



9. 89

185571





217  
PRACE  
AKADEMJI GÓRNICZEJ W KRAKOWIE  
TRAVAUX DE L'ACADEMIE DES MINES À CRACOVIE  
ZESZYT 3 FASCICULE

---

A. HOBORSKI

**PRZYCZYNEK DO TEORJI  
STYCZNOŚCI KRZYWYCH**

CONTRIBUTION À LA THÉORIE  
DE CONTACT DES COURBES



KRAKÓW  
NAKŁADEM AKADEMJI GÓRNICZEJ W KRAKOWIE  
1925



PRACE  
AKADEMJI GÓRNICZEJ W KRAKOWIE  
TRAVAUX DE L'ACADEMIE DES MINES À CRACOVIE  
ZESZYT 3 FASCICULE

---

A. HOBORSKI

PRZYCZYNEK DO TEORJI  
STYCZNOŚCI KRZYWYCH

CONTRIBUTION À LA THÉORIE  
DE CONTACT DES COURBES



KRAKÓW  
NAKŁADEM AKADEMJI GÓRNICZEJ W KRAKOWIE  
1925

BIBLIOTEKA GŁÓWNA AGH



1000187302

Wszelkie prawa zastrzeżone.

Redakcja otrzymała rękopis dnia 20. grudnia 1924. r.

Redakcja „Prac Akademii Górniczej w Krakowie“: Kraków, Loretańska 18.  
Zakład Mineralogiczny Akademii Górniczej.

La rédaction des „Travaux de l'Académie des Mines à Cracovie“: Institut  
Minéralogique de l'Académie des Mines à Cracovie, rue Loretańska 18.



II. 3064

NB 3034



~~917~~

~~4848~~

~~II 3490.~~

Czcionkami drukarni „Orbis“ w Krakowie.

Niech będzie dana krzywa C przez równania:

$$(1) \quad x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t),$$

przyczem funkcje

$$(2) \quad f(t), \quad g(t), \quad h(t)$$

mają spełniać następujące warunki:

I) mają być ciągle w przedziale  $(a, b)$ , przyczem jest  $a < b$ ;

II) mają mieć ciągle pochodne aż do rzędu  $\nu$ -go włącznie wewnątrz przedziału  $(a, b)$ , przyczem jest  $\nu \geq 3$ ;

III) wewnątrz przedziału  $(a, b)$  mają pierwsze pochodne spełniać nierówność:

$$(3) \quad |f'(t)| + |g'(t)| + |h'(t)| \neq 0;$$

IV) wewnątrz przedziału  $(a, b)$  macierz pierwszych i drugich pochodnych

$$(4) \quad \begin{vmatrix} f'(t), & g'(t), & h'(t) \\ f''(t), & g''(t), & h''(t) \end{vmatrix}$$

ma być stale rzędu 2-go.

Przy tych założeniach krzywa (C), jak wiadomo, posiada w każdym wewnętrznym punkcie przedziału określoną styczną, normalną główną, binormalną, krzywiznę pierwszą  $\frac{1}{R}$  i drugą  $\frac{1}{T}$  jak i łuk:

$$(5) \quad s = \int_{t_0}^t \sqrt{f'^2(\tau) + g'^2(\tau) + h'^2(\tau)} \, d\tau;$$

( $a < t_0 < b$ ,  $a < t < b$ ), który można przyjąć za parametr; wtedy ważne są też wzory Serreta-Freneta.

Jeżeli przez

$$(6) \quad \alpha, \beta, \gamma; \quad \alpha', \beta', \gamma'; \quad \alpha'', \beta'', \gamma''$$

oznaczymy dostawy kierunkowe stycznej, normalnej głównej i binormalnej krzywej C, wtedy przy pomocy zasady indukcji zupeł-

nej dowodzi się, że istnieją określone funkcje  $P_n, Q_n, R_n$  łuku  $s$  takie, iż jest

$$(7) \begin{cases} \frac{d^n x}{ds^n} = P_n \alpha + Q_n \alpha' + S_n \alpha''; & \frac{d^n y}{ds^n} = P_n \beta + Q_n \beta' + S_n \beta''; \\ \frac{d^n z}{ds^n} = P_n \gamma + Q_n \gamma' + S_n \gamma''; & 1 \leq n \leq \nu. \end{cases}$$

Funkcje  $P_n, Q_n, S_n$  mają pochodne rzędu  $(\nu - n)$ -go względem łuku  $s$ . Z łatwością otrzymujemy, że jest

$$(8) \begin{aligned} P_{i+1} &= \frac{dP_i}{ds} - \frac{Q_i}{R}; & Q_{i+1} &= \frac{dQ_i}{ds} + \frac{P_i}{R} + \frac{S_i}{T}; \\ S_{i+1} &= \frac{dS_i}{ds} - \frac{Q_i}{T}; & 1 \leq i \leq \nu - 1. \end{aligned}$$

Ponadto jest:

$$\begin{aligned} P_1 &= 1, & Q_1 &= 0, & S_1 &= 0; \\ P_2 &= 0, & Q_2 &= \frac{1}{R}, & S_2 &= 0; \\ P_3 &= -\frac{1}{R^2}, & Q_3 &= -\frac{1}{R^2} \frac{dR}{ds}, & S_3 &= -\frac{1}{RT}. \end{aligned}$$

Przy pomocy zasady indukcji zupełnej wykazuje się następujący szereg twierdzeń, w których dla prostoty kładziemy:  $\frac{1}{R} = u, \frac{1}{T} = v$ .

