



AGH

Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica
w Krakowie

Praca magisterska

Twierdzenie Naimarka i jego zastosowanie w mechanice kwantowej

Mateusz Goc

Kierunek: Matematyka
Specjalność: Matematyka finansowa

Nr albumu: 283444

Promotor
dr hab. Sergiusz Kuźel



Wydział Matematyki Stosowanej

Kraków 2020

Oświadczenie studenta

Upředzony(-a) o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz.U. z 2018 r. poz. 1191 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystyczne wykonanie albo publicznie zniekształca taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, wideogram lub nadanie.”, a także upředzony(-a) o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 307 ust. 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.) „Student podlega odpowiedzialności dyscyplinarnej za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyn uchybiający godności studenta.”, oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem(-am) osobiście i samodzielnie i nie korzystałem(-am) ze źródeł innych niż wymienione w pracy. Jednocześnie Uczelnia informuje, że zgodnie z art. 15a ww. ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych Uczelni przysługuje pierwszeństwo w opublikowaniu pracy dyplomowej studenta. Jeżeli Uczelnia nie opublikowała pracy dyplomowej w terminie 6 miesięcy od dnia jej obrony, autor może ją opublikować, chyba że praca jest częścią utworu zbiorowego. Ponadto Uczelnia jako podmiot, o którym mowa w art. 7 ust. 1 pkt 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. — Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.), może korzystać bez wynagrodzenia i bez konieczności uzyskania zgody autora z utworu stworzonego przez studenta w wyniku wykonywania obowiązków związanych z odbywaniem studiów, udostępniać utwór ministrowi właściwemu do spraw szkolnictwa wyższego i nauki oraz korzystać z utworów znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych, w celu sprawdzania z wykorzystaniem systemu antyplagiatowego. Minister właściwy do spraw szkolnictwa wyższego i nauki może korzystać z prac dyplomowych znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych w zakresie niezbędnym do zapewnienia prawidłowego utrzymania i rozwoju tych baz oraz współpracujących z nimi systemów informatycznych.

.....
(Podpis czytelny studenta)

Oświadczenie promotora

Oświadczam, że praca spełnia wymogi stawiane pracom magisterskim.

.....
(Podpis promotora)

Spis treści

Streszczenie	3
Abstract	4
Wstęp	5
1. Podstawowe pojęcia i definicje	6
1.1. Symbole i oznaczenia	6
1.2. Podstawowe definicje	6
2. Klasyczne twierdzenia Naimarka	8
3. Twierdzenie Naimarka w odniesieniu do krat Parsevala	13
3.1. Uogólniony rozkład jedności generowany przez kratę Parsevala	13
4. Hamiltoniany określone przez kraty Parsevala	17
4.1. Wstęp	17
4.2. Widmo punktowe operatorów określonych przez kraty Parsevala	19
4.3. Krata Mercedes	21
Bibliografia	25

Streszczenie

Głównym celem pracy było zaprezentowanie praktycznego zastosowania klasycznego twierdzenia Naimarka w pewnych aspektach mechaniki kwantowej. Praca składa się z czterech rozdziałów, gdzie w pierwszych trzech rozdziałach przedstawiłem narzędzia teoretyczne, które są następnie wykorzystywane do prezentacji zastosowań w rozdziale 4. W rozdziale pierwszym wprowadziłem oznaczenia używane w pracy oraz kilka podstawowych definicji dotyczących krat oraz teorii operatorów. Drugi rozdział poświęciłem w całości na omówienie i udowodnienie klasycznego twierdzenia Naimarka na podstawie oryginalnej pracy autora z 1940 roku. W rozdziale trzecim zaprezentowałem twierdzenie Naimarka w języku krat Parsevala, którego dowód opiera się na klasycznej wersji tego twierdzenia. Dodatkowo w tym rozdziale pokazałem w jaki sposób można rozszerzyć kratę Parsevala do bazy ortonormalnej w większej przestrzeni Hilberta. Rozdział czwarty poświęciłem na przedstawienie praktycznego sposobu wyznaczania wartości własnych operatora Hamiltona. Dzięki temu otrzymujemy narzędzie, które pozwala nam znajdować wartości energii jakie może przyjąć rozważany układ kwantowy. Sposób ten opiera się w dużej mierze na wykorzystaniu rezultatów przedstawionych w poprzednich rozdziałach. W tym rozdziale przedstawiłem również kratę Mercedesa i omawianym sposobem wyznaczyłem wektory i wartości własne hamiltonianu generowanego przez tą kratę.

Słowa kluczowe

przestrzeń Hilberta, krata Parsevala, rozkład jedności, uogólniony rozkład jedności, operator Hamiltona, krata Mercedesa, macierz Grama

Abstract

The main purpose of this paper was to present practical application of the classical Naimark's theorem in certain aspects of quantum mechanics. Paper consists of four chapters, where first three of them present theoretial tools, which are then used to present application in chapter 4. In the chapter 1 I introduced symbols used in this paper and basic definitions regarding frames and operator theory. In second chapter I discussed and proved classical Naimark's theorem based on the author's orginal paper from 1940. In the third chapter I presented Naimark's theorem with regard to Parseval frames, which proof based on classic version of this theorem. In addition, in this chapter I show how to extend Parseval frame to orthonormal basis in bigger Hilbert space. Fourth chapter is about practical tool, which allow us to obtain eigenvalues of Hamilton operator. In that way we can find all states of energy in considered quantum system. That tool based on findings from previous chapters. In this chapter I presented also Mercedes frame and evaluated eigenvectors and eigenvalues corresponding to Hamilton operator generated by this frame.

Keywords

Hilbert space, Parseval frame, resolution of identity, generalized resolution of identity, Hamiltonian, Mercedes frame, Gram matrix

Wstęp

Pod koniec XIX wieku uważano, że fizyka jest najbardziej kompletną z nauk ścisłych. Wraz z nastaniem XX wieku pogląd ten został zachwiany za sprawą badań i odkryć wielu znamienitych fizyków (Max Planck, Albert Einstein, Niels Bohr). Badania te dały początek nowej dziedzinie fizyki, mianowicie mechanice kwantowej. Jest to nauka zajmująca się opisem ruchu w świecie mikroskopowym, w przypadku gdzie narzędzia mechaniki klasycznej zawodzą.

Z matematycznego punktu widzenia w mechanice kwantowej każda wielkość fizyczna jest reprezentowana przez operator liniowy działający w pewnej przestrzeni Hilberta. W przypadku gdy omawianą wielkością fizyczną jest energia układu to operator ten nazywany jest operatorem Hamiltona. Widmo punktowe tego operatora, czyli zbiór jego wartości własnych, określa nam jakie wartości energii może przyjąć badany układ. W pracy tej przedstawię koncepcję wyznaczania widma takiego operatora przy pomocy krat Parsewała. Pojęcie kraty Parsewała jest uogólnieniem bazy ortonormalnej określonej na przestrzeni Hilberta. Za punkt wyjściowy posłuży mi klasyczne twierdzenie Naimarka z 1940 roku [1]. Następnie pokaże w jaki sposób można zapisać to twierdzenie w języku krat Parsewała, by finalnie otrzymać wygodne narzędzie do wyznaczania wartości własnych hamiltonianu generowanego przez kratę Parsewała.

Podstawowe pojęcia i definicje

1.1. Symbole i oznaczenia

Na początku przedstawię oznaczenia i symbole matematyczne, których będę używał w dalszej części pracy.

Zbiór liczb naturalnych oznaczę jako $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ oraz $N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

W pracy symbol $\mathbb{J}$ będzie oznaczał przeliczalny lub skończony zbiór indeksów.

Przestrzeń Hilberta będę oznaczał jako $\mathcal{H}$, natomiast skojarzony z tą przestrzenią iloczyn skalarny oznaczę jako $(\cdot, \cdot)$.

1.2. Podstawowe definicje

Definicja 1.2.1. *Przestrzeń liniową V nazywamy przestrzenią Hilberta, gdy jest ona zupełna oraz określony jest na niej iloczyn skalarny o wartościach w ciele liczb zespolonych. W dalszej części pracy będę ją oznaczać przez $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ lub skrótowo przez $\mathcal{H}$.*

Definicja 1.2.2. *Niech $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ będą przestrzeniami Hilberta oraz $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$. Operatorem sprzężonym do T nazwiemy operator $T^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$, gdy dla dowolnych $x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$ zachodzi $(Tx, y) = (x, T^*y)$.*

Definicja 1.2.3. *Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta oraz $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Operator T nazwiemy samosprzężonym, gdy dla dowolnych $x, y \in \mathcal{H}$ zachodzi $(Tx, y) = (x, Ty)$.*

Definicja 1.2.4. *Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Operator $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ nazywamy projekcją ortogonalną, jeżeli zachodzi:*

$$P = P^2, \quad P = P^*.$$

Definicja 1.2.5. *Niech $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ będzie operatorem w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, w której operator identycznościowy oznaczymy przez I . Widmem operatora T nazwiemy zbiór tych $\lambda \in \mathbb{C}$, takich że operator $T - \lambda I$ nie ma dobrze określonego elementu odwrotnego w algebrze operatorów liniowych ograniczonych na przestrzeni $\mathcal{H}$.*

Definicja 1.2.6. Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Bazą ortonormalną w tej przestrzeni nazywamy zbiór wektorów E taki, że:

1. E jest bazą przestrzeni $\mathcal{H}$,
2. $(e_1, e_2) = 0$ dla dowolnych $e_1, e_2 \in E$,
3. $\|e\|^2 = (e, e) = 1$ dla dowolnego $e \in E$.

