	2875,9	2062,0	2883,5				2885,0
20 - 8	1634,9	2854,5		2869,9		2889,1				2908,4
21 - 9	1606,8	2840,7	1734,9	2889,4		2891,6				2894,7
22 - 10		2838,8	1734,0	2870,6		2890,0		2892,9		2892,3
23 - 11		2807,9		2862,6		2878,3		2886,7		2890,4
24 - 12		2809,4		2857,4		2867,9		2886,7		2889,0

Cu 05 ściana C

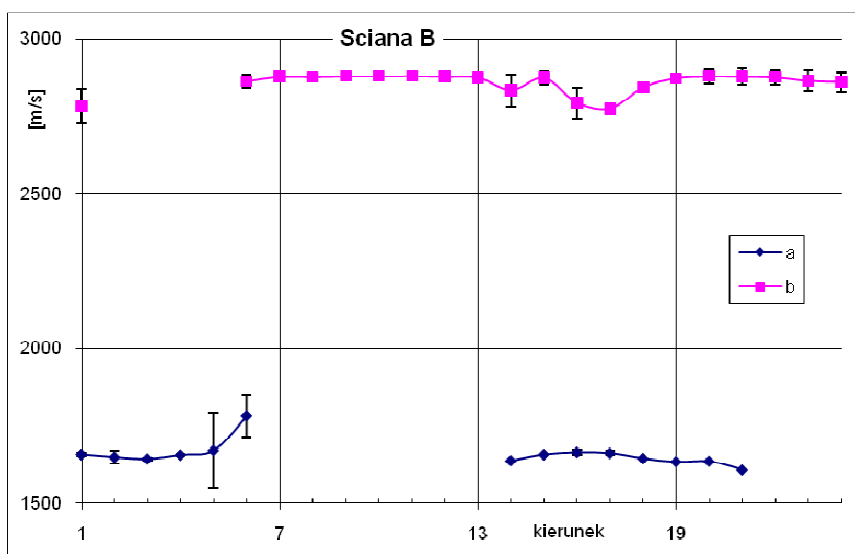


Rys. 96 / Tabela 14. Wartości prędkości propagacji fali poprzecznej [m/s] w zależności od kierunków polaryzacji leżących w płaszczyźnie ściany C kryształu Cu 05 dla kolejnych echa sygnału – widoczne rozdwojenie na falę a i b.

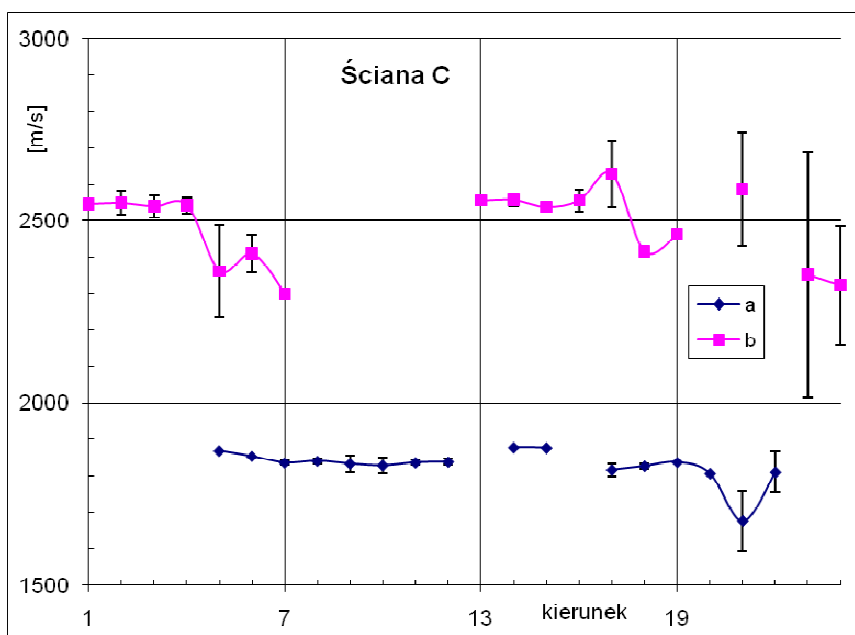
Kierunek polaryzacji	Kolejne echa fal a i b									
	1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b	E1	E2
1 - 13		2524,2		2537,7		2554,3		2563,0		2550,8
2 - 14		2495,0		2544,8		2551,4		2574,9		2576,8
3 - 15		2498,8		2543,3		2542,9				2572,5
4 - 16		2513,4		2543,3		2547,8				2564,8
5 - 17	1869,0	2420,2		2216,2						2449,2
6 - 18	1854,0	2374,1								2445,8
7 - 19	1832,8	2300,2	1830,0		1837,2				1842,9	
8 - 20	1830,9		1841,3		1841,6				1849,0	
9 - 21	1802,2		1837,3		1838,9				1853,7	
10 - 22	1796,1		1839,4		1832,1				1845,9	
11 - 23	1827,7		1834,7		1837,9				1845,0	
12 - 24	1827,7		1838,7		1839,3				1846,8	
13 - 1		2543,6		2556,1		2556,2				2565,8
14 - 2	1878,0	2533,2		2564,3		2563,2				2567,8
15 - 3	1877,0	2537,5								
16 - 4		2513,7		2562,3		2564,4				2583,8
17 - 5	1803,4	2590,6		2563,7	1828,9					2732,9
18 - 6	1816,7	2415,8	1833,5		1824,8				1831,4	
19 - 7		2462,5	1837,0							
20 - 8	1806,5									
21 - 9	1734,7	2475,7	1617,1			2695,1				
22 - 10	1770,2		1849,9			3083,1				
23 - 11		2736,4		2206,1						2113,6
24 - 12		2438,1		2207,9						



