

Grzegorz Lenda\*

## TESTY JAKOŚCI DOPASOWANIA FUNKCJI SKLEJANYCH DO KSZTAŁTÓW OBIEKTÓW RZECZYWISTYCH

---

### 1. Wstęp

Funkcje sklepane stają się coraz powszechniej stosowanym narzędziem podczas przybliżania rozmaitych kształtów, reprezentowanych przez zbiory punktów przestrzennych, pozyskanych najczęściej za pomocą tachimetrów bezzwierciadlanych czy też skanerów laserowych. Mimo teoretycznie dobrych ich własności przy dopasowaniu do zadanego kształtu, w przypadku złego rozkładu punktów obserwowanych na mierzonym obiekcie można w rezultacie otrzymać splajn znacznie odbiegający od rzeczywistej formy tego obiektu. Dodatkowo nie istnieją mierniki dopasowania łuku splajnu do oryginału, które z inżynierskiego punktu widzenia pozwoliłyby ocenić wielkość zafałszowania oryginału wprowadzonego przez ewentualne zafałszowania funkcji sklepanej.

Artykuł ten jest poświęcony testom pozwalającym według autora ocenić praktyczną przydatność funkcji sklepanych do opisu możliwie szerokiej gamy spotykanych formacji inżynierskich. Konieczne jest więc zaproponowanie odpowiednich mierników oceny jakości dopasowania splajnu do obiektu rzeczywistego oraz wykonanie za ich pomocą testów dla możliwie szerokiej gamy kształtów. Jednocześnie przeprowadzone badania powinny umożliwić zebranie zwiezłych wyników, których zestawienie z kształtem obiektu przeznaczonego do pomiaru da wskazówki dotyczące doboru gęstości planowanych punktów pomiarowych, zapewniającej wystarczająco dokładne interpolacyjne przybliżenie obiektu. Istnieje kilka głównych przyczyn powstawania zafałszowań oraz zapętleń, a więc objawów informujących o niedopasowaniu funkcji sklepanej do rozpatrywanego obiektu. Najważniejsze z nich są niezależne od metod tworzenia splajnów, a można do nich zaliczyć: gwałtowne zmiany kierunku przebiegu krzywej i towarzyszący im niewłaściwy dobór punktów charakterystycznych oraz duże dysproporcje długości pomiędzy kolejnymi przybliżanymi odcinkami. Są one ze sobą ściśle powiązane i zależą od rozkładu punktów obserwowanych. Analizie zostaną więc poddane pewne wybrane konfiguracje punktów, tworzące kształty umożliwiające ich klasyfikację wg podanych niżej reguł, a przez to łatwe do porównania

---

\* Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska

z ewentualnymi formacjami inżynierskimi bądź naturalnymi. Pozostałe czynniki mające wpływ na zafalowania zależą głównie od przyjętego sposobu parametryzacji i one również będą przedmiotem badań.

Wszystkie testy przeprowadzane zostaną dla funkcji dwuwymiarowych, niemniej pozostają one aktualne dla przypadku trójwymiarowego. Przeprowadzenie podobnych analiz dla powierzchni musiałyby objąć zdecydowanie większą liczbę przypadków, a przez to stałyby się trudne do wykonania i generowałyby bardzo obszerny materiał, z którego trudno byłoby wyciągnąć zwięzłe wnioski dotyczące konkretnej sytuacji pomiarowej.

## 2. Charakterystyka procedury testowej

Czynnością poprzedzającą wykonanie testów musi być wyselekcjonowanie odpowiednich mierników dopasowania splajnu do rozpatrywanego obiektu, które pozwolą dokonać oceny jakości przybliżenia w sposób przejrzysty i praktyczny, z punktu widzenia użytkownika nieposiadającego gruntownej wiedzy w dziedzinie funkcji sklejanych.

Do zgrubnej oceny jakości przybliżenia splajnem rzeczywistego kształtu, stosowane są głównie dwa mierniki:

- 1) Błąd aproksymacji  $\varepsilon$  (zależny od klasy przybliżanej funkcji  $f$ , używany najczęściej dla przypadku gdy  $f \in C^2$ , a splajn  $S$  jest tzw. naturalną funkcją sklejaną [3])

$$\varepsilon = |f - S| \leq \frac{1}{2} \max(h_i^2) M \quad \text{dla } i = 0, \dots, n \quad (1)$$

gdzie:

$$M = \text{const},$$

$$M \geq |f''(x)|,$$

$$h_i = x_{i+1} - x.$$

Oszacowanie to uwidacznia, iż gęstość danych obserwacyjnych ma zasadniczy wpływ na jakość aproksymacji: przy podwojeniu liczby punktów otrzymuje się czterokrotnie mniejszy błąd  $\varepsilon$ .

- 2) Przybliżona miara krzywizny całkowitej splajnu

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f''(x)|^2 dx \quad (2)$$

Norma ta wiąże się z energią potencjalną odkształconej giętki. Dopasowana do danych punktów giętka dąży do przyjęcia stanu jak najmniejszej energii potencjalnej, co osiąga poprzez minimalizację krzywizny pomiędzy tymi punktami. Jest to korzystne z punktu widzenia interpolacji, gdyż osiąga się dobrze dopasowany, gładki kształt bez dużych zafalowań.