Definicja 1.2.7. Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $(\cdot, \cdot)$. Kratą nazwiemy rodzinę wektorów $\{f_n\}$ spełniającą poniższą nierówność

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{J}} |(f, f_n)|^2 \leq B\|f\|^2, \quad f \in \mathcal{H},$$

dla stałych $0 < A \leq B < \infty$, które nazywamy granicami kraty.

Definicja 1.2.8. Niech $\{f_n\}$ będzie kratą w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ z ograniczeniami A, B . Kratę tę nazwiemy ścisłą gdy $A = B$.

Definicja 1.2.9. Niech $\{f_n\}$ będzie kratą ścisłą w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ z ograniczeniami A, B . Kratę tę nazwiemy kratą Parsewala, gdy $A = B = 1$, czyli gdy $\|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{J}} |(f, f_n)|^2$.

Obserwacja 1. Jeżeli zbiór wektorów $\{f_n\}$ jest bazą ortonormalną w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ to spełnia on tożsamość Parsewala tj. dla każdego $f \in \mathcal{H}$ zachodzi $\|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{J}} |(f, f_n)|^2$. Znaczący to, że każda baza ortonormalna jest kratą Parsewala.

Definicja 1.2.10. Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta, a $F = \{f_j\}$ kratą w tej przestrzeni. Operator $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ zdefiniowany jako:

$$Sf = \sum_{j \in \mathbb{J}} (f, f_j) f_j, \quad f \in \mathcal{H},$$

nazwiemy kratowym skojarzonym z kratą F .

Definicja 1.2.11. Niech $\{f_j\}$ będzie kratą w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Kratę $\{g_j\}$ nazwiemy kanoniczną kratą dualną dla kraty $\{f_j\}$, gdy zachodzi

$$f = \sum_{j \in \mathbb{J}} (f, g_j) f_j, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Klasyczne twierdzenia Naimarka

W niniejszym rozdziale przedstawię podstawowe twierdzenie, którego będę używał w dalszej części pracy. Mowa tu o twierdzeniu Naimarka, znanego także pod nazwą dylatacyjnego twierdzenia Naimarka. Autorem tego twierdzenia jest dwudziestowieczny radziecki matematyk Mark Aronovich Naimark, który opublikował to twierdzenie w swojej pracy z 1940 roku. Dowód, który zaprezentuję poniżej wykorzysta rezultaty i pomysł z [1]. Zanim przejdę do wypowiedzi twierdzenia przedstawię kilka niezbędnych definicji i faktów z teorii operatorów.

Definicja 2.1. Niech $\lambda \in \mathbb{R}$. Jednoparametrową rodzinę operatorów projekcji $\{E_\lambda\}$ działającą na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ nazywamy rozkładem jedności, jeżeli:

1. $E_\Delta = E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}$ jest operatorem ograniczonym i dodatnio określonym dla $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$,
2. $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda f = 0$ oraz $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda f = f$ dla $f \in \mathcal{H}$,
3. $E_{\lambda+0}f = E_\lambda f$ dla $f \in \mathcal{H}$,
4. $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_t$, gdzie $t = \min\{\mu, \lambda\}$.

Na podstawie [4] wiadomo, że z każdą rodziną operatorów $\{E_\lambda\}$ będącą rozkładem jedności na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ możemy utożsamić operator samosprężony A , którego dziedziną będzie zbiór:

$$D(A) = \{f \in \mathcal{H} : \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_\lambda f, f) < \infty\}$$

oraz dla $f \in D(A)$ zachodzi:

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda f.$$

W analogiczny sposób mając operator samosprężony A możemy utożsamić z nim rozkład jedności $\{E_\lambda\}$.

Definicja 2.2. Niech $\lambda \in \mathbb{R}$. Jednoparametrową rodzinę operatorów $\{F_\lambda\}$ działającą na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ nazywamy uogólnionym rozkładem jedności, jeżeli:

1. $F_\Delta = F_{\lambda_2} - F_{\lambda_1}$ jest operatorem ograniczonym i dodatnio określonym dla $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$,
2. $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} F_\lambda f = 0$ oraz $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F_\lambda f = f$ dla $f \in \mathcal{H}$,
3. $F_{\lambda+0}f = F_\lambda f$ dla $f \in \mathcal{H}$,

Przejdę teraz do sformułowania i udowodnienia twierdzenia Naimarka.

Twierdzenie 2.1 (Twierdzenie Naimarka). *Niech $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Jeżeli $\{F_\lambda\}$ jest uogólnionym rozkładem jedności dla przestrzeni $\mathcal{H}$, to istnieje większa (w sensie inkluzji) przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}^+$ oraz ortogonalny rozkład jedności E_λ dla przestrzeni $\mathcal{H}^+$ taki, że dla $f \in \mathcal{H}$*

$$F_\lambda f = P E_\lambda f,$$

gdzie P jest operatorem ortogonalnej projekcji na przestrzeń $\mathcal{H}$.

Dowód. Dowód będzie składał się z dwóch głównych części. Pierwszą z nich będzie pokazanie konstrukcji przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}^+$, natomiast druga część będzie dowodem samego twierdzenia Naimarka wykorzystująca taką konstrukcję.

Zacznijmy od zdefiniowania tzw. funkcji dodatnio określonej.

Definicja 2.3. *Niech $\mathfrak{R}$ będzie dowolnym zbiorem. Funkcję $\phi : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{C}$ nazwiemy funkcją dodatnio określoną, gdy:*

1. $\phi(f, g) = \overline{\phi(g, f)}$ dla $f, g \in \mathfrak{R}$,
2. forma kwadratowa $\sum_{i,k=1}^n \phi(f_i, f_k) \xi_i \bar{\xi}_k$ jest nieujemna, dla $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{R}$.

Pokażemy teraz, że dowolny zbiór $\mathfrak{R}$, na którym określona jest funkcja dodatnio określona ϕ , można uzupełnić do przestrzeni Hilberta. Innymi słowy, zbiór $\mathfrak{R}$ można zanurzyć w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}^+$, w której iloczyn skalarny definiujemy jako

$$(f, g) = \phi(f, g).$$

Aby skonstruować przestrzeń $\mathcal{H}^+$ uzupełnimy najpierw zbiór $\mathfrak{R}$ do przestrzeni liniowej $\hat{\mathfrak{R}}$, w której określimy skończone sumy

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^n \xi_i f_i,$$

dla dowolnych $f_i \in \mathfrak{R}$ oraz skalarów ξ_i . Dla dowolnych elementów $\hat{f} = \sum_{i=1}^n \xi_i f_i$, $\hat{g} = \sum_{k=1}^n \eta_k g_k$ ze zbioru $\hat{\mathfrak{R}}$ definiujemy następujący iloczyn skalarny

$$(\hat{f}, \hat{g}) = \sum_{i,k=1}^n \phi(f_i, g_k) \xi_i \bar{\eta}_k$$

Oznaczmy przez $\hat{\mathfrak{T}}$ następujący zbiór:

$$\hat{\mathfrak{T}} = \{\hat{f} : (\hat{f}, \hat{f}) = 0, \hat{f} = \sum_{i=1}^n \xi_i f_i\}$$

Niech $R^+ = \hat{\mathfrak{R}} / \hat{\mathfrak{T}}$ będzie przestrzenią ilorazową, której elementami będą zbiory $\hat{\mathfrak{F}} \in R^+$, takie że jeżeli $\hat{f}_0 \in \hat{\mathfrak{F}}$, to $\hat{\mathfrak{F}}$ składa się z wszystkich $\hat{f} = \hat{f}_0 + \hat{g}$, gdzie $\hat{g}$ jest dowolnym elementem przestrzeni $\hat{\mathfrak{T}}$.

Iloczyn skalarny elementów $\hat{\mathfrak{F}}, \hat{\mathfrak{G}} \in R^+$ zdefiniujemy jako

$$(\hat{\mathfrak{F}}, \hat{\mathfrak{G}}) = (\hat{f}, \hat{g}),$$

gdzie $\hat{f} \in \hat{\mathfrak{F}}, \hat{g} \in \hat{\mathfrak{G}}$.