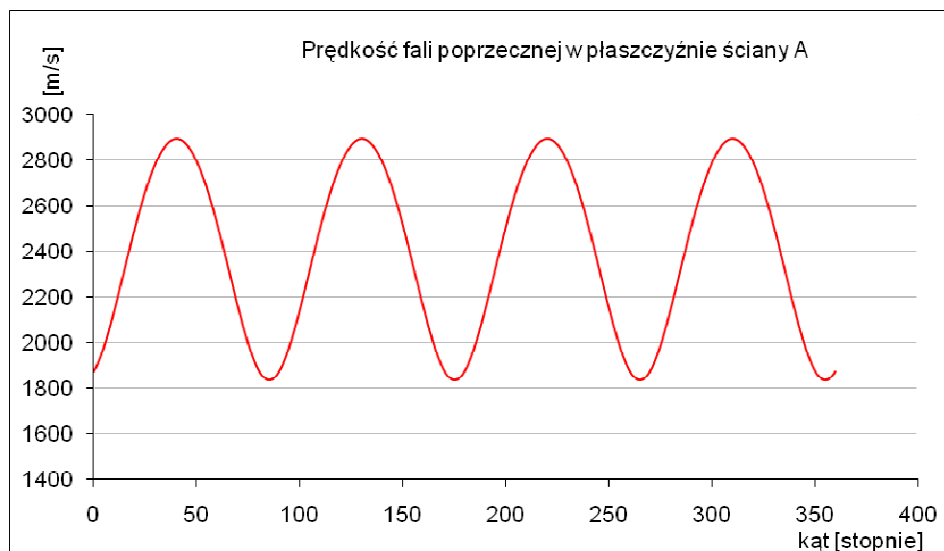
Rys. 97. Zmierzone wartości prędkości fali poprzecznie spolaryzowanej w zależności od kierunku polaryzacji w płaszczyźnie badania – ściana A



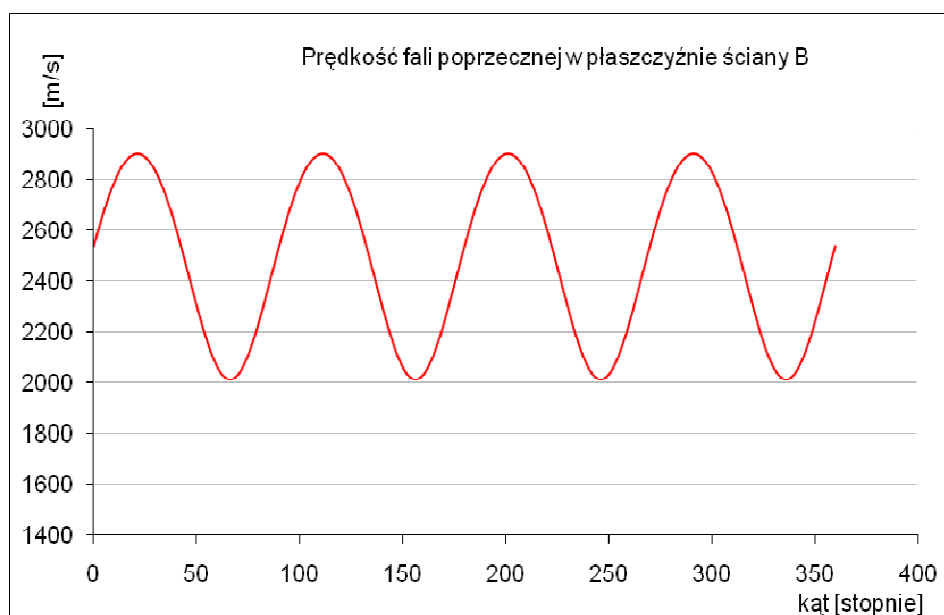
Rys. 98. Zmierzone wartości prędkości fali poprzecznie spolaryzowanej w zależności od kierunku polaryzacji w płaszczyźnie badania – ściana B