Pomimo że od funkcji sklejaney oczekuje się możliwie gładkiego przebiegu dobrze dopasowanego do mierzonych punktów, to jednak wymienione mierniki są zbyt ogólne dla większości analiz dotyczących jakości przybliżenia oryginalnego kształtu. Krzywizna całkowita, niemówiąca nic o położeniu i kształcie krzywej, czy też błąd aproksymacji będący tyl-

ko ogólnym oszacowaniem nie mogą stanowić nośników informacji, które w konkretnej sytuacji pomiarowej pozwolą ocenić jakość późniejszego przybliżenia. Dlatego też zdecydowano się na wprowadzenie innych mierników, zdaniem autora dających lepszą ocenę dopasowania splajnu do wzorca na potrzeby przeprowadzonych testów. Pierwszym z nich jest stosunek długości łuku splajnu do długości wzorca

$$M_l = \frac{l_s}{l_w} \cdot 100 [\%] \quad (3)$$

drugim natomiast – średnia odległość splajnu od wzorca odniesiona do długości łuku wzorca

$$M_d = \frac{d_{s-w}}{l_w} \cdot 100 \quad (4)$$

Wielkości  $l_s$  i  $l_w$  wyznaczono wg ogólnie znanych wzorów na długość łuku krzywej opisanej równaniem parametrycznym (splajn), oraz jawnym (wzorzec). Średnią odległość  $d_{s-w}$  uzyskano, wyznaczając pole ograniczone łukami splajnu i wzorca, dzieląc je następnie przez długość łuku wzorca. Obydwie miary ( $M_l$  i  $M_d$ ) wyrażono w procentach, co przy znajomości planowanych odległości pomiędzy obserwowanymi punktami pozwoli na ich łatwe przeskalowanie, a tym samym ocenę wielkości zniekształceń, które wprowadza opis za pomocą interpolacyjnych funkcji sklejanych.

Miernik  $M_l$  zastępuje w pewnym sensie wielkość krzywizny całkowitej na danym odcinku, ponieważ krzywe o podobnej długości łuku, rozpięte pomiędzy tymi samymi punktami będą posiadały również zbliżoną krzywiznę. Jego przydatność ujawnia się w sytuacjach, gdy pomiary dotyczą elementów elastycznych, których kształt należy następnie dopasować do wzorca, lub do modelu wytworzonego przy użyciu funkcji sklejanych. Dotyczy to zarówno elementów liniowych (np. szyna kolejowa), jak i powierzchniowych (np. pokrycia blaszane różnych konstrukcji). Dostosowanie ich dożądanego kształtu wymagać może wprowadzenia pewnych przesunięć, zazwyczaj jednak nie dopuszcza się zmiany gabarytów, co wiązałoby się z koniecznością skracania bądź dosztukowywania tych elementów. Wygenerowany przy użyciu krzywych sklejanych model opisujący rzeczywisty kształt czy też model, do którego należy doprowadzić istniejący stan, może powodować znaczące zmiany długości, co w praktyce okaże się niedopuszczalne. Wielkość  $M_l$  przydatna jest więc wszędzie tam, gdzie po pomiarze dążyć się będzie do zmiany (wyregulowania) aktualnego stanu obiektu.

Miernik  $M_d$  pozwoli natomiast określić przeciętną wielkość poprzecznego zniekształcenia na zadanym odcinku (w skali tego odcinka), wprowadzanego przez opis za pomocą funkcji sklejanych. Decydować może ono zarówno o ograniczanej przez generowany model powierzchni, objętości, jak i przede wszystkim o dokładności rozpoznania zaburzeń kształtu (krzywizny) rozważanego obiektu, które mogą mieć poważny wpływ na jego statykę lub funkcję. Znaczenie  $M_d$  jest więc podstawowe, jeśli chodzi o odzwierciedlenie stanu rzeczywistego obiektu, niezależnie od jego postaci.

Zamiast parametru  $M_d$  rozważano wprowadzenie miernika podającego maksymalną odległość na danym odcinku pomiędzy łukiem splajnu i wzorca, odniesioną do długości łuku wzorca. Podczas prób różnych kombinacji punktów okazało się jednak, iż istnieją

przypadki, gdy splajn na całym odcinku jest dobrze dopasowany do wzorca (a), a tylko na nieznacznej długości odbiega od niego znacznie i wówczas takie kryterium świadczyłoby o słabym dopasowaniu. Z drugiej strony inna funkcja sklejana może na tym samym odcinku znacznie odbiegać od wzorca na całej długości (b), jednak jeżeli jej maksymalne odchylenie będzie mniejsze niż w przypadku (a), to mimo iż oferuje ona gorsze przybliżenie, miernik wykazałby sytuację odwrotną. Ostatecznie, zrezygnowano z tego typu testu, decydując się zamiast niego dołączyć do danych tabelarycznych wykresy, pozwalające zorientować się w przebiegu krzywej. Należy nadmienić, że dla wybranych do analiz wzorców zjawisko (a) występuje w postaci marginalnej.