Otrzymana w ten sposób przestrzeń R^+ jest przestrzenią Hilberta, którą oznaczymy przez $\mathcal{H}^+$. W ten sposób skonstruowaliśmy przestrzeń $\mathcal{H}^+$, która będzie wykorzystywana w dowodzie twierdzenia Naimarka. Przejdźmy zatem do dowodu samego twierdzenia.

Rozważmy zbiór $\mathfrak{R}$, którego elementami będą wszystkie pary $p = \{\Delta, f\}$, gdzie Δ jest przedziałem na osi rzeczywistej a f jest elementem przestrzeni $\mathcal{H}$. Przyjmijmy następujące oznaczenie $\Delta_i \Delta_j := \Delta_i \cap \Delta_j$. Zdefiniujmy też funkcję $\phi : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{C}$ określoną następującym wzorem:

$$\phi(p_1, p_2) = (F_{\Delta_1 \Delta_2} f_1, f_2), \quad p_i = \{\Delta_i, f_i\} \quad i = 1, 2.$$

Pokażemy teraz, że ϕ jest funkcją dodatnio określoną.

Zauważmy, że

$$\phi(p_1, p_2) = (F_{\Delta_1 \Delta_2} f_1, f_2) = (f_1, F_{\Delta_1 \Delta_2} f_2) = \overline{(F_{\Delta_1 \Delta_2} f_2, f_1)} = \overline{\phi(p_2, p_1)}$$

Rozważmy teraz n punktów p_i postaci $p_i = \{\Delta_i, f_i\}$. Z definicji funkcji ϕ otrzymujemy, że

$$\sum_{i,k=1}^n \phi(f_i, f_k) \xi_i \overline{\xi_k} = \sum_{i,k=1}^n (F_{\Delta_i \Delta_k} f_i, f_k) \xi_i \overline{\xi_k} \quad (2.1)$$

W pierwszym przypadku założmy, że przedziały Δ_i są parami rozłączne, to znaczy $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, n$), to wówczas

$$\sum_{i,k=1}^n (F_{\Delta_i \Delta_k} f_i, f_k) \xi_i \overline{\xi_k} = \sum_{i=1}^n (F_{\Delta_i} f_i, f_i) \|\xi_i\|^2 \geq 0 \quad (2.2)$$

Założmy teraz, że przedziały Δ_i są parami rozłączne dla $i = 3, \dots, n$, a przedziały Δ_1, Δ_2 mają niepustą część wspólną. Wówczas prawa strona równości (2.1) rozbije się na dwie części. Jedna będzie zawierała indeksy od 3 do n i będzie to przypadek jak w równości (2.2). Dla $i = 1, 2$ prawą stronę równania (2.1) zapiszemy w następujący sposób

$$\sum_{i,k=1}^2 (F_{\Delta_i \Delta_k} f_i, f_k) \xi_i \overline{\xi_k} = \sum_{i,k=1}^2 (F_{\Delta_i} f_i, f_k) \xi_i \overline{\xi_k} = (F_{\Delta_1} \sum_{i=1}^2 \xi_i f_i, \sum_{k=1}^2 \xi_k f_k) \geq 0$$

Przypadek gdy więcej przedziałów ma niepustą część wspólną dowodzi się analogicznie stosując podział sumy z równania (2.1) na większą ilość części, a następnie każdą część rozważa osobno z pomocą powyższej równości.

Udowodniliśmy zatem, że funkcja ϕ jest dodatnio określona na zbiorze $\mathfrak{R}$.

Stosując konstrukcję pokazaną na początku dowodu rozszerzamy zbiór $\mathfrak{R}$ do przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}^+$. W tej przestrzeni iloczyn skalarny będziemy oznaczać jako $(\cdot, \cdot)_+$ i będzie on dany wzorem $(p_1, p_2)_+ = \phi(p_1, p_2)$.

Wygodniej będzie nam utożsamiać element $\{\mathbb{R}, f\} \in \mathcal{H}^+$ z elementem $f \in \mathcal{H}$. Taką identyfikację będzie jednoznaczna, gdyż $(\{\mathbb{R}, f\}, \{\mathbb{R}, g\})_+ = (F_{\mathbb{R}}f, g) = (f, g)$. Podobnie z elementem $\sum_{k=1}^n \xi_k \{\mathbb{R}, f_k\}$ z przestrzeni $\mathcal{H}^+$ możemy utożsamiać element $\sum_{k=1}^n \xi_k f_k$ z przestrzeni $\mathcal{H}$. Otrzymujemy zatem, że $\mathcal{H}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{H}^+$.

Rozważmy teraz element $\{\Delta, f\} \in \mathcal{H}^+$. Będziemy teraz szukać projekcji tego elementu na przestrzeń $\mathcal{H}$. Oznaczmy szukaną projekcję przez $\{\mathbb{R}, g\}$. Zauważmy że dla dowolnego elementu $h \in \mathcal{H}$ zachodzi $(\{\Delta, f\} - \{\mathbb{R}, g\}, \{\mathbb{R}, h\})_+ = 0$. Rozpisując lewą stronę tej równości i korzystając z liniowości iloczynu skalarnego otrzymamy, że

$$(\{\Delta, f\}, \{\mathbb{R}, h\})_+ - (\{\mathbb{R}, g\}, \{\mathbb{R}, h\})_+ = (F_{\Delta}f, h) - (g, h) = (F_{\Delta}f - g, h) = 0$$

Otrzymujemy z tego, że szukaną projekcją jest $g = F_{\Delta}f$, co można zapisać jako $P\{\Delta, f\} = \{\mathbb{R}, F_{\Delta}f\}$.

Zdefiniujmy teraz operator E_{Δ} , który dla dowolnego elementu $\{\Delta', f\} \in \mathcal{H}^+$, przedstawia się wzorem

$$E_{\Delta}\{\Delta', f\} = \{\Delta \cap \Delta', f\} \quad (2.3)$$

Twierdzenie Naimarka (twierdzenie 2.1) zostanie udowodnione, gdy pokażemy że powyższe operatory E_{Δ}^+ są ortogonalnym rozkładem jedności dla przestrzeni $\mathcal{H}^+$.

Wprost widać, że E_{Δ} jest operatorem addytywnym dla przedziałów. Zauważmy też, że

$$(E_{\Delta})^2\{\Delta', f\} = E_{\Delta}\{\Delta \cap \Delta', f\} = \{\Delta \cap \Delta \cap \Delta', f\} = (E_{\Delta})\{\Delta', f\}$$

oraz

$$(E_{\Delta}\{\Delta', f\}, \{\Delta'', g\})_+ = (\{\Delta \cap \Delta', f\}, \{\Delta'', g\})_+ = (F_{\Delta \cap \Delta''}f, g) = (F_{\Delta' \cap \Delta''}f, g) = (\{\Delta', f\}, E_{\Delta}\{\Delta'', g\})_+$$

Powyższe dwie nierówności implikują fakt, że E_{Δ} jest operatorem projekcji. Dodatkowo zachodzi $E_{\mathbb{R}}\{\Delta', f\} = \{\mathbb{R} \cap \Delta', f\} = \{\Delta', f\}$.

Z powyższych faktów oraz z tego, że rodzina elementów postaci $\{\Delta', f\}$ jest gęsta w przestrzeni $\mathcal{H}^+$ otrzymujemy, że rozszerzenie do przestrzeni $\mathcal{H}^+$ przez ciągłość operatora E_{Δ} jest ortogonalnym rozkładem jedności dla przestrzeni $\mathcal{H}^+$. Otrzymujemy zatem, że dla dowolnego $f \in \mathcal{H}$

$$PE_{\Delta}f = PE_{\Delta}\{\mathbb{R}, f\} = P\{\Delta \cap \mathbb{R}, f\} = P\{\Delta, f\} = \{\mathbb{R}, F_{\Delta}f\} = F_{\Delta}f.$$

Z powyższego ciągu równości otrzymujemy tezę klasycznego twierdzenia Naimarka. $\square$

Uwaga 1. Pozytywną cechą klasycznego twierdzenia Naimarka jest fakt, że poza samym istnieniem rozkładu jedności E_{λ} dostajemy też dokładną postać tego rozkładu jedności (patrz wzór (2.3)).

Poniżej pokaże jeszcze jedna pozytywną cechę, która wynika bezpośrednio z dowodu twierdzenia Naimarka, mianowicie minimalność rozkładu jedności E_λ . Zaczniemy od definicji.

