

POŁOWE METODY WYZNACZANIA PARAMETRÓW ELEKTROMAGNETYCZNYCH MODELI OBWODOWYCH MASZYN ELEKTRYCZNYCH**

STRESZCZENIE

Parametrami elektromagnetycznymi modeli obwodowych maszyn elektrycznych są współczynniki funkcji aproksymujących związki strumieniowo-prądowe, nazywane charakterystykami uzwojeń. Wygodnym narzędziem do ich wyznaczania zarówno w zakresie liniowym, jak i w nieliniowym, są komercyjne pakiety polowe. Związki pomiędzy obwodowym i polowym modelem wynikają z porównania wzorów określających koenergię pola magnetycznego poprzez wielkości obwodowe i polowe. W pracy przedstawiono przegląd metod wyznaczania strumieni skojarzonych uzwojeń względem prądów i współrzędnej mechanicznej. Całkowite strumienie skojarzone mogą być obliczane na podstawie rozkładu potencjału wektorowego w przekrojach uzwojeń lub na podstawie wartości energii i koenergii pola globalnego. Strumienie rozproszenia otrzymuje się w analogiczny sposób na podstawie pola wyznaczonego w wydzielonych fragmentach obwodu magnetycznego. Metody te są wystarczająco dokładne dla modeli monoharmonicznych. Metoda bazująca na rozkładzie wektora indukcji pola w szczelinie powietrznej jest dedykowana dla modeli wieloharmonicznych. Przykłady obliczeń są zawarte w przytoczonej literaturze.

Słowa kluczowe: modelowanie maszyn elektrycznych, obwody magnetyczne, strumienie skojarzone uzwojeń

FIELD METHODS OF CALCULATION ELECTROMAGNETIC PARAMETERS FOR CIRCUIT MODELS OF ELECTRIC MACHINES

Electromagnetic parameters of circuit models of electric machines are the coefficients of the functions approximating the relations between linked fluxes and currents of independent windings (Fig. 1). The field packages (using FEM method) are a suitable tool for calculation of the relations named as non-linear characteristic of the windings. It is the first step of an identification performed for the models of AC machines taking into account a non-linearity of magnetic circuit. The models contain the functions of linked fluxes related to the reduced number of the current variables. It is possible when the main flux and leakage fluxes are treated separately. The relationships between field model and circuit model issue from the comparison of the field formula and circuit formula defined the co-energy of magnetic field. The paper presents review of procedures calculating the linked fluxes of windings in respect to the currents and the rotor position. The complete linked fluxes can be calculate based on the distribution of magnetic vector potential in the cross-sections of the windings (14). Alternatively the values of the energy and co-energy of the total field can be used, (15), (19). The leakage fluxes are calculated analogously based on the field calculating in an isolated parts of the magnetic circuit. The procedures are quite accurate for the mono-harmonic circuit models. The method used the magnetic flux density distribution in air-gap is convenient for multi-harmonic models (24). The examples of calculations are included in references.

Keywords: modeling of electric machines, magnetic circuits, linked fluxes of windings

1. WSTĘP

Związki łączące modelowanie obwodów magnetycznych w ujęciu obwodowym i polowym wynikają z postawienia równości pomiędzy wzorami określającymi koenergię pola magnetycznego na podstawie rozkładu przestrzennego indukcji pola oraz wzorami określającymi koenergię pola poprzez zależności strumieniowo-prądowe.

$$\begin{aligned} E_{co}(\varphi, i_1, \dots, i_N) &= \\ &= \sum_{n=1}^N \int_0^{i_n} \psi_n(\varphi, i_1, \dots, i_n', 0, \dots, 0) di_n' = \\ &= \int_V \mathbf{B}(\mathbf{H}) d\mathbf{H} dV \end{aligned} \quad (1)$$

Jest to dopuszczalne przy założeniu, że charakterystyki magnesowania materiałów ferromagnetycznych są jednoznaczne, oraz przyjęciu, że wszystkie obwody elektryczne są zdeterminowane. Dla maszyn z magnesami trwałymi obie strony wzorów (1) wymagają uzupełnienia.