Ważnym zadaniem jest odpowiedni dobór typów funkcji sklejanych, które zostaną poddane badaniom. Przebieg splajnu nie zależy od jego reprezentacji [3], tak więc wystarczy dla dowolnie wybranej reprezentacji przetestować jedynie metody modyfikujące kształt funkcji sklejanych. Ponieważ podstawowym założeniem testów jest zobrazowanie jakości przybliżenia wzorca o wybranym charakterystycznym kształcie, należy odrzucić metody aproksymacyjne, gdyż powodują one wygładzenie krzywej, co dzieje się kosztem dokładności odwzorowania oryginału. Dodatkowo metody te wprowadzają czynnik zależny od osoby dokonującej przybliżenia (dobór parametru aproksymacji lub subiektywny wybór grup punktów uczestniczących w wytworzeniu danego odcinka aproksymacyjnego [3]). Z praktycznego punktu widzenia, wobec odrzucenia wymogu ścisłego dopasowania do oryginalnego wzorca, badanie takich funkcji nie przyniosłoby miarodajnych rezultatów. Zastanowienia wymaga również sens analizowania niektórych metod modyfikujących krzywe interpolacyjne [3] (zmniejszanie klasy ciągłości połączeń funkcji, wstawianie dodatkowych punktów interpolacyjnych, wymierne klasyczne funkcje sklepane, wymierne funkcje B-sklepane NURBS). Ich wyboru należy dokonać tak, aby wyeliminować możliwość wpływu subiektywnego czynnika ludzkiego na tworzony splajn, szczególnie przy założeniu, że nie posiada on obiektywnych informacji dotyczących rzeczywistego kształtu obiektu. Takie rozważania zdecydowanie zawężają zakres prowadzonych badań do analizy przypadków modyfikacji poprzez odpowiednią parametryzację. Wszystkie pozostałe metody, jakkolwiek pozwalają w dużym stopniu modelować krzywą, to jednak przy braku choćby ogólnego rozeznania w rzeczywistym kształcie przybliżanego obiektu nie mogą być stosowane. Nie ma bowiem wówczas żadnych przesłanek do przyjmowania jakichkolwiek założeń właściwych danej metodzie. Nie oznacza to, że metody te są nieużyteczne, znajdując zastosowanie przy projektowaniu gładkich form o dowolnych kształtach. Dodatkowo przy znajomości obiektu, nawet jedynie wizualnej, w przypadku powstania niepożądanych zafalowań splajnu, które dla rzeczywistego kształtu nie występują, można dla ich redukcji użyć tego typu metod. Postępowanie takie będzie jednak równie subiektywne jak w przypadku tworzenia krzywych aproksymacyjnych. Za subiektywne można również uznać dobieranie metody parametryzacji. Ogólnie najlepsze efekty przynosi parametryzacja pierwiastkiem odległości pomiędzy punktami interpolacyjnymi (a), dając najbardziej zrównoważony rozkład odkształceń dla całego splajnu. Powinna ona być wyróżniona na tle pozostałych, ponieważ: parametryzacja odległością pomiędzy punktami interpolacyjnymi (b) daje podobne, choć zwykle nieco gorsze wyniki, parametryzacja stałą długością przedziału (c) ma na celu jedynie uproszczenie obliczeń kosztem jakości dopasowania, natomiast parametryzacja długością przedziału określoną na zbiorze odciętych (d) (będąca odpowiednikiem jawnego opisu

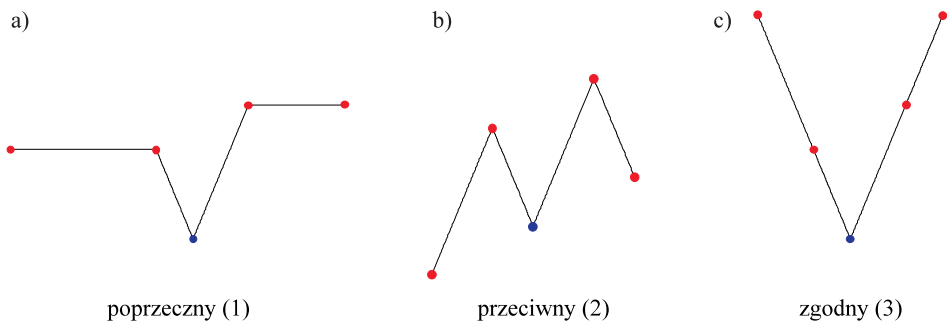
funkcji) wywodzi się z czasów, gdy nie stosowano opisu parametrycznego i trudno podać jakiegokolwiek jej zalety.

Przeprowadzane testy będą więc dotyczyć trzech wybranych parametryzacji: przypadku (a), jako najbardziej wskazanego, oraz przypadków (c) i (d), ponieważ są bardzo często opisywane, szczególnie w polskojęzycznej literaturze, jednak nierzadko bez szczegółowego wyjaśnienia, jakie wnoszą ograniczenia – to powinny zobrazować przeprowadzone analizy. Przypadek (b) zostanie pominięty jako zbliżony do (a).