Definicja 2.4. Niech $\mathcal{H}$ oraz $\mathcal{H}^+$ będą przestrzeniami Hilberta. Niech F_λ będzie uogólnionym rozkładem jedności działającym w przestrzeni $\mathcal{H}$, a przestrzeń $\mathcal{H}^+$ będzie taka, jak dla rozszerzenia uogólnionego rozkładu jedności F_λ . Ortogonalny rozkład jedności E_λ działający w przestrzeni $\mathcal{H}^+$ nazwiemy minimalnym rozszerzeniem uogólnionego rozkładu jedności F_λ , gdy nie istnieje podprzestrzeń $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}^+ \ominus \mathcal{H}$ taka, że zacieśnienie $E_\lambda|_{\mathcal{H}_0}$ jest ortogonalnym rozkładem jedności na $\mathcal{H}_0$.

Lemat 2.1. Niech E_λ będzie ortogonalnym rozkładem jedności działającym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}^+$. Zbiór $\bigvee_{\lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda \mathcal{H}$ będziemy rozumieć jako domknięcie wszystkich kombinacji liniowych wektorów postaci $E_\lambda f$, gdzie $f \in \mathcal{H}$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$. Zacieśniając E_λ do przestrzeni

$$\mathcal{H}_{min} := \bigvee_{\lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda \mathcal{H}$$

otrzymujemy minimalny ortogonalny rozkład jedności $E_\lambda^{min} = E_\lambda|_{\mathcal{H}_{min}}$ działający w przestrzeni $\mathcal{H}_{min}$.

Dowód. Niech $f \in \mathcal{H}^+ \ominus \mathcal{H}_{min}$. Wówczas dla każdego $g \in \mathcal{H}_{min}$ zachodzi

$$(E_\mu f, g) = (f, E_\mu g) = 0,$$

ponieważ $E_\mu : \mathcal{H}_{min} \rightarrow \mathcal{H}_{min}$. W związku z tym zacieśnienie $E_\lambda|_{\mathcal{H}^+ \ominus \mathcal{H}_{min}}$ będzie ortogonalnym rozkładem jedności. □

Dowód klasycznego twierdzenia Naimarka dostarcza nam prostej konstrukcji ortogonalnego rozkładu jedności E_λ . Będziemy używać tego rozkładu jedności działającego w przestrzeni $\mathcal{H}^+$, która pokrywa się z domknięciem powłoki liniowej elementów $\{\Delta, f\}$ z normą $\|\{\Delta, f\}\|^2 = (F_\Delta f, f)$.

Wniosek 2.1. Ortogonalny rozkład jedności E_λ występujący w dowodzie klasycznego twierdzenia Naimarka jest minimalnym rozszerzeniem uogólnionego rozkładu jedności F_λ .

Dowód. Z dowodu klasycznego twierdzenia Naimarka wiemy, że powłoka liniowa elementów $\{\Delta, f\}$ ($f \in \mathcal{H}$, Δ - przedział na osi rzeczywistej) jest gęsta w $\mathcal{H}^+$. Co więcej elementy $f \in \mathcal{H}$ możemy utożsamiać z $\{\mathbb{R}, f\}$ oraz zachodzi relacja $E_\Delta \{\mathbb{R}, f\} = \{\Delta, f\}$. Z tego otrzymujemy, że $\mathcal{H}_{min} = \mathcal{H}^+$. □

Twierdzenie Naimarka w odniesieniu do krat Parsevala

Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie twierdzenia Naimarka w odniesieniu do krat Parsevala. Dowód tego twierdzenia oparty jest na klasycznym twierdzeniu Naimarka. Istnieją również inne dowody tego twierdzenia (min. w [5] i [6]), które nie wykorzystują jednak rezultatów z klasycznego twierdzenia Naimarka. Przejdźmy zatem do wypowiedzi twierdzenia.

Stwierdzenie 1. *Niech $\{e_n\}$ będzie kratą Parsevala w przestrzeni $\mathcal{H}$. Wówczas istnieje przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}^+ \supset \mathcal{H}$ oraz baza ortonormalna $\{\hat{e}_n\}$ w przestrzeni $\mathcal{H}^+$ taka, że $P\hat{e}_n = e_n$.*

3.1. Uogólniony rozkład jedności generowany przez kratę Parsevala

Rozważmy kratę Parsevala, którą oznaczmy jako $\{e_n\}$, gdzie $n \in \mathbb{J} = \mathbb{N}$. Niech F_λ będzie operatorem w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ zdefiniowanym następująco:

$$F_\lambda f = \begin{cases} \sum_{k=1}^n (f, e_k) e_k, & \lambda \in (n, n+1] \\ 0, & \lambda \in (-\infty, 1] \end{cases} \quad f \in \mathcal{H}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Oznaczmy $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$ oraz $F_\Delta := F_{\lambda_2} - F_{\lambda_1}$.

Obserwacja 2. *Dla powyższej rodziny operatorów F_λ zachodzą następujące własności:*

1. $F_\Delta = 0$, gdy $\Delta \cap \mathbb{N} = \emptyset$
2. $F_\Delta f = (f, e_n) e_n$ gdy $n \in \Delta$, $|\Delta| < 1$

Dowód. ad.1) Jeżeli $\Delta \cap \mathbb{N} = \emptyset$ to znaczy, że $n < \lambda_1 < \lambda_2 < n+1$. Z tego wynika, że $F_{\lambda_1} = F_{\lambda_2}$, czyli $F_\Delta = 0$.

ad.2) Jeżeli $|\Delta| < 1$ to istnieje tylko jedno $n \in \Delta$, czyli $\lambda_1 < n < \lambda_2$. Zatem $F_\Delta f = \sum_{k=1}^n (f, e_k) e_k - \sum_{k=1}^{n-1} (f, e_k) e_k = (f, e_n) e_n$. $\square$

Lemat 3.1. Rodzina operatorów F_λ zdefiniowana powyżej jest uogólniony rozkładem jedności.

Dowód. Warunki 2 i 3 definicji uogólnionego rozkładu jedności wynikają wprost z definicji operatorów F_λ oraz z ciągłości tych operatorów. Musimy pokazać, że forma kwadratowa $(F_\Delta f, f)$ jest nieujemna.

$$(F_\Delta f, f) = \sum_{k=m}^n (f, e_k)(e_k, f) = \sum_{k=m}^n |(f, e_k)|^2 \geq 0.$$

jeżeli $m, m+1 \dots n$ należą do Δ . □

Na mocy klasycznego twierdzenia Naimarka istnieje większa w sensie inkluzji przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}^+$ zawierająca przestrzeń $\mathcal{H}$ oraz określony na niej ortogonalny rozkład jedności E_λ taki, że dla $f \in \mathcal{H}$ zachodzi $F_\lambda f = P E_\lambda f$.

Lemat 3.2. Jeżeli Δ jest przedziałem na osi rzeczywistej takim, że $F_\Delta = 0$, to wtedy $E_\Delta = 0$.

Dowód. Skorzystamy tutaj ze wzoru (2.3) z dowodu klasycznego twierdzenia Naimarka. Wówczas otrzymamy, że

$$0 \leq \|E_\Delta \{\Delta', f\}\|_{\mathcal{H}^+}^2 = \|\{\Delta \cap \Delta', f\}\|_{\mathcal{H}^+}^2 = (F_{\Delta \cap \Delta'} f, f) \leq (F_\Delta f, f) = 0.$$

□

Zdefiniujemy teraz pewną rodzinę elementów z przestrzeni $\mathcal{H}^+$. Oznaczmy $\Delta_n = (n - \varepsilon, n + \varepsilon)$, gdzie $0 < \varepsilon < 1$, $n \in \mathbb{N}$ i rozważmy elementy z przestrzeni $\mathcal{H}^+$

$$\hat{e}_n = \{\Delta_n, \frac{1}{\|e_n\|^2} e_n\}, \quad n \in \mathbb{N} \quad . \quad (3.2)$$

Lemat 3.3. Niech $\hat{e}_n$ będzie zdefiniowane tak jak w (3.2). Wówczas następujące fakty są prawdziwe:

1. Wektory $\hat{e}_n$ nie zależą od wyboru ε .
2. Rodzina elementów $\{\hat{e}_n\}$ jest ortonormalna w $\mathcal{H}^+$.
3. $P\hat{e}_n = e_n$, gdzie P jest ortogonalną projekcją w przestrzeni $\mathcal{H}^+$ na $\mathcal{H}$.
4. Jeżeli $\|e_n\| = 1$, to wówczas $e_n = \hat{e}_n$.
5. Jeżeli $f \in \mathcal{H}$ to $f \in \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \hat{e}_n$, gdzie $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \hat{e}_n$ będziemy rozumieć jako domknięcie wszystkich kombinacji liniowych wektorów $\hat{e}_n$.