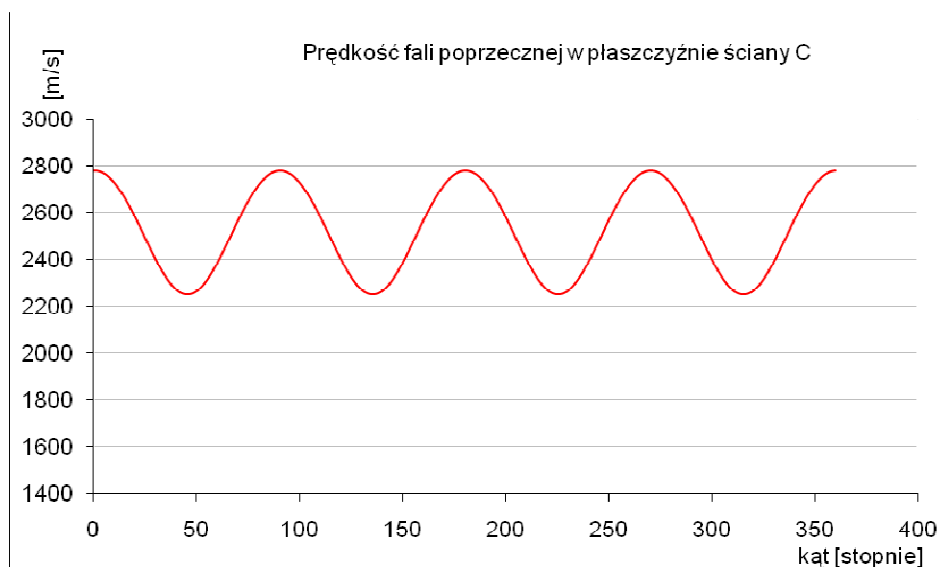
Rys. 99. Zmierzone wartości prędkości fali poprzecznie spolaryzowanej w zależności od kierunku polaryzacji w płaszczyźnie badania – ściana C



Rys. 100. Teoretyczne (obliczone) wartości prędkości fali poprzecznie spolaryzowanej w zależności od kierunku polaryzacji w płaszczyźnie badania – ściana A



Rys. 101. Teoretyczne (obliczone) wartości prędkości fali poprzecznie spolaryzowanej w zależności od kierunku polaryzacji w płaszczyźnie badania – ściana B



Rys. 102. Teoretyczne (obliczone) wartości prędkości fali poprzecznie spolaryzowanej w zależności od kierunku polaryzacji w płaszczyźnie badania – ściana C

4.4 ANALIZA WYNIKÓW BADAŃ I PODSUMOWANIE

Wyniki badań eksperymentalnych przeprowadzonych na próbkach kryształu 07, a więc posiadającego orientację zbliżoną do kubicznej, pozwalają na wyciągnięcie następujących wniosków:

