

**AKADEMIA GÓRNICZO - HUTNICZA**

Im. Stanisława Staszica w Krakowie

---

**WYDZIAŁ INŻYNIERII MECHANICZNEJ I ROBOTYKI**

Rozprawa doktorska

**STEROWANIE ODPORNE DRGANIAMI WIRNIKA  
ŁOŻYSKOWANEGO MAGNETYCZNIE**

autor

mgr inż. Arkadiusz Mystkowski

promotor

prof. dr hab. inż. Zdzisław Gosiewski

---

**Kraków 2007**

Pragnę wyrazić serdeczne podziękowania Panu Profesorowi Zdzisławowi Gosiewskiemu za pomoc i opiekę podczas realizacji niniejszej rozprawy.

Dziękuję także Wszystkim Kolegom z Katedry Automatyki i Robotyki Wydziału Mechanicznego Politechniki Białostockiej za pomoc i życzliwość okazaną w czasie jej powstawania.

Arkadiusz Mystkowski

## Spis treści

<b>Wykaz ważniejszych skrótów i oznaczeń.....</b>	<b>5</b>
<b>1. Wstęp.....</b>	<b>9</b>
<b>2. Klasyczne metody sterowania zawieszeniem magnetycznym.....</b>	<b>14</b>
2.1. Konstrukcja i opis heteropolarnego promieniowego łożyska magnetycznego.....	14
2.2. Model nominalny obiektu.....	15
2.3. Model wirnika sztywnego w łożyskach magnetycznych.....	18
2.4. Rozprzęganie dynamiki wirnika sztywnego względem osi sterowania.....	20
2.5. Uwagi dotyczące sterowania drganiami wirników.....	23
2.6. Sterowanie z regulatorem PID.....	25
<b>3. Stanowisko badawcze i zastosowana do badań aparatura.....</b>	<b>28</b>
3.1. Konstrukcja stanowiska laboratoryjnego.....	28
3.2. Budowa układu sterowania.....	34
3.3. Realizacja algorytmów sterowania.....	36
3.4. Plan badań eksperymentalnych.....	39
<b>4. Badania symulacyjne i laboratoryjne drgań wirnika z regulacją typu PID.....</b>	<b>41</b>
4.1. Badania symulacyjne układu z regulatorem PID.....	41
4.2. Badania eksperymentalne układu z regulatorem PID.....	45
4.2.1. Sterowanie położeniem wirnika w szczelinie powietrznej.....	46
4.2.2. Charakterystyki częstotliwościowe.....	47
4.2.3. Dynamika wirnika w ruchu obrotowym.....	49
4.3. Badania postaci drgań własnych wirnika.....	52
<b>5. Cele, teza i zakres pracy.....</b>	<b>54</b>
5.1. Cele pracy.....	54
5.2. Problemy sterowania zawieszeniem magnetycznym w wysokoobrotowej maszynie wirnikowej.....	54
5.3. Przegląd metod sterowania (w tym sterowania odpornego).....	55
5.4. Teza i zakres pracy.....	57
<b>6. Modelowanie niepewności w układzie zawieszenia magnetycznego.....</b>	<b>58</b>
6.1. Źródła i rodzaje niepewności.....	58
6.2. Model nieliniowy obiektu.....	59
6.3. Niepewność strukturalna.....	60
6.4. Postać addytywna niepewności.....	61
6.5. Postać multiplikatywna niepewności.....	62
6.6. Niepewność parametryczna.....	63
6.7. Niepewność dynamiki elektromagnesu.....	65
6.8. Badania zawieszenia magnetycznego z niepewnością parametryczną.....	68
6.9. Badania zawieszenia magnetycznego z niepewnością w formie niezamodelowanej dynamiki.....	70
6.9.1. Niepewność włączona multiplikatywnie.....	72
6.9.2. Niepewność włączona addytywnie.....	74
<b>7. Projektowanie funkcji wagowych dla obiektu laboratoryjnego.....</b>	<b>76</b>
7.1. Charakterystyka funkcji wagowych.....	76
7.2. Dobór funkcji wagi uchybu $W_e$ i wagi wyjściowej $W_y$ .....	78
7.3. Dobór funkcji wagi sterowania $W_u$ .....	81

7.4.	Projektowanie układu regulacji odpornej z dwoma funkcjami wagowymi.....	82
7.5.	Projektowanie układu regulacji odpornej z trzema funkcjami wagowymi.....	83
7.6.	Wyznaczenie funkcji wagowych dla zawieszenia magnetycznego wirnika w łożyskach heteropolarnych.....	84
7.7.	Dobór funkcji wagowych $W_d$ i $W_n$ .....	88
7.8.	Analiza problemu doboru funkcji $W_d$ .....	90
7.9.	Analiza problemu doboru funkcji $W_n$ .....	94
7.10.	Kształtowanie pasma przenoszenia układu zamkniętego i ograniczeń sygnału sterującego regulatora za pomocą funkcji wagowej.....	98
<b>8.</b>	<b>Projektowanie algorytmów sterowania odporne.....</b>	<b>103</b>
8.1.	Algorytm regulatora $H_\infty$ .....	105
8.1.1.	Wyznaczanie regulatora $H_\infty$ za pomocą formuły przesuwania pętli.....	105
8.1.2.	Wyznaczanie regulatora $H_\infty$ algorytmem gamma-iteracji.....	106
8.2.	Algorytm regulatora $H_2$ .....	108
8.3.	Różnica działania między regulatorem $H_\infty$ a $H_2$ .....	109
8.4.	Algorytm regulatora $\mu$ .....	109
<b>9.</b>	<b>Badania symulacyjne drgań wirnika z regulacją odporną.....</b>	<b>111</b>
9.1.	Badania układu z regulatorem $H_\infty$ .....	111
9.2.	Badania układu z regulatorem $H_2$ .....	117
9.3.	Badania układu z regulatorem $\mu$ .....	119
9.4.	Badania układu rozprzężonego.....	123
<b>10.</b>	<b>Badania eksperymentalne odporne układu sterowania drganiami wirnika.....</b>	<b>128</b>
10.1.	Sterowanie położeniem wirnika w szczelinie powietrznej.....	129
10.2.	Charakterystyki częstotliwościowe.....	136
10.3.	Dynamika wirnika w ruchu obrotowym.....	139
<b>11.</b>	<b>Podsumowanie i wnioski.....</b>	<b>149</b>
	<b>Literatura.....</b>	<b>152</b>
	<b>Załącznik A. Skalowanie układu sterowania.....</b>	<b>157</b>
	<b>Załącznik B. Normy sygnałów, macierzy i układów.....</b>	<b>159</b>
	<b>Załącznik C. Badania odporności regulatorów PID, <math>H_\infty</math> i <math>\mu</math>.....</b>	<b>162</b>
C.1.	Teoria odpornej stabilności dla układu zawieszenia magnetycznego.....	162
C.2.	Badanie odpornej stabilności w układzie sterowania z regulatorem PID.....	164
C.3.	Badanie odpornej stabilności układu z niepewnością dla regulatora $H_\infty$ .....	167
C.4.	Badanie odpornej stabilności układu z niepewnością dla regulatora $\mu$ .....	169
	<b>Załącznik D. Redukcja rzędu regulatora.....</b>	<b>170</b>
D.1.	Metoda obcinania symetrycznego.....	170
D.2.	Metoda residuum symetrycznego.....	171
D.3.	Metoda aproksymacji normy Hankela.....	171
D.4.	Przykład redukcji rzędu regulatora $H_\infty$ w układzie zawieszenia magnetycznego....	172
	<b>Załącznik E. Optymalizacja zużycia energii w łożysku magnetycznym.....</b>	<b>174</b>
E.1.	Energia zużywana przez łożysko magnetyczne.....	174
E.2.	Sterowanie punktem pracy.....	175
E.3.	Zastosowanie łożysk z dodatnią sztywnością.....	177
	<b>Załącznik F. Opis zastosowanego sprzętu pomiarowego.....</b>	<b>178</b>

## Wykaz ważniejszych skrótów i oznaczeń

$j = \sqrt{-1}$  – jednostka urojona,

$\omega$  – częstotliwość,

$s$  – operator *Laplace'a*,

$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  – realizacja liniowego układu w przestrzeni stanu  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$ ,

$\mathbf{G} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right]$  – spakowany zapis układu liniowego,

$F_l(G, K)$  – zapis układu zamkniętego w postaci dolnej liniowej transformaty ułamkowej (ang. *Lower Linear Fractional Transformation*),

$F_u(G, K)$  – zapis układu zamkniętego w postaci górnej liniowej transformaty ułamkowej (ang. *Upper Linear Fractional Transformation*),

$\gamma$  – współczynnik optymalizacji/wskaźnik odporności, minimalizowany w celu znalezienia optymalnego regulatora odpornego,

$\mathbb{R}$  – dziedzina liczb rzeczywistych,

$\mathbb{R}^n$  – liniowa przestrzeń  $n$  – wymiarowa, np. przestrzeń wszystkich rzeczywistych wektorów  $n$  – wymiarowych,

$\mathbb{R}^{n \times m}$  – przestrzeń rzeczywistych macierzy o  $n$  wierszach i  $m$  kolumnach,

$\mathbb{C}$  – dziedzina liczb urojonych,

$\mathbb{C}^n$  – liniowa przestrzeń  $n$  – krotna, np. przestrzeń wszystkich urojonych wektorów  $n$  – wymiarowych,

$\mathbb{C}^{n \times m}$  – przestrzeń urojonych macierzy o  $n$  wierszach i  $m$  kolumnach,

$\mathbb{R}H^\infty$  – przestrzeń układów o ujemnych częściach rzeczywistych biegunów, dla których istnieje norma  $H_\infty$ ,

$\|\mathbf{x}\|_p$  – norma wektora  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  lub  $x \in \mathbb{C}^n$  rzędu  $p$ ,

$\|G\|_\infty$  – norma  $H_\infty$ ,

$\|G\|_2$  – norma  $H_2$ ,

$\|G\|_H$  – norma Hankela,

$\bar{\sigma}(X)$  – maksymalna wartość szczególna dla  $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,

$\delta = [\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3]$  – wektor wzmocnień wagowych,

$\mathbf{I}$  – macierz jednostkowa diagonalna,

$\lambda(\mathbf{A})$  – wartości własne macierzy  $\mathbf{A}$ ,

$\text{trace}(\mathbf{A})$  – ślad macierzy  $\mathbf{A}$ ,

$\det(\mathbf{A})$  – wyznacznik macierzy  $\mathbf{A}$ ,

$\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  – macierz diagonalna, kwadratowa z elementami  $a_i$  na przekątnej.

**Symbole****Sygnały w układzie sterowania ze sprzężeniem zwrotnym**

$r/w$  – sygnał zadany,  
 $y$  – sygnał wyjściowy, mierzony,  
 $x$  – zmienna stanu,  
 $e$  – sygnał uchybu regulacji,  
 $u$  – sygnał sterujący, wyjściowy z regulatora,  
 $d_i$  – sygnał zakłócenia podanego na wejście obiektu,  
 $d_o$  – sygnał zakłócenia podanego na wyjście obiektu,  
 $d$  – niewyważenie,  
 $n$  – szum pomiarowy.

**Oznaczenia elementów składowych układu sterowania ze sprzężeniem zwrotnym**

$P(s)$  – transmitancja operatorowa obiektu,  
 $G(s)$  – transmitancja operatorowa obiektu rozbudowanego (ang. *Augmented Plant*),  
 $K(s)$  – transmitancja operatorowa regulatora,  
 $T_{zw}$  – funkcja układu zamkniętego z regulatorem odpornym,  
 $k_p$  – współczynnik wzmocnienia akcji proporcjonalnej,  
 $k_I$  – współczynnik wzmocnienia akcji całkującej,  
 $k_d$  – współczynnik wzmocnienia akcji różniczkującej.

**Funkcje wagowe**

$W_1$  lub  $W_e$  – funkcja wagowa nałożona na sygnał uchybu regulacji,  
 $W_2$  lub  $W_u$  – funkcja wagowa nałożona na sygnał sterujący,  
 $W_3$  lub  $W_y$  – funkcja wagowa nałożona na sygnał wyjściowy,  
 $W_d$  – funkcja wagowa nałożona na sygnał zakłócenia,  
 $W_n$  – funkcja wagowa nałożona na sygnał szumu,  
 $w$  – funkcja wagowa nałożona na model niepewności obiektu (niepewność dynamiki),  
 $\{\sim\}$  – indeks oznaczający sygnał przechodzący przez funkcję wagową.

**Funkcje określające właściwości układu**

$L$  – funkcja układu otwartego,  
 $S$  – funkcja wrażliwości,  
 $T$  – funkcja komplementarnej wrażliwości,  
 $R$  – funkcja sterowania.

**Oznaczenia związane z modelowaniem niepewności**

$\Delta$  – określenie źródła niepewności np. niepewność wejściowa, wyjściowa lub parametryczna,  
 $\Delta_a$  – niepewność addytywna,  
 $\Delta_m$  – niepewność multiplikatywna,  
 $l_a$  – funkcja ograniczająca wartości maksymalne niepewności addytywnej,  
 $l_m$  – funkcja ograniczająca wartości maksymalne niepewności multiplikatywnej,  
 $W_a$  – funkcja wagowa modelu niepewności addytywnej,  
 $W_m$  – funkcja wagowa modelu niepewności multiplikatywnej,  
 $\{0\}$  – indeks określający parametr nominalny,  
 $k_{i0}$  – nominalna wartość parametru  $k_i$ ,  
 $k_{s0}$  – nominalna wartość parametru  $k_s$ ,  
 $P_0$  – obiekt nominalny,  
 $M$  – układ zamknięty z niepewnością obiektu.

**Oznaczenia charakteryzujące parametry łożysk magnetycznych**

$n_p$  – ilość biegunów,  
 $\alpha_p$  – kąt między biegunami,  
 $A_p$  – pole przekroju nabiegownika,  
 $N_p$  – liczba zwojów jednej pary cewek,  
 $x_0$  – szerokość szczeliny powietrznej,  
 $d_s$  – średnica wewnętrzna statora,  
 $D_s$  – średnica zewnętrzna statora,  
 $K_l$  – stała łożyska,  
 $i$  – prąd sterujący,  
 $i_{max}$  – prąd maksymalny,  
 $i_0$  – prąd punktu pracy,  
 $F_{max}$  – maksymalna siła fizyczna,  
 $F_e$  – siła elektromagnetyczna,  
 $k_i$  – sztywność prądowa,  
 $k_s$  – sztywność przemieszczeniowa,  
 $R$  – rezystancja,  
 $L$  – indukcyjność,  
 $B$  – indukcja magnetyczna,  
 $H$  – koercja (natężenie pola magnetycznego),  
 $\mu$  – przenikalność magnetyczna,  
 $\mu_0$  – przenikalność magnetyczna próżni,  
 $\Phi$  – strumień magnetyczny.

**Oznaczenia charakteryzujące parametry wirnika**

$d$  – średnica zewnętrzna,  
 $f$  – częstotliwość,  
 $\omega_n$  – częstotliwość drgań własnych,  
 $\Omega$  – prędkość obrotowa,  
 $\varepsilon_m$  – mimośrodowość środka masy,  
 $g_z$  – przyspieszenie ziemskie,  
 $\xi$  – współczynnik tłumienia.

**Akronimy**

AMB – aktywne łożysko magnetyczne (ang. *Active Magnetic Bearing*),  
 PMB – pasywne łożysko magnetyczne (ang. *Passive Magnetic Bearing*),  
 MB – łożysko magnetyczne (ang. *Magnetic Bearing*),  
 NdFeB – neodym-żelazo-bor (ang. *Neodymium Iron Boron*),  
 DSP – cyfrowy procesor sygnałowy (ang. *Digital Signal Processor*),  
 FPGA – programowalne układy logiczne (ang. *Field Programmable Gate Array*),  
 AC – przetwornik analogowo-cyfrowy,  
 DC – przetwornik cyfrowo-analogowy,  
 LQ – regulator liniowo-kwadratowy (ang. *Linear Quadratic Controller*),  
 LQG – regulator liniowo-kwadratowo-Gaussowski (ang. *Linear Quadratic Gaussian*),  
 LFT – liniowa transformata ułamkowa (ang. *Linear Fractional Transformation*),  
 LTI – układ liniowy o parametrach niezależnych od czasu (ang. *Linear Time Invariant*),  
 LTV – układ liniowy o parametrach zależnych od czasu (ang. *Linear Time Variant*),  
 MIMO – układ o wielu wejściach i wielu wyjściach (ang. *Multi Input Multi Output*),  
 SISO – układ o jednym wejściu i jednym wyjściu (ang. *Single Input Single Output*),  
 DOF – stopień swobody (ang. *Degree Of Freedom*),

P – regulator proporcjonalny (ang. *Proportional*),

PD – regulator proporcjonalno-różniczkujący (ang. *Proportional Derivative*),

PI – regulator proporcjonalno-całkujący (ang. *Proportional Integral*),

PID – regulator proporcjonalno-całkująco-różniczkujący (ang. *Proportional Integral Derivative*),

PWM – modulacja szerokości impulsu (ang. *Pulse Width Modulation*).

## Rozdział 1. Wstęp

Zgodnie z definicją podawaną przez normę [40] łożysko magnetyczne (MB ang. *Magnetic Bearing*) jest to łożysko, które wykorzystując siłę magnetyczną przyciągania albo odpychania zapewnia lewitację i dynamiczną stabilizację wirnika. Aktywne łożysko magnetyczne (AMB ang. *Active Magnetic Bearing*) oznacza zawieszenie wirnika bez mechanicznego kontaktu używając jedynie siły przyciągania magnetycznego bazującej na technice pętli sprzężenia zwrotnego, w której skład wchodzi: czujniki, elektromagnesy, wzmacniacze mocy i regulatory.

Początek rozwoju łożysk magnetycznych należy kojarzyć z pierwszym patentem Jesse Beams'a z University of Virginia w czasach drugiej wojny światowej [5, 6]. Duży wkład w rozwój tematyki aktywnych łożysk magnetycznych na świecie włożył Habermann [36] i Schweitzer [73÷78]. W Polsce pionierem z zakresu budowy i badań łożysk magnetycznych jest Gosiewski [21]. Pierwsze międzynarodowe sympozjum dotyczące technologii aktywnych łożysk magnetycznych zorganizowano w 1988 roku. Pierwsze komercyjne zastosowanie łożysk magnetycznych to turbokompresor z wirnikiem łożyskowanym magnetycznie firmy NOVA Gas Transmission Ltd. Natomiast francuska firma S2M była pierwszą, która rozpoczęła sprzedaż łożysk magnetycznych na rynku komercyjnym w 1976 roku.

Maszyny wirnikowe z łożyskami magnetycznymi są coraz częściej stosowane w różnych aplikacjach. Najczęściej są to urządzenia precyzyjne takie jak: maszyny do obróbki precyzyjnej, elektrowrzeciona (ang. *Electromagnetic Spindle*), bezłożyskowe silniki elektryczne (ang. *Bearingless Magnetic Drives*) [11], zasobniki energii kinetycznej (ang. *Flywheels*), pompy, turbo-generatory, kompresory, wysokoobrotowe turbiny, satelity, statki kosmiczne, pociągi (ang. *Maglev Train*), itd. Dużo innych aplikacji łożysk magnetycznych oraz problemów z nimi związanych jest tematem wielu prac [1, 4, 43, 46].

Łożyskowanie magnetyczne daje wiele korzyści w porównaniu do tradycyjnych metod łożyskowania tocznego, ślizgowego (płynowego lub powietrznego). Do głównych zalet zawieszenia magnetycznego można zaliczyć:

- bezstykowe łożyskowanie,
- brak mechanicznego zużycia,
- duża niezawodność rozwiązania,
- układ wolny od smarowania,
- rozwiązanie przyjazne dla środowiska – brak zanieczyszczeń,
- precyzyjne sterowanie ruchem wirnika, niski poziom drgań,
- sterowanie położeniem wirnika (wykorzystanie ruchu obrotowego i translacyjnego w obróbce precyzyjnej),
- możliwość doboru odpowiedniej sztywności zawieszenia i współczynnika tłumienia drgań,
- praca z bardzo dużymi prędkościami obrotowymi,
- operowanie w szerokim zakresie temperatur,
- zastosowanie głębokiego podciśnienia pozwala na zniwelowanie tarcia powietrza,
- niskie zużycie energii,
- brak przenoszenia drgań wirnika na korpus maszyny,
- aktywne tłumienie drgań poprzez układ sterowania,
- przeciwdziałanie wymuszeniom, niewyważeniu, itd.,
- łożyska magnetyczne mogą stanowić elementy wykonawcze i pomiarowe jednocześnie,
- samopomiar sił, prędkości obrotowej wirnika oraz poziomu drgań i wibracji,
- diagnostyka i identyfikacja parametrów maszyny wirnikowej.

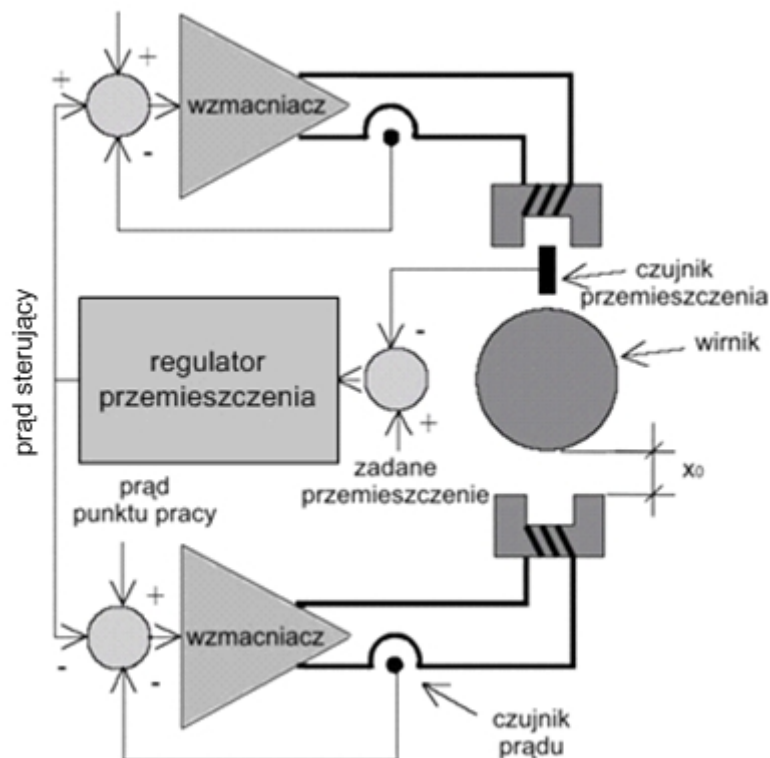
Wymienione zalety pozwalają na zastosowanie łożysk magnetycznych w coraz to szerszym zakresie aplikacji przemysłowych, do których należy zaliczyć: przemysł kosmiczny,

mechaniczny, transport, wojsko, nowe technologie i materiały (odzyskiwanie energii, odnawialne źródła energii, itd.).

Jednak przy dzisiejszym stanie rozwoju tej technologii zauważyć można również jej wady. Podstawowe wady zastosowania magnetycznego sposobu łożyskowania to:

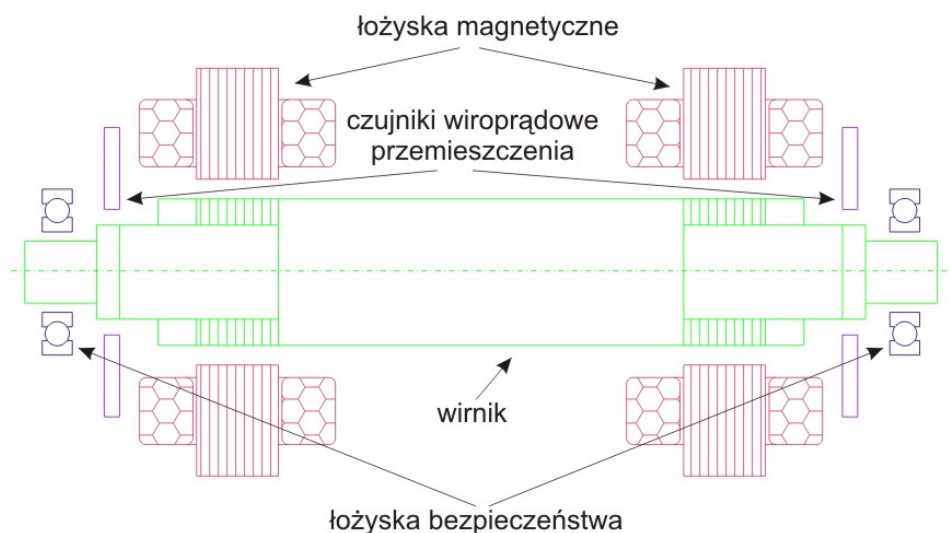
- duży koszt aplikacji (w porównaniu do tradycyjnych metod łożyskowania),
- układ strukturalnie niestabilny w stanie otwartym,
- wymagany układ aktywnego sterowania co najmniej w jednej osi (często wymagane jest stosowanie wielokanałowych układów regulacji),
- konieczność stosowania układów pomiarowych mierzących położenie wirnika w szczelinie powietrznej (nie dotyczy łożysk samopomiarowych z obserwatorem stanu w torze sprzężenia zwrotnego),
- wirnik bądź powierzchnie pod łożyska muszą być wykonane z metalu przewodzącego pole magnetyczne (wirnik pełni rolę zwory zamykającej obwody magnetyczne).

Zjawisko lewitacji magnetycznej znane jest od dawna. Obiekt sterowania można uznać za wystarczająco znany lecz trudny do regulacji, ponieważ jest strukturalnie niestabilny i nieminimalnofazowy. Oznacza to, że aby zapewnić stabilną pracę łożysko magnetyczne musi być wyposażone w kompletny układ sterowania składający się z członów pomiarowych, toru sprzężenia zwrotnego, sterownika i członów wykonawczych. Wyróżnia się łożyska magnetyczne zbudowane wyłącznie z cewek elektromagnetycznych, z połączenia cewek elektromagnetycznych z magnesami trwałymi lub samych magnesów trwałych. Aktywne łożyska magnetyczne dzielą się na łożyska heteropolarne i homopolarne. Budowę łożysk magnetycznych z magnesów trwałych ogranicza prawo S. Earnshaw'a (1842) [16]. Na rys. 1.1 przedstawiono najprostszy schemat układu zawieszenia magnetycznego. Czujnik mierzy przemieszczenie wirnika w szczelinie magnetycznej. Nominalna wartość szczeliny powietrznej  $x_0$  (ang. *clearence* or *air gap*) oznacza odległość wirnika od nabiegunnika cewki w punkcie pracy. Jak się później okaże szerokość szczeliny powietrznej jest jednym z najważniejszych parametrów konstrukcyjnych łożyska magnetycznego. Z punktu widzenia uzyskania maksymalnej siły nośnej i dobrych właściwości dynamicznych łożyska, szerokość szczeliny powietrznej powinna być jak najmniejsza. Jednak istnieją konstrukcyjne uwarunkowania ograniczające minimalną wartość szerokości szczeliny powietrznej łożyska magnetycznego. Punkt pracy łożyska magnetycznego oznacza stan ustalony, w którym wirnik znajduje się w środku łożyska magnetycznego. Informacja z czujnika przemieszczenia trafia do regulatora, który w oparciu o realizowany algorytm sterowania generuje sygnał sterujący w celu minimalizacji uchybu regulacji. Wzmacniacz mocy przekształca sygnał sterujący regulatora na prąd sterujący, który generuje siłę elektromagnetyczną w cewce.



Rys. 1.1. Zasada działania łożyska magnetycznego

W maszynach, w których wirnik łożyskowany magnetycznie obraca się z dużymi prędkościami kątowymi, dochodzą dodatkowe trudności związane z zachowaniem stabilności i odpowiednim tłumieniem drgań wywołanych niewyważeniem wirnika. Niewyważenie wirnika w szybkoobrotowych maszynach generuje siły bezwładności, które działając na stator transmitują niepożądane drgania na strukturę całej maszyny. Aby tego uniknąć stosuje się pasywne lub aktywne metody tłumienia drgań. Jedną z metod aktywnego tłumienia drgań jest zastosowanie aktywnych łożysk magnetycznych połączonych z układem sterowania kompensującym niepożądane drgania wirnika [36, 74]. Z uwagi na bezkontaktowy sposób łożyskowania zawieszenie magnetyczne jest naturalnym izolatorem drgań wirnika utrudniającym przenoszenie się drgań z wirnika na obudowę i fundamenty maszyny. Jest to jedna z najważniejszych zalet łożyskowania magnetycznego. Na rys. 1.2 przedstawiono schemat łożyskowania magnetycznego wirnika za pomocą dwóch aktywnych promieniowych heteropolarnych łożysk magnetycznych. Dodatkowe (toczne) łożyska bezpieczeństwa dzięki zmniejszeniu szczeliny powietrznej zabezpieczają cewki elektromagnetyczne łożysk magnetycznych przed zniszczeniem w przypadku awarii zasilania lub utraty stabilności zawieszenia magnetycznego. Na rys. 1.2 nie przedstawiono pasywnego magnetycznego łożyska osiowego, które nie jest przedmiotem badań niniejszej pracy.



Rys. 1.2. Wirnik łożyskowany magnetycznie

Bezkontaktowe łożyskowanie magnetyczne pozwala na znaczne zwiększenie maksymalnej prędkości obrotowej wirnika. Dlatego obecnie jednym z ważniejszych zastosowań aktywnego łożyskowania magnetycznego są dyski magazynujące energię kinetyczną, tzw. FES (ang. *Flywheel Energy Storage*) [58, 80] osiągające prędkości obrotowe od 20 000 do 100 000 [obr/min] i gromadzące energię o gęstości do 130 [W·h/kg], stosowane np. w satelitach. Opracowywane są łożyska energooszczędne (ang. *Energy Saving Magnetic Bearings*) [1, 32, 41, 44, 86], w których rezygnuje się z prądu punktu pracy, a tym samym ogranicza się ujemną sztywność łożyska, co prowadzi do zmniejszenia prądu sterującego potrzebnego na pokonanie sztywności łożyska. Budowane są łożyska z dodatnią sztywnością oparte na zastosowaniu elementów pasywnych oraz łożyska samopomiarowe (ang. *Self-sensing/Sensorless Active Magnetic Bearings*) [53, 56, 64, 65], w których cewki elektromagnetyczne stanowią element wykonawczy i pomiarowy. Optymalizacja zużycia energii w łożysku magnetycznym została opisana w załączniku E.

Jednym z głównych zadań przy projektowaniu łożysk magnetycznych jest wybór metod sterowania ruchem wirnika w łożyskach magnetycznych. W wielu aplikacjach stosowano klasyczne metody sterowania np. częstotliwościowe (regulator PID – regulator proporcjonalno-całkująco-różniczkujący) lub czasowe (regulator LQG ang. *Linear Quadratic Gaussian*). Te metody sterowania dają doskonałe rezultaty w przypadku maszyn liniowych o dokładnie zdefiniowanych parametrach. Niestety w przypadku zawieszenia magnetycznego wirników pojawia się szereg dodatkowych czynników, które zaburzają determinizm parametrów. Do takich czynników można zaliczyć: efekty giroskopowe związane ze zmianą prędkości obrotowej wirnika (w przypadku FES), zmiana sił niewyważenia wywołana zmianą ruchu obrotowego, wpływ temperatury na parametry łożysk magnetycznych, zjawiska związane z nasyceniem, pętlą histerezy i innymi ograniczeniami występującymi w łożyskach magnetycznych. Dlatego pojawiła się potrzeba zastosowania takiej metody sterowania, która by uwzględniała wszelkie zmiany zachodzące w modelu obiektu sterowanego.

W pracy zastosowano metodę sterowania odpornego, gdzie obiekt został rozbudowany w taki sposób, aby można był uwzględnić zmiany parametrów obiektu, nieliniowości obiektu, zakłócenia i ograniczenia sygnałów występujących w pętli sprzężenia zwrotnego. W metodzie sterowania odpornego (ang. *Robust Control*) do uzyskania odpowiedniego regulatora wykorzystano metody optymalizacji polegające na minimalizacji normy  $H_\infty$  i  $H_2$ . Wyznaczony regulator odporny jest regulatorem optymalnym (ang. *Robust Optimal Controller*). Sterowanie odporne  $H_\infty$  i  $H_2$  zostało zaimplementowane do stabilizacji ruchu wirnika łożyskowanego w

dwóch promieniowych i jednym osiowym łożysku magnetycznym. Sterowanie odporne pozwala na uwzględnienie zmiennych w czasie parametrów zawieszenia magnetycznego. Takie obiekty nazywane są obiektami o niestacjonarnych parametrach (LPV ang. *Linear Parameter Varying*). Dzięki możliwości włączania w modelowany układ sterowania funkcji wagowych ograniczających wybrane sygnały można kształtować właściwości układu zamkniętego w szerokim paśmie częstotliwości. Sterowanie odporne pozwala także na uwzględnienie nieliniowości obiektu i niezamodelowanej dynamiki (ang. *Unmodeled Dynamics*). Dzięki zastosowaniu odpornej teorii sterowania możliwe jest wyznaczenie regulatora odpornego na zmiany właściwości obiektu wybiegające poza opisane modelem nominalnym. Największą trudnością podczas projektowania regulatora optymalnego dla układu łożyskowania magnetycznego wirnika jest zapewnienie stabilnego ruchu wirnika przy dużych prędkościach obrotowych dla wszystkich postaci drgań. W pracy przyjęto wirnik sztywny, dlatego sterowanie ogranicza się do dwóch pierwszych postaci drgań wirnika sztywnego tj. translacyjnej i obrotowej. Wszystkie wyżej wymienione cechy zaawansowanej metody sterowania odpornego pozwalają na efektywne rozwiązanie problemów związanych z lewitacją szybkoobrotowych maszyn wirnikowych.

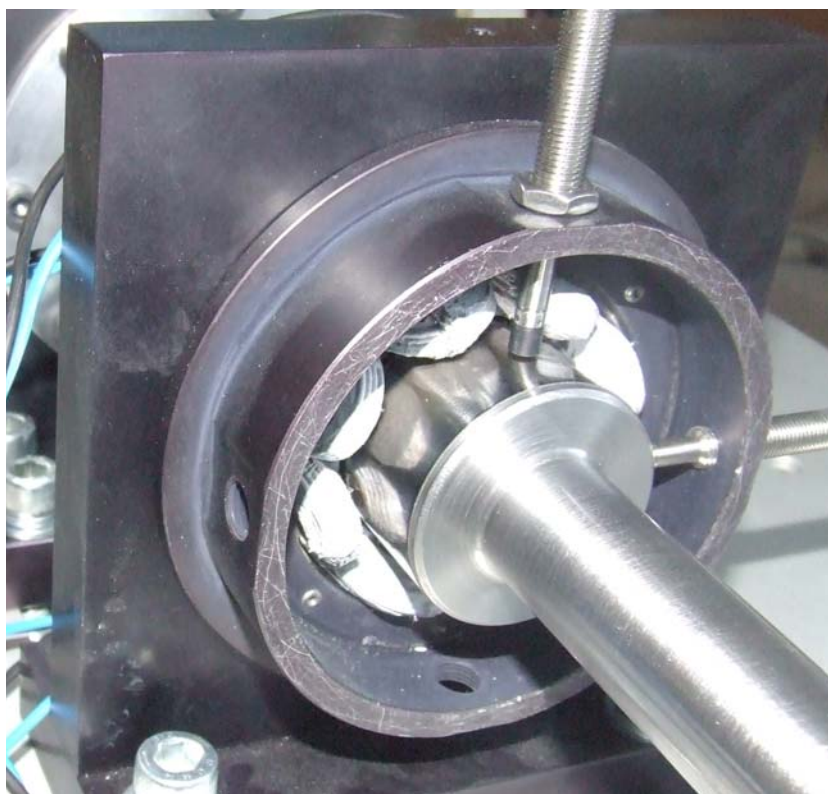
## Rozdział 2. Klasyczne metody sterowania zawieszeniem magnetycznym

Modelowanie jest pierwszym etapem projektowania układu sterowania. Na potrzeby układu sterowania model obiektu powinien być maksymalnie prosty, a jednocześnie wystarczający, aby uzyskać w procesie projektowania regulator zapewniający stabilność i pożądaną jakość układu regulacji. Jak zwykle przy opracowaniu modelu obiektu na potrzeby sterowania należy zrozumieć fizykę zjawisk zachodzących w modelowanym obiekcie. Wyznaczenie modelu łożyska magnetycznego wymaga zrozumienia zjawisk elektromagnetycznych i mechanicznych niezbędnych do opisanego wirnika łożyskowanego magnetycznie jako obiektu sterowania. Wyznaczone modele symulacyjne zostaną zweryfikowane poprzez badania eksperymentalne.

### 2.1. Konstrukcja i opis heteropolarnego promieniowego łożyska magnetycznego

Wirnik zazwyczaj łożyskowany jest z wykorzystaniem dwóch łożysk promieniowych i jednego łożyska osiowego. Z punktu widzenia modelowania zarówno wirnika sztywnego jak i giętkiego oddziaływanie łożysk promieniowych sprzęga się ze sobą, podczas gdy łożysko osiowe minimalnie wpływa na drgania poprzeczne wału. Dlatego poniżej będzie rozpatrywane jedynie sterowanie łożyskami promieniowymi.

Widok łożyska heteropolarnego promieniowego wykorzystanego do badań laboratoryjnych przedstawia rys. 2.1.



Rys. 2.1. Łożysko heteropolarne promieniowe

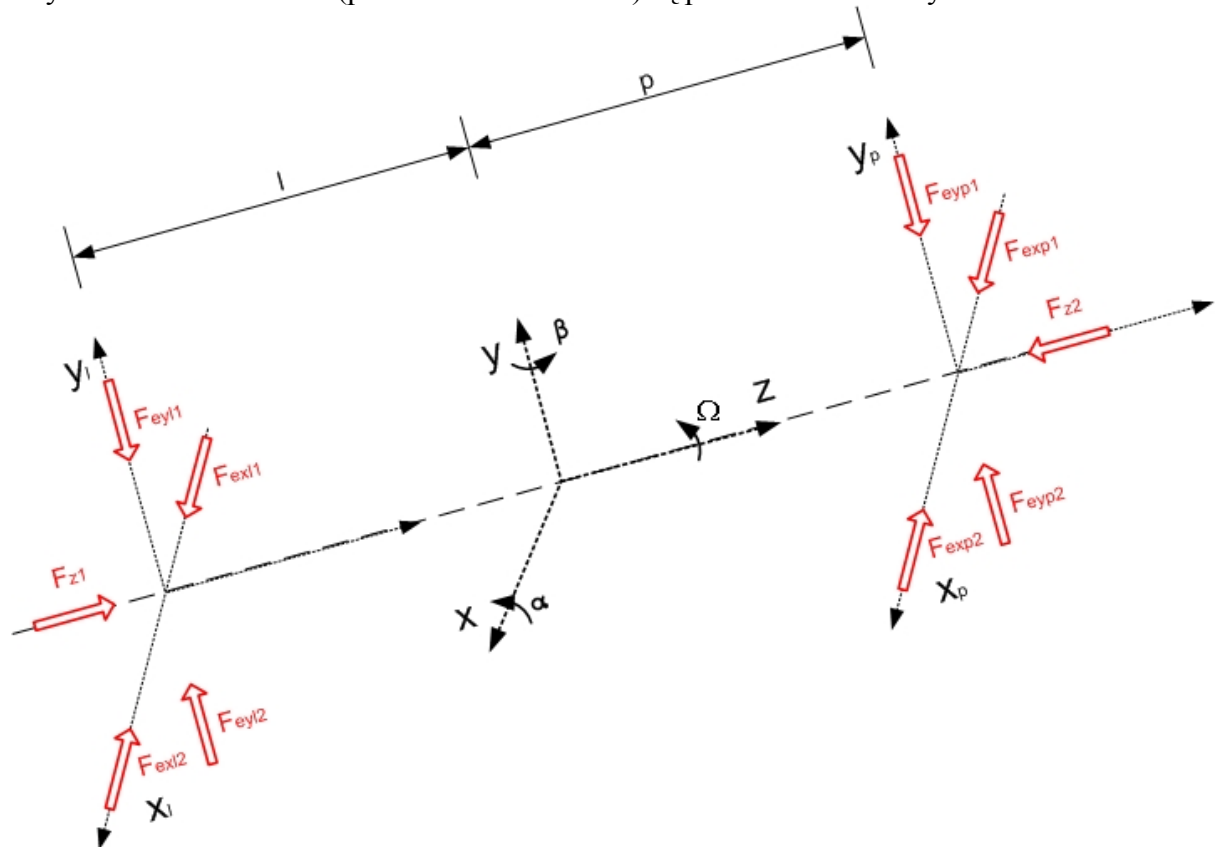
Na rys. 2.1 widać 8 elektromagnesów otaczających wał wirnika. Dwa sąsiednie elektromagnesy generują obwód magnetyczny zamykany przez zworę, którą jest odpowiedni fragment wirnika. Ponieważ w czasie ruchu obrotowego ten sam fragment wirnika przechodzi przemienne pod biegunem północnym i południowym elektromagnesu, to takie łożysko nazywane jest łożyskiem heteropolarnym. Elektromagnesy jednego obwodu magnetycznego są zasilane z jednego wzmacniacza. Oddziaływanie tego obwodu magnetycznego można zredukować do jednej siły

oddziaływującej (na kierunku osi symetrii dwóch cewek) na wirnik. W sumie w jednej płaszczyźnie łożyskowania otrzymuje się 4 siły przyciągające do siebie wirnik. Siły te tworzą przeciwległe pary, a każda z tych par steruje ruchem wirnika wzdłuż jednej współrzędnej kartezjańskiego układu prostokątnego.

Na podstawie powyższego należy stwierdzić, że:

- wyżej opisane heteropolarne łożysko promieniowe wymaga 4 wzmacniaczy,
- łożysko promieniowe można wykorzystać do sterowania ruchem wirnika w dwóch kierunkach wzajemnie prostopadłych, które zostaną nazwane osiami sterowania.

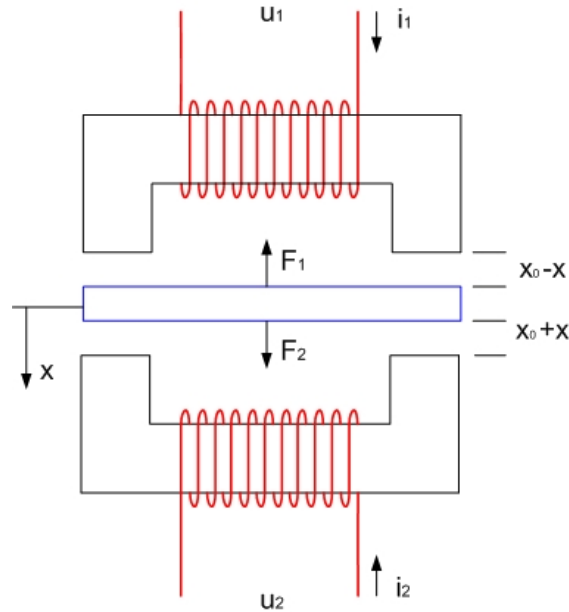
Wszystkie osie sterowania (promieniowe i osiowe) są przedstawione na rys. 2.2.



Rys. 2.2. Rozkład osi sterowania i sił działających na wirnik generowanych przez układ łożyskowania magnetycznego (indeksy  $\{1\}$ ,  $\{p\}$  oznaczają odpowiednio płaszczyznę łożyskowania w lewym i prawym łożysku, indeks  $\{e\}$  oznacza siłę elektromagnetyczną)

## 2.2. Model nominalny obiektu

W większości dotychczas znanych z literatury modeli maszyny wirnikowej łożyskowanej magnetycznie przyjmuje się stałą prędkość obrotową wirnika oraz niezmiennie parametry zarówno modelu wirnika, jak i modelu łożysk magnetycznych. Taki model w niniejszej pracy będzie nazywany modelem nominalnym. Parametrami nominalnymi są parametry opisujące model wyznaczony w danym punkcie pracy, dlatego model nominalny wiernie odwzorowuje zachowanie obiektu tylko w otoczeniu punktu pracy. Każde wytrącenie stanu układu z punktu pracy prowadzi do otrzymania dodatkowych zjawisk dynamicznych nie opisanych przez model nominalny. W konsekwencji prowadzi to do pogorszenia jakości statycznej i dynamicznej regulacji, a nawet do niestabilności układu zamkniętego. Schemat cewek elektromagnetycznych dla jednej osi sterowania łożyska magnetycznego przedstawiono na rys. 2.3.



Rys. 2.3. Cewki elektromagnetyczne łożyska magnetycznego

W układzie aktywnego zawieszenia magnetycznego można wyróżnić część mechaniczną oraz część elektryczną. Różniczkowe równanie sił, dotyczące części mechanicznej, dla jednego stopnia swobody masy  $m$  w osi  $x$ , zgodnie z II zasadą Newtona, można zapisać w postaci:

$$m\ddot{x} = F_1 - F_2 + F_z \quad (2.1)$$

gdzie:

$m$  – masa wirnika zredukowana do płaszczyzny łożyskowania [kg],

$\ddot{x}$  – oznacza przyspieszenie masy [ $\text{m/s}^2$ ],

$F_z$  – zakłócająca siła zewnętrzna [N],

$F_{1,2}$  – siły przyciągania odpowiednio: (1), (2) –go elektromagnesu [N], których zależności są następujące [22]:

$$F_{1,(2)}(i, x) = \frac{K_l}{4} \left( \frac{i_0 \pm i}{x_0 \pm x} \right)^2, \quad (2.2)$$

gdzie:

$i_{1,2}$  – prąd sterujący odpowiednio w górnej i dolnej cewce elektromagnetycznej wyrażony następująco:  $i_1 = i_0 + i$ ,  $i_2 = i_0 - i$ ,

$u_{1,2}$  – napięcie odpowiednio w górnej i dolnej cewce elektromagnetycznej,

$i_0$  – prąd punktu pracy,

$i$  – prąd sterujący,

$x_0$  – szerokość szczeliny nominalnej łożyska,

$K_l$  – stała łożyska.

Linearyzując siłę  $F_1$  w punkcie pracy  $(i_1, x_0)$ , a siłę  $F_2$  w punkcie pracy  $(i_2, x_0)$  równanie (2.1), przy założeniach:  $i_1 \cong i_0$ ,  $i_2 \cong i_0$ , można zapisać w postaci:

$$\ddot{x} = \frac{2k_s}{m} x + \frac{k_i}{m} i_1 - \frac{k_i}{m} i_2 + \frac{F_z}{m}, \quad (2.3)$$

gdzie współczynniki sztywności przemieszczeniowej  $k_s$  [N/m] i sztywności prądowej  $k_i$  [N/A] wynoszą odpowiednio:

$$k_s = \frac{K_l i_0^2}{2 x_0^3} = L_o \frac{i_o^2}{x_o^2}, \quad k_i = \frac{K_l i_0}{2 x_0^2} = L_o \frac{i_o}{x_o}, \quad (2.4)$$

gdzie:

$L_o$  – wartość indukcyjności cewki w punkcie pracy.

W zależności od wielkości sterujących w pracy [22] opisano różne układy sterowania: napięciowy, prądowy i z pomiarem indukcji magnetycznej. Układ zawieszenia magnetycznego opisany równaniem (2.3) można nazwać układem sterowanym prądowo, gdyż zmienne sterujące są odpowiednio prądami w uzwojeniach obu cewek elektromagnesów:

$$\mathbf{u}^T = [i_1 \quad i_2]. \quad (2.5)$$

Metoda sterowania prądowego jest najbardziej prosta i będzie stosowana w całej pracy. Tego typu sterowanie jest połączone z pomiarem przemieszczenia wirnika  $x$  w szczelinie powietrznej łożyska. Układ cewek elektromagnetycznych wraz z układem wzmacniaczy mocy nazywa się siłownikiem łożyska magnetycznego. Sterowanie prądowe siłownikiem łożyska magnetycznego można traktować jako szczególny przypadek sterowania napięciowego, przy założeniu, że wartości prądów:  $i_1, i_2$  w uzwojeniach cewek elektromagnesów będą zmieniać się odpowiednio szybko, nadążając za wartościami żądanymi.

W sterowaniu prądowym oprócz pętli sterowania prądem sterującym stosuje się pętlę sterowania prądem punktu pracy. Często przyjmuje się stałą wartość prądu punktu pracy  $i_0$  wynoszącą około 50% maksymalnej wartości prądu sterującego  $i$ . Warto wspomnieć, że wartość prądu punktu pracy odpowiada za sztywność łożyska.

Celem uproszczenia modelu układu zawieszenia magnetycznego wzmacniacz mocy będzie traktowany jako regulator proporcjonalny o transmitancji:

$$G_p(s) = \frac{u(s)}{i(s)} = k_c, \quad (2.6)$$

gdzie:

$u$  – napięcie sterujące wzmacniaczem,  
 $i$  – prąd wyjściowy wzmacniacza,  
 $k_c$  – współczynnik wzmocnienia wzmacniacza.

Tym samym korzystając z równania (2.3) siłownik łożyska magnetycznego (pomijając dynamikę cewek elektromagnetycznych) można opisać następującą transmitancją:

$$G(s) = \frac{x(s)}{i(s)} = k_c \frac{2k_i}{ms^2 - 2k_s}. \quad (2.7)$$

Z zapisu funkcji przejścia i wartości biegunów wynika, iż siłownik jako obiekt sterowany prądowo jest strukturalnie niestabilny, gdyż zawsze jeden z biegunów układu otwartego leży w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej  $s$ .

W celu wyznaczenia siły magnetycznej łożyska wprowadzono stałą konstrukcyjną łożyska  $K_l$ , która wynosi:

$$K_l = \frac{\mu_0 A_p N_p^2}{4} \cos(\alpha_p), \quad (2.8)$$

gdzie:

$\mu_0$  – przenikalność magnetyczna próżni równa  $4\pi 10^{-7}$  [H/m],  
 $A_p$  – pole przekroju nabiegunnika [ $m^2$ ],

$N_p$  – ilość zwojów cewki,

$\alpha_p$  – kąt między biegunami (dla docelowego łożyska  $22.5^\circ$ ) [rad].

Uwzględniając zależność na stałą  $K_l$  łożyska we wzorze (2.4) wartość maksymalnej siły elektromagnetycznej łożyska heteropolarnego wykorzystanego do badań symulacyjnych i eksperymentalnych obliczona została następująco:

$$F_{\max} = \frac{\mu_0 N_p^2 A_p i_{\max}^2 \cos(\alpha_p)}{4x_0^2}. \quad (2.9)$$

### 2.3. Model wirnika sztywnego w łożyskach magnetycznych

Obiektem sterowania jest symetryczny wirnik sztywny poprzecznie zawieszony w dwóch aktywnych łożyskach magnetycznych. Ruch wirnika składający się z ruchu translacyjnego i obrotowego opisują następujące równania [22]:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{exl} + F_{exp} + G_x + F_{Rx}, \\ m\ddot{y} &= F_{eyl} + F_{eyp} + G_y + F_{Ry}, \\ I_x \ddot{\alpha} + \dot{\beta}\Omega(I_y - I_z) &= M_{ex} + M_{nx}, \\ I_y \ddot{\beta} + \dot{\alpha}\Omega(I_z - I_x) &= M_{ey} + M_{ny}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

gdzie:

$m$  – masa wirnika,

$x, y$  – przemieszczenie środka wirnika w kierunku osi  $x$  i  $y$ ,

$\alpha, \beta$  – obrót wirnika wokół osi  $x$  i  $y$ ,

$I_x, I_y, I_z$  – promieniowe i osiowy moment bezwładności wirnika,

$\Omega$  – prędkość kątowna wirnika,

$F_{exl}, F_{exp}, F_{eyl}, F_{eyp}$  – wypadkowa siła elektromagnetyczna generowana przez siłowniki łożysk magnetycznych w kierunku osi  $x$  i  $y$  w lewej  $\{l\}$  i prawej  $\{p\}$  płaszczyźnie łożyskowania,

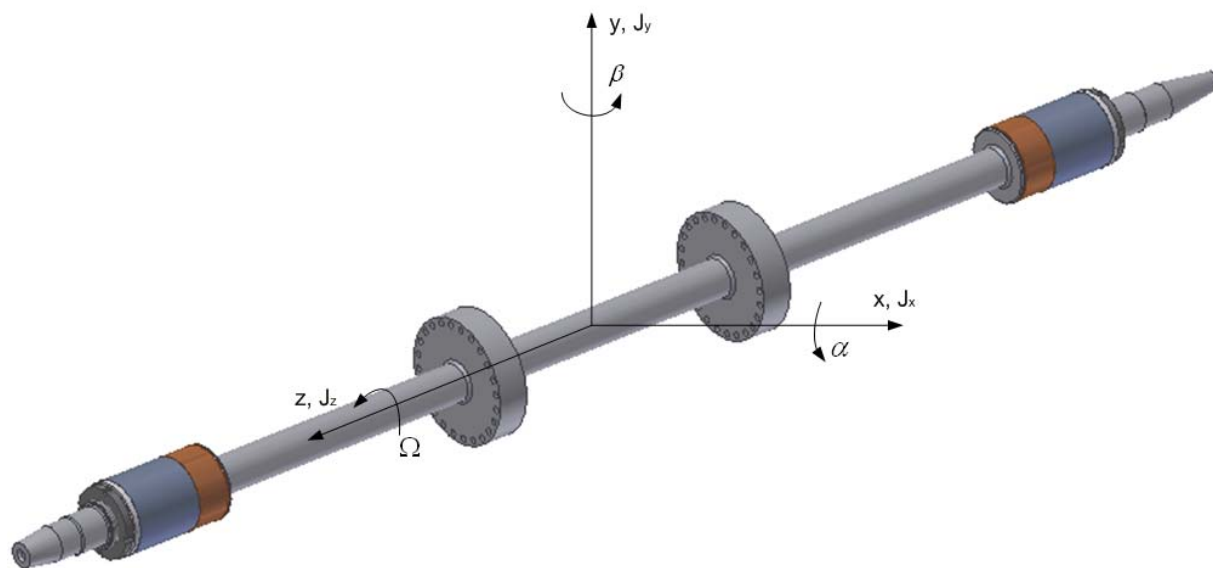
$M_{ex}, M_{ey}$  – moment sił elektromagnetycznych względem osi  $x$  i  $y$ ,

$M_{nx}, M_{ny}$  – momenty sił bezwładności od niewyważenia względem osi  $x$  i  $y$ ,

$G_x, G_y$  – składowe siły ciężkości wirnika w kierunku osi  $x$  i  $y$ ,

$F_{Rx}, F_{Ry}$  – siła odśrodkowa wirnika w kierunku osi  $x$  i  $y$ .

Układ osi bezwładności wirnika łożyskowanego magnetycznie przedstawiono na rys. 2.4.



Rys. 2.4. Model wirnika

Model ruchu wirnika można zapisać w uproszczonej postaci macierzowej następująco:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(t) + \mathbf{F}_n(t), \quad (2.11)$$

gdzie:

- $\mathbf{q}$  – uogólniona współrzędna ruchu wirnika,
- $\mathbf{M}$  – macierz mas,
- $\mathbf{C}$  – macierz tłumienia,
- $\mathbf{F}(t)$  – siły sterujące,
- $\mathbf{F}_n(t)$  – siły bezwładności od niewyważenia wirnika.

Model zawierający wszystkie komponenty obiektu posiada 8 zmiennych stanu i może być zapisany w przestrzeni stanu następująco:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{v} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}, \quad (2.12)$$

gdzie:

- $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$  – wektor stanu,
- $\mathbf{q} = [y \ z \ \alpha \ \beta]^T$  – wektor współrzędnych globalnych (modalnych),
- $\mathbf{u} = \mathbf{i}$  – wektor sterowań,
- $\mathbf{i} = [i_{yp} \ i_{yl} \ i_{xp} \ i_{xl}]^T$  – wektor prądów sterujących (wektor wejść),
- $\mathbf{y} = [y_p \ y_l \ x_p \ x_l]^T$  – wektor wyjść (patrz rys. 2.2),
- $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{w} \end{bmatrix}$  – wektor zakłóceń deterministycznych,
- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{V} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}$  – macierz stanu,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 4} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F} \end{bmatrix} - \text{macierz sterowań},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \text{macierz wyjść (pomiarowa)},$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} m\Omega^2 \varepsilon_m \cos(\Omega t) & -mg_z + m\Omega^2 \varepsilon_m \sin(\Omega t) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T - \text{wektor wymuszeń},$$

$\varepsilon_m$  – mimośrodowość wirnika,  
 $g_z$  – przyspieszenie ziemskie,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega(I_z - I_x) \\ 0 & 0 & \Omega(I_y - I_z) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -2k_s & 0 & 0 & -k_s(p-l) \\ 0 & -2k_s & k_s(p-l) & 0 \\ 0 & k_s(p-l) & -k_s(p^2+l^2) & 0 \\ -k_s(p-l) & 0 & 0 & -k_s(p^2+l^2) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} k_i & k_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_i & k_i \\ 0 & 0 & -k_i p & k_i l \\ k_i p & -k_i l & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ruch wirnika można opisać we współrzędnych lokalnych  $\mathbf{q}_b$  związanych z płaszczyznami łożyskowania, uwzględniając następujące zależności między współrzędnymi lokalnymi i globalnymi:  $y_p = y + \beta p, y_l = y - \beta l, x_p = x - \alpha p, x_l = x + \alpha l$ . Równania ruchu (2.10) można zapisać w postaci jednego równania macierzowego:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}\mathbf{T}_b^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}\mathbf{T}_b^{-1} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_b + \Omega I_z \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}\mathbf{T}_b^{-1} \\ -\mathbf{G}\mathbf{T}_b^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_b^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_b^T \end{bmatrix} \mathbf{F}, \quad (2.13)$$

gdzie:

$$\mathbf{T}_b = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 1 & b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{exl} & F_{exp} & F_{eyl} & F_{eyp} \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{q}_b = \begin{bmatrix} x_l & x_p & y_l & y_p \end{bmatrix}.$$

#### 2.4. Rozprzęgnięcie dynamiki wirnika sztywnego względem osi sterowania

W przypadku układów o wielu wejściach i wielu wyjściach pożądane jest rozprzęgnięcie dynamiki układu otwartego na niezależne podukłady o jednym wejściu i jednym wyjściu. Sterowanie wszystkimi wyjściami na podstawie wszystkich sygnałów pomiarowych nazywa się sterowaniem globalnym. W tym przypadku dynamikę regulatora opisuje macierz transmitancji,

w której występują transmitancje skrośne pomiędzy odpowiednimi wyjściami i wejściami. Znacznie lepszym rozwiązaniem jest sterowanie lokalne, w którym pojedyncze sygnały sterujące kształtowane są na podstawie odpowiadających im pojedynczych sygnałów pomiarowych. Sterowanie lokalne jest konstruowane dla rozprzęgniętej dynamiki obiektu. Regulatory dla układów lokalnych są niższego rzędu niż regulator globalny. Tym samym w przypadku regulatorów cyfrowych ograniczona jest liczba operacji matematycznych w czasie jednego okresu próbkowania, co nie jest bez znaczenia w przypadku tak szybkich procesów jakimi są drgania maszyn wirnikowych.

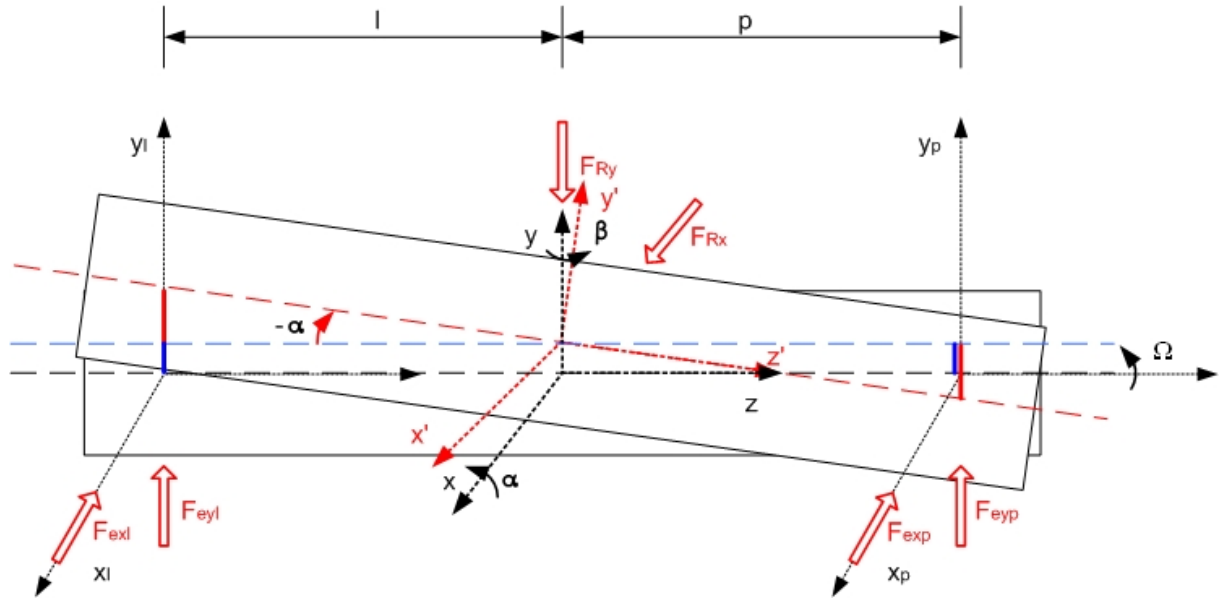
W poprzednim rozdziale podjęto próbę rozprzężenia dynamiki wirnika względem osi sterowania. Niestety zjawiska giroskopowe, anizotropia wału czy łożysk magnetycznych, a także inne zjawiska fizyczne powodują, że nie da się całkowicie rozprząć układu sterowania względem tych osi. Mimo wszystko takie częściowe rozprzężenie może okazać się wystarczające w wielu praktycznych przypadkach. Dlatego też w niniejszym rozdziale przedstawiona zostanie metoda możliwego rozprzężenia dynamiki wirnika sztywnego względem poszczególnych osi sterowania.

Dla potrzeb sterowania lokalnego wymagane jest maksymalne rozprzężenie obiektu sterowania zarówno po stronie współrzędnych pomiarowych jak i po stronie sygnałów sterujących dla modelu niesymetrycznego wirnika względem środka masy. Następnie zaprojektowane będą regulatory lokalne, z których każdy będzie sterował jedną osią drgań wirnika w każdym z łożysk. Jest to korzystne, ponieważ stabilne podukłady lokalne nie będą destabilizowały układu globalnego. W przypadku całkowitego rozprzężenia modelu wirnika łożyskowanego magnetycznie, zarówno po stronie sygnałów sterujących jak i współrzędnych pomiarowych możliwe jest zastosowanie niezależnych pętli sterowania dla każdej osi indywidualnie. Takie rozwiązanie daje szereg korzyści z punktu sterowania drganiami wirnika:

- możliwość analitycznego badania dynamiki wirnika względem płaszczyzn łożyskowych oraz układu sterowania łożyskami magnetycznymi,
- niezależne sterowanie każdą z osi wirnika,
- lokalne podukłady sterowania ze względu na niski rząd modelu obiektu wymagają regulatora niskiego rzędu, wyklucza to konieczność redukcji jego rzędu,
- uzyskane stabilne, niezależne podukłady sterowania dla każdej osi z łożysk nie będą destabilizowały układu globalnego. Ten warunek jest spełniony, kiedy ma miejsce kolokacja elementów pomiarowych i elementów wykonawczych (tzn. pokrywanie się płaszczyzn pomiarowych i płaszczyzn sterowania).

Jak niżej pokazano pełne rozprzężenie dynamiki wirnika na cztery niezależne osie sterowania jest w pełni możliwe jedynie w szczególnym przypadku. Można natomiast szukać takiego rozwiązania, w którym sprzężenia są stosunkowo słabe.

Schemat ruchu wirnika wokół osi  $x$  wraz z oznaczeniem osi i sił elektromagnetycznych przedstawiono na rys. 2.5.



Rys. 2.5. Schemat wirnika dla potrzeb rozprężenia

W równaniach (2.10) przyjęto współrzędne globalne, które można przedstawić w postaci wektora  $\mathbf{q} = [x \ \beta \ y \ -\alpha]^T$ . Ruch wirnika może być również opisany przez współrzędne lokalne w płaszczyznach łożysk, które mogą być zapisane w postaci wektora  $\mathbf{q}_b = [x_l \ x_p \ y_l \ y_p]^T$ . Pomiedzy współrzędnymi globalnymi a lokalnymi ma miejsce następująca zależność:

$$\mathbf{q}_b = \mathbf{T}_1 \mathbf{q}, \quad (2.14)$$

gdzie:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_b = \begin{bmatrix} 1 & -l \\ 1 & p \end{bmatrix}.$$

Ruch wirnika względem współrzędnych lokalnych można zapisać w następującej postaci:

$$\ddot{\mathbf{q}}_b + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{T}_b \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{T}_b^{-1} \\ -\mathbf{T}_b \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{T}_b^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_b \mathbf{M}^{-1} \mathbf{T}_b^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_b \mathbf{M} \mathbf{T}_b^T \end{bmatrix} \mathbf{F}, \quad (2.15)$$

gdzie:

$$\mathbf{T}_b \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{T}_b^{-1} = \frac{\Omega I_z}{I_x (l+p)} \begin{bmatrix} l & -l \\ -p & p \end{bmatrix}, \quad (2.16a)$$

$$\mathbf{T}_b \mathbf{M}^{-1} \mathbf{T}_b^T = \frac{1}{m I_x} \begin{bmatrix} l^2 m + I_x & I_x - l p m \\ I_x - l p m & p^2 m + I_x \end{bmatrix}. \quad (2.16b)$$

Na podstawie równań (2.15) oraz (2.16) można zauważyć, że dla nieobrcającego się wirnika równania ruchu są całkowicie rozprężone w przypadku, gdy wymiary geometryczne wirnika spełniają warunek:

$$I_x = l p m. \quad (2.17)$$

Jeżeli zależność (2.17) jest wystarczającym przybliżeniem, to równania ruchu można nadal traktować jako rozprężone. W tym przypadku można zastosować metody sterowania

wyznaczone dla pojedynczej osi łożyska magnetycznego. Wpływ efektu giroskopowego na dynamikę obiektu będzie można sprawdzić na etapie badań symulacyjnych po zamknięciu pętli sterowania.