Dowód. ad.1) Weźmy dwa różne elementy $\hat{e}_n^1, \hat{e}_n^2$. Załóżmy, że $\Delta_n^1 \subset \Delta_n^2$. Wtedy otrzymujemy, że $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Wówczas:

$$\begin{aligned} \|\hat{e}_n^1 - \hat{e}_n^2\|^2 &= \frac{1}{\|e_n\|^4} [(F_{\Delta_n^1} e_n, e_n) + (F_{\Delta_n^2} e_n, e_n) - 2(F_{\Delta_n^1 \cap \Delta_n^2} e_n, e_n)] = \\ &= \frac{1}{\|e_n\|^4} [(F_{\Delta_n^2} e_n, e_n) - (F_{\Delta_n^1} e_n, e_n)] = \frac{1}{\|e_n\|^4} [(e_n, e_n)^2 - (e_n, e_n)^2] = 0 \end{aligned}$$

ad.2) Zauważmy, że $\|\hat{e}_n\|^2 = \frac{1}{\|e_n\|^4} (F_{\Delta_n} e_n, e_n) = \frac{1}{\|e_n\|^4} (e_n, e_n)^2 = 1$

oraz dla $(n \neq m)$ zachodzi

$$(\hat{e}_n, \hat{e}_m) = \frac{1}{\|e_n\|^4} (F_{\Delta_n \cap \Delta_m} e_n, e_m) = 0,$$

ponieważ $\Delta_n \cap \Delta_m = \emptyset$.

ad.3) Skorzystamy tutaj z obserwacji 2 oraz z dowodu klasycznego twierdzenia Naimarka. Wtedy otrzymamy, że:

$$P\hat{e}_n = \{\mathbb{R}, \frac{1}{\|e_n\|^2} F_{\Delta_n} e_n\} = \{\mathbb{R}, e_n\} = e_n.$$

ad.4) Skorzystamy tutaj z faktu, że jeżeli $\|e_n\| = 1$ to krata Parsevala jest bazą ortonormalną, czyli w szczególności $(e_n, e_m) = 0$, dla wszystkich $n \neq m$. Otrzymamy wtedy, że:

$$\|\{\Delta_n, e_n\} - \{\mathbb{R}, e_n\}\|^2 = (F_{\Delta_n} e_n, e_n) + \|e_n\|^2 - 2(F_{\Delta_n} e_n, e_n) = 0.$$

ad.5) Niech $f \in \mathcal{H}$. Wówczas $f = \{\mathbb{R}, f\}$ oraz $(f, \hat{e}_n) = \frac{1}{\|e_n\|^2} (F_{\Delta_n} f, e_n) = (f, e_n)$. Korzystając z definicji kraty Parsevala dostaniemy, że

$$\|\{\mathbb{R}, f\}\|^2 = \|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |(f, e_n)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |(f, \hat{e}_n)|^2.$$

Otrzymujemy z tego, że $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} (f, \hat{e}_n) \hat{e}_n$. □

Korzystając z powyższego lematu otrzymujemy, że przestrzeń Hilberta $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \hat{e}_n$ zawiera $\mathcal{H}$ jako podzbiór oraz rodzina $\{\hat{e}_n\}$ jest bazą ortonormalną w tej przestrzeni. Zatem operator

$$\tilde{F}_\lambda \hat{f} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n (\hat{f}, \hat{e}_k) \hat{e}_k & \lambda \in (n, n+1] \\ 0 & \lambda \in (-\infty, 1] \end{cases} \quad \hat{f} \in \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \hat{e}_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.3)$$

tworzy ortogonalny rozkład jedności w $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \hat{e}_n$. Dodatkowo dla każdego $f \in \mathcal{H}$ zachodzi

$$P\tilde{F}_\lambda f = P \sum_{k=1}^n (f, \hat{e}_k) \hat{e}_k = \sum_{k=1}^n (f, e_k) e_k = F_\lambda f$$

Z tego wynika, że $\tilde{F}_\lambda$ jest rozszerzeniem F_λ do ortogonalnego rozkładu jedności.

Lemat 3.4. Operatory $\tilde{F}_\lambda$ oraz E_λ pokrywają się na zbiorze $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \hat{e}_n$.

Dowód. Zauważmy, że $\tilde{F}_\lambda \hat{e}_n = \hat{e}_n$ dla $\lambda > n$ oraz $\tilde{F}_\lambda \hat{e}_n = 0$ dla $\lambda \leq n$. Ustalmy teraz, że $\Delta = (-\infty, \lambda)$. Wówczas

$$E_\lambda \hat{e}_n = E_\Delta \left\{ \Delta_n, \frac{1}{\|e_n\|^2} e_n \right\} = \left\{ \Delta \cap \Delta_n, \frac{1}{\|e_n\|^2} e_n \right\} = \begin{cases} \hat{e}_n & \lambda > n \\ 0 & \lambda \leq n \end{cases}$$

□

Lemat 3.4 oraz wniosek 2.1 implikują fakt, że $\mathcal{H}_{min} = \mathcal{H}^+ = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \hat{e}_n$.

Podsumowując, dostaliśmy dowód stwierdzenia 1, który bazuje na klasycznym twierdzeniu Naimarka.

Konkluzją z powyższego rozdziału jest fakt, że każdą kratę Parsevala można otrzymać poprzez zacieśnienie bazy ortonormalnej w większej przestrzeni Hilberta, jak również kratę Parsevala można rozszerzyć do bazy ortonormalnej w większej przestrzeni Hilberta.

Drugą część powyższej konkluzji można zapisać w postaci twierdzenia, które przyda się w rozdziale 4.

Twierdzenie 3.1. *Niech $\{e_j, j \in \mathbb{J}\}$ będzie kratą Parsevala w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wówczas istnieje przestrzeń Hilberta $\mathcal{M}$ oraz określona w niej kratą Parsevala $\{\tilde{e}_j, j \in \mathbb{J}\}$, taka że*

$$\{\hat{e}_j = e_j \oplus \tilde{e}_j, j \in \mathbb{J}\}$$

jest bazą ortonormalną w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}^+ = \mathcal{H} \oplus \mathcal{M}$.

Uwaga 2. *Z każdą kratą Parsevala $\{e_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ określoną w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ możemy związać operator analizy (analysis operator) $\theta_e : \mathcal{H} \rightarrow \ell_2(\mathbb{J})$:*

$$\theta_e(f) = \{(f, e_j)\}_{j \in \mathbb{J}} \quad f \in \mathcal{H}, \quad (3.4)$$

który jest izometrią. Obraz tego operatora (oznaczany jako $\mathcal{R}(\theta_e)$) jest podzbiorem $\ell_2(\mathbb{J})$ i na mocy twierdzenia 3.1 zachodzi

$$\ell_2(\mathbb{J}) = \mathcal{R}(\theta_e) \oplus \mathcal{R}(\theta_{\tilde{e}}), \quad (3.5)$$

gdzie operator analizy $\theta_{\tilde{e}} : \mathcal{M} \rightarrow \ell_2(\mathbb{J})$ związany jest z kratą Parsevala $\{\tilde{e}_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ z twierdzenia 3.1.

Hamiltoniany określone przez kraty Parsevala

4.1. Wstęp

W niniejszym podrozdziale przedstawię koncepcję w jaki sposób można definiować operatory Hamiltona (w skrócie hamiltoniany) za pomocą kraty Parsevala. W mechanice kwantowej o dynamice zamkniętego układu możemy wnioskować na podstawie samosprężonego operatora Hamiltona H , który jest definiowany jako suma energii potencjalnej i kinetycznej wszystkich cząstek danego układu. Operator ten jest podstawowym składnikiem w równaniu Schrodingera dla funkcji falowej pewnego układu $\mathcal{S}$. Równanie Schrodingera możemy zapisać symbolicznie jako $i\dot{\Psi}(t) = H\Psi(t)$, gdzie $\Psi(t)$ jest wektorem stanu układu $\mathcal{S}$.

Ważnym aspektem związanym z operatorem H jest zbiór jego wektorów i wartości własnych. Jeżeli widmo tego operatora jest dyskretne to wartości własne E_j będą liczbami rzeczywistymi, a zbiór wektorów własnych odpowiadający różnym wektorom własnym będzie ortogonalny. Przy założeniu, że wszystkie wektory własne są pojedyncze otrzymamy, że znormalizowany zbiór tych wektorów własnych $\{\hat{e}_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ jest bazą ortonormalną w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}^+$. Wówczas wszystkie wektory stanów układu $\mathcal{S}$ będą wyrażone jako kombinacja liniowa wektorów $\{\hat{e}_j\}_{j \in \mathbb{J}}$.