1. W przypadku pomiarów przy użyciu fal poprzecznych doświadczenie potwierdza przewidywaną teoretycznie izotropowość modułu na ścinanie C'_{44} w płaszczyznach typu $\{100\}$ (równanie 61). Obliczone wartości tej stałej na podstawie zmierzonych prędkości dla każdej ze ścian są niezależne od obrotu próbki względem kierunku polaryzacji sygnału w płaszczyźnie badania.
2. Ponadto, powyższe wyniki są bardzo zbliżone do wartości tabelarycznej wynoszącej 75,359 GPa (różnica wynosi maksymalnie 3%), co świadczy o tym, że zastosowana metoda badawcza jest wiarygodna, a wykonanie pomiarów poprawne oraz to, że występuje pełna zgodność modelu teoretycznego z doświadczeniem dla takiej orientacji kryształu.
3. Wykonano również pomiary zmian geometrii w warunkach deformacji sprężystej podczas prób jednoosiowego rozciągania. W przypadku pomiarów modułu Younga (wartość średnia 67,98 GPa) osiągnięto wyjątkową zgodność z wartościami przewidywanymi teoretycznie (66,87 GPa). W przypadku pomiarów współczynnika Poissona wyniki pomiarowe także wykazują zgodność z danymi literaturowymi, choć w ich przypadku przy nieco większym marginesie różnicy. Uwzględniając jednak specyfikę pomiaru oraz niewielkie odkształcenia, jakim poddawany jest kryształ w zakresie sprężystym, to różnica pomiędzy danymi uzyskanymi na drodze eksperymentalnej a wartościami obliczonymi na podstawie prawa transformacji wynosząca poniżej 15% wydaje się być akceptowalna.

Analiza wyników eksperymentalnych uzyskanych podczas badań przeprowadzonych na próbkach pozostałych kryształów miedzi, a więc posiadających orientację inną od kubicznej pozwoliły na wysunięcie następujących wniosków:

1. Wyniki zamieszczone w tabeli 9, a więc wyniki badań przeprowadzonych przy zastosowaniu fal podłużnych pokazują, że największą różnicę pomiędzy wartościami zmierzonymi, a wynikami, jakie uzyskano na podstawie zastosowania prawa transformacji, zaobserwowano dla kryształu 08 na kierunku prostopadłym do ściany A. Jednakże wynosi ona zaledwie 3,3%, a w przypadku pozostałych kryształów znacznie poniżej tej wartości, co pozwala w stwierdzić, że również i w tym przypadku wyniki eksperymentu są zgodne z założeniami teoretycznymi.
2. W celu wykorzystania faktu, że tensor stałych podatności jest odwrotnością tensora stałych sztywności przeprowadzono pomiary przy użyciu fal ultradźwiękowych poprzecznie spolaryzowanych. W swoim założeniu miały one stanowić podstawę do porównania wyników otrzymanych na drodze prób rozciągania (na podstawie, których można wnioskować o wartościach stałych S), gdyż odwołują się one w swoich założeniach do stałych C. Jednakże badania wykonane za pomocą takich fal ultradźwiękowych ujawniły ciekawy efekt. Mianowicie okazało się, że wprowadzana fala rozdwaja się na dwa sygnały. Co więcej, każdy z nich posiada stałą prędkość, niezależnie od kierunku polaryzacji sygnału wejściowego względem badanej próbki (rys. 97-99). Efekt ten pozostaje w sprzeczności z wyliczeniami opartymi na prawie transformacji tensora, gdyż w badanych płaszczyznach stała C'_{44} , a tym samym hipotetyczna wartość prędkość fali poprzecznej, zmienia się jak pokazano na rys. 100-102.
3. Wspomniany efekt rozdwojenia sygnału w powiązaniu z faktem, że wyznacznik macierzy 9×9 dla stałych tabelarycznych wynosi 0, skutecznie uniemożliwił weryfikację wyników rozciągania w pierwotnie zakładany sposób. Dodatkowo ujawnił on fakt, że pomiary na podstawie, których wyznaczono eksperymentalnie dwie stałe, a trzecią obliczono (stosując założenia, które jak pokazano w niniejszej pracy nie są w pełni uzasadnione) stanowią jedynie szczególny przypadek, gdy podczas pomiaru nie występuje rozdwojenie sygnału ultradźwiękowego (takim przykładem jest kryształ Cu 07).

4. Na podstawie pomiarów zmian geometrii kryształów podczas próby rozciągania wyznaczano moduł Younga i liczbę Poissona. Należy jeszcze raz podkreślić, że liczbę Poissona mierzono bezpośrednio dzięki zastosowaniu dwuosiowego ekstensometru umożliwiającego jednoczesny pomiar wydłużenia i przewężenia próbki. W przeciwieństwie do opisanej wcześniej pełnej zgodności rezultatów dla próbki kubicznej (nr 07), w przypadku pozostałych kryształów zaobserwowano znaczne rozbieżności pomiędzy wartościami zmierzonymi, a wyliczonymi na podstawie prawa transformacji tensora. Jedynie dla 4 próbek (kryształy nr 2,4,5 i 6) wartości te pozostają w zgodności dla jednej ze ścian, natomiast dla żadnej z nich nie ma zgodności dla obydwóch ścian.