Występujące w modelach obwodowych związki strumieniowo-prądowe $\psi_n(\varphi, i_1, \dots, i_N)$ są pochodnymi cząstkowymi funkcji koenergii względem prądów

$$\psi(\varphi, \mathbf{i}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{i}} E_{co}(\varphi, \mathbf{i}) \quad (2)$$

gdzie $\mathbf{i} = [i_1, i_2, \dots, i_N]$. Wskazuje to, że są one wzajemnie zależne i należy je aproksymować układem funkcji skorelowanych [2]. Funkcje te mogą być wyznaczane na podstawie

* Politechnika Krakowska, Instytut Elektromechanicznych Przemian Energii

** Artykuł uzyskał pozytywne recenzje i był prezentowany podczas Międzynarodowego Sympozjum Maszyn Elektrycznych SME 2006 w Krakowie

rozwiązania równania pola magnetostatycznego w obwodzie magnetycznym w ogólnej postaci

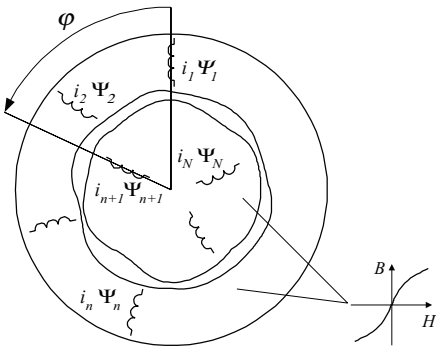
$$\text{rot}(\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{A}) = \mathbf{J} \quad (3)$$

gdzie $\mathbf{v}(\mathbf{B})$ jest nieliniową funkcją reluktywności materiału. Do rozwiązania równania (3) dla maszyn wirujących heteropolarnych o polu płasko-równoległym wystarczają pakiety 2D. Modelowanie pól wokół połączeń czołowych oraz pól w maszynach ze skosem żłobków wymaga pakietów 3D.

2. ZALEŻNOŚCI STRUMIENIOWO-PRĄDOWE WYSTĘPUJĄCE W MODELACH OBWODOWYCH

W modelach obwodowych maszyn prądu przemiennego formułowanych na podstawie równań Lagrange'a i uwzględniających nieliniowość obwodu magnetycznego występują nieliniowe charakterystyki $\Psi_n(\varphi, i_1, \dots, i_N)$ N -niezależnych uzwojeń (rys. 1) oraz ich pochodne cząstkowe względem niezależnych prądów oraz względem współrzędnej mechanicznej.

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \left[\frac{\partial \Psi(\varphi, \mathbf{i})}{\partial \mathbf{i}} \right]^{-1} \left(\mathbf{U} - \mathbf{R}\mathbf{i} - \omega \frac{\partial \Psi(\varphi, \mathbf{i})}{\partial \varphi} \right) \quad (4)$$



Rys. 1. Układ N -uzwojeń w nieliniowym obwodzie magnetycznym maszyny elektrycznej

Fig. 1. System of N -independent coils in magnetic circuit of electric machine

Moment elektromagnetyczny jest określony przez pochodną funkcji koenergii pola

$$T_{em}(\varphi, \mathbf{i}) = \frac{\partial}{\partial \varphi} E_{co}(\varphi, \mathbf{i}) \quad (5)$$

Redukcję liczby zmiennych prądowych w wymienionych funkcjach uzyskuje się poprzez wydzielenie pola głównego i pól rozproszonych przy pomijaniu ich wzajemnego oddziaływania. Rozdział ten jest również stosowany w modelach uwzględniających nieliniowość obwodu magnetycznego pomimo jego formalnej niepoprawności [2]

$$\begin{aligned} E_{co}(\varphi, i_1, \dots, i_N) = \\ = E_{co_\mu}(\varphi, \dots, i_{\mu_\rho}, \alpha_{\mu_\rho}, \dots) + \sum_n E_{co_n}(i_n) \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie i_{μ_ρ} , α_{μ_ρ} oznaczają amplitudę i fazę prądu magnesującego dla ρ -tej harmonicznej wyznaczone przez ρ -tą harmoniczną przepływu wypadkowego w szczelinie maszyny. Rozdzielenie tych zmiennych następuje w wyniku rozkładu funkcji koenergii pola głównego w szereg Fouriera [2]. Na przykład dla maszyny synchronicznej z wydawnobiegowym wirnikiem przy pominięciu wyższych harmonicznych pola szczelinowego

$$\begin{aligned} E_{co_\mu}(\varphi, i_{\mu_1}, \alpha_{\mu_1}) = \\ = E_{\mu_{10}}(i_{\mu_1}) + E_{\mu_{12}}(i_{\mu_1}) \cos 2p(\varphi - \alpha_{\mu_1}) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Na tej podstawie otrzymuje się wg wzoru (2) strumień skojarzony z n -tym uzwojeniem pochodzący od pola głównego w postaci [7]