Może się jednak zdarzyć, że nie wszystkie wektory stanów przestrzeni $\mathcal{H}$ będą istotne w badanym przez nas układzie $\mathcal{S}$ (np. gdy chcemy, aby energia układu nie osiągała zbyt dużych wartości). Wówczas rozsądnie jest rozważać fizyczną przestrzeń wektorową $\mathcal{H}_{ph}$, która jest podprzestrzenią przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, na której układ $\mathcal{S}$ jest zdefiniowany. Fizyczna przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}_{ph}$ może być skonstruowana przez działanie ortogonalnego operatora projekcji P na przestrzeń $\mathcal{H}^+$, tj. $\mathcal{H}_{ph} = P\mathcal{H}^+$. Zatem jeżeli H jest operatorem na $\mathcal{H}$ oraz $f, g \in \mathcal{H}_{ph}$ to

$$(f, Hg) = (Pf, HPg) = (Pf, (PHP)Pg) = (Pf, H_{ph}Pg),$$

gdzie $H_{ph} = PHP$ jest fizyczną częścią operatora H działającą w $\mathcal{H}_{ph}$.

Rozważmy teraz zbiór $\{\hat{e}_n, n = 0, 1, 2, \dots, N\}$ znormalizowanych wektorów własnych operatora H (zakładamy, że jest to baza ortonormalna w $\mathcal{H}^+$) oraz zbiór od-

powiadających im rzeczywistych wartości własnych $\{E_n, n = 0, 1, 2, \dots, N\}$, gdzie $N = \dim \mathcal{H}^+ < \infty$. Wówczas dla hamiltonianu H zachodzi:

$$Hg = \sum_{n=0}^N E_n(g, \hat{e}_n) \hat{e}_n, \quad (4.1)$$

którego dziedziną to $D(H) = \{g \in \mathcal{H} : \sum_{n=0}^N E_n(g, \hat{e}_n) \hat{e}_n \in \mathcal{H}\}$. Odnosząc się do wzoru (4.1) fizyczna część operatora H przyjmie formę:

$$PHPg = \sum_{n=0}^N E_n(Pg, \hat{e}_n) e_n = \sum_{n=0}^N E_n(Pg, P\hat{e}_n) e_n = \sum_{n=0}^N E_n(f, e_n) e_n,$$

gdzie $f = Pg$ oraz $e_n = P\hat{e}_n$. Z tego powodu operator $H_{ph} = PHP$ działa w podprzestrzeni $\mathcal{H}_{ph} \subset \mathcal{H}^+$ oraz zachodzi:

$$H_{ph}f = \sum_{n=0}^N E_n(f, e_n) e_n, \quad f \in D(H_{ph}) = PD(H). \quad (4.2)$$

W ogólnym przypadku zbiór wektorów $\{e_n = P\hat{e}_n, n = 0, 1, 2, \dots, N\}$ przestaje być bazą ortonormalną, jednakże okazuje się, że zbiór ten jest kratą Parsevala w przestrzeni $\mathcal{H}_{ph}$. Z tego powodu operator $H_e (= H_{ph})$ ze wzoru (4.2) będziemy rozumieć jako hamiltonian generowany przez kratę Parsevala $\{e_n\}$. Ciekawą obserwacją jest fakt, że projekcja z przestrzeni $\mathcal{H}^+$ na podprzestrzeń $\mathcal{H}_{ph}$ zazwyczaj nie zachowuje wartości własnych dla hamiltonianu H_e . W kolejnych dwóch podrozdziałach zaprezentujemy twierdzenia ułatwiające znajdowanie wartości własnych hamiltonianu H_e oraz pokaże praktyczny przykład ich wykorzystania.

Przejdę teraz do szczegółowego omówienia wspomnianego hamiltonianu w przypadku operatorów ograniczonych i dla skończonych macierzy.

W rozważanym przypadku założymy, że kratą Parsevala $\{e_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ określona jest w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Dodatkowo założymy, że zbiór liczb rzeczywistych $\{E_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ posiada kres dolny i górny, to znaczy że istnieją $E_{min} = \inf_{j \in \mathbb{J}} E_j$ oraz $E_{max} = \sup_{j \in \mathbb{J}} E_j$ takie, że $-\infty < E_{min} \leq E_j \leq E_{max} < \infty$ dla każdego $j \in \mathbb{J}$. Wówczas hamiltonian generowany przez kratę Parsevala $\{e_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ i zbiór liczb $\{E_j\}_{j \in \mathbb{J}}$:

$$H_e f = \sum_{j \in \mathbb{J}} E_j(f, e_j) e_j, \quad f \in \mathcal{H} \quad (4.3)$$

jest ograniczonym operatorem samosprzężonym w przestrzeni $\mathcal{H}$. Wynika to ze stwierdzenia 1 z poprzedniego rozdziału, gdyż istnieje baza ortonormalna $\{\hat{e}_j\}$ w większej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}^+$, taka że $P\hat{e}_j = e_j$ (gdzie P jest operatorem projekcji z przestrzeni $\mathcal{H}^+$ na $\mathcal{H}$). Korzystając z tego faktu wnioskujemy, że $H_e = PH_e P$, gdzie

$$H_e g = \sum_{j \in \mathbb{J}} E_j(g, \hat{e}_j) \hat{e}_j, \quad g \in \mathcal{H}^+ \quad (4.4)$$

jest ograniczonym operatorem samosprzężonym w przestrzeni $\mathcal{H}^+$ z wartościami własnymi $\{E_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ i odpowiadającymi im wektorami własnymi $\{\hat{e}_j\}_{j \in \mathbb{J}}$.

4.2. Widmo punktowe operatorów określonych przez kraty Parsevala

Zgodnie z tym co zostało wspomniane we wstępie do tego rozdziału może zdarzyć się sytuacja że widmo punktowe operatora H_e nie pokrywa się z widmem punktowym operatora $H_{\tilde{e}}$. W tym podrozdziale zaprezentuję techniki wykorzystywane do znajdowania wartości własnych hamiltonianu H_e . Zaczniemy jednak od pewnego pomocniczego lematu.

Lemat 4.1. *Niech $\{c_j\}_{j \in \mathbb{J}} \in \ell_2(\mathbb{J})$ oraz $\{e_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ będzie kratą Parsevala w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wówczas $\sum_{j \in \mathbb{J}} c_j e_j = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{c_j\}_{j \in \mathbb{J}} \in \mathcal{R}(\theta_{\tilde{e}})$, gdzie $\mathcal{R}(\theta_{\tilde{e}})$ jest obrazem operatora $\theta_{\tilde{e}}$ (skojarzonego z kratą Parsevala $\{\tilde{e}_j, j \in \mathbb{J}\}$ z twierdzenia 3.1).*

Dowód. Jeżeli $\sum_{j \in \mathbb{J}} c_j e_j = 0$, to wówczas $f = \sum_{j \in \mathbb{J}} c_j \hat{e}_j = \sum_{j \in \mathbb{J}} c_j e_j + \sum_{j \in \mathbb{J}} c_j \tilde{e}_j$, na mocy twierdzenia 3.1. Znaczy to, że $f \in \mathcal{M}$ oraz $c_j = (f, \hat{e}_j) = (f, \tilde{e}_j)$. Zatem $\theta_{\tilde{e}}(f) = \{c_j\}$.

Natomiast jeżeli $\{c_j\}_{j \in \mathbb{J}} \in \mathcal{R}(\theta_{\tilde{e}})$, to znaczy że istnieje $f \in \mathcal{M}$ takie, że $c_j = (f, \tilde{e}_j) = (f, \hat{e}_j)$. Wówczas $f = \sum_{j \in \mathbb{J}} c_j \hat{e}_j = \sum_{j \in \mathbb{J}} c_j e_j + \sum_{j \in \mathbb{J}} c_j \tilde{e}_j$. Z faktu, że $f \in \mathcal{M}$ otrzymujemy, że $\sum_{j \in \mathbb{J}} c_j e_j = 0$. □

Założmy teraz, że $H_e f = \mu f$ dla niezerowych $f \in \mathcal{H}$. Ponieważ $\{e_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ jest kratą Parsevala, to $f = \sum_{j \in \mathbb{J}} (f, e_j) e_j$. Wówczas równość (4.3) przyjmuje formę:

$$\sum_{j \in \mathbb{J}} (E_j - \mu)(e_j, f) e_j = 0 \quad (4.5)$$

Z punktu widzenia lematu 4.1 równość (4.5) jest równoważna warunkowi $\{(E_j - \mu)c_j\} \in \mathcal{R}(\theta_{\tilde{e}})$, gdzie $\{c_j = (f, e_j)\} \in \mathcal{R}(\theta_e)$. Podsumowując powyższe rozważania otrzymujemy warunek konieczny i wystarczający na znajdowanie wartości własnych hamiltonianu H_e . Poniższe twierdzenie pochodzi z [2].