5. Korzystając z modelu przedstawionego w rozdziale 2.6, na podstawie równania (53) wyznaczono nowe wartości stałych sprężystości – przykładowe wartości zawierają tablice 7-12. Następnie ponownie wyliczono wartości liczb Poissona w poszczególnych orientacjach dla różnych wariantów stałej C_{1221} i zestawiono razem z wynikami pomiarowymi w tabeli 6. Kolorem zielonym oznaczono te wartości, dla których różnica mieści się w granicach rozrzutu wyników (+/- odchylenie standardowe) lub różnica pomiędzy wartością wyliczoną a zmierzoną podczas próby rozciągania jest poniżej 15%. Dla tabelarycznej wartości stałej $C_{1221} = 75,359$ [GPa] dla żadnego z badanych kryształów nie istnieje zgodność wyników pomiarów przeprowadzonych na obydwóch ścianach, a rozpatrując każdą z nich osobno to tylko w 4 na 16. Natomiast największą zgodność osiągnięto dla wartości C_{1221} równej 55 [GPa] oraz 60 [GPa], dla których w przypadku 3 kryształów osiągnięto zgodność na obydwóch ścianach, a ogólnie w 13 przypadkach pomiarów spośród wszystkich 16 możliwych. Jednakże biorąc pod uwagę, że w 11 spośród tych 13 przypadków różnica pomiędzy pomiarem a wartościami wyliczonymi jest mniejsza dla wartości 55 [GPa] to tę należy uznać za poprawniejszą. Aby jeszcze bardziej podkreślić większą zgodność pomiarów z wartościami uzyskanymi dla „nowej” wartości stałej C_{1221} (55[GPa]) kolorem żółtym oznaczono mniejsze wartości różnic pomiędzy wartościami wyliczonymi a wielkościami zmierzonymi dla dwóch przypadków wartości stałej sprężystości tj. $C_{1221} = 55$ i 75,359 [GPa]. W większości przypadków (12 na 16) porównanie

wypada ponownie „na korzyść” wartości 55 [GPa], podczas gdy tylko w 4 przypadkach „na korzyść” wartości 75,359 [GPa], przy czym 3 spośród nich dotyczą kryształów, dla których przewidywane wartości dla obu wartości stałej C_{1221} znacznie odbiegały od wartości zmierzonych (kryształ nr 3 ściana 2, nr 5 ściana 2 oraz nr 9 ściana 1).

Biorąc pod uwagę wyniki pomiarów liczby Poissona, która, podkreślmy raz jeszcze, została wyznaczona na podstawie zmian geometrii kryształu w trakcie próby rozciągania, a więc bezpośrednio zmierzona, co oznacza, że jej wartość nie zależy od żadnych „założeń początkowych”, to w świetle powyżej zaprezentowanych wniosków podważanie poprawności stosowania do redukcji liczby stałych niezależnych argumentu o symetryczności tensora odkształcenia, a następnie zastosowanie tylko argumentu o symetrii kryształu bezpośrednio na tensorze zawierającym 81 stałych wydaje się być wystarczająco uzasadnione, ponieważ gdyby przesłanki 1 i 2 miały być poprawne to otrzymany wynik pomiaru byłby zgodny z wartościami liczby Poissona obliczonymi przy założeniu równości stałej C_{1212} oraz $C_{1221} = 75,359$ GPa. Oznaczałoby to wtedy, że faktycznie w przypadku układu kubicznego istnieją tylko trzy niezależne stałe sprężystości. Jednakże wyniki pomiarów i obliczeń wskazują, że jak pokazano w tabeli 6, zgodność uzyskuje się w przypadku większości kryształów dla wartości $C_{1212} = 55$ GPa, a to można traktować jako eksperymentalną weryfikację poprawności oparcia redukcji liczby stałych niezależnych na przesłance 1 i 2.

Wyniki pomiarów potwierdzają również to, że zależność (48) oparta na 3 przesłankach omówionych w rozdziale 2.2 i określająca wartość stałej C_{12} nie pozwala na jej jednoznaczne wyznaczenie.