Celem testów będzie więc uzyskanie informacji, jakich deformacji względem wzorca można się spodziewać przy określonej konfiguracji punktów interpolacyjnych, oraz zastosowanej parametryzacji splajnu. Równie ważne wydaje się sprawdzenie, jak funkcjonuje oszacowanie (1) przy podwojeniu liczby punktów interpolacyjnych reprezentujących obiekt. Interesujące jest także przetestowanie, czy za pomocą odrzuconych metod modyfikujących funkcje interpolacyjne można dla początkowego zestawu punktów uzyskać przybliżenie porównywalne z tym, które otrzyma się po ich zagęszczeniu (podwojeniu). Do tego celu zostaną wybrane krzywe NURBS [2, 3], ponieważ oferują najbardziej elastyczne spośród pozostałych metod mechanizmy dostosowania splajnu do wzorca.

Ostatnią czynnością jest wybór wzorców, dla których przeprowadzone zostaną testy. Należy wyjaśnić, jakie przesłanki stanowiły o takim, a nie innym wyborze. Celem badań miało być zebranie jak najbardziej zwięzłych wyników, które powinny określać maksymalne deformacje (wprowadzone przez opis funkcjami sklepanymi) dla grupy kształtów zbliżonych do określonego wzorca. Zbieżność splajnu z funkcją wzorcową jest tym gorsza, im niższej klasy jest ta funkcja. Można więc oczekiwać, że w wypadku przyjęcia wzorców klasy  $C^0$  zbieżność do nich będzie najśłabsza, a tym samym powstałe przy ich opisie zniekształcenia splajnu będą większe niż w przypadku wzorców o wyższych klasach ciągłości. Otrzyma się w ten sposób najbardziej pesymistyczne wyniki, oszacowujące od góry zbiór możliwych zniekształceń dla wzorców o podobnym kształcie jednak o wyższej klasie ciągłości. Zyskuje się dzięki temu wysokie prawdopodobieństwo, że przybliżanie kształtu o ciągłej krzywiznie nie da gorszych rezultatów niż te otrzymane podczas testów. Jako wzorce wybrano zatem proste łamane (czyli o połączeniach klasy  $C^0$ ), których wierzchołki tworzą zbiór punktów interpolacyjnych, a na ich bazie skonstruowane zostały krzywe sklepane. Zamiast wzorców prostoliniowych, pomiędzy punktami załamań rozważano użycie odcinków krzywoliniowych, co mogłoby jednak prowadzić do otrzymania niejasnych wyników. Sprawą dyskusyjną stałoby się wówczas, jak znaczna powinna być krzywizna na tych odcinkach oraz w którym kierunku ma postępować zakrzywienie. Dodatkowo modele prostoliniowe pozwoliły jednoznacznie wybrać wszystkie punkty charakterystyczne wzorca (którymi są miejsca załamań) i przyjąć je następnie za punkty interpolacyjne. W wypadku wymienionych wyżej wzorców krzywoliniowych oprócz miejsc załamań należałoby rozważyć dołączenie do grupy punktów interpolacyjnych takich punktów charakterystycznych, których wybór narzucałby przebieg krzywej. Dobór punktów charakterystycznych obiektu ma zasadnicze znaczenie dla jakości przybliżenia krzywymi sklepanymi, więc podczas testów nie powinno zachodzić ryzyko niejednoznacznego ich wyboru. Wszystkie punkty załamań wybranych odcinków prostych stanowić będą podstawowy zbiór testowy punktów interpolacyjnych. Do badań analizujących wpływ zagęszczenia danych wybrane zostaną dodatkowo punkty leżące w środku istniejących odcinków prostoliniowych.

Wybór kształtu odcinków wzorcowych wiąże się ściśle z szybkością zmiany krzywizny funkcji aproksymowanej: im jest ona większa, tym większe będą zniekształcenia splajnu. Ponieważ wybrane odcinki są prostoliniowe, gwałtownej zmianie krzywizny wzorca o ciągłej krzywiznie będzie tutaj odpowiadać załamanie „bazowe”, generujące zafalowania funkcji sklejanej. Przyjęte będą dwa rodzaje wzajemnego położenia odcinków wzorcowych – ostrokątny generujący większe zniekształcenia oraz rozwartokątny, pozwalający na uzyskanie lepszego przybliżenia. Poza załamaniem „bazowym” (ewentualnie lokalnym ekstremum dla funkcji o ciągłej krzywiznie) dowolny obiekt tworzą dalsze formacje, które mogą być skierowane w trzech krytycznych kierunkach: zgodnym z dotychczasowymi kierunkami kształtu wchodzącego i wychodzącego z załamania oraz odpowiednio do niego poprzecznym i przeciwnym. Kierunki te mają decydujący wpływ na generowane zafalowania splajnu w otoczeniu rozważanego załamania. Ponieważ kierunek przeciwny do aktualnego pokrywa się z nim (przeciwny jest tylko zwrot), z praktycznego punktu widzenia jest to przypadek nieprzydatny. Dlatego też jako kierunki przeciwne wybrano proste tworzące takie same kąty załamań jak załamanie „bazowe”, jednak odwrotnie względem niego zwrócone, kierunki poprzeczne, natomiast wypośrodkowano pomiędzy zgodnymi i przeciwnymi (rys. 1).