$$\Psi_{\mu n} = w_n k_{np} \left[\frac{\partial E_{co_\mu}}{\partial i_{\mu_1}} \cos(p\beta_n) - \frac{\partial E_{co_\mu}}{\partial p\eta} \frac{1}{i_{\mu_1}} \sin(p\beta_n) \right] \quad (8)$$

gdzie $p\beta_n = p\alpha_{\mu_1} - p\alpha_n$ oznacza kąt pomiędzy osią przepływu wypadkowego a osią uzwojenia n , natomiast $p\eta = p\alpha_{\mu_1} - p\varphi$. Dla maszyn o równomiernej szczelinie występuje tylko pierwszy składnik we wzorach (7) i (8).

3. SPOSOBY WYZNACZANIA STRUMIENI SKOJARZONYCH ORAZ INDUKCYJNOŚCI UZWOJEŃ NA PODSTAWIE OBLICZEŃ POŁOWYCH

Pakiety polowe, np. MagNet, Opera, Flux, QuickField, FemLab, rozwiązują równanie pola magnetostatycznego (3) dla wprowadzonej geometrii obwodu magnetycznego i zadanych wymuszeń prądowych, a w wyniku podają rozkłady wektorów: potencjału wektorowego $\mathbf{A}$, indukcji pola $\mathbf{B}$ oraz natężenia pola $\mathbf{H}$ charakteryzujących pole w całej objętości lub w wydzielonych fragmentach obwodu magnetycznego. Dodatkowo są prezentowane rozkłady tych wektorów wzdłuż wydzielonych powierzchni. Energia pola dla obwodu o nieliniowym materiale jest obliczana wg wzoru

$$E = \int_V \mathbf{H}(\mathbf{B}) d\mathbf{B} dV \quad (9)$$

przy czym $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, $\mathbf{H} = \mathbf{v}(\mathbf{B}) \mathbf{B}$. Natomiast dla materiału liniowego

$$E_l = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v}^2 \mathbf{B} dV \quad (10)$$

lub ograniczając całkowanie do obszarów z niezerowymi prądami

$$E_l = \sum_{n=1}^N E_{l_n} = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{K_n} \frac{1}{2} \int_{V_n^k} \mathbf{A}_n^k \mathbf{J}_n^k dV \quad (11)$$

gdzie K_n – liczba obszarów z prądem dla każdego obwodu.

Koenergia pola jest określana na podstawie różnicy podwójnej energii układu zlinearyzowanego w punkcie końcowym oraz energii układu nieliniowego

$$E_{co} = 2E_l - E \quad (12)$$

3.1. Obliczanie całkowitych strumieni skojarzonych oraz indukcyjności dynamicznych uzwojeń

Całkowite strumienie skojarzone z obwodami są wyznaczone bezpośrednio na podstawie rozkładu potencjału wektorowego w przekrojach zdeklarowanych uzwojeń na podstawie wzoru (dla modeli 2D)

$$\Psi_n = w_n \oint_l \mathbf{A}_n d\mathbf{l} \quad (13)$$

który dla wydzielonych obszarów z prądami w obrębie podziałki biegunowej ma postać sumy

$$\Psi_n = \pm 2plw_n \sum_{k=1}^{K_n} A_n^k \quad (14)$$

W programach polowych, które nie wykorzystują zależności (13), konieczne jest stosowanie metod wymienionych poniżej, bazujących na obliczeniach energii lub koenergii pola. Podstawowa zależność (2) może być stosowana po uprzednim wyznaczeniu analitycznej funkcji aproksymującej funkcję koenergii. Powinna być ona wyznaczona z błędem $<1\%$, z uwagi na późniejszą operację różniczkowania względem prądu. Alternatywna metoda perturbacji energii [3], wykorzystująca wielomian interpolacyjny Lagrange'a, wymaga wielokrotnego rozwiązywania pola w otoczeniu rozpatrywanego punktu. Stosując reguły różniczkowania numerycznego, otrzymuje się:

- strumień skojarzony

$$\begin{aligned} \Psi_n(\varphi, i_1, \dots, i_n, \dots, i_N) = \\ = [E_{co}(\varphi, i_1, \dots, i_n + \Delta i_n, \dots, i_N) - \\ - E_{co}(\varphi, i_1, \dots, i_n - \Delta i_n, \dots, i_N)] / 2\Delta i_n \end{aligned} \quad (15)$$

- indukcyjności dynamiczne własne

$$\begin{aligned} L_{kk}(i_1, \dots, i_k, \dots, i_N) = \frac{\partial^2 E_{co}(i_1, \dots, i_k, \dots, i_N)}{\partial i_k^2} \approx \\ \approx [E_{co}(i_1, \dots, i_k + \Delta i_k, \dots, i_N) - 2E_{co}(i_1, \dots, i_k, \dots, i_N) + \\ + E_{co}(i_1, \dots, i_k - \Delta i_k, \dots, i_N)] / \Delta i_k^2 \end{aligned} \quad (16)$$

- indukcyjności dynamiczne wzajemne

$$\begin{aligned} L_{kl}(i_1, \dots, i_k, \dots, i_l, \dots, i_N) = \frac{\partial^2 E_{co}(i_1, \dots, i_k, \dots, i_l, \dots, i_N)}{\partial i_k \partial i_l} \approx \\ \approx [E_{co}(i_1, \dots, i_k + \Delta i_k, \dots, i_l + \Delta i_l, \dots, i_N) - \\ - E_{co}(i_1, \dots, i_k - \Delta i_k, \dots, i_l + \Delta i_l, \dots, i_N) - \\ - E_{co}(i_1, \dots, i_k + \Delta i_k, \dots, i_l - \Delta i_l, \dots, i_N) + \\ + E_{co}(i_1, \dots, i_k - \Delta i_k, \dots, i_l - \Delta i_l, \dots, i_N)] / (4\Delta i_k \Delta i_l) \end{aligned} \quad (17)$$

Aby wyznaczyć tą metodą elementy macierzy indukcyjności o wymiarze $N \times N$, należy rozwiązać równanie pola $2N^2 + N$ razy.

Bardziej efektywne jest wykorzystanie związku

$$\sum_{n=1}^N \Psi_n i_n = E_{co} + E \quad (18)$$

z uwzględnieniem zależności (11) i (12). Wtedy

$$\Psi_n = \frac{2E_{l_n}}{i_n} = \frac{2 \sum_{k=1}^{K_n} E_{l_n}^k}{i_n} \quad (19)$$

Wzór ten nie może być jednak stosowany do obliczania strumieni skojarzonych z uzwojeniami niezasilanymi.

3.2. Obliczanie strumieni skojarzonych pochodzących od pól rozproszenia

Wydzielanie pola głównego i pól rozproszenia leży u podstaw formułowania modeli obwodowych. Aby wyeliminować pole główne w obliczeniach polowych przewoźnika się dekompozycję obwodu magnetycznego. Polega ona na rozdzieleniu wirnika i stojana lub zmianie ich materiału oraz ewentualnie dodatkowo na wydzieleniu bieguna z jednym niezależnym uzwojeniem. W przypadku uzwojeń rozłożonych, wystarczy obliczyć rozkład pola w obrębie jednej podziałki żłobkowej wydzielonej z obwodu poprzez odpowiednio przyjęte warunki brzegowe. Udział rozproszenia szczelinowego można oszacować na podstawie zestawienia wyników uzyskanych bez zębów oraz z zębem po drugiej stronie szczeliny. Wzory wyznaczające strumienie rozproszenia oraz indukcyjności rozproszenia uzwojeń są najprostszą postacią wzorów z podrozdziału 3.1 dla jednej zmiennej prądowej.

3.3. Obliczanie strumieni skojarzonych z uzwojeniami rozłożonymi pochodzących od pola głównego

Każdy rzeczywiste uzwojenie rozłożone wzdłuż obwodu szczeliny może być traktowane jako szeregowie połączenie elementarnych uzwojeń o sinusoidalnie rozłożonych zwo-

jach dla p -tej harmonicznej. Wtedy strumień skojarzony z tym uzwojeniem, pochodzący od pola głównego, jest sumą strumieni skojarzonych z uzwojeniami elementarnymi

$$\Psi_n = \sum_p \Psi_{np} \quad (20)$$

przy czym na podstawie [4]

$$\Psi_{np} = r l \int_{x_n - \pi/|\rho|}^{x_n} g_{np}(x) \sum_{k=1}^{|\rho|} \int_{x+(k-1)2\pi/|\rho|}^{x+(k-1)2\pi/|\rho| + \pi/|\rho|} B(x') dx' \quad (21)$$

Rozkład gęstości zwojowej dla uzwojenia p -tej harmonicznej jest określony funkcją

$$g_{np}(x) = \frac{j}{2} \rho v_{np} e^{j\rho(x-x_n)} \quad (22)$$

gdzie:

- x – współrzędna na obwodzie szczeliny,
- r – promień środka szczeliny,
- l – długość pakietu.

Rozkład składowej promieniowej indukcji pola szczelinowego jest sumą harmonicznych przestrzennych

$$B(x) = \sum_v \underline{B}_v e^{jv(x-x_0)} \quad (23)$$

gdzie x_0 jest punktem startowym.

Strumień główny skojarzony z uzwojeniem elementarnym p -tej harmonicznej pochodzi wyłącznie od $v = -p$ -tej harmonicznej funkcji rozkładu indukcji. Wtedy wzór (21) przyjmuje praktyczną postać

$$\Psi_{np} = 2rl \frac{w_n k_{np}}{|\rho|} \underline{B}_{-p} e^{j\rho(x_n - x_0)} \quad (24)$$

Jego stosowanie wymaga wcześniejszego obliczenia harmonicznych rozkładu indukcji pola magnetycznego wzdłuż konturu poprowadzonego w środku szczeliny powietrznej oraz obliczenia współczynników uzwojenia dla kolejnych harmonicznych [5].

4. WNIOSKI

Polowe metody wyznaczania parametrów elektromagnetycznych modeli obwodowych maszyn elektrycznych pozwalają na stosunkowo proste wyznaczanie nieliniowych związków strumieniowo-prądowych z uwzględnieniem napięć magnetycznych w ferromagnetycznym materiale obwodu magnetycznego. Zbiór parametrów elektromagnetycznych modelu obwodowego uwzględniającego nielinio-

wość obwodu magnetycznego tworzą współczynniki funkcji aproksymujących te związki. Praktyczne znaczenie mają modele operujące funkcjami jednej lub, co najwyżej, dwóch zastępczych zmiennych prądowych, które mogą być wprowadzone po wydzieleniu pola głównego oraz pól rozproszenia. Polowa metoda wyznaczania tych funkcji powinna być dostosowana do postaci modelu obwodowego. Dla modeli jednoharmonicznych metody wykorzystujące koenergię pola lub rozkłady potencjału wektorowego wydają się wystarczająco dokładne. Natomiast metoda obliczania strumieni skojarzonych z elementarnymi uzwojeniami dla kolejnych harmonicznych jest w sposób naturalny dostosowana do modeli wieloharmonicznych.

Literatura

- [1] Turowski J.: *Elektrodynamika techniczna*. Warszawa, WNT 1993
- [2] Sobczyk T.J.: *Metodyczne aspekty modelowania matematycznego maszyn indukcyjnych*. Warszawa, WNT 2004
- [3] Nehl T.W., Fouad F.A., Demerdash N.A.: *Determination of saturated values of rotating machinery incremental and apparent inductances by an energy perturbation method*. IEEE Transactions on PAS-101, No. 12, 1982, 4441–4451
- [4] Sobczyk T.J., Drozdowski P.: *Inductances of electrical machine winding with a uniform air-gap*. Archiv für Elektrotechnik, vol. 76, 1993, 1158 (1–6)
- [5] Warzecha A.: *Field calculation of magnetising characteristics of AC machines with cylindrical rotor*. Proceedings of XVI Symposium "Electromagnetic Phenomena in Nonlinear Circuit", EPNC'2000 Poznań-Kraków 2000, PTETIS Publishers Poznań 2000, 81–84
- [6] Sobczyk T., Sułowicz M., Warzecha A., Weinreb K., Węgiel T.: *Modelowanie silnika klatkowego z ekscentrycznością wirnika przy uwzględnieniu nasycenia głównego obwodu magnetycznego*. Proceedings on 39th International Symposium on Electrical Machines, SME 2003 Gdańsk-Jurata, Summaries, 45, CD-ROM P288.
- [7] Warzecha A.: *Nieliniowe charakterystyki uzwojeń maszyny synchronicznej z wydatnobięgunowym wirnikiem*. Przegląd Elektrotechniczny, rok 2005, nr 10, 90–94

Wpłynęło: 26.09.2006

Adam WARZECHA



Absolwent Wydziału Elektrotechniki, Automatyki i Elektroniki AGH. Od 1977 roku nauczyciel akademicki Politechniki Krakowskiej. Doktorat na Wydziale EAiE AGH w roku 1987. Obecnie adiunkt w Instytucie Elektromechanicznych Przemian Energii na Wydziale Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej PK. Zajmuje się modelowaniem maszyn elektrycznych i elektromaszynowych układów automatyki w ujęciu obwodowym i polowym z uwzględnieniem nieliniowości magnetycznej.

e-mail: pewarzec@cyf-kr.edu.pl