5 LITERATURA

1. M. Radovic, E. Lara-Curzio and L. Riester, "Comparison of Different Experimental Techniques for Determination of Elastic Properties of Solids," *Materials Science and Engineering*, A368, 56-70 (2004)
2. L. Filipczyński, Z. Pawłowski, J. Wehr, "Ultradźwiękowe metody badań materiałów", Warszawa, WNT 1963
3. J. Obraz: „Ultradźwięki w technice pomiarowej”, Warszawa, WNT 1983.
4. J.F. Nye: "Physical Properties of Crystals", Oxford, Clarendon Press 1957.
5. W.P. Mason, "Physical Acoustics and the Properties of Solids", Canada, D. V. Nostrand Com. 1958.
6. C. Kittel "Wstęp do fizyki ciała stałego", PWN Warszawa 1960 (przekład "Introduction to solid state physics", J. Willey & Sons, New York 1956)
7. R.F.S. Hearmon „The Elastic Constants of Anisotropic Materials”, *Reviews of Modern Physics*, 18, 3, 409 (1946)
8. H.B. Huntington, „Ultrasonic Measurements on Single Crystals" (*Physical Review*, 72, Nr 4, (1947))
9. A. Kelly, G.W. Groves: „Krystalografia i defekty kryształów”, Warszawa, PWN 1980.
10. J. Piekarczyk, H.W. Hennicke, R. Pampuch, „Zur Bestimmung elastischer Konstanten poroser Zinkferritwerkstoffe”, *Ceramic Forum International/Berichte der Deutschen Keramischen Gesellschaft* Vol. 59/1982, No. 4 June
11. J. Wehr: „Pomiary prędkości i tłumienia fal ultradźwiękowych”, Warszawa, PWN 1972
12. A. Śliwiński: „Ultradźwięki i ich zastosowania”, Warszawa, WNT, 2001
13. R.F. Bunshan (Ed.): „Measurement of Mechanical Properties”, *Techniques of Metal Research*, vol. V (Part 2), Wiley, New York, 1971, pp.103.
14. J. Ostrowska-Maciejewska: „Podstawy i Zastosowania Rachunku Tensorowego”, Warszawa 2007, Prace IPPT PAN

15. V.A. Lubarda, "Apparent elastic constants of cubic crystals and their pressure derivatives", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34 (1999), p. 5-11
16. W. Voigt: "Lehrbuch der Kristallphysik" (Teubner, Leipzig, 1910)
17. P. Wilkes: „Fizyka Ciała Stałego dla Metaloznawców”, Warszawa, PWN 1979.
18. M.S. Szczerba: „Transformacje dyslokacji podczas bliźniakowania w kryształach regularnych”, Wyd. AGH, 1996
19. M.S. Szczerba, T. Bajor, T. Tokarski: "Is There a Critical Resolved Shear Stress for Twinning in Face-Centred Cubic Crystals ?" *Phil. Mag.*, 2004, 84, 481-502
20. R.F.S. Hearmon "An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity", Oxford University Press, London, 1961
21. T.H. Blewitt, R.R. Coltman, J. K. Redman: "Low-Temperature Deformation of Copper Single Crystals", *J. Appl. Phys.* 28, 651 (1957)
22. J. Wyrzykowski, E. Pleszakow, J. Sieniawski „Odkształcanie i pękanie metali”, Warszawa, WNT 1999
23. T. Tokarski: „Wpływ bliźniakowania na podstrukturę dyslokacyjną i własności mechaniczne monokryształów RSC”, Rozprawa doktorska, AGH, Kraków 2007
24. M. Mazur „Doświadczalna analiza własności sprężystych monokryształów miedzi oraz stopu Cu-8% at. Al”, Praca magisterska, AGH, Kraków 2001
25. Badania własne – niepublikowane
26. A. Lewińska-Romicka: „Badania nieniszczące. Podstawy defektoskopii”, WNT, Warszawa 2001
27. K. Piela: "Mechanizmy odkształcania kryształów cynku w temperaturach podwyższonych", *Rozprawy Monografie 133*, AGH Uczelniane Wydawnictwo Naukowo-Dydaktyczne, Kraków 2004
28. R. Groeger, V. Vitek: "Breakdown of the Schmid law in bcc molybdenum related to the effect of shear stress perpendicular to the slip direction", *Mat. Sci. Forum* 482:123-126 (2005).
29. R. Groeger, V. Vitek: "Analytical plastic flow rules for bcc metals involving non-schmid effects", Los Alamos National Laboratory, 2008
30. A. Seeger, L. Hollang: "The flow-stress asymmetry of ultra-pure molybdenum single crystals", *Mater. Trans.* (2000), JIM, 41(1):141–151.
31. L. Landau, J. Lifszyc: "Teoria sprężystości", Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009