I) Jeżeli  $m \geq 6$ , to jest

$$P_m = -(m-1)u \frac{d^{m-3}u}{ds^{m-3}} + \left[ \frac{m(m-5)}{2} + 2 \right] u^2 v \frac{d^{m-5}v}{ds^{m-5}} + \bar{P}_m,$$

przyczem  $\bar{P}_m$  zawiera pochodne funkcji  $u, v$  niższego rzędu, niż  $(m-3)$ , wzgl.  $(m-5)$ .

II) Jeżeli  $m \geq 5$ , to jest:

$$Q_m = \frac{d^{m-2}u}{ds^{m-2}} - (m-2)uv \frac{d^{m-4}v}{ds^{m-4}} + \bar{Q}_m,$$

przyczem  $\bar{Q}_m$  zawiera pochodne funkcji  $u, v$  niższego rzędu, niż  $(m-2)$ , wzgl.  $(m-4)$ .

III) Jeżeli  $m \geq 4$ , to jest

$$S_m = -(m-2)v \frac{d^{m-3}u}{ds^{m-3}} - u \frac{d^{m-3}v}{ds^{m-3}} + \bar{S}_m$$

przyczem  $\bar{S}_m$  zawiera pochodne funkcji  $u, v$  rzędu niższego, niż  $(m-3)$ .

IV) Funkcje  $\bar{P}_m, \bar{Q}_m, \bar{S}_m$  są sumami o składnikach postaci

$$(9) \quad a(u, v) \cdot \prod_{i=1}^{\lambda_m} \left( \frac{d^i u}{ds^i} \right)^{l_i} \prod_{k=1}^{\nu_m} \left( \frac{d^k v}{ds^k} \right)^{n_k} \quad (l_i \geq 0, n_k \geq 0)$$

i ewentualnie składnika:

$$(10) \quad w(u, v)$$

nie zawierającego pochodnych funkcji  $(u, v)$ ; składnik ten nazywać będziemy wyrazem wolnym.

Funkcje  $a(u, v)$  są wielomianami całkowitymi względem  $(u, v)$ , a więc są sumami o składnikach

$$(11) \quad b \cdot u^{\alpha_0} v^{\beta_0}$$

gdzie  $b$  oznacza współczynnik liczebny,  $\alpha_0, \beta_0$  liczby całe bezwzględne. W dalszych twierdzeniach odgrywa rolę rząd wyrazu (9), który określimy, jako liczbę

$$(12) \quad r = \sum_{i=1}^{\lambda_m} i l_i + \sum_{k=1}^{\nu_m} k n_k;$$

jest to liczba naturalna.

V) Dla funkcji  $\bar{P}_m$  jest

$$(13) \quad \lambda_m = m - 4, \nu_m = m - 6;$$

dla funkcji  $\bar{Q}_m$  jest

$$(14) \quad \lambda_m = m - 3, \nu_m = m - 5;$$

dla funkcji  $\bar{S}_m$  jest

$$(15) \quad \lambda_m = m - 4, \nu_m = m - 4.$$

Zauważyć należy, że wartość zero dla liczby  $\lambda_m$  lub  $\nu_m$  oznacza brak odnośnej pochodnej.

VI) Dla funkcji  $\bar{P}_{2n}$  o wskaźniku parzystym, o ile  $n \geq 3$ , jest rząd  $r$  wyrazów kształtu (9) każdą z liczb nieparzystych 1, 3, ...  $2n-3$  [ale nie koniecznie każdy rozkład tych liczb na sumę kształtu (12)]; nadto  $\alpha_0 \leq 2n-3, \beta_0 \leq 2n-4$ ; funkcja  $\bar{P}_{2n}$  wyrazu wolnego nie posiada.

VII) Dla funkcji  $\bar{Q}_{2n}$ , gdy  $n \geq 3$ , jest  $r$  każdą z liczb parzystych: 2, 4, ...  $2n - 4$ ; nadto jest  $\alpha_0 \leq 2n - 4$ ,  $\beta_0 \leq 2n - 4$ ; wyraz wolny jest równy:

$$(16) \quad (-1)^{n-1} u(u^2 + v^2)^{n-1}.$$

VIII) Dla funkcji  $\bar{S}_{2n}$ , gdy  $n \geq 3$ , jest  $r$  każdą z liczb 1, 3, ...  $2n - 3$ ; nadto jest  $\alpha_0 \leq 2n - 3$ ,  $\beta_0 \leq 2n - 3$ ; wyrazu wolnego nie ma.