**Rys. 1.** Wzorce 5-punktowe przyjęte do testów: a) poprzeczny; b) przeciwny; c) zgodny.  
Punkt środkowy to punkt załamania bazowego

Taki wybór wzorców wyznacza więc generujące zafalowania załamanie oraz decydujące o wielkości tych zafalowań podstawowe kierunki określające dalszy kształt rozważanego obiektu. W przekonaniu autora są to wystarczające czynniki pozwalające przeprowadzić zwięzłe testy zafalowań wprowadzanych podczas przybliżania funkcjami sklejany. Wyniki analiz mają oczywiście znaleźć zastosowanie przy ocenie zniekształceń dla opisu obiektów o ciągłej krzywiznie. W tym wypadku załamaniu odpowiada lokalne ekstremum, a dalsze kierunki wyznaczające obiekt mają takie samo znaczenie jak rozpatrywane, łatwo więc można odnaleźć analogię w testowanym kształcie prostoliniowym i porównywanym do niego krzywoliniowym. Dodatkowo, jak wyżej wspomniano, otrzyma się dzięki tego typu testom górne oszacowanie maksymalnych zniekształceń splajnu, które mogą wystąpić dla wybranego modelu.

Zasadniczo załamanie tworzą trzy punkty interpolacyjne, realizacja zakładanych kierunków wymaga dodatkowych dwóch punktów. Podstawowy model pozwalający wyzna-

czyć deformacje splajnu tworzyć więc będzie pięć punktów, operacja zagęszczania zwiększy tę liczbę do dziewięciu.

O wielkości zafalowań może decydować jeszcze jeden czynnik – wzajemne proporcje pomiędzy długościami sąsiednich odcinków interpolacyjnych. Im są one większe, tym większe zafalowania. Dlatego też wybrano wzorce niesymetryczne (rys. 1), dla których proporcje odcinków przed zafalowaniem środkowym („bazowym”) są odwrotne do proporcji odcinków po drugiej jego stronie. Proporcje te zostały ustalone na niewielkim poziomie ( $3/2$  i  $2/3$ ), ponieważ testy mają dać wyniki dla praktycznych przypadków, a planowanie nierównomiernie rozłożonych obserwacji na obiekcie z góry naraża na błędy powstałe w późniejszym opisie, czemu powinno się zapobiegać. Testy przy tak przyjętych proporcjach mają więc dać wskazówki świadomemu zjawiska obserwatorowi, który jednocześnie nie musi troszczyć się o zapewnienie bardzo zbliżonych odległości pomiędzy obserwacjami, co w praktyce byłoby czasochłonne i niewygodne.

Wszystkie prowadzone według powyższych rozważań analizy dostarczą gotowych mierników jakości przybliżenia, które po przeskalowaniu i porównaniu z obserwowanym obiektem dadzą odpowiedź, jak dobre dopasowanie uzyska się, planując określone zagęszczenie punktów pomiarowych.

W tabeli i na rysunkach zamieszczonych w artykule użyto następujących oznaczeń:

— kategoria **kąty modelu**:

- o** – wzorzec prostoliniowy ostrokątny,
- r** – wzorzec prostoliniowy rozwartokątny;

— kategoria **rodzaj wzorca**:

- 1** – wzorzec poprzeczny,
- 2** – wzorzec przeciwny,
- 3** – wzorzec zgodny;

— kategoria **gęstość punktów**:

- p** – punkty podstawowe,
- z** – punkty zagęszczone;

— kategoria **rodzaj splajnu**:

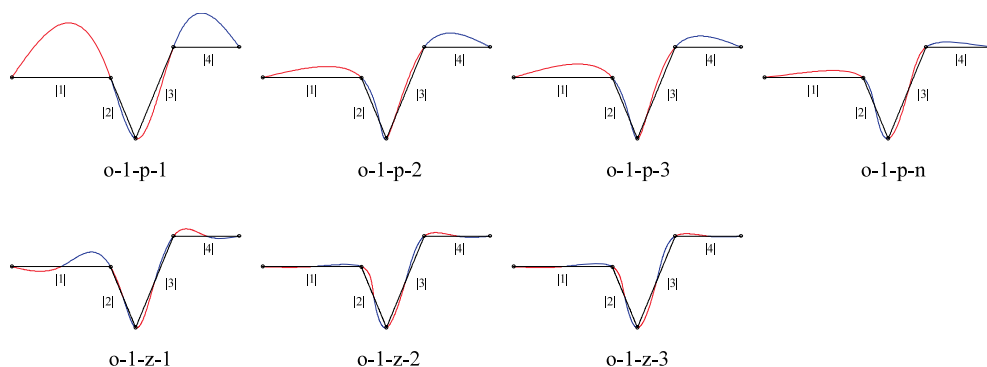
- 1** – krzywa parametryzowana długością przedziału określoną na zbiorze odciętych,
- 2** – krzywa parametryzowana stałą długością przedziału,
- 3** – krzywa parametryzowana pierwiastkiem odległości pomiędzy punktami interpolacyjnymi,
- n** – krzywa NURBS parametryzowana pierwiastkiem odległości pomiędzy punktami interpolacyjnymi.

Podpisy pod wybranymi przykładowymi wykresami (rys. 2) (których pełne zestawienie dostępne jest u autora pracy) ułożone są w analogicznej kolejności jak wymienione wyżej kategorie, tak więc np. o-2-z-2 oznacza wzorzec prostoliniowy ostrokątny, przeciwny z punktami zagęszczonymi, parametryzowany stałą długością przedziału.

Dane w tabeli 1 zgrupowano według identycznych oznaczeń. Wyniki właściwe odpowiednim miernikom zestawiono oddzielnie dla każdego odcinka interpolacyjnego, a także dla całego rozważanego kształtu.

**Tabela 1.** Testy zgodności dla wzorców prostoliniowych. Pogrubieniem oznaczono najlepszą metodę parametryzacji, której wyniki stanowią bazę do oceny zniekształceń, jakie mogą wnieść do modelu funkcje sklepane przy założonej gęstości i rozmieszczeniu punktów pomiarowych

| Kąty modelu | Wzorzec  | Gęstość punktów | Rodzaj splajnu | Miernik $M_l$ długość splajnu / długość wzorca [%] |              |              |              |              | Miernik $M_l$ średnia odległość splajnu od wzorca / długość wzorca [%] |            |            |             |            |
|-------------|----------|-----------------|----------------|----------------------------------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|------------------------------------------------------------------------|------------|------------|-------------|------------|
|             |          |                 |                | odc. 1                                             | odc. 2       | odc. 3       | odc. 4       | cały model   | odc. 1                                                                 | odc. 2     | odc. 3     | odc. 4      | cały model |
| o           | 1        | p               | 1              | 155.7                                              | 101.1        | 102.9        | 149.7        | 127.7        | 35.9                                                                   | 3.0        | 3.7        | 33.4        | 19.2       |
| o           | 1        | p               | 2              | 103.8                                              | 103.8        | 100.4        | 111.4        | 104.3        | 7.3                                                                    | 3.0        | 1.5        | 13.8        | 6.0        |
| <b>o</b>    | <b>1</b> | <b>p</b>        | <b>3</b>       | <b>105.5</b>                                       | <b>101.4</b> | <b>100.9</b> | <b>107.5</b> | <b>103.7</b> | <b>8.9</b>                                                             | <b>2.2</b> | <b>1.9</b> | <b>10.9</b> | <b>5.9</b> |
| o           | 1        | p               | n              | 101.8                                              | 103.5        | 101.6        | 101.9        | 102.1        | 4.5                                                                    | 3.1        | 2.1        | 4.8         | 3.6        |
| o           | 1        | z               | 1              | 111.0                                              | 100.6        | 102.1        | 106.6        | 105.4        | 12.2                                                                   | 2.4        | 3.7        | 9.1         | 7.1        |
| o           | 1        | z               | 2              | 100.3                                              | 105.8        | 101.2        | 101.8        | 102.0        | 1.8                                                                    | 8.1        | 3.7        | 4.4         | 4.2        |
| <b>o</b>    | <b>1</b> | <b>z</b>        | <b>3</b>       | <b>100.7</b>                                       | <b>103.1</b> | <b>102.3</b> | <b>100.9</b> | <b>101.7</b> | <b>2.6</b>                                                             | <b>6.1</b> | <b>4.9</b> | <b>3.1</b>  | <b>4.1</b> |
| o           | 2        | p               | 1              | 110.3                                              | 100.9        | 102.6        | 104.3        | 104.9        | 7.1                                                                    | 1.7        | 2.3        | 5.4         | 4.2        |
| o           | 2        | p               | 2              | 103.1                                              | 103.9        | 100.6        | 115.2        | 104.9        | 4.2                                                                    | 3.0        | 1.3        | 9.5         | 4.2        |
| <b>o</b>    | <b>2</b> | <b>p</b>        | <b>3</b>       | <b>106.0</b>                                       | <b>101.9</b> | <b>101.3</b> | <b>108.5</b> | <b>104.3</b> | <b>5.5</b>                                                             | <b>2.3</b> | <b>1.7</b> | <b>7.2</b>  | <b>4.1</b> |
| o           | 2        | p               | n              | 101.0                                              | 103.8        | 102.5        | 101.6        | 102.1        | 2.8                                                                    | 3.0        | 2.3        | 3.5         | 2.8        |
| o           | 2        | z               | 1              | 101.6                                              | 101.4        | 104.5        | 100.5        | 102.2        | 2.9                                                                    | 3.7        | 5.4        | 1.9         | 3.6        |
| o           | 2        | z               | 2              | 100.3                                              | 106.3        | 101.0        | 102.2        | 102.1        | 1.6                                                                    | 6.8        | 3.0        | 3.6         | 3.5        |
| <b>o</b>    | <b>2</b> | <b>z</b>        | <b>3</b>       | <b>100.7</b>                                       | <b>103.0</b> | <b>102.2</b> | <b>101.0</b> | <b>101.7</b> | <b>2.1</b>                                                             | <b>5.0</b> | <b>4.1</b> | <b>2.6</b>  | <b>3.4</b> |
| o           | 3        | p               | 1              | 100.1                                              | 101.2        | 103.2        | 100.1        | 101.3        | 1.2                                                                    | 3.3        | 4.3        | 1.2         | 2.5        |
| o           | 3        | p               | 2              | 100.1                                              | 106.7        | 100.5        | 100.1        | 101.6        | 1.4                                                                    | 6.0        | 2.3        | 1.1         | 2.5        |
| <b>o</b>    | <b>3</b> | <b>p</b>        | <b>3</b>       | <b>100.1</b>                                       | <b>102.9</b> | <b>101.4</b> | <b>100.1</b> | <b>101.0</b> | <b>1.3</b>                                                             | <b>4.5</b> | <b>3.2</b> | <b>1.2</b>  | <b>2.5</b> |
| o           | 3        | p               | n              | 100.0                                              | 100.4        | 100.1        | 100.0        | 100.1        | 0.5                                                                    | 0.8        | 0.5        | 0.3         | 0.5        |