32. S. Timoshenko, J.N. Goodier: "Theory of elasticity", McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London 1957
33. W.A. Backofen: "Deformation Processing", Addison-Wesley Publishing Co. 1972
34. C.N. Reid: "Deformation geometry for materials scientists", Pergamon Press Ltd. Oxford, 1973
35. Akira Hirose, Karl E. Lonngren: "Introduction to wave phenomena", Wiley, New York, 1985
36. H. Bei et al.: "Elastic constants of single crystals Cr₃Si and Cr-Cr₃Si lamellar eutectic composites: a comparison of ultrasonic and nanoindentation measurements", Scripta Materialia 51 (2004) 875-879
37. V.B. Shenoy, C.V. Ciobanu: "Orientation dependence of the stiffness of surface steps: an analysis based on anisotropic elasticity", Surface Science 554 (2004) 222-232, Appendix A. Elastic constants for different surface orientations
38. X.-H. Zeng, T. Ericsson: "Anisotropy of elastic properties in various aluminium-lithium sheet alloys", Acta Materialia Vol. 44, No. 5 pp. 1801-1812, 1996
39. N.P. Kobelev et al.: "The elastic stiffness matrix of single-crystal C₆₀", Chemical Physics Letters 276 (1997) 263-265
40. T. Ichitsubo et al.: "Elastic constant measurement of Ni-base superalloy with the RUS and mode selective EMAR methods", Ultrasonics 40 (2002) 211-215
41. A.I. Lavrentyev, S.I. Rokhlin: "An ultrasonic method for determination of elastic moduli, density, attenuation and thickness of a polymer coating on a stiff plate", Ultrasonics 39 (2001) 211-221
42. M. Duquennoy et al.: "Theoretical determination of Rayleigh wave acoustoelastic coefficients: comparison with experimental values", Ultrasonics 39 (2002) 575-583
43. T. Błachowicz et al.: "Elastic constants of the SrLaAlO₄ and SrLaGaO₄ crystals measured at ultrasonic and hypersonic acoustic frequencies", Ultrasonics 39 (2002) 611-615
44. M.L. Shepard, J.F. Smith: "Elastic constants of Rhenium single crystals in the temperature range 4.2-298K", J. Appl. Phys., Vol. 36, No. 4, April 1965
45. S. Eros, J.R. Reitz: "Elastic Constants by the Ultrasonic Pulse Echo Method", J. Appl. Phys. 29, 683 (1958)
46. W.A. Wooster: "A Text-Book on Crystal Physics", Cambridge : The University Press 1938

47. L.M. Hopkin, H. Pursey and M.F. Markham: “Precise Measurements of the Elastic Constants of Copper and Silver Base Alloys”, *Z. Metallkd.* 61 (1970), pp. 535–540
48. A.E. Lord Jr.: “Elastic Stiffness Coefficients of Iron from 77° to 673°K”, *J. Appl. Phys.* 36 (1965), p. 1620
49. L. Wang: “Determination of elastic constants of composites by time-resolved acoustic microscopy”, *Ultrasonics* 37 (1999) 283-289
50. A. Cazzani, M. Rovati: “Extrema of Young’s modulus for cubic and transversely isotropic solids”, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 40, Issue 7, April 2003, pp. 1713-1744
51. J. R. Neighbours, C.S. Smith: “The elastic constants of copper alloys”, *Acta Metallurgica*, Volume 2, July 1954, pp. 591-596
52. R.E. Schmunk, C.S. Smith: “Elastic constants of copper-nickel alloys”, *Acta Metallurgica*, Volume 8, June 1960, pp. 396-401
53. S.G. Epstein, O.N. Carlson: “The elastic constants of nickel-copper alloy single crystals”, *Acta Metallurgica*, Volume 13, May 1965, pp. 487-491
54. Y.A. Chang, L. Himmel: “Temperature Dependence of the Elastic Constants of Cu, Ag, and Au above Room Temperature”, *J. Appl. Phys.*, Vol. 37, No. 9, August 1966
55. R.L. Moment: “Elastic stiffness of copper-tin and copper-aluminum alloy single crystals”, *J. Appl. Phys.*, Vol. 43, No. 11, November 1972