Twierdzenie 4.1. *Niech $\{e_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ będzie kratą Parsevala w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Dodatkowo niech $\{E_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ będzie zbiorem liczb rzeczywistych. Operator H_e zdefiniowany jak w (4.3) posiada wartość własną μ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ciąg $\{c_j\} \in \mathcal{R}(\theta_e)$ taki, że $\{(E_j - \mu)c_j\} \in \mathcal{R}(\theta_{\tilde{e}})$, gdzie $\mathcal{R}(\theta_e)$ i $\mathcal{R}(\theta_{\tilde{e}})$ są obrazami operatorów skojarzonych z kratą $\{e_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ i jej kratą dualną $\{\tilde{e}_j\}_{j \in \mathbb{J}}$. Dodatkowo odpowiadający jej wektor własny jest postaci $\sum_{j \in \mathbb{J}} c_j e_j$.*

Definicja 4.2.1. *Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta, a $\{e_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ będzie określoną w tej przestrzeni kratą Parsevala. Macierz Grama związaną z $\{e_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ nazwiemy następująco zdefiniowaną macierz kwadratową:*

$$G_e = [(e_i, e_j)]_{i,j \in \mathbb{J}}.$$

Lemat 4.2. *Niech $G_e = [(e_i, e_j)]_{i,j \in \mathbb{J}}$ będzie macierzą Grama dla kraty Parsevala $\{e_j\}_{j \in \mathbb{J}}$. Wówczas macierz ta określa ograniczony operator samosprężony, który jest operatorem ortogonalnej projekcji z przestrzeni ℓ_2 na $\mathcal{R}(\theta_e)$.*

Lemat 4.2 pozwala wprowadzić pewną modyfikację twierdzenia 4.1, która jest wygodniejsza przy obliczaniu wartości własnych operatorów H_e . Dla macierzy Grama $G_e = [(e_i, e_j)]_{i,j \in \mathbb{J}}$, $G_{\tilde{e}} = [(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)]_{i,j \in \mathbb{J}}$ zdefiniujemy funkcje o wartościach macierzowych $B_e(\mu) = [b_{ij}(\mu)]_{i,j \in \mathbb{J}}$ oraz $D_e(\mu) = [d_{ij}(\mu)]_{i,j \in \mathbb{J}}$, gdzie

$$b_{ij}(\mu) = \sum_{k \in \mathbb{J}} (E_k - \mu)(e_i, e_k)(e_k, e_j), \quad d_{ij}(\mu) = (E_i - \mu)(e_i, e_j). \quad (4.6)$$

Poniższy lemat również pochodzi z [2].

Lemat 4.3. *Niech H_e będzie operatorem określonym przez kratę Parsevala $\{e_j\}_{j \in \mathbb{J}}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. $\mu \in \mathbb{R}$ jest wartością własną operatora H_e ,
2. istnieje ciąg $\{c_j\} \in \ell_2(\mathbb{J})$ taki, że $G_e\{c_j\} \neq 0$ oraz $B_e(\mu)\{c_j\} = 0$,
3. istnieją ciągi $\{c_j\}, \{\tilde{c}_j\} \in \ell_2(\mathbb{J})$ takie, że $G_e\{c_j\} \neq 0$ oraz $D_e(\mu)\{c_j\} = G_{\tilde{e}}\{\tilde{c}_j\}$.

Dowód. Niech $\{\hat{e}_j = e_j \oplus \tilde{e}_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ będzie bazą ortonormalną w przestrzeni $\mathcal{H}^+$ taką jak w twierdzeniu 3.1. Dodatkowo niech odpowiadający jej operator

$$\theta_{\hat{e}} = \{(g, \hat{e}_j)\}_{j \in \mathbb{J}}, \quad g \in \mathcal{H}^+ \quad (4.7)$$

będzie operatorem analizy (analysis operator) przekształcającym przestrzeń $\mathcal{H}^+$ w $\ell_2(\mathbb{J})$. Biorąc pod uwagę równość (4.4) otrzymamy, że $\theta_{\hat{e}}(H_{\hat{e}}g) = \mathcal{E}\theta_{\hat{e}}(g)$, gdzie $\mathcal{E}$ jest ograniczonym operatorem w przestrzeni $\ell_2(\mathbb{J})$, takim że:

$$\mathcal{E}\{c_j\} = \{E_j c_j\}, \quad D(\mathcal{E}) = \ell_2(\mathbb{J}). \quad (4.8)$$

Zauważmy, że jeżeli $f \in \mathcal{H}$ to $\theta_{\hat{e}}(f) = \{(f, \hat{e}_j) = (f, P\hat{e}_j) = (f, e_j)\} = \theta_e(f)$, gdzie P jest ortogonalną projekcją z przestrzeni $\mathcal{H}^+$ na przestrzeń $\mathcal{H}$ i $\theta_{\hat{e}}$ jest zdefiniowany jak w (4.7). Dodając do tego uwagę 2 z poprzedniego rozdziału otrzymamy, że $\theta_{\hat{e}}$ przekształca przestrzeń $\mathcal{H}$ na $\mathcal{R}(\theta_e)$. Biorąc także pod uwagę, że $H_e = PH_{\hat{e}}P$ otrzymujemy, że H_e jest równoważny operatorowi $\mathcal{E}_e$ działającemu w $\mathcal{R}(\theta_e)$ takiemu, że:

$$\mathcal{E}_e = \mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{P}, \quad D(\mathcal{E}_e) = \mathcal{R}(\theta_e) = \mathcal{P}\ell_2(\mathbb{J}), \quad (4.9)$$

gdzie $\mathcal{P} = \theta_{\hat{e}}P\theta_{\hat{e}}^{-1}$ jest ortogonalną projekcją z $\ell_2(\mathbb{J})$ na $\mathcal{R}(\theta_e)$

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Z punktu widzenia (4.9) μ jest wartością własną operatora H_e wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $c_j \in \ell_2(\mathbb{J})$ taki, że $\mathcal{P}\{c_j\} \neq 0$ oraz $\mathcal{P}(\mathcal{E} - \mu I)\mathcal{P}\{c_j\} = 0$. Na mocy lematu 4.2 wiemy, że operator $\mathcal{P}$ pokrywa się z operatorem G_e . Wówczas pierwszy warunek przyjmie formę $G_e\{c_j\} \neq 0$, natomiast drugi $G_e(\mathcal{E} - \mu I)G_e\{c_j\} = B_e(\mu)\{c_j\}$.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) W równoważny sposób zapisujemy warunek $\mathcal{P}(\mathcal{E} - \mu I)\mathcal{P}\{c_j\} = 0$ jako $(\mathcal{E} - \mu I)\mathcal{P}\{c_j\} \in \mathcal{R}(\theta_e)$. Korzystając z identycznego rozumowania jak w poprzedniej równoważności oraz dodatkowo zauważając, że $G_{\tilde{e}}$ jest ortogonalną projekcją na $\mathcal{R}(\theta_{\tilde{e}})$ a $(\mathcal{E} - \mu I)\mathcal{P}\{c_j\} = D_e(\mu)\{c_j\}$ otrzymujemy tezę. □

Przykład 4.1. Niech $\mathcal{H}^+ = \mathbb{C}^2$, a $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ph} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}\right\}$. Bazę ortonormalną w $\mathcal{H}^+$ będą wektory:

$$\hat{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Operator ortogonalnej projekcji P z przestrzeni $\mathcal{H}^+$ na przestrzeń $\mathcal{H}_{ph}$ będzie działał dla $f \in \mathcal{H}^+$ następująco:

$$Pf = (f, p)p \quad p = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

Wówczas hamiltonian $H_{\hat{e}}$ będzie postaci: $H_{\hat{e}}f = E_1(f, \hat{e}_1)\hat{e}_1 + E_2(f, \hat{e}_2)\hat{e}_2$, a kratą Parsewala w $\mathcal{H}_{ph}$ będą wektory:

$$e_1 = P\hat{e}_1 = \cos(\alpha)p \quad e_2 = P\hat{e}_2 = \sin(\alpha)p$$

Skorzystamy z podpunktu 2 lematu 4.3 w celu wyznaczenia wartości własnych hamiltonianu generowanego przez wektory e_1, e_2 . Zauważmy, że $\|p\|^2 = 1$ zatem macierz Grama G_e będzie postaci:

$$G_e = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix},$$

natomiast macierz $B_e(\mu)$ będzie miała postać:

$$B_e(\mu) = \begin{bmatrix} (E_1 - \mu) \cos^4 \alpha + (E_2 - \mu) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha & (E_1 - \mu) \cos^3 \alpha \sin \alpha + (E_2 - \mu) \cos \alpha \sin^3 \alpha \\ (E_1 - \mu) \cos^3 \alpha \sin \alpha + (E_2 - \mu) \cos \alpha \sin^3 \alpha & (E_1 - \mu) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + (E_2 - \mu) \sin^4 \alpha \end{bmatrix}$$

Aby wyznaczyć wartości własne musimy z warunku $B_e(\mu)\{c_j\} = 0$ wyznaczyć μ dla niezerowych c_j . Ponieważ mamy macierz symetryczną wymiaru 2×2 to możemy wyznaczyć μ z warunku $c_j b_{ij}(\mu) = 0$. W tym przypadku do rozwiązania będą 3 równania z 1 niewiadomą.