| o           | 3        | z               | 1              | 100.0                                              | 100.5        | 101.8        | 100.0        | 100.7        | 0.2                                                                    | 1.9        | 2.8        | 0.2         | 1.3        |
| o           | 3        | z               | 2              | 100.0                                              | 102.3        | 100.5        | 100.0        | 100.6        | 0.2                                                                    | 3.5        | 1.6        | 0.2         | 1.3        |
| <b>o</b>    | <b>3</b> | <b>z</b>        | <b>3</b>       | <b>100.0</b>                                       | <b>101.1</b> | <b>100.9</b> | <b>100.0</b> | <b>100.5</b> | <b>0.2</b>                                                             | <b>2.6</b> | <b>2.1</b> | <b>0.2</b>  | <b>1.3</b> |
| r           | 1        | p               | 1              | 101.6                                              | 100.6        | 101.1        | 101.0        | 101.1        | 5.0                                                                    | 2.4        | 2.8        | 4.0         | 3.6        |
| r           | 1        | p               | 2              | 100.6                                              | 101.8        | 100.3        | 102.0        | 101.0        | 3.0                                                                    | 3.6        | 1.4        | 5.7         | 3.2        |
| <b>r</b>    | <b>1</b> | <b>p</b>        | <b>3</b>       | <b>100.9</b>                                       | <b>101.0</b> | <b>100.6</b> | <b>101.3</b> | <b>100.9</b> | <b>3.7</b>                                                             | <b>2.8</b> | <b>1.9</b> | <b>4.5</b>  | <b>3.1</b> |
| r           | 1        | p               | n              | 100.2                                              | 101.5        | 100.7        | 100.2        | 100.6        | 1.5                                                                    | 2.3        | 1.7        | 1.6         | 1.7        |
| r           | 1        | z               | 1              | 100.2                                              | 100.5        | 101.2        | 100.1        | 100.5        | 1.6                                                                    | 2.8        | 4.1        | 1.0         | 2.5        |
| r           | 1        | z               | 2              | 100.1                                              | 101.8        | 100.4        | 100.3        | 100.6        | 0.8                                                                    | 5.3        | 2.4        | 1.8         | 2.4        |
| <b>r</b>    | <b>1</b> | <b>z</b>        | <b>3</b>       | <b>100.1</b>                                       | <b>101.0</b> | <b>100.7</b> | <b>100.1</b> | <b>100.5</b> | <b>1.1</b>                                                             | <b>3.9</b> | <b>3.2</b> | <b>1.3</b>  | <b>2.3</b> |
| r           | 2        | p               | 1              | 103.4                                              | 100.6        | 101.3        | 101.9        | 101.9        | 7.1                                                                    | 1.7        | 2.3        | 5.4         | 4.2        |
| r           | 2        | p               | 2              | 101.3                                              | 101.9        | 100.4        | 105.4        | 102.0        | 4.2                                                                    | 3.0        | 1.3        | 9.5         | 4.2        |
| <b>r</b>    | <b>2</b> | <b>p</b>        | <b>3</b>       | <b>102.1</b>                                       | <b>101.1</b> | <b>100.8</b> | <b>103.3</b> | <b>101.7</b> | <b>5.5</b>                                                             | <b>2.3</b> | <b>1.8</b> | <b>7.2</b>  | <b>4.1</b> |
| r           | 2        | p               | n              | 100.6                                              | 102.1        | 101.4        | 100.9        | 101.2        | 2.8                                                                    | 2.8        | 2.3        | 3.4         | 2.8        |
| r           | 2        | z               | 1              | 100.8                                              | 100.9        | 102.0        | 100.3        | 101.1        | 2.9                                                                    | 3.7        | 5.4        | 1.9         | 3.6        |
| r           | 2        | z               | 2              | 100.2                                              | 102.9        | 100.7        | 101.1        | 101.1        | 1.6                                                                    | 6.8        | 3.0        | 3.6         | 3.5        |
| <b>r</b>    | <b>2</b> | <b>z</b>        | <b>3</b>       | <b>100.4</b>                                       | <b>101.6</b> | <b>101.2</b> | <b>100.6</b> | <b>100.9</b> | <b>2.1</b>                                                             | <b>5.0</b> | <b>4.1</b> | <b>2.6</b>  | <b>3.4</b> |
| r           | 3        | p               | 1              | 100.1                                              | 100.8        | 101.4        | 100.1        | 100.6        | 1.2                                                                    | 3.3        | 4.3        | 1.2         | 2.5        |
| r           | 3        | p               | 2              | 100.1                                              | 102.6        | 100.4        | 100.1        | 100.7        | 1.4                                                                    | 6.0        | 2.3        | 1.1         | 2.5        |
| <b>r</b>    | <b>3</b> | <b>p</b>        | <b>3</b>       | <b>100.1</b>                                       | <b>101.5</b> | <b>100.8</b> | <b>100.1</b> | <b>100.6</b> | <b>1.3</b>                                                             | <b>4.5</b> | <b>3.2</b> | <b>1.2</b>  | <b>2.5</b> |
| r           | 3        | p               | n              | 100.0                                              | 100.2        | 100.1        | 100.0        | 100.1        | 0.5                                                                    | 0.8        | 0.5        | 0.3         | 0.5        |
| r           | 3        | z               | 1              | 100.0                                              | 100.4        | 100.8        | 100.0        | 100.3        | 0.2                                                                    | 1.9        | 2.8        | 0.2         | 1.3        |
| r           | 3        | z               | 2              | 100.0                                              | 101.1        | 100.3        | 100.0        | 100.3        | 0.2                                                                    | 3.5        | 1.6        | 0.2         | 1.3        |
| <b>r</b>    | <b>3</b> | <b>z</b>        | <b>3</b>       | <b>100.0</b>                                       | <b>100.6</b> | <b>100.5</b> | <b>100.0</b> | <b>100.3</b> | <b>0.2</b>                                                             | <b>2.6</b> | <b>2.1</b> | <b>0.2</b>  | <b>1.3</b> |



**Rys. 2.** Wyniki przybliżeń wzorców o wybranej geometrii funkcjami sklejanymi przy zastosowaniu różnych rodzajów parametryzacji, dla podstawowego i zagęszczonego zbioru punktów

Wyniki dla wzorców o punktach zagęszczonych scalono tak, aby odpowiadały odcinkom niezagęszczonym, dając tym samym możliwość bezpośredniego porównania zmian wnoszonych przez podwojenie liczby punktów interpolacyjnych. Pogrubieniem wyróżniono wyniki najlepszej metody parametryzacji, stanowiące optymalną bazę do oceny zniekształceń, jakie mogą wnieść do modelu funkcje sklepane przy założonej gęstości i rozmieszczeniu punktów pomiarowych.

### 3. Wnioski

Wyniki przeprowadzonych testów zasadniczo nie wymagają komentarza, ponieważ w założeniu mają tylko stanowić zbiór danych przydatnych do przeprowadzenia porównań przed przystąpieniem do pomiaru określonego obiektu. Wystarczy nadmienić, iż potwierdziły się oczekiwania odnośnie do jakości dopasowania przy założonej parametryzacji oraz gęstości punktów. Dobór węzłów proporcjonalnie do pierwiastka odległości pomiędzy punktami interpolacyjnymi daje najbardziej zrównoważony opis całego obiektu, posiadający najmniejsze całkowite zniekształcenia (a w najgorszym wypadku nie większe niż parametryzacje konkurencyjne). Zagęszczanie punktów pomiarowych przynosi rezultaty tym lepsze, im słabsze było dopasowanie do wzorca przy początkowej liczbie tych punktów. Dodatkowo wykazano, iż opis funkcjami NURBS pozwala na otrzymanie wyników porównywalnych z zagęszczaniem punktów pomiarowych. Jak jednak wyżej wspomniano, bazuje on na subiektywnych przesłankach, które przy nieznanym kształcie analizowanego obiektu mogą zawieść, dając rezultaty odwrotne od zamierzonych.

### Literatura

- [1] Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L.: *The theory of splines and their applications*. New York, Academic Press Inc. 1967
- [2] Kiciak P.: *Podstawy modelowania krzywych i powierzchni*. Warszawa, WNT 2000

- 
- [3] Lenda G.: *Zastosowanie funkcji sklejanych w zautomatyzowanym procesie geodezyjnej kontroli kształtu powierzchni obiektów budowlanych*. Kraków, AGH 2005 (rozprawa doktorska)
  - [4] Murray D.: *Active vision laboratory – Parametric curves and surfaces*. University of Oxford, Department of Engineering Science 2004
  - [5] Wahba G.: *Spline models for observational data*. Vermont, Capital City Press 1992