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_l &= \frac{1}{m_{rl}} F_{xl} = \frac{1}{m_{rl}} \left[ (k_{sxl1} + k_{sxl2}) x_l + k_{ixl1} i_{xl1} + k_{ixl2} i_{xl2} \right], \\
 \ddot{x}_p &= \frac{1}{m_{rp}} F_{xp} = \frac{1}{m_{rp}} \left[ (k_{sxp1} + k_{sxp2}) x_p + k_{ixp1} i_{xp1} + k_{ixp2} i_{xp2} \right], \\
 \ddot{y}_l &= \frac{1}{m_{rl}} F_{yl} = \frac{1}{m_{rl}} \left[ (k_{syl1} + k_{syl2}) y_l + k_{iyl1} i_{yl1} + k_{iyl2} i_{yl2} \right], \\
 \ddot{y}_p &= \frac{1}{m_{rp}} F_{yp} = \frac{1}{m_{rp}} \left[ (k_{sypl1} + k_{sypl2}) y_p + k_{iyp1} i_{yp1} + k_{iyp2} i_{yp2} \right],
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

gdzie:

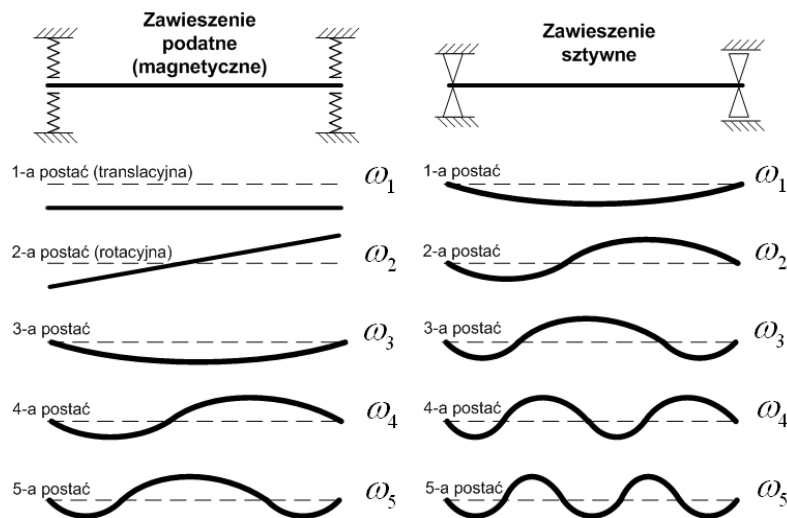
$$\frac{1}{m_{rl}} = (l^2 m + I_x) / m I_x, \quad \frac{1}{m_{rp}} = (p^2 m + I_x) / m I_x.$$

Analizując wzór (2.16) można stwierdzić, że jest to maksymalnie daleko posunięte rozprężenie obiektu w postaci wirnika sztywnego zawieszonoego w dwóch promieniowych łożyskach magnetycznych. Sprężenie wywołane efektem giroskopowym (2.16a) będzie się nasilało wraz z prędkością obrotową wirnika. Sprężenie wynikające z nie zachowania warunku konstrukcyjnego (2.17) będzie miało wpływ, jeśli  $I_x$  będzie się w sposób istotny różniło od  $lpm$ . Prezentowane tu analizy rozprężania mają charakter jakościowy, analiza ilościowa zostanie przedstawiona w rozdziale 9.4.

## 2.5. Uwagi dotyczące sterowania drganiami wirników

Węzły łożyskowe wirników w maszynach wirnikowych można podzielić na trzy główne grupy: sztywne, sztywno-podatne i podatne. Dobrym przykładem zawieszenia podatnego jest zawieszenie magnetyczne. Zalety zawieszenia podatnego nad zawieszeniem sztywnym szczególnie widać podczas analizy postaci drgań wirnika.

Na rys. 2.6 przedstawiono wpływ zawieszenia wirnika na jego postacie drgań poprzecznych dla wirnika zawieszonoego sztywnie i podatnie.



Rys. 2.6. Wpływ zawieszenia wirnika na postacie jego drgań poprzecznych

Z rys. 2.6 wynika, że wirnik zawieszony podatnie posiada inne postacie drgań niż wirnik sztywno łożyskowany. Pierwsza postać drgań dla wirnika zawieszzonego sztywno odpowiada dopiero trzeciej postaci drgań dla zawieszenia podatnego. W efekcie wirnik zawieszony podatnie może wirować z dużo większą prędkością niż wirnik sztywno łożyskowany.

W przypadku sterowania drganiami wirnika giętkiego najważniejsze jest zapewnienie stabilności dwóch pierwszych postaci: translacyjnej i rotacyjnej, opisujących zachowanie się wirnika sztywnego. Sterowanie tymi postaciami determinuje uzyskanie stabilnego zawieszenia nieobrcającego się wirnika. Z tego względu w dalszej części pracy skoncentrowano uwagę na odpornym sterowaniu tymi dwoma postaciami drgań.

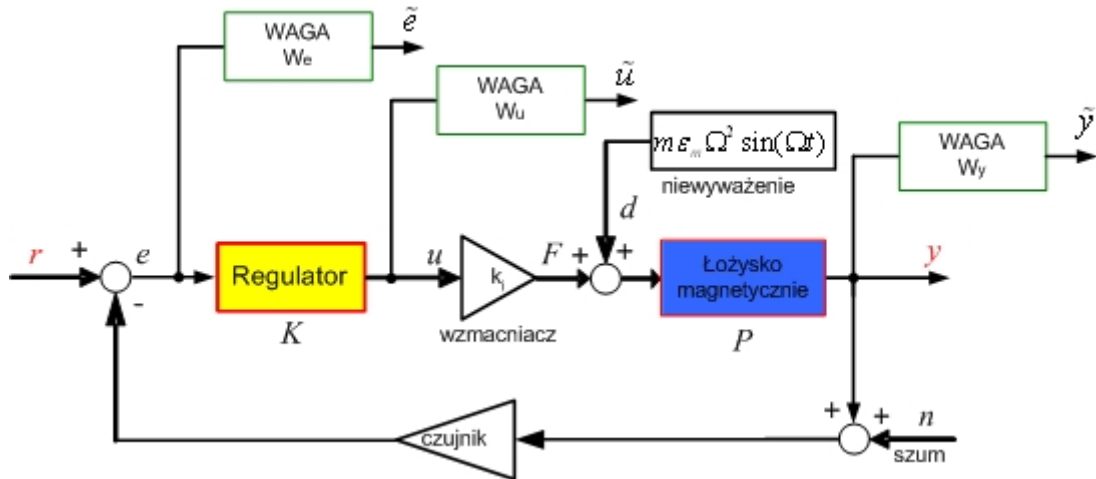
Niewyważenie powoduje drgania i wyężenie materiału. Duże amplitudy drgań są nie do przyjęcia przy małych szczelinach powietrznych łożysk magnetycznych. Dodatkowo narastająca siła niewyważenia wraz z częstotliwością obrotową wirnika powoduje efekt nasycenia cewek elektromagnetycznych prowadząc w efekcie do niestabilności. Dlatego niezbędne są różne metody kompensacji drgań. Możemy je podzielić na trzy główne grupy: pasywne, pasywno-aktywne i aktywne. Zastosowanie metod aktywnych tłumienia drgań daje dużo lepsze rezultaty i możliwości niż stosowanie metod pasywnych.

Wśród metod kompensacji drgań za pomocą układów sterowania stosuje się regulatory z małym wzmocnieniem, tak aby nie powodować nasycenia wzmacniaczy przy wysokich częstotliwościach. Jednak układy te nie radzą sobie z kompensacją drgań przy niskich częstotliwościach. Innym podejściem jest budowanie specjalnych obserwatorów niewyważenia montowanych w torze regulatora położenia wału. Takie podejście zostało zastosowane w pracach [54, 55]. Bardziej popularnymi metodami kompensacji drgań są metody sterowania „do przodu” (ang. *Feedforward*). Także często stosowane są metody adaptacyjne. Wymagają one jednak rozbudowanego układu pomiaru drgań. Innowacyjną metodą kompensacji drgań jest zastosowanie macierzy korekcyjnej w pętli sprzężenia zwrotnego. Algorytm estymacji współczynników macierzy działa w czasie rzeczywistym tzn. on-line. Metoda ta nie sprawdza się przy dużych częstotliwościach wirowania wirnika i gwałtownych zmianach rozkładu drgań powodowanych przez szybkie przyspieszanie i hamowanie. Dokładny opis metody i eksperymentu znajduje się w pracach [8, 45].

Jednym ze sposobów łożyskowania podatnego jest zawieszenie magnetyczne. Aktywne sterowanie drganiami oraz kompensowanie wymuszeń wirnika łożyskowanego magnetycznie możliwe jest poprzez zastosowanie odpornego układu sterowania. W sterowaniu odpornym wirującym wirnikiem łożyskowanym magnetycznie efekty niewyważenia można traktować jako wymuszenia zewnętrzne działające na obiekt. Wpływ tych wymuszeń można uwzględnić za pomocą (opisanych w rozdziale 7) funkcji wagowych i modeli niepewności obiektu. Dlatego zaprojektowany regulator będzie odporny na zmiany parametrów układu wirnik-łożyska magnetyczne.

Zgodnie z zasadami projektowania układu sterowania odpornego, niewyważenie zostało rozpatrzone jako siła zewnętrzna działająca na wirnik z częstotliwością równą częstotliwości obrotowej wirnika i stałym kierunkiem. Wpływ siły bezwładności od niewyważenia jest kompensowany przez układ sterowania generujący przeciw-siłę. Niewyważenie było uwzględnione w modelu niepewności włączonym do obiektu, dla którego projektowany jest regulator odporny. Zastosowanie dodatkowej funkcji wagowej nałożonej na sygnał sterujący pozwoliło zapobiec negatywnemu efektowi nasycenia cewek elektromagnetycznych powstającemu wraz ze wzrostem prędkości obrotowej wirnika i amplitudy drgań. Szerokość pasma przenoszenia cewek elektromagnetycznych jest uwzględniona podczas projektowania regulatora.

Na rys. 2.7 przedstawiono model układu sterowania zawieszeniem wirnika z uwzględnieniem siły niewyważenia.



Rys. 2.7. Schemat zamkniętego układu regulacji

Kolejne funkcje wagowe z rys. 2.7 zostały opisane w rozdziale 7.

Układ z rys. 2.7 z uwzględnieniem funkcji charakteryzujących jego właściwości można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} y &= T_o(r - n) + S_o P d \\ u &= K S_o(r - n) - T_i d \\ e &= r - y = S_o r + T_o n - S_o P d \end{aligned} \quad (2.19)$$

Właściwości układu otwartego określa funkcja opisana następująco:

$$L_i(s) = K(s) \cdot P(s); \quad L_o(s) = P(s) \cdot K(s), \quad (2.20)$$

gdzie:

$S_o$  – funkcja wrażliwości wyjścia,

$T_i, T_o$  – funkcje komplementarnej wrażliwości wejścia i wyjścia,

$y, u, e, n$  – sygnały odpowiednio: wyjściowy, sterujący, uchybu regulacji i szum pomiarowy,

$L_i(s)$  – transmitancja wejścia układu otwartego,

$L_o(s)$  – transmitancja wyjścia układu otwartego,

$K(s)$  – transmitancja regulatora,

$P(s)$  – transmitancja obiektu sterowania.

## 2.6. Sterowanie z regulatorem PID

Sterowanie z regulatorem PID jest klasyczną metodą regulacji stosowaną w szerokim zakresie aplikacji. Metoda ta nadaje się do stabilizowania masy wirnika zawieszony w polu magnetycznym łożyska. Łożysko magnetyczne sterowane prądowo z regulatorem PD jest dobrym przybliżeniem podatnych łożysk mechanicznych. Jest to najlepsza analogia między zawieszeniem mechanicznym masy na sprężynie z tłumikiem, a zawieszeniem magnetycznym. Układ regulacji z regulatorem PID/PD zapewnia stabilność układowi zawieszenia magnetycznego w niskoobrotowych maszynach wirnikowych. Z uwagi na ograniczone zdolności tłumienia oraz ograniczone pasmo przenoszenia, regulator PID/PD nie zapewnia odpowiednich właściwości regulacji w układach szybko obrotowych wirników łożyskowanych magnetycznie.

Do sterowania położeniem wirnika w szczelinie powietrznej można zastosować regulator PID lub PD włączony w tor sprzężenia zwrotnego. Zaletą tego rozwiązania jest niski koszt oraz szybki i prosty proces modelowania. W celu stabilizacji wirnika łożyskowanego w łożysku

heteropolarnym zaprojektowano regulatory PID i PD. Transmitancja idealnego regulatora PID jest następująca:

$$PID(s) = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_I}{s} = \frac{i(s)}{e(s)}, \quad (2.21)$$

gdzie:

- $k_p$  – wzmacnienie części proporcjonalnej,
- $k_I$  – wzmacnienie części całkującej,
- $k_d$  – wzmacnienie części różniczkującej,
- $i(s)$  – transmitancja prądowego sygnału sterującego regulatora,
- $e(s)$  – transmitancja sygnału uchybu regulacji.

Uchyb sterowania  $e(s)$  jest równy różnicy pomiędzy zadaniem przemieszczeniem  $x_z(s)$  i przemieszczeniem rzeczywistym  $x(s)$ :

$$e(s) = x_z(s) - x(s). \quad (2.22)$$

Jeżeli zadana wartość położenia wynosi zero:  $x_z(s)=0$  (przypadek najczęstszy w łożysku magnetycznym), to zadanie regulatora sprowadza się do takiego sterowania aktywnym zawieszaniem, aby zawieszona masa znajdowała się dokładnie w punkcie pracy. W tym przypadku uchyb regulacji jest następujący:

$$e(s) = -x(s). \quad (2.23)$$

Funkcja przejścia pomiędzy prądem sterującym a przemieszczeniem masy jednoosiowego aktywnego łożyska magnetycznego może być, po zlinearyzowaniu w punkcie pracy i założeniu istnienia stabilnego źródła prądowego, opisana następującą transmitancją:

$$x(s) = \frac{2k_i}{ms^2 - 2k_s} i(s), \quad (2.24)$$

gdzie:

- $m$  – masa wirnika sprowadzona do płaszczyzny łożyskowania,
- $k_i$  – sztywność prądowa,
- $k_s$  – sztywność przemieszczeniowa.

Po uwzględnieniu transmitancji regulatora PID transformata odpowiedzi układu zamkniętego przyjmie postać:

$$x(s) = \frac{\frac{1}{m} s}{s^3 + \frac{2k_i k_d}{m} s^2 + \frac{2k_i k_p - 2k_s}{m} s + \frac{2k_i k_I}{m}} F_z(s). \quad (2.25)$$

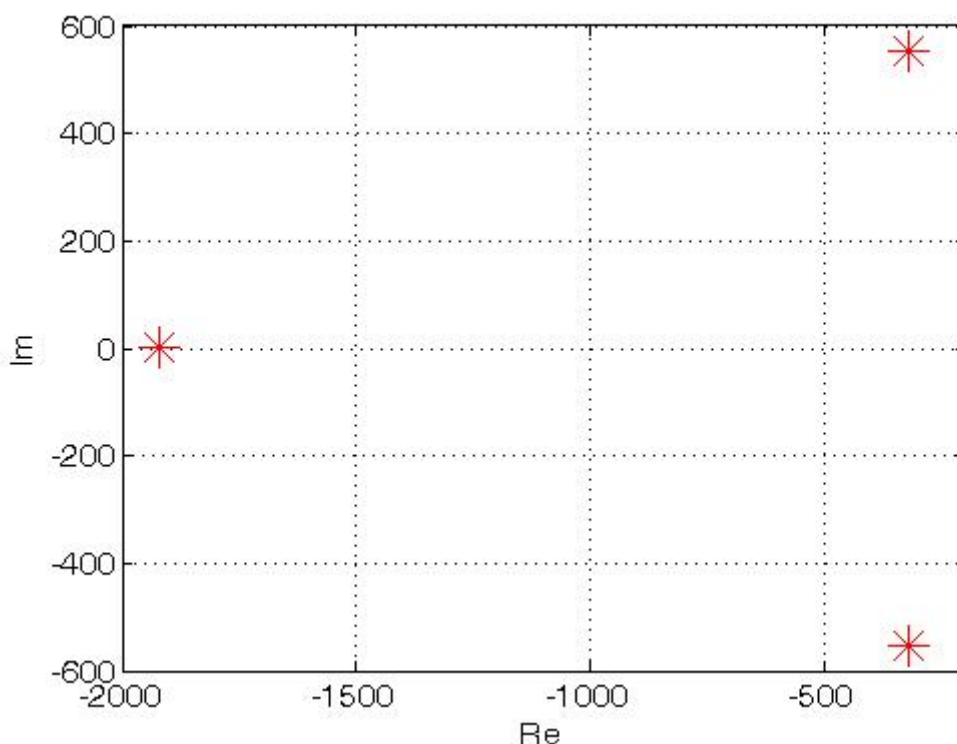
Natomiast dla regulatora PD transmitancja układu zamkniętego jest następująca:

$$x(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{2k_i k_d}{m} s + \frac{2k_i k_p - 2k_s}{m}} F_z(s). \quad (2.26)$$

Jednak należy pamiętać, że regulator PD nie zapewnia zerowego uchybu regulacji. Niezerowy uchyb regulacji wiąże się z przesunięciem wirnika z osi symetrii łożyska. Powoduje to nierówną

sztynność w poszczególnych osiach łożyska. Dlatego też w pracy szczególnie rozważano układy z regulatorem PID zapewniające zerowy uchyb statyczny.

Pożądane położenie biegunów układu zamkniętego z regulatorem PID przedstawiono na rys. 2.8.



Rys. 2.8. Mapa biegunów

Układ zamknięty z regulatorem PID ma dwa dominujące zespolone sprzężone bieguny oraz trzeci aperiodyczny o dużym współczynniku tłumienia. Eliminację wpływu trzeciego bieguna na właściwości dynamiczne układu zamkniętego uzyskano przez umieszczenie go na płaszczyźnie zespolonej poza obszarem biegunów dominujących. W tym przypadku nadal można prowadzić analizę jak dla układu drugiego rzędu.

Przy założonych biegunach układu zamkniętego  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  równanie charakterystyczne ma postać:

$$(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3) = 0. \quad (2.27)$$

Porównując współczynniki powyższego wielomianu z odpowiednimi współczynnikami wielomianu mianownika z równania (2.25), otrzymamy nastawy regulatora PID:

$$k_d = \frac{(-p_1 - p_2 - p_3)m}{2k_i}$$

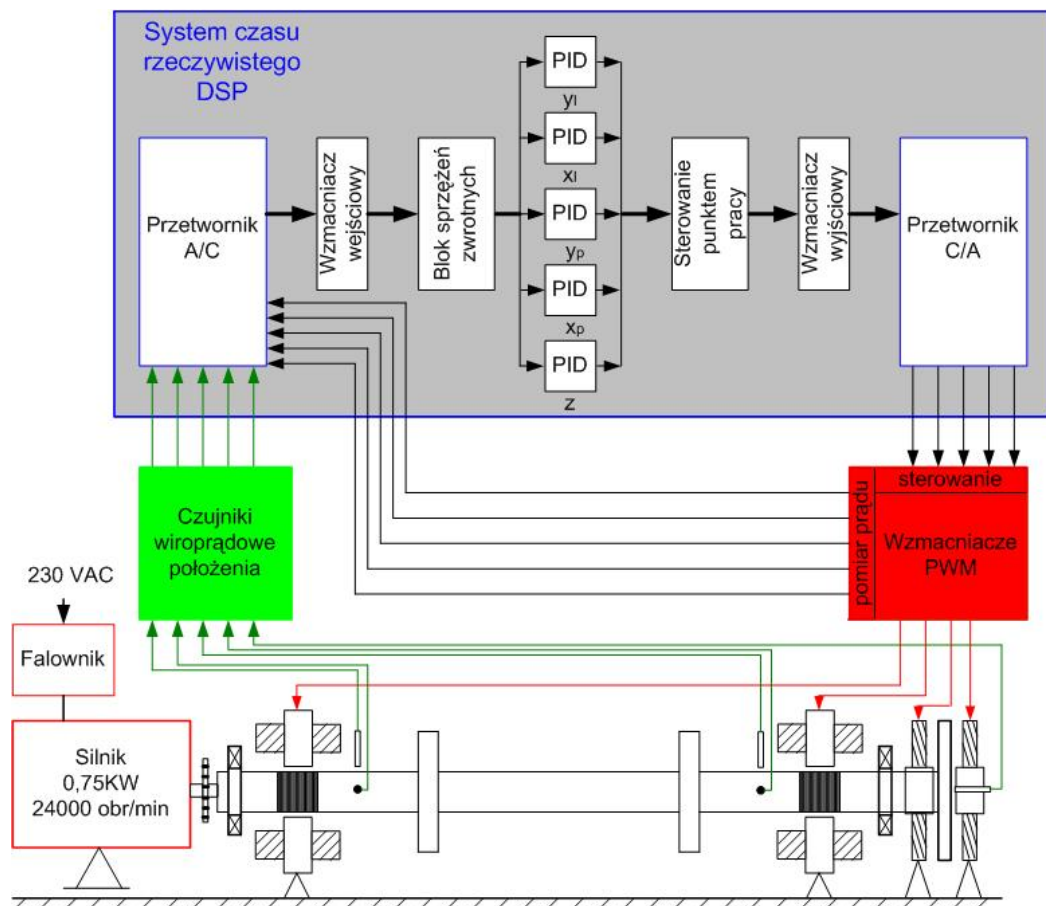
$$k_p = \frac{(p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_1 p_3)m - 2k_s}{2k_i}. \quad (2.28)$$

$$k_I = \frac{-p_1 p_2 p_3 m}{2k_i}$$

Metoda przesuwania biegunów niekoniecznie musi być najlepsza pod kątem zużycia energii przez pętlę sprzężenia zwrotnego. Można osiągnąć lepsze wyniki stosując inne metody, na przykład metodę linii pierwiastkowych.

### Rozdział 3. Stanowisko badawcze i zastosowana do badań aparatura

Zaprojektowane i wykonane stanowisko badawcze służy do sterowania drganiami wirnika giętkiego łożyskowanego magnetycznie z wykorzystaniem różnych praw sterowania, w tym sterowania odpornego. Sterowanie położeniem wirnika odbywa się w pętli sprzężenia zwrotnego realizowanego za pomocą procesora sygnałowego czasu rzeczywistego DSP. Docelowo układy DSP (ang. *Digital Signal Processor*) mogą być zastąpione szybkimi układami programowalnymi FPGA (ang. *Field Programmable Gate Array*). Informacja o położeniu wirnika w kierunku promieniowym i osiowym pochodzi od wiropędowych czujników pomiaru przemieszczenia wału w zakresie szerokości szczeliny powietrznej łożyska magnetycznego równej 0.0004 [m]. Maksymalna prędkość obrotowa wirnika możliwa do osiągnięcia wynosi 24000 [obr/min]. Dla zapewnienia tak wysokich prędkości obrotowych wykorzystano trzy biegunowy indukcyjny silnik elektryczny sterowany przekształtnikiem częstotliwości. Procesor DSP na podstawie pomiaru przemieszczenia wirnika i w oparciu o realizowany zaimplementowany algorytm sterowania generuje napięciowe sygnały sterujące w zakresie  $\pm 10$  [V]. Wzmacniacze PWM lub zastępczo stosowane wzmacniacze analogowe przekształcają napięciowe sygnały sterujące na sygnały prądowe w zakresie  $\pm 10$  [A] lub  $\pm 5$  [A]. Sygnały prądowe generują siły elektromagnetyczne w cewkach łożyska. Schemat budowy stanowiska z zawieszeniem magnetycznym wirnika przedstawiono na rys. 3.1.



Rys. 3.1. Schemat stanowiska badawczego

#### 3.1. Konstrukcja stanowiska laboratoryjnego

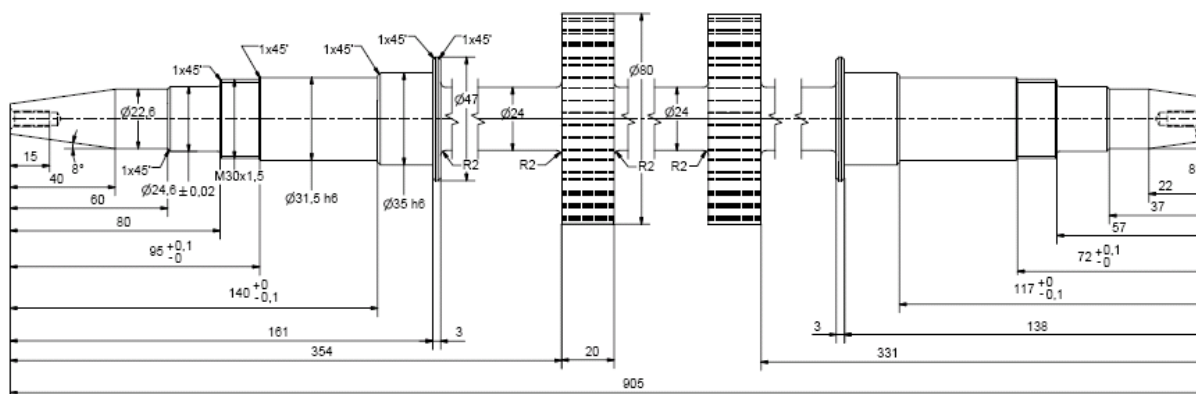
Stanowisko składa się z wirnika łożyskowanego w dwóch łożyskach promieniowych heteropolarnych oraz jednym łożysku osiowym. Wirnik składa się z dwóch tarcz wyposażonych

w 24 gwintowane otwory M5 na potrzeby wyważenia. Wirnik został wykonany z wysoko-wyttrzymałościowej stali obrabianej cieplnie przed obróbką o oznaczeniu 2H17N2 stosowanej między innymi na wirniki elektrowrzecion oraz wysokoobrotowych wirników szlifierek. Wirnik posiada dwie bieżnie pod czujniki położenia oraz dwie bieżnie pod łożyska magnetyczne (bieżnie łożyskowe) wykonane w postaci pakietów klejonych blach transformatorowych. Mocowanie pakietów blach na wirniku zapewniają nakrętki M30. Parametry wirnika przedstawiono w tabeli 3.1.

Tabela 3.1.

Parametry wirnika		
Wirnik	Masa	$m_w = 6$ [kg]
	Długość	$d_w = 0.905$ [m]
	Średnica	$S_w = 0.024$ [m]
Tarcza	Średnica zewnętrzna	$S_t = 0.08$ [m]
	Szerokość	$b_t = 0.02$ [m]
	Masa	$m_t = 0.7$ [kg]
Bieżnie łożyskowe	Średnica zewnętrzna	$S_b = 0.0472$ [m]
	Średnica wewnętrzna	$S_{wb} = 0.0315$ [m]
	Szerokość	$b_b = 0.045$ [m]

Rysunek wykonawczy wirnika przedstawiono na rys. 3.2.



Rys. 3.2. Wirnik

Jako łożyska promieniowe zbudowano i wykorzystano łożyska heteropolarne i oznaczono je numerem LM-48/90/40. Łożysko heteropolarne zbudowane jest z ośmiu cewek elektromagnetycznych połączonych w cztery pary. Dla każdej osi  $x$ - $y$  łożyska wykorzystano dwie pary cewek sterowane przez dwa kanały wzmacniaczy. Cewki nawinięto na stator składający się z pakietu blach transformatorowych o grubości  $0.00035$  [m]. Cewki elektromagnetyczne zostały nawinięte drutem DNE180 (wytrzymującym temperaturę do  $180^{\circ}\text{C}$ ) o średnicy  $0.00118$  [m]. Łożyska wyposażone są w pierścienie do mocowania czujników wiropędowych położenia wału w szczelinie powietrznej w osiach  $x$ - $y$ . Na pierścieniu pod czujniki wiropędowe wykorzystano specjalną stal o oznaczeniu 40HM (oznaczenie amerykańskie 4140), dla której czujnik wiropędowy charakteryzuje się najbardziej liniową charakterystykę statyczną będącą zależnością między przemieszczeniem wirnika a napięciem wyjściowym czujnika. Łożyska magnetyczne składają się z części zewnętrznej cewek elektromagnetycznych statora i części wewnętrznej pakietu blach osadzonego na wirniku. Ważne jest, że stator łożyska magnetycznego jest wykonany z blach transformatorowych o tej samej grubości jak w bieżniach osadzonych na wirniku. Grubość blach w bieżni wewnętrznej i

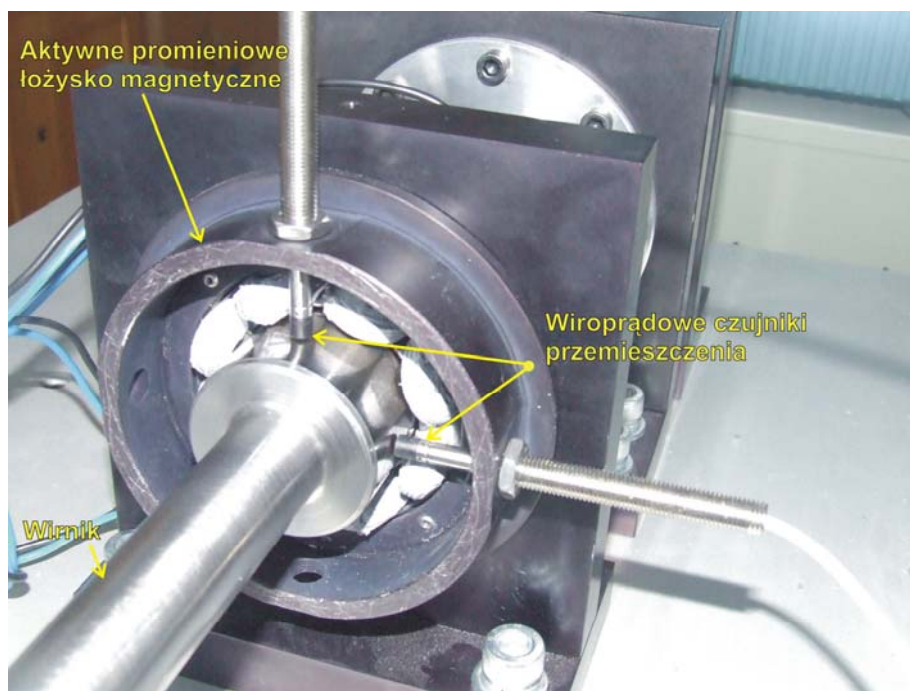
zewnątrznej łożyska powinna być jak najmniejsza z uwagi na występowanie negatywnego zjawiska prądów wirowych. Dodatkowo powierzchnie bieżni są wyszlifowane z dużą dokładnością. Parametry łożyska heteropolarnego przestawiono w tabeli 3.2.

Tabela 3.2.

<b>Parametry techniczne łożysk heteropolarnych</b>	
Ilość biegunów	$n_p = 8$
Kąt między biegunami	$\alpha_p = 22.5^\circ$
Pole przekroju nabiegunnika	$A_p = 0.000360 \text{ [m}^2\text{]}$
Liczba zwojów jednej pary cewek	$N_p = 60$
Szerokość szczeliny powietrznej	$x_0 = 0.0004 \text{ [m]}$
Średnica wewnętrzna statora	$d_s = 0.048 \text{ [m]}$
Średnica zewnętrzna statora	$D_s = 0.09 \text{ [m]}$
Stała łożyska	$K_l = 0,000003912 \text{ [Nm}^2\text{/A}^2\text{]}$
Prąd maksymalny	$i_{max} = 5 \text{ [A]}$ (10 [A] dla wzmacniaczy impulsowych)
Prąd punktu pracy	$i_0 = 2.5 \text{ [A]}$ (5 [A] dla wzmacniaczy impulsowych)
Maksymalna siła	$F_{max} = 244 \text{ [N]}$ (dla $i_{max}=10 \text{ [A]}$ )
Sztywność prądowa	$k_i = 13.62 \text{ [N/A]}$
Sztywność przemieszczeniowa	$k_s = 97656 \text{ [N/m]}$
Rezystancja	$R = 0.26 \text{ [\Omega]}$
Indukcyjność	$L = 0.0021 \text{ [H]}$

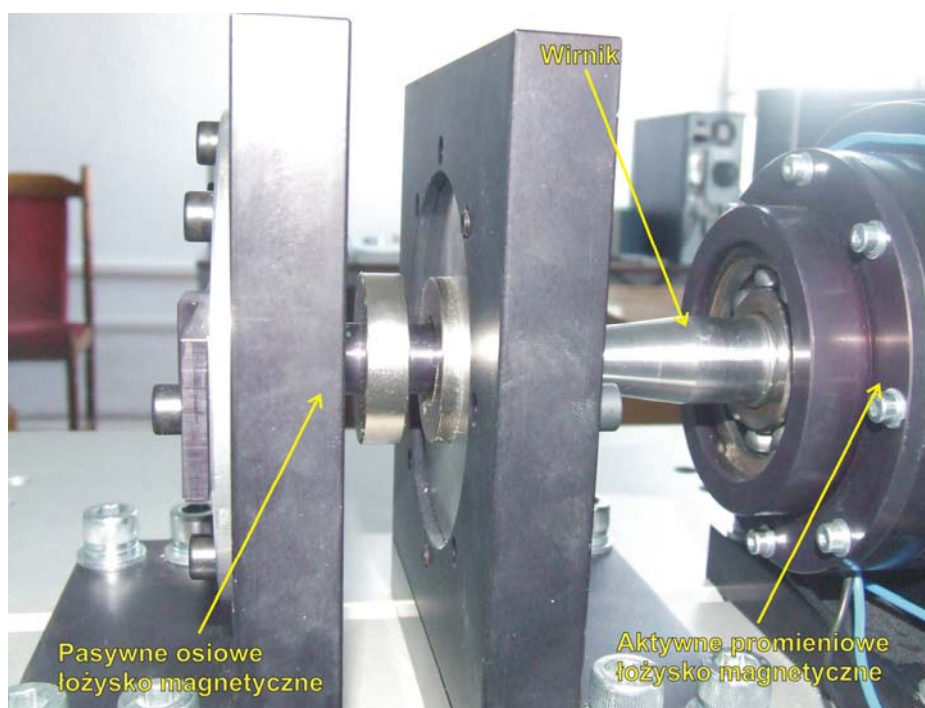
Mimo, że łożyska magnetyczne promieniowe zostały zaprojektowane jako identyczne, to jak się okaże podczas badań laboratoryjnych właściwości łożysk nie są dokładnie takie same. Związane jest to z niedokładnością wykonania łożysk i bieżni wirnika pod łożyska oraz niesymetryczności położenia wirnika w łożyskach magnetycznych.

Na rys. 3.3 przedstawiono widok aktywnego magnetycznego łożyska heteropolarnego.



Rys. 3.3. Łożysko magnetyczne heteropolarne

Jako łożysko osiowe wykorzystano dwa warianty łożysk zamiennie: łożysko osiowe pasywne składające się z trzech neodymowych spiekanych magnesów trwałych typu Nd-Fe-B oraz łożysko osiowe aktywne składające się z dwóch cewek elektromagnetycznych i tarcz osadzonych na wirniku. W łożysku pasywnym magnes środkowy wirujący wraz z wirnikiem osadzono na czopie wału, natomiast dwa pozostałe magnesy zewnętrzne osadzono trwale w obudowie łożyska osiowego. Magnesy pracują w konfiguracji odpychającej się utrzymując wirnik w tym samym położeniu osiowym. Zaletą łożyska pasywnego jest brak konieczności budowy pętli sterowania, tani koszt oraz duża sztywność. Warto wspomnieć, że gęstość energii w spiekanych magnesach neodymowych wynosi około  $400 \text{ [kJ/m}^3\text{]}$ . Wadą pasywnego łożyska jest to, że pracuje ze stałą sztywnością niezależną od parametrów układu zawieszenia wirnika zmieniających się wraz z prędkością obrotową. Jedynym sposobem zmiany sztywności łożyska pasywnego jest manualna regulacja odległości między magnesami przez przesuwanie statorów łożyska. Należy pamiętać, że zwiększenie sztywności osiowej łożyska powoduje generowanie coraz to większej siły promieniowej powodującej rozsuwanie się magnesów z osi symetrii czopu wirnika. Siła ta utrudnia pracę łożysk promieniowych, gdyż musi być kompensowana. Na rys. 3.4 przedstawiono widok pasywnego magnetycznego łożyska osiowego.



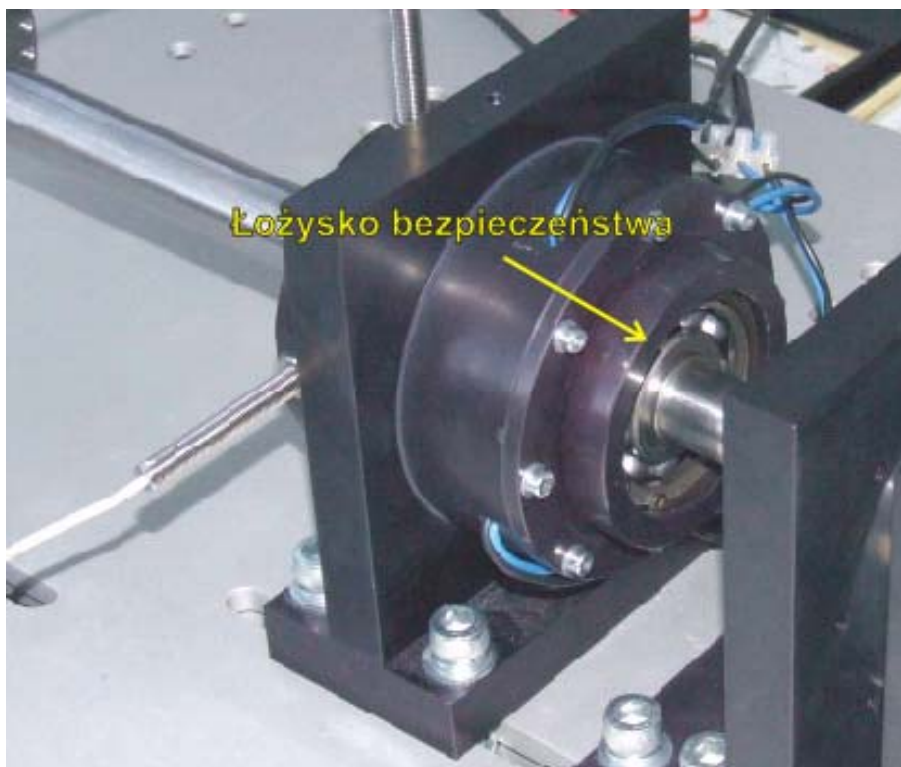
Rys. 3.4. Łożysko pasywne osiowe

Łożysko aktywne osiowe zbudowane jest z dwóch cewek elektromagnetycznych umieszczonych w statorach. Między cewkami wirują dwie tarcze osadzone na wale. Przeszczenie osiowe wirnika mierzone jest przez kolejny czujnik wiroprądowy. Łożysko to wymaga zamkniętej pętli sterowania. Ilość zwojów każdej cewki w łożysku osiowym aktywnym wynosi 80. Cewki nawinięte są drutem DNE180 o średnicy  $0.00118 \text{ [m]}$ . Zaletą takiego rozwiązania jest możliwość aktywnego sterowania sztywnością osiową łożyska oraz brak generowania negatywnej siły promieniowej przez cewki elektromagnetyczne.

W stanowisku laboratoryjnym zastosowano dwa łożyska bezpieczeństwa zapewniające podtrzymanie wirnika w wyniku całkowitego zaniku zasilania lub w wypadku utraty stabilności. Jako łożyska bezpieczeństwa wykorzystano specjalne łożyska toczne wytrzymujące prędkości

robocze przy stałym obciążeniu do 11000 [obr/min]. Szczelina w łożysku bezpieczeństwa jest o połowę mniejsza niż w łożysku magnetycznym i wynosi 0.0002 [m].

Na rys. 3.5 przedstawiono widok łożyska magnetycznego i łożyska bezpieczeństwa.



Rys. 3.5. Łożysko bezpieczeństwa

Dodatkowe elementy konstrukcyjne stanowiska to:

- płyta główna stanowiska – dla zapewnienia odpowiedniej sztywności i stabilności stanowiska. Podstawa wzmocniona jest dwoma dwuteownikami,
- podpory łożysk heteropolarnych – dla zapewnienia mocowania łożysk promieniowych do podstawy stanowiska z zachowaniem dokładności położenia oraz z możliwością przemieszczania osiowego (możliwość stosowania wirników o różnej długości),
- podpora łożyska osiowego – do precyzyjnego mocowania łożyska osiowego do podstawy z możliwością regulacji przemieszczenia osiowego,
- podpora i mocowanie silnika elektrycznego – zapewnia mocowanie jednostki napędowej do podstawy z uwzględnieniem regulacji położenia wirnika w osiach  $x$ - $y$ - $z$ ,
- elastyczne sprzęgło kłowe – dla przeniesienia napędu z silnika na wirnik. Sprzęgło zapewnia elastyczną separację między jednostką napędową a odbiornikiem momentu obrotowego. Mocowanie sprzęgła jest na stożku wirnika napędzanego, od strony napędu za pomocą uchwyty z wyważoną dynamicznie tulejką oraz nakrętką dociskową. Pozwala na kompensację błędów ustawienia kąтового i promieniowego wirnika silnika i wirnika napędzanego.

Układ napędowy składa się z trzyfazowego, indukcyjnego, klatkowego silnika typu C31/40-C-DBS-400-PER20 firmy TEKNOMOTOR współpracującego ze przekształtnikiem częstotliwości firmy SIEMENS. Wirnik silnika jest wyważony dynamicznie. Chłodzenie silnika zapewnia wentylator. Główne parametry jednostki napędowej zebrano w tabeli 3.3.

Tabela 3.3.

Parametry układu napędowego		
Silnik	Moc	0.73 [KW]
	Napięcie zasilania	380/220 [V]
	Prędkość obrotowa max.	24000 [obr/min]
	Częstotliwość max.	400 [Hz]
	Zużycie prądu	2.2÷3.8 [A]
	Waga	4.4 [kg]
	Wymiary: długość/szerokość/wysokość	0.266/0.109/0.063 [m]
Przekształtnik częstotliwości	Napięcie zasilania	1×AC 200÷240 [V] ±10%
	Napięcie wyjściowe	3×AC 0÷U <sub>zasilania</sub> [V]
	Częstotliwość zasilania	47÷63 [Hz]
	Częstotliwość wyjściowa	0÷650 [Hz]

Zespół napędowy zapewnia:

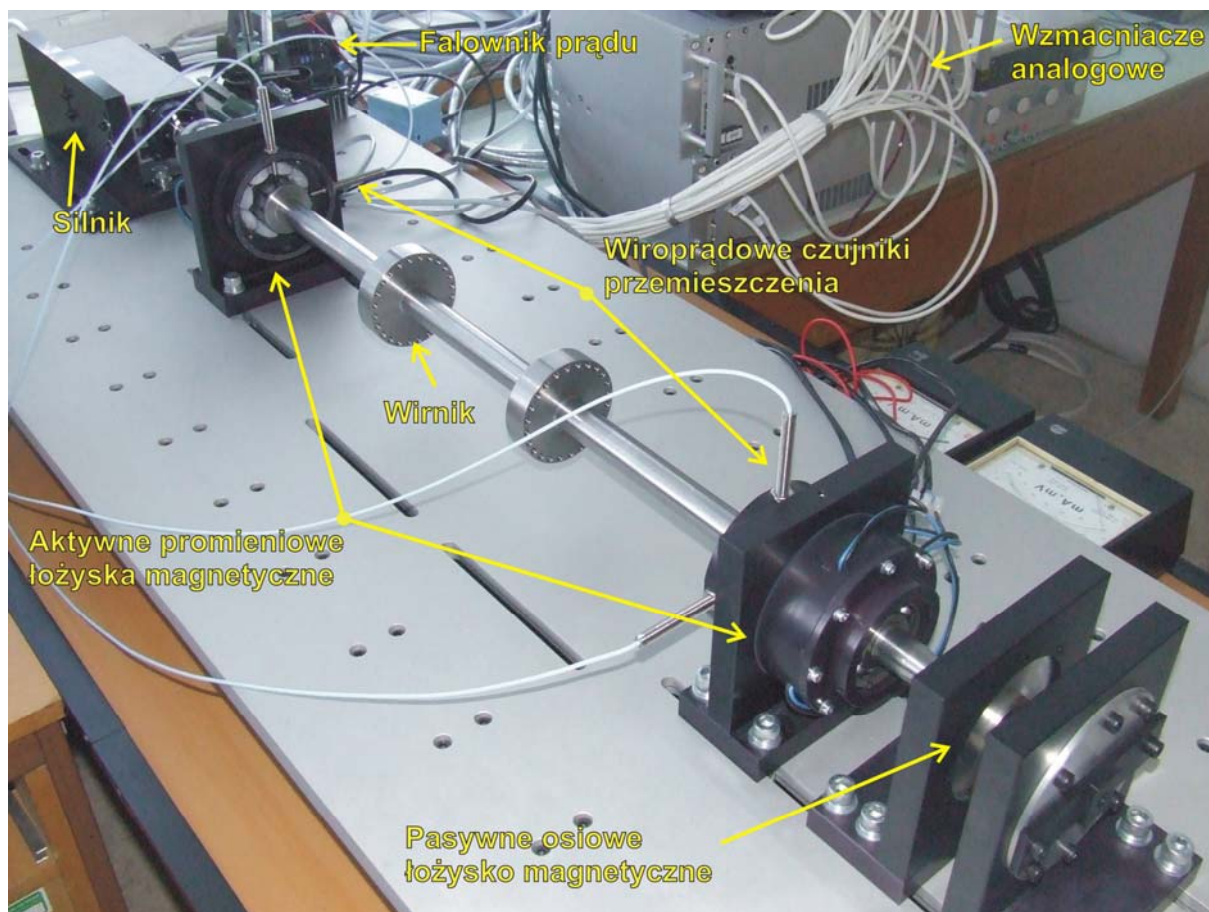
- utrzymanie stałej prędkości obrotowej wirnika,
- regulację prędkości obrotowej wirnika w zakresie od 0 do 24000 [obr/min] w czasie rzeczywistym,
- regulację częstotliwości startowej, odniesienia i maksymalnej,
- kompensację poślizgu,
- sterowanie ręczne z pulpitu falownika, poprzez wejścia analogowe lub poprzez wejścia binarne,
- funkcję pełzania (JOG),
- funkcję skoków,
- wizualizację błędów,
- regulację czasu przyspieszania do zadanej prędkości obrotowej oraz czasu hamowania,
- regulację obciążenia niebezpiecznego, progów alarmowych.

Zespół napędowy posiada:

- filtrację impulsów zakłócających,
- funkcję lotnego startu,
- port szeregowy (USS).

Sterowanie prędkością obrotową realizowane jest w pętli sprzężenia zwrotnego poprzez procesor sygnałowy DSP. W celu pomiaru rzeczywistej prędkości wirowania wirnika zbudowano czujnik magnetyczny dający na wyjściu stałe napięcie w zakresie od 0 do 10 [V] liniowo-proporcjonalne do prędkości obrotowej wirnika w zakresie od 0 do 24000 [obr/min].

Widok stanowiska laboratoryjnego z wirnikiem przedstawiono na rys. 3.6.



Rys. 3.6. Stanowisko badawcze

Warto wspomnieć, że stanowisko laboratoryjne umożliwia badanie wirników o różnych długościach wirnika ze względu na możliwość przesuwania łożysk w kierunku osiowym. Podczas projektowania stanowiska nie uniknięto kilku błędów konstrukcyjnych. Jedną z nich jest brak powierzchni ustalających podpory łożysk promieniowych, co poważnie utrudnia i wydłuża czas potrzebny na dokładne symetryczne ustawienie łożysk względem osi symetrii wirnika. Dla odizolowania drgań przenoszonych z podstawy stanowiska na stół zastosowano piankę izolacyjną. W celu bezpieczeństwa stanowisko wyposażono w obudowę z blachy o grubości 0.008 [m].

Opis dodatkowego sprzętu i aparatury pomiarowej znajduje się w załączniku F.

### 3.2. Budowa układu sterowania

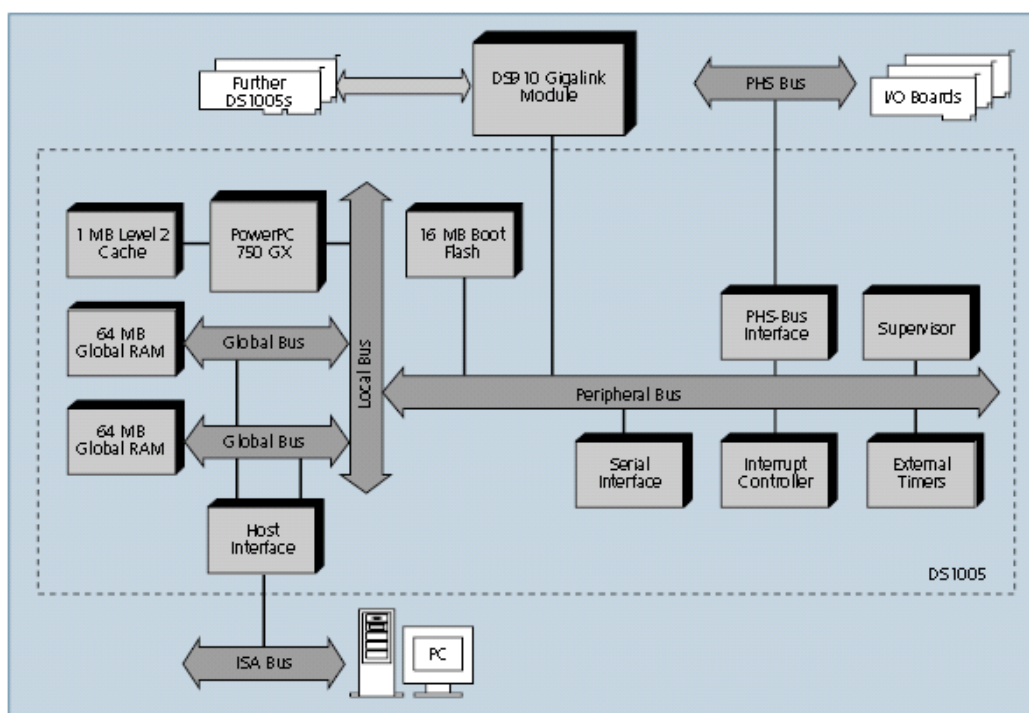
Obiektem sterowania jest masa wirnika sprowadzona do płaszczyzny łożyskowania. Układ sterowania składa się z cyfrowego procesora sygnałowego DSP, przetworników: analogowo – cyfrowego A/D i cyfrowo – analogowego D/A, wzmacniaczy impulsowych typu PWM (zamiennie stosowanych ze wzmacniaczami analogowymi), pięciu czujników wiropędowych i komputera PC z oprogramowaniem ControlDesk, RTI, RTW i Matlab/Simulink. Położenie wirnika w szczelinie powietrznej jest mierzone w dwóch osiach  $x$ - $y$  za pomocą czujników wiropędowych (ang. *Eddy Current Sensor*). System sterowania umożliwia sterowanie w czasie rzeczywistym oraz budowę aplikacji do szybkiego prototypowania, testowania i symulacji układów sterowania (ang. *Hardware In The Loop*). System stanowi narzędzie sprzętowe i środowisko programowe do wykonywania algorytmów sterowania w czasie rzeczywistym. Składa się z kilku podstawowych komponentów: oprogramowania do implementacji algorytmu

sterowania RTI, płyty głównej procesora DS1005, karty przetwornikowej A/D DS2002, karty przetwornikowej D/A DS2103 oraz oprogramowania eksperymentalnego: MLIB/MTRACE i ControlDesk Standard wersji 2.7. Urządzenia stanowiące osprzęt systemu dSPACE zostały umiejscowione w jednej obudowie 4PX10 (ang. *Expansion Box*) wyposażonej w kartę z interfejsem optycznym DS814/817. Poniżej opisano parametry komponentów systemu dSPACE.

### Procesor sygnałowy DS1005:

- posiada generator kodu C++ dla modelu uzyskanego w programie Simulink,
- wyposażony jest w zegar taktujący z maksymalną częstotliwością 1 [GHz],
- bezpośrednio jest połączony z kartami A/D i D/A poprzez magistralę PHS-bus,
- posiada system oprogramowania CDP1006,
- interfejs czasu rzeczywistego (ang. *Real Time Interface*),
- oprogramowanie ControlDesk Standard-Developer i MTRACE/MLIB,
- kompilator GNU (ang. *Compiler Collection*).

Na rys. 3.7 przedstawiono architekturę procesora DS1005.



Rys. 3.7. Architektura modułowa procesora DS1005

**DS2002 Karta A/D** posiada 32 kanały wejściowe (16 bitowe). Zapewnia zamianę sygnałów analogowych na cyfrowe. DS2002 zawiera następujące elementy:

- przełączniki DIP dla ustawienia adresów szyny,
- interfejs PHS do połączenia karty z płytą procesora,
- połączenie ADC posiada 50 pinów i służy do otrzymania dostępu do wszystkich sygnałów I/O na płycie,
- panel połączeniowy zapewnia łatwe w użyciu połączenie pomiędzy DS2002 i urządzeniami zewnętrznymi,
- urządzenia zewnętrzne mogą być indywidualnie przyłączane, rozłączane lub wymieniane bez lutowania.

**DS2103 Karta D/A** posiada 32 kanały wejściowe (14 bitowe). Zapewnia zamianę sygnałów cyfrowych na analogowe. DS2103 zawiera następujące elementy:

- przełączniki DIP dla ustawienia adresów szyny,
- interfejs PHS do połączenia karty z płytą procesora,
- połączenie ADC posiada 50 pinów i służy do otrzymania dostępu do wszystkich sygnałów I/O na płycie,
- panel połączeniowy zapewnia łatwe w użyciu połączenie pomiędzy DS2002 i urządzeniami zewnętrznymi,
- urządzenia zewnętrzne mogą być indywidualnie przyłączane, rozłączane lub wymieniane bez lutowania.

**Obudowa PX10 (Expansion Box):**

- umożliwia połączenie wszystkich elementów systemu sterowania,
- posiada kartę DS814/817 będącą interfejsem optycznym (ang. *Opto Interface*).

**Osprzęt dodatkowy:**

- kabel PHS,
- 5 konektorów,
- terminator.

Regulator w technologii DSP, docelowo może być zastąpiony przez tańsze i mniejsze gabarytowo procesory wykonane w technologii FPGA. Regulator DSP wykorzystywano jako narzędzie do szybkiego prototypowania i testowania różnych praw sterowania.

### 3.3. Realizacja algorytmów sterowania

Wszystkie algorytmy sterowania w początkowej fazie są projektowane dla obiektu modelowanego w Simulinku. Wejścia i wyjścia modelu w Simulinku są połączone z modułem wejść/wyjść biblioteki RTI. Oprogramowanie RTW (ang. *Real Time Workshop*) kompiluje kod z Simulinka tworząc aplikacje czasu rzeczywistego. Następnie kod przekazywany jest do kompilatora języka C TLC (ang. *Target Language Compiler*). Oprogramowanie RTI przekazuje kod do procesora DSP realizującego algorytm sterowania. Częstotliwość wykonywania algorytmu sterowania przez procesor DSP zależy od złożoności algorytmu sterowania. Dla czterech pętli sterowania PID lub sterowania odpornego procesor DSP może realizować algorytm z częstotliwością do 20 [kHz]. Oprócz systemu dSPACE w skład pętli sterowania wchodzi: czujniki wiropądowe, wzmacniacze prądowe oraz komputer PC z oprogramowaniem ControlDesk, RTI, RTW i Matlab-Simulink. Model symulacyjny systemu sterowania jest tworzony w Matlabie/Simulinku i przekazywany poprzez interfejs RTI do procesora DSP. Procesor DSP czyta wyjściowe sygnały z czujników wiropądowych poprzez 16 bitowe przetworniki analogowo–cyfrowe. Sygnały sterujące są przesyłane do wzmacniaczy poprzez 14 bitowe przetworniki cyfrowo–analogowe. W ten sposób zamyka się pętla sprzężenia zwrotnego.

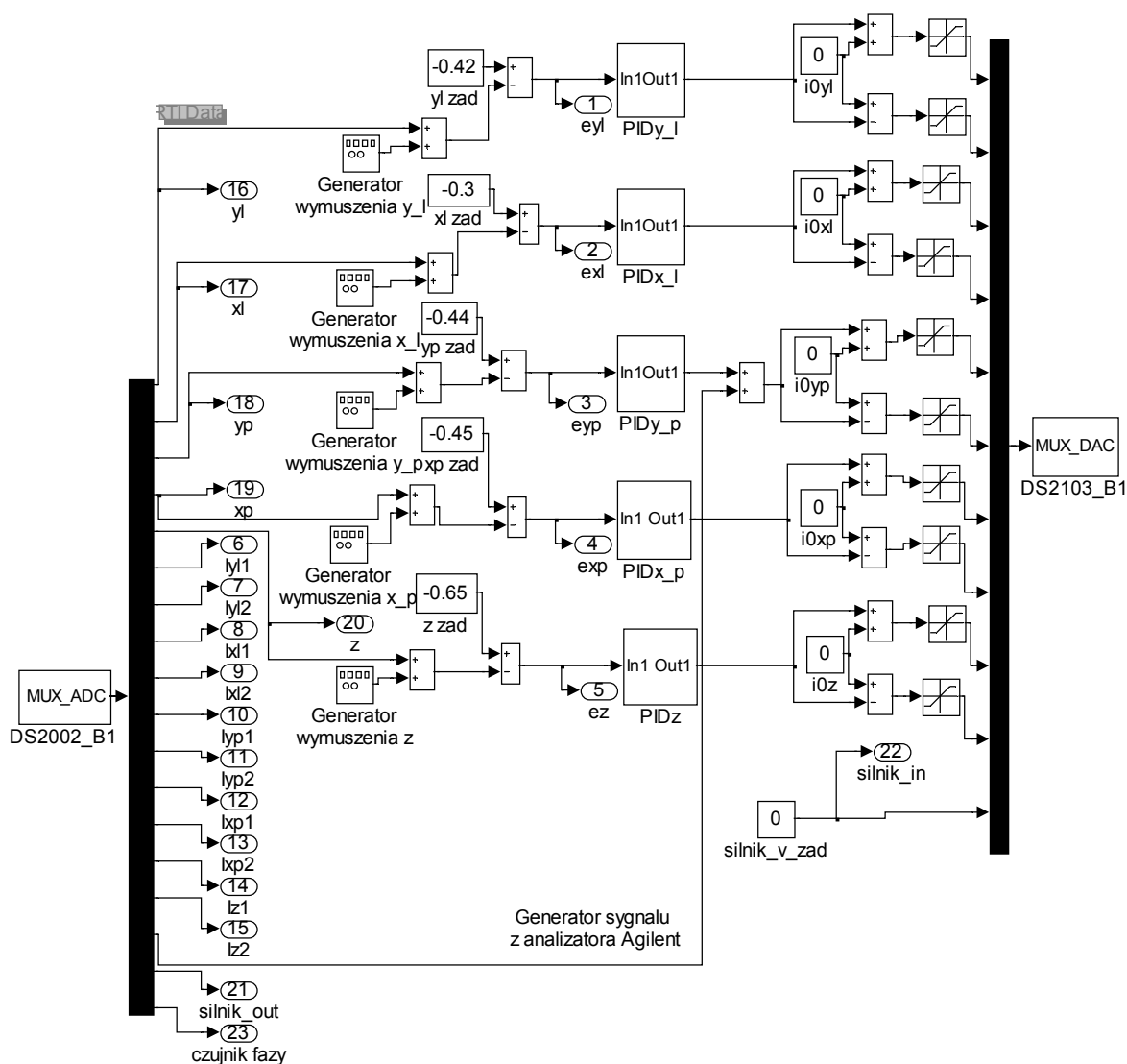
Badania laboratoryjne zostały przeprowadzone z czasem próbkowania  $T_s=0.0001$  [s]. Platformę softwarową stanowiło oprogramowanie Matlab-Simulink i program ControlDesk. Program ControlDesk służy do wizualizacji, sterowania i modyfikacji wartości parametrów w czasie rzeczywistym.

Na rys. 3.8 przedstawiono widok przykładowej mapy synoptycznej służącej do wizualizacji i zmiany parametrów układu sterowania odpornego w czasie rzeczywistym.



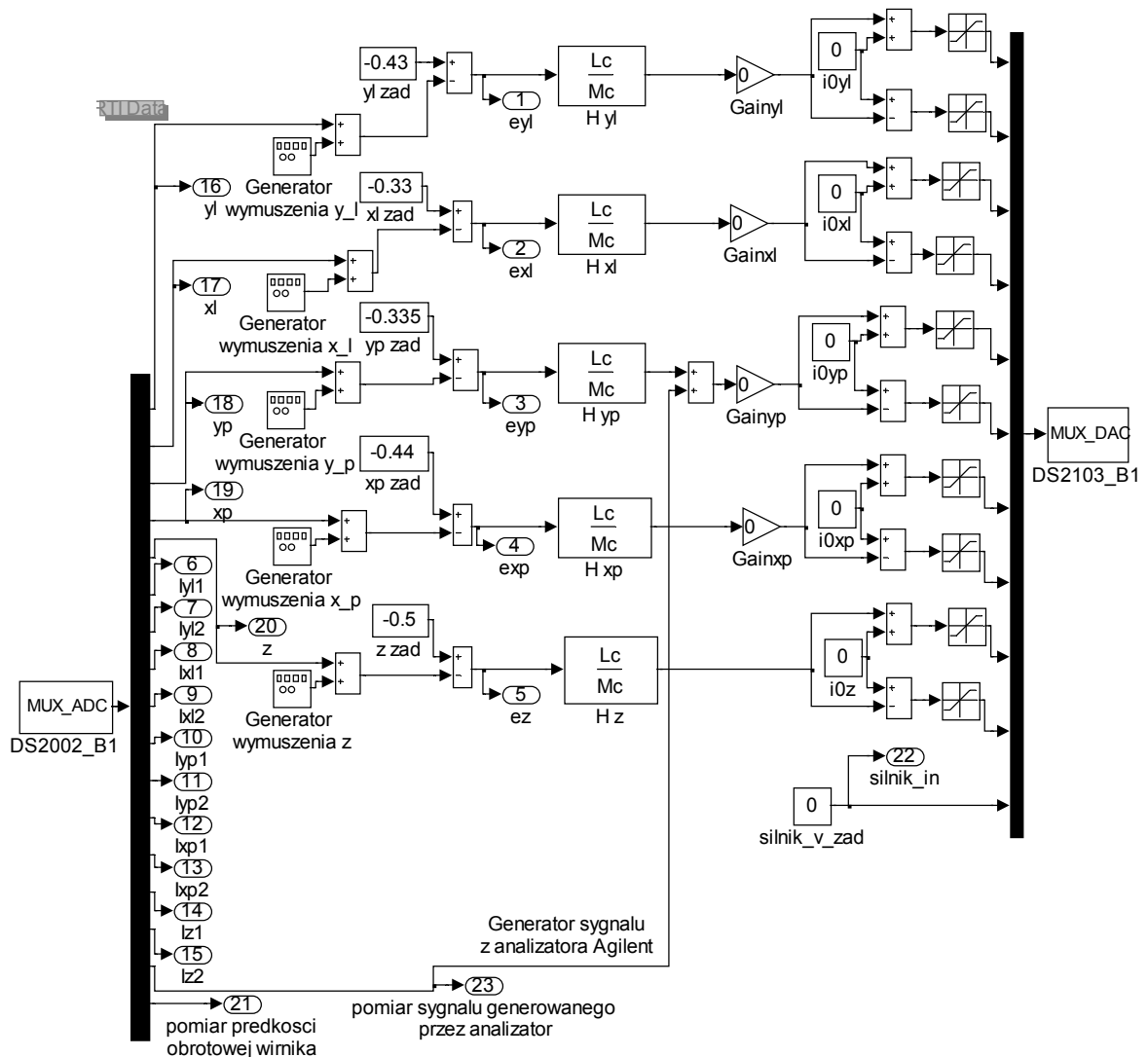
Rys. 3.8. Okno programu ControlDesk

Na rys. 3.9 został przedstawiony model sterowania z regulatorem PID kompilowanego w procesorze DSP celem badań układu sterowania obiektu w dziedzinie czasu i częstotliwości oraz badań właściwości układu sterowania PID zawieszeniem magnetycznym wirnika.



Rys. 3.9. Model sterowania PID w procesorze DSP

Na rys. 3.10 został przedstawiony model sterowania z regulatorem  $H_\infty/H_2$  kompilowanego w procesorze DSP. Należy zaznaczyć, że model ten był wykorzystywany do fizycznej realizacji praw sterowania odporne, w tym do przeprowadzania badań eksperymentalnych właściwości łożysk magnetycznych i układów regulacji odpornej.



Rys. 3.10. Model sterowania odporne w procesorze DSP

### 3.4. Plan badań eksperymentalnych

Poniżej przedstawiono porządek badań eksperymentalnych:

- 1) Wyznaczenie odpowiedzi na zakłócenie skokowe i sinusoidalnie zmienne położenia wirnika dla różnych nastaw regulatora PID.
- 2) Badania procesów przejściowych (włączenie łożysk do pracy) układu zamkniętego z regulatorem PID.
- 3) Wyznaczenie charakterystyk częstotliwościowych układu zamkniętego dla różnych nastaw regulatora PID.
- 4) Przeprowadzenie badań pokazujących poziom tłumienia drgań wirnika wraz ze wzrostem prędkości obrotowych oraz w stanach dynamicznych.
- 5) Wykorzystanie opracowanego regulatora odporne  $H_\infty$  i  $H_2$  do wyznaczenia odpowiedzi na zakłócenie skokowe i sinusoidalnie zmienne położenia wirnika.

- 6) Badania procesów przejściowych (włączenie łożysk do pracy, podnoszenie wirnika, itd.) układu zamkniętego z regulatorem odpornym  $H_\infty$  i  $H_2$ .
- 7) Wyznaczenie charakterystyk częstotliwościowych układu zamkniętego dla różnych wartości parametrów regulatora  $H_\infty$  i  $H_2$ .
- 8) Przeprowadzenie badań rejestrujących poziom tłumienia drgań wirnika wraz ze wzrostem prędkości obrotowych oraz w stanach dynamicznych dla regulatora  $H_\infty$  i  $H_2$ .
- 9) Wyznaczenie wpływu funkcji wagowej nałożonej na sygnał uchybu na dynamikę regulatora odpornego.
- 10) Wyznaczenie charakterystyk częstotliwościowych regulatora odpornego i funkcji układu zamkniętego z uwzględnieniem funkcji wagowej nałożonej na sygnał sterujący.
- 11) Badania wpływu funkcji wagowej ograniczającej sygnał pomiarowy na właściwości sterowania układem zamkniętym z regulatorem odpornym.
- 12) Badania kompensacji drgań wirnika poprzez dobór odpowiedniej funkcji wagowej nałożonej na sygnał zakłócenia w układzie sterowania odpornego.
- 13) Określenie poziomu kompensacji szumów w torze czujników wiropędowych poprzez zastosowanie funkcji wagowej nałożonej na zakłócenia toru pomiarowego.
- 14) Badania w dziedzinie czasu i częstotliwości dla układu zamkniętego z regulatorem odpornym zredukowanego rzędu.

## Rozdział 4. Badania symulacyjne i laboratoryjne drgań wirnika z regulacją PID

Podczas przeprowadzania badań symulacyjnych i obliczeń analitycznych posłużono się oprogramowaniem Matlab/Simulink, jego metodami, funkcjami wbudowanymi i własnymi programami napisanymi w celu wykonania obliczeń, wizualizacji i zapisu danych. Badania obejmują wyznaczenie charakterystyk czasowych i częstotliwościowych układów sterowania PID. Celem badań jest wstępna weryfikacja modelu obiektu i zbadanie właściwości układu zamkniętego. Informacje uzyskane w drodze badań posłużą w procesie modelowania praw sterowania odporne.

### 4.1. Badania symulacyjne układu z regulatorem PID

Badania symulacyjne zostały przeprowadzone dla modelu układu zawieszenia magnetycznego wirnika w dziedzinie czasu i częstotliwości. Dla wirnika nieobrcającego się w modelu obiektu nie uwzględniano dynamiki cewek elektromagnetycznych. Wiele badań dotyczących analizy dynamiki wirnika łożyskowanego magnetycznie dla różnych prędkości obrotowych zostało opublikowanych w pracach [23, 25, 27].

Bazując na modelu łożyska heteropolarnego dla jednej osi sterowania opisanego transmitancją (2.7) zaprojektowano regulator PID/PD. Regulator PID został zaprojektowany w oparciu o kryterium odpowiedzi skokowej (ang. *Total Variation in Time Domain*). Badania symulacyjne przeprowadzono dla następujących danych uzyskanych w procesie identyfikacji obiektu:

$x_0=0.4 \cdot 10^{-3}$  – szerokość szczeliny powietrznej [m],

$k_s=9.7 \cdot 10^4$  – sztywność przemieszczeniowa [N/m],

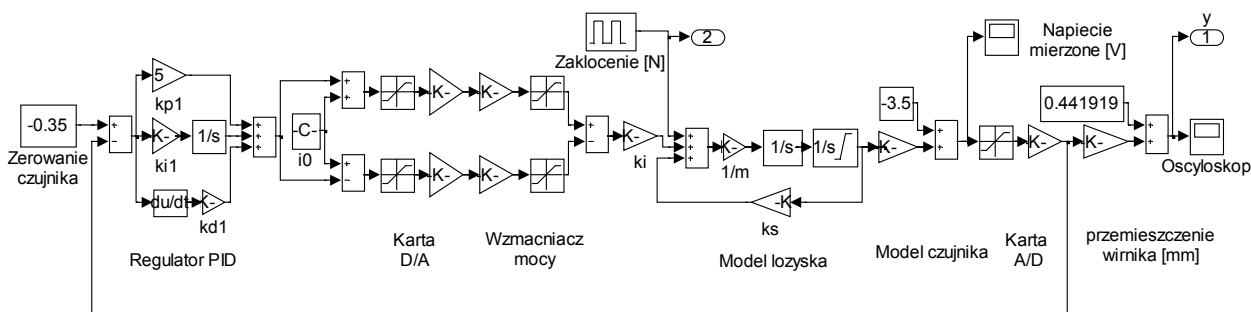
$k_i=13.6$  – sztywność prądowa [N/A],

$m=3$  – masa wirnika sprowadzona do płaszczyzny łożyskowania [kg].

Tym samym model obiektu (łożyska magnetycznego dla osi sterowania  $y$ , bez uwzględnienia dynamiki cewek elektromagnetycznych) jest opisany następującą transmitancją:

$$P_w(s) = \frac{2k_i}{ms^2 - 2k_s} = \frac{27.24}{3s^2 - 195312} \quad (4.1)$$

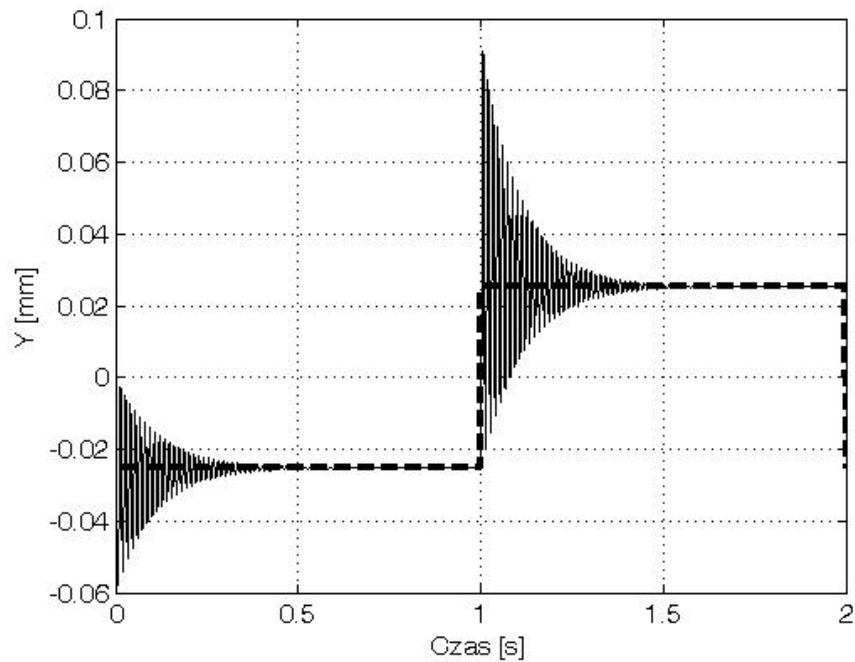
Pierwszy etap badań dotyczył analizy kompensacji zakłócenia podawanego na obiekt w postaci siły skokowo zmiennej. Model symulacyjny (zbudowany w Simulinku) układu regulacji w pętli sprzężenia zwrotnego z regulatorem PID dla wymuszenia siłowego został przedstawiony na rysunku 4.1.



Rys. 4.1. Model układu zamkniętego z zakłóceniem siłowym

Na rys. 4.2 przedstawiono przebieg odpowiedzi układu zamkniętego z regulatorem PID na skokowe zakłócenie siłą o wartości 50 [N] działające na wejście obiektu. Maksymalna amplituda

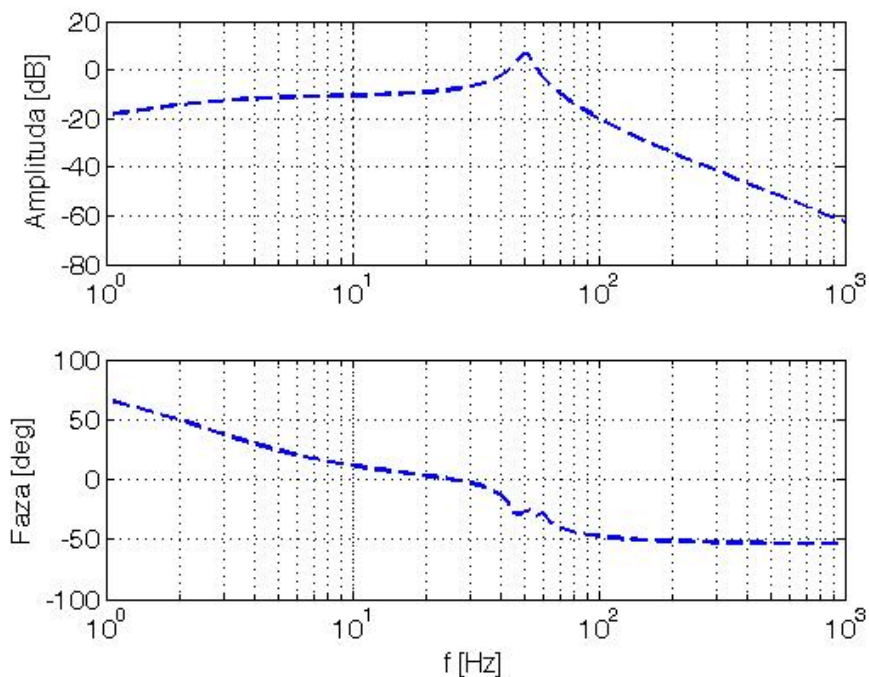




Rys. 4.4. Odpowiedź układu zamkniętego z regulatorem PID na skokowe zakłócenie położenia wirnika

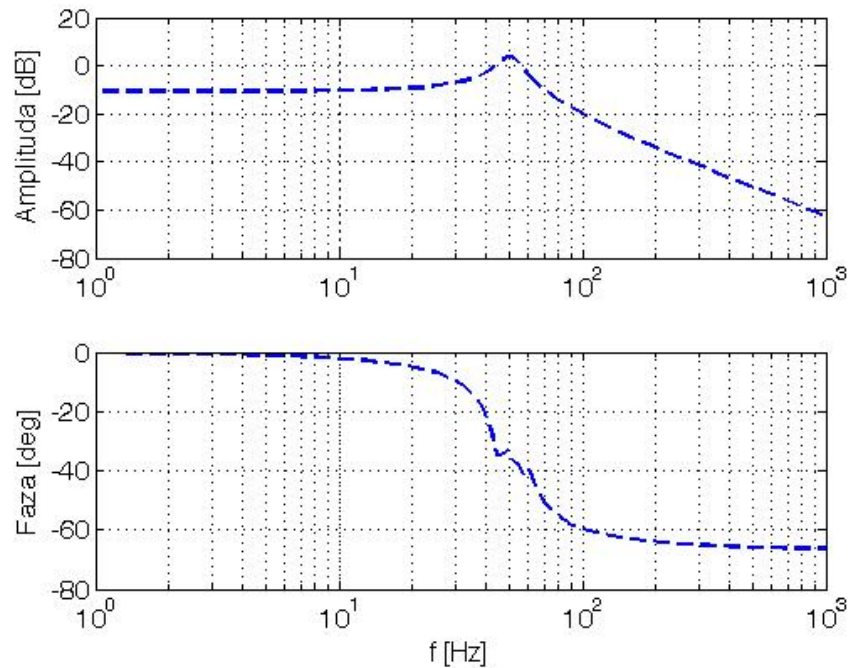
Następnym etapem było wyznaczenie charakterystyk częstotliwościowych, które zostały porównane z charakterystykami eksperymentalnymi w celu udowodnienia poprawności procesu modelowania obiektu. Charakterystyki częstotliwościowe obiektu rzeczywistego zostały zmierzone pomiędzy prądowym sygnałem sterującym a wyjściowym sygnałem będącym przemieszczeniem wirnika w łożysku magnetycznym. W związku z tym, na charakterystykach Bodego widać początkowe tłumienie na poziomie -20 [dB].

Na rys. 4.5 przedstawiono charakterystyki Bodego układu zamkniętego z regulatorem PID. Nastawy regulatora PID wynoszą:  $k_p=5$ ,  $k_I=50$ ,  $k_d=0.002$ . Prąd punktu pracy wynosi nadal  $i_0=2.5$  [A].



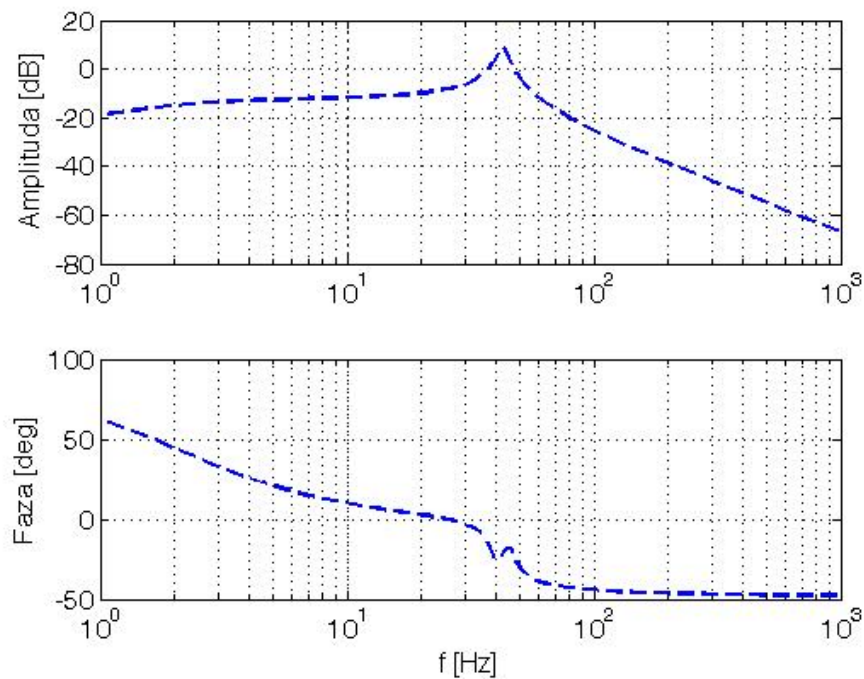
Rys. 4.5. Charakterystyka Bodego układu zamkniętego z regulatorem PID

Powyższą charakterystykę powtórzono dla układu regulacji z regulatorem PD, dla nastaw regulatora równych:  $k_p=5$ ,  $k_d=0.002$ . Prąd punktu pracy wynosi  $i_0=2.5$  [A].



Rys. 4.6. Charakterystyka Bodego układu zamkniętego z regulatorem PD

W wypadku regulatora PD układ nie wykazuje przesunięcia fazowego w zakresie pasma przenoszenia (faza=0). Dla porównania na rys. 4.7 przedstawiono charakterystykę Bodego dla układu regulacji PID ze zmniejszonym prądem punktu pracy do 1.5 [A]. Nastawy regulatora PID wynoszą:  $k_p=5$ ,  $k_I=50$ ,  $k_d=0.002$ .



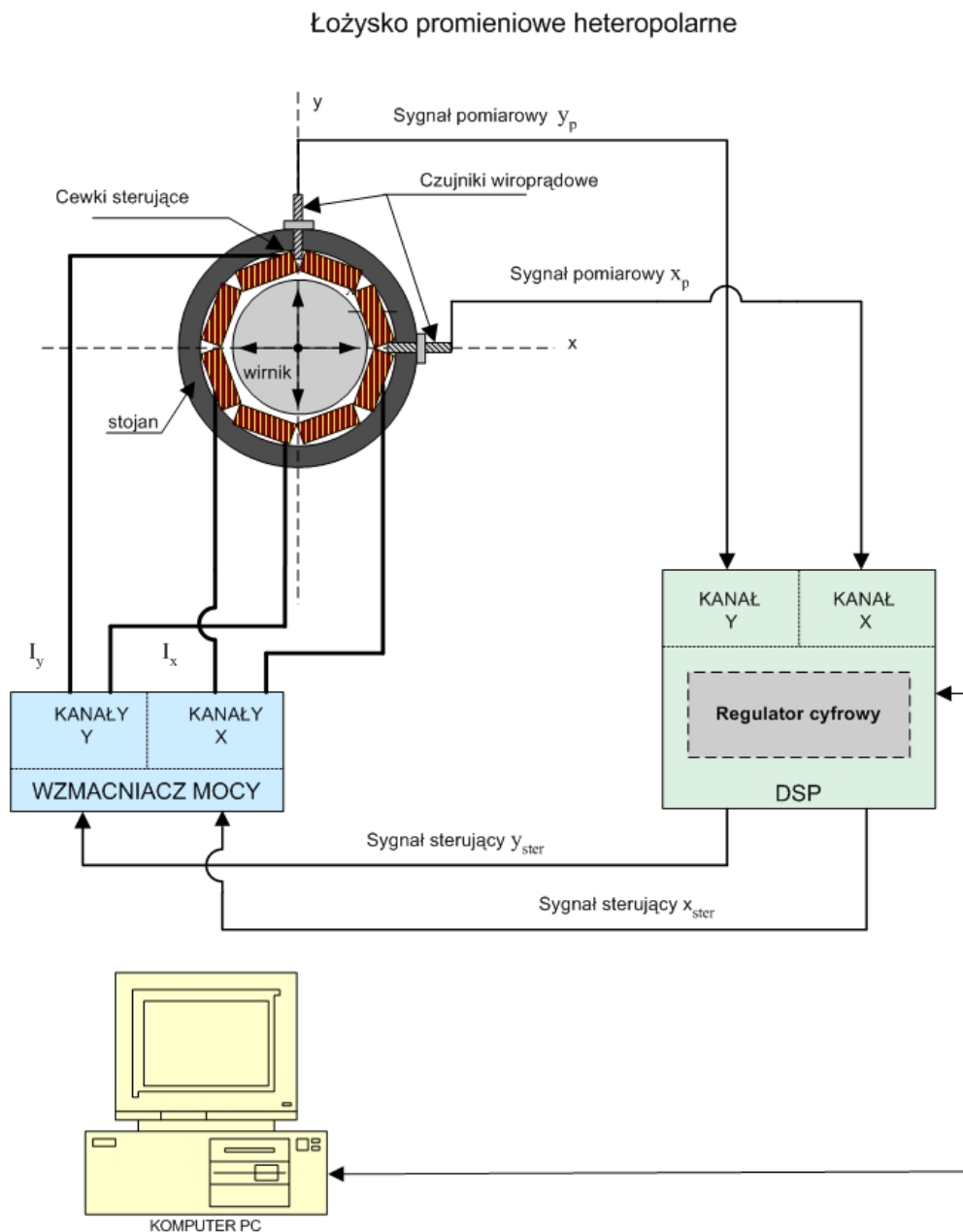
Rys. 4.7. Charakterystyka Bodego układu zamkniętego z regulatorem PID

Z charakterystyk Bodego widać, że zmniejszenie wartości prądu punktu pracy (czyli zmniejszenie sztywności łożyska) nie powoduje zmiany wzmocnienia układu zamkniętego.

## 4.2. Badania eksperymentalne układu z regulatorem PID

Badania doświadczalne pozwoliły na wyznaczenie charakterystyk pracy łożysk magnetycznych w dziedzinie czasu i częstotliwości. Zbadano zdolność układu regulacji PID do kompensowania wymuszeń zewnętrznych oraz tłumienia drgań powodowanych niewyważeniem wirnika. Wyznaczono charakterystyki Bodego układu wirnik-łożysko magnetyczne. Badania analizy dynamiki wirnika łożyskowanego magnetycznie przeprowadzono w zakresie prędkości obrotowych wirnika od 0 do 2000 [obr/min]. Badania zostały przeprowadzone dla różnych nastaw regulatora PD/PID. W wyniku badań wyznaczono trajektorie ruchu środka geometrycznego wirnika dla różnych prędkości wirowania oraz przebiegi drgań w funkcji narastającej prędkości obrotowej.

Na rys. 4.8 przedstawiono schemat funkcjonalny sterowania jednym łożyskiem magnetycznym.



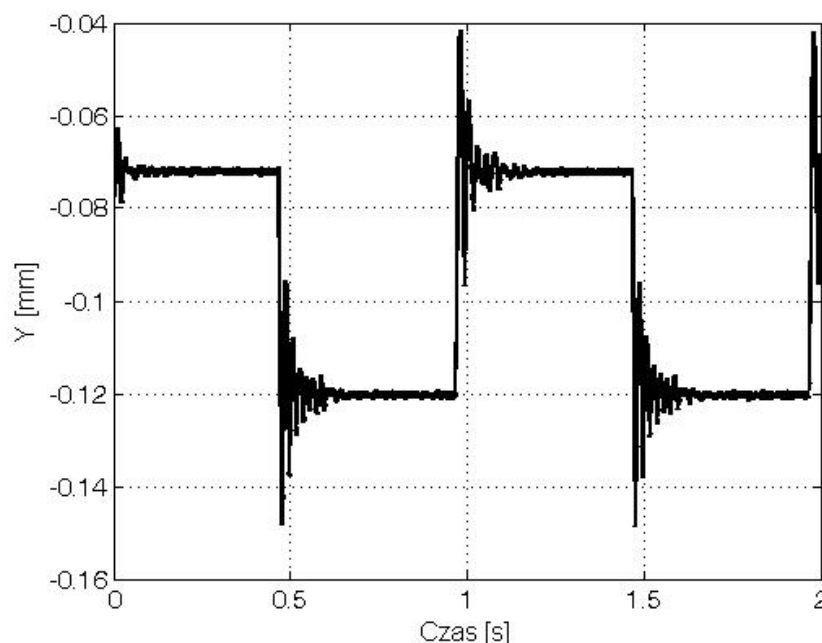
Rys. 4.8. Schemat sterowania heteropolarnym łożyskiem magnetycznym

W badaniach eksperymentalnych dotyczących układu regulacji PID jak i układów regulacji odpornej (rozdział 10) widoczne są nieznaczne różnice w właściwościach dynamicznych łożysk magnetycznych. Jest to spowodowane niesymetrycznością położenia masy wirnika (nierównomierne obciążenie łożysk) oraz niedokładnością wykonania łożysk. Jak się okazało podczas badań laboratoryjnych duży wpływ na właściwości statyczne i dynamiczne aktywnego łożyska magnetycznego ma sposób nawijania cewek elektromagnetycznych (upakowanie drutu, ilość zwojów cewki, właściwości elektromagnetyczne drutu oraz właściwości izolacji). Najmniejsze uszkodzenie lakierniczej izolacji drutu nawojowego cewki prowadzi do strat natężenia strumienia magnetycznego, co w konsekwencji prowadzi do zmniejszenia siły nośnej łożyska i pogorszenia właściwości dynamicznych.

Dane obiektu użytego do badań eksperymentalnych są takie same jak w przypadku badań symulacyjnych opisanych powyżej.

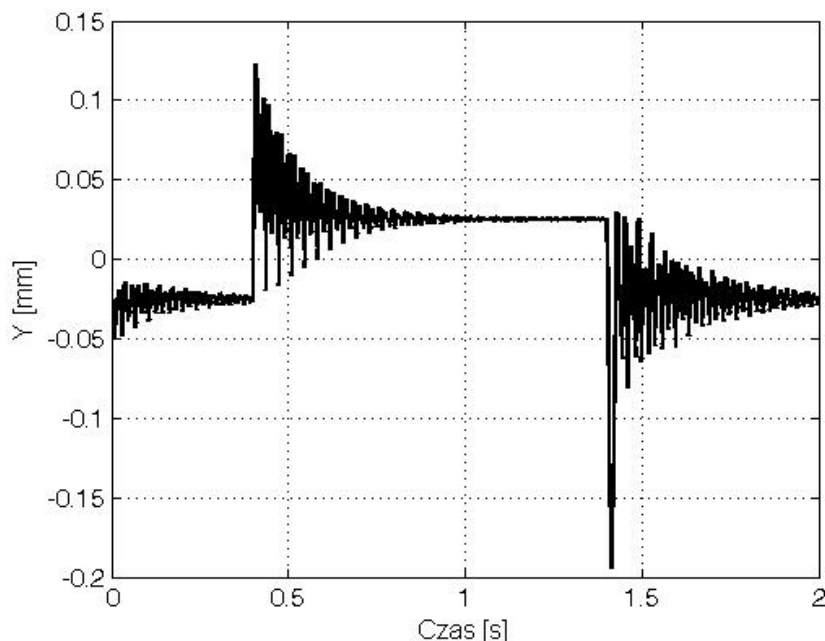
#### 4.2.1. Sterowanie położeniem wirnika w szczelinie powietrznej

Badania dotyczyły analizy kompensacji wymuszeń przez układ sterowania PD/PID. Zakłócenia zostały wprowadzane na obiekt sterowania w formie zakłócenia sygnału pomiarowego w pętli sprzężenia zwrotnego sygnałem sinusoidalnie i skokowo zmiennym. Na rys. 4.9 przedstawiono przebieg odpowiedzi układu zamkniętego z regulatorem PD na zakłócenie położeniem wirnika w szczelinie powietrznej łożyska magnetycznego. Sygnał został generowany przez procesor DSP i dodawany poprzez kartę D/A do sygnału mierzonego przemieszczenia wirnika. Zakłócenie zostało podane w postaci sygnału skokowo zmiennego. Parametry sygnału zakłócenia są następujące: amplituda 0.02 [mm], częstotliwość 1 [Hz]. Nastawy regulatora PD są następujące:  $k_p=5$  i  $k_d=0.01$ . Prąd punktu pracy wynosi  $i_0=1.5$  [A].



Rys. 4.9. Trajektoria ruchu wirnika w prawym łożysku,  $i_0=1.5$  [A]

Na rys. 4.10 przedstawiono analogiczną charakterystykę dla układu z regulatorem PID. Nastawy regulatora są następujące:  $k_p=5$ ,  $k_I=50$  i  $k_d=0.01$ .



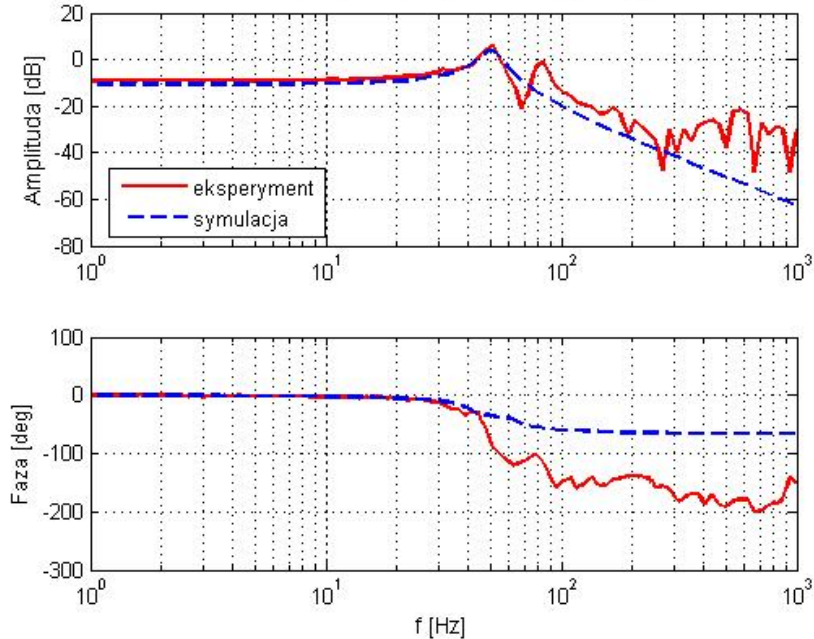
Rys. 4.10. Trajektoria ruchu wirnika w prawym łożysku, układ z regulatorem PID,  $i_0=2.5$  [A]

Z charakterystyki 4.10 widać, że dodanie akcji całkującej powoduje zminimalizowanie uchybu statycznego regulacji. Sygnał regulowany podąża za sygnałem zadany. Po zaniku procesu przejściowego w łożysku magnetycznym musi działać stała wartość prądu potrzebna do wytworzenia siły nośnej równoważącej siłę ciężkości wirnika.

#### 4.2.2. Charakterystyki częstotliwościowe

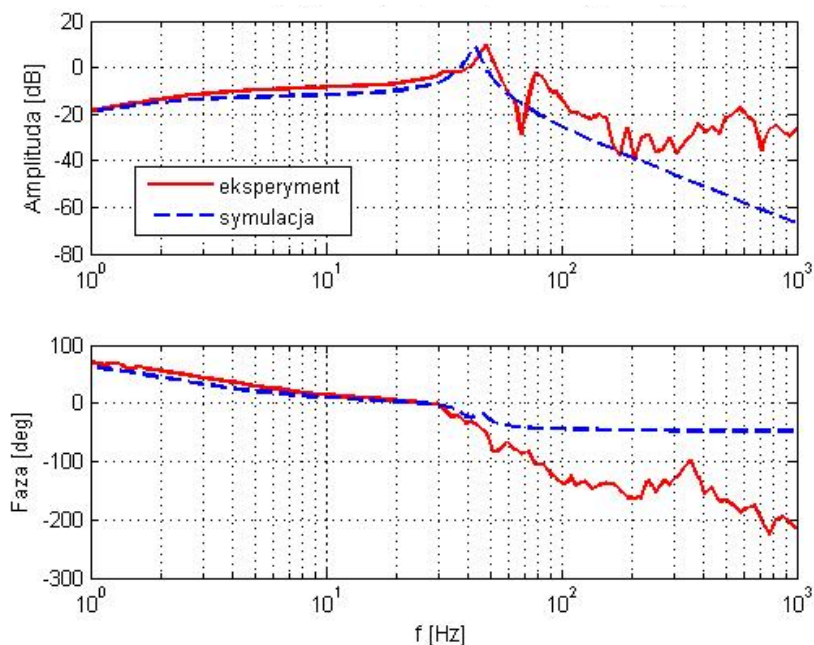
Następnie przeprowadzono badania układu zamkniętego z regulatorem PD/PID w dziedzinie częstotliwości. Badania dotyczyły analizy częstotliwościowej w zakresie pasma przenoszenia od 1 do 1 [kHz] i zostały przeprowadzone z użyciem analizatora stanów dynamicznych typu Agilent 35670A. Analizator dzięki funkcji *Swept-Sine* generuje sygnał sinusoidalny o wartości 1 [V] (offset = 0 [V]) i zwiększającej się częstotliwości w zakresie od 1 [Hz] do 1 [kHz], który następnie jest podawany poprzez kartę A/C i C/A na wejście sterujące wzmacniacza generującego prądowy sygnał sterujący.

Na rys. 4.11 przedstawiono charakterystykę Bodego układu zamkniętego z regulatorem PD wyznaczoną doświadczalnie i w drodze obliczeń analitycznych. Nastawy regulatora PD są następujące:  $k_p=5$  i  $k_d=0.02$ .

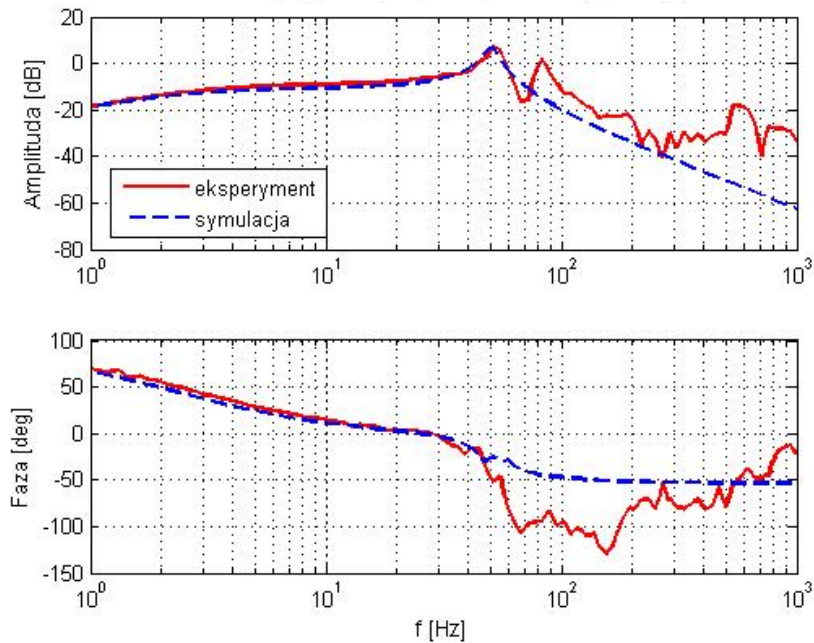


Rys. 4.11. Charakterystyka Bodego układu zamkniętego z regulatorem PD

Dla porównania na rys. 4.12 i 4.13 przedstawiono charakterystykę Bodego układu zamkniętego z regulatorem PID dla różnych wartości prądu punktu pracy. Nastawy regulatora PID są następujące:  $k_p=5$ ,  $k_I=50$  i  $k_d=0.02$ . Prąd punktu pracy wynosi  $i_0=1.5$  i  $2.5$  [A].



Rys. 4.12. Charakterystyka Bodego układu zamkniętego z regulatorem PID,  $i_0=1.5$  [A]

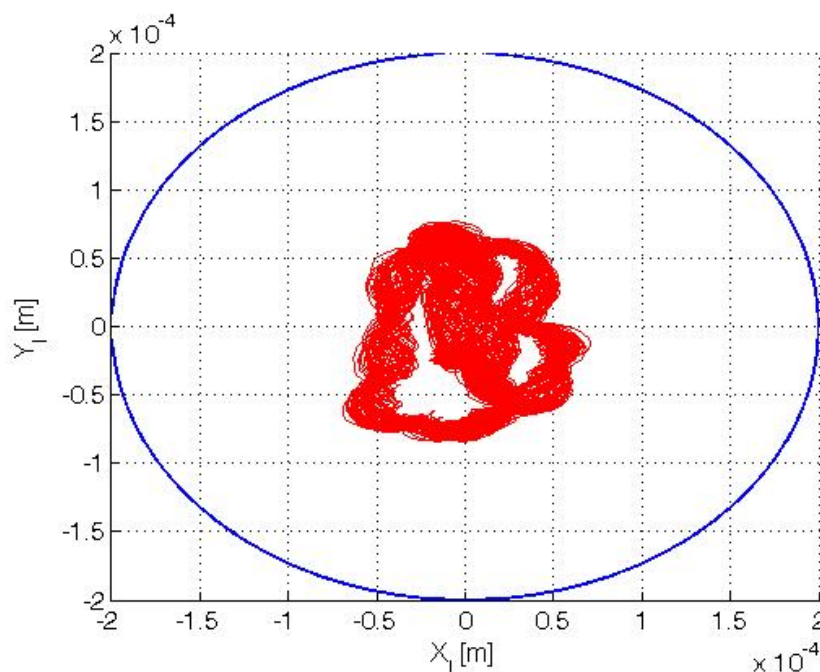


Rys. 4.13. Charakterystyka Bodego układu zamkniętego z regulatorem PID,  $i_0=2.5$  [A]

Układ z regulatorem PID cechuje występowanie dodatniej fazy z uwagi na działanie członu całkującego. Natomiast zmiana sztywności łożyska nie wpływa znacząco na zmianę wzmocnienia układu. Początkowe tłumienie o wartości  $-20$  [dB] występuje, ponieważ charakterystyki częstotliwościowe zostały mierzone między prądowym sygnałem sterującym, a sygnałem wyjściowym będącym przemieszczeniem wirnika. Charakterystyki symulacyjne i eksperymentalne są wystarczająco zbliżone, co oznacza poprawność procesu modelowania. Rozbieżności charakterystyk podyktowane są uproszczeniami modelu łożyska magnetycznego polegającymi na linearyzacji, odrzuceniu części nieliniowej dynamiki oraz nie uwzględnianiu wszystkich parametrów mających nieznaczny wpływ na właściwości pracy łożyska.

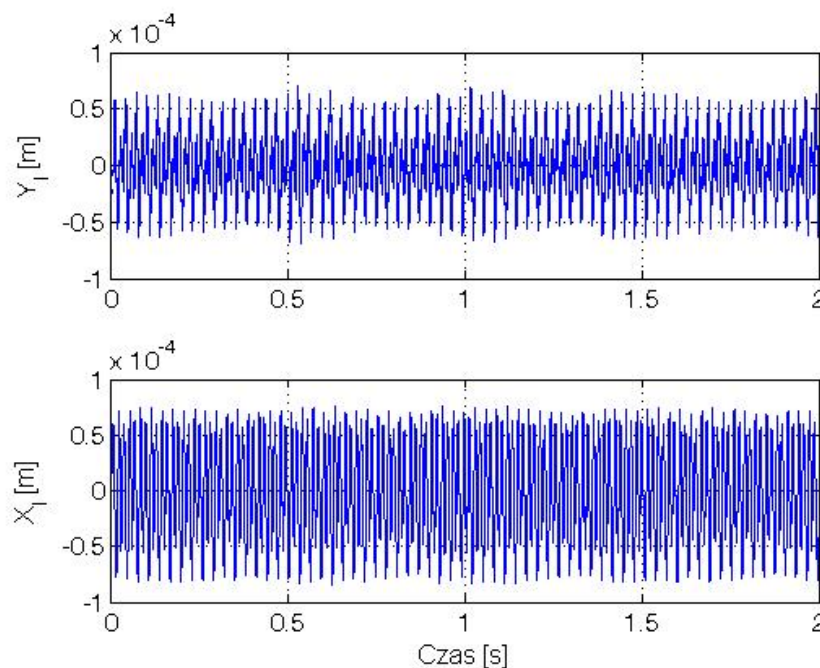
#### 4.2.3. Dynamika wirnika w ruchu obrotowym

Następne badania dotyczyły analizy dynamiki wirnika obracającego się w zakresie prędkości obrotowych od 0 do 2000 [obr/min]. Badania przeprowadzono dla układu z regulatorem PID. Na rys. 4.14 przedstawiono trajektorię ruchu środka geometrycznego wirnika obracającego się z prędkością 2000 [obr/min]. Nastawy regulatora PID są następujące:  $k_p=5$   $k_I=50$  i  $k_D=0.01$ . Prąd punktu pracy wynosił  $i_0=2$  [A].



Rys. 4.14. Trajektoria ruchu środka geometrycznego wirnika w płaszczyźnie łożyska lewego

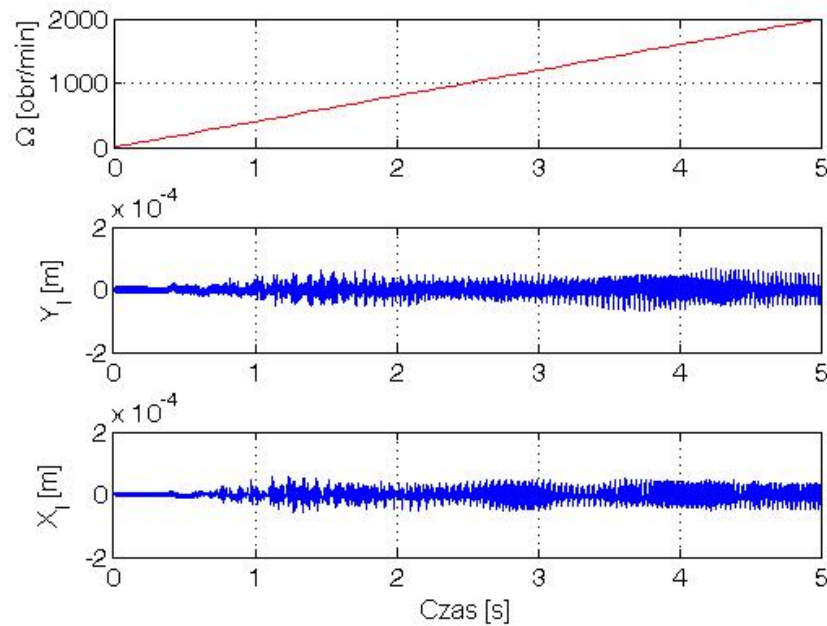
Na rys. 4.15 przedstawiono przebiegi drgań wirnika zarejestrowane w osi  $y$  i  $x$  lewego łożyska dla prędkości obrotowej równej 2000 [obr/min].



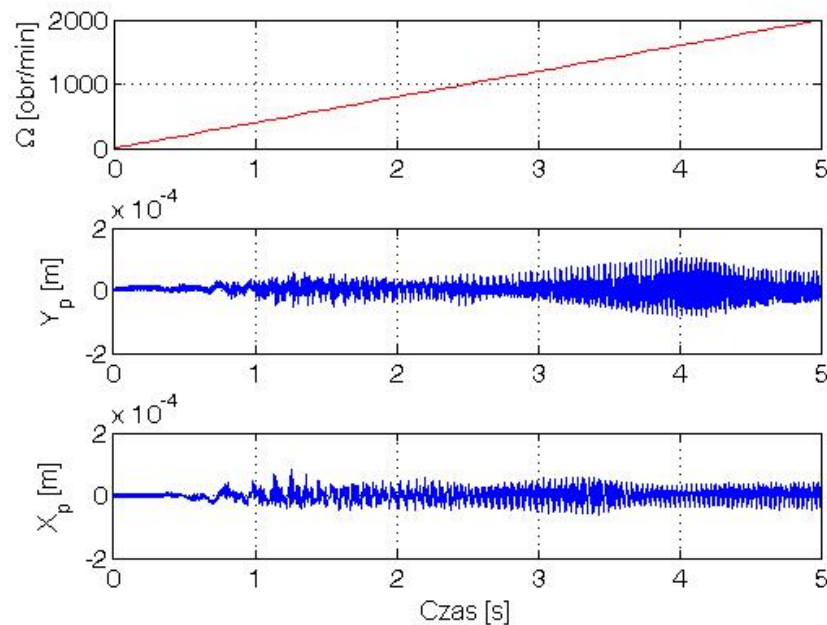
Rys. 4.15. Przebiegi drgań wirnika w płaszczyźnie łożyska lewego

Następne badania dotyczą zachowania się zawieszenia magnetycznego przy zmianie prędkości obrotowej (*Swept-Sine*) w zakresie od 0 do 2000 [obr/min]. Częstotliwość obrotowa wirnika wzrasta liniowo.

Na rys. 4.16 i 4.17 przedstawiono przebieg narastającej prędkości obrotowej i przebieg drgań wirnika w osi  $x$  i  $y$  zarejestrowane w płaszczyźnie pomiarowej łożyska lewego i prawego.



Rys. 4.16. Przebieg drgań wirnika w łożysku lewym

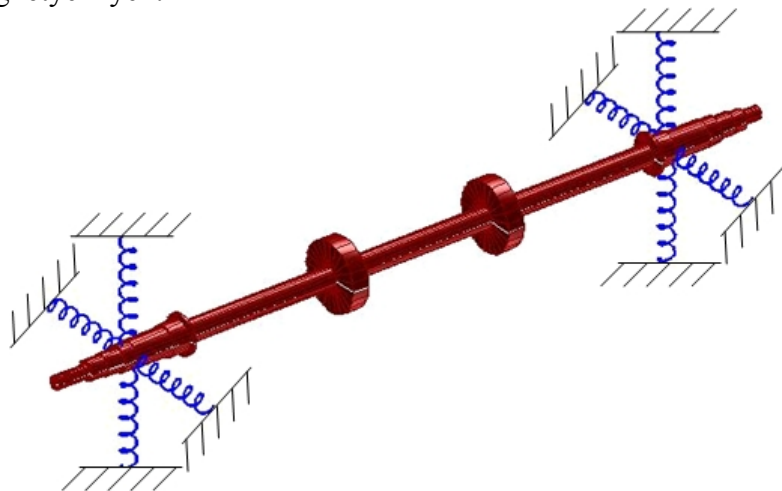


Rys. 4.17. Przebieg drgań wirnika w łożysku prawym

Na wykresach 4.16 i 4.17 widać zmienną amplitudę drgań wirnika w funkcji częstotliwości wymuszenia. Charakterystyki *Swept-Sine* pozwalają oszacować poszczególne częstotliwości dudnień i rezonanse.

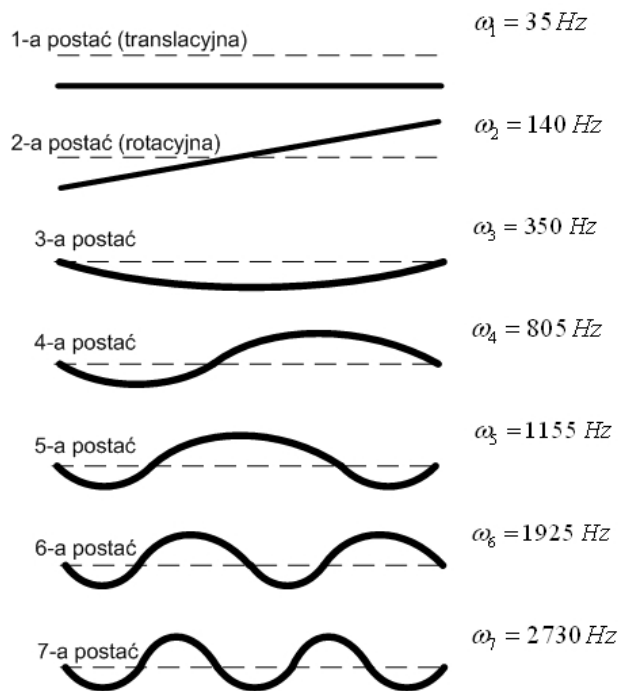
### 4.3. Badania postaci drgań własnych wirnika

W celu przeprowadzenia analizy dynamicznej wirnika zamodelowano strukturę wirnika metodą elementów skończonych zrealizowaną w środowisku Matlab. Model łożyskowania wirnika umożliwia uwzględnienie geometrii wirnika, współczynników sprężystości i tłumienia łożysk, tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego, sił zewnętrznych, niewyważenia, rozłożenia masy skupionej oraz efektów giroskopowych. Dane wejściowe obiektu są takie same jak w wypadku badań symulacyjnych. Na rys. 4.18 przedstawiono model wirnika z punktami podparcia łożysk magnetycznych.



Rys. 4.18. Model MES wirnika

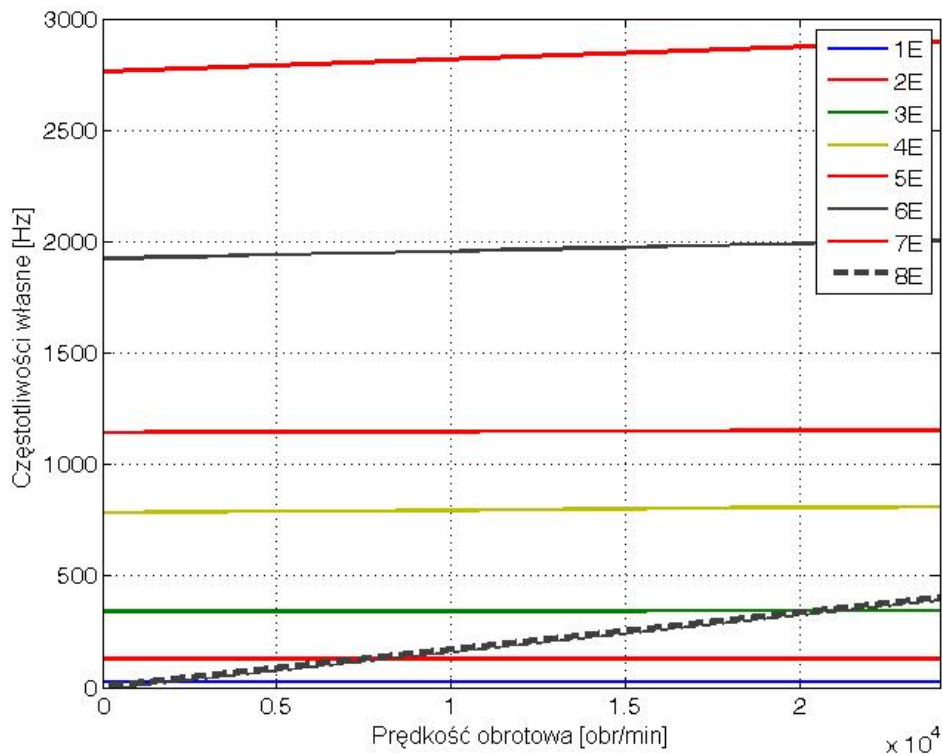
Współczynniki sztywności sprężyn można znaleźć przez badanie układu zamkniętego z regulatorem PD. Wynikiem kolejnych badań są uzyskane wartości częstotliwości kolejnych postaci drgań wirnika. Na rys. 4.19 przedstawiono kilka kolejnych postaci drgań wirnika.



Rys. 4.19. Postacie drgań własnych wirnika

Zaprojektowany wirnik po przekroczeniu prędkości 350 [Hz] staje się wirnikiem giętkim. Kolejne wyniki badań symulacyjnych przedstawiono w formie diagramu *Cambella*.

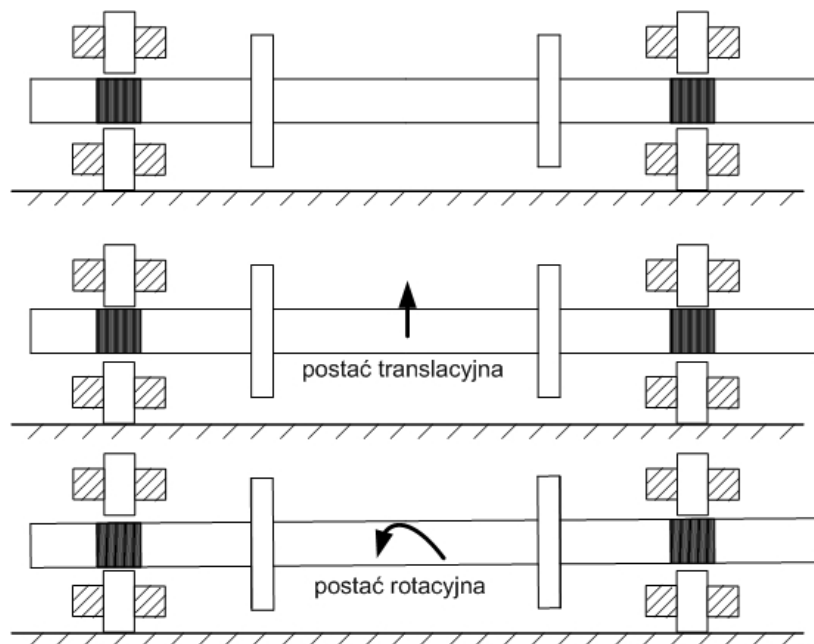
Diagram *Cambella* przedstawia zależność kolejnych częstotliwości własnych od prędkości obrotowej wirnika. Na rys. 4.20 przedstawiono wykres *Cambella* dla kilku pierwszych postaci drgań własnych wirnika.



Rys. 4.20. Diagram *Cambella*

Linia 8E z rys. 4.20 przedstawia prędkość własną wirnika. Wykres *Cambella* wykonano dla prędkości obrotowej wirnika od 0 do 30000 [obr/min].

Dwie podstawowe kontrolowane przez układ sterowania postacie drgań wirnika sztywnego (translacyjna i rotacyjna) przedstawiono na rys. 4.21.



Rys. 4.21. Postacie drgań wirnika sztywnego

## Rozdział 5. Cele, teza i zakres pracy

### 5.1. Cele pracy

Badania eksperymentalne prezentowane w poprzednim rozdziale (rozdział 4) wykazały, że układ z regulatorem PID zbudowany dla nieobrcającego się wirnika zapewnia stabilność pracy zawieszenia magnetycznego w ograniczonym zakresie prędkości obrotowych. Dla wyższych prędkości obrotowych (powyżej 2100 [obr/min]) wskutek narastania sił odśrodkowych związanych z niewyważeniem wirnika oraz z powodu wzrostu sił giroskopowych wirnik tracił stabilność. Prowadziło to do gwałtownego upadku wirnika na łożyska bezpieczeństwa. Wyhamowaniu ulegała jego prędkość obrotowa, a działanie składowej całkującej w regulatorze PID prowadziło do gwałtownego wzrostu wartości prądu w łożyskach magnetycznych, a tym samym do nasycenia obwodów magnetycznych.

Zastosowana metoda sterowania PID nie umożliwia wykorzystania pełnej wiedzy o dynamice wirnika przy różnych prędkościach obrotowych. Zmieniające się wraz z prędkością obrotową parametry obiektu mają wpływ na jego stabilność. Tym samym regulator PID zbudowany dla nieobrcającego się wirnika może być wykorzystany jedynie w niskoobrotowych maszynach wirnikowych. Uzyskanie znacznie wyższych prędkości obrotowych wirnika wymaga zastosowania innej metody sterowania. Na tej podstawie sformułowano główne cele niniejszej pracy:

- opracowanie lokalnych regulatorów niskiego rzędu, które zapewniają odpowiednią jakość i stabilność całego układu w szerokim zakresie prędkości obrotowych,
- przeprowadzenie badań symulacyjnych pozwalających na wstępną weryfikację opracowanych praw sterowania odpornego,
- przeprowadzenie badań eksperymentalnych potwierdzających wyniki uzyskane drogą analityczną,
- zastosowanie opracowanej metody do sterowania drganiami wirnika w wysokoobrotowej maszynie wirnikowej.

### 5.2. Problemy sterowania zawieszeniem magnetycznym w wysokoobrotowej maszynie wirnikowej

Ze względu na problemy sterowania układ łożyskowania magnetycznego jest niezwykle trudnym obiektem sterowania. Układ posiada szereg ograniczeń i negatywnych cech związanych ze sterowaniem:

- obiekt jest nie-minimalno fazowy,
- obiekt posiada ujemną sztywność,
- obiekt jest nieliniowy (zależność siły nośnej łożyska w funkcji prądu sterującego jest nieliniowa),
- występują efekty nasycenia wzmacniaczy mocy oraz układów magnetycznych łożyska,
- maksymalne obciążenie łożyska jest ograniczone i zależy od wielu parametrów zawieszenia magnetycznego [73],
- występują liczne straty związane z efektami cieplnymi, efektami histerezy obwodów magnetycznych i prądami wirowymi generowanymi przy dużych prędkościach obrotowych,
- parametry układu są zmienne w czasie i zależne od prędkości obrotowej wirnika,
- sygnały wejściowe i wyjściowe są ograniczone co do maksymalnej wartości i pasma przenoszenia,
- wirnik charakteryzuje się wieloma giętkimi postaciami drgań uaktywniającymi się wraz ze wzrostem prędkości obrotowej,

- w układzie występują niepewności parametrów, które zależą od prędkości obrotowej wirnika i temperatury,
- struktura układu zamkniętego wymusza nałożenie szeregu ograniczeń na sygnały wejściowe i wyjściowe, aby uniknąć nasycenia członów wykonawczych oraz członów pomiarowych,
- wirnik łożyskowany magnetycznie obracający się z dużą prędkością obrotową (w stanowisku laboratoryjnym możliwe jest osiągnięcie 24000 [obr/min]) generuje szereg efektów mechanicznych takich jak: wibracje, efekty giroskopowe, itd.

Wszystkie te cechy czynią szybkoobrotowy wirnik łożyskowany magnetycznie obiektem bardzo atrakcyjnym dla badaczy i wymuszają stosowanie coraz to bardziej zaawansowanych metod sterowania.

Jednym z problemów rejestrowanych obecnie jest szukanie bardziej efektywnych metod sterowania układami łożyskowania magnetycznego. Konwencjonalne metody sterowania położeniem wirnika łożyskowanego magnetycznie (np. sterowanie PD/PID, sterowanie adaptacyjne, LQR, itd.) przyjmują obiekt liniowy, stacjonarny tzw. LTI (ang. *Linear Time Invariant*). Większość tych metod ogranicza się do obiektów stacjonarnych. Takie założenie jest uzasadnione, jeżeli wirnik obraca się ze stałą prędkością. Jeżeli natomiast zakres zmian prędkości obrotowych jest szeroki, warunki stacjonarne układu nie są już dłużej spełnione. Dzieje się tak, ponieważ macierz stanu obiektu jest funkcją prędkości obrotowej wirnika. Oznacza to, że dynamika obiektu zmienia się znacząco wraz ze wzrostem prędkości obrotowej wirnika. Duże prędkości obrotowe oznaczają pobudzanie kolejnych postaci drgań wirnika, występowanie efektów giroskopowych, co może prowadzić do utraty stabilności zawieszenia magnetycznego. W konsekwencji standardowe algorytmy sterowania, które nie uwzględniają zmiennej natury parametrów obiektu już na etapie projektowania regulatora nie mogą być zastosowane do sterowania łożyskowaniem magnetycznym w przypadku dużych zmian prędkości obrotowych wirnika.

### 5.3. Przegląd metod sterowania (w tym sterowania odpornego)

Metody sterowania możemy podzielić na trzy zasadnicze grupy:

- konwencjonalne metody sterowania szczególnie intensywnie rozwijane do lat pięćdziesiątych dwudziestego wieku. Nastąpił szczególny rozwój układów sterowania SISO, gdzie parametry regulatora były kształtowane na podstawie charakterystyk obiektu w dziedzinie częstotliwości (ang. *Feedback Theory*),
- metody przestrzeni stanów rozwijane od lat pięćdziesiątych ubiegłego wieku. Są to na przykład metody sterowania optymalnego (ang. *Optimal Control*). Metody te pozwalają na projektowanie optymalnych układów sterowania w dziedzinie czasu,
- w ciągu ostatnich dwudziestu lat intensywnie rozwijane są metody łączące zalety powyższych grup metod. Szczególnie intensywnie rozwijane są metody sterowania odpornego.

Użyta w projektowaniu regulatora metoda sterowania powinna zapewnić obserwowalność, sterowalność, stabilność i pożądaną jakość układu zamkniętego.

- Obserwowalność – jest to zdolność do pomiaru lub estymacji stanu układu,
- sterowalność – jest to zdolność do „przesunięcia” układu z dowolnego stanu początkowego w dany stan końcowy,
- stabilność – układ jest stabilny, jeżeli posiada ograniczony sygnał odpowiedzi układu na ograniczony sygnał wymuszenia,

- jakość, w tym jakość statyczna i dynamiczna regulacji – to zapewnienie dla obranych kryteriów odpowiedniego przebiegu statycznych i dynamicznych charakterystyk układu zamkniętego.

Poniżej przedstawiono zwięzły przegląd stosowanych metod sterowania układami lewitacji magnetycznej w różnych aplikacjach.

Wiele układów aktywnych zawiesznień magnetycznych działa na zasadzie sterowania typu PID. Jak to wyżej pokazano regulator PID jest prosty w modelowaniu i szybki w implementacji. G. Schweitzer i inni [75, 76, 77] zaimplementowali regulator PID w wielu aplikacjach, np. w wysokoobrotowym wrzecionie do precyzyjnego frezowania (ang. *Electromagnetic Spindle*). Dobre rezultaty osiąga się przy pomocy sterowania LQR, które pozwala na uwzględnienie niektórych zakłóceń układu zamkniętego [78]. Sterowanie rozmyte stosowane w pracy [49] nie jest efektywną metodą sterowania ze względu na dobrze zdefiniowane parametry obiektu jakim jest łożysko magnetyczne. Najlepsze efekty uzyskuje się w wypadku optymalnych metod sterowania, w tym sterowania odpornego. W literaturze światowej można znaleźć wiele prac z zakresu sterowania odpornego układami lewitacji magnetycznej. Znaczący wpływ w rozwój samej teorii sterowania odpornego (ang. *Robust Control Theory*) opartej na minimalizacji normy  $\|H\|_{\infty}$  lub  $\|H\|_2$  wnieśli Glover i Doyle [14].

Znane są różne zastosowania metod sterowania odpornego w układach wykorzystujących lewitację magnetyczną. Najważniejsze to np.:

- zastosowanie regulatora odpornego  $H_{\infty}$  do sterowania aktywnym łożyskiem magnetycznym [79],
- sterowanie odporne z regulatorem  $H_{\infty}$  dynamiką dysku zawieszzonego magnetycznie [47],
- regulator  $H_{\infty}$  sterujący zawieszeniem magnetycznym z uwzględnieniem niepewności obiektu [88],
- optymalne sterowanie łożyskiem magnetycznym bez użycia układu sterowania prądem punktu pracy [86],
- regulator  $H_{\infty}$  sterujący zawieszeniem magnetycznym manipulatora [89],
- regulator  $H_{\infty}$  sterujący zawieszeniem magnetycznym z uwzględnieniem ograniczeń sygnałów [83],
- sterowanie odporne zawieszeniem magnetycznym zasobnika energii kinetycznej [50],
- regulator  $H_{\infty}$  sterujący łożyskowaniem magnetycznym wysokoobrotowego turbokompresora [17],
- regulator  $H_{\infty}$  sterujący łożyskiem samopomiarowym, w którym cewka jest jednocześnie członem wykonawczym i pomiarowym [82],
- sterowanie zawieszeniem magnetycznym turbosprężarki o mocy 1 [MW] [85],
- inne zastosowania sterowania z użyciem regulatora  $H_{\infty}$  [2, 7, 10, 30, 63].

Metoda sterowania odpornego stanowi rozbudowane narzędzie pozwalające na projektowanie regulatora dla danego obiektu z uwzględnieniem założonych właściwości układu regulacji. Sterowanie odporne pozwala uwzględnić wszystkie negatywne – ze względu na sterowanie – cechy obiektu jakim jest zawieszenie magnetyczne wirnika.

#### 5.4. Teza i zakres pracy

Teza pracy brzmi następująco:

***Dzięki rozprężeniu dynamiki wirnika sztywnego względem osi sterowania i uwzględnieniu pominiętej dynamiki w lokalnych modelach niepewności możliwe jest wyznaczenie lokalnych regulatorów odpornych zapewniających stabilną odporność globalnego układu wirnika łożyskowanego magnetycznie.***

Zakres pracy obejmuje następujące zagadnienia:

- opracowanie modelu układu otwartego dla maszyny wirnikowej,
- opracowanie modelu rozprężonego względem osi sterowania dla wirnika sztywnego,
- zaprojektowanie lokalnych (sterujących niezależnie każdym ze stopni swobody wirnika) regulatorów PID,
- zbudowanie modeli niepewności przez uwzględnienie zmian parametrów wirnika przy różnych prędkościach obrotowych,
- uwzględnienie zakłóceń i ograniczeń sygnałów występujących w badanym układzie,
- opracowanie optymalnych regulatorów odpornych  $H_\infty$  i  $H_2$  (sterujących niezależnie każdym ze stopni swobody wirnika),
- przeprowadzenie symulacji pracy układów lokalnych i układu globalnego,
- wykonanie stanowiska badawczego i zaimplementowanie algorytmu sterowania odpornego,
- badania eksperymentalne modelu nominalnego,
- przeprowadzenie badań doświadczalnych wirnika łożyskowanego magnetycznie ze sterowaniem odpornym,
- ocena stabilności i jakości układu sterowania.

## Rozdział 6. Modelowanie niepewności w układzie zawieszenia magnetycznego

Z definicji T. Namerikawa i M. Fujita [59÷62] różnica między modelem nominalnym a obiektem rzeczywistym traktowana jest jako niepewność i zapisywana modelem niepewności. Standardowe regulatory typu PID w układach AMB są stosowane często w pętli sprzężenia zwrotnego jako kompensatory. Nie zapewniają one odpowiedniej stabilności układu przy dużych prędkościach obrotowych wirnika. W szybkoobrotowych układach z łożyskami magnetycznymi należy stosować bardziej zaawansowane metody sterowania pozwalające uwzględnić zmiany parametrów układu w czasie, niezamodelowaną dynamikę, błędy linearyzacji, itd.

Projektowanie regulatora musi bazować nie tylko na modelu, jakim został opisany obiekt, ale także muszą być wzięte pod uwagę warunki, w jakich model obiektu dokładnie odzwierciedla cechy obiektu rzeczywistego. Wymaga się, aby regulator pracował prawidłowo (zachowanie wymaganej jakości regulacji) w warunkach, w których stan pracy obiektu różni się od stanu opisanego modelem nominalnym. Istnieje kilka przyczyn, dla których stan procesu nie może być całkowicie przewidziany podczas projektowania regulatora. Po pierwsze na obiekt mogą działać różnego rodzaju zakłócenia, których właściwości mogą się zmieniać w czasie. Po drugie dynamika obiektu może się różnić od tej opisanej modelem nominalnym. Spowodowane to jest różnego rodzaju zużyciem, tarciami, efektami cieplnymi obwodów magnetycznych łożysk, histerezą, itp. Dodatkowo model zakłóceń także może być nieściśły w czasie, co może powodować niestabilność układu zamkniętego.

Jedną z metod pozwalających na uwzględnienie niepewności obiektu jest sterownie odporne. Regulator odporny budowany jest dla modelu rozszerzonego składającego się z modelu nominalnego obiektu i modelu niepewności obiektu. **Model rozszerzony odpowiada stanom układu rzeczywistego w szerokim zakresie jego pracy, ale nie jest modelem globalnym.**

### 6.1. Źródła i rodzaje niepewności

Wyróżnia się trzy główne źródła niepewności obiektu:

- niekompletna wiedza o obiekcie – nie wszystkie parametry obiektu mogą być zdeterminowane,
- uproszczenie modelu obiektu – nawet jeśli obiekt jest dokładnie znany, to model obiektu jest często uproszczony w celu ułatwienia zadania projektowania i procesu obliczeń numerycznych,
- niekompletna struktura modelu – regulator jest często projektowany na bazie modelu liniowego, w związku z tym wszystkie nieliniowości w członach pomiarowych i wykonawczych są pomijane. Te i inne rodzaje nieliniowości powinny być uwzględnione w modelowaniu obiektu.

Podstawowe rodzaje niepewności:

- niepewność strukturalna [71], która dzieli się na:
  - niepewność parametryczną,
  - niepewność związaną z wieloma modelami obiektu,
- niepewność niestrukturalna reprezentująca elementy zależne od częstotliwości, dzieli się na:
  - nieliniowość addytywną,
  - niepewność multiplikatywną,
  - niepewność sprzężenia zwrotnego.

Źródłami niepewności niestrukturalnej są:

- niezamodelowana dynamika,
- nieliniowości np. nasycenie członów wykonawczych,
- niepewność w dziedzinie częstotliwości,
- zakłócenia obiektu.

## 6.2. Model nieliniowy obiektu

W skład otwartego układu sterowania zawieszenia magnetycznego wchodzi wzmacniacze prądowe, łożyska magnetyczne oraz masa wirnika sprowadzona do płaszczyzn łożyskowania.

Właściwości dynamiczne zawieszenia magnetycznego zależą nie tylko od dynamiki wirnika, ale także od dynamiki cewek elektromagnetycznych łożyska magnetycznego oraz od dynamiki wzmacniaczy prądowych. Poniżej zostanie przedstawiony model dynamiki wirnika i cewek elektromagnetycznych oraz wzmacniaczy prądowych.

Dynamika wirnika i cewek elektromagnetycznych łożyska dla jednej osi sterowania opisywana jest przez następujące równania [22]:

$$F_1 - F_2 + F_z = m\ddot{x}, \quad (6.1)$$

$$u_1 = Ri_1 + L_s \frac{di_1}{dt} + L_0 x_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{i_0 + i}{x_0 - x} \right) \cong Ri_1 + \frac{d}{dt} (L_s + L_0) i_1 + k_i \frac{dx}{dt}, \quad (6.2)$$

$$u_2 = Ri_2 + L_s \frac{di_2}{dt} + L_0 x_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{i_0 - i}{x_0 + x} \right) \cong Ri_2 + \frac{d}{dt} (L_s + L_0) i_2 - k_i \frac{dx}{dt}, \quad (6.3)$$

gdzie:

$R$  – rezystancja cewki,

$L_0$  – indukcyjność nominalna cewki,

$L_s$  – indukcyjność strat cewki,

$u_1, u_2$  – napięcia odpowiednio w górnej i dolnej cewce, gdzie  $u_1 = u_0 + u$ ,  $u_2 = u_0 - u$ ,

$u$  – napięcie sterujące,

$u_0$  – napięcie punktu pracy.

Równanie (6.1) jest powtórzeniem równania (2.1), a siły  $F_1, F_2$  są objaśnione wzorem (2.2). Równania (6.2, 6.3) wskazują na nieliniowy charakter prądu sterującego w łożysku magnetycznym. Druga część równań (6.2, 6.3) jest wynikiem linearyzacji w punkcie  $x = x_0$ . Dodatkowo w obiekcie występują parametry niepewne, których wartości mogą się zmieniać.

Równania opisujące dynamikę cewek (6.2, 6.3) można zastąpić równaniami dynamicznymi, z których jedno jest związane z dynamiką punktu pracy, a drugie z dynamiką sterowania drganiami wokół punktu pracy. Na potrzeby sterowania zostały zastosowane wzmacniacze prądowe, dla których związek pomiędzy napięciem sterującym a prądem jest proporcjonalny.

$$u_0 - u = k_c (i_0 - i), \text{ czyli } u \approx k_c i, \quad (6.4)$$

gdzie:

$k_c$  – wzmacnienie wzmacniacza, które teoretycznie wynosi nieskończoność, natomiast w praktyce ze względu na szumy pomiarowe przyjmuje się jako wartość skończoną.

Jak się okazało podczas badań, dynamika cewek łożyska magnetycznego jest liniowa tylko do częstotliwości około 238 [rad/s], po przekroczeniu której następuje proporcjonalnie wzrastające tłumienie. Dlatego w niniejszej pracy wpływ poszczególnych nieliniowości obiektu

sterowania, w tym cewek elektromagnetycznych został uwzględniony w postaci dodatkowych modeli niepewności dodanych do obiektu. Proces modelowania niepewności obiektu został przedstawiony w tym rozdziale.

Z uwagi na szeroki liniowy zakres pracy wzmacniaczy prądowych, dynamika wzmacniacza została opisana współczynnikiem proporcjonalności  $k_c=0.5$ .

### 6.3. Niepewność strukturalna

Niepewność strukturalna może być wynikiem:

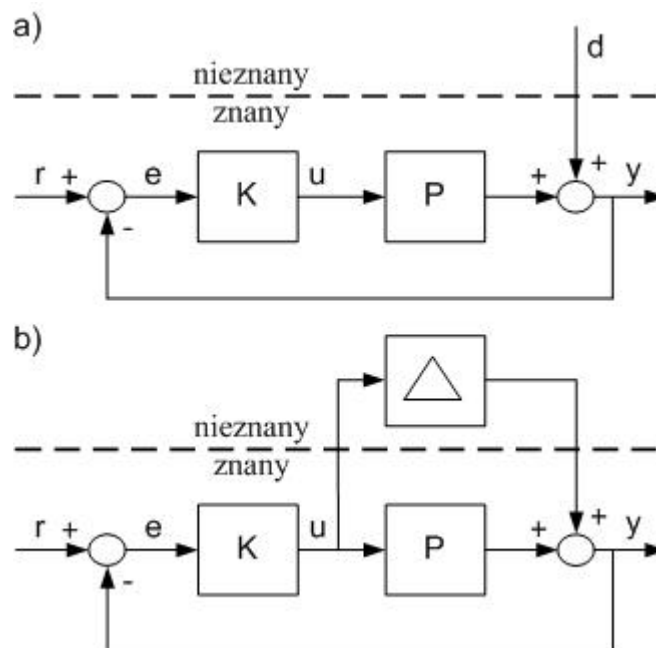
- niepewności samego obiektu sterowania,
- niepewności zakłóceń działających na obiekt,
- niepewności sygnałów szumu działających na układ pomiarowy.

Każda z tych niepewności może zawierać komponenty addytywne i multiplikatywne.

W układzie aktywnego zawieszenia magnetycznego jako główne rodzaje niepewności będą rozpatrywane:

- błędy linearyzacji sił elektromagnetycznych,
- niezamodelowana dynamika elektromagnesu,
- niepewność parametrów  $k_i$ ,  $k_s$  opisanych jako niepewność parametryczna,
- zmiany położenia wirnika  $x$  w szczelinie powietrznej łożyska,
- niepewność parametrów elektromagnesu.

Schemat układu regulacji z niepewnością modelu zakłóceń i modelu obiektu przedstawiono na rys. 6.1.



Rys. 6.1. Niepewność obiektu w układzie zamkniętym, a) układ zamknięty z nieznanym modelem zakłóceń, b) układ zamknięty z dołączoną niepewnością obiektu

#### 6.4. Postać addytywna niepewności

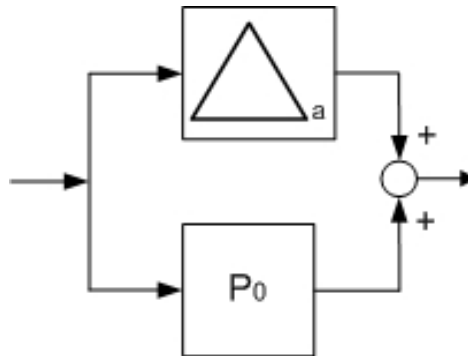
Model obiektu z niepewnością włączoną addytywnie można zapisać następująco [84]:

$$P(s) = P_0(s) + \Delta_a(s), \quad (6.5)$$

gdzie:

- $\Delta_a$  – blok opisujący niepewność addytywną,
- $P_0(s)$  – model nominalny obiektu,
- $P(s)$  – model rzeczywisty obiektu.

Sposób addytywny włączenia niepewności w obiekt został przedstawiony na rys. 6.2.



Rys. 6.2. Model niepewności obiektu – postać addytywna

Model nominalny obiektu powinien odpowiadać jak najbardziej obiektowi rzeczywistemu tak, aby blok niepewności addytywnej był jak najmniejszy. Jeżeli układ zawieszenia magnetycznego opiszemy następującym modelem nominalnym:

$$P_{w0}(s) = \frac{2k_{i0}}{m_0 s^2 - 2k_{s0}}, \quad (6.6)$$

gdzie  $m_0$ ,  $k_{i0}$ ,  $k_{s0}$  – parametry nominalne (masa, sztywność prądowa i przemieszczeniowa), to model opisujący niepewność addytywną jest następujący:

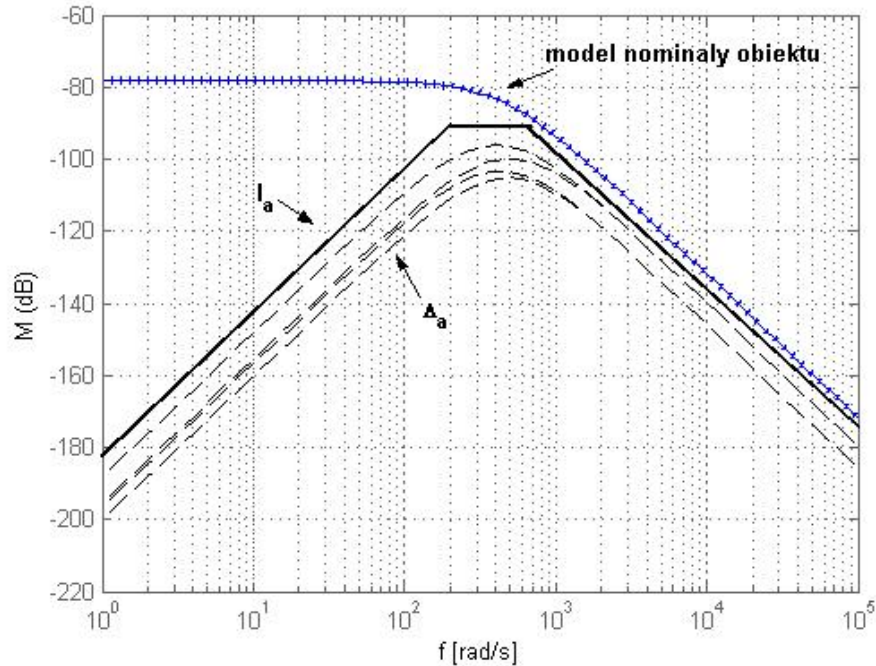
$$\Delta_a(s) = P_w(s) - P_{w0}(s). \quad (6.7)$$

Aby uzyskać informację o właściwościach bloku niepewności należy przedstawić jej charakterystykę częstotliwościową, którą można zapisać następująco:

$$|\Delta_a(j\omega)| = |P_w(j\omega) - P_{w0}(j\omega)| \leq l_a(j\omega), \forall \omega. \quad (6.8)$$

Maksymalne wartości bloku niepewności ogranicza funkcja  $l_a(j\omega)$ . W celu określenia  $l_a(j\omega)$  należy przedstawić wykres  $\Delta_a(j\omega)$ .

Na rys. 6.3 przedstawiono odpowiedź częstotliwościową modelu niepewności  $\Delta_a(j\omega)$ , funkcji ograniczającej  $l_a(j\omega)$  i modelu nominalnego obiektu (6.6) dla następujących danych:  $m_0=3$  [kg],  $k_{i0}=13.62$  [N/A],  $k_{s0}=97656$  [N/m].



Rys. 6.3. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa modelu niepewności addytywnej

### 6.5. Postać multiplikatywna niepewności

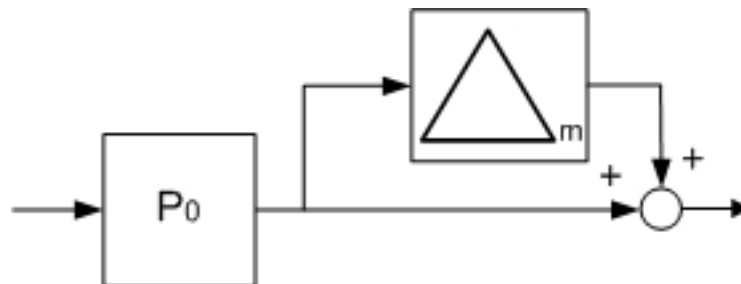
Model obiektu z niepewnością włączoną multiplikatywnie można zapisać następująco:

$$P(s) = P_0(s)(I + \Delta_m(s)), \quad (6.9)$$

gdzie:

$\Delta_m$  – blok opisujący niepewność multiplikatywną.

Sposób multiplikatywny włączenia niepewności w obiekt został przedstawiony na rys. 6.4.



Rys. 6.4. Model niepewności obiektu – postać multiplikatywna

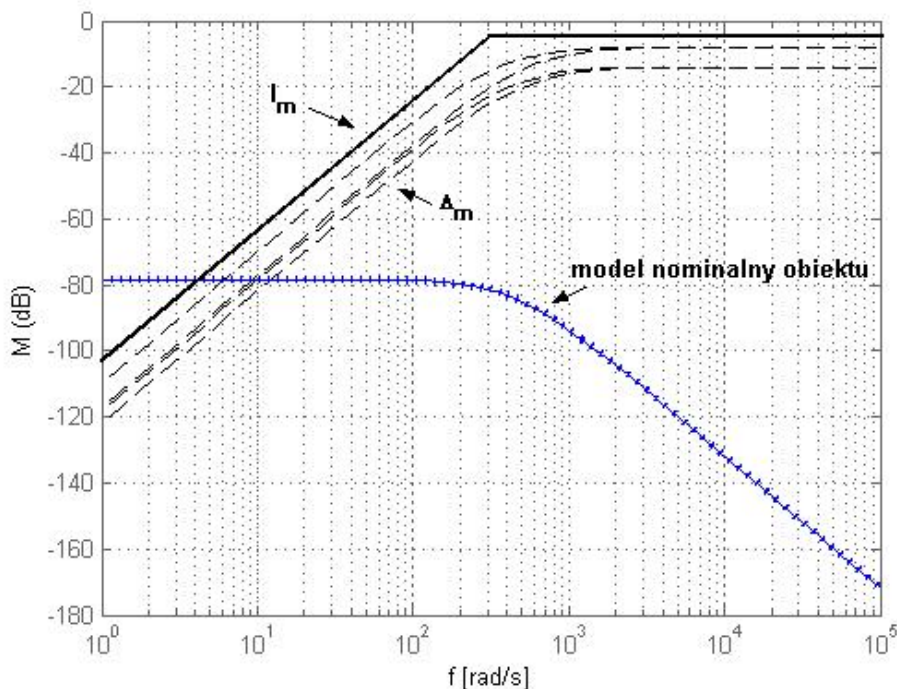
Dla modelu nominalnego (6.6) niepewność multiplikatywna opisana jest następująco:

$$\Delta_m(s) = \frac{P_w(s) - P_{w0}(s)}{P_{w0}(s)}. \quad (6.10)$$

W celu wyznaczenia maksymalnych wartości funkcji niepewności multiplikatywnej należy wyznaczyć jej amplitudową charakterystykę częstotliwościową:

$$|\Delta_m(j\omega)| = \frac{|P_w(s) - P_{w0}(s)|}{|P_{w0}(s)|} \leq l_m(j\omega), \forall \omega. \quad (6.11)$$

Maksymalne wartości bloku niepewności multiplikatywnej ogranicza funkcja  $l_m(j\omega)$ . Na rys. 6.5 przedstawiono odpowiedź częstotliwościową bloku niepewności multiplikatywnej, funkcji ograniczającej  $l_m(j\omega)$  oraz nominalnego modelu łożyska magnetycznego (6.6).



Rys. 6.5. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa modelu niepewności addytywnej

Blok opisujący niepewność nie jest znany, ale znana jest funkcja ograniczająca  $l_{a/m}(j\omega)$ . Model nominalny dobrze odzwierciedla aktualną dynamikę obiektu, jeżeli funkcja opisująca niepewność jest minimalna.

Ilościową miarą niepewności jest norma  $\|H_\infty\|$ , która zgodnie z twierdzeniem o małym wzmocnieniu (ang. *Small Gain Theorem*) nie może być większa od jedności (patrz załącznik C). Dlatego w ogólnym przypadku opis bloku  $\Delta$  może być przyjęty w postaci ograniczenia normy:  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ . Opis ten jest prosty, jednak powoduje oszacowanie z dużym zapasem, ponieważ żąda się spełnienia tego warunku dla wszystkich częstotliwości. Dlatego wprowadza się transmitancję wagową  $W_m(s)$  (waga ograniczająca wpływ niepewności multiplikatywnej) lub  $W_a(s)$  (waga ograniczająca wpływ niepewności addytywnej) i opisuje się niepewność za pomocą normy:  $\|\Delta W_m\|_\infty \leq 1$ . Pozwala to na spełnienie tego warunku tylko dla pewnego zakresu częstotliwości określonego wagą  $W_m(s)$ .

Do wyznaczenia modelu niepewności posługujemy się funkcją wagową  $W_m$  lub  $W_a$ . Musimy znaleźć taką funkcję, aby był spełniony następujący warunek:

$$\|\Delta(j\omega)\| \leq \|W_m(j\omega)\| \quad \text{lub} \quad \|\Delta(j\omega)\| \leq \|W_a(j\omega)\|. \quad (6.12)$$

Jednakże, jeżeli stan modelu odbiega od stanu obiektu w nominalnym punkcie pracy, wtedy model nominalny nie jest już prawidłowym opisem obiektu fizycznego.

## 6.6. Niepewność parametryczna

Łożysko magnetyczne jest nieliniowym obiektem sterowania z niestacjonarnymi parametrami. Wymusza to projektowanie modeli niepewności, aby w ten sposób uwzględnić zmiany parametrów obiektu zachodzące w czasie jego eksploatacji.

Model nominalny obiektu wyznaczony jest dla parametrów nominalnych (zlinearyzowany w danym punkcie pracy) i prawidłowo reprezentuje obiekt rzeczywisty tylko w otoczeniu punktu pracy. Jednak, jeżeli stan obiektu odbiega od stanu opisanego przez model nominalny, to model nominalny nie jest już dłużej prawidłowym odzwierciedleniem obiektu rzeczywistego. Dlatego dołączenie modelu niepewności do modelu obiektu jest niezbędne, aby uzyskać regulator zapewniający stabilną pracę układu we wszystkich jego stanach.

W układzie wirnika łożyskowanego magnetycznie wyróżniamy kilka parametrów niepewnych (tzn. takich, których wartość może zmieniać się w czasie) są to:  $k_s$  – sztywność przemieszczeniowa,  $k_i$  – sztywność prądowa,  $L$  – indukcyjność magnetyczna i  $R$  – rezystancja. Uwzględniając niepewność powyższych parametrów otrzymujemy nowy, rozszerzony model obiektu złożony z modelu nominalnego i modelu niepewności. Rozszerzony model obiektu reprezentuje zachowanie się obiektu rzeczywistego w szerokim tego słowa znaczeniu, jednak nie globalnie.

Modele niepewności parametrów:  $k_i$ ,  $k_s$ ,  $L$ , i  $R$  można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} k_i &= k_{i0} + k_{iw} \delta_i \quad \text{dla } |\delta_i| \leq 1, \\ k_s &= k_{s0} + k_{sw} \delta_s \quad \text{dla } |\delta_s| \leq 1, \\ L &= L_0 + l_w \delta_L \quad \text{dla } |\delta_L| \leq 1, \\ R &= R_0 + r_w \delta_R \quad \text{dla } |\delta_R| \leq 1 \end{aligned} \quad (6.13)$$

gdzie:

$k_{i0}$  – nominalna wartość sztywności prądowej,

$k_{s0}$  – nominalna wartość sztywności przemieszczeniowej,

$L_0$  – nominalna wartość indukcyjności magnetycznej,

$R_0$  – nominalna wartość rezystancji,

$k_{iw}$ ,  $k_{sw}$ ,  $l_w$ ,  $r_w$  – wagi niepewności poszczególnych parametrów (ilościowa miara niepewności),

$\delta_i$ ,  $\delta_s$ ,  $\delta_L$ ,  $\delta_R$  – poszczególne niepewności ograniczone normą  $|\delta_{i,s,L,R}| \leq 1$ .

Zakres zmian położenia wirnika  $x$  w szczelinie powietrznej jest ograniczony przez szerokość szczeliny powietrznej  $x_0$ . W naszym przypadku nominalna szerokość szczeliny powietrznej  $x_0$  wynosi 0.0004 [m]. Każda zmiana punktu pracy powoduje zmianę wartości parametrów  $k_i$  i  $k_s$  dla założonego zakresu zmian położenia wirnika  $-0.0002 \leq x \leq 0.0002$  [m] wartości parametrów niepewnych zestawiono w tabeli 6.1.

Tabela 6.1.

Parametr	Wartość nominalna	Odchylenie	
		min	max
$x_0$ [m]	0.0004	0.0002	0.0006
$L$ [H]	0.0021	0.00168	0.00252
$k_i$ [N/A]	13	9.75	16.25
$k_s$ [N/m]	97656	73242	122070

Wybór wartości parametrów niepewnych został przeprowadzony podczas analizy obiektu fizycznego. W wypadku łożyska magnetycznego przemieszczenie wirnika bezpośrednio wpływa na wartości sztywności prądowej i przemieszczeniowej.

Dla  $m=3$  i wyznaczonych wartości parametrów niepewnych  $k_i$  i  $k_s$  model układu (4.1) na granicach przedziału jest następujący:

$$P_w(s)_{\min} = \frac{19.5}{3s^2 - 146484}, \quad P_w(s)_{\max} = \frac{32.5}{3s^2 - 244140}. \quad (6.14)$$

Model niepewności opisywany jest za pomocą bloku strukturalnego  $\Delta$ , definiowanego następująco:

$$\Delta = \{\text{diag}[\delta_i, \delta_s, \delta_L, \delta_R, \Delta_y, \Delta_u] : \delta_i, \delta_s, \delta_L, \delta_R \in \mathbb{R}, \Delta_y, \Delta_u \in \mathbb{C}\}, \quad (6.15)$$

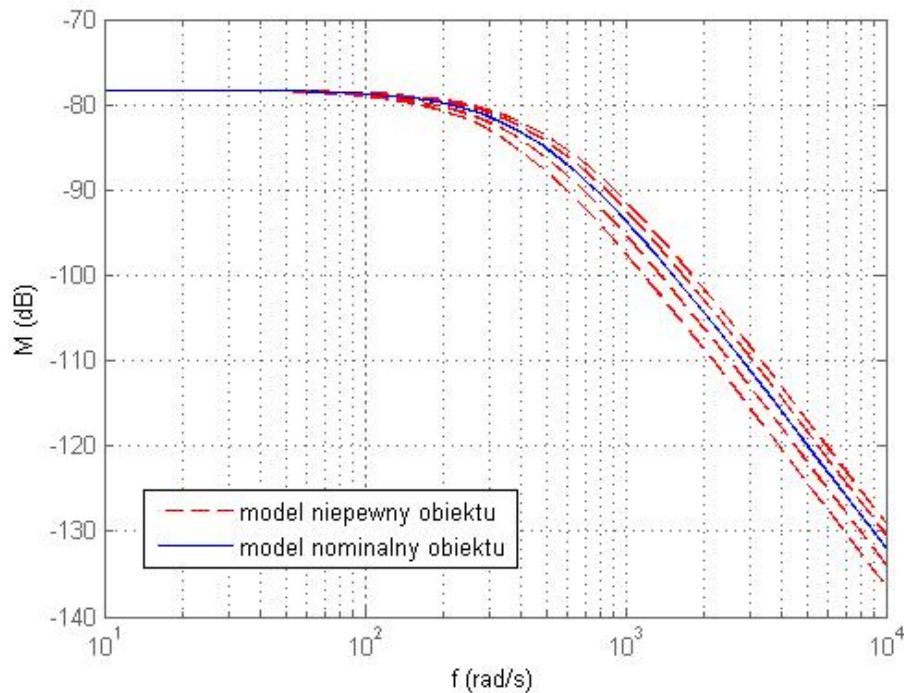
gdzie:

$\Delta_y$  – niepewność sygnału wyjściowego (mierzone przemieszczenie wirnika),

$\Delta_u$  – niepewność sygnału sterowania (sygnał działający na siłownik magnetyczny),

$|\Delta_y(j\omega)| \leq 1$  oraz  $|\Delta_u(j\omega)| \leq 1$  są ilościową miarą niepewności zgodnie z twierdzeniem o małym wzmacnieniu.

Na rys. 6.6 przedstawiono przykładowe charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe modeli zawieszenia magnetycznego (6.14) i modelu nominalnego (6.6). Parametry  $k_i$  i  $k_s$  obiektu zmieniają się w zakresie  $\pm 25\%$  od wartości nominalnych.



Rys. 6.6. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe modelu obiektu

### 6.7. Niepewność dynamiki elektromagnesu

Widome jest, że indukcyjność  $L$  i rezystancja  $R$  zależą silnie od częstotliwości prądu sterującego cewką oraz od wartości położenia wirnika  $x$ . Przeprowadzając przekształcenie wzorów opisujących dynamikę elektromagnesu (6.2, 6.3) oraz dokonując linearyzacji wyznaczono model liniowy elektromagnesu. Transmitancja operatorowa elektromagnesu jest następująca [22]:

$$P_{em}(s) = \frac{x(s)}{i(s)} = \frac{1}{(L_0 + L_s)s + R}, \quad (6.16)$$

gdzie:

$L_0$ ,  $L_s$ ,  $R$  – indukcyjność punktu pracy, indukcyjność strat i rezystancja cewki elektromagnesu.

W modelu nominalnym pominięto wpływ indukcyjności strat  $L_s$ , jako mniej znaczący. Nominalny model dynamiki elektromagnesu jest zapisany następująco:

$$P_{em0}(s) = \frac{1}{L_0 s + R_0}, \quad (6.17)$$

gdzie:

$L_0$ ,  $R_0$  – wartości nominalne zdefiniowane następująco:

$$L_0 = \frac{K_l}{2x_0}, \quad R_0 = \frac{u_0}{i_0}, \quad (6.18)$$

gdzie:

$K_l$  – stała konstrukcyjna łożyska magnetycznego,  
 $x_0$  – nominalna szerokość szczeliny powietrznej,  
 $i_0$  – prąd punktu pracy,  
 $u_0$  – napięcie punktu pracy.

**Pełny model nominalny** obiektu jest iloczynem transmitancji wynikającej z dynamiki wirnika (6.6) i dynamiki cewek elektromagnetycznych (6.17) czyli

$$P_0(s) = P_{w0}(s)P_{em0}(s) = \frac{2k_{t0}}{m_0 s^2 - k_{s0}} \cdot \frac{1}{L_0 s + R_0}. \quad (6.19)$$

W powyższym wzorze pominięto wpływ sprzężenia pomiędzy modelami (6.6) i (6.17).

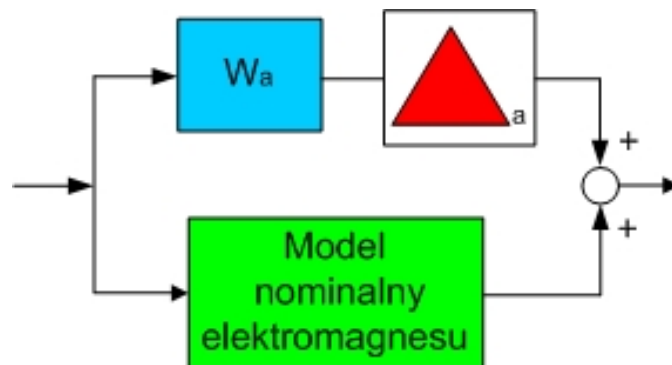
Model elektromagnesu z niepewnością addytywną został opisany następująco:

$$P_{em}(s) = \frac{1}{L_0 s + R_0} + W_a(s)\Delta_a(s), \quad (6.20)$$

gdzie:

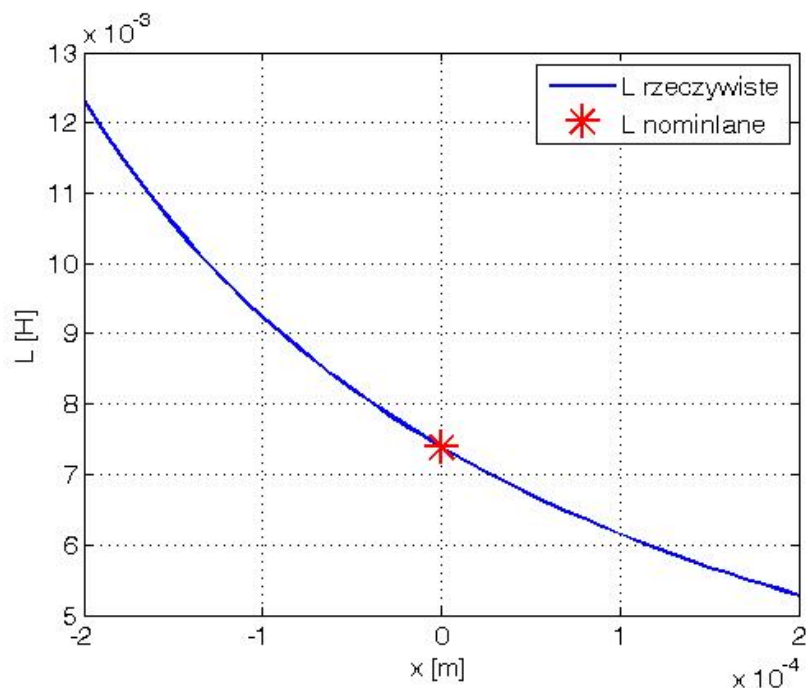
$W_a$  – funkcja wagowa nałożona na niepewność addytywną,  
 $\Delta_a$  – model niepewności addytywnej.

Model nominalny elektromagnesu wraz z modelem niepewności i funkcją wagową przedstawiono na rys. 6.7.



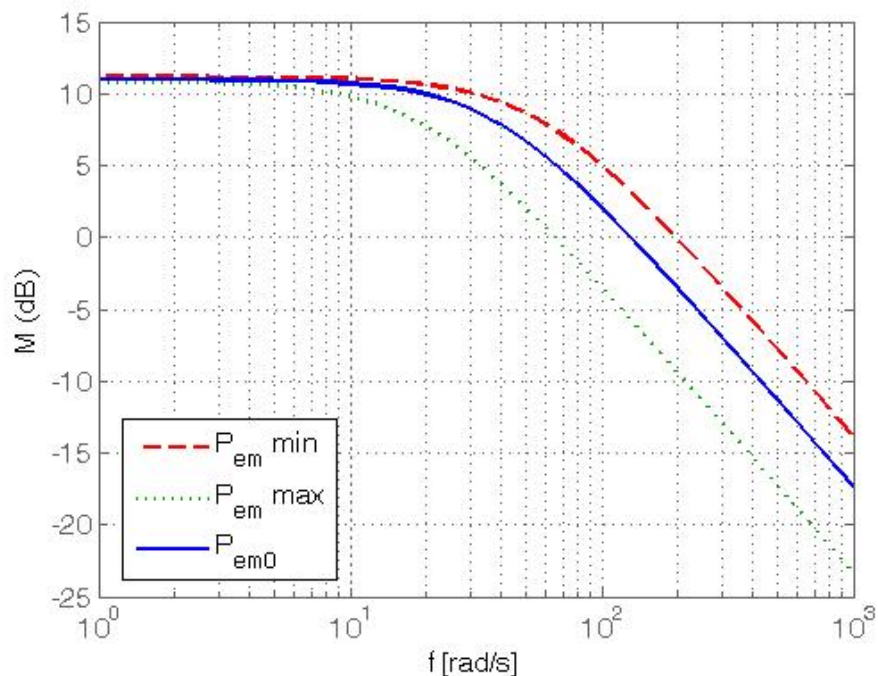
Rys. 6.7. Model obiektu nominalnego z niepewnością addytywną

Zależność zmian indukcyjności cewki elektromagnetycznej od wartości szczeliny powietrznej przedstawiono na rys. 6.8.



Rys. 6.8. Zależność indukcyjności cewki od szerokości szczeliny powietrznej

Na rys. 6.9 przedstawiono charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową elektromagnesu z uwzględnieniem niepewności jego parametru  $L = \pm 20\%$ .

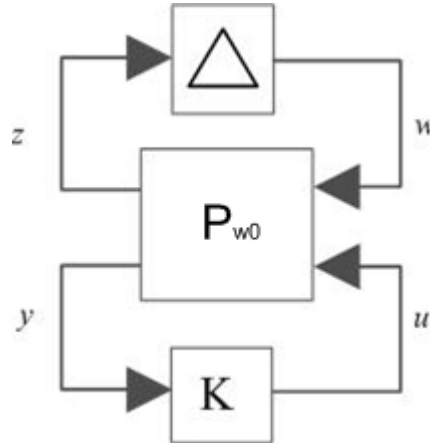


Rys. 6.9. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa elektromagnesu

### 6.8. Badania zawieszenia magnetycznego z niepewnością parametryczną

Zmiany prądowego punktu pracy powodują zakłócenia wartości parametrów łożyska magnetycznego. W badaniach modelu zawieszenia magnetycznego z niepewnością jego parametrów uwzględniono trzy parametry niepewne:  $k_i$ ,  $k_s$  i  $x_0$ . Parametry niepewne zostały zdefiniowane w rozdziale 6.6.

Schemat blokowy układu zamkniętego z modelem niepewności obiektu przedstawiono na rys. 6.10.



Rys. 6.10. Układ regulacji z modelem niepewności obiektu, gdzie:  $P_{w0}$  – model obiektu (4.1),  $K$  – regulator,  $\Delta$  – model niepewności

Oprogramowanie Matlab pozwala na projektowanie modelu z parametrami niepewnymi. Metoda *ureal* służy do zapisu wartości nominalnej parametru i zakresu jej zmian np. w procentach. Dla przykładu aby zapisać parametr  $k_i$  o wartości nominalnej 20 i zakresie zmian  $\pm 25\%$  należy zapisać:

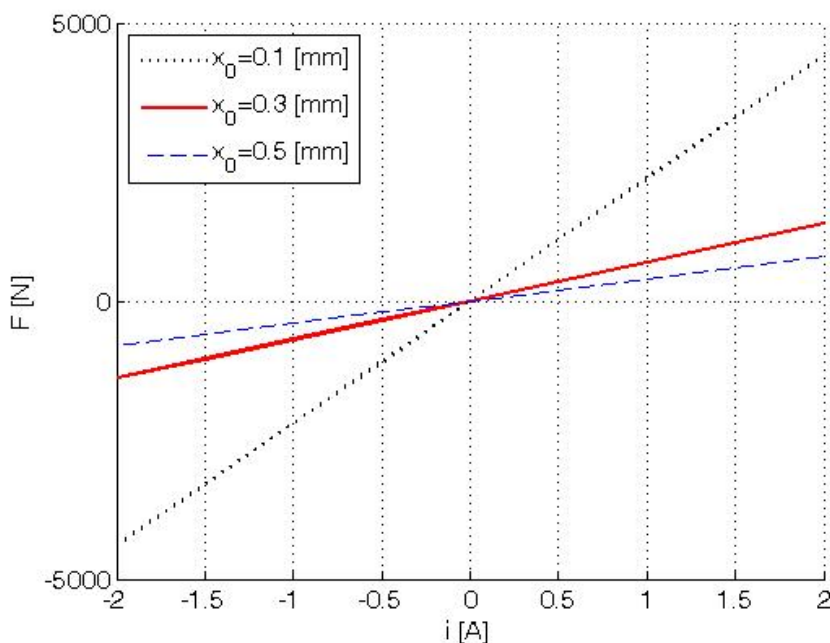
```
ki=ureal('current_stiffnes',20,'Mode','Range','Percentage',25);
```

Poprawność definicji parametru niepewnego można sprawdzić za pomocą metody *get*. W efekcie uzyskamy informację:

```
Name: 'current_stiffnes'
  NominalValue: 20
         Mode: 'Range'
         Range: [15 25]
    PlusMinus: [-5 5]
  Percentage: [-25 25]
AutoSimplify: 'basic'
```

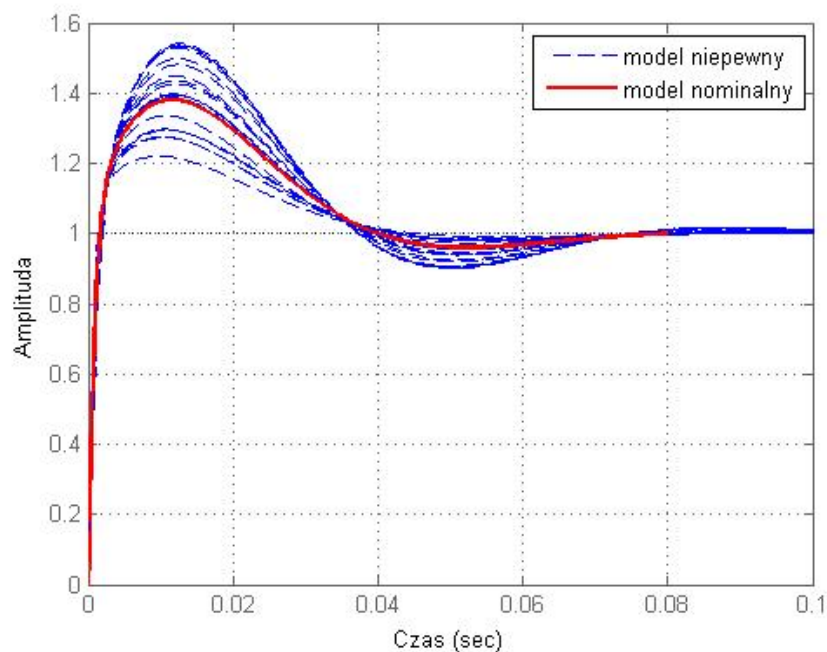
Wartość przemieszczenia wirnika  $x$  może zmieniać się tylko w zakresie szerokości szczeliny łożyska pomocniczego. Dla  $x=0$  wirnik znajduje się w położeniu środkowym łożyska tzn. położeniu nominalnym określonym przez  $x_0$ . Stan takiej równowagi występuje tylko wtedy, gdy suma wszystkich sił działających na wirnik wynosi 0. Siła elektromagnetyczna działająca na wirnik, np. w osi  $y$ , jest wypadkową sił generowanych przez górny i dolny obwód magnetyczny.

Na rys. 6.11 przedstawiono zależność prądu w cewce elektromagnetycznej od siły elektromagnetycznej dla różnych wartości szczeliny powietrznej.



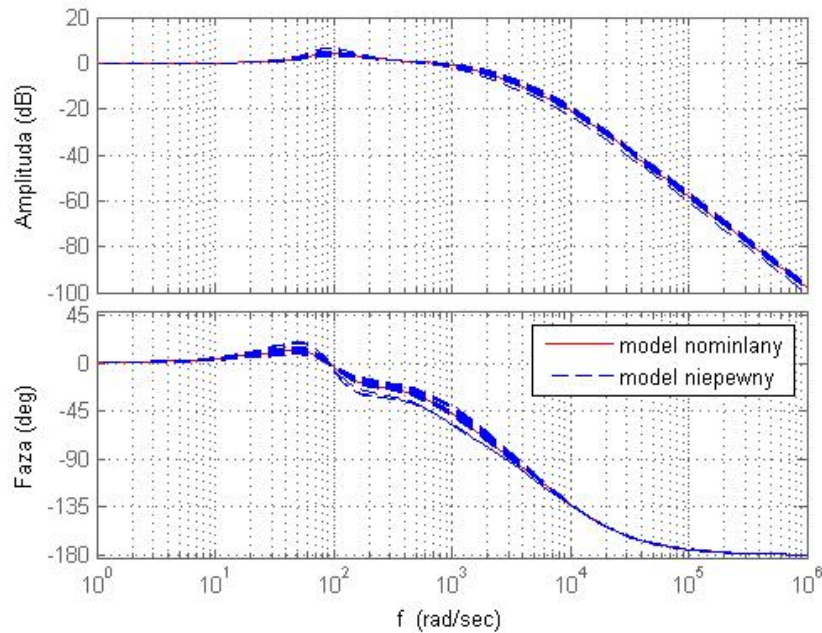
Rys. 6.11. Zależność siły łożyska magnetycznego w funkcji prądu dla różnych wartości szerokości szczeliny powietrznej

Na rys. 6.12 przedstawiono charakterystyki skokowe układu zamkniętego z regulatorem PID dla obiektu (4.1) z parametrami niepewnymi  $k_i$  i  $k_s$ .



Rys. 6.12. Odpowiedź układu zamkniętego na wymuszenie skokowe jednostkowe

Na rys. 6.13 przedstawiono charakterystyki Bodego układu zamkniętego z regulatorem PID dla obiektu (4.1) z parametrami niepewnymi  $k_i$  i  $k_s$ .



Rys. 6.13. Charakterystyki Bodego układu zamkniętego z regulatorem PID

### 6.9. Badania zawieszenia magnetycznego z niepewnością w formie niezamodelowanej dynamiki

Linearyzacja modelu obiektu (w danym punkcie pracy) powoduje liczne uproszczenia modelu, które polegają na odrzuceniu części nieliniowej. W takim przypadku zaprojektowany regulator będzie zapewniał stabilność i założoną jakość regulacji układu zamkniętego tylko w otoczeniu punktu pracy.

W celu uwzględnienia niezamodelowanej dynamiki obiektu (4.1) zbudowano model niepewności obiektu opisujący poszczególne nieliniowości. Następnie, niepewność modelu obiektu została ograniczona poprzez funkcje wagowe  $W_m(s)$  lub  $W_a(s)$ , tak aby był spełniony następujący warunek:

$$\|\Delta(j\omega)\| < W_{m/a}(j\omega). \quad (6.21)$$

Funkcja wagowa jest następującej postaci:

$$W_{m/a}(j\omega) = \frac{\tau s + r_0}{(\tau/r_\infty)s + 1}, \quad (6.22)$$

gdzie:

- $r_0$  – waga relatywna dla niskich częstotliwości ( $r_0 \ll 1$ ),
- $r_\infty$  – waga relatywna dla wysokich częstotliwości ( $r_\infty \geq 2$ ),
- $1/\tau$  – częstotliwość, dla której niepewność osiąga 100%.

Projektowanie modelu niepewności w postaci układu włączanego do modelu nominalnego obiektu umożliwia metoda *ultidyn* (Matlab). Proces projektowania modelu niepewności można podzielić na cztery następujące kroki:

- 1) Zapisanie modelu nominalnego. Model nominalny może zawierać parametry niepewne wcześniej zdefiniowane.

- 2) Wyznaczenie funkcji wagowej będącej filtrem ograniczającym wpływ niepewności na obiekt nominalny. Funkcja wagowa określa względną niepewność dla każdej częstotliwości obiektu. Funkcja wagowa powinna być jak najmniejszego rzędu.
- 3) Zaprojektowanie modelu niepewności za pomocą procedury *ultidyn*.
- 4) Włączenie modelu niepewności do obiektu nominalnego w sposób addytywny lub multiplikatywny. Jeżeli funkcja wagowa określa względne wartości niepewności, stosuje się sposób multiplikatywny. W innym wypadku stosuje się sposób addytywny.

Projektowanie modelu niepewności dla łożyska magnetycznego opiera się na analizie pracy zawieszenia magnetycznego w szerokim zakresie częstotliwości. Najbardziej narażonymi na zmiany parametrów są cewki elektromagnesów. Różnice między modelem nominalnym a obiektem rzeczywistym nasilają się wraz ze wzrostem częstotliwości pracy. Funkcja wagowa określająca wpływ niepewności jest dobrana tak, aby wpływ niepewności nasilał się wraz ze wzrostem częstotliwości.

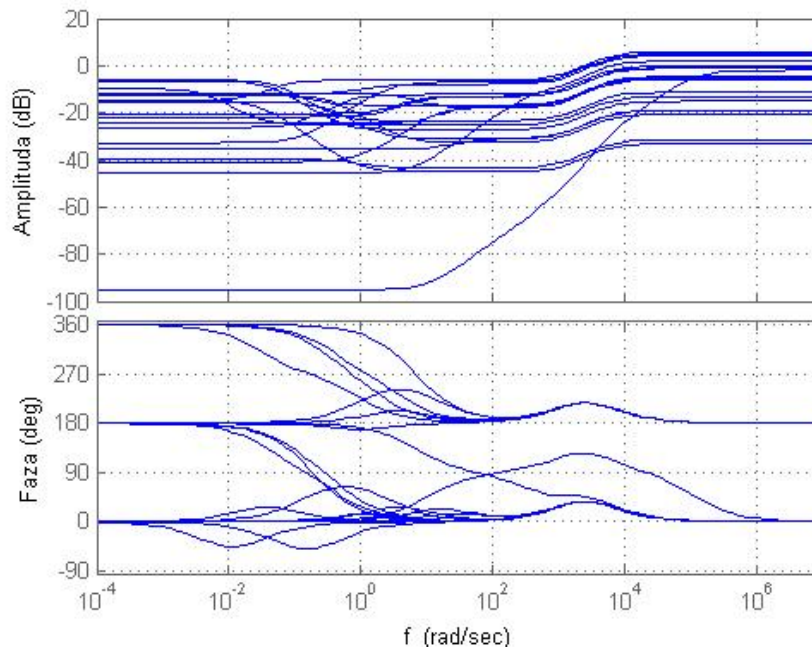
Wyznaczona funkcja wagowa dla parametrów:  $1/\tau=400$  [Hz] (max. prędkość obrotowa wirnika 24000 [obr/min]),  $r_0=0.5$  i  $r_\infty=2$  wynosi:

$$W_{m/a}(j\omega) = \frac{2s + 2513}{s + 5027}. \quad (6.23)$$

Model niepewności typu LTI (SISO) z ograniczeniem maksymalnej amplitudy do 1 wyznaczono procedurą *ultimod*, w efekcie oprogramowanie Matlab zwraca następujący komunikat:

```
Uncertain GainBounded LTI Dynamics: Name niezamodelowana_dynamika, 1x1, Gain Bound = 1
```

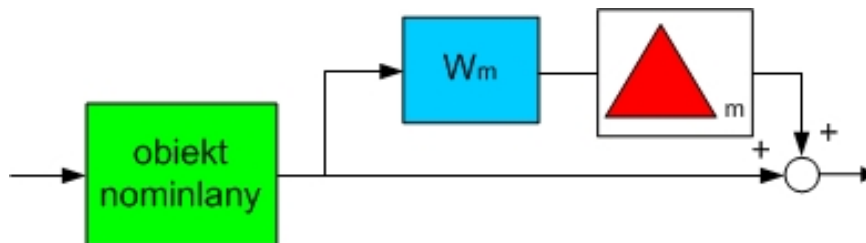
Charakterystyka Bodego modelu niepewności wyznaczonego procedurą *ultimod* przedstawiona jest na rys. 6.14.



Rys. 6.14. Charakterystyka Bodego modelu niepewności

### 6.9.1. Niepewność włączona multiplikatywnie

Użycie modelu niepewności multiplikatywnej wprowadzonej na wejście obiektu pozwala kształtować moduł niepewności poprzez funkcję wagową  $W_m$ . Ważenie wpływu niepewności na wejście obiektu należy interpretować jako procentową niepewność układów wykonawczych. Schemat obiektu z niepewnością włączoną multiplikatywnie jest przedstawiony na rys. 6.15.



Rys. 6.15. Schemat obiektu z niepewnością włączoną multiplikatywnie

Dane do symulacji są następujące:

- obiekt nominalny opisany transmitancją (6.6),
- funkcja wagowa  $W_m(s) = \frac{2s + 2513}{s + 5027}$ ,
- model niepewności  $\Delta_m$  z ograniczeniem wartości modułu do 1.

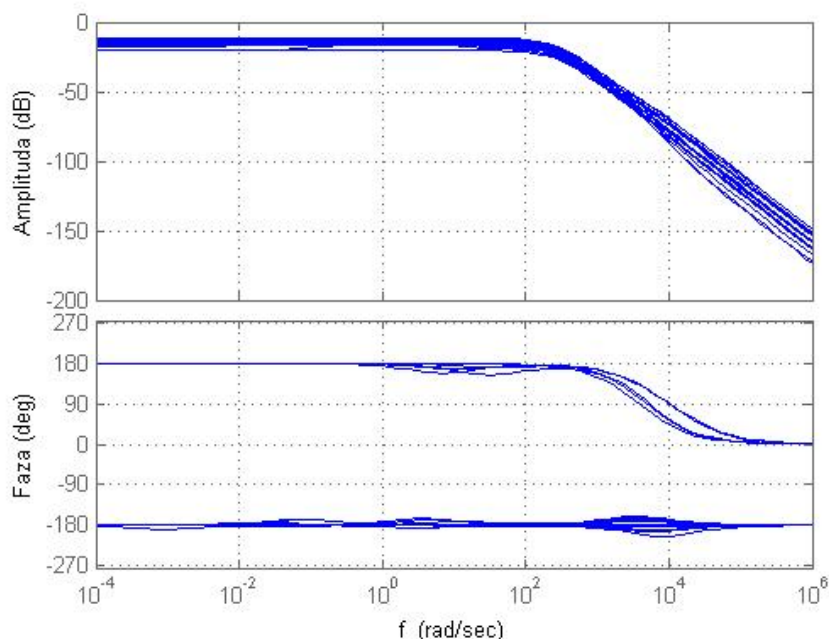
Poprawność zaprojektowanej niepewności i włączonej multiplikatywnie do obiektu pozwala sprawdzić procedura: `get(P_multi_uncertain)`, której wynikiem jest następujący komunikat (Matlab):

```

a: [3x3 double]
b: [3x1 umat]
c: [98.4375 0 0]
d: 0
StateName: {3x1 cell}
Ts: 0
InputName: {''}
OutputName: {''}
InputGroup: [1x1 struct]
OutputGroup: [1x1 struct]
NominalValue: [1x1 ss]
Uncertainty: [1x1 atomlist]
Notes: {}
UserData: []

```

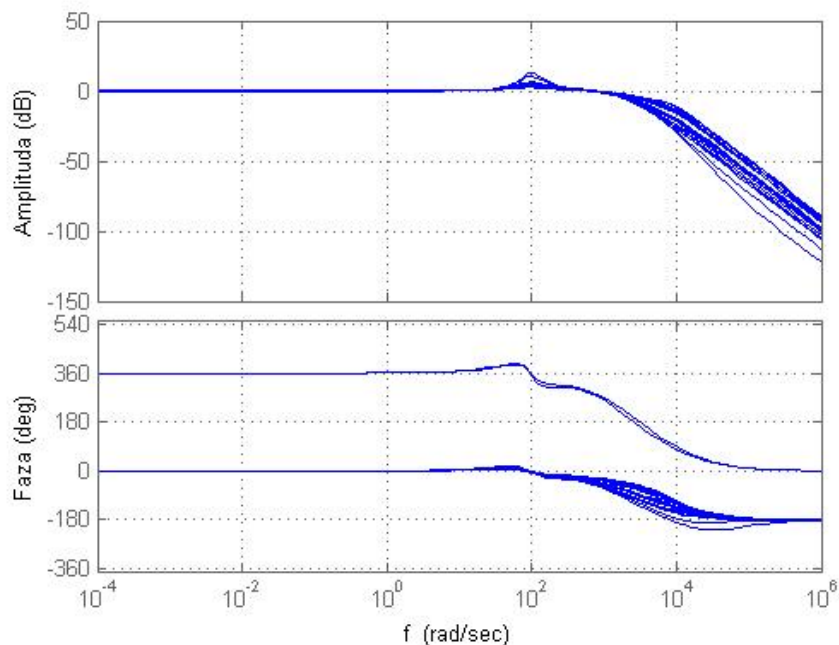
Na rys. 6.16 przedstawiono charakterystykę Bodego obiektu nominalnego (6.6) z modelem niepewności włączonym multiplikatywnie.



Rys. 6.16. Charakterystyka Bodego obiektu z niepewnością multiplikatywną

Z rys. 6.16 wynika, że model multiplikatywny zwiększa niepewność obiektu nominalnego równomiernie w całym zakresie częstotliwości pracy łożyska magnetycznego.

Na rys. 6.17 przedstawiono charakterystykę Bodego układu zamkniętego PID z multiplikatywną niepewnością obiektu (6.6).



Rys. 6.17. Charakterystyka Bodego układu zamkniętego (z regulatorem PID) z multiplikatywną niepewnością obiektu

Z rys. 6.17 wynika, że w układzie zamkniętym niepewność pojawia się dopiero po przekroczeniu częstotliwości granicznej.

### 6.9.2. Niepewność włączona addytywnie

Poprawność zaprojektowanej niepewności i włączonej addytywnie do obiektu pozwala sprawdzić procedura: `get(P_add_uncertain)`, której wynikiem jest następujący komunikat (Matlab):

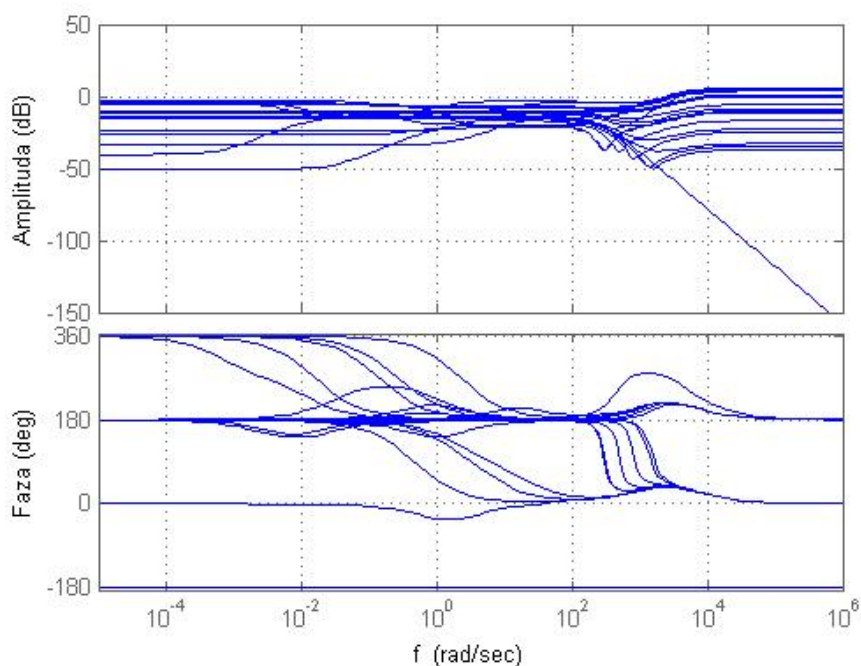
```

a: [3x3 double]
b: [3x1 umat]
c: [98.4375 0 -117.8097]
d: [1x1 umat]
StateName: {3x1 cell}
Ts: 0
InputName: {''}
OutputName: {''}
InputGroup: [1x1 struct]
OutputGroup: [1x1 struct]
NominalValue: [1x1 ss]
Uncertainty: [1x1 atomlist]
Notes: {}
UserData: []

```

Dane do symulacji są identyczne jak w rozdziale poprzednim.

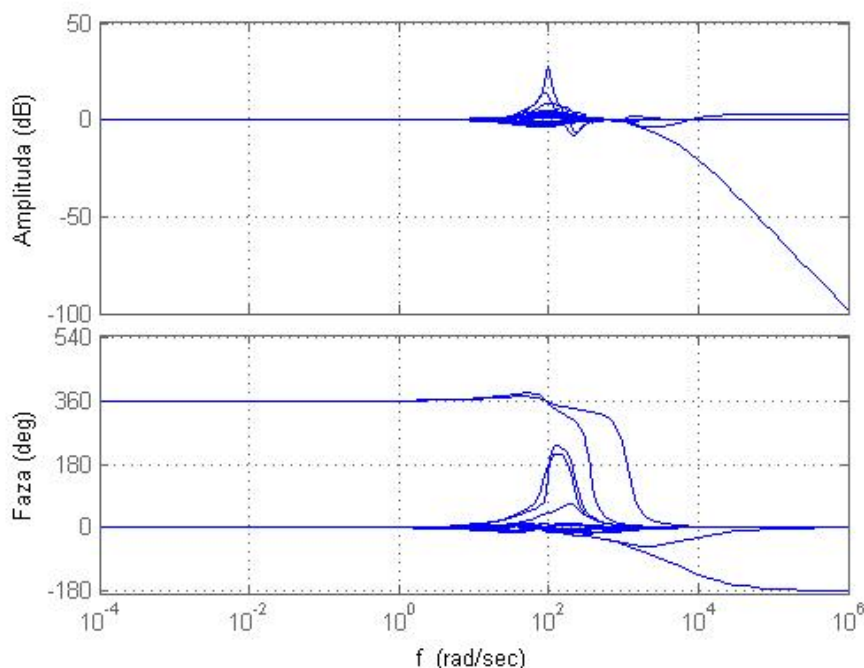
Na rys. 6.18 przedstawiono charakterystykę Bodego obiektu opisanego równaniem (6.6) z modelem niepewności włączonym addytywnie.



Rys. 6.18. Charakterystyka Bodego obiektu z niepewnością addytywną

Z rys. 6.18 widać, że model addytywny powoduje znaczne zaburzenia przy niskich i wysokich częstotliwościach pracy łożyska magnetycznego. Może to powodować niestabilność układu zamkniętego.

Na rys. 6.19 przedstawiono charakterystykę Bodego układu zamkniętego z regulatorem PID i addytywną niepewnością obiektu (6.6).



Rys. 6.19. Charakterystyka Bodego układu zamkniętego (z regulatorem PID) z addytywną niepewnością obiektu

Jak wynika z powyższych badań symulacyjnych podstawowa różnica między niepewnością multiplikatywną, a addytywną jest widoczna przy dużych częstotliwościach pracy układu sterowania. Podczas gdy niepewność addytywna ciągle działa na układ w końcu prowadząc do niestabilności, to niepewność multiplikatywna jest eliminowana przez oddziaływanie pętli sprzężenia zwrotnego i samego obiektu.

Reasumując powyższe badania należy stwierdzić, że układ sterowania z regulatorem PID nie umożliwia uwzględnienia niepewności obiektu na etapie jego projektowania. Dlatego zaprojektowany regulator PID nie zapewnia stabilności układowi regulacji z niepewnością obiektu lub zapewnia tylko w wąskim zakresie zmian wartości parametrów niepewnych. W związku z tym, w rozdziale 8 zostanie pokazana metoda projektowania regulatora  $H_\infty$ , która umożliwia uwzględnienie niepewności obiektu już na etapie projektowania regulatora. Jak się okaże w rozdziale 9 zaprojektowany regulator  $H_\infty$  jest minimalnie wrażliwy na zmiany parametrów obiektu.

## Rozdział 7. Projektowanie funkcji wagowych dla obiektu laboratoryjnego

Określenie funkcji wagowych jest jednym z najważniejszych i najtrudniejszych aspektów sterowania odpornego opisanego w rozdziale 8. Normy macierzy i układów zostały opisane w załączniku B. Norma  $H_\infty$  pozwala na określenie maksymalnego wzmocnienia funkcji układu zamkniętego w rozpatrywanym paśmie częstotliwości. Definicja normy  $H_\infty$  posiada następującą postać [92]:

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathfrak{R}} \bar{\sigma}(H(j\omega)) = \sup_{\omega \in \mathfrak{R}} \frac{\|H(u)\|_2}{\|u\|_2}, \quad (7.1)$$

gdzie:

$u$  – sygnał wejściowy,

$\bar{\sigma}(\omega)$  – maksymalne wartości szczególne.

Manipulowanie właściwościami funkcji  $\bar{\sigma}(H(j\omega))$  umożliwiają nam funkcje wagowe nakładane na sygnały wejściowe i wyjściowe.

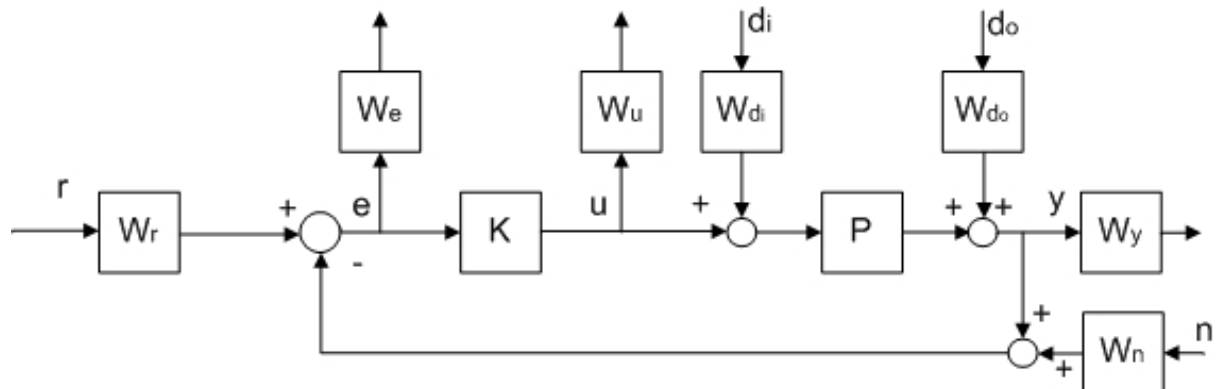
Z zależności (7.1) wynika, że więcej informacji o zachowaniu się układu zamkniętego regulacji daje nam funkcja  $\bar{\sigma}(H(j\omega))$  niż norma  $\|H(s)\|_\infty$ .

Projektowanie funkcji wagowych jest najważniejszym elementem projektowania układu sterowania dla obiektu rozbudowanego, na podstawie którego wyznacza się regulator odporny. Obiektem lub układem rozbudowanym nazywamy połączenie obiektu sterowania i funkcji wagowych. Funkcje wagowe pozwalają na uwzględnienie ograniczeń sygnałów w dziedzinie czasu i częstotliwości oraz na kształtowanie właściwości układu sterowania. Odpowiedni dobór funkcji wagowych jest trudny i zależy od charakteru obiektu i wymagań nałożonych na układ regulacji. Generalnie znalezienie pasujących funkcji wagowych jest łatwiejsze, jeżeli model obiektu rozbudowanego jest dokładnym odzwierciedleniem obiektu fizycznego.

Proces doboru filtrów musi być poprzedzony analitycznymi i eksperymentalnymi badaniami obiektu. Dlatego też projektowanie tych funkcji nie może być automatyczne, ale często wynika z wiedzy heurystycznej.

### 7.1. Charakterystyka funkcji wagowych

Podczas projektowania sterowania odpornego należy wyznaczyć obiekt sterowania zapisany jako LFT (ang. *Linear Fractional Transformation*). Układ LFT składa się z obiektu sterowania i funkcji wagowych nałożonych na sygnały wejściowe i wyjściowe. Na rys. 7.1 przedstawiono standardową konfigurację układu zamkniętego z funkcjami wagowymi nałożonymi na sygnały wejściowe i wyjściowe układu [92].



Rys. 7.1. Standardowa konfiguracja układu zamkniętego z wagami

Objaśnienia do rys. 7.1:

- $W_r$  – funkcja wagowa nałożona na sygnał zadany  $r$ ,
- $W_e$  – funkcja wagowa nałożona na sygnał uchybu  $e$ ,
- $W_u$  – funkcja wagowa nałożona na sygnał sterujący  $u$ ,
- $W_{di}$  – funkcja wagowa nałożona na zakłócenia podane na wejście obiektu  $d_i$ ,
- $W_{do}$  – funkcja wagowa nałożona na zakłócenia podane na wyjście obiektu  $d_o$ ,
- $W_y$  – funkcja wagowa nałożona na sygnał wyjściowy  $y$ ,
- $W_n$  – funkcja wagowa nałożona na sygnał szumu  $n$ ,
- $P$  – obiekt,
- $K$  – regulator.

Wagi  $W_{di}$  i  $W_{do}$  mogą być użyte do odzwierciedlenia dynamiki zakłóceń wchodzących na wejście i wyjście obiektu lub do modelowania energii widma sygnałów zakłócenia występujących w praktyce. Waga  $W_n$  może być użyta do modelowania dynamiki szumów pomiarowych. Waga  $W_e$  może być użyta do odzwierciedlenia wymagań (ograniczeń) nałożonych na uchyb regulacji (np. w celu uniknięcia zjawiska nasycenia regulatora). Podobnie waga  $W_u$  służy do uwzględnienia ograniczeń nałożonych na sygnał sterujący. Waga  $W_r$  (wstępny kompensator) jest elementem opcjonalnym używanym do osiągnięcia zamierzonego kształtu sygnału zadanego lub do reprezentowania niejednorodnych układów ze sprzężeniem zwrotnym.

W celu zaprojektowania regulatora odpornego przeprowadza się badanie właściwości układu zamkniętego z regulatorem np. PID w dziedzinie częstotliwości. Funkcje wagowe dobiera się na podstawie odpowiedzi częstotliwościowej funkcji  $S$ ,  $T$  i  $R$  wyznaczanych np. dla układu regulacji z regulatorem PID. Pozwala to na oszacowanie szerokości pasma przenoszenia układu, wrażliwości układu na zakłócenia zewnętrzne, pasma przenoszenia regulatora, itd. Informacje te są niezbędne podczas formułowania funkcji wagowych wchodzących w skład układu LFT sterowania odpornego.

Właściwości układu otwartego określa funkcja opisana następująco:

$$L_i(s) = K(s) \cdot P(s); L_o(s) = P(s) \cdot K(s), \quad (7.2)$$

gdzie:

- $L_i(s)$  – transmitancja wejściowa układu otwartego,
- $L_o(s)$  – transmitancja wyjściowa układu otwartego,
- $K(s)$  – transmitancja regulatora,
- $P(s)$  – transmitancja obiektu sterowania.

Wartości własne funkcji układu otwartego są bardzo ważne, ponieważ określają właściwości funkcji wrażliwości  $S(s)$  i funkcji komplementarnej wrażliwości  $T(s)$ . Poniżej przedstawiono 3 podstawowe funkcje określające właściwości układu zamkniętego.

1) Funkcje wrażliwości wejścia i wyjścia, które są opisane następująco:

$$S_i = (I + L_i)^{-1}; S_o = (I + L_o)^{-1}. \quad (7.3)$$

2) Funkcje komplementarnej wrażliwości wejścia i wyjścia są opisane następująco:

$$T_i = I - S_i = L_i(I + L_i)^{-1}; T_o = I - S_o = L_o(I + L_o)^{-1}. \quad (7.4)$$

Funkcje komplementarnej wrażliwości są dopełnieniem funkcji wrażliwości do jedności według zależności:  $S(s) + T(s) = 1$ .

3) Funkcje sterowania wejścia i wyjścia są opisane następująco:

$$R_i = K(I + L_i)^{-1}; R_o = K(I + L_o)^{-1}. \quad (7.5)$$

Poniżej przedstawiono właściwości funkcji  $S(s)$ ,  $T(s)$  i  $R(s)$ .

- 1) Wartości własne funkcji  $S(s) = (I + L(s))^{-1} = \frac{y(s)}{d(s)}$  określają wpływ zakłóceń  $d_o(s)$  na sygnał wyjściowy  $y(s)$ . Zakłócenie  $d_o(s)$  działające na wyjście obiektu ma znaczny wpływ tylko przy niskich częstotliwościach.
- 2) Wartości własne funkcji  $T(s) = L(s)(I + L(s))^{-1} = \frac{y(s)}{r(s)}$  określają wpływ sygnału zadanego  $r(s)$  na sygnał wyjściowy  $y(s)$ . Funkcję tą wykorzystuje się do określenia marginesu stabilności układu zamkniętego. Funkcja określa przepływ sygnału przez układ zamknięty.
- 3) Wartości własne funkcji  $R(s) = K(s)(I + L(s))^{-1} = \frac{u(s)}{d(s)}$  określają wpływ zakłóceń  $d(s)$  na sygnał sterujący regulatora  $u(s)$ . Funkcję tą wykorzystuje się do określenia stabilności układu zamkniętego i uwzględnienia ograniczeń nałożonych na sygnał sterujący. Zastosowanie funkcji sterowania pozwala także na określenie pasma przenoszenia regulatora, a tym samym ogranicza zużycie energii przez regulator.

Na układ zamknięty nałożone są wymagania zarówno w dziedzinie czasu, jak i w dziedzinie częstotliwości. Należy tak projektować układ sterowania, aby minimalizować przeregulowanie, czas narastania sygnału, czas ustalania sygnału oraz dążyć do uzyskania zerowego uchybu statycznego.

## 7.2. Dobór funkcji wagi uchybu $W_e$ i wagi wyjściowej $W_y$

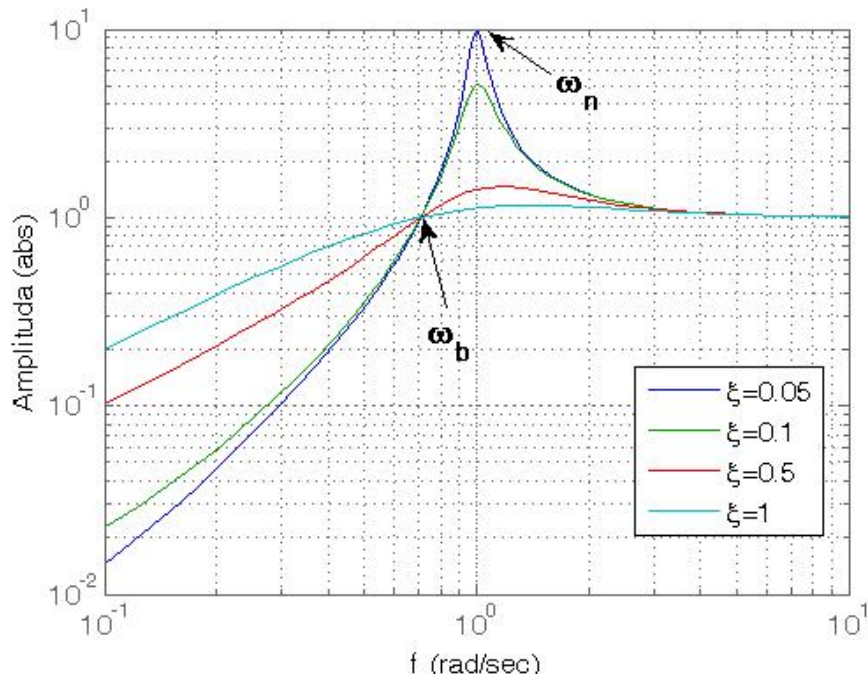
Sposób dobierania funkcji wagowej  $W_e$  będzie pokazany na przykładzie układu 2-go rzędu. Transmitancja układu otwartego jest następująca [92]:

$$L(s) = P(s)K(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}, \quad (7.6)$$

gdzie:

- $\xi$  – współczynnik tłumienia,
- $\omega_n$  – częstotliwość własna.

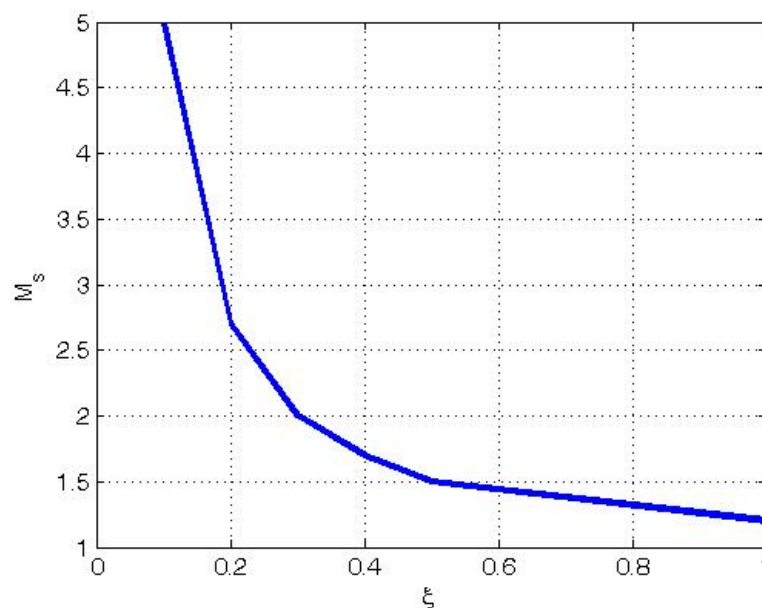
Na rys. 7.2 przedstawiono wykres funkcji wrażliwości  $S(s) = (I + L(s))^{-1} = \frac{s(s + 2\xi\omega_n)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$  dla układu o transmitancji  $L(s)$ .



Rys. 7.2. Funkcja wrażliwości dla  $\omega_n=1$  i  $\xi=0.05, 0.1, 0.5, 1$ .

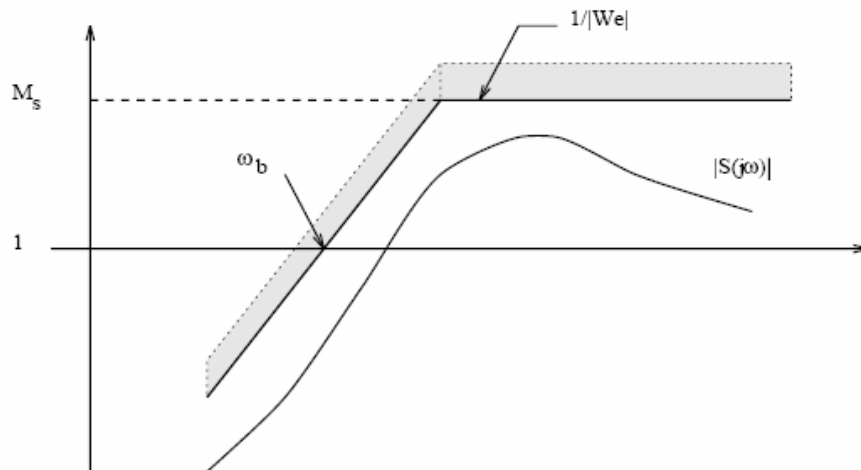
Z rys. 7.2 wynika, że dla warunku  $|S(j\omega_n/\sqrt{2})|=1$  pasmo przenoszenia układu zamkniętego wynosi  $\omega_b \approx \omega_n/\sqrt{2}$  od  $|S(j\omega)| \geq 1$ .

Na rys. 7.3 pokazano zależność maksymalnych wartości funkcji wrażliwości  $M_s = \|S\|_\infty$  w funkcji współczynnika tłumienia  $\xi$ .



Rys. 7.3. Zależność  $M_s$  od  $\xi$

Na rys. 7.4 pokazano właściwości wagi  $W_e$  w zależności od wyznaczonej funkcji wrażliwości  $S$ .



Rys. 7.4. Funkcja  $W_e$  i  $S$  dla układu bez uchybu regulacji, [92]

Z zależności opisującej uchyb regulacji  $e = r - y = S_o(r - d_o) + T_o n - S_o P d_i$  wynika, że funkcja wrażliwości powinna mieć minimalną wartość w zakresie niskich częstotliwości, gdzie wpływ zakłóceń  $d_o$  i sygnału wymuszenia  $r$  jest znaczący. W przypadku, gdy układ regulacji jest stabilny, tzn.  $\|W_e S_o\|_\infty = \infty$  i uchyb regulacji jest równy zero  $|S_o(0)| = 0$ , wtedy wagę uchybu obliczamy następująco:

$$W_e(s) = \frac{s / M_s + \omega_b}{s}, \quad (7.7)$$

gdzie:

$M_s$  – maksymalna amplituda funkcji  $S(j\omega)$  dla częstotliwości większych od  $\omega_b$ ,  
 $\omega_b$  – wartość częstotliwości, dla której funkcja  $S(j\omega)$  przekracza wartość 1.

W układzie z występującym uchybem regulacji w celu zapewnienia, aby uchyb ten nie przekraczał pewnej wartości  $\varepsilon$  tzn.  $|S_o(0)| \leq \varepsilon$  wagę uchybu obliczamy następująco:

$$W_e(s) = \frac{s / M_s + \omega_b}{s + \omega_b \varepsilon}. \quad (7.8)$$

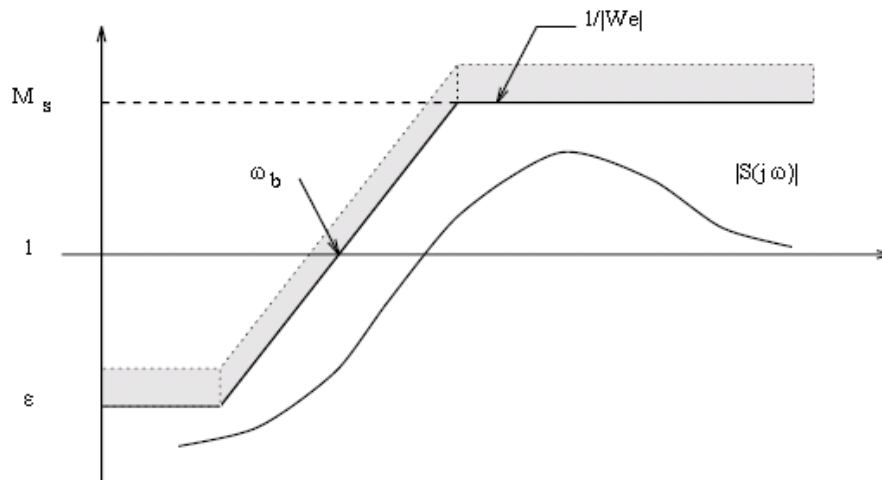
Postać wagi uchybu drugiego rzędu wynosi:

$$W_e(s) = \frac{(s / \sqrt{M_s} + \omega_b)^2}{(s + \omega_b \sqrt{\varepsilon})^2}, \quad (7.9)$$

gdzie:

$\varepsilon$  – maksymalna amplituda funkcji wrażliwości  $S(j\omega)$  dla częstotliwości mniejszych od  $\omega_b$ .

Na rys. 7.5 przedstawiono zależność między funkcją wagową  $W_e$  a funkcją wrażliwości  $S$  dla przypadku układu z występującym uchybem regulacji. Rysunek ten określa wzajemne zależności między tymi funkcjami, jakie muszą być zachowane podczas projektowania funkcji wagowej  $W_e$ .



Rys. 7.5. Funkcja  $W_e$  i  $S$  dla układu z uchybem regulacji, [92]

Zależność z rys. 7.5 można opisać następująco:

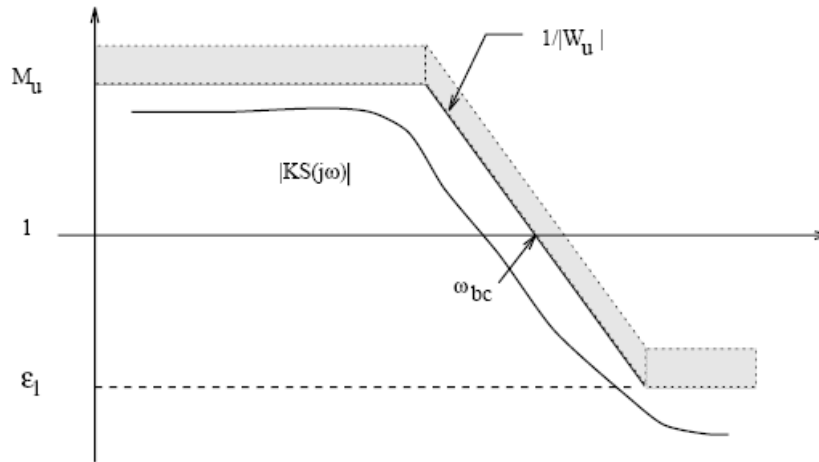
$$|S(s)| \leq \left| \frac{s}{s/M_s + \omega_b} \right|, \forall \omega \Leftrightarrow |W_e S| \leq 1, W_e(s) = \frac{s/M_s + \omega_b}{s + \omega_b \varepsilon}. \quad (7.10)$$

Funkcja wagi  $W_y$  jest jednoznacznie powiązana z funkcją wagi uchybu  $W_e$ , dlatego wyznacza się jedną z tych funkcji.

### 7.3. Dobór funkcji wagi sterowania $W_u$

Zadaniem funkcji wagi sterowania jest odpowiednie kształtowanie sygnału sterującego zgodnie z narzuconymi ograniczeniami. Funkcję wagi sterowania dobiera się względem funkcji sterowania  $R_i = K(I + L_i)^{-1}; R_o = K(I + L_o)^{-1}$ . W zakresie niskich częstotliwości funkcja sterująca  $R$  jest ograniczona przez dopuszczalną wartość sygnału sterowania podyktowaną zjawiskiem nasycenia, jakie występuje w układach wykonawczych. Dlatego funkcja wagi sterowania może mieć wartość maksymalną  $M_u$  tylko do częstotliwości  $\omega_{bc}$  odpowiadającej pasmu przenoszenia regulatora.

Na rys. 7.6 przedstawiono wzajemne zależności między funkcją wagową  $W_u$ , a funkcją sterowania  $R(s)=K(s)S(s)$ , jakie muszą być zachowane podczas projektowania funkcji wagowej  $W_u$ .



Rys. 7.6. Funkcja  $W_u$  i  $R=K \cdot S$ , [92]

Postać funkcji wagowej  $W_u$  dla układu z uchybem regulacji jest następująca:

$$W_u(s) = \frac{s + \omega_{bc} / M_u}{\varepsilon_1 s + \omega_{bc}} \quad (7.11)$$

gdzie:

$M_u$  – maksymalna amplituda funkcji  $KS(j\omega)$  dla częstotliwości mniejszych od  $\omega_{bc}$ ,

$\omega_{bc}$  – wartość częstotliwości, dla której funkcja  $KS(j\omega)$  osiąga wartość  $\leq 1$ ,

$\varepsilon_l$  – maksymalna amplituda funkcji  $KS(j\omega)$  dla częstotliwości większych od  $\omega_b$ .

#### 7.4. Projektowanie układu regulacji odpornej z dwoma funkcjami wagowymi

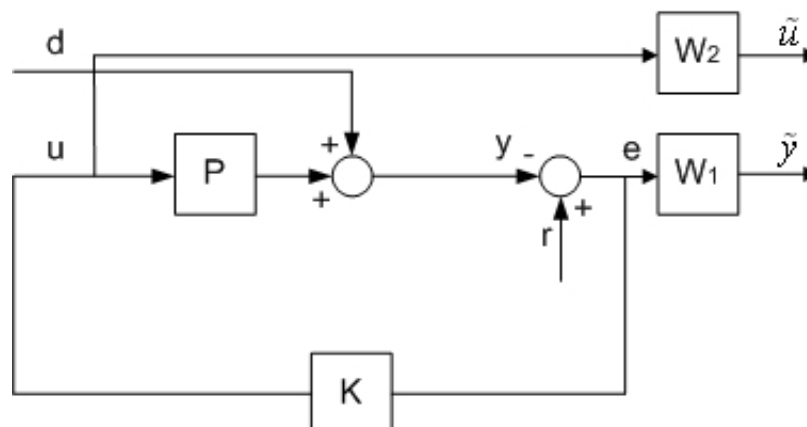
Projektowanie układu regulacji odpornej często wymaga tylko dobrania dwóch funkcji wagowych. Ważne jest odpowiednie tłumienie zakłóceń oraz uwzględnienie pasma przenoszenia regulatora. W celu tłumienia wpływu zakłócenia  $d_o(s)$  funkcja wrażliwości  $S(s)$  powinna mieć jak najmniejszą wartość w zakresie niskich częstotliwości. W tym celu projektujemy filtr dolnoprzepustowy  $W_1(s)$  z szerokością pasma przenoszenia równą pasmowi funkcji zakłócenia  $d_o(s)$ . Następnie wyznaczamy stabilizujący układ regulator  $K(s)$  taki, że następująca norma jest minimalna [92]:

$$\|W_1(s)S(s)\|_{\infty} \rightarrow \min. \quad (7.12)$$

Jednak taka funkcja kosztów nie jest praktyczna, ponieważ dla zamkniętego układu regulacji z obiektem bez zer położonych na prawej półpłaszczyźnie na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, regulator optymalny musiałby mieć nieskończenie duże wzmocnienie. Dlatego wykorzystuje się następującą funkcję kosztów (warunek optymalizacji):

$$\left\| \frac{W_1(s)S(s)}{W_2(s)R(s)} \right\|_{\infty} \leq 1. \quad (7.13)$$

Na rys. 7.7 przedstawiono schemat układu regulacji z wykorzystaniem funkcji wagowych  $W_1$  i  $W_2$ .



Rys. 7.7. Układ regulacji z wagami  $W_1$  i  $W_2$

Rozbudowany układ regulacji z rys. 7.7 możemy zapisać następująco:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ u \end{bmatrix}, \quad (7.14)$$

gdzie:

$G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22}$  – składowe układu zamkniętego zapisanego w formie LFT,  
 $\{\tilde{\cdot}\}$  - indeks określający sygnał ważony.

W tym przypadku układ zamknięty możemy zapisać w formie LFT następującą macierzą:

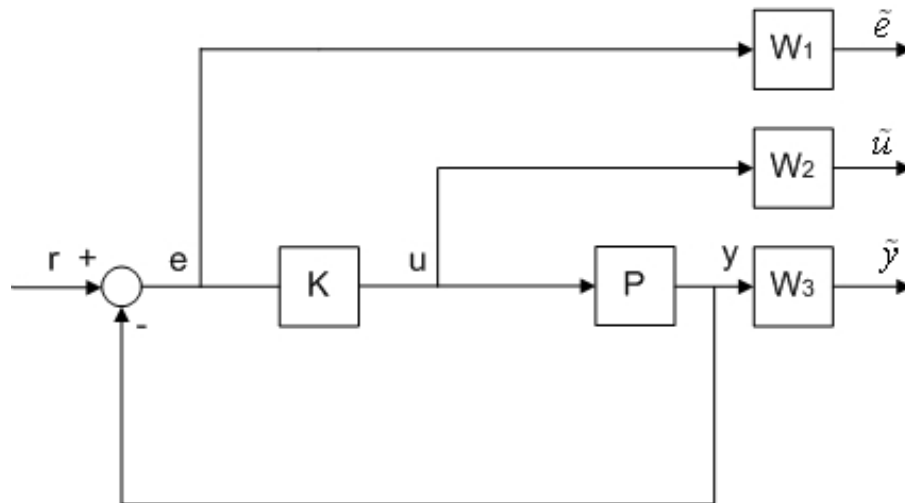
$$F_l(P, K) = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 K S \end{bmatrix}, \quad (7.15)$$

gdzie:

$F_l(P, K)$  – funkcja układu zamkniętego.

### 7.5. Projektowanie układu regulacji odpornej z trzema funkcjami wagowymi

W wielu obwodach regulacji pojawia się problem ograniczenia zakresu sygnału wyjściowego, np. w łóżyskowaniu magnetycznym. Wtedy należy zastosować dodatkową funkcję wagową  $W_3$ , która pozwoli na uwzględnienie zakresu zmian sygnału wyjściowego podczas projektowania regulatora odpornej. Schemat układu regulacji przedstawiono na rys. 7.8.



Rys. 7.8. Schemat układu zamkniętego z trzema funkcjami wagowymi

Jeżeli układ regulacji wymaga zastosowania trzech funkcji wagowych  $W_1$ ,  $W_2$  i  $W_3$  to warunek optymalizacji dla układu zamkniętego jest następujący:

$$\left\| \begin{array}{l} W_1(s)S(s) \\ W_2(s)R(s) \\ W_3(s)T(s) \end{array} \right\|_{\infty} \leq 1. \quad (7.16)$$

Układ zamknięty możemy zapisać w formie LFT następującą macierzą:

$$F_l(P, K) = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 R \\ W_3 T \end{bmatrix}. \quad (7.17)$$

## 7.6. Wyznaczenie funkcji wagowych dla zawieszenia magnetycznego wirnika w łożyskach heteropolarnych

Obiektem sterowania jest wirnik sztywny zawieszony w polu elektromagnetycznym łożyska magnetycznego, którego model liniowy dla jednej osi sterowania opisuje transmitancja (6.19).

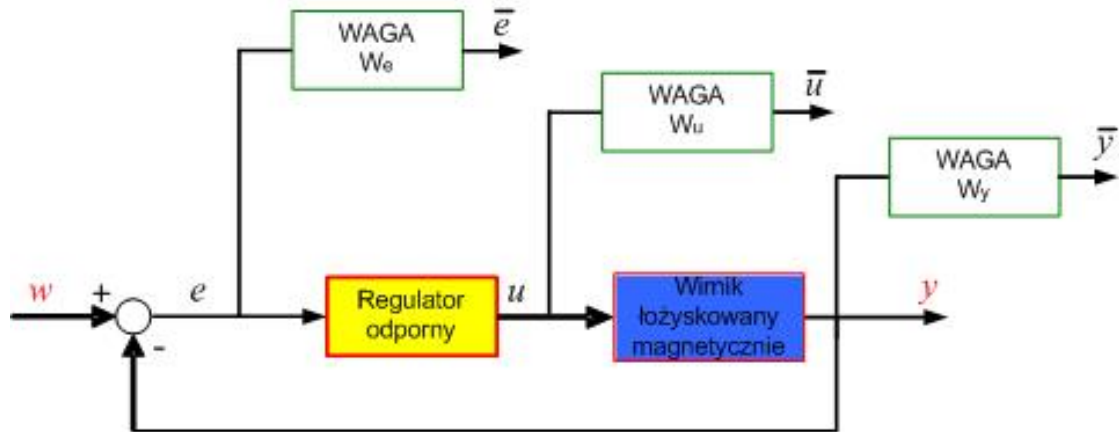
Na podstawie analizy funkcjami  $S$ ,  $T$  i  $R$  (dla układu zamkniętego z regulatorem PID) zostały zaprojektowane następujące wartości funkcji wagowych:

$$\begin{aligned} W_e(s) &= \delta_1 \frac{(s+100)}{(s+1)} \\ W_u(s) &= \delta_2 \frac{100(s+1250)}{(s+10000000)}, \\ W_y(s) &= \delta_3 \frac{100(s+20)}{(s+10000)} \end{aligned} \quad (7.18)$$

gdzie:

$\delta = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3]$  – jest wektorem wzmacnień wagowych, którego poszczególne wartości należy dobrać.

Schemat układu sterowania odpornego (opisanego w rozdziale 8) dla obiektu opisanego równaniem (6.6) z uwzględnieniem funkcji wagowych przedstawiono na rysunku 7.9.



Rys. 7.9. Schemat symulacyjny rozbudowanego układu regulacji z regulatorem odpornym i funkcjami wagowymi

Właściwe dobranie wartości wzmocnień wagowych  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  i  $\delta_3$  decyduje o odpornych właściwościach układu zamkniętego. W tym celu założono wejściowe wartości wzmocnień, a następnie w drodze iteracji znaleziono optymalne wartości wzmocnień. Pozwalają one na osiągnięcie odpowiednich właściwości układu określonych przez normę  $\min \|F_l(P, K)\|_\infty$ .

Optymalna wartość wzmocnień wagowych  $\delta$  wynosi 0.01 [24]. Funkcje:  $S(s)$ ,  $R(s)$  i  $T(s)$  muszą być ważone za pośrednictwem odpowiednich funkcji wagowych:  $W_e(s)$ ,  $W_u(s)$  i  $W_y(s)$ . Następujące warunki muszą być spełnione [92, 89]:

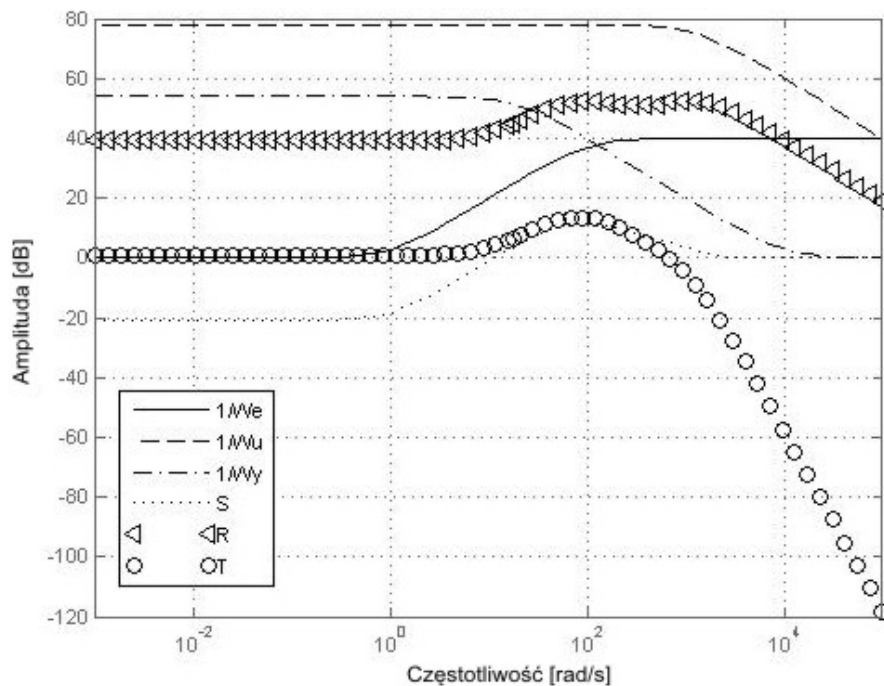
$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{l} W_e(s)S(s) \\ W_u(s)R(s) \\ W_y(s)T(s) \end{array} \right\|_\infty \leq 1. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Dla funkcji wagowych opisanych wzorem (7.18) oraz funkcji  $S$ ,  $R$ ,  $T$  wyznaczonych dla układu z regulatorem PID wyznaczono wartości normy (7.19) (procedura Matlab: *hinfnorm Robust Toolbox Matlab*), które są następujące:

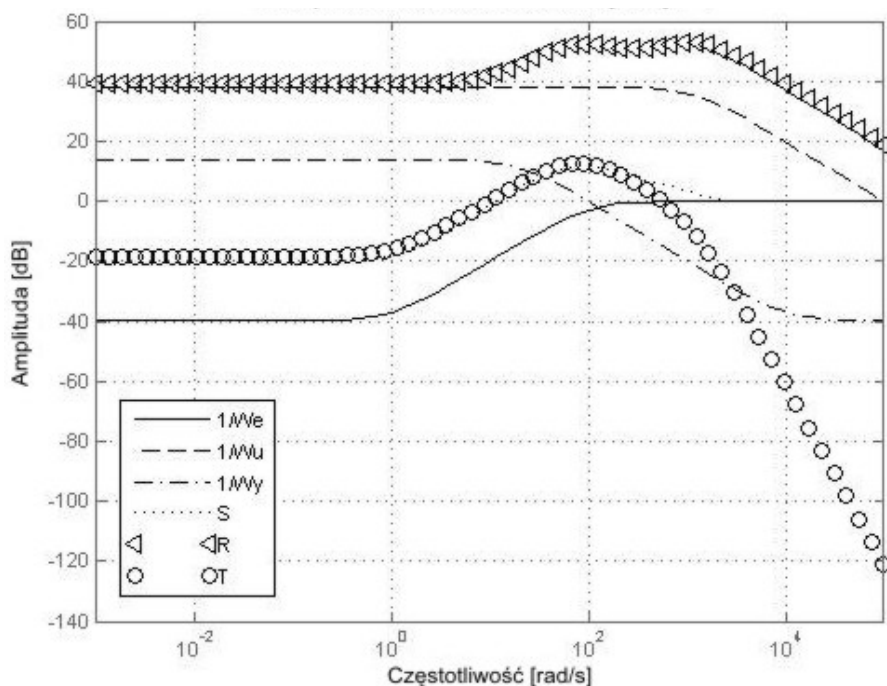
$$\begin{aligned} 0.881 &< \|W_e(s)S(s)\|_\infty < 0.882 \\ 0.883 &< \|W_u(s)R(s)\|_\infty < 0.884 \\ 0.253 &< \|W_y(s)T(s)\|_\infty < 0.254 \end{aligned} \quad (7.20)$$

Nierówności (7.20) potwierdzają spełnienie warunku (7.19).

Wektor współczynników  $\delta$  decyduje o wartości funkcji wagowej i ma wpływ na jej dynamikę. Z przeprowadzonych symulacji wynika, że najlepszą dynamikę układu zamkniętego (duże pasmo przenoszenia oraz tłumienie wymuszeń) zapewnia układ z wartością  $\delta=0.01$  (rys. 7.10). Sygnały wyjściowe układu zamkniętego (uchyb, sygnał sterujący i sygnał wyjściowy) w tym przypadku zmieniają się w zakresach  $\pm 0.1$ . Gorsze właściwości posiada układ z wartością  $\delta=0.1$ . Natomiast dla  $\delta=1$  układ zamknięty nie spełnia warunku regulatora podoptymalnego  $\|F_l(P, K)\|_\infty < 1$  (rys. 7.11).

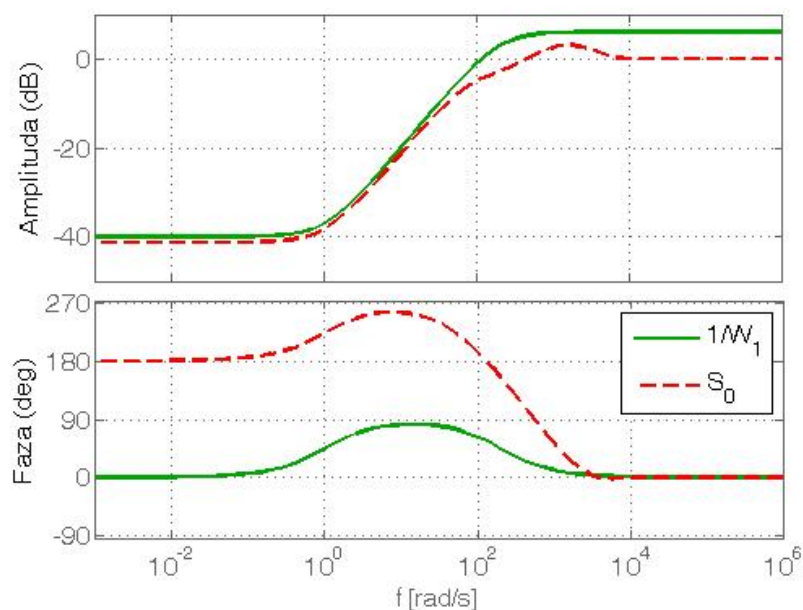


Rys. 7.10. Charakterystyki częstotliwościowo-amplitudowe funkcji wagowych i funkcji  $S$ ,  $R$ ,  $T$ , dla  $\delta=0.01$

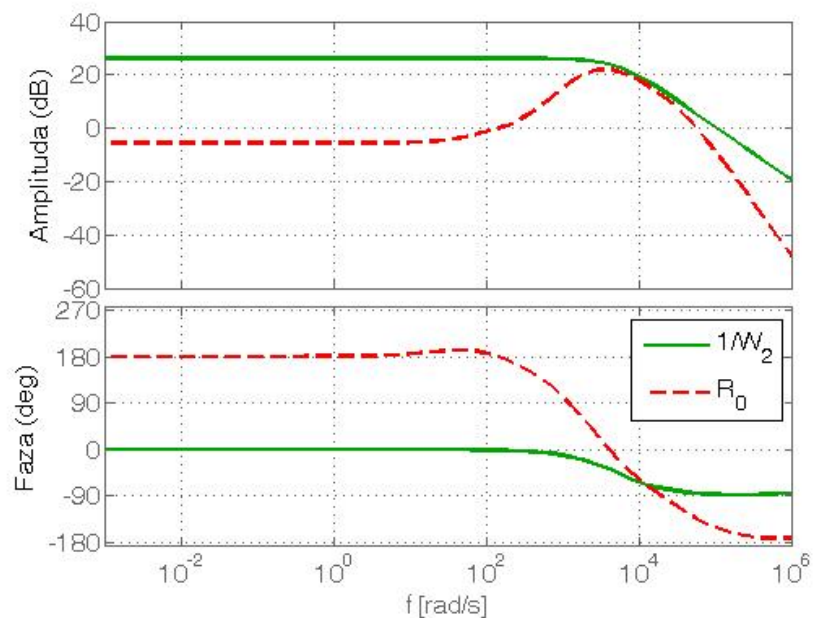


Rys. 7.11. Charakterystyki częstotliwościowo-amplitudowe funkcji wagowych i funkcji  $S$ ,  $R$ ,  $T$ , dla  $\delta=1$

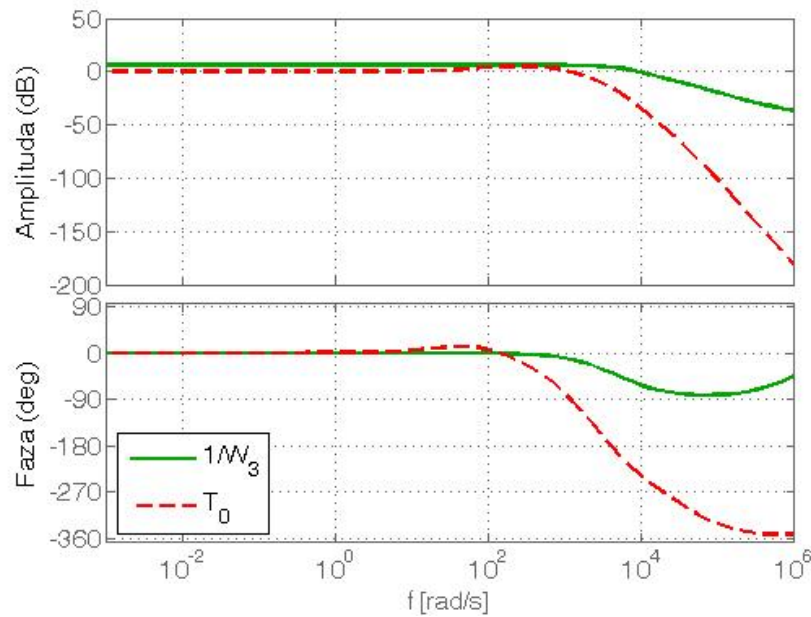
Na rys. 7.12, 7.13 i 7.14 przedstawiono charakterystyki częstotliwościowo-amplitudowe optymalnie dobranych funkcji wagowych (7.18 dla  $\delta=0.01$ ) i funkcji  $S_0$ ,  $T_0$  i  $R_0$  dla nominalnego modelu obiektu opisanego równaniem (6.6).



Rys. 7.12. Charakterystyka Bodego funkcji wagowej  $W_1(s)$  i  $S_0(s)$



Rys. 7.13. Charakterystyka Bodego funkcji wagowej  $W_2(s)$  i  $R_0(s)$



Rys. 7.14. Charakterystyka Bodego funkcji wagowej  $W_3(s)$  i  $T_0(s)$

### 7.7. Dobór funkcji wagowych $W_d$ i $W_n$

W fizycznym układzie sterowania nie mamy możliwości całkowitego ograniczenia sygnałów zakłóceń działających na obiekt. Regulator odporny np.  $H_\infty$  umożliwia uwzględnienie wpływu zakłóceń zewnętrznych i szumów pomiarowych już w trakcie procesu projektowania. W efekcie wyznaczony układ będzie bardziej odporny na niepożądane wymuszenia zewnętrzne.

Prezentowane w tym rozdziale modelowanie funkcji wagowych  $W_d$  i  $W_n$  jest często stosowane w innych układach sterowania dla zapewnienia większej odporności układu sterowania na zakłócenia zewnętrzne. Funkcje wagowe  $W_d$  i  $W_n$  mogą być użyte do odzwierciedlenia dynamiki zakłóceń wchodzących na wejście i wyjście obiektu lub do modelowania energii widma szumów występujących w praktyce. Funkcja  $W_d$  określa wpływ zakłóceń (niewyważenia) działających na wyjście obiektu, natomiast waga  $W_n$  określa wpływ szumów na układ pomiarowy. Najlepszym sposobem wyznaczenia tych funkcji jest pomiar zakłóceń i szumów układu sterowania w czasie rzeczywistym. Jeżeli ten sposób nie jest możliwy do zrealizowania fizycznie, funkcje wagowe wyznacza się na podstawie modeli sygnałów zakłóceń.

Niewyważenie wirnika zależy od prędkości obrotowej, i przesunięcia masy wirnika względem osi obrotu. Model niewyważenia można przedstawić następująco:

$$\begin{bmatrix} F_{uy} \\ F_{uz} \end{bmatrix} = \Omega^2 \left( \begin{bmatrix} u_{cy} \\ u_{cz} \end{bmatrix} \cos(\Omega t) + \begin{bmatrix} u_{sy} \\ u_{sz} \end{bmatrix} \sin(\Omega t) \right), \quad (7.21)$$

gdzie:

$\Omega$  – prędkość obrotowa wirnika,

$u_{cy}$ ,  $u_{cz}$ ,  $u_{sy}$ ,  $u_{sz}$  – parametry uwzględniające: masę, mimośrodowość (odległość środka obrotu wirnika od środka masy wirnika), przesunięcie i obrót osi bezwładności wirnika względem osi obrotu.

Na podstawie analizy modelu niewyważenia wyznaczono następujący model funkcji wagowej  $W_d$ :

$$W_d(s) = w_d \frac{2\xi\Omega_{\max}^2}{s^2 + 2\xi\Omega_{\max}s + \Omega_{\max}^2}, \quad (7.22)$$

gdzie:

- $w_d$  – diagonalna macierz skalowania funkcji  $W_d$ ,
- $\xi$  – bezwymiarowy współczynnik tłumienia,
- $\Omega_{\max}$  – maksymalna prędkość obrotowa wirnika.

Funkcja wagowa  $W_n$  określająca natężenie szumów w torze pomiarowym jest dobierana najczęściej jako przeskalowany parametr stały:

$$W_n(s) = w_n, \quad (7.23)$$

gdzie:

- $w_n$  – diagonalna macierz skalowania funkcji  $W_n$ .

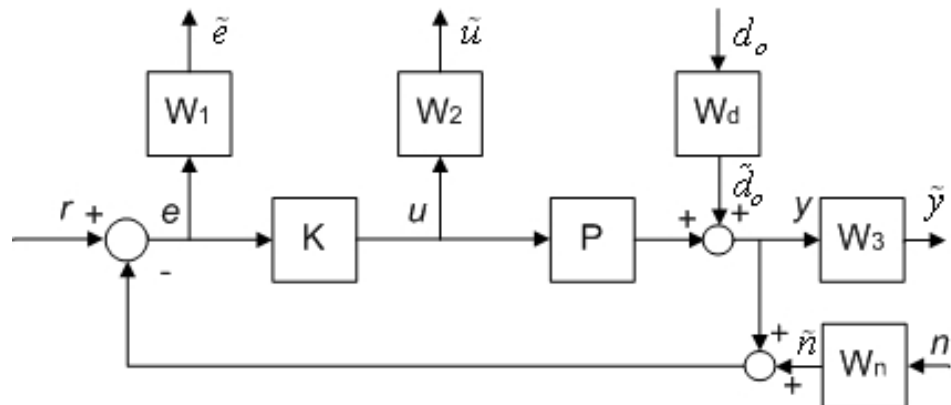
Jednak z uwagi na to, że wpływ szumów nasila się przy dużych częstotliwościach sygnałów, natomiast przy niskich jest pomijalnie mały, funkcję wagową dobiera się według następującego modelu:

$$W_n(s) = w_n \frac{s+a}{s+ab} \quad a \in \mathbb{C}, b > 1, \quad (7.24)$$

gdzie:

- $a$  – częstotliwość, dla której amplituda funkcji  $W_n$  przekracza wartość 1,
- $b$  – parametr określający dolną wartość ustaloną amplitudy funkcji  $W_n$  w dziedzinie częstotliwości.

Oprócz funkcji wag nałożonych na sygnały zakłócenia uwzględniono występowanie wag  $W_1$ ,  $W_2$  i  $W_3$ . Dlatego rozbudowany model układu zamkniętego posiada 3 wejścia i 3 wyjścia. Model układu sterowania z funkcjami wagowymi przedstawiono na rys. 7.15.



Rys. 7.15. Schemat układu sterowania z funkcjami wagowymi

Funkcje przejścia pomiędzy poszczególnymi wejściami i wyjściami opisano następującym równaniem macierzowym:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{e} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_3 T & W_3 S P W_d & -W_3 T W_n \\ W_1 S & -W_1 S P W_d & -W_1 S W_n \\ W_2 K S & -W_2 T W_d & -W_2 R W_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ d_o \\ n \end{bmatrix}, \quad (7.25)$$

gdzie:

$S, T, R$  – funkcje: wrażliwości, komplementarnej wrażliwości i sterowania,

$K$  – regulator,

$P$  – obiekt,

$r, e, u, d_o, y, n$  – sygnały: zadany, uchybu, sterujący, zakłócenia, wyjściowy i szumu.

Jeżeli sygnał sterujący  $u$  potraktujemy jako dodatkowy sygnał wejściowy (w celu wyznaczenia modelu LFT) to równanie (7.25) modyfikuje się do następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{e} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_2KS & -W_2TW_d & -W_3RW_n & W_2 \\ W_1S & -W_1SPW_d & -W_1SW_n & -W_1P \\ W_3T & W_3SPW_d & -W_3TW_n & -W_3P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ d_o \\ n \\ u \end{bmatrix}. \quad (7.26)$$

Dla potrzeb dalszej analizy funkcji wagowych układu zamkniętego przedstawionego na rys. 7.15 wyznaczono model otwarty układu, który opisano następującym równaniem macierzowym:

$$\begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{u} \\ \tilde{y} \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 & -W_1PW_d & -W_1W_n & -W_2P \\ 0 & 0 & 0 & W_2 \\ 0 & W_3PW_d & 0 & W_3P \\ 1 & -PW_d & -1 & -P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ d_o \\ n \\ u \end{bmatrix}. \quad (7.27)$$

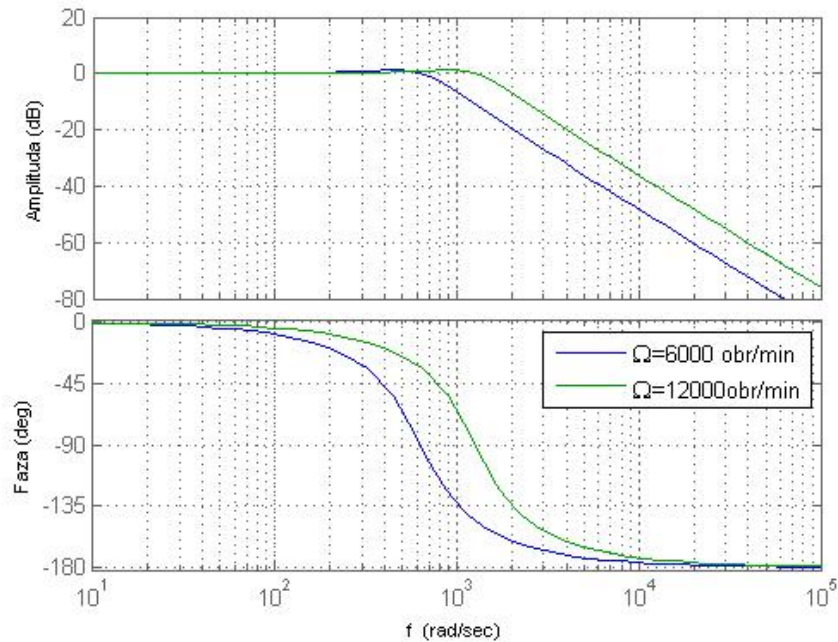
## 7.8. Analiza problemu doboru funkcji $W_d$

Zakładając maksymalną prędkość obrotową wirnika  $\Omega_{\max} = 24000$  [obr/min] = 63.6 [rad/s] oraz tłumienie na poziomie  $\xi = 0.5$ , obliczono funkcję  $W_d$ :

$$W_d(s) = \frac{4052.8473}{s^2 + 63.66s + 4053}. \quad (7.28)$$

Z uwagi na wyznaczone częstotliwości drgań własnych wirnika (rozdział 4.3), analiza doboru funkcji wagowej  $W_d$  modelującej zakłócenie w postaci niewyważenia będzie się opierać na dwóch pierwszych postaciach drgań: translacyjnej i rotacyjnej.

Charakterystykę Bodego funkcji  $W_d$  ( $\xi=0.5$ ,  $\Omega=6000, 12000$  [obr/min]) przedstawiono na rys. 7.16. Zaprezentowane funkcje wagowe dobrano w ten sposób, aby pasmo przenoszenia kolejnej funkcji było w przybliżeniu równe pierwszej i drugiej częstotliwości drgań własnych wirnika.

Rys. 7.16. Charakterystyka Bodego funkcji  $W_d$ 

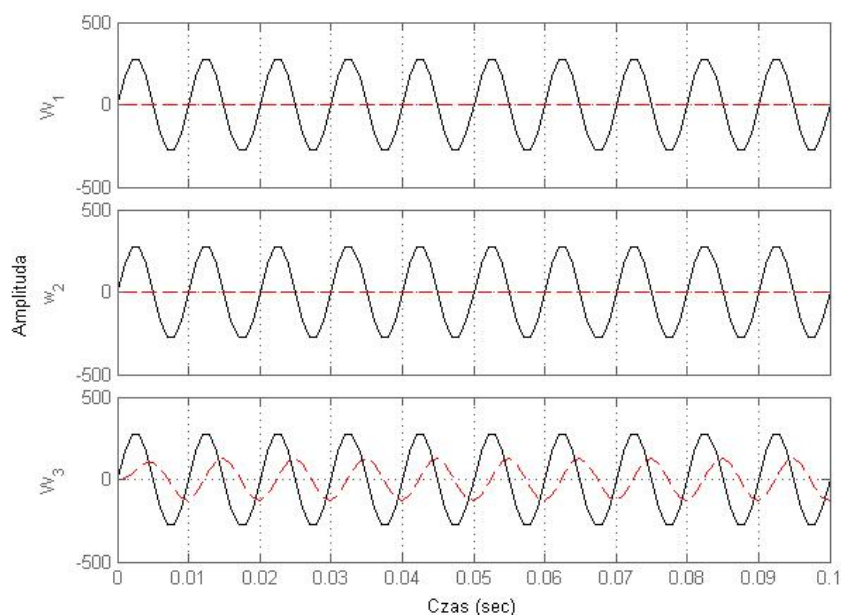
Zatem funkcja  $W_d$  jest filtrem dolnoprzepustowym o częstotliwości rezonansowej równej  $\Omega$ . Zakłócenie działające w układzie będące niewyważeniem statycznym i dynamicznym wirnika dla jednej osi sterowania opisano następująco:

$$d = m \varepsilon_m \Omega^2 \sin(\Omega t) \quad (7.29)$$

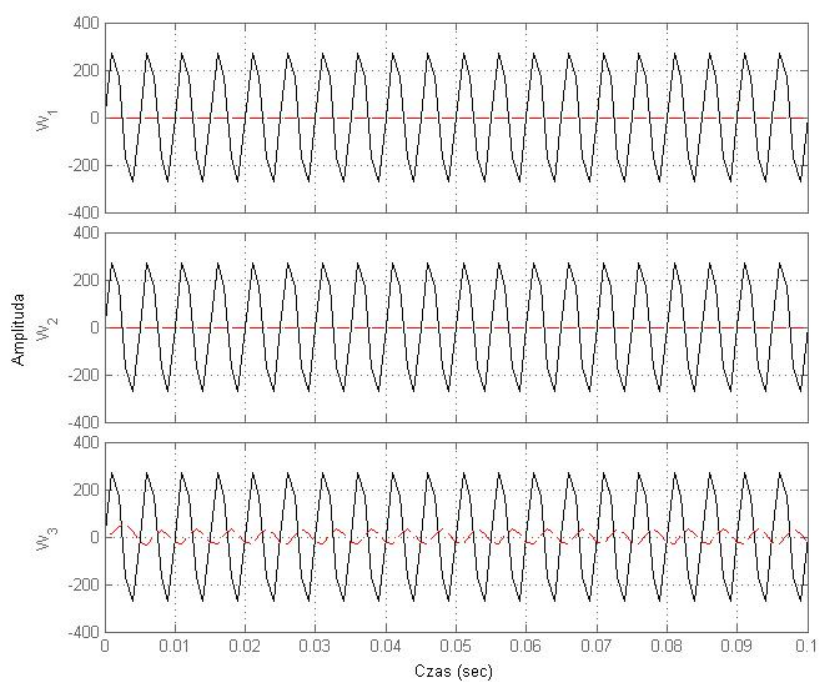
Dla tak zdefiniowanego niewyważenia zaprojektowano funkcję wagową  $W_d$  równą:  $W_d(s) = \frac{3.94 \cdot 10^5}{s^2 + 628.3 s + 3.94 \cdot 10^5}$  ( $\Omega = 6000$  [obr/min],  $\xi = 0.5$ ). W układzie regulacji występują dodatkowe funkcje wagowe  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ , które wynoszą odpowiednio:

$$W_1(s) = \frac{0.4545s + 64}{s + 0.64}; \quad W_2(s) = \frac{s + 1000000}{0.01s + 10000000}; \quad W_3(s) = \frac{s + 33330}{0.01s + 100000} \quad (7.30)$$

Na podstawie obiektu rozbudowanego o wyznaczone powyżej funkcje wagowe wyznaczono regulator odporny  $H_\infty$ . Sposób wyznaczania regulatora odpornego został opisany w rozdziale 8. Odpowiedź układu zamkniętego z regulatorem odpornym  $H_\infty$  dla różnych częstotliwości niewyważenia  $d$  będącego sygnałem zakłócenia działającym na wirnik przedstawiono na rys. 7.17 i 7.18.



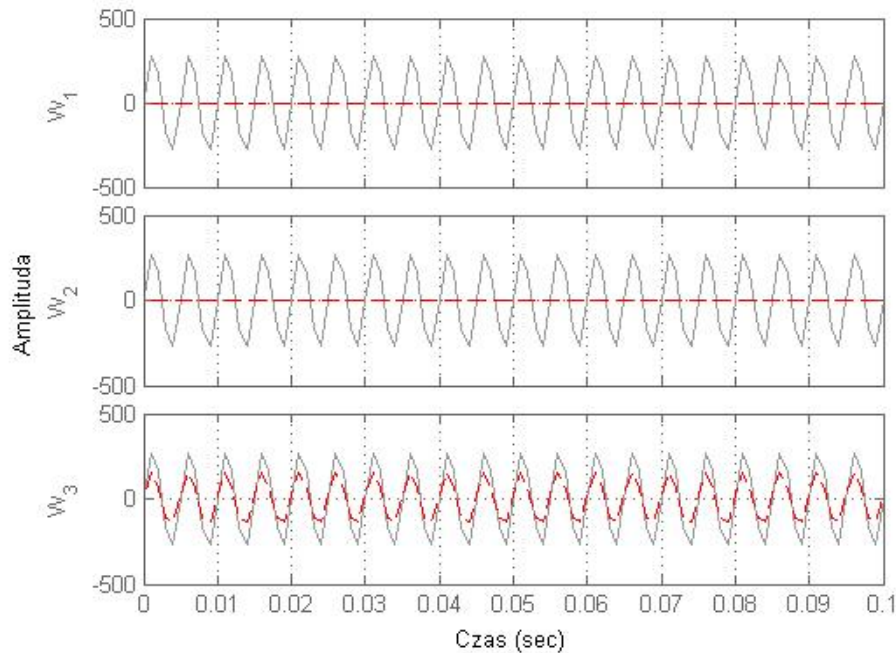
Rys. 7.17. Odpowiedź układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  na zakłócenie o częstotliwości równej  $\Omega$ , linia ciągła – wymuszenie, linia przerywana – odpowiedź



Rys. 7.18. Odpowiedź układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  na zakłócenie o częstotliwości równej  $2 \cdot \Omega$ , linia ciągła – wymuszenie, linia przerywana – odpowiedź

Na rys. 7.17 i 7.18 widać działanie filtra dolnoprzepustowego. Zakłócenie o częstotliwości powyżej częstotliwości odcięcia jest tłumione.

Dla porównania na rys. 7.19 przedstawiono odpowiedź układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  w wypadku braku funkcji wagowej  $W_d$ .



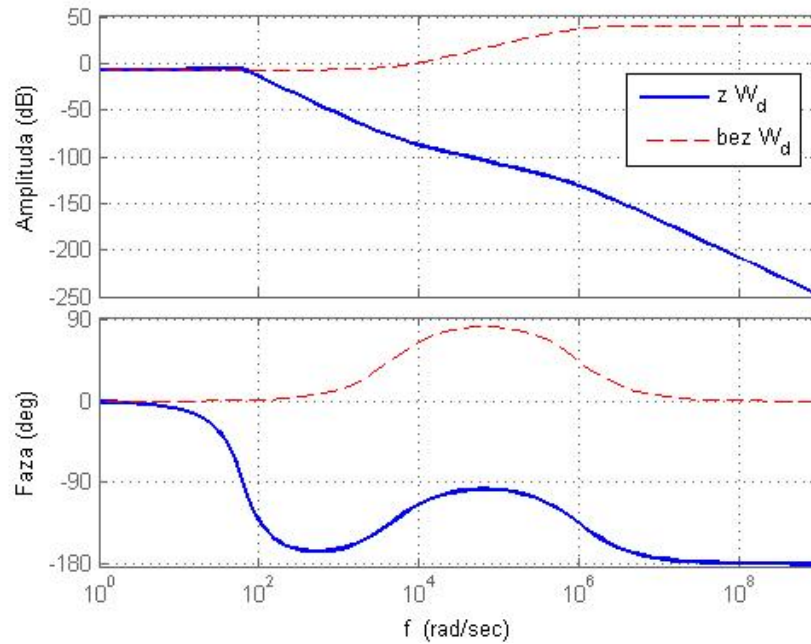
Rys. 7.19. Odpowiedź układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  na zakłócenie o częstotliwości równej  $2 \cdot \Omega$  z **pominięciem funkcji  $W_d$** ,  
linia ciągła – wymuszenie, linia przerywana – odpowiedź

Z rys. 7.19 wynika, że zakłócenie powoduje znaczny wpływ na sygnał wyjściowy (przesunięcie wirnika w szczelinie powietrznej).

Na rys. 7.20 przedstawiono charakterystykę Bodego układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  między wejściowym sygnałem zakłócenia  $d$  (niewyważenie) a wyjściowym sygnałem pomiarowym  $y$ . Charakterystykę wyznaczono z uwzględnieniem funkcji wagowej  $W_d$  i bez jej uwzględnienia. Charakterystyki wyznaczono dla funkcji  $W_d$  i  $W_3$  wynoszących odpowiednio:

$$W_d(s) = \frac{3948}{s^2 + 62.83s + 3948}, \quad W_3(s) = \frac{s + 33330}{0.01s + 100000}. \quad (7.31)$$

Na rys. 7.20 widać, że dzięki funkcji wagowej  $W_d$  sygnał zakłócenia jest tłumiony i w mniejszym stopniu wpływa na zaburzenie sygnału wyjściowego  $y$ .

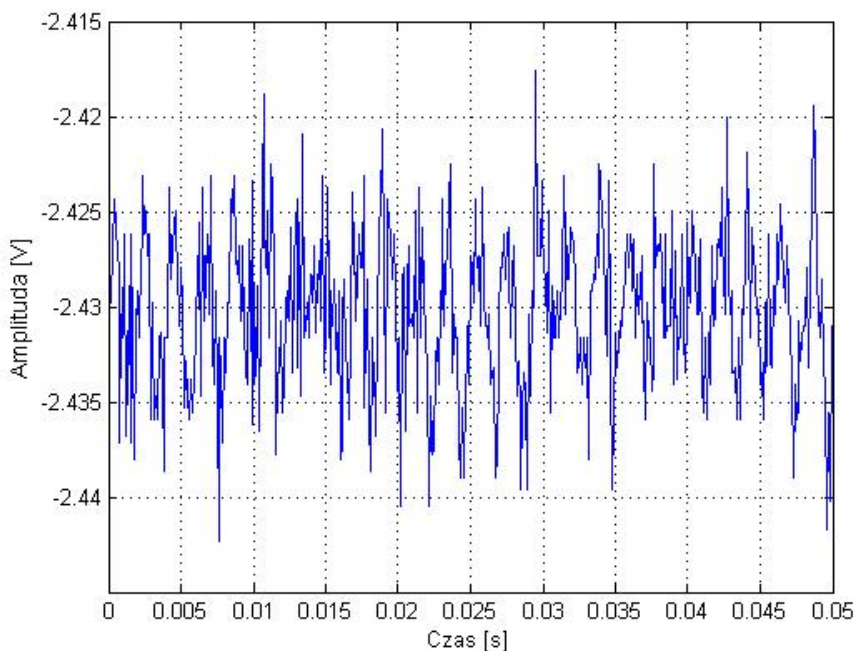


Rys. 7.20. Charakterystyki Bodego układu zamkniętego

### 7.9. Analiza problemu doboru funkcji $W_n$

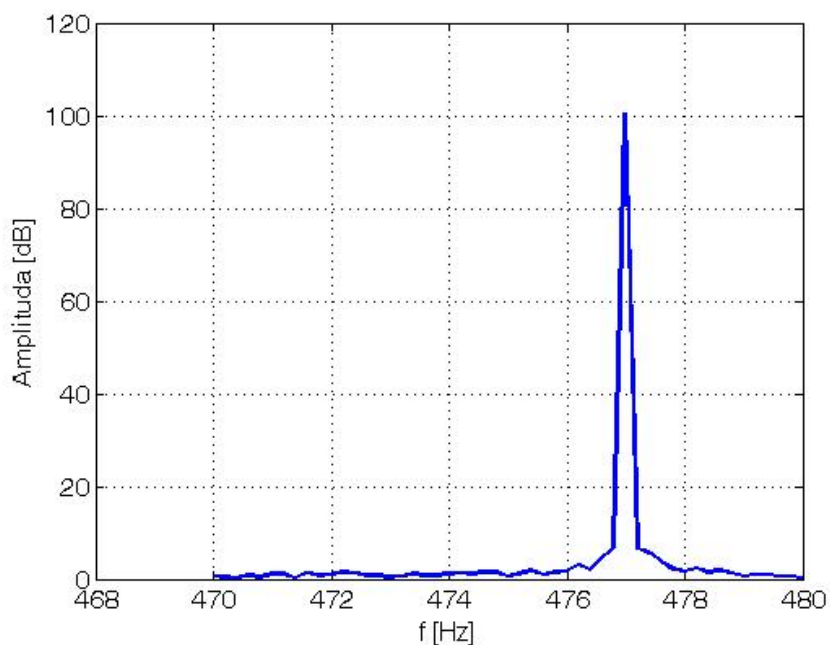
Sposób doboru funkcji wagowej  $W_n$  modelującej wpływ szumów w torze sprzężenia zwrotnego (torze pomiarowym) opiera się na analizie częstotliwościowej sygnału wyjściowego z czujników wiropędowych mierzących położenie wału w szczelinie łożyska magnetycznego. Powstający szum kolorowy jest modelowany przez funkcję  $W_n$  włączoną w model rozbudowany, dla którego wyznacza się regulator odporny (rozdział 8). Takie rozwiązanie pozwala na projektowanie regulatora odpornego z uwzględnieniem modelu zakłóceń w torze pomiarowym. W rezultacie obliczony regulator optymalny będzie bardziej odporny na sygnały szumów pochodzących od układów przetwornikowych (ang. *Proximity*) czujników wiropędowych.

Na rys. 7.21 przedstawiono przebieg sygnału wyjściowego z czujnika wiropędowego w wypadku wyłączonych łożysk magnetycznych dla szczeliny powietrznej równej 0.0004 [m] i częstotliwości próbkowania wynoszącej 10 [kHz].



Rys. 7.21. Przebieg czasowy sygnału z czujnika wiropładowego

Sygnał szumu poddany został analizie przy pomocy transformaty Fouriera. Wyznaczone zostało widmo sygnału w przedziale od 1 do 400 [Hz]. Analizując sygnał w szerszym przedziale częstotliwości stwierdzamy występowanie jednej znaczącej częstotliwości nośnej równej 467 [Hz]. Maksymalną wartość prążka częstotliwości nośnej przedstawiono na rys. 7.22.

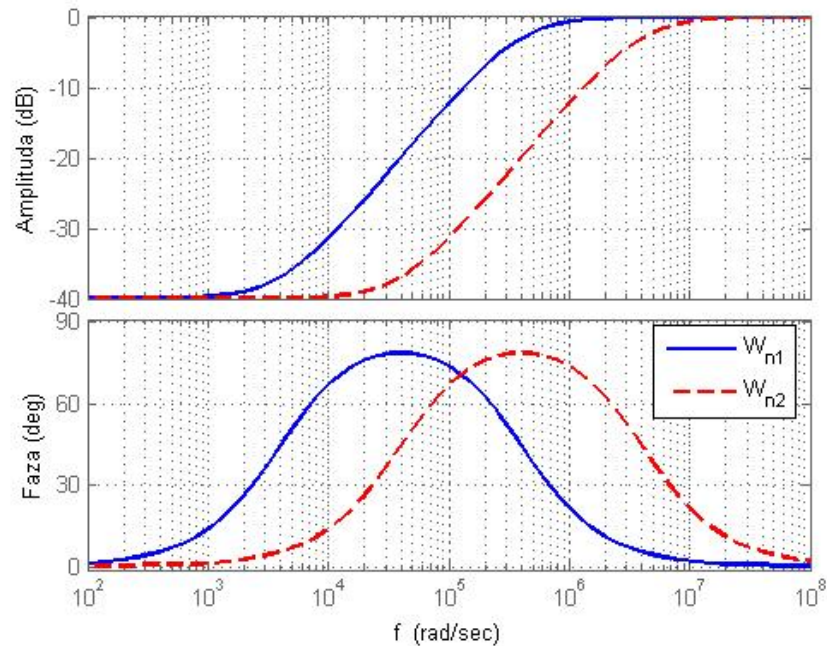


Rys. 7.22. Maksymalna amplituda widma sygnału

Dobór funkcji wagowej  $W_n$  opierał się będzie na modelowaniu wpływu szumu na układ zamknięty. Na podstawie analizy częstotliwościowej wyznaczono funkcje  $W_n$  w zależności od częstotliwości sygnałów zakłócenia, które wynoszą odpowiednio:

$$W_{n1}(s) = \frac{s + 4000}{s + 4 \cdot 10^5}, \quad W_{n2}(s) = \frac{s + 40000}{s + 4 \cdot 10^6}. \quad (7.32)$$

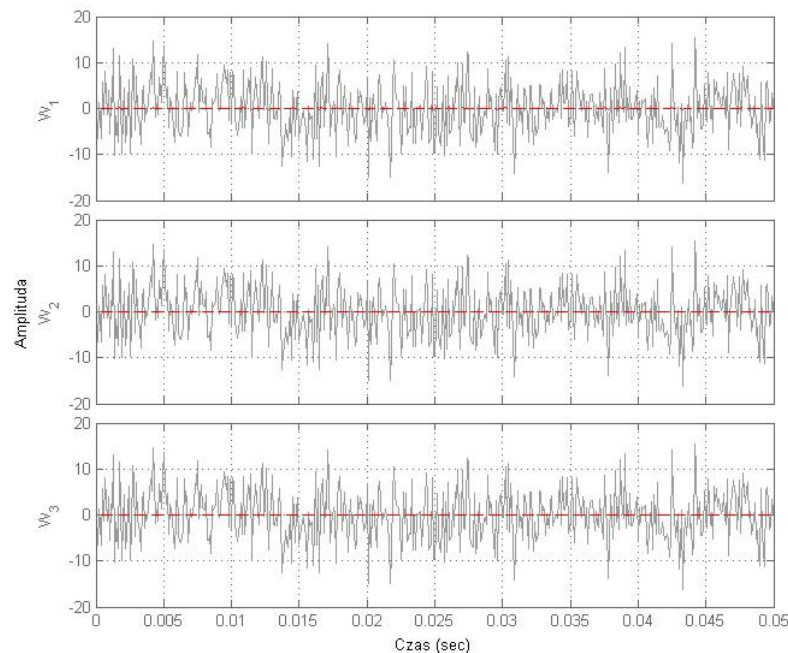
Charakterystyki Bodego funkcji:  $W_{n1}$  i  $W_{n2}$  zostały przedstawione na rys. 7.23.



Rys. 7.23. Charakterystyka Bodego funkcji:  $W_{n1}$  i  $W_{n2}$

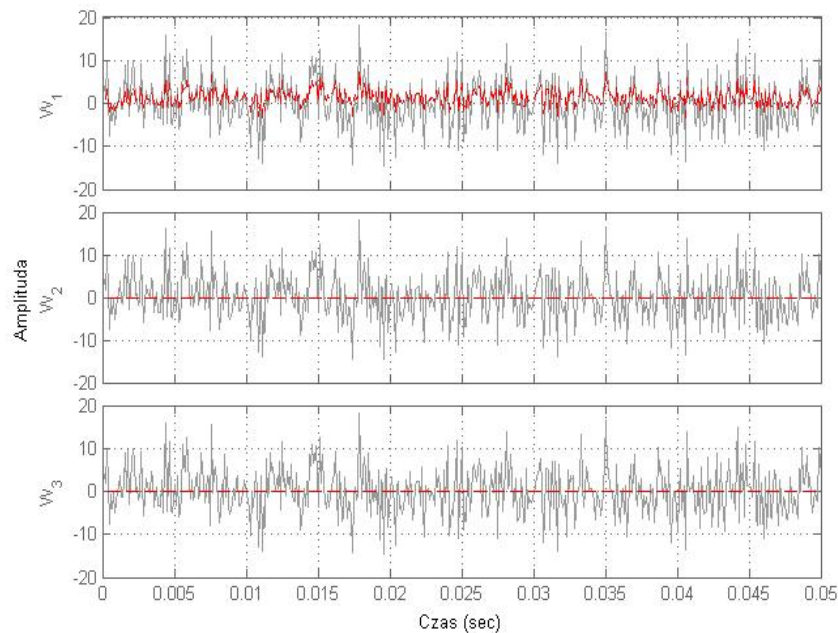
Z rys. 7.23 wynika, że funkcja wagowa  $W_n$  jest filtrem górno-przepustowym modelującym nasilenie się szumów wraz ze wzrostem częstotliwości. Modelowany szum  $n$  został wprowadzony w tor sprzężenia zwrotnego. Model zakłócenia  $n$  stanowi szum biały o rozkładzie Gaussa z ograniczeniem mocy sygnału.

Na rys. 7.24 przedstawiono odpowiedź układu zamkniętego z regulatorem odpornym w wypadku występowania szumu w torze sprzężenia zwrotnego z uwzględnieniem funkcji wagowej  $W_n$ .



Rys. 7.24. Odpowiedź układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  na szum o mocy 15dB, linia ciągła – wymuszenie, linia przerywana – odpowiedź

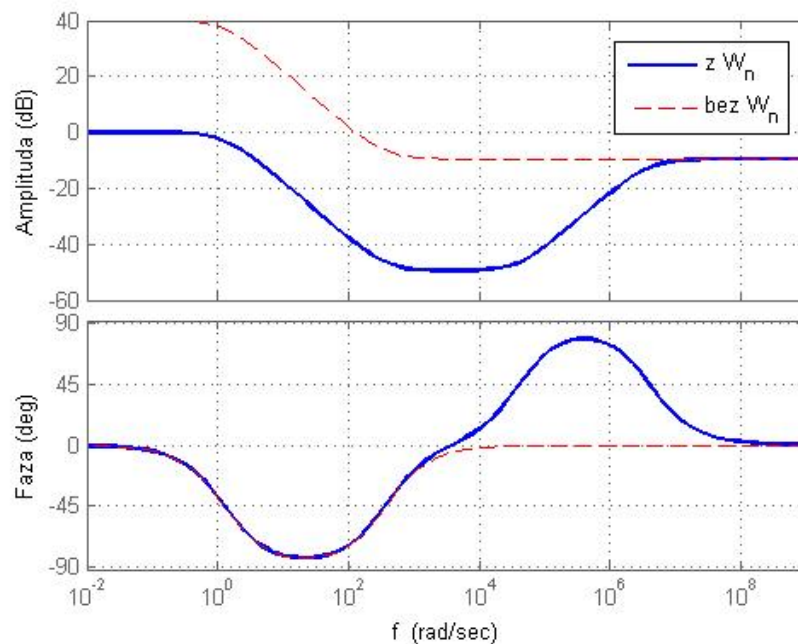
Dla porównania na rys. 7.25 przedstawiono odpowiedź układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  w przypadku braku funkcji wagowej  $W_n$ .



Rys. 7.25. Odpowiedź układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  na szum o mocy 15dB, linia ciągła – wymuszenie, linia przerywana – odpowiedź

Na rys. 7.26 przedstawiono charakterystykę Bodego układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  między wejściowym sygnałem szumu  $n$  i wyjściowym sygnałem ważonym uchybu  $\tilde{e}$ . Charakterystykę wyznaczono z uwzględnieniem funkcji wagowej  $W_n$  i bez jej uwzględnienia. Charakterystyki wyznaczono dla funkcji:  $W_n$  i  $W_1$  wynoszących odpowiednio:

$$W_1(s) = \frac{0.4545s + 64}{s + 0.64}; \quad W_n(s) = \frac{s + 40000}{s + 4 \cdot 10^6}. \quad (7.33)$$



Rys. 7.26. Charakterystyki Bodego układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$

Z rys. 7.26 wynika, że dodatkowa funkcja wagowa nałożona na sygnał szumu zwiększa tłumienie i w rezultacie w mniejszym stopniu sygnał szumu zakłóca sygnał uchybu regulacji w układzie zamkniętym z regulatorem odpornym  $H_\infty$ . Tłumienie sygnału nasila się wraz ze wzrostem częstotliwości i najskuteczniej działa w paśmie częstotliwości zidentyfikowanego szumu.

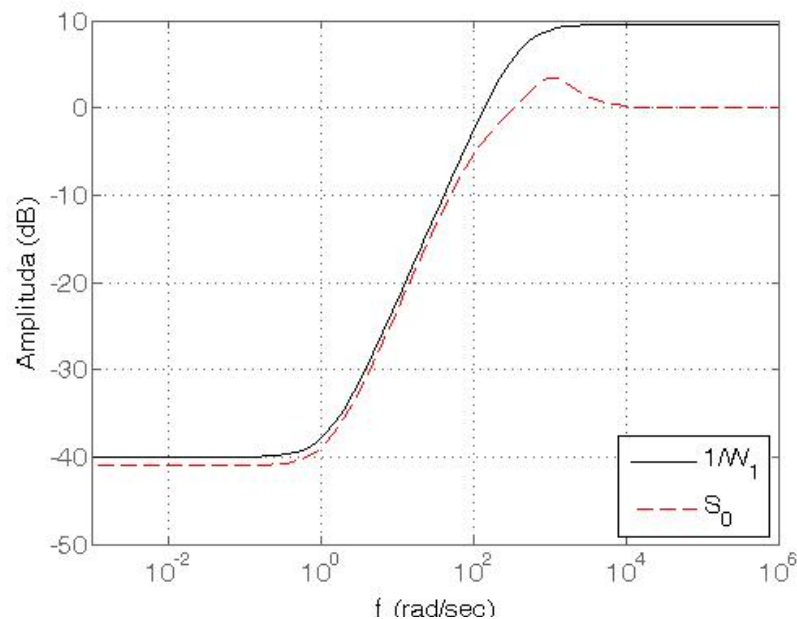
### 7.10. Kształtowanie pasma przenoszenia układu zamkniętego i ograniczeń sygnału sterującego regulatora za pomocą funkcji wagowej

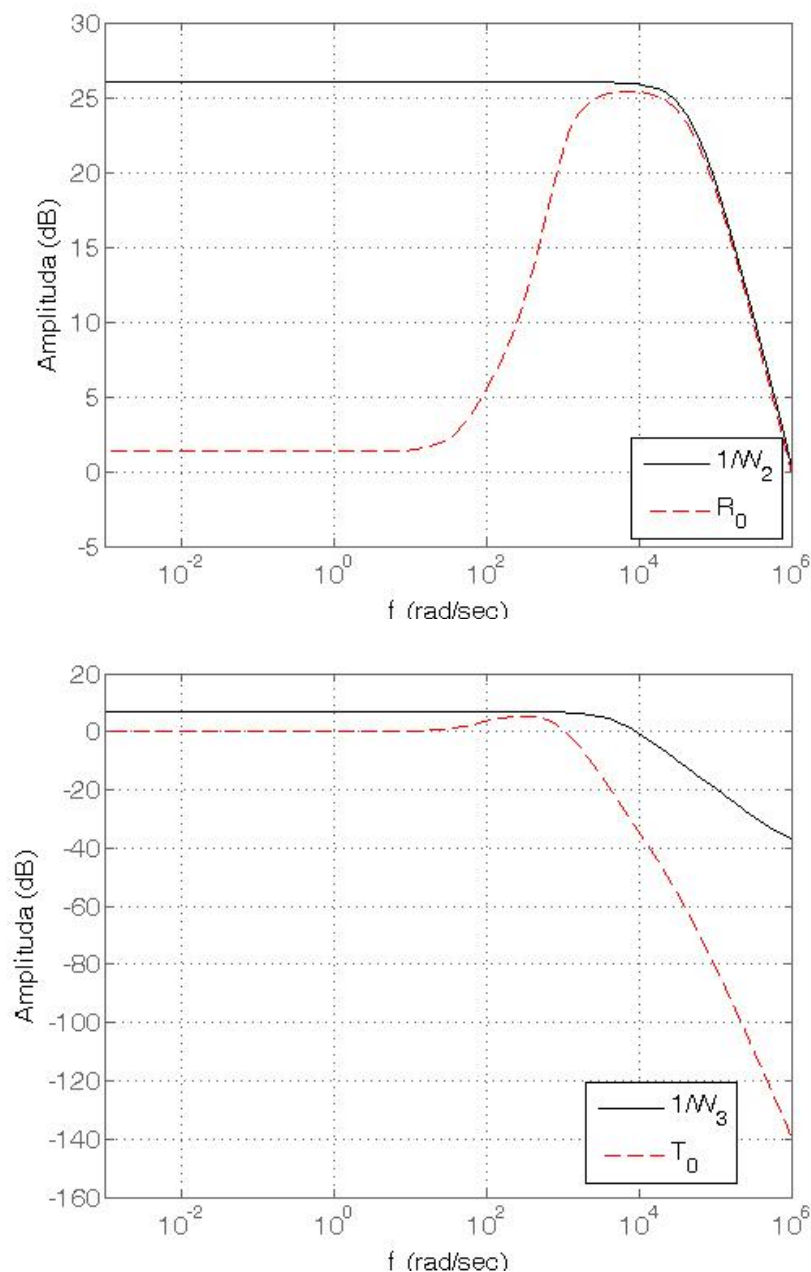
Waga  $W_2$  służy do uwzględnienia ograniczeń nałożonych na sygnał sterujący. Pozwala to na ograniczenie amplitudy i pasma przenoszenia sygnału sterującego. Takie ograniczenie jest niezbędne w układzie sterowania cewkami elektromagnetycznymi łożyska z uwagi na efekty nasycenia występujące w obwodach magnetycznych. Układ LFT składa się z obiektu sterowania i funkcji wagowych nałożonych na sygnały wejściowe i wyjściowe.

Na podstawie dobranych wcześniej funkcji wagowych, których transmitancje są opisane wzorem (7.30) wyznaczono regulator  $H_\infty$  (rozdział 8), którego transmitancja jest następująca:

$$H_\infty(s) = \frac{116.3 s^4 + 1.175 \cdot 10^{11} s^3 + 1.163 \cdot 10^{18} s^2 + 2.369 \cdot 10^{20} s + 6.141 \cdot 10^{21}}{s^5 + 1.101 \cdot 10^7 s^4 + 1.016 \cdot 10^{13} s^3 + 1.411 \cdot 10^{17} s^2 + 1.415 \cdot 10^{20} s + 9.05 \cdot 10^{19}}. \quad (7.34)$$

Na rys. 7.27 przedstawiono charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe wyznaczonych funkcji:  $S_0$ ,  $T_0$ ,  $R_0$ , oraz funkcji wagowych:  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  (7.30).





Rys. 7.27. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe funkcji wagowych:  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  i funkcji:  $S_0$ ,  $R_0$ ,  $T_0$

Następnie została przeprowadzona analiza wpływu funkcji wagowej  $W_2$  na kształt charakterystyki Bodego układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$ . Postać funkcji  $W_2$  jest następująca:

$$W_2(s) = \frac{s + \frac{\omega_{bc}}{M_u}}{\varepsilon_1 s + \omega_{bc}}, \quad (7.35)$$

gdzie:

$M_u$  – maksymalna amplituda funkcji  $KS(j\omega)$  dla częstotliwości mniejszych od  $\omega_{bc}$ ,

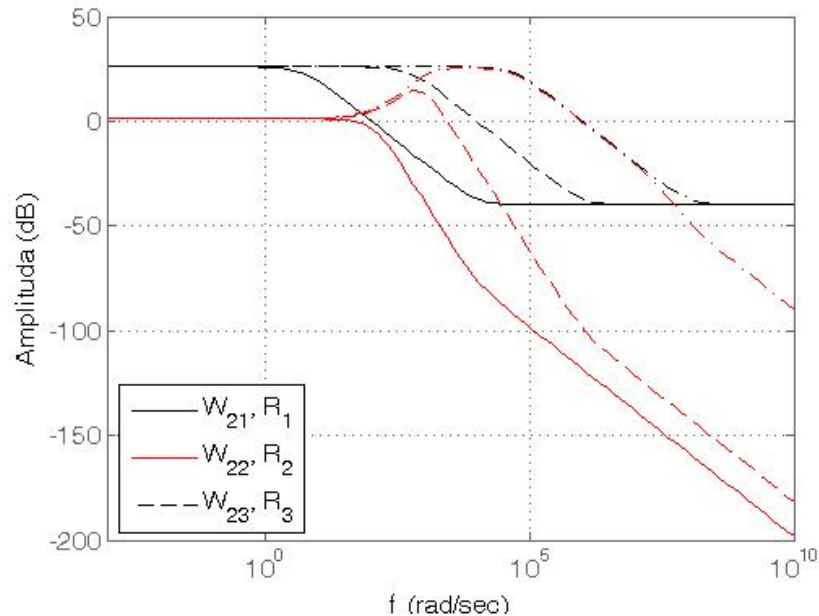
$\omega_{bc}$  – wartość częstotliwości, dla której funkcja  $KS(j\omega)$  osiąga wartość  $\leq 1$ ,

$\varepsilon_l$  – maksymalna amplituda funkcji  $KS(j\omega)$  dla częstotliwości większych od  $\omega_b$ .

Do badań symulacyjnych zostały wybrane następujące funkcje  $W_2$ :

$$W_{21}(s) = \frac{s+5}{0,01s+100} \quad W_{22}(s) = \frac{s+500}{0,01s+10000} \quad W_{23}(s) = \frac{s+50000}{0,01s+1000000}. \quad (7.36)$$

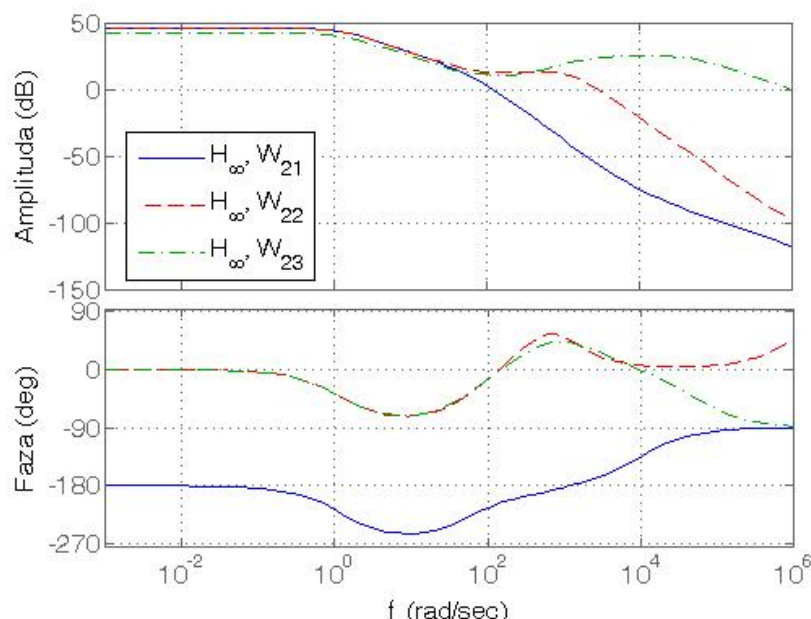
Na rys. 7.28 przedstawiono charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe funkcji wagowych  $W_{21}$ ,  $W_{22}$ ,  $W_{23}$  i odpowiadającym im funkcji sterowania  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ .



Rys. 7.28. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe funkcji wagowych i funkcji sterowania

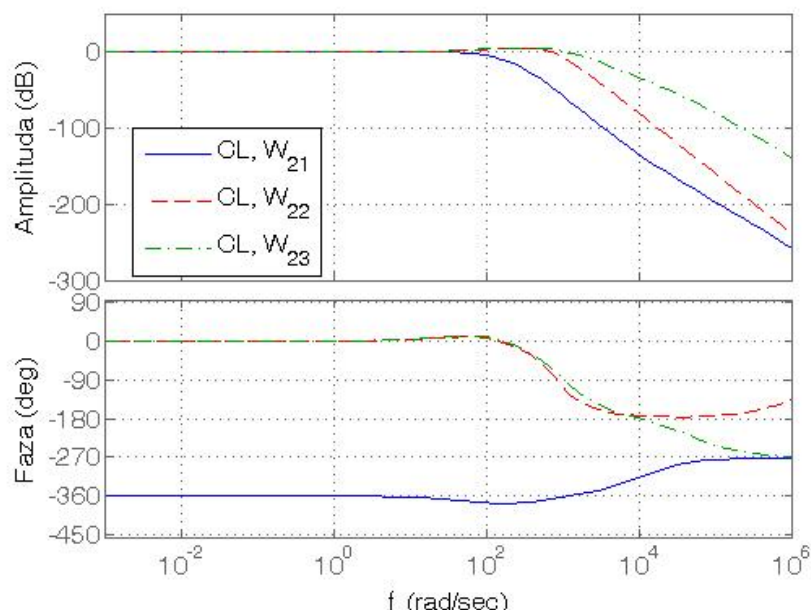
Z rys. 7.28 widać, że funkcja sterowania  $R$  jest kształtowana przez funkcje wagową  $W_2$ . Funkcja sterowania  $R$  określa wpływ sygnałów wymuszenia na sygnał sterujący. Ważne jest zatem, aby pasmo przenoszenia funkcji  $R$  było jak najdłuższe. Pasmo to zależy od kształtu funkcji  $W_2$ . Amplituda funkcji  $R$  odpowiada za energię zużywaną przez sygnał sterujący. Energia ta może być ograniczona przez parametr  $M_u$  funkcji  $W_2$ . Ważne jest również odpowiednie ograniczenie maksymalnych wartości funkcji  $R$  do wartości możliwych do zrealizowania przez człony wykonawcze.

Na rys. 7.29 przedstawiono charakterystyki Bodego regulatora  $H_\infty$  wyznaczonego dla obiektu z funkcjami wagowymi:  $W_{21}$ ,  $W_{22}$ ,  $W_{23}$ .

Rys. 7.29. Charakterystyki Bodego regulatora  $H_\infty$ 

Z rys. 7.29 wynika, że tłumienie regulatora jest tym większe, im większe są ograniczenia narzucone na sygnał sterujący przez funkcję  $W_2$ .

Na rys. 7.30. przedstawiono charakterystyki Bodego układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  wyznaczonego dla funkcji:  $W_{21}$ ,  $W_{22}$ ,  $W_{23}$ .

Rys. 7.30. Charakterystyki Bodego układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$ 

Na rys. 7.30 widać znaczny wpływ funkcji wagowych na pasmo przenoszenia układu zamkniętego. Pasma przenoszenia jest zależne od parametru  $\omega_{bc}$  funkcji  $W_2$ . Dla większej wartości  $\omega_{bc}$  odpowiada większa szerokość pasma przenoszenia. Funkcja wagowa  $W_2$  musi być tak dobrana, aby zapewnić odpowiednią dynamikę układu sterowania przy jednoczesnym zachowaniu ograniczeń sygnału sterującego, tak aby nie doprowadzić do nasycenia członów wykonawczych. Oczywiście najlepszym układem sterowania odpornego byłby układ bez

narzuconych ograniczeń na sygnał sterujący. Wtedy pasmo przenoszenia układu zamkniętego byłoby zależne tylko od szybkości regulatora.

W układach sterowania z regulatorem  $H_\infty$  dobór odpowiednich funkcji wagowych jest zadaniem kluczowym. Wartość funkcji wagowych decyduje o dynamice całego układu regulacji. Szczególnie wartość współczynników wzmocnienia dynamicznego wpływa na zakresy sygnałów wyjściowych układu zamkniętego. Zakres odporności układu regulacji zwiększa się, jeżeli ograniczymy wpływ sygnałów zakłócenia na sygnały wyjściowe układu zamkniętego. Najlepsze tłumienie osiąga się dla  $\delta < 0.1$ . Zapas stabilności regulatora odpornego jest szczególnie widoczny przy większych częstotliwościach (w naszym przypadku powyżej pasma przenoszenia  $\omega_0 = 1000$  [Hz]) i zależy od wartości  $\delta$ .

Wadą stosowania funkcji wagowych jest zwiększony rząd regulatora odpornego. Dlatego należy pamiętać, aby rząd poszczególnych funkcji wagowych był możliwie jak najmniejszy.

## Rozdział 8. Projektowanie algorytmów sterowania odpornego

W tym rozdziale opisano algorytmy sterowania odpornego optymalizowanego normami:  $\|H\|_{\infty}$  i  $\|H\|_2$  wykorzystane do sterowania położeniem wirnika łożyskowanego magnetycznie.

Standardowe metody projektowania regulatora są ograniczone do obiektów liniowych lub słabo nieliniowych. Większość tych metod ogranicza się do obiektów ze stałymi parametrami LTI (ang. *Linear Time Invariant*). Natomiast zaawansowane metody sterowania pozwalają na wyznaczenie regulatora optymalnego oraz odpornie stabilnego (ang. *Robust Stable*). Regulator odpornie stabilny to taki, który zapewnia stabilność obiektu mimo, że parametry obiektu są zmienne w czasie eksploatacji. Takie obiekty nazywane są LPV (ang. *Linear Parameter Varying*). Badania odporności układu sterowania obiektem, jakim jest zawieszenie magnetyczne zostały zebrane w załączniku C. Również dynamika obiektu nie zawsze może być opisana jednym modelem. Takie obiekty nazywa się obiektami z niezamodelowaną dynamiką (ang. *Unmodeled Dynamic Plant*). Dzięki zastosowaniu odpornej teorii sterowania możliwe jest wyznaczenie regulatora odpornego na zmiany właściwości obiektu wybiegające poza model nominalny. Wynikiem zastosowania teorii sterowania odpornego i optymalnego jest wyznaczenie regulatora  $H_{\infty}$  oraz  $H_2$ .

Sterowanie odporne szczególnie przeznaczone jest dla układów z częściowo nieznaną dynamiką obiektu i nieznanym charakterem zakłóceń. Metoda sterowania odpornego umożliwia uwzględnienie modelu obiektu, modelu niepewności obiektu oraz modelu niepewności zakłóceń działających na obiekt. Regulator wyznaczony metodą sterowania odpornego jest odporny na zmiany parametrów układu w czasie, zmiany charakteru zakłóceń oraz pozwala na uwzględnienie szeregu ograniczeń nałożonych na sygnały. Regulator odporny zapewnia stabilność układu zamkniętego, mimo że stan pracy obiektu odbiega od stanu opisanego modelem nominalnym. W metodzie sterowania odpornego model obiektu w pewnych granicach może się zmieniać, natomiast regulator odporny pozwala na stabilizację obiektu bez dodatkowych układów identyfikacji. Odporność regulatora oznacza niewrażliwość układu zamkniętego na zmiany parametrów obiektu zachodzące podczas jego eksploatacji.

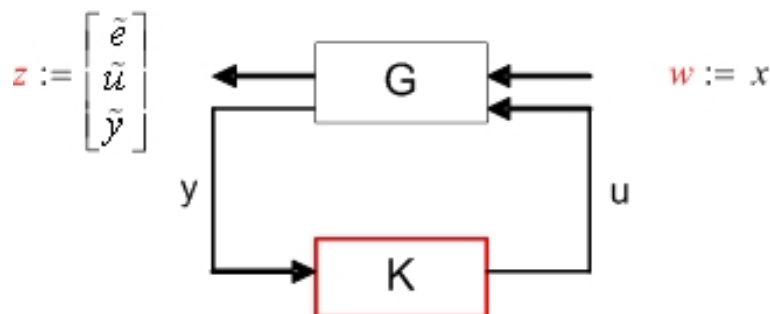
Projektowanie regulatora odpornego jest procedurą złożoną, która wymaga dokładnej analizy obiektu, zakłóceń działających na obiekt oraz ograniczeń sygnałów wejściowych i wyjściowych układu zamkniętego.

Wyznaczenie regulatora odpornego sprowadza się do zrealizowania następujących etapów:

- 1) Skalowanie układu sterowania (krok opcjonalny). Skalowanie zostało przeprowadzone zgodnie z załącznikiem A, z tym że wartości sygnałów zostały dopasowane do zakresu ( $\pm 10$  [V]) kart przetworników A/C i C/A procesora DSP. Natomiast prezentowane charakterystyki przedstawione są we współrzędnych fizycznych.
- 2) Wyznaczenie modelu matematycznego nominalnego obiektu sterowania w przestrzeni stanu.
- 3) Zbudowanie układu sterowania z klasycznym regulatorem np. PID, dobranie parametrów regulatora.
- 4) Dla danych parametrów obiektu i regulatora wyznaczenie transmitancji otwartej  $L(s)$ , funkcji wrażliwości  $S(s)$ , funkcji komplementarnej wrażliwości  $T(s)$  oraz funkcji sterowania  $R(s)$ .
- 5) Dobranie funkcji wagowych dla analizowanego układu zamkniętego.
- 6) Wyznaczenie rozbudowanego obiektu sterowania w oparciu o uwzględnienie funkcji: wagowych – najczęściej wagi wyjścia  $W_y$ , wagi sygnału sterowania  $W_u$ , i wagi uchybu regulacji  $W_e$  (w skład obiektu rozbudowanego mogą także wchodzić inne funkcje wagowe).

- 7) Wyznaczenie regulatora odpornego dla układu, który składa się z obiektu rozbudowanego o funkcje wagowe i modelu niepewności obiektu (jeżeli model niepewności obiektu jest uwzględniony).
- 8) Badanie odporności regulatora (załącznik C).
- 9) Redukcja rzędu regulatora (załącznik D).

W sterowaniu odpornym układ zamknięty opisuje się w postaci LFT [92] przedstawionej na rys. 8.1.



Rys. 8.1. Schemat układu zamkniętego

gdzie:

$G$  – obiekt rozbudowany o funkcje wagowe (ang. *Augmented Plant*),

$K$  – regulator odporny,

$z$  – wektor sygnałów wyjściowych ( $\tilde{e}$  – ważony sygnał uchybu regulacji,  $\tilde{u}$  – ważony sygnał sterujący,  $\tilde{y}$  – ważony sygnał wyjściowy),

$w$  – sygnał zadany,

$y$  – sygnał mierzony.

Dla potrzeb wyznaczenia regulatora odpornego rozbudowany obiekt sterowania jest zapisany jako układ LFT [92, 57]:

$$\mathbf{G}(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \end{array} \right], \quad (8.1)$$

gdzie:

$$G_{11} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{array} \right], \quad G_{12} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \end{array} \right], \quad G_{21} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} \end{array} \right], \quad G_{22} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad \text{są funkcjami}$$

przejścia między odpowiednimi sygnałami następująco:  $w \rightarrow z$ ,  $u \rightarrow z$ ,  $w \rightarrow v$  i  $u \rightarrow v$ .

## 8.1. Algorytm regulatora $H_\infty$

### 8.1.1. Wyznaczanie regulatora $H_\infty$ za pomocą formuły przesuwania pętli

Algorytm wyznaczania regulatora  $H_\infty$  [18, 57, 92] formułą przesuwania pętli (ang. *Loop-Shifting Formula*) został opracowany przez: M.G. Safonova, D.J.N. Limebeera i R. Y. Chianga [70].

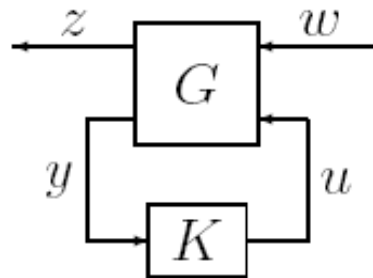
Problem sprowadza się do wyznaczenia takiego regulatora  $K$ , który minimalizuje następującą normę:

$$\|F(G, K)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |F(G, K)(j\omega)|, \quad (8.2)$$

gdzie:

$F(G, K) = G_{11} + G_{12}K(I + G_{22}K)^{-1}G_{21}$  – układ zamknięty z obiektem rozbudowanym zapisanym w formie LFT.

Schemat układu regulacji  $H_\infty$  z sygnałami we/wy zapisanymi w postaci wektorów przedstawiono na rys. 8.2.



Rys. 8.2. Blokowy schemat układu sterowania z regulatorem odpornym

Układ z rysunku 8.2 opisują następujące równania stanu:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_w \mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_u \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_z \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{zu} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_y \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{yw} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{K}\mathbf{y}(t). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Dla wyznaczenia regulatora odpornego należy wyznaczyć obiekt rozbudowany o funkcje wagowe.

Aby zadanie projektowania regulatora optymalnego  $H_\infty$  miało rozwiązanie, obiekt (8.1) musi spełniać następujące warunki:

- $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1)$  jest stabilna,
- $(\mathbf{C}_1, \mathbf{A})$  jest obserwowalna,
- $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A})$  jest wykrywalna,
- $\mathbf{D}_{12}^\top [\mathbf{C}_1, \mathbf{D}_{12}] = [\mathbf{0}, \mathbf{I}]$ ,
- $\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} \mathbf{D}_{21}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$ .

Regulator  $H_\infty$  jest regulatorem podoptymalnym (ang. *Suboptimal Controller*) wyznaczonym na podstawie minimalizacji następującej normy:

$$\|T_{zw}(j\omega)\|_\infty < 1, \quad (8.4)$$

jaką został określony problem standardowego regulatora  $H_\infty$ . Norma (8.4) oznacza, że największa wartość transmitancji układu zamkniętego nie może być większa od 1 w zakresie wszystkich częstotliwości. Ograniczenie to gwarantuje uzyskanie odpornej stabilności układu.

Jeżeli funkcje wagowe zostały dobrane prawidłowo oprogramowanie Matlab zgodnie z formułą *Loop-Shifting* generuje następującą odpowiedź podczas projektowania regulatora odpornego:

```

<< H-inf Optimal Control Synthesis >>
Computing the 4-block H-inf optimal controller
using the S-L-C loop-shifting/descriptor formulae
Solving for the H-inf controller F(s) using U(s) = 0 (default)
Solving Riccati equations and performing H-infinity
existence tests:
1. Is D11 small enough?           OK
2. Solving state-feedback (P) Riccati ...
a. No Hamiltonian jw-axis roots?  OK
b. A-B2*F stable (P >= 0)?       OK
3. Solving output-injection (S) Riccati ...
a. No Hamiltonian jw-axis roots?  OK
b. A-G*C2 stable (S >= 0)?       OK
4. max eig(P*S) < 1 ?           OK
-----
all tests passed -- computing H-inf controller ...
DONE!!!
-----

```

### 8.1.2. Wyznaczanie regulatora $H_\infty$ algorytmem gamma-iteracji

Algorytm gamma-iteracji (ang. *Gamma-Iteration*) służący do wyznaczania regulatora  $H_\infty$  został opracowany przez: J.C. Doleya i K. Glogera [14].

Regulator  $H_\infty$  jest regulatorem optymalnym (ang. *Optimal Controller*) wyznaczonym na podstawie minimalizacji następującej normy:

$$\|F(G, K)\|_\infty < \gamma, \quad (8.5)$$

gdzie:

- $\gamma$  – minimalna wartość współczynnika optymalizacji wyznaczona algorytmem bisekcji,
- $G$  – obiekt rozbudowany,
- $K$  – szukany regulator  $H_\infty$ .

Aby wyznaczyć regulator  $H_\infty$  algorytmem gamma-iteracji muszą być spełnione następujące warunki:

- opracowany model rozbudowany,
- zdefiniowana struktura połączeń regulatora z obiektem rozbudowanym,
- określona minimalna i maksymalna wartość współczynnika  $\gamma$ ,
- określona wartość tolerancji dla poszukiwań współczynnika  $\gamma$ ,
- wybrana jedna z następujących metod rozwiązania:
  - '|ric'| - standardowa metoda dwóch równań Riccatiego [48],
  - '|lmi'| - metoda LMI opracowana przez Gahineta 1994 [19, 20],
  - '|maxe'| - metoda maximum entropii opracowana przez Glovera i Doylea 1988 [14],
- wyznaczony regulator  $H_\infty$  spełnia warunek (8.5).

Oprócz tego muszą być spełnione dodatkowe warunki dotyczące obiektu sterowania opisanego równaniem (8.1):

- $\mathbf{D}_{12}$  i  $\mathbf{D}_{21}$  są pełnego rzędu,
- $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - j\omega\mathbf{I} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix}$  posiada pełny rząd względem kolumn dla wszystkich  $\omega \in R$ ,
- $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - j\omega\mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}$  posiada pełny rząd względem wierszy dla wszystkich  $\omega \in R$ .

Znalezienie minimalnej wartości współczynnika  $\gamma$  sprowadza się do rozwiązania macierzy  $\mathbf{H}$  (Hamiltonian), która nie posiada wartości własnych na osi urojonej (załącznik B).

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{C}^T(\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^T)\mathbf{C} & (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{C})^T \end{bmatrix}, \quad (8.6)$$

gdzie:

$$\mathbf{R} = \gamma^2\mathbf{I} - \mathbf{D}^T\mathbf{D}.$$

Wyznaczenie regulatora i współczynnika  $\gamma$  w środowisku Matlab umożliwia procedura *hinfsyn*:

$$[k, T_{zw}, \gamma_{opt}] = \text{hinfsyn}(G, ny, nu, \gamma_{min}, \gamma_{max}, tol);$$

gdzie:

$ny$  – liczba wyjść,

$nu$  – liczba wejść,

$\gamma_{min}$  – minimalna wartość współczynnika  $\gamma$ ,

$\gamma_{max}$  – maksymalna wartość współczynnika  $\gamma$ ,

$tol$  – tolerancja obliczenia  $\gamma$ .

W celu poszukiwania optymalnej wartości współczynnika  $\gamma$  należy zdefiniować przedział poszukiwań następująco:  $\min < \gamma \leq \max$ . Procedura *hinfsyn* poszukuje takiego regulatora  $K$ , który spełni warunek (8.5).

Stabilność zamkniętego układu regulacji z regulatorem  $H_\infty$  dla obiektu z niepewnością określa następująca formuła:

$$\forall \Delta \in H_\infty, \|r^{-1}\Delta\|_\infty < 1 \text{ jeśli } \|rF(G, K)\|_\infty \leq 1, \quad (8.7)$$

gdzie:

$r$  – jest ograniczeniem modelu niepewności  $\Delta(j\omega)$  następująco:  $\|\Delta(j\omega)\| < r(j\omega)$ .

Z tego wynika, że norma  $\|r(j\omega)\|$  powinna być tak minimalna jak to możliwe w celu zapewnienia dokładnego projektowania układu z niepewnością.

Prawo sterowania dla układu otwartego opisanego zależnością:

$$y = G(s) \cdot u + G_d(s) \cdot d, \quad (8.8)$$

jest następująco:

$$u = K(s) \cdot \left( r - \underbrace{y - n}_{y_m} \right). \quad (8.9)$$

Wtedy układ zamknięty można zapisać następująco:

$$y = \underbrace{(1 + G \cdot K)^{-1} \cdot G \cdot K \cdot r}_{T} + \underbrace{(1 + G \cdot K)^{-1} \cdot G_d \cdot d}_{S} + \underbrace{(1 + G \cdot K)^{-1} \cdot G \cdot K \cdot n}_{T} \quad (8.10)$$

gdzie:

- $G_d(s)$  – transmitancja modelu zakłócenia,
- $K(s)$  – transmitancja regulatora,
- $G(s)$  – transmitancja obiektu.

## 8.2. Algorytm regulatora $H_2$

Algorytm wyznaczania regulatora  $H_2$  [92] polega na minimalizacji funkcji kosztów adekwatnej do sterowania optymalnego LQ/LQG.

Regulator  $H_2$  wyznaczany jest na podstawie minimalizacji następującej normy [15, 42, 69, 92]:

$$\|T_{zw}(j\omega)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |T_{zw}(j\omega)|^2 d\omega}, \quad (8.11)$$

która oznacza wartość średnią kwadratu transmitancji układu zamkniętego dla częstotliwości  $\omega$ .

Kwadratura normy (8.11) może być zapisana następująco:

$$\|T_{zw}(j\omega)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}[T^*(j\omega)T(j\omega)]d\omega. \quad (8.12)$$

Oznacza to, że regulator  $H_2$  wyznaczony na podstawie normy (8.12) nie może zapewnić odpowiedniego ograniczenia wartości układu w zakresie wszystkich częstotliwości. Problem sterowania odporne jest wygodniejszy do rozwiązania w dziedzinie czasu.

W literaturze dotyczącej optymalnego sterowania (np. [92]) reprezentacja układu zamkniętego w przestrzeni stanu:  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  jest często zapisywana w zwartej formie:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}. \quad (8.13)$$

Aby można było wyznaczyć regulator  $H_2$  obiekt (8.1) musi spełniać następujące warunki:

- $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$  musi być stabilna i wykrywalna,
- $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1)$  musi być sterowalna,
- $(\mathbf{C}_1, \mathbf{A})$  musi być obserwowalna,
- $\mathbf{D}_{12}$  musi zapewnić pełny rząd względem kolumn,
- $\mathbf{D}_{21}$  musi zapewnić pełny rząd względem wierszy,
- $\mathbf{D}_{12}^* \mathbf{D}_{12} > 0$  i  $\mathbf{D}_{21}^* \mathbf{D}_{21} > 0$ ,
- $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - j\omega\mathbf{I} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix}$  jest pełnego rzędu dla wszystkich częstotliwości  $\omega$ ,
- $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - j\omega\mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}$  jest pełnego rzędu dla wszystkich częstotliwości  $\omega$ .

Na podstawie równań (8.3) oraz po spełnieniu powyższych warunków, regulator optymalny  $H_2$  jest opisany następująco:

$$\mathbf{K} = -(\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12})^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{S}, \quad (8.14)$$

gdzie:

$\mathbf{S}$  – jest rozwiązaniem poprawnie zdefiniowanego równania Riccatiego następującej postaci:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A} - \mathbf{S} \mathbf{B}_2 (\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12})^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{S} + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 = 0. \quad (8.15)$$

Schemat układu sterowania z regulatorem  $H_2$  jest adekwatny dla układu z regulatorem  $H_\infty$ .

W środowisku Matlab wyznaczenie regulatora  $H_2$  umożliwia procedura *h2syn*:

$[k, G_{zam}] = h2syn(G, ny, nu);$

gdzie:

$ny$  – liczba wyjść,

$nu$  – liczba wejść.

### 8.3. Różnica działania między regulatorem $H_\infty$ a $H_2$

Różnica między wyznaczaniem regulatora  $H_\infty$ , a  $H_2$  polega na algorytmie obliczeń. Regulator  $H_\infty$  jest wyznaczany w drodze iteracji poszukiwania minimalnego współczynnika  $\gamma$ , dla którego następująca norma jest minimalna:  $\|T_{y|u}\|_\infty < \gamma$ . Iteracyjny algorytm polegający na rozwiązaniu dwóch równań Riccatiego. Równania Riccatiego są dualne względem siebie. Pierwsze równanie wyznacza macierz regulatora od wektora stanu, natomiast drugie pozwala na wyznaczenie macierzy wzmocnienia obserwatora. Na podstawie tych dwóch macierzy tworzony jest regulator optymalny. Transmitancja układu zamkniętego z regulatorem optymalnym będzie cechowała się minimum normy  $\|H\|_\infty$ . Układ zamknięty z regulatorem  $H_\infty$  daje płaską odpowiedź częstotliwościową (charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa) w całym zakresie częstotliwości minimalizując wszystkie wartości maksymalne odpowiedzi częstotliwościowej [91].

Obliczanie regulatora  $H_2$  polega na mniej skomplikowanym obliczeniu dwóch równań Riccatiego bez algorytmu iteracji. Transmitancja układu zamkniętego z regulatorem optymalnym będzie cechowała się minimum normy  $H_2$ . Układ zamknięty z regulatorem  $H_2$  minimalizuje silnie wszystkie wartości maksymalne w zakresie dużych częstotliwości, ale słabo minimalizuje (pozostawia „piki” - duże wartości odpowiedzi częstotliwościowej) odpowiedź częstotliwościową w zakresie niskich częstotliwości.

$H_\infty$  odpowiada minimalizacji największego (piku) odpowiedzi częstotliwościowej układu zamkniętego (minimum energii sygnału), natomiast  $H_2$  odpowiada minimum sumy z odpowiedzi częstotliwościowej całego sygnału (minimum mocy sygnału). Dokładna analiza porównawcza sterowania z użyciem regulatorów  $H_2$  i  $H_\infty$  została opisana przez P.C. Chandrasekharana [9].

### 8.4. Algorytm regulatora $\mu$

Sterowanie oparte na  $\mu$ -syntezie jest sterowaniem optymalnym i odpornym. Załączenie modelu niepewności obiektu do rozbudowanego obiektu, dla którego jest projektowany regulator  $\mu$  jest łatwe. Sam proces wyznaczenia regulatora optymalnego  $\mu$  opiera się na algorytmie iteracyjnym.

Regulator  $\mu$  jest wyznaczany w następującej formie:

$$\mathbf{F}(s) := \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cp} & \mathbf{B}_{cp} \\ \mathbf{C}_{cp} & \mathbf{D}_{cp} \end{bmatrix}. \quad (8.16)$$

Cały proces sprowadza się do wyznaczenia  $\mathbf{D}$  tak, aby została spełniona dana funkcja celu. Warunek optymalizacji w tym przypadku jest opisany następującą nierównością [12, 68]:

$$\|\mathbf{D}T_{y_1 u_1} \mathbf{D}^{-1}\|_{\infty} \leq 1, \quad (8.17)$$

gdzie:

$$\mathbf{D}(s) = \text{diag} \left( d_1(s)I_{k_1}, \dots, d_n(s)I_{k_n} \right),$$

$I_{k_1}, \dots, I_{k_n}$  są macierzami jednostkowymi o wymiarach określonych przez ilość wejść układu zamkniętego.

Procedura wyznaczania regulatora  $\mu$  jest następująca:

- 1) Metodą normy  $\|H\|_{\infty}$  należy znaleźć regulator  $K$ , który minimalizuje następującą funkcję kosztów:  $\|\mathbf{D}T_{y_1 u_1} \mathbf{D}^{-1}\|_{\infty} = \min$ .
- 2) Następnie należy obliczyć wartości szczególne układu zamkniętego w celu oszacowania maksymalnej wartości ograniczenia wartości normy regulatora  $\mu$ .
- 3) Następnie regulator  $\mu$  oblicza się stosując następujące kryterium minimalizacji [90]:

$$\mu = \min_{D(j\omega)} \bar{\sigma} \left( \mathbf{D}(j\omega)T_{y_1 u_1}(j\omega)\mathbf{D}^{-1}(j\omega) \right). \quad (8.18)$$

- 4) Jeśli wartość funkcji kosztów (8.20) jest wystarczająco minimalna procedura jest przerywana, w przeciwnym razie procedura powtarza się od kroku 1.

Podsumowując właściwości sterowania odporne należy wymienić:

- 1) Sterowanie odporne jest metodą sterowania optymalnego wykorzystującego normy sygnałów  $\|H\|_{\infty}$  i  $\|H\|_2$ . Jest to metoda zaawansowana pozwalająca na projektowanie układu sterowania z uwzględnieniem niepewności obiektu, ograniczeń nałożonych na sygnały i zakłóceń działających w układzie.
- 2) Jest to metoda pozwalająca na wyznaczenie regulatora odporne, który zapewni stabilną pracę układu, mimo parametrów zmieniających się w czasie.
- 3) Wyznaczenie regulatora według kryterium normy  $\|H\|_{\infty}$  lub  $\|H\|_2$  pozwala na zminimalizowanie energii potrzebnej w procesie sterowania.
- 4) Uzupełniając model obiektu o funkcje wagowe możemy ograniczyć wpływ zakłóceń działających na wejście i wyjście obiektu.
- 5) Odporną stabilność układu jest łatwo osiągnąć, jeżeli rozmiar niepewności układu jest ograniczony. Dodatkowo model niepewności obiektu powinien być jak najdokładniejszy.
- 6) Sterowanie odporne zwane potocznie sterowaniem krzepkim (ang. *Robust Control*) znajduje coraz to szersze zastosowanie we wszystkich gałęziach przemysłu. Stosowane jest szczególnie tam, gdzie obiekt jest trudny do zamodelowania, parametry obiektu są niestacjonarne, zakłócenia są trudne do przewidzenia i zapisania za pomocą jednego modelu.
- 7) Wiele prac związanych ze sterowaniem optymalnym z użyciem regulatorów  $H_2$  i  $H_{\infty}$ , w tym najnowsze zostały opracowane przez Grimblea [33, 34, 35, 52, 67].

## Rozdział 9. Badania symulacyjne drgań wirnika z regulacją odporną

Badania symulacyjne obejmują wyznaczenie charakterystyk czasowych i częstotliwościowych układów sterowania odpornego typu  $H_\infty$ ,  $H_2$  i  $\mu$ . Badania zostały przeprowadzone dla modelu zawieszenia magnetycznego wirnika sprzężonego i rozprężonego względem osi sterowania. Wiele wyników badań układu regulacji z regulatorem  $H_\infty$  dla jednej osi sterowania łożyskiem magnetycznym zostało opublikowane w pracach [25, 26].

### 9.1. Badania układu z regulatorem $H_\infty$

Poniżej przedstawiono badania układu zamkniętego z regulatorem odpornym  $H_\infty$  dla modelu obiektu (4.1) z niepewnością parametrów  $k_i$  i  $k_s$  (tabela 6.1).

W oparciu o analizę zachowania się układu zamkniętego z regulatorem PID przeprowadzoną przy pomocy funkcji wrażliwości  $S$ , komplementarnej wrażliwości  $T$  i sterowania  $R$  wyznaczono optymalne funkcje wagowe  $W_1$ ,  $W_2$  i  $W_3$ . Na tej podstawie zbudowano model rozbudowany obiektu, dla którego wyznaczono regulator odporny  $H_\infty$ . Regulator odporny uwzględnia ograniczenia sygnałów układu zamkniętego (sygnał uchybu, sterujący i mierzony) zadane za pomocą funkcji wagowych. Poniżej opisano użyte w symulacjach modele funkcji wagowych.

W układzie narzucono ograniczenie na uchyb regulacji w sposób następujący:  $-0.0002[\text{m}] \leq e \leq 0.0002[\text{m}]$ . Waga sygnału uchybu jest następująca:

$$W_1(s) = \frac{0.4545s + 64}{s + 0.64}, \quad (9.1)$$

Prądowy sygnał sterujący powinien zawierać się w granicach:  $-5 [\text{A}] \leq u_s \leq 5 [\text{A}]$  z uwagi na wartości maksymalne prądów generowanych przez wzmacniacze mocy. Waga sygnału sterowania jest następująca:

$$W_2(s) = \frac{s + 1000000}{0.01s + 10000000} \quad (9.2)$$

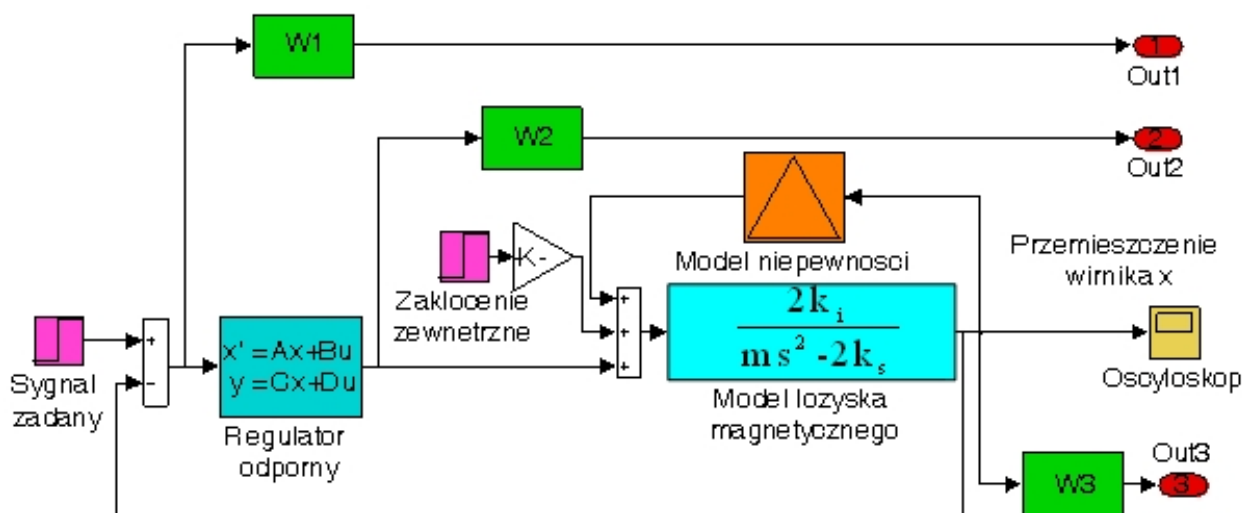
Sygnał wyjściowy przemieszczenia powinien zawierać się w granicach:  $-0.0002[\text{m}] \leq y \leq 0.0002[\text{m}]$ . Funkcja wagi sygnału wyjściowego  $W_3$  jest powiązana z funkcją wagi sygnału uchybu, dlatego postacie tych wag zostały przyjęte jako jednakowe. Waga sygnału wyjściowego jest następująca:

$$W_3(s) = \frac{s + 33330}{0.01s + 100000} \quad (9.3)$$

Weryfikacja dobranych funkcji wagowych została przedstawiona w rozdziale 7.6. Z przedstawionych badań wynika, że funkcje wagowe spełniają warunek niezbędny w procesie wyznaczania regulatora odpornego opisany wzorem (7.19). Na podstawie dobranych funkcji wagowych wyznaczono regulator odporny  $H_\infty$ , którego transmitancja jest następująca:

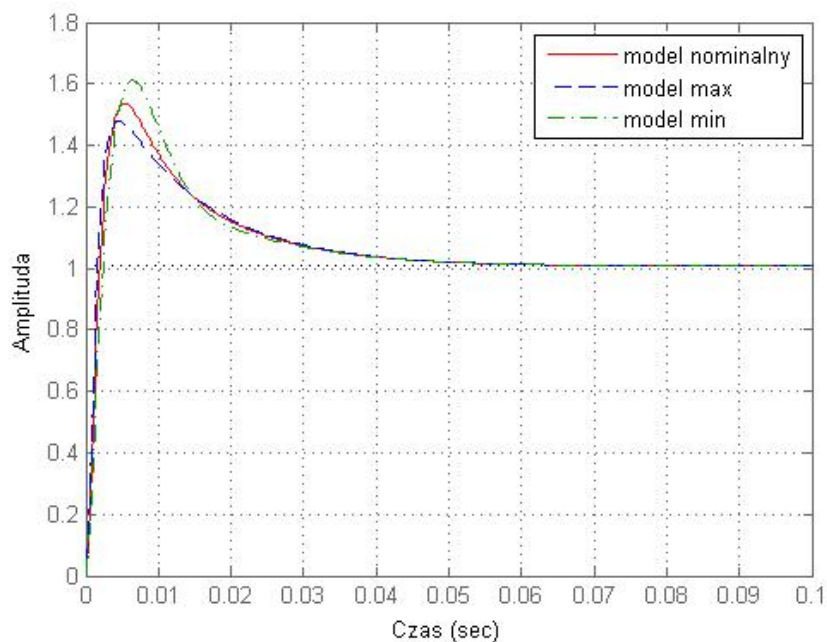
$$H_\infty(s) = \frac{116.3 s^4 + 1.175 \cdot 10^{11} s^3 + 1.163 \cdot 10^{18} s^2 + 2.369 \cdot 10^{20} s + 6.141 \cdot 10^{21}}{s^5 + 1.101 \cdot 10^7 s^4 + 1.016 \cdot 10^{13} s^3 + 1.411 \cdot 10^{17} s^2 + 1.415 \cdot 10^{20} s + 9.05 \cdot 10^{19}} \quad (9.4)$$

Model symulacyjny układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  z uwzględnieniem modelu niepewności obiektu przedstawiono na rys. 9.1.



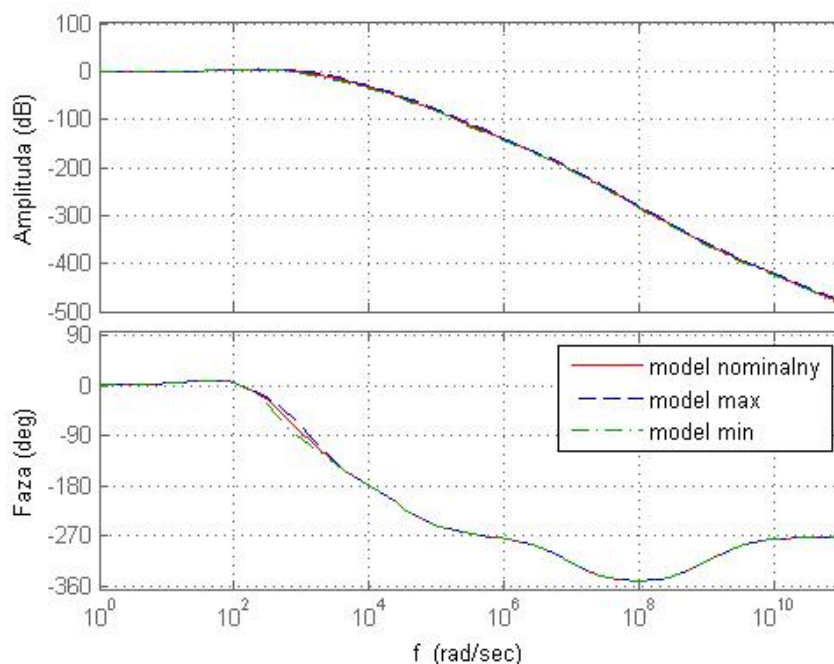
Rys. 9.1. Układ zamknięty z modelem niepewności obiektu i funkcjami wagowymi

Na rys. 9.2 przedstawiono charakterystyki skokowe układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$ . Z rys. 9.2 wynika, że regulator odporny jest prawie niewrażliwy na zmiany parametrów obiektu.



Rys. 9.2. Odpowiedzi układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  na wymuszenie skokowe jednostkowe

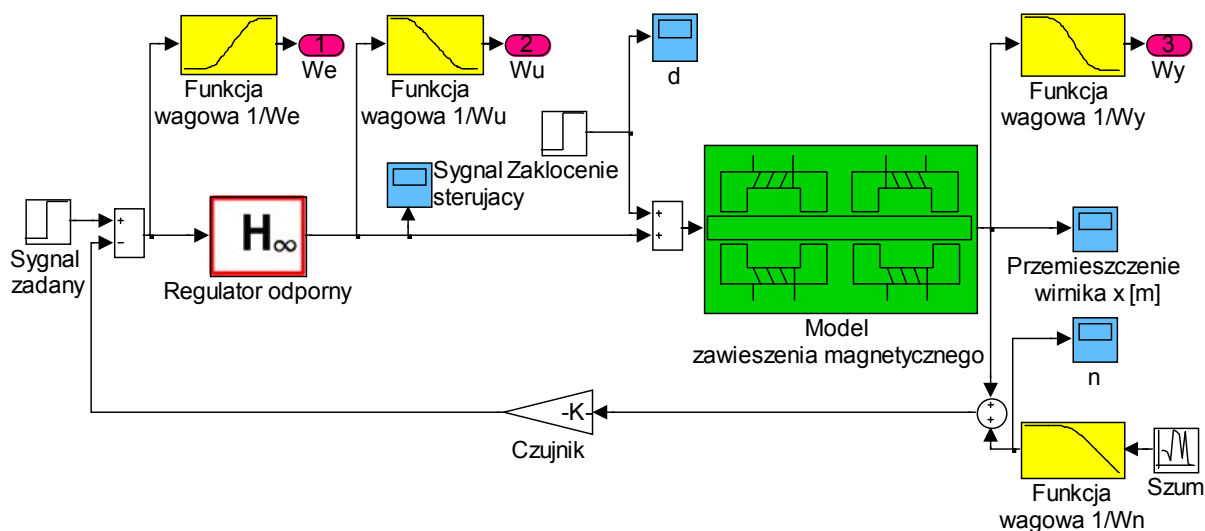
Na rys. 9.3 przedstawiono charakterystyki Bodego układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  dla obiektu z niepewnością parametrów  $k_i$  i  $k_s$ .



Rys. 9.3. Charakterystyki Bodego układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$

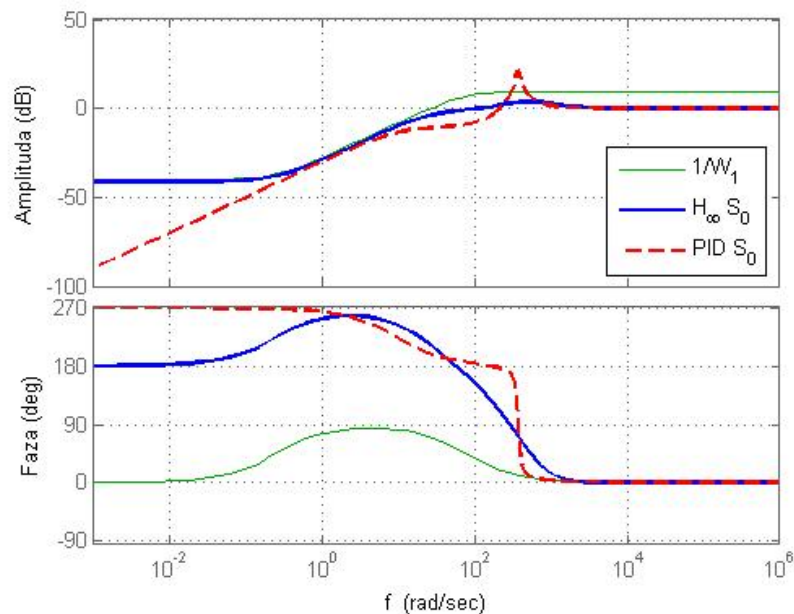
Następne badania dotyczą układu zamkniętego z regulatorem odpornym  $H_\infty$  dla obiektu (4.1) rozbudowanego o wyznaczone funkcje wagowe (9.1÷9.3).

Model układu zamkniętego z regulatorem odpornym  $H_\infty$  i zaprojektowanymi funkcjami wagowymi przedstawiono na rys. 9.4.



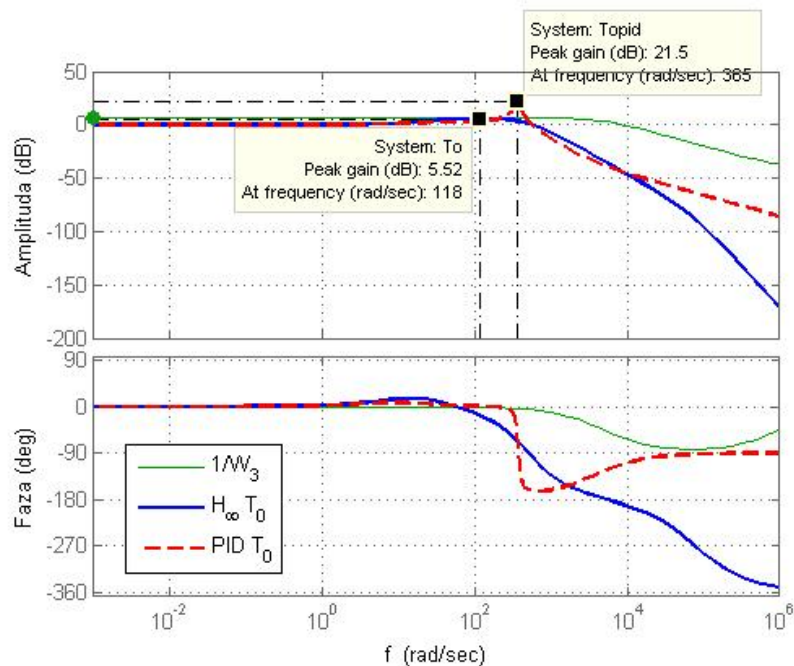
Rys. 9.4. Model układu zamkniętego z regulatorem odpornym i funkcjami wagowymi

W celu porównania właściwości układów regulacji z regulatorem PID i regulatorem odpornym na rys. 9.5 przedstawiono funkcję wagową  $W_1$  dla funkcji wrażliwości wyznaczonej w układzie z regulatorem  $H_\infty$  i regulatorem PID.



Rys. 9.5. Charakterystyka Bodego funkcji wagowej  $W_1(s)$  i  $S(s)$  dla układu z regulatorem  $H_\infty$  i PID

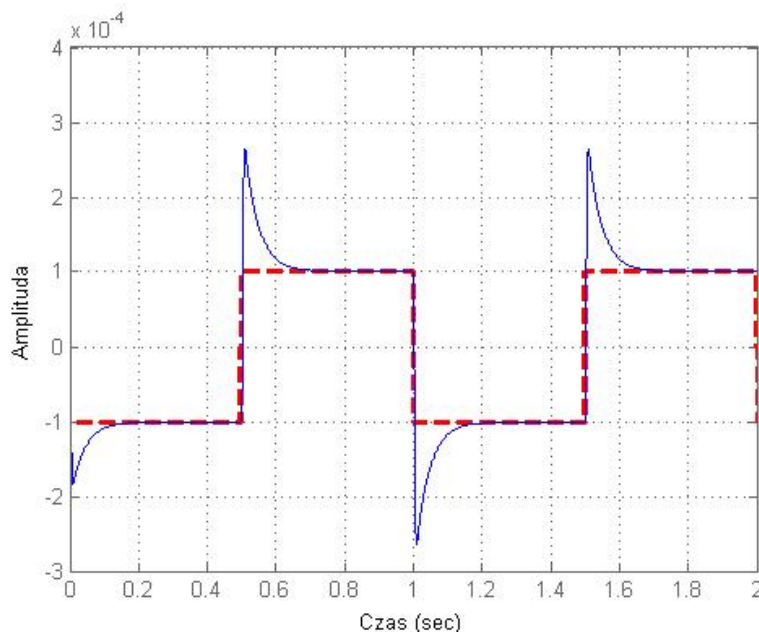
Natomiast, na rys. 9.6 przedstawiono funkcję wagową  $W_3$  dla funkcji komplementarnej wrażliwości wyznaczonej w układzie z regulatorem  $H_\infty$  i w układzie z regulatorem PID.



Rys. 9.6. Charakterystyka Bodego funkcji wagowej  $W_3(s)$  i  $T(s)$  dla układu z regulatorem  $H_\infty$  i PID

Z wykresów widać, że w wypadku sterowania PID funkcje  $S$  i  $T$  znacznie przekraczają wartości ograniczone w wypadku sterowania odpornego. Sterowanie PID nie pozwala na uwzględnienie ograniczeń sygnałów przy pomocy filtrów.

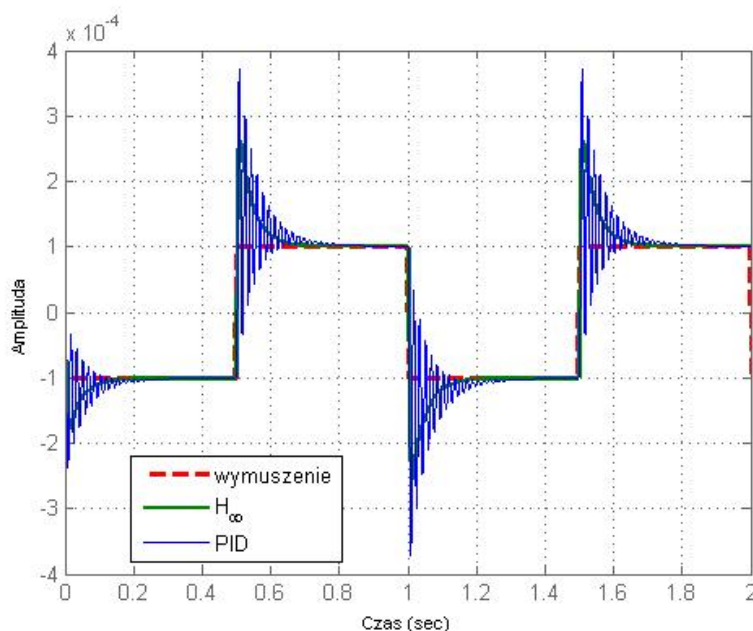
Następnie przeprowadzono badania symulacyjne pracy układu z zakłóceniem podanym w torze sprzężenia zwrotnego – zakłócenie położenia wirnika. Na rys. 9.7 przedstawiono odpowiedź układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  na skokowe zakłócenie położenia wirnika.



Rys. 9.7. Odpowiedź układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  na skokowe zakłócenie położenia

Układ cechuje się brakiem oscylacji i szybkim czasem ustalania się sygnału. Podobnych cech nie możemy uzyskać w układzie z regulatorem PID.

Na rys. 9.8 przedstawiono porównanie odpowiedzi na zakłócenie położenia wirnika układu regulacji odpornej z układem sterowania PID.

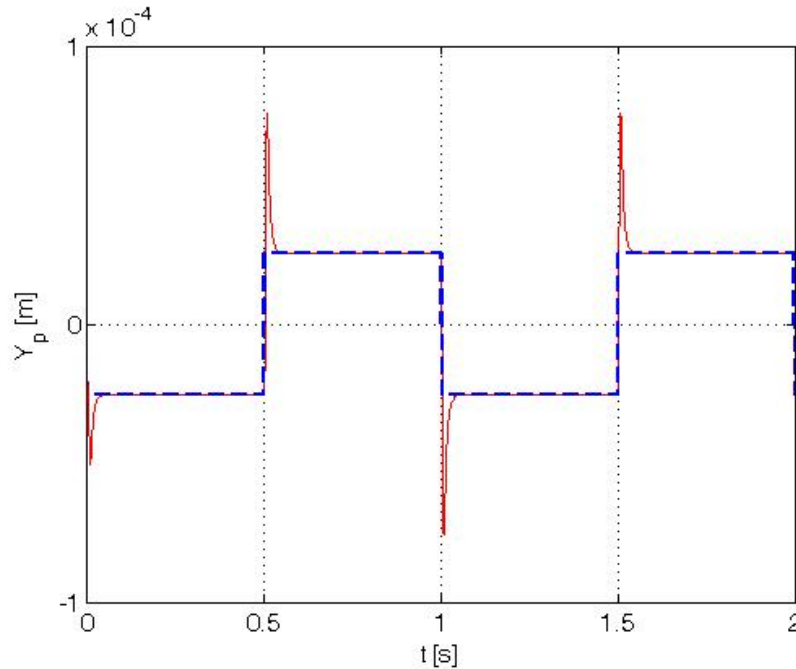


Rys. 9.8. Odpowiedź układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  i PID na skokowe zakłócenie położenia

Z przebiegów pokazanych na rys. 9.8 wynika, że regulator odporny zapewnia stabilny przebieg położenia wirnika nie przekraczającego założonego zakresu szerokości szczeliny powietrznej. Natomiast zachowanie podobnej dynamiki w układzie regulacji z regulatorem PID

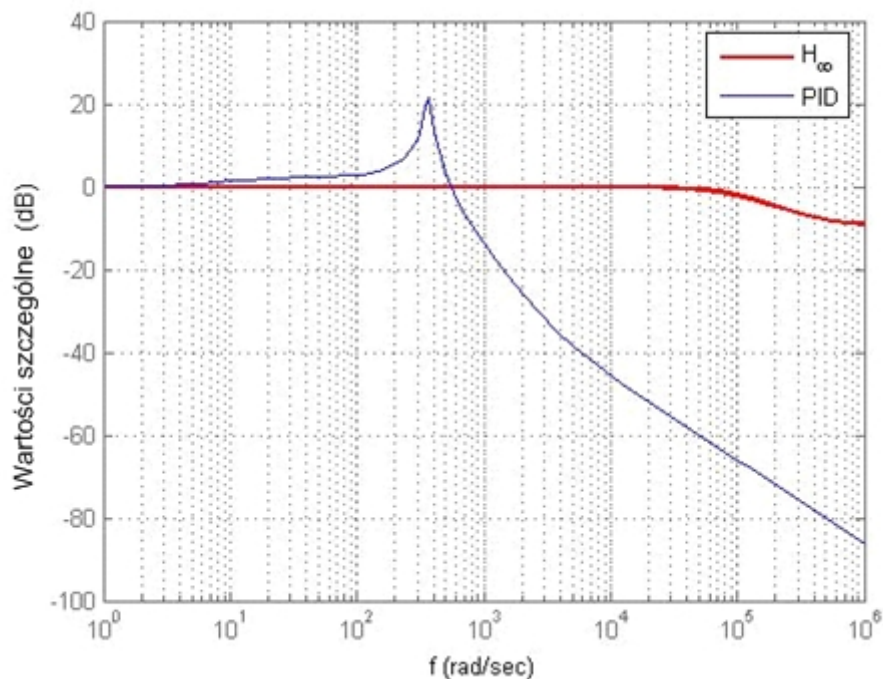
nie jest możliwe, gdyż położenie wirnika przekracza wartość szczeliny powietrznej. Układ z regulatorem PID posiada większe przeregulowanie i czas ustalania wartości wyjściowej niż układ z regulatorem  $H_\infty$ .

Właściwości czasowe układu regulacji odpornej możemy znacznie poprawić modyfikując funkcje wagowe. Dla przykładu na rys. 9.9 przedstawiono odpowiedź układu z regulatorem  $H_\infty$  ze zmodyfikowaną wagą  $W_e$ . Dzięki temu uzyskano skrócenie czasu ustalania się sygnału oraz zmniejszenie wartości maksymalnego piku.



Rys. 9.9. Odpowiedź układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$

Następne badania dotyczyły analizy w dziedzinie częstotliwości. Na rys. 9.10 przedstawiono porównanie wartości szczególnych układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  i PID.



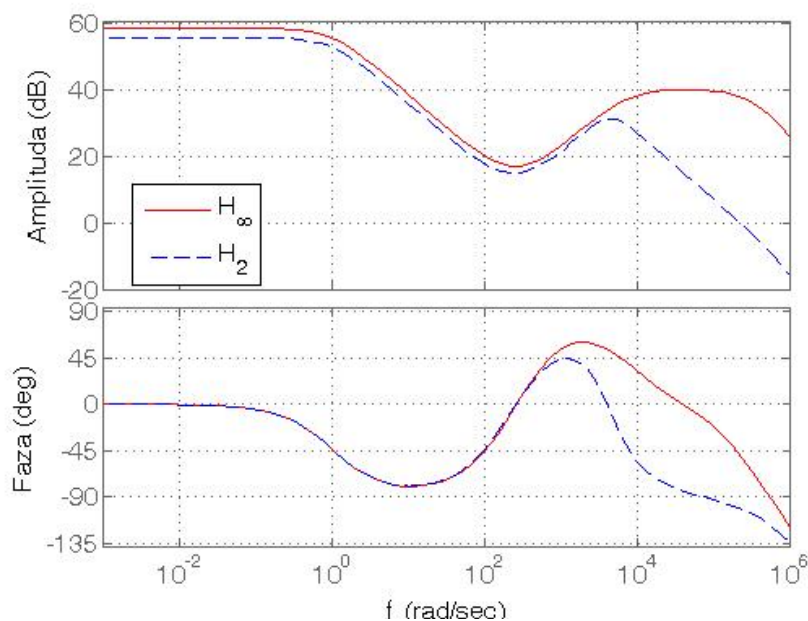
Rys. 9.10. Wartości szczególne układu z regulatorem  $H_\infty$  i PID

Na rys. 9.10 widać, że pasmo przenoszenia układu z regulatorem  $H_\infty$  jest dwa razy większe niż układu z regulatorem PID. Charakterystyka układu z regulatorem  $H_\infty$  jest płaska i maksymalne wzmocnienie nie przekracza wartości 1. Więcej badań układu regulacji odpornej dla jednej osi sterowania zawieszeniem magnetycznym zawarto w pracach [25, 26].

## 9.2. Badania układu z regulatorem $H_2$

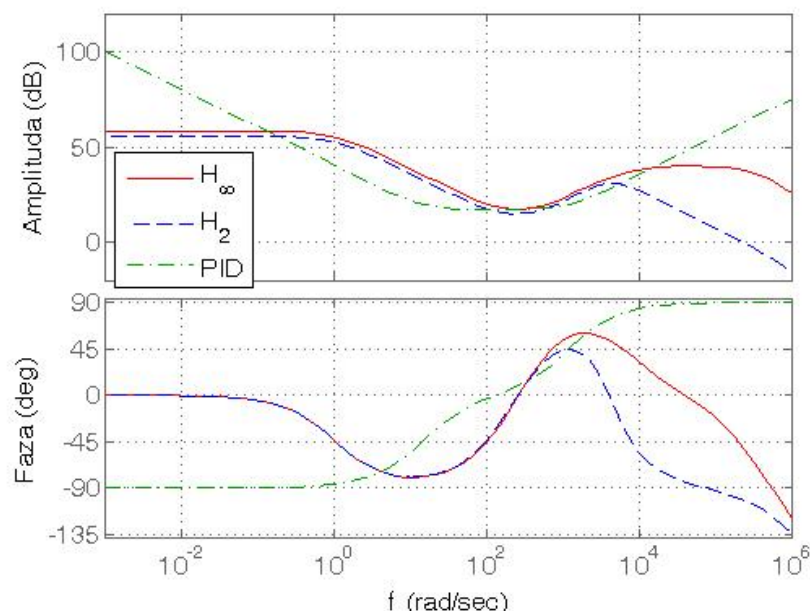
Następne badania symulacyjne dotyczyły regulatora odpornej  $H_2$  i porównania właściwości regulatorów  $H_\infty$  i  $H_2$ . Należy zaznaczyć, że wszystkie parametry symulacji były identyczne jak w przypadku badania układów z regulatorem PID i  $H_\infty$ . Regulator  $H_2$  został zaprojektowany z uwzględnieniem tych samych modeli funkcji wagowych jak w przypadku układu z regulatorem  $H_2$ . Niektóre badania zostały opublikowane w pracy [27].

Na rys. 9.11 przedstawiono charakterystykę Bodego regulatora  $H_\infty$  i  $H_2$ . Należy zwrócić uwagę, że regulator  $H_\infty$  zapewnia większe pasmo przenoszenia niż regulator  $H_2$ . Natomiast regulator  $H_2$  posiada lepsze tłumienie w zakresie niskich częstotliwości. Słuszne jest więc stosowanie regulatora  $H_\infty$  dla obiektów o bardzo małych stałych czasowych, np. do sterowania zawieszeniem wirnika wysokoobrotowego. Natomiast regulator  $H_2$  bardziej nadaje się do sterowania w układach o mniejszym paśmie przenoszenia, np. łożyskowanie magnetyczne wirnika nieobracającego się lub obracającego się z niewielką prędkością obrotową.

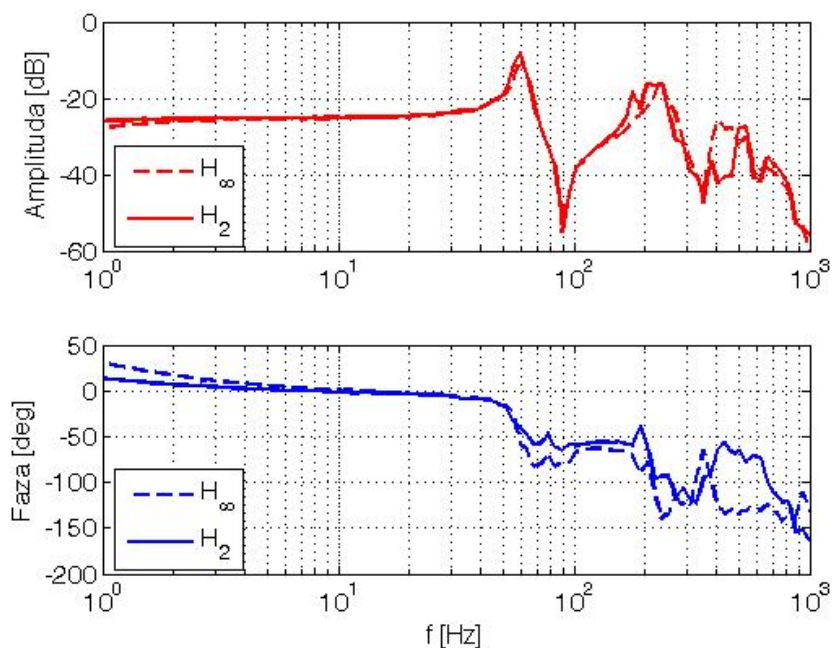


Rys. 9.11. Charakterystyka Bodego regulatora  $H_\infty$  i  $H_2$

Na rys. 9.12 przedstawiono porównanie właściwości częstotliwościowych regulatorów odpornej  $H_\infty$ ,  $H_2$  i regulatora PID. Z wykresu 9.12 wynika, że regulator PID nie zapewnia „płaskiej” charakterystyki częstotliwościowej. Tłumienie w zakresie niskich częstotliwości dla regulatora PID jest mniejsze, niż dla regulatora  $H_\infty$  czy  $H_2$ . Ponadto regulator PID nie zapewnia szerokiego pasma przenoszenia i może być stosowany tylko do stabilizacji zawieszenia magnetycznego z niewielkimi prędkościami obrotowymi wirnika.

Rys. 9.12. Charakterystyka Bodego regulatora  $H_\infty$ ,  $H_2$  i PID

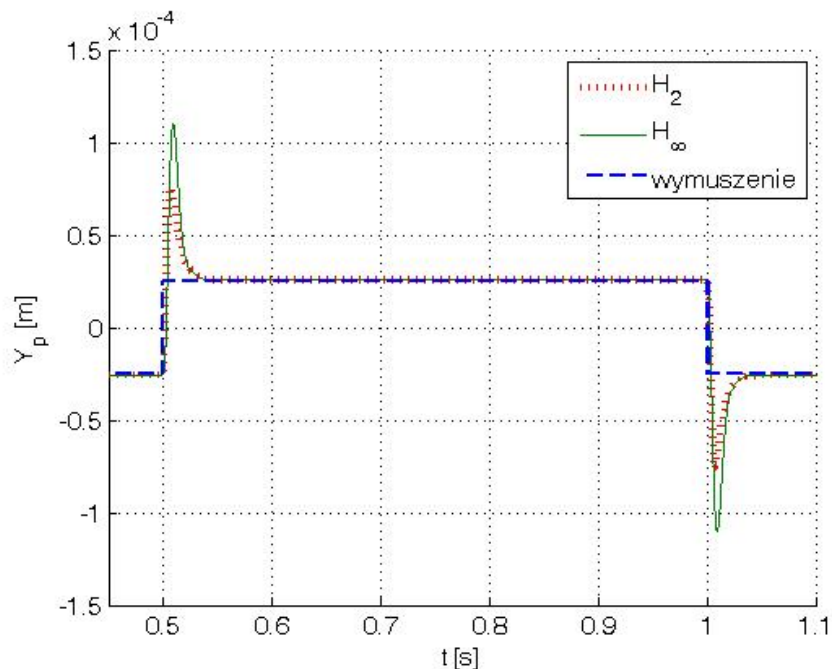
Na rys. 9.13 porównano charakterystyki Bodego układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  i  $H_2$ .

Rys. 9.13. Charakterystyki Bodego układu z regulatorem  $H_\infty$  i  $H_2$ 

Analiza częstotliwościowa różnych typów regulatorów pozwala na weryfikację odpowiedniego doboru regulatora do właściwości statycznych i dynamicznych obiektu. Analiza czasowa układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$ ,  $H_2$  i PID została przeprowadzona w oparciu o kryterium czasu reakcji, uchybu statycznego, zapasu stabilności i maksymalnego przeregulowania.

Jak wynika z powyższych badań regulator  $H_2$  z uwagi na większe tłumienie w zakresie niskich częstotliwości lepiej nadaje się do stabilizacji wirnika nieobracającego się niż regulator  $H_\infty$ .

Na rys. 9.14 przedstawiono odpowiedź układu z regulatorem  $H_\infty$  i  $H_2$  na wymuszenie skokowo-zmienne. Widać, że układ z regulatorem  $H_2$  wykazuje mniejszą wartość przeregulowania niż układ z regulatorem  $H_\infty$ .



Rys. 9.14. Odpowiedź na wymuszenie skokowo-zmienne układu z regulatorem  $H_\infty$  i  $H_2$

### 9.3. Badania układu z regulatorem $\mu$

Regulator optymalny  $\mu$  został wyznaczony dla trzech funkcji wagowych identycznych jak w wypadku sterowania  $H_\infty$  i  $H_2$ . W układzie sterowania zostały uwzględnione parametry niepewne i modele niepewności obiektu. Dane obiektu do badań symulacyjnych są identyczne jak poprzednio.

Poniżej przedstawiono badania układu zamkniętego z modelem niepewności wyznaczonym w rozdziale 6.9 i włączonym multiplikatywnie do obiektu opisanego równaniem (4.1). W układzie wykorzystano regulator odporny oparty na tzw.  $\mu$ -syntezie. Regulator wyznaczony jest w drodze iteracji, której celem jest znalezienie optymalnego regulatora zapewniającego jak najlepsze właściwości odporne dla obiektu z niepewnością.

W oprogramowaniu Matlab regulator  $\mu$  można wyznaczyć przy pomocy procedury  $[k, clp, bnd] = dksyn(p, nmeas, ncont)$ ,

gdzie:

$k$  – regulator odporny  $\mu$ ,

$clp$  – sprzężony wzajemnie układ zamknięty,

$bnd$  – wskaźnik określający właściwości odporne regulatora,

$p$  – układ badany z obiektem nominalnym, funkcjami wagowymi i modelami niepewności,

$nmeas$  – ilość mierzonych wyjść układu,

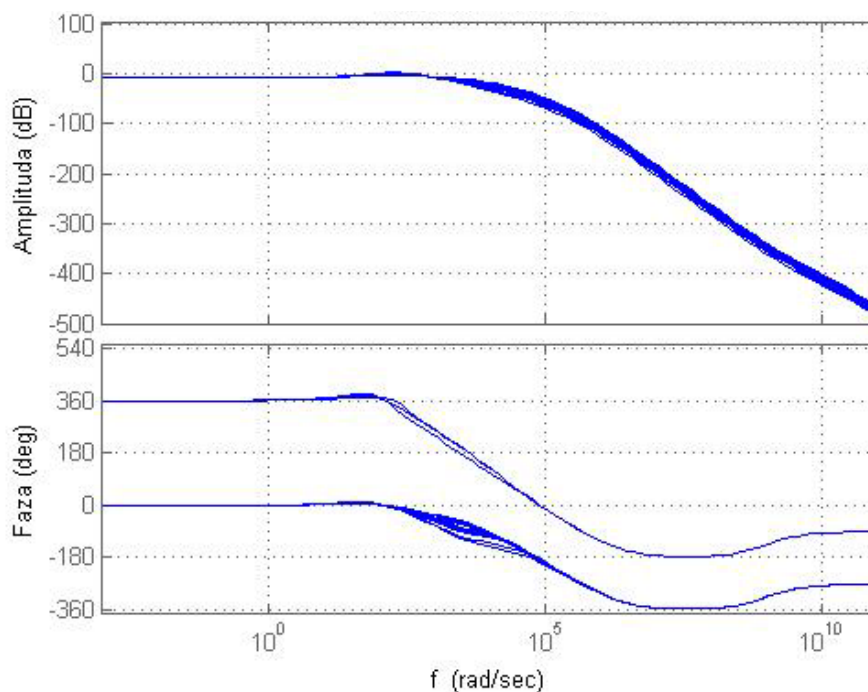
$ncont$  – ilość wejściowych sygnałów sterujących.

Transmitancja operatorowa regulatora  $\mu$  jest następująca:

$$\mu(s) = \frac{1945 s^7 + 2e012 s^6 + 2e018 s^5 + 5e022 s^4 + 2e026 s^3 + 7.5e028^2 + 6.5e030 s + 1.5e032}{s^8 + 1e06 s^7 + 2e011 s^6 + 1e016 s^5 + 2e020 s^4 + 1e024 s^3 + 3e027 s^2 + 2e029 s + 2e029} \quad (9.5)$$

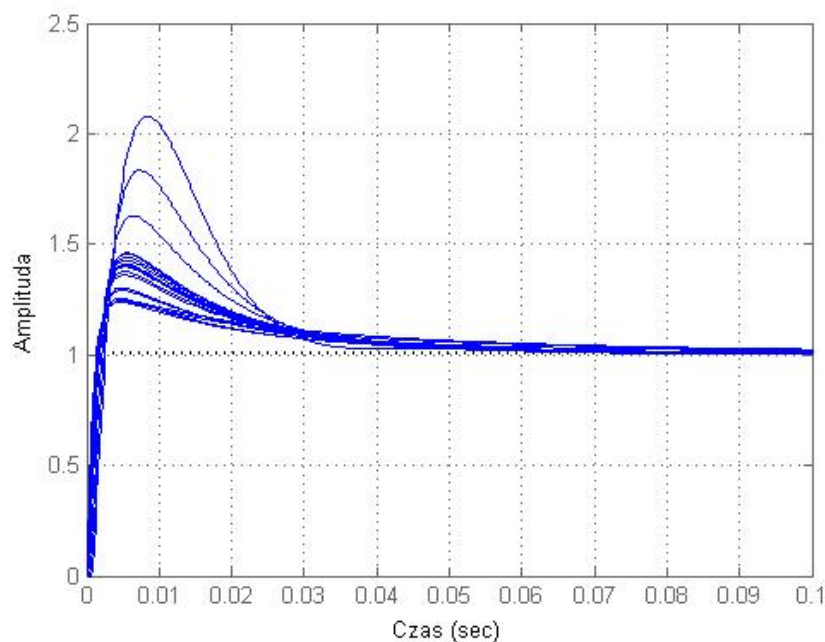
Regulator jest 8-go rzędu z uwagi na występujące wagi:  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  (9.1÷9.3) oraz obiekt z dołączonym multiplikatywnie modelem niepewności  $\Delta$  i funkcją wagową  $W_{m/a}(s)$  (patrz rozdział 6).

Na rys. 9.15 przedstawiono charakterystykę Bodego układu zamkniętego z regulatorem  $\mu$  (między wejściowym sygnałem zadanym, a wyjściowym sygnałem mierzonym przechodzącym przez funkcję wagową  $W_3$ ) dla modelu obiektu z niepewnością multiplikatywną.



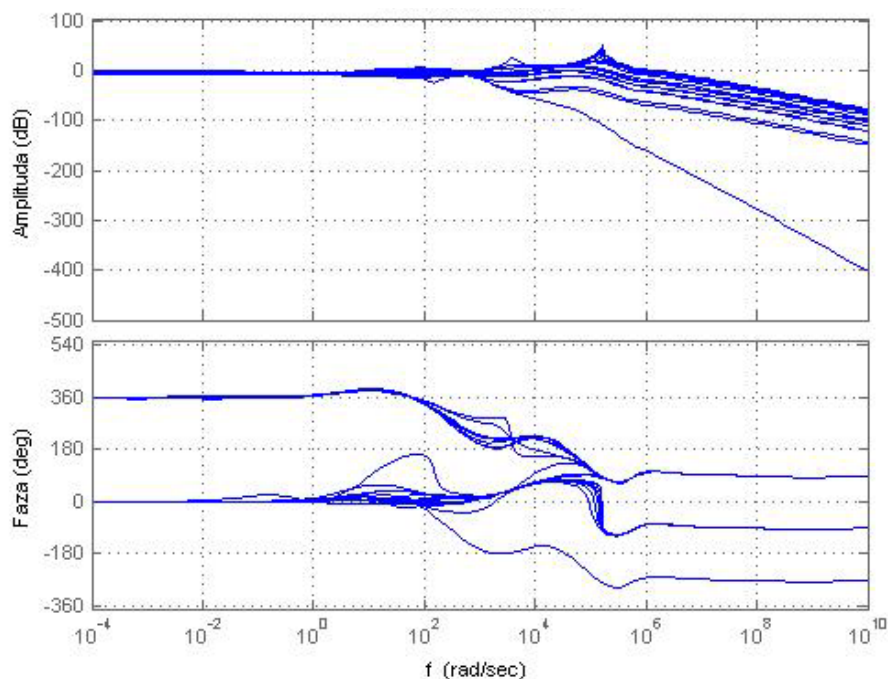
Rys. 9.15. Charakterystyka Bodego układu zamkniętego (z regulatorem  $\mu$ ) z multiplikatywną niepewnością obiektu

Na rys. 9.16 przedstawiono charakterystykę skokową (jednostkową) układu zamkniętego z regulatorem  $\mu$  z uwzględnieniem multiplikatywnej niepewności modelu obiektu.

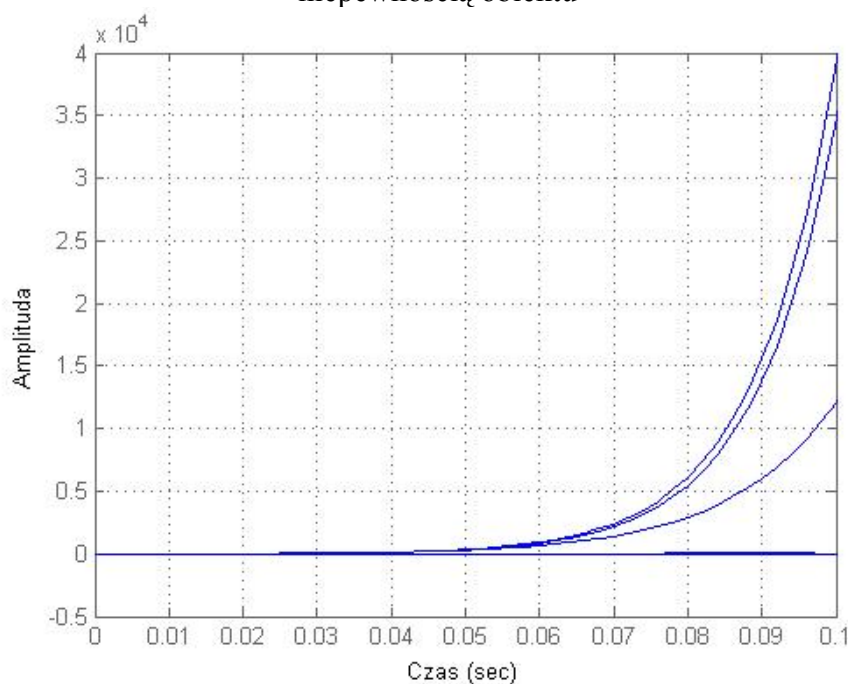


Rys. 9.16. Odpowiedź układu zamkniętego (z regulatorem  $\mu$ ) z multiplikatywną niepewnością obiektu na wymuszenie skokowe jednostkowe

Na rys. 9.17 i 9.18 przedstawiono charakterystykę Bodego i skokową układu zamkniętego z regulatorem  $\mu$  dla modelu obiektu z niepewnością addytywną.



Rys. 9.17. Charakterystyka Bodego układu zamkniętego (z regulatorem  $\mu$ ) z addytywną niepewnością obiektu

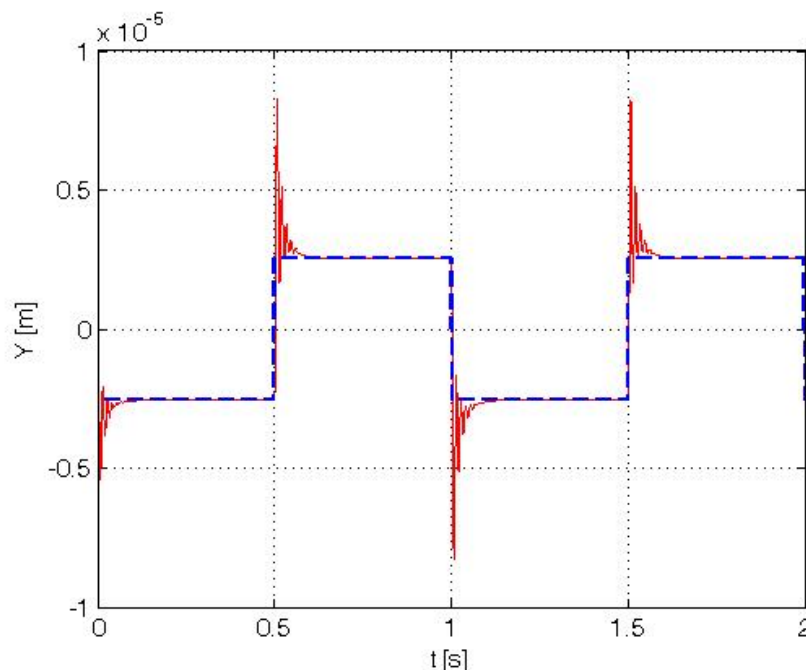


Rys. 9.18. Odpowiedź układu zamkniętego (z regulatorem  $\mu$ ) z addytywną niepewnością obiektu na wymuszenie skokowe jednostkowe

Podsumowując badania układu zamkniętego z regulatorem  $\mu$  dla niepewności modelu obiektu włączonej multiplikatywnie i addytywnie należy stwierdzić, że układ jest stabilny tylko dla modelu obiektu z niepewnością multiplikatywną.

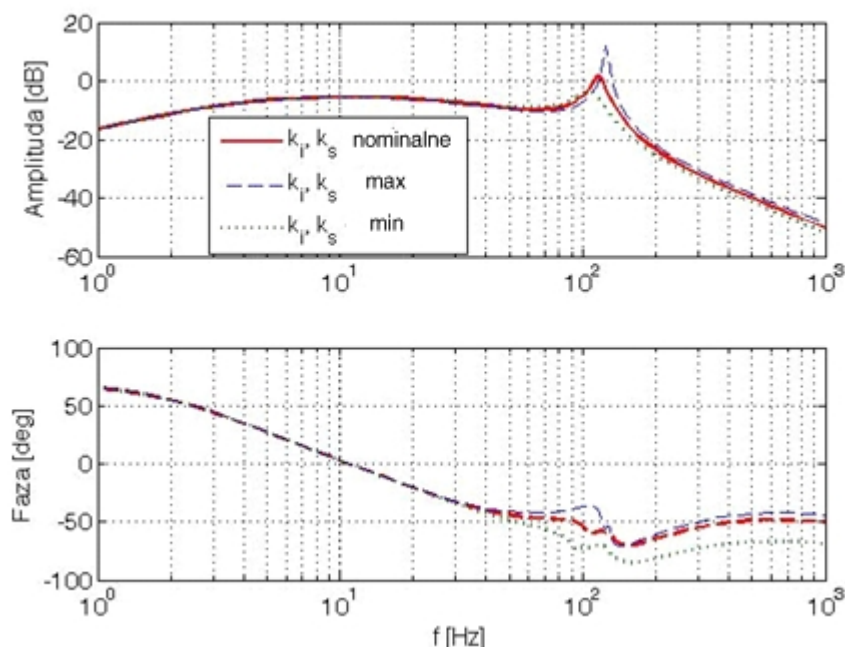
Poniżej przedstawiono badania układu regulacji z regulatorem  $\mu$  dla niepewności parametrycznej obiektu (parametry niepewne  $k_i$  i  $k_s$  o wartościach opisanych w tabeli 6.1).

Na rys. 9.19 przedstawiono odpowiedź układu zamkniętego z regulatorem  $\mu$  dla zakłócenia skokowo zmiennego wprowadzonego w pętlę sprzężenia zwrotnego. Jest to modelowanie zakłócenia położenia wirnika w szczelinie powietrznej wirnika.



Rys. 9.19. Odpowiedź układu regulacji z regulatorem  $\mu$  na zakłócenie położenia wirnika dla parametrów niepewnych  $k_i$  i  $k_s$

Na rys. 9.20 przedstawiono charakterystykę Bodego układu zamkniętego z regulatorem odpornym  $\mu$  z uwzględnieniem nominalnych i niepewnych wartości parametrów  $k_i$  i  $k_s$ .



Rys. 9.20. Charakterystyka Bodego układu zamkniętego z niepewnością parametrów

Z rys. 9.20 wynika, że wpływ niepewności parametrów jest widoczny tylko w zakresie dużych częstotliwości. Regulator odporny zapewnia stabilność układu regulacji w szerokim paśmie przenoszenia mimo niepewności obiektu.

#### 9.4. Badania układu rozprzężonego

Aby uzyskać układ zamknięty rozprzężony względem osi sterowania należy wyeliminować wpływ sprzężeń skrośnych pomiędzy sygnałami wejściowymi a wyjściowymi. W sterowaniu odpornym można część pominiętej dynamiki modelu zawrzeć w dodatkowym modelu niepewności obiektu włączonym w model nominalny addytywnie. Modele niepewności są zbudowane dla każdej z osi sterowania. W ten sposób powstają cztery lokalne niezależne podukłady sterowania, każdy dla jednej z osi sterowania. Definicja modelu niepewności addytywnej jest następująca [28]:

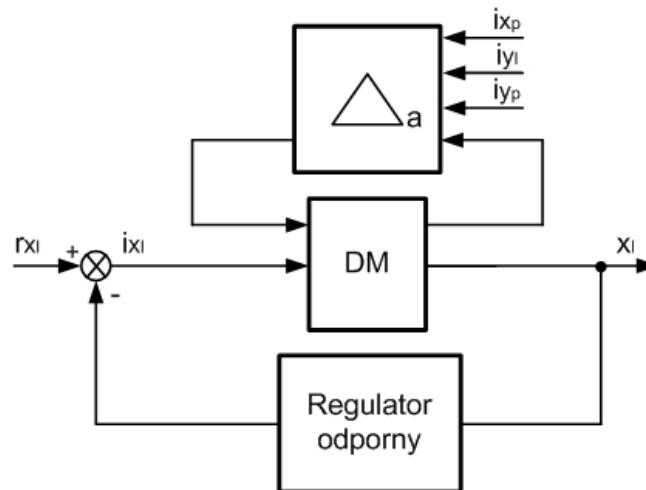
$$\Delta_a(s) = CM(s) - DM(s). \quad (9.6)$$

gdzie:

$CM$  – model sprzężony,

$DM$  – model rozprzężony.

Na rys. 9.21 przedstawiono schemat rozprzężonego układu zamkniętego dla jednej osi sterowania.



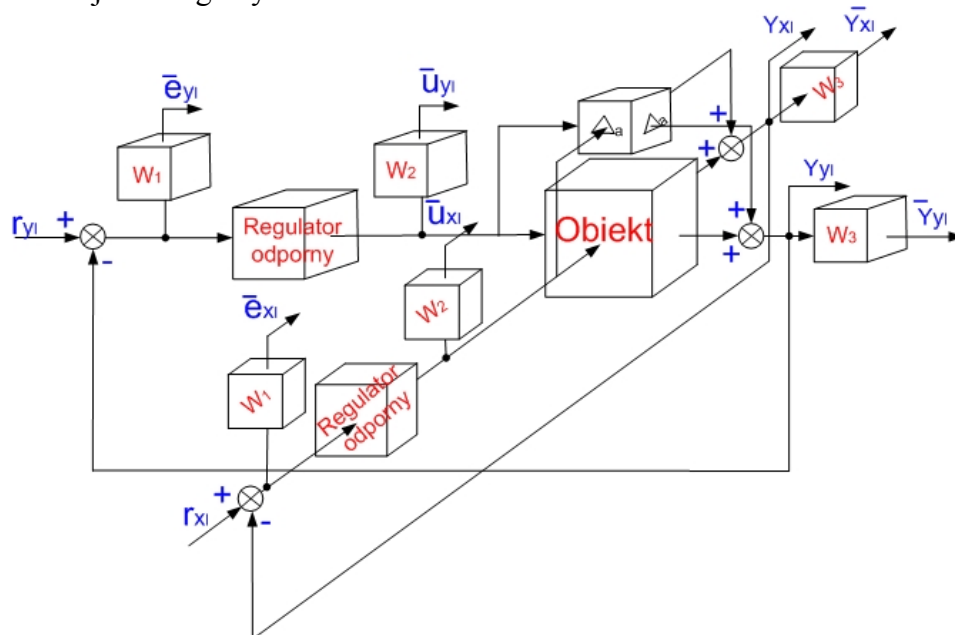
Rys. 9.21. Rozprzężony układ zamknięty

Bazując na równaniach z rozdziału 2.4 model rozprzężony  $DM$  dla każdej z czterech osi sterowania może być zapisany następująco:

$$\begin{aligned} m_{rl} \ddot{x}_l - (k_{sxl1} + k_{sxl2}) x_l - (k_{ixl1} + k_{ixl2}) i_{xl} &= 0 \\ m_{rp} \ddot{x}_p - (k_{sxp1} + k_{sxp2}) x_p - (k_{ixp1} + k_{ixp2}) i_{xp} &= 0 \\ m_{rl} \ddot{y}_l - (k_{syl1} + k_{syl2}) y_l - (k_{iyl1} + k_{iyl2}) i_{yl} &= 0 \\ m_{rp} \ddot{y}_p - (k_{sypl} + k_{sypl2}) y_p - (k_{iyp1} + k_{iyp2}) i_{yp} &= 0 \end{aligned} \quad (9.7)$$

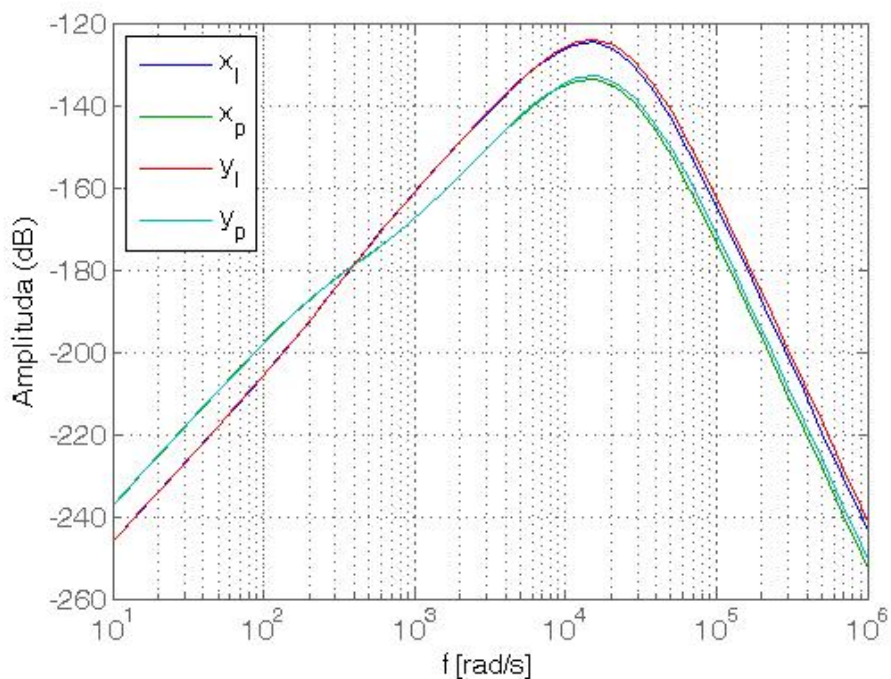
Oznacza to, że w modelu niepewności zawarty jest wpływ dynamiki pomiędzy osiami związany z prędkością obrotową wirnika i efektami jej towarzyszącymi (niewyważenie, efekt giroskopowy, itd.).

Na rys. 9.22 przedstawiono schemat rozprzężonego układu zamkniętego z regulatorem odpornym i funkcjami wagowymi dla dwóch osi sterowania.



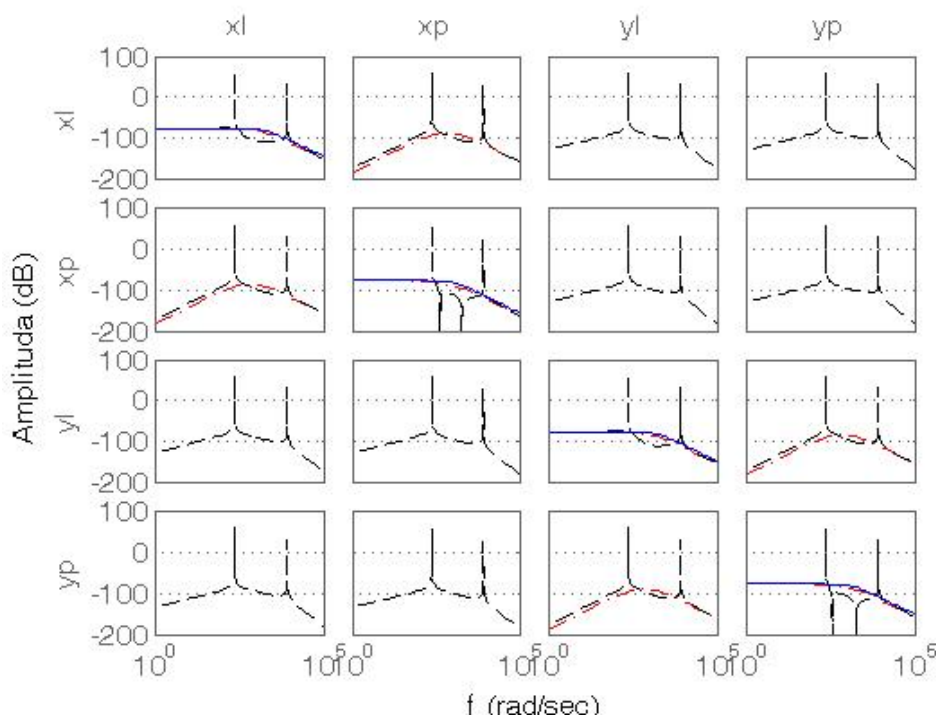
Rys. 9.22. Rozprzężony układ zamknięty dla dwóch osi sterowania

Na rys. 9.23 przedstawiono charakterystyki częstotliwościowe modelu niepewności dla poszczególnych osi sterowania.



Rys. 9.23. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa modelu niepewności

Na rys. 9.24 przedstawiono charakterystyki częstotliwościowe układu otwartego sprzężonego i rozprzężonego. Widać, że układ rozprzężony jest układem diagonalnym.



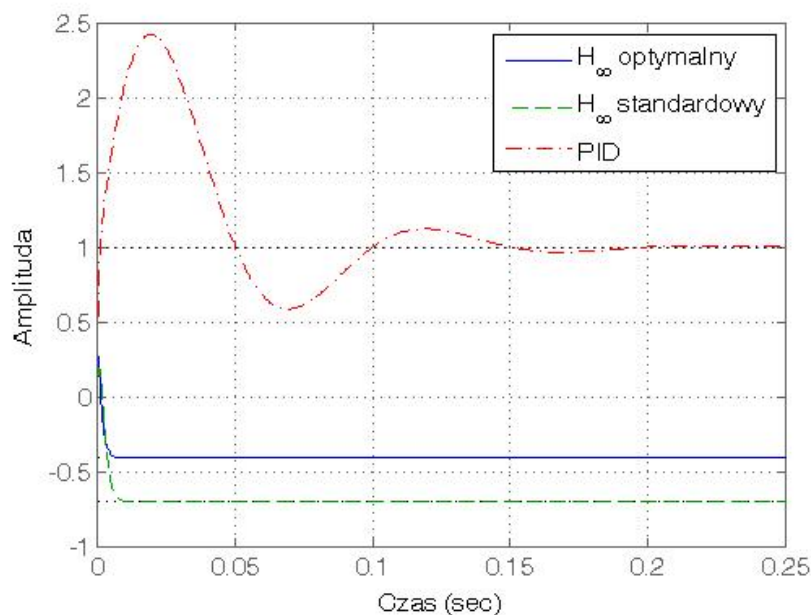
Rys. 9.24. Charakterystyki częstotliwościowo-amplitudowe, linia ciągła niebieska – model rozprzężony, linia kropkowana czerwona – model sprzężony dla  $\Omega=0$  obr/min, linia przerywana czarna – model sprzężony dla  $\Omega=30000$  obr/min

Transmitancja operatorowa wyznaczonego regulatora odpornego dla obiektu rozprzężonego jest następująca:

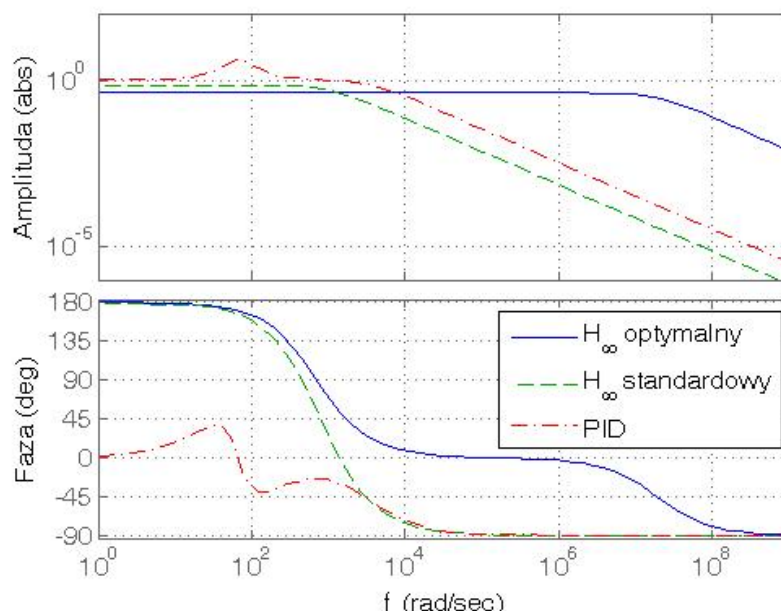
$$H_{\infty}(s) = \frac{7.689 \cdot 10^4 s^2 + 7.689 \cdot 10^{11} + 5.458 \cdot 10^{14}}{s^3 + 1.874 \cdot 10^7 s^2 + 5.864 \cdot 10^{10} s + 7.767 \cdot 10^{13}} \quad (9.8)$$

Poniżej zostaną przedstawione charakterystyki układu zamkniętego rozprzężonego. Charakterystyki wyznaczone dla regulatora  $H_{\infty}$  wyznaczonego przy współczynniku kosztów  $\gamma=1$  (regulator standardowy) oraz dla  $\gamma=\min$  (regulator optymalny). Dla porównania badania przeprowadzono także dla układu z regulatorem PID.

Na rys. 9.25 przedstawiono charakterystykę skokową jednostkową, a na rys. 9.26 charakterystykę Bodego.



Rys. 9.25. Charakterystyki skokowe układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  i PID



Rys. 9.26. Charakterystyki Bodego układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  i PID

Podsumowując badania przedstawione w tym rozdziale należy zauważyć, że tylko regulatory odporne  $H_\infty$  i  $H_2$  dają płaską charakterystykę częstotliwościową. Regulator optymalny  $H_\infty$  zapewnia najszersze pasmo przenoszenia układu zamkniętego oraz minimalizuje wszystkie „piki” charakterystyki częstotliwościowo-amplitudowej układu zamkniętego. Natomiast regulator  $H_2$  minimalizuje wartość średnią charakterystyki częstotliwościowo-amplitudowej układu zamkniętego. Układ zamknięty z regulatorem  $H_\infty$  daje bardziej płaską charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową w badanym paśmie częstotliwości niż układ z regulatorem  $H_2$ .

Układ zamknięty z regulatorem  $H_2$  tłumi silnie wszystkie wartości maksymalne w zakresie dużych częstotliwości, ale wykazuje słabe tłumienie w zakresie niskich częstotliwości. Dobrym regulatorem odpornym jest regulator  $\mu$ , gdyż w łatwy sposób pozwala na zaimplementowanie modeli niepewności do obiektu rozbudowanego i wykazuje duże tłumienie sygnału w zakresie niskich częstotliwości.

## Rozdział 10. Badania eksperymentalne odpornego układu sterowania drganiami wirnika

Ogólnym celem badań laboratoryjnych jest wykonanie pomiarów i charakterystyk wykazujących odporną stabilność i dobrą jakość statyczną i dynamiczną regulacji układu zawieszenia magnetycznego z regulatorem optymalnym  $H_\infty/H_2$  oraz wykazanie bardziej efektywnego tłumienia drgań i uzyskanie większych prędkości obrotowych niż w przypadku standardowych metod sterowania. Jednocześnie potwierdzenie badań symulacyjnych i obliczeń analitycznych oraz ewentualna weryfikacja modelu obiektu.

W ramach badań eksperymentalnych zostaną przedstawione wyniki badań optymalnie odpornego sterowania zawieszeniem magnetycznym wirnika. Również, w celu określenia właściwości układu zamkniętego, badania zostały przeprowadzone dla układu regulacji PID.

Poszczególne cele badań eksperymentalnych są następujące:

- zastosowanie nowoczesnej metody sterowania optymalnego do sterowania położeniem wirnika w łożyskach magnetycznych,
- wykorzystanie metody sterowania odpornie stabilnego do kompensacji wymuszeń zewnętrznych działających na wirnik,
- zastosowanie regulatora odpornego do sterowania obiektem z parametrami i modelami niepewności oraz uwzględnienie ograniczeń nałożonych na sygnały wejściowe i wyjściowe układu sterowania,
- udowodnienie lepszej efektywności tłumienia drgań i osiągnięcie lepszej jakości statycznej i dynamicznej sterowania przez zastosowanie metody sterowania odpornego w porównaniu do standardowych metod sterowania,
- wykazanie, że zaawansowana metoda sterowania odpornego pozwala na osiągnięcie dużo większych prędkości obrotowych wirnika niż metoda sterowania PID.

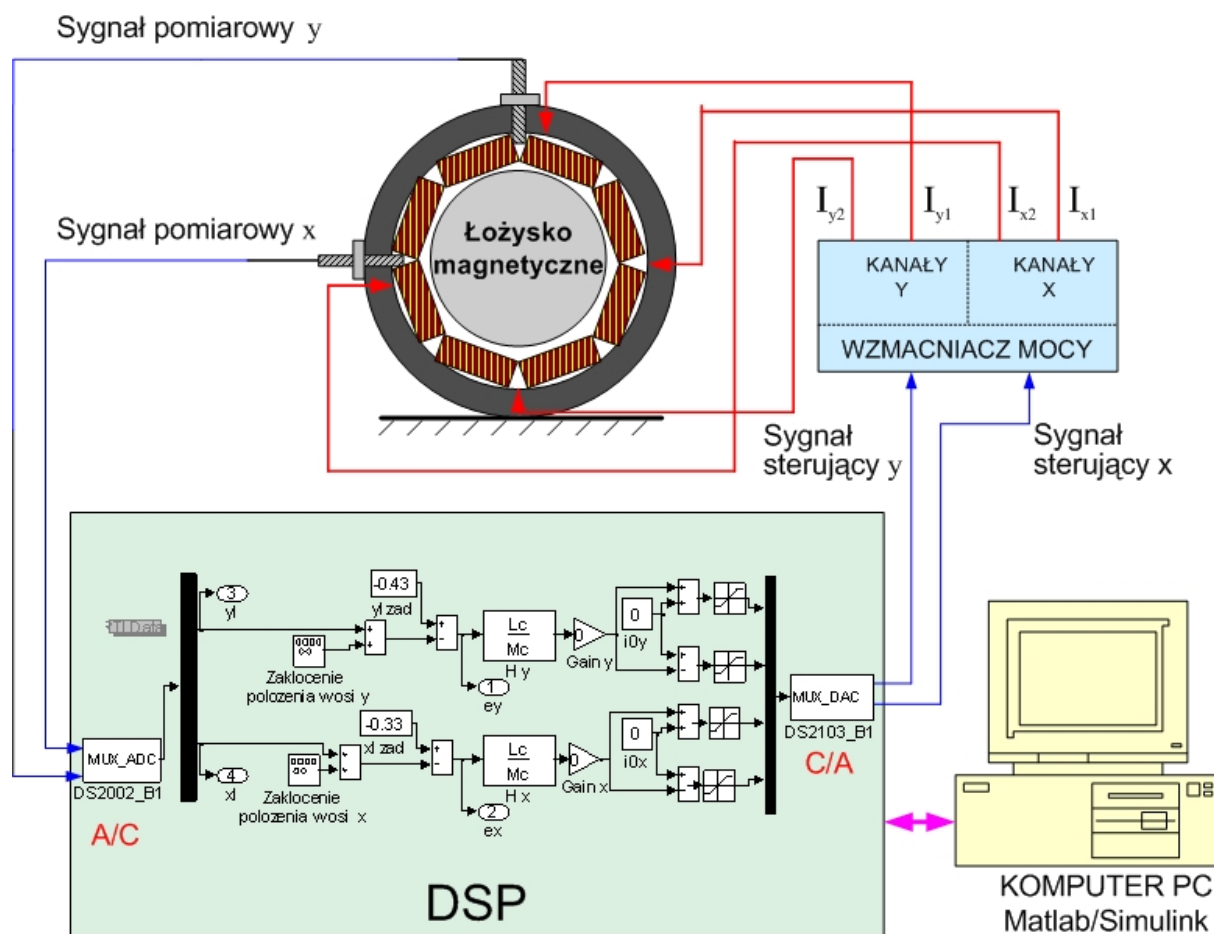
Dane eksperymentu są następujące:

- 1) Obiektem sterowania jest wirnik łożyskowany magnetycznie (opis w rozdziale 3).
- 2) Dla potrzeb ograniczenia sygnałów wejściowych i wyjściowych układu regulacji oraz kształtowania pożądanych właściwości układu regulacji (takich jak: odporność na zakłócenia/wymuszenia, tłumienie drgań, zapas stabilności, śledzenie wartości zadanej, dynamika sygnału wyjściowego) zaprojektowano trzy funkcje wagowe (9.1, 9.2, 9.3) włączone w układ zamknięty, które stanowią filtry nałożone na sygnał uchybu regulacji, sygnał wyjściowy regulatora oraz sygnał wyjściowy układu regulacji będący przemieszczeniem wirnika. Ilość funkcji wagowych ograniczono do trzech podstawowych z uwagi na wysoki rząd obiektu rozbudowanego, a w rezultacie wysoki rząd regulatora. Zaprojektowane funkcje wagowe są pierwszego rzędu. Włączenie większej ilości funkcji wagowych znacznie podwyższy rząd regulatora, co jednocześnie utrudni realizację regulatora w procesorze sygnałowym DSP.
- 3) Transmitancja operatorowa wyznaczonego regulatora odpornego  $H_\infty$  jest opisana wzorem (9.4). Regulator odporny cechuje się bardzo dużym wzmocnieniem, co pozwala na efektywne sterowanie niestabilnym zawieszeniem magnetycznym wirnika. Regulatory odporne mają za zadanie utrzymać wirnik w położeniu lewitacji magnetycznej w punkcie pracy (położenie środkowe łożyska). Regulator został przekształcony do postaci transmitancji dyskretnej i zaimplementowany w procesorze czasu rzeczywistego DSP.
- 4) Transmitancja operatorowa układu zamkniętego jest następująca:

$$T(s) = \frac{5.5 \cdot 10^6 s^4 + 5.5 \cdot 10^{15} s^3 + 5.5 \cdot 10^{22} s^2 + 1.1 \cdot 10^{25} s + 2.9 \cdot 10^{26}}{s^7 + 1.1 \cdot 10^7 s^6 + 1 \cdot 10^{13} s^5 + 1.4 \cdot 10^{17} s^4 + 1.4 \cdot 10^{20} s^3 + 5.1 \cdot 10^2 s^2 + 7 \cdot 10^{24} s + 2.9 \cdot 10^{26}} \quad (10.1)$$

### 10.1. Sterowanie położeniem wirnika w szczelinie powietrznej

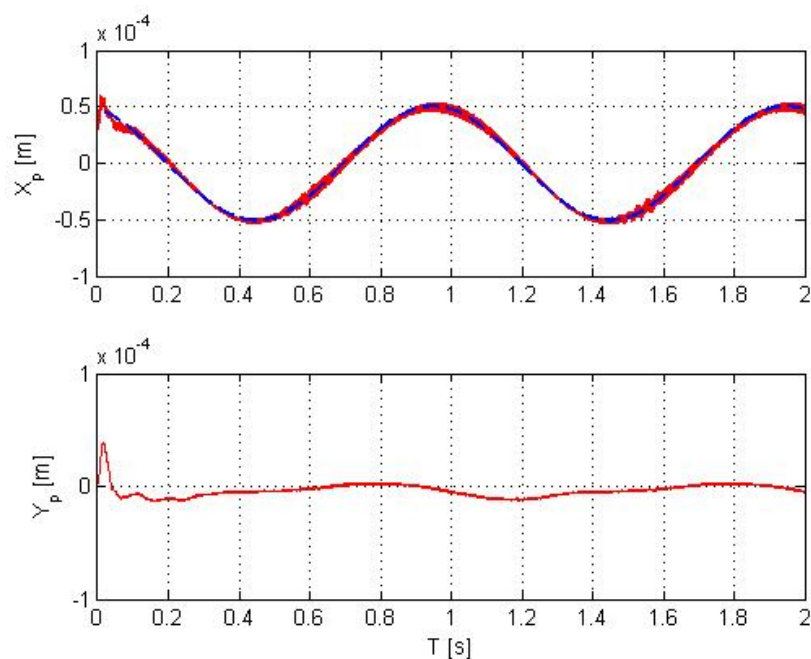
Badania w dziedzinie czasu obejmowały sterowanie ruchem wirnika w szczelinie powietrznej, kompensację zakłóceń sinusoidalnych i skokowych oraz sterowanie ruchem wirnika podczas włączenia łożysk do pracy. Wymuszenia były generowane poprzez procesor DSP i dodawane do sygnału wyjściowego z czujnika położenia wirnika. Zakłócenie jest generowane w postaci sygnału napięciowego. Zależność między napięciowym sygnałem a przemieszczeniem wirnika jest następująca:  $7.92 \text{ [V]} = 0.001 \text{ [m]}$ . Prąd punktu pracy w badaniach był równy  $2 \text{ [A]}$ . Sztywność zadana dla obu osi łożysk była równa. Badania zostały przeprowadzone dla nieobracającego się wirnika. Schemat połączeń układu sterowania podczas wykonywania charakterystyk eksperymentalnych dla jednego łożyska przedstawiono na rys. 10.1.



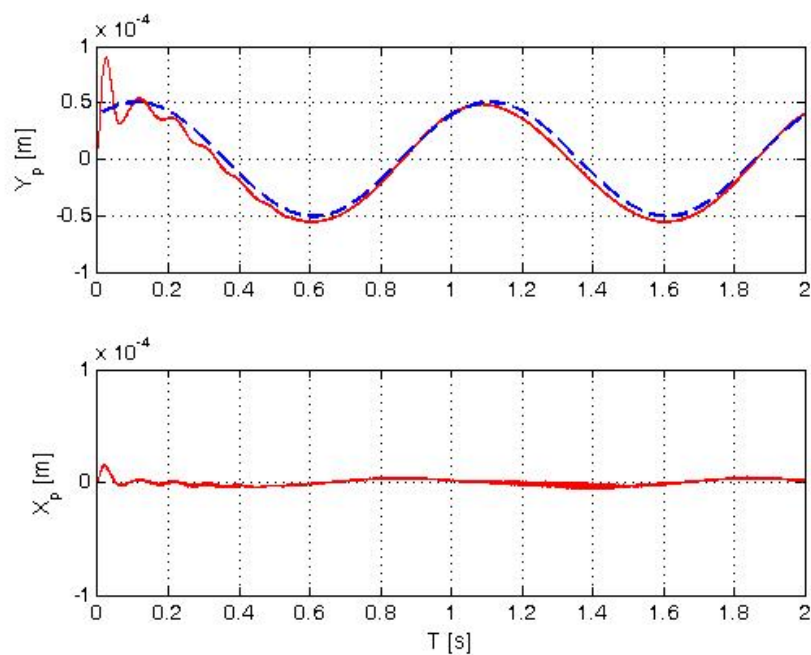
Rys. 10.1. Schemat sterowania z zakłóceniem położenia

Dla łatwej identyfikacji przyjęto, że łożysko pierwsze od silnika napędowego oznaczone indeksem  $\{p\}$  jest jako łożysko prawe oraz łożysko drugie o indeksie  $\{l\}$  jest łożyskiem lewym. Oś pionową oznaczono przez  $y$ , natomiast poziomą przez  $x$ .

Na rys. 10.2 i 10.3 przedstawiono przebiegi odpowiedzi układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  na zakłócenie położeniem wirnika w postaci sygnału sinusoidalnie zmiennego. Badanie przeprowadzono w obu łożyskach oddzielnie.

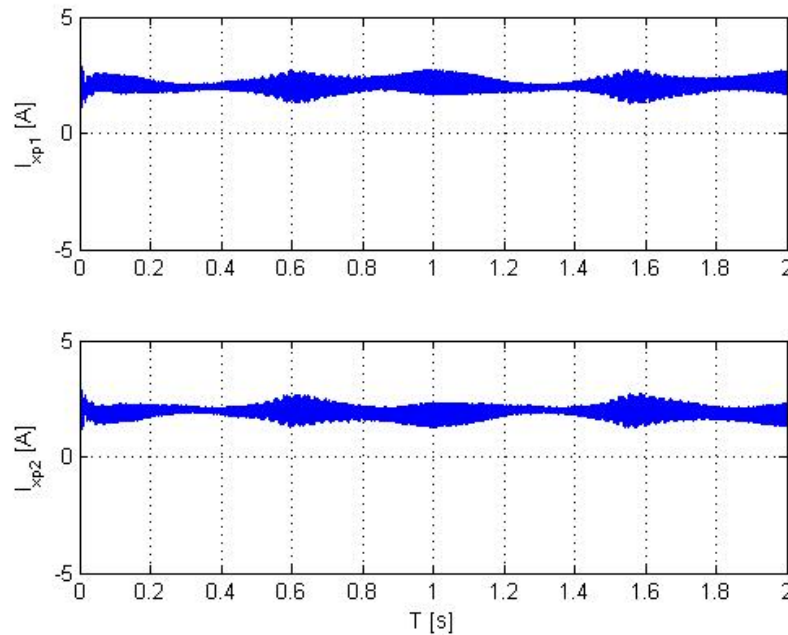


Rys. 10.2. Trajektoria ruchu wirnika w prawym łożysku – linia czerwona, zakłócano położenie wirnika w kierunku osi  $x$  – linia niebieska

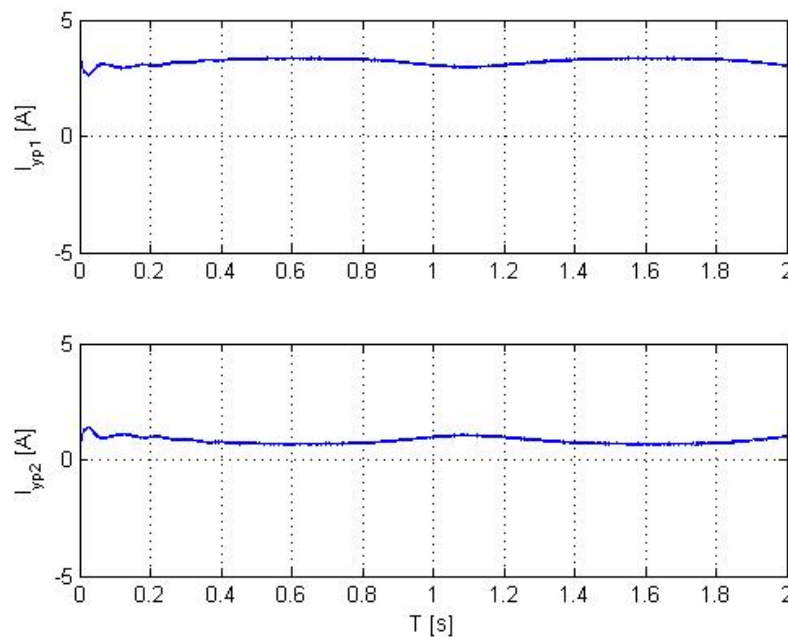


Rys. 10.3. Trajektoria ruchu wirnika w prawym łożysku – linia czerwona, zakłócano położenie wirnika w kierunku osi  $y$  – linia niebieska

Następnie na rys 10.4 i 10.5 przedstawiono przebiegi prądów sterujących w przypadku zakłócenia położenia wirnika sygnałem sinusoidalnie zmiennym.



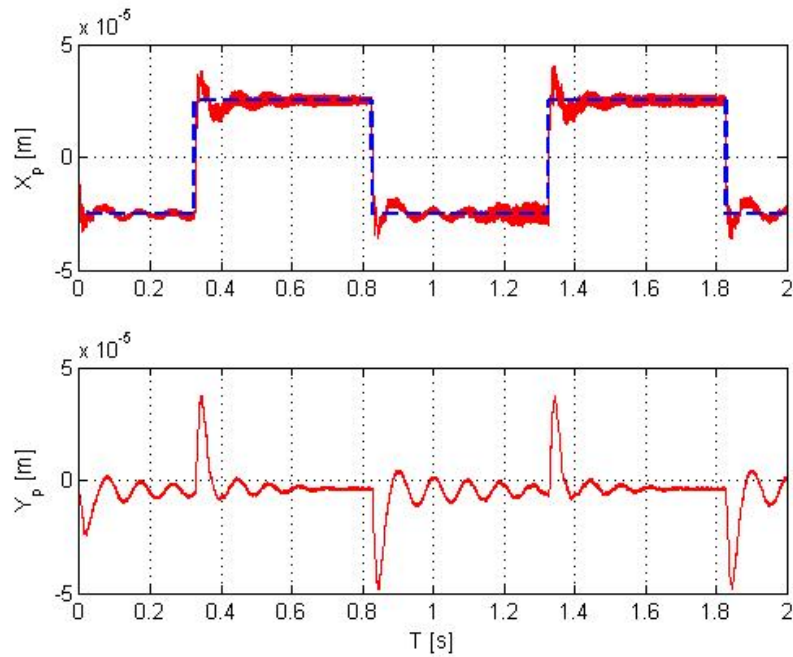
Rys. 10.4. Przebieg prądów w poziomych cewkach łożyska prawego



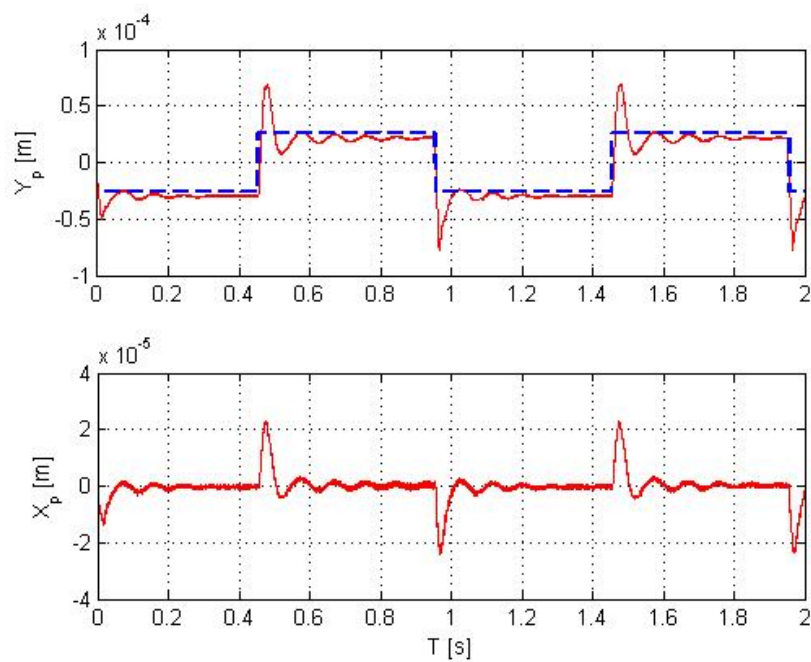
Rys. 10.5. Przebieg prądów w pionowych cewkach łożyska prawego

Należy zauważyć, że prądy sterujące nie przekraczają wartości 4 [A] przy ograniczeniu sygnału sterującego do 5 [A]. Ruchy wirnika wymuszone w kierunku jednej osi nieznacznie przenoszą się na drugą oś.

Następnie powtórzono badania dla wymuszenia skokowo zmiennego. Na rys. 10.6 i 10.7 przedstawiono przebiegi odpowiedzi układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$ .

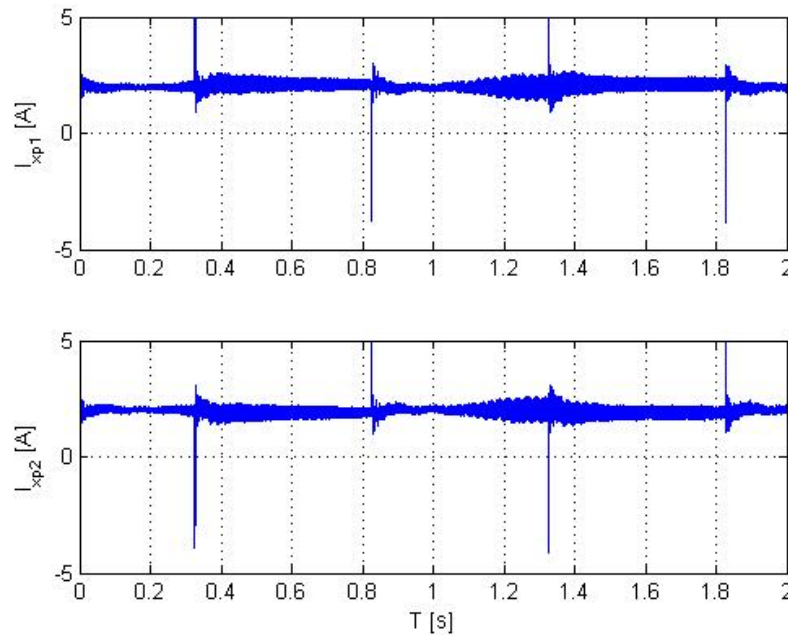


Rys. 10.6. Trajektoria ruchu wirnika w prawym łożysku – linia czerwona, zakłócano położenie wirnika w kierunku osi  $x$  – linia niebieska

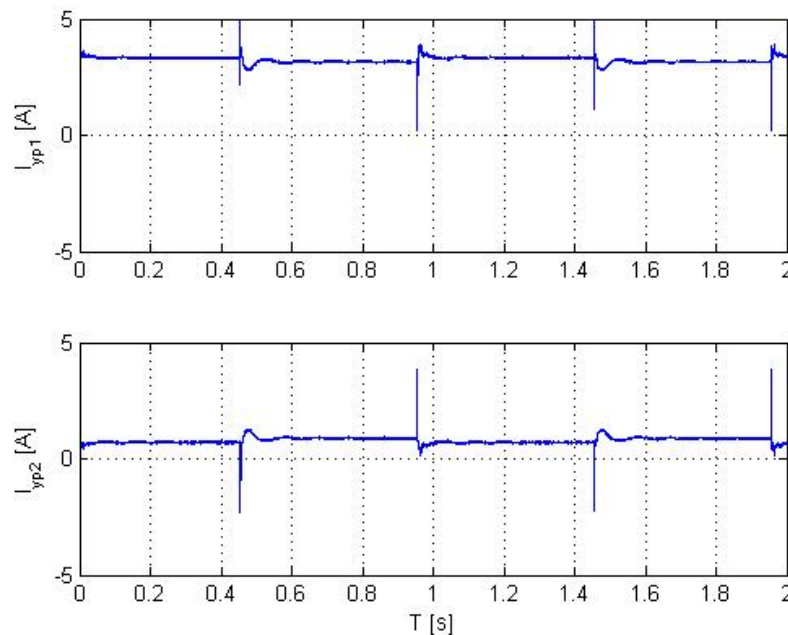


Rys. 10.7. Trajektoria ruchu wirnika w prawym łożysku – linia czerwona, zakłócano położenie wirnika w kierunku osi  $y$  – linia niebieska

Na rys. 10.8 i 10.9 przedstawiono przebiegi prądów odpowiadające skokowo zmiennym zakłóceniom położenia wirnika.

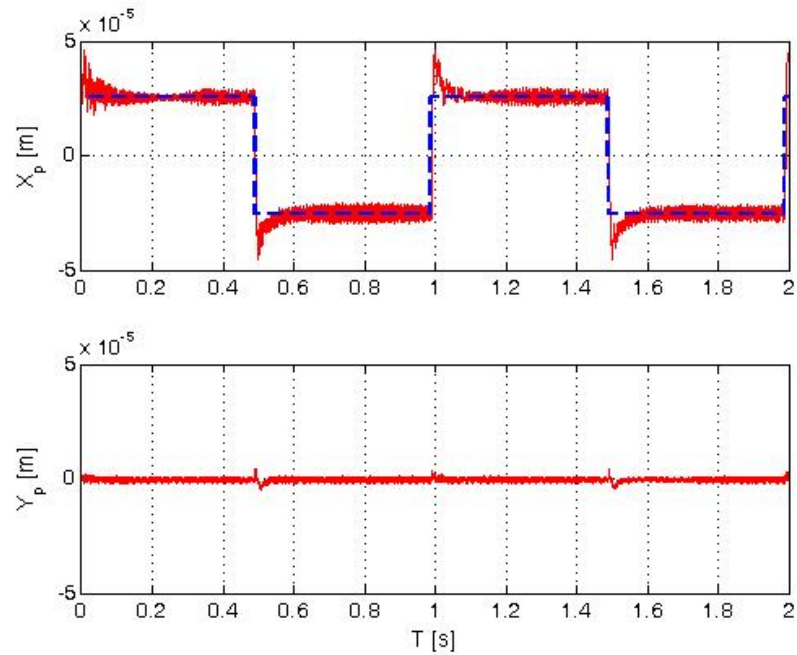


Rys. 10.8. Przebieg prądów w poziomych cewkach łożyska prawego



Rys. 10.9. Przebieg prądów w pionowych cewkach łożyska prawego

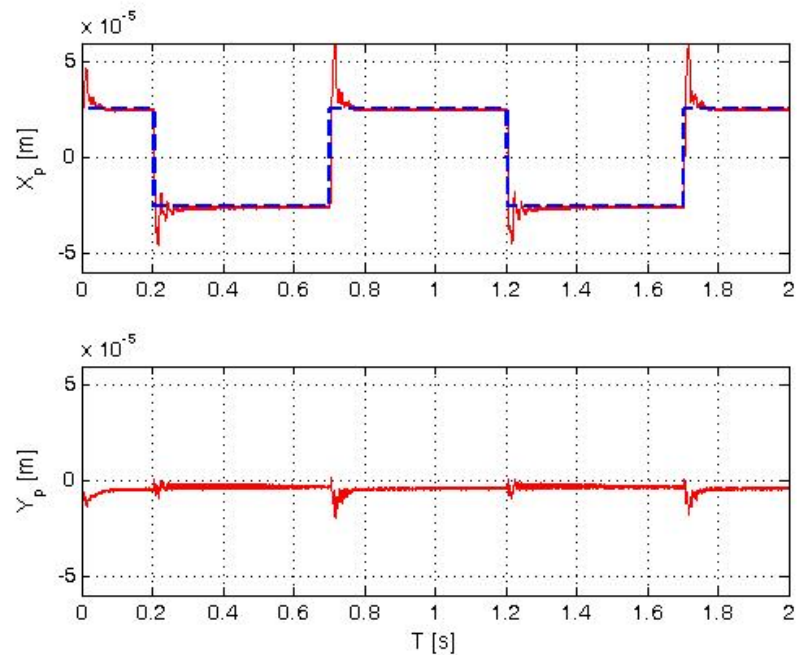
Poniżej zostaną przedstawione powtórzone badania układu z regulatorem odpornym typu  $\mu$ , w którym uwzględniono niepewność parametrów obiektu sterowania. Na rys. 10.10 przedstawiono przemieszczenie wirnika podczas zakłócenia położenia w wypadku uwzględnienia niepewności sztywności prądowej i przemieszczeniowej łożyska w zakresie  $\pm 25\%$  od wartości nominalnych oraz niepewności dynamiki w postaci zaprojektowanej funkcji wagowej nałożonej na zaprojektowany model niepewności.



Rys. 10.10. Trajektoria ruchu wirnika w prawym łożysku – linia czerwona, zakłócano położenie wirnika w kierunku osi  $y$  – linia niebieska

Model niepewności został zaprojektowany w Matlabie funkcją *ultidyn* o ograniczeniu wzmocnienia do 1. Funkcja wagowa określająca wpływ niepewności jest dobrana tak, aby wpływ niepewności nasilał się wraz ze wzrostem częstotliwości pracy łożyska. Wartość funkcji wagowej wynosi  $w(s) = (2s + 2513)/(s + 5027)$ . Prąd punktu pracy jest równy 2 [A].

Na rys. 10.11 przedstawiono przemieszczenie wirnika podczas zakłócenia położenia w wypadku uwzględnia niepewności masy, sztywności prądowej i przemieszczeniowej łożyska w zakresie  $\pm 25\%$  od wartości nominalnych.



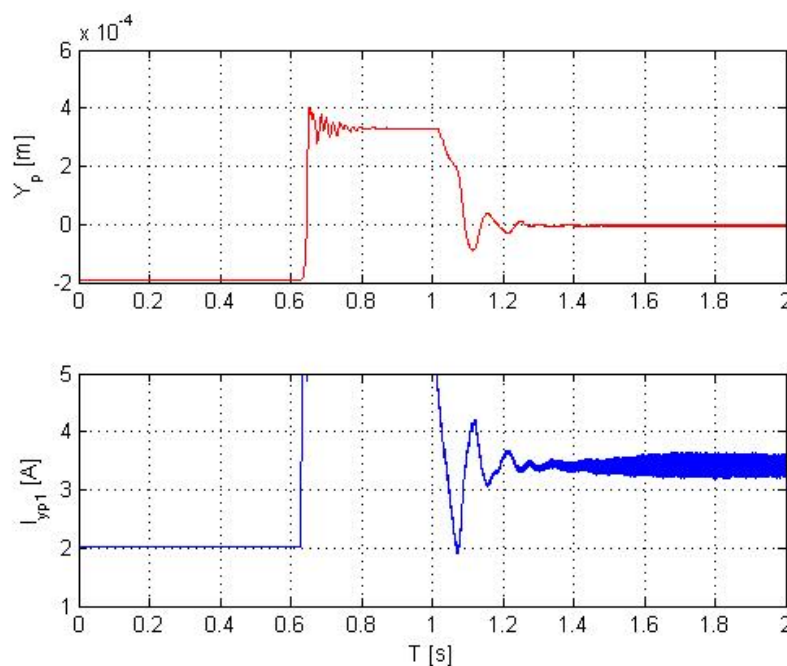
Rys. 10.11. Trajektoria ruchu wirnika w prawym łożysku – linia czerwona, zakłócano położenie wirnika w kierunku osi  $x$  – linia niebieska

Z powyższych badań wynika, że uwzględnienie niepewności obiektu jakim jest łożysko magnetyczne pozwala na większe tłumienie wymuszeń i zmniejszenie przeregulowania.

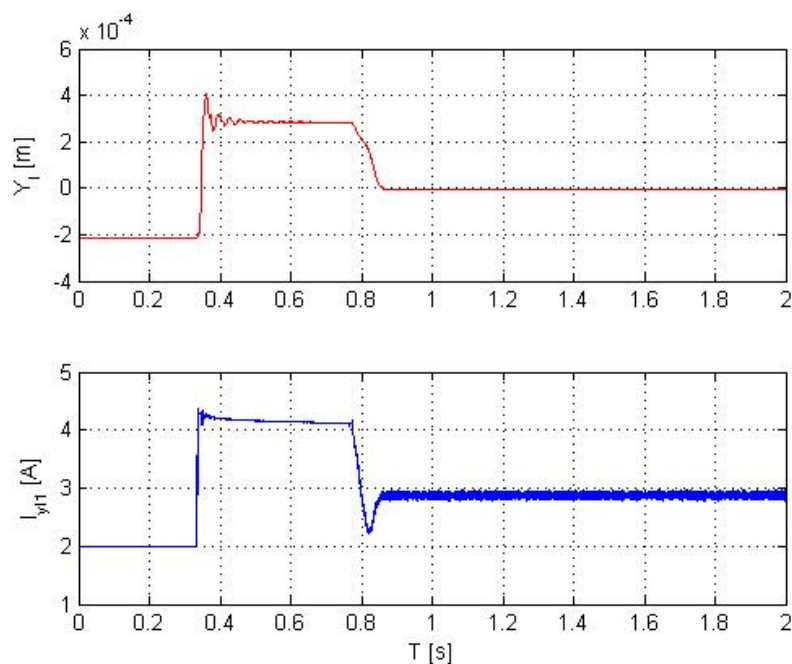
Dzięki precyzyjnemu sterowaniu ruchem wirnika w zakresie szczeliny powietrznej możliwe jest zastosowanie łożysk magnetycznych od obróbki precyzyjnej w przemyśle jako narzędzie obróbki skrawaniem dla uzyskania większych prędkości obrotowych oraz lepszej dynamiki procesu skrawania [30]. Taka obróbka skrawaniem może być zrealizowana przy pomocy elektrowrzecion łożyskowanych magnetycznie, z możliwością programowego sterowania położeniem wałka wrzeciona, bez wprowadzania żadnych zmian w mechanizmie szlifierki lub frezarki.

Następne badania dotyczą analizy dynamiki układu regulacji z regulatorem  $H_\infty$  podczas włączenia łożysk do pracy.

Na rys. 10.12 i 10.13 przedstawiono przebiegi ruchu środka wirnika i przebiegi prądów sterujących w osi  $y$  podczas włączenia łożysk do pracy zarejestrowane w obu łożyskach. W stanie początkowym (zgodnie z siłą ciężenia) wirnik spoczywał na dolnej części łożysk bezpieczeństwa. Po włączeniu łożysk do pracy widoczny jest krótki okres czasu, w którym wirnik uderza o górną część łożyska bezpieczeństwa. Wartość szczeliny łożyska magnetycznego w wypadku styku wirnika z łożyskiem bezpieczeństwa wynosi  $0.0002$  [m]. Każde odchylenie położenia wirnika od punktu pracy (położenie środka geometrycznego czopa wirnika w środku łożyska) jest interpretowane przez układ sterowania jako uchyb, jaki należy zminimalizować do zera. Powoduje to krótkotrwały stan zwarcia (nasycenie wzmacniaczy generujących maksymalny prąd sterujący równy  $5$  [A]). Ważne jest, że stany przejściowe pracy łożysk charakteryzujące się często nasyceniem członów wykonawczych nie powodują nasycenia i wytrącenia z równowagi całego układu sterowania odpornego. Należy tutaj wspomnieć, że samoczynny proces włączenia łożysk do pracy w układzie sterowania z regulatorem PID jest trudny do zrealizowania z uwagi na nasycenie powodowane członem całkującym regulatora.



Rys. 10.12. Przemieszczenie wirnika podczas włączenia prawego łożyska – linia czerwona, przebieg prądu sterującego w górnej cewce – linia niebieska



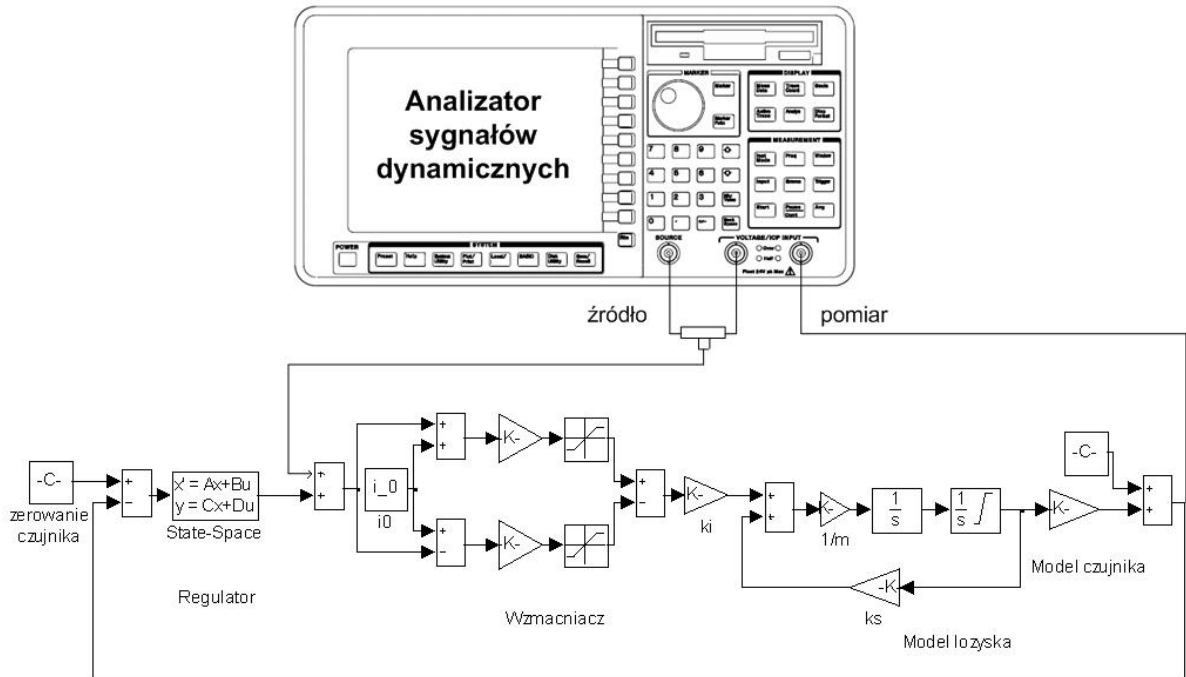
Rys. 10.13. Przesunięcie wirnika podczas włączenia prawego łożyska – linia czerwona, przebieg prądu sterującego w górnej cewce – linia niebieska

Wiele wyników badań eksperymentalnych układów regulacji odpornej zawieszeniem magnetycznym wirnika opublikowano w pracach [29, 31].

## 10.2. Charakterystyki częstotliwościowe

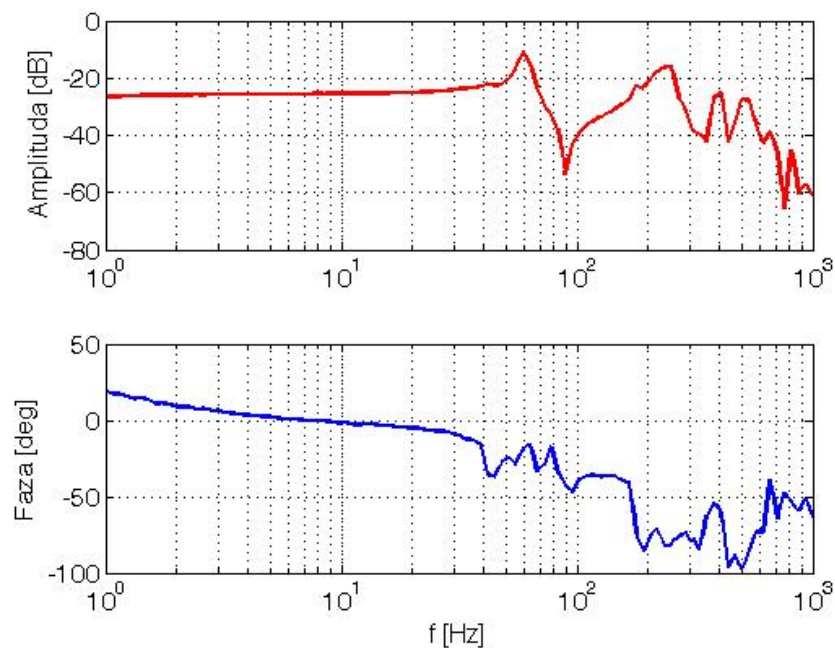
Badania częstotliwościowe pozwalają na scharakteryzowanie dynamiki łożysk magnetycznych. Parametry takie jak: pasmo przenoszenia, częstotliwości własne oraz wzmocnienia są ważną informacją opisującą pracę łożyska. Drugorzędym celem badań jest dynamiczna weryfikacja modelu łożyska magnetycznego. Badania w dziedzinie częstotliwości łożysk magnetycznych zostały przeprowadzone przy pomocy analizatora sygnałów dynamicznych typu Agilent 35670A. Analizator posiada funkcję Swept-Sine. Dzięki temu zaprogramowany sygnał sinusoidalny o amplitudzie 1 [V] (offset = 0 [V]) i liniowo zwiększającej się częstotliwości w zakresie od 1 [Hz] do 1 [kHz] został podany poprzez kartę A/C i C/A na wejście sterujące wzmacniacza generującego prądowy sygnał sterujący podawany na pionowe cewki badanego łożyska (w tym przypadku łożyska prawego). Charakterystyki dynamiczne cechują się znacznym tłumieniem, gdyż zostały wykonane między prądowym wejściem układu wzmacniacz-łożysko magnetyczne a wyjściem z czujnika położenia wirnika będącym sygnałem przesunięcia. Badania w dziedzinie częstotliwości przedstawiają dynamikę toru: wzmacniacz-łożysko magnetyczne-czujnik wiropędowy. Badania zostały przeprowadzone dla różnych wartości prądu punktu pracy w celu wykazania ewentualnego wpływu sztywności łożyska na charakterystykę dynamiczną. Układ sterowania odporne zaimplementowany w procesorze DSP jest realizowany z częstotliwością próbkowania równą 10 [kHz].

Na rys. 10.14 przedstawiono sposób włączenia analizatora stanów dynamicznych podczas przeprowadzania pomiaru charakterystyk częstotliwościowych Bodego.



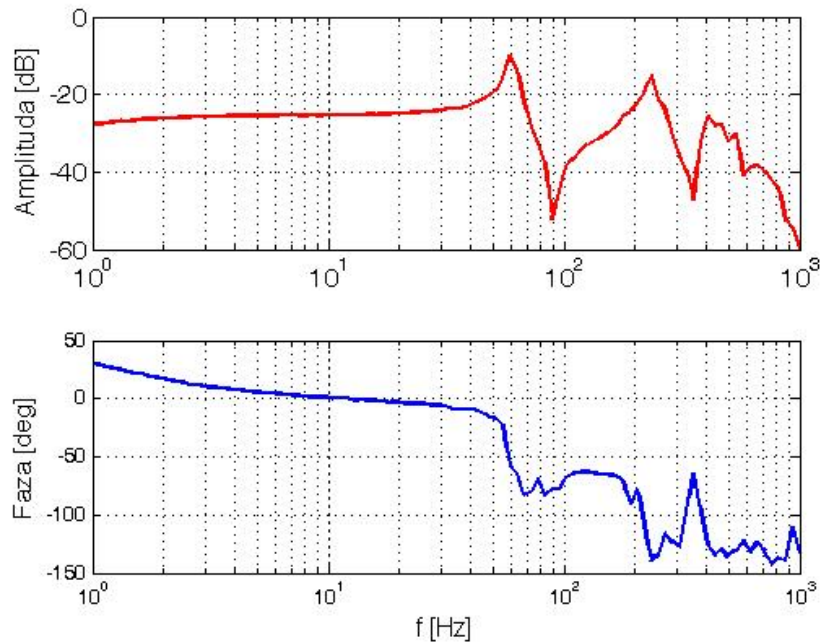
Rys. 10.14. Schemat połączeń układu sterowania z analizatorem sygnałów dynamicznych

Na rys. 10.15 przedstawiono charakterystykę Bodego dla pionowej osi łożyska prawego. Prąd punktu pracy wynosił  $i_0 = 1.5$  [A].



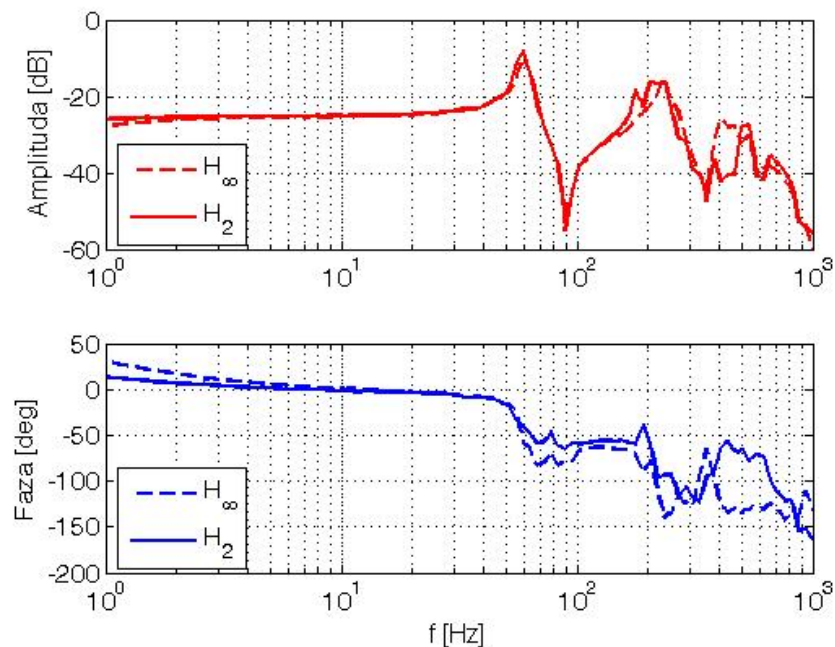
Rys. 10.15. Charakterystyka Bodego układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$

Na rys. 10.16 przedstawiono charakterystykę Bodego dla pionowej osi łożyska prawego. Prąd punktu pracy wynosił  $i_0=2.5$  [A].



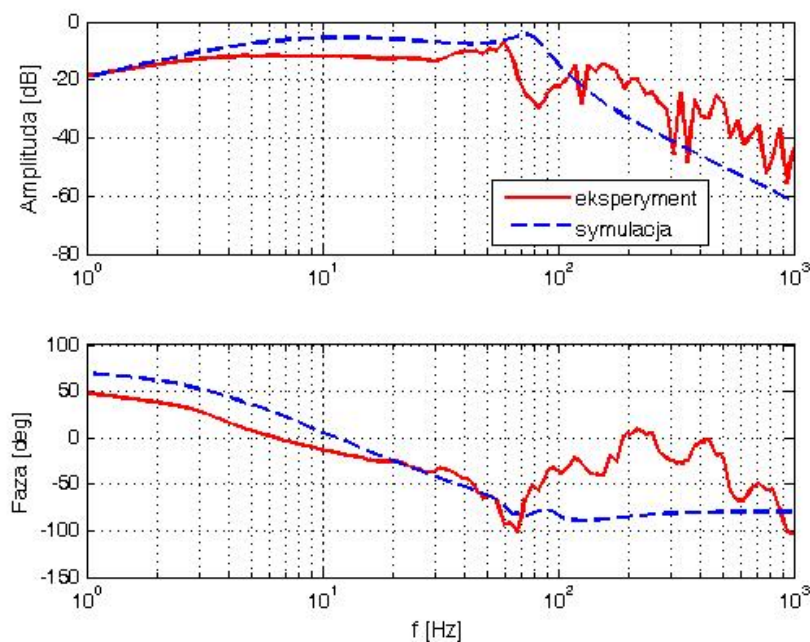
Rys. 10.16. Charakterystyka Bodego układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$ .

Należy zauważyć, że zmiana sztywności łożyska nie wpływa znacząco na dynamikę układu. Dla porównania właściwości regulatorów na rys. 10.17 przedstawiono charakterystykę Bodego układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  i  $H_2$ . Na rys. 10.17 widać, że regulator  $H_\infty$  cechuje się nieznacznie lepszym tłumieniem niż regulator  $H_2$ .



Rys. 10.17. Charakterystyka Bodego układu zamkniętego z regulatorem  $H_\infty$  i  $H_2$

Na rys. 10.18 przedstawiono charakterystykę Bodego układu regulacji z regulatorem  $\mu$  w wypadku uwzględnienia niepewności parametrów obiektu. Jako parametry niepewne przyjęto masę łożyskowania, sztywność prądową i przemieszczeniową. Wartość każdego z parametrów niepewnych wynosi  $\pm 25\%$  wartości nominalnej. Należy zwrócić uwagę, że charakterystyka dynamiczna jest bardzo gładka w porównaniu do charakterystyk wykonanych dla układu bez uwzględnienia niepewności. Poszczególne częstości własne są mniej znaczne i pasmo przenoszenia jest tym samym szersze. Dla porównania na rys. 10.18 umieszczono także wynik symulacji. Niezgodność charakterystyk eksperymentalnej i symulacyjnej należy tłumaczyć tym że, w rzeczywistości parametry łożyska są ustalone na danym poziomie i nie koniecznie muszą oscylować w zakresie  $\pm 25\%$  wartości nominalnej.



Rys. 10.18. Charakterystyka Bodego układu zamkniętego z regulatorem  $\mu$

### 10.3. Dynamika wirnika w ruchu obrotowym

Badania wirnika w ruchu obrotowym są kluczowym etapem badań doświadczalnych, na którym skupiono szczególną uwagę. Celem badań jest uzyskanie jak największych prędkości obrotowych przy jednoczesnym efektywnym tłumieniu drgań wirnika i zachowaniu odpornej stabilności całego układu sterowania. Podczas projektowania układu sterowania uwzględniono ograniczenia układu mechatronicznego jakim jest łożysko magnetyczne. Do takich ograniczeń należy:

- maksymalny uchyb regulacji jaki może być akceptowany przez regulator,
- szerokość pasma przenoszenia regulatora,
- maksymalny sygnał sterujący regulatora nie prowadzący do nasycenia członów wykonawczych,
- szerokość pasma przenoszenia członów wykonawczych jakimi są wzmacniacze mocy,
- maksymalne przemieszczenie wirnika w szczelinie łożyska magnetycznego.

Wszystkie powyższe uwarunkowania zostały uwzględnione już na etapie projektowania regulatora odpornego.

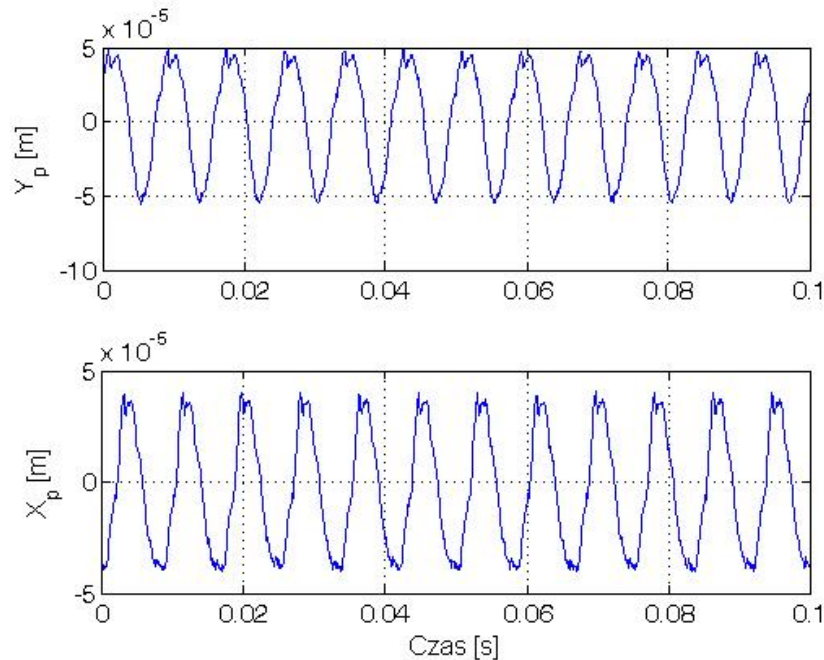
Ruch wirnika jest sterowany w dwóch osiach  $x$ - $y$  w każdym z dwóch łożysk promieniowych. Regulator odporny  $H_\infty$  (9.4) jest taki sam dla wszystkich łożysk magnetycznych. Podczas projektowania regulatora założono identyczność promieniowych łożysk magnetycznych oraz

zastosowanych wzmacniaczy analogowych bipolarnych. Ze względu na powodowanie dodatkowego niewyważenia odłączono łożysko osiowe, którego funkcja została zastąpiona przez elastyczne sprzęgło przenoszące napęd z silnika na wirnik. Z uwagi na bezpieczeństwo, stanowisko zostało wyposażone w obudowę wykonaną z blachy o grubości 0.008 [m]. W celu uzyskania wysokich prędkości obrotowych wirnik został wstępnie wyważony statycznie i dynamicznie przy wykorzystaniu czujników amplitudy drgań i czujnika fazy.

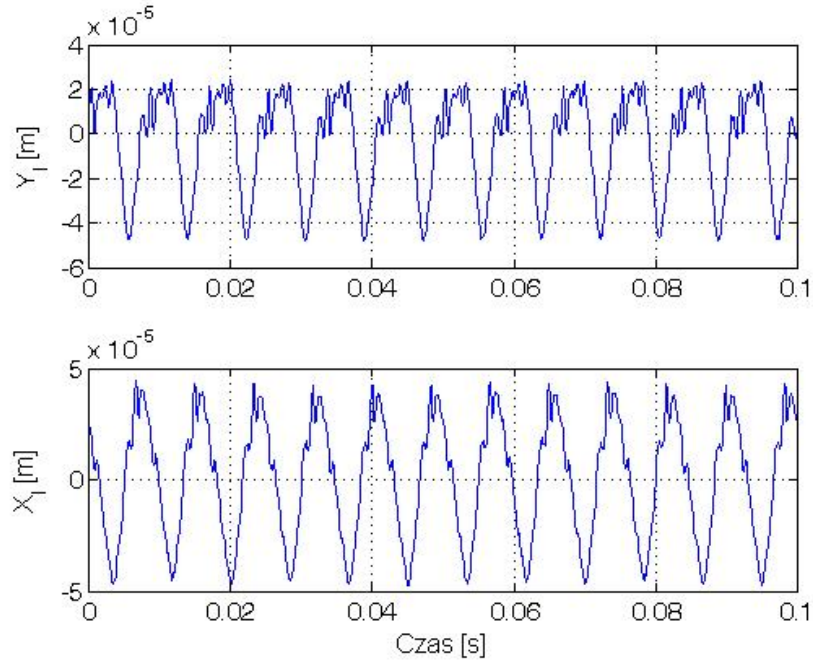
Poniżej zostaną przedstawione zmierzone przebiegi drgań wirnika oraz przebiegi prądów w cewkach łożyska dla prędkości obrotowej w zakresie od 0 do 7200 [obr/min]. Powyżej prędkości 7200 [obr/min] pojawia się pierwsza postać drgań. Wykorzystane wzmacniacze posiadają maksymalną wartość prądów sterujących do 5 [A]. Jest to zbyt mało, aby kompensować siły dynamiczne pojawiające się przy przekroczeniu pierwszego rezonansu. Dlatego dalsze zwiększanie prędkości obrotowej prowadzi do destabilizacji układu zawieszenia magnetycznego. Podczas utraty stabilności przez łożyska magnetyczne wirnik spada swobodnie na toczne łożyska bezpieczeństwa gdzie jest wyhamowywany aż do zatrzymania. W celu uzyskania większych prędkości obrotowych należy zastosować większe prądy sterujące sięgające 10 [A].

Wszystkie charakterystyki pomiarowe zostały wyznaczone za pomocą procesora DSP i programu ControlDesk w wersji 2.7. Położenie płaszczyzn pomiarowych jest nieznacznie przesunięte w stosunku do płaszczyzn łożyskowania. W torze pomiarowym nie stosowano filtrów z uwagi na zniekształcenie wzmocnienia sygnałów pomiarowych powodowanych przez tłumienie filtru. Dlatego w celu częściowego wyeliminowania zakłócenia sygnału przemieszczenia wirnika powodowanego przez nierównomierność powierzchni bieżni pod czujnikiem (efekt *run-out*) sygnał pomiarowy przechodził przez zaprojektowaną funkcję wagową  $W_3$ .

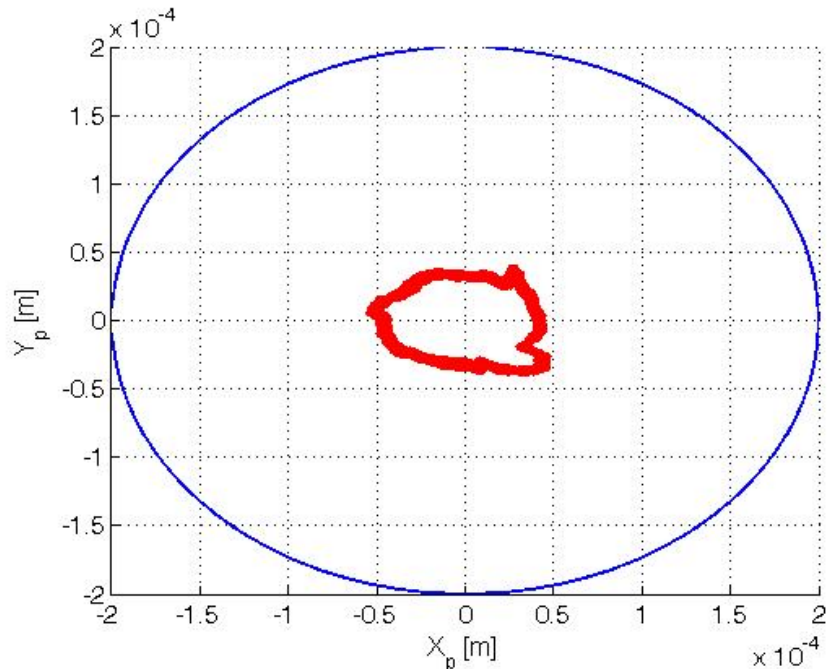
Na rys. 10.19 i 10.20 przedstawiono przebiegi drgań wirnika. Czas pomiaru wynosił 10 [s]. Dla lepszej wizualizacji drgań charakterystyki przedstawiono dla czasu od 0 do 0.1 [s].



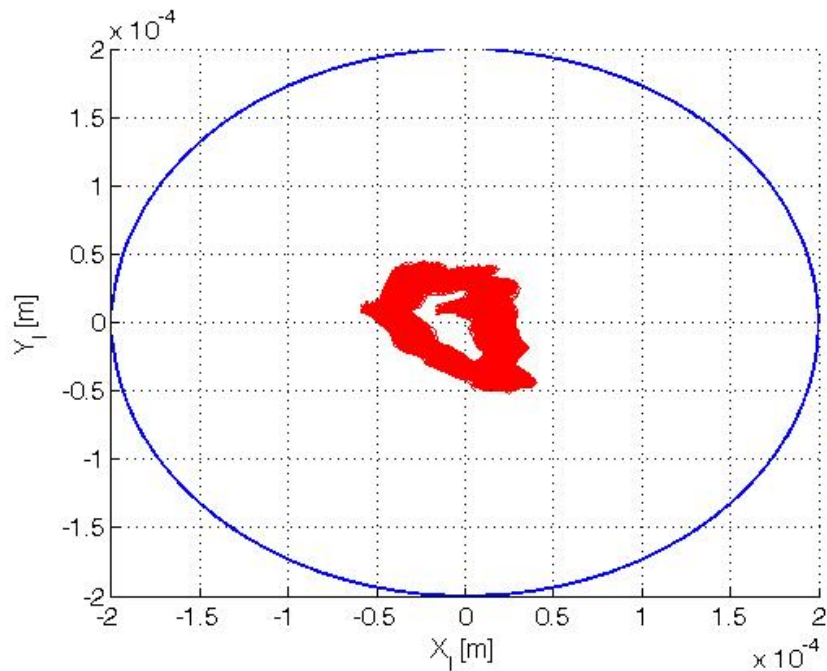
Rys. 10.19. Przebieg drgań wirnika w łożysku prawym dla  $\Omega=7200$  [obr/min]

Rys. 10.20. Przebieg drgań wirnika w łożysku lewym dla  $\Omega=7200$  [obr/min]

Na rys. 10.21 i 10.22 przedstawiono trajektorie ruchu środka geometrycznego wirnika w zakresie szerokości szczeliny powietrznej łożyska bezpieczeństwa. Na wykresach zaznaczono szerokość szczeliny łożyska bezpieczeństwa, które jest naturalnym ograniczeniem ruchu wirnika w łożysku magnetycznym. Charakterystyki nieznacznie różnią się między sobą, co jest wynikiem nie równej sztywności łożysk magnetycznych w osiach  $x$ - $y$ .

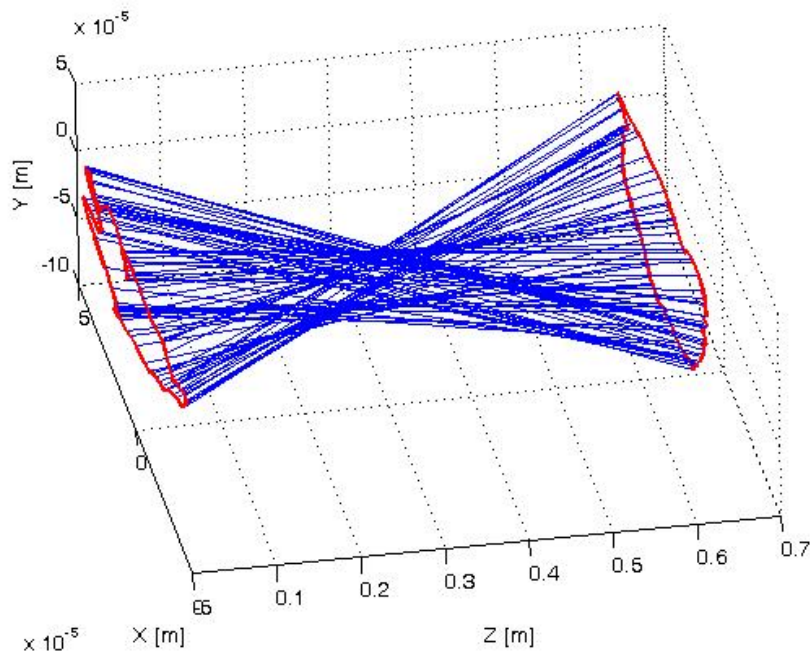


Rys. 10.21. Trajektoria ruchu środka geometrycznego wirnika w łożysku prawym – linia czerwona, szerokość szczeliny łożyska bezpieczeństwa – linia niebieska



Rys. 10.22. Trajektoria ruchu środka geometrycznego wirnika w łożysku lewym – linia czerwona, szerokość szczeliny łożyska bezpieczeństwa – linia niebieska

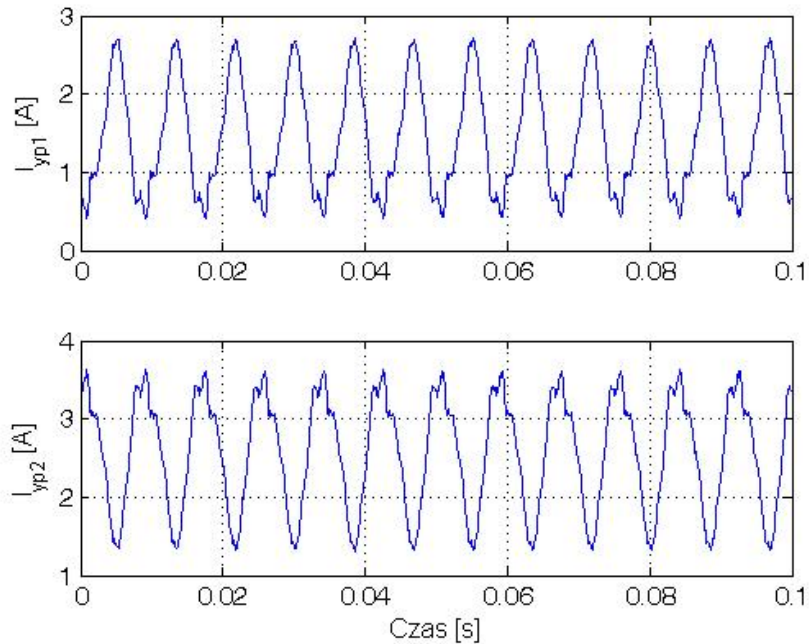
Na rys. 10.23 przedstawiono ruch złożony wirnika. Ruch wirnika w płaszczyznach pomiarowych jest złożeniem ruchu translacyjnego i ruchu obrotowego. Dla lepszej widoczności rysunku przedstawiono ruch wirnika dla jednego pełnego obrotu. Linia czerwona zaznacza trajektorie ruchu środka geometrycznego wirnika w obu płaszczyznach pomiarowych. Oś  $z$  przedstawia długość wirnika między płaszczyznami pomiarowymi, która wynosi 0.63 [m].



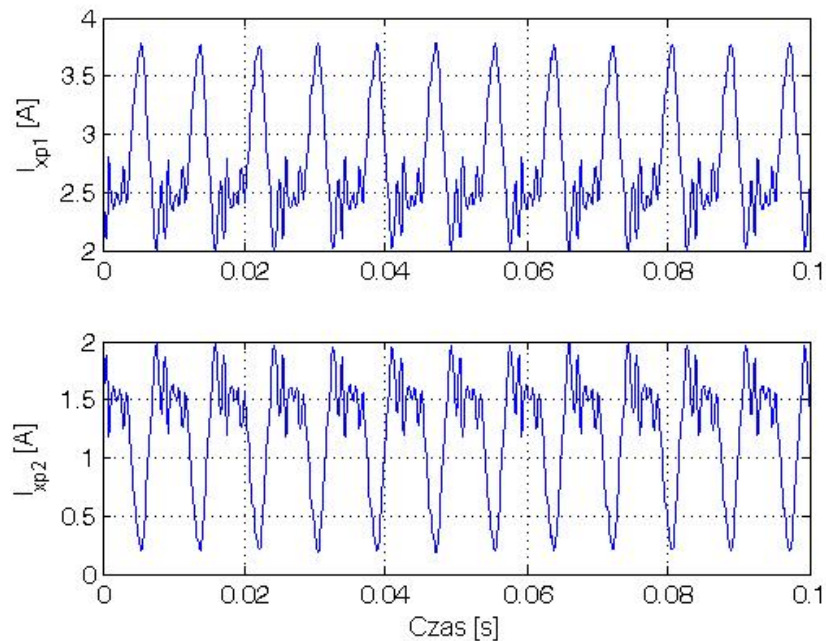
Rys. 10.23. Ruch złożony wirnika dla  $\Omega=7200$  [obr/min]

Na rys. 10.24, 10.25, 10.26 i 10.27 przedstawiono przebiegi prądów sterujących w cewkach obu łożysk promieniowych odpowiadające ruchowi wirnika przy prędkości obrotowej równej 7200 [obr/min]. Indeksy  $\{1\}$  i  $\{2\}$  oznaczają dla osi pionowej cewkę górną i dolną, natomiast dla

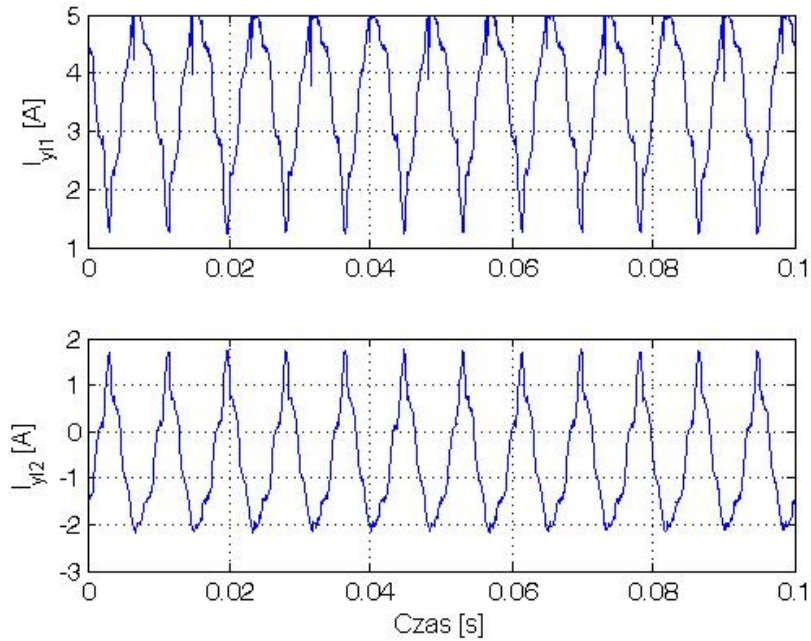
osi poziomej cewkę ze strony czujnika położenia i cewkę położoną po przeciwnej stronie czujnika położenia wirnika.



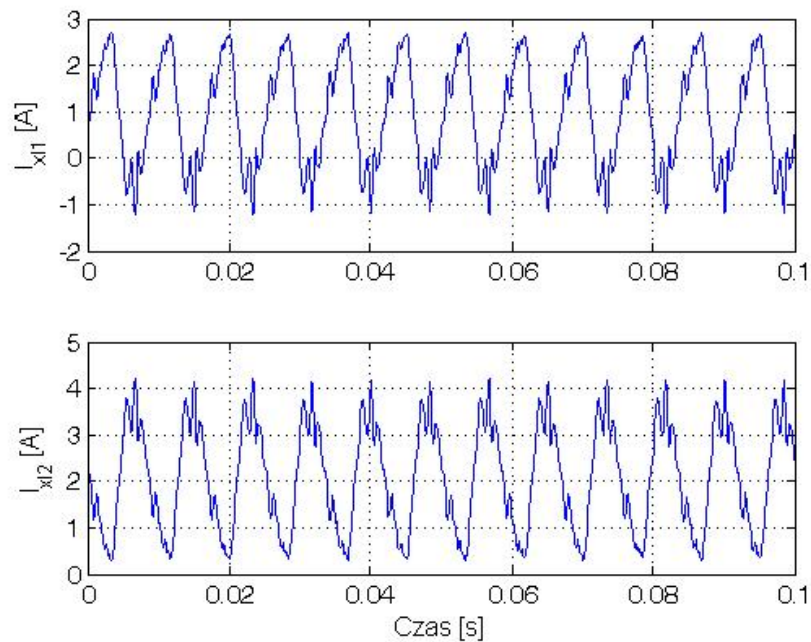
Rys. 10.24. Przebieg prądów sterujących w pionowych cewkach łożyska prawego dla  $\Omega=7200$  [obr/min]



Rys. 10.25. Przebieg prądów sterujących w poziomych cewkach łożyska prawego dla  $\Omega=7200$  [obr/min]



Rys. 10.26. Przebieg prądów sterujących w pionowych cewkach łożyska lewego dla  $\Omega=7200$  [obr/min]

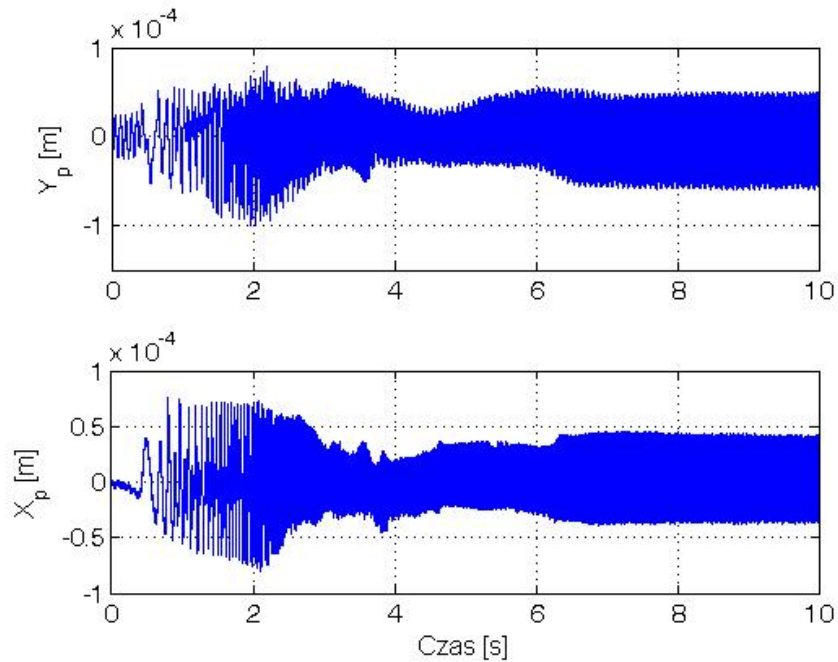


Rys. 10.27. Przebieg prądów sterujących w poziomych cewkach łożyska lewego dla  $\Omega=7200$  [obr/min]

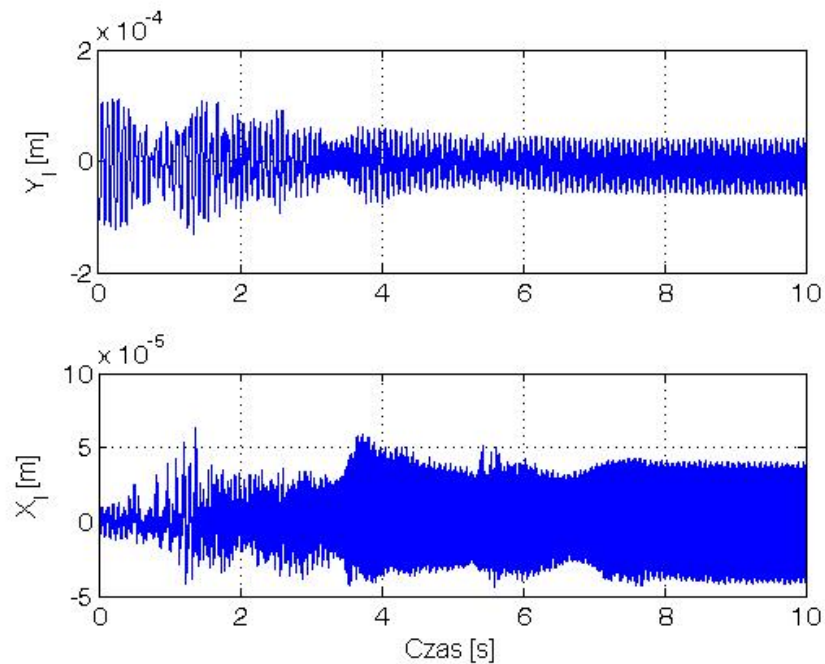
Dla prędkości obrotowej około 7200 [obr/min] prądy w cewkach łożysk przyjmują wartości maksymalne. Dlatego przy większych prędkościach obrotowych wskutek pojawiania się kolejnych postaci drgań należy między innymi zastosować wzmacniacze zapewniające większy prąd maksymalny.

Następnie przeprowadzono badania dynamiki wirnika za pomocą funkcji *Swept-Sine* w zakresie prędkości obrotowych wirnika od 0 do 7200 [obr/min]. Wirnik został rozprędzany z prędkością liniowo narastającą sterowaną przez falownik. Ruch wirnika był rejestrowany w zakresie czasu od momentu startu do momentu uzyskania zadanej prędkości obrotowej.

Charakterystyki typu *Swept-Sine* dają obraz kolejnych rezonansów i dudnień przechodzących podczas zmian prędkości obrotowej wirnika. Na rys. 10.28 i 10.29 przedstawiono przebieg drgań wirnika w płaszczyznach pomiarowych.

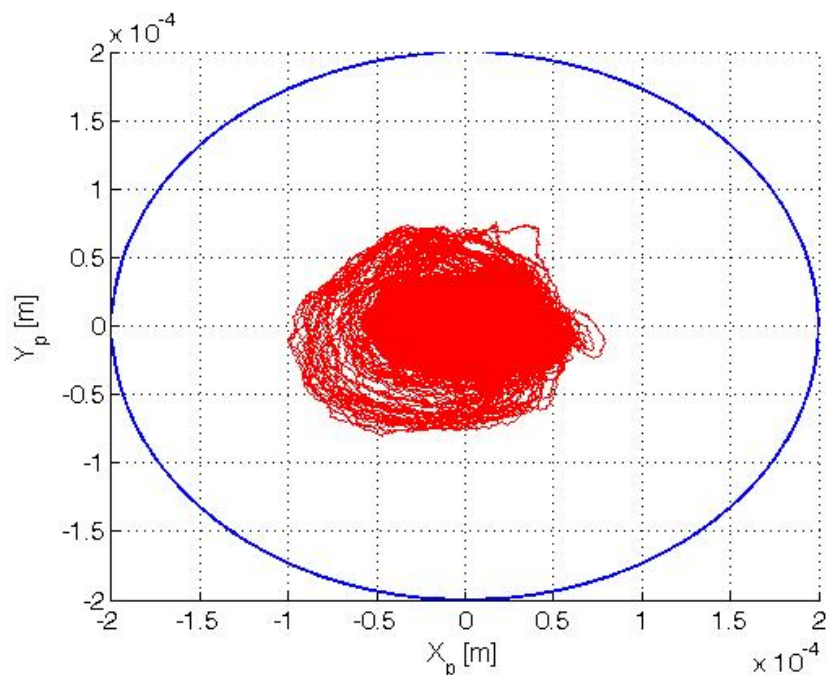


Rys. 10.28. Przebieg drgań wirnika w łożysku prawym dla  $\Omega$  od 0 do 7200 [obr/min]



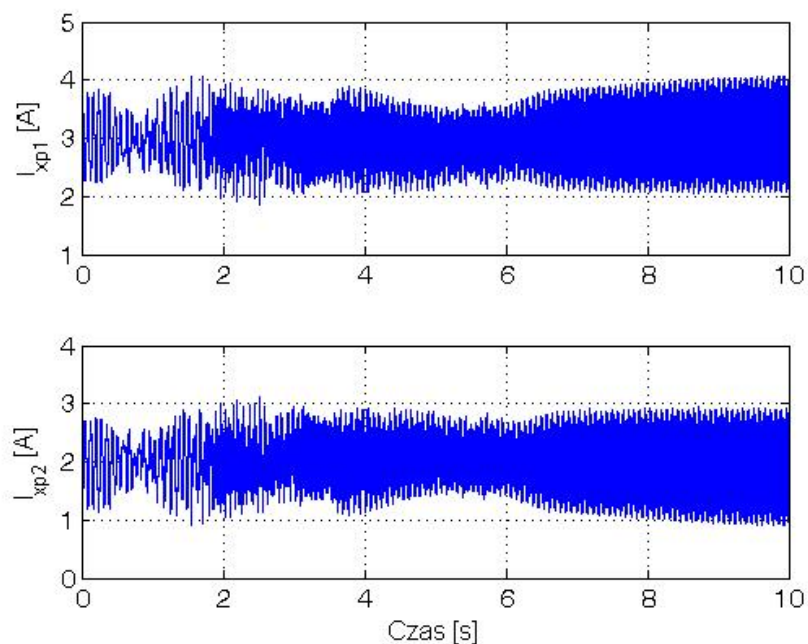
Rys. 10.29. Przebieg drgań wirnika w łożysku lewym dla  $\Omega$  od 0 do 7200 [obr/min]

Na rys. 10.30 przedstawiono trajektorię ruchu środka geometrycznego wirnika podczas wybiegu od 0 do 7200 [obr/min].

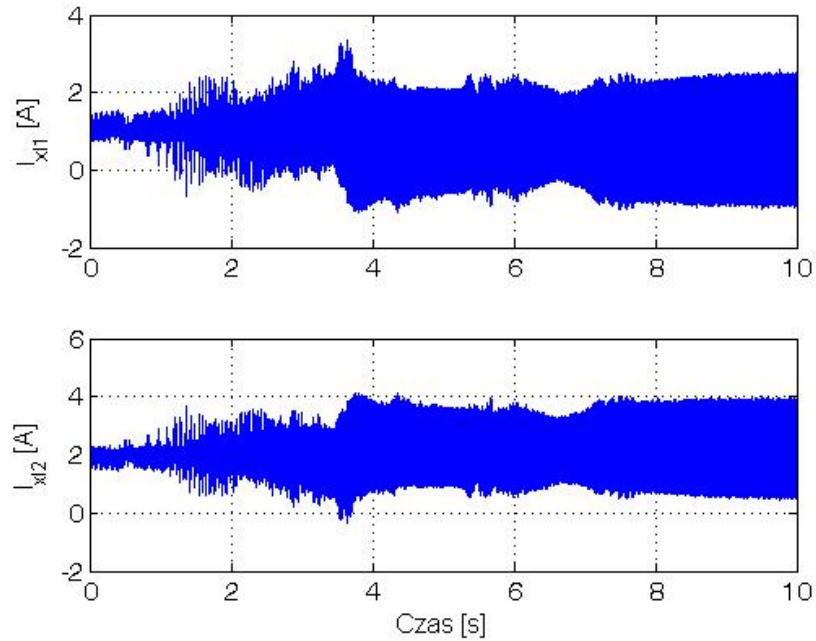


Rys. 10.30. Orbita wirnika w łożysku prawym dla  $\Omega$  od 0 do 7200 [obr/min]

Na rys. 10.31 i 10.32 przedstawiono przykładowe przebiegi prądów w cewkach poziomych obu łożysk.



Rys. 10.31. Przebiegi prądów sterujących w poziomych cewkach łożyska prawego dla  $\Omega$  od 0 do 7200 [obr/min]