Dla elementu $b_{1,1}$ trzeba rozwiązać równanie $c_1((E_1 - \mu) \cos^4 \alpha + (E_2 - \mu) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha) = 0$. Po zastosowaniu prostych przekształceń algebraicznych otrzymamy, że

$$\mu = E_1 \cos^2 \alpha + E_2 \sin^2 \alpha$$

Rozpatrując w podobny sposób dwa pozostałe równania otrzymamy identyczne wartości μ , zatem jedyną wartością własną hamiltonianu H_e jest $\mu = E_1 \cos^2 \alpha + E_2 \sin^2 \alpha$.

4.3. Krata Mercedesesa

W poniższym rozdziale zaprezentuje przykład kraty Parsewala, mianowicie tzw. kratę Mercedesesa. Dodatkowo użyję twierdzenie 4.1, aby wyznaczyć wektory i wartości własne hamiltonianu generowanego przez kratę Mercedesesa.

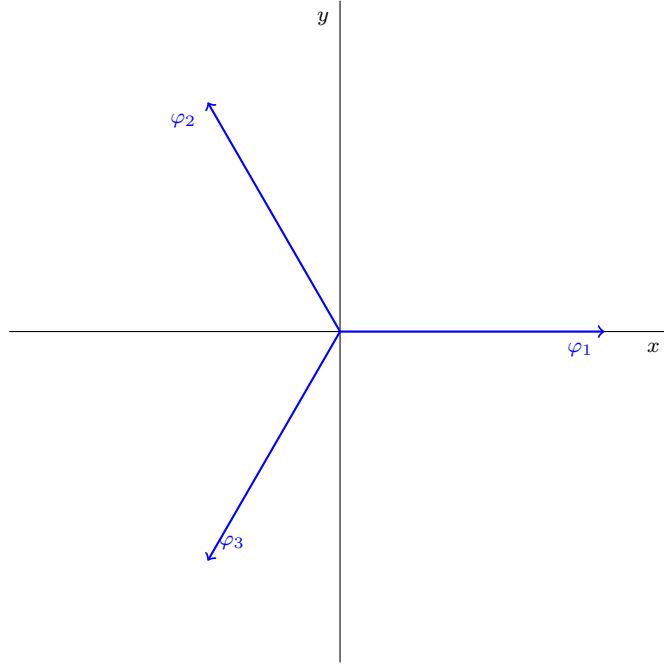
Rozważmy przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}^+ = \mathbb{C}^3$ oraz określoną w niej bazę ortonormalną $\{\hat{e}_j, j \in \mathbb{J}\}$, gdzie $\mathbb{J} = \{1, 2, 3\}$ gdzie

$$\hat{e}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \hat{e}_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Stosując ortogonalną projekcję tej bazy ortonormalnej na podprzestrzeń $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ otrzymamy kratę Parsevala $\{e_j, j \in \mathbb{J}\}$, gdzie

$$e_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Powyżej zdefiniowana kratka Parsevala jest nazywana kratą Mercedes, gdyż graficzna interpretacja (przedstawiona poniżej) przypomina logo niemieckiej marki samochodów.



Zbiór wektorów $\{e_1, e_2, e_3\}$ tworzący kratę Mercedes

Krata dualna do $\{e_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ składa się z wektorów

$$\tilde{e}_1 = \tilde{e}_2 = \tilde{e}_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Obrazy operatorów $\theta_e, \theta_{\tilde{e}}$ są podprzestrzeniami $\mathbb{C}^3$.

$$\mathcal{R}(\theta_e) = \left\{ \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -x_1 + \sqrt{3}x_2 \\ -x_1 - \sqrt{3}x_2 \end{bmatrix}, x_1, x_2 \in \mathbb{C} \right\}, \quad \mathcal{R}(\theta_{\tilde{e}}) = \left\{ \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

Mając powyższe informacje możemy przejść do wyznaczenia wektorów i wartości własnych dla hamiltonianu $H_e = \sum_{j=1}^3 E_j(f, e_j)e_j$.

Niech E_1, E_2, E_3 będą liczbami rzeczywistymi. Wówczas na mocy twierdzenia 4.1 μ jest wartością własną dla hamiltonianu H_e wtedy i tylko wtedy gdy poniższy układ posiada niezerowe rozwiązanie ze względu na x_1, x_2, x_3 .

$$\begin{cases} 2(E_1 - \mu)x_1 = x_3 \\ (E_2 - \mu)(-x_1 + \sqrt{3}x_2) = x_3 \\ (E_3 - \mu)(-x_1 - \sqrt{3}x_2) = x_3 \end{cases}$$

Stosując elementarne przekształcenia powyższego układu otrzymujemy, że μ jest wartością własną hamiltonianu H_e gdy spełniona jest poniższa równość

$$(E_1 - \mu)(E_2 - \mu) + (E_2 - \mu)(E_3 - \mu) + (E_3 - \mu)(E_1 - \mu) = 0$$

Rozwiązując powyższe równanie kwadratowe otrzymujemy, że wartościami własnymi hamiltonianu generowanego przez kratę Mercedes są:

$$\mu_1 = \frac{1}{3}(E_1 + E_2 + E_3 + \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 - E_1E_2 - E_2E_3 - E_3E_1}),$$

$$\mu_2 = \frac{1}{3}(E_1 + E_2 + E_3 - \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 - E_1E_2 - E_2E_3 - E_3E_1}).$$

Odpowiadające im wektory własne to

$$v_1 = C_1 \begin{bmatrix} -2E_1 + E_2 + E_3 - \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 - E_1E_2 - E_2E_3 - E_3E_1} \\ \sqrt{3}(E_2 - E_3) \end{bmatrix},$$

$$v_2 = C_2 \begin{bmatrix} -2E_1 + E_2 + E_3 + \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 - E_1E_2 - E_2E_3 - E_3E_1} \\ \sqrt{3}(E_2 - E_3) \end{bmatrix},$$

gdzie C_1, C_2 jest stałą normalizującą, taką aby $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$.

Powyższe rozważania pokazują dodatkowo, że w ogólnym przypadku skalary E_1, E_2, E_3 nie są wartościami własnymi hamiltonianu H_e .

Przyjmijmy teraz, że $E_1 = 1, E_2 = 2$ oraz $E_3 = 3$. Korzystając z powyższych wzorów na wektory i wartości własne dla kraty Mercedes otrzymujemy, że

$$\mu_1 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \mu_2 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

oraz

$$v_1 = C_1 \begin{bmatrix} 3 - \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad v_2 = C_2 \begin{bmatrix} 3 + \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

W celu wyznaczenia stałych C_1 i C_2 znormalizujemy wektory v_1 i v_2 . Stosując normę euklidesową otrzymamy wówczas, że $C_1 = (15 - 6\sqrt{3})^{-\frac{1}{2}}$ oraz $C_2 = (15 + 6\sqrt{3})^{-\frac{1}{2}}$. Zatem wektory odpowiadające wartościom własnym μ_1, μ_2 dla hamiltonianu generowanego przez kratę Parsewała dla zadanych E_1, E_2, E_3 wynoszą:

$$v_1 = (15 - 6\sqrt{3})^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 3 - \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad v_2 = (15 + 6\sqrt{3})^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 3 + \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Bibliografia

- [1] N.I.Akhiezer, I.M. Glazman: *Theory of linear operators in Hilbert space*, 2ed., Dover, 1993.
- [2] F. Bagarello, S.Kužel: *Hamiltonians generated by Parseval frames*, submitted to Applied and Computational Harmonic Analysis.
- [3] O.Christensen : *An Introduction to Frames and Riesz Basis*, Birkhauser Boston, 2003.
- [4] W.Mlak : *Wstęp do teorii przestrzeni Hilberta*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1970.
- [5] D.R.Larson : *Frames, bases and group representations*, Memoirs Amer. Math. Soc., **697** 2000.
- [6] W.Czaja : *Remarks on Naimark's duality*, American Mathematical Society, 2008.



Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie
Wydział Matematyki Stosowanej



Praca magisterska
Wersja elektroniczna

Twierdzenie Naimarka i jego zastosowanie w mechanice kwantowej

Mateusz Goc

Nr albumu: 283444

Promotor
dr hab. Sergiusz Kuźel

Kraków 2020