IX) Dla funkcji  $\bar{P}_{2n+1}$  o wskaźniku nieparzystym, gdy jest  $n \geq 3$ , jest  $r$  każdą z liczb 2, 4, ...  $2n - 2$ ; nadto jest  $\alpha_0 \leq 2n - 3$ ,  $\beta_0 \leq 2n - 4$ , a wyraz wolny równa się:

$$(17) \quad (-1)^n u^2 (u^2 + v^2)^{n-1}.$$

X) Dla funkcji  $\bar{Q}_{2n+1}$ , gdy  $n \geq 3$ , jest  $r$  każdą z liczb 1, 3, ...,  $2n - 3$ ; nadto jest  $\alpha_0 \leq 2n - 2$ ,  $\beta_0 \leq 2n - 2$ ; wyrazu wolnego nie ma wcale.

XI) Dla funkcji  $\bar{S}_{2n+1}$ , gdy  $n \geq 3$ , jest  $r$  każdą z liczb 2, 4, ...,  $2n - 2$ ; nadto jest  $\alpha_0 \leq 2n - 3$ ,  $\beta_0 \leq 2n - 3$ , a wyraz wolny równa się:

$$(18) \quad (-1)^n uv (u^2 + v^2)^{n-1}.$$

U w a g a. Powyższe twierdzenia mają zastosowanie w teorii styczności dwóch krzywych przestrzennych, gdy się pragnie jej nadać postać dedukcji<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Zob. A. Hoborski: Geometria różniczkowa Cz. I. Teoria krzywych, str. 351 i nast. Litografowany kurs uniwersytecki. 1924.

## RÉSUMÉ.

Soit  $C$  une courbe donnée par les équations (1), où les fonctions (2) sont continues dans l'intervalle  $(a, b)$  et ayant des dérivées jusqu' à l'ordre  $\nu \geq 3$ .

Dans l'intérieur de l'intervalle  $(a, b)$  les dérivées premières satisfont à l'inégalité (3) et la matrice (4) des dérivées premières et secondes est d'ordre 2.

Dans ces conditions la courbe  $C$  possède dans l'intérieur de l'intervalle  $(a, b)$  une tangente, une normale principale et une binormale. Soient (6) les cosinus directeurs de ces axes et  $s$  soit l'arc de la courbe défini par (5).

On démontre par l'induction mathématique les formules (7).

Les coefficients  $P_n, Q_n, S_n$  ont des propriétés, qui font l'objet des théorèmes I—XI.

Dans les théorèmes I—III je donne la forme des fonctions  $P_m, Q_m, S_m$ , où je pose:

$$\frac{1}{R} = u, \quad \frac{1}{T} = v$$

$\frac{1}{R}, \frac{1}{T}$  étant la courbure et la torsion de la courbe  $C$ .

Les fonctions  $\bar{P}_m, \bar{Q}_m, \bar{S}_m$  sont des sommes des termes de la forme (9) et d'un terme (10) qui ne contient aucune dérivée.

Le coefficient  $a(u, v)$  est une somme des termes de la forme (11), où  $b$  est un coefficient numérique et  $\alpha_0, \beta_0$  désignent des nombres entiers non négatifs. Nous appelons le rang d'un terme (9) le nombre (12).

Pour les fonctions  $\bar{P}_m, \bar{Q}_m, \bar{S}_m$  on obtient les formules (13), (14) et (15).

Pour la fonction  $\bar{P}_{2n}$  d'un indice pair on démontre que le rang de leurs termes (9) est chaque nombre impair 1, 3, ....

$2n-3$ ; on a aussi  $\alpha_0 \leq 2n-3$ ,  $\beta_0 \leq 2n-4$ ; le terme (10) est égal à zéro.

Pour la fonction  $\overline{Q}_{2n}$  le rang  $r$  est chaque nombre pair  $2, 4, \dots, 2n-4$ ; on a  $\alpha_0 \leq 2n-4$ ,  $\beta_0 \leq 2n-4$  et le terme (10) est égal à la fonction (16).

On démontre des pareilles théorèmes pour les fonctions  $\overline{S}_{2n}$ ,  $\overline{P}_{2n+1}$ ,  $\overline{Q}_{2n+1}$ ,  $\overline{S}_{2n+1}$ .

Ces théorèmes sur les fonctions  $P_m$ ,  $Q_m$ ,  $S_m$  sont applicables dans la théorie de contact des courbes en espace.













BIBLIOTEKA  
GŁÓWNA



AKADEMII  
GÓRNICZO  
HUTNICZEJ

3064

AC

*Nie  
wypożycza się*

**NZB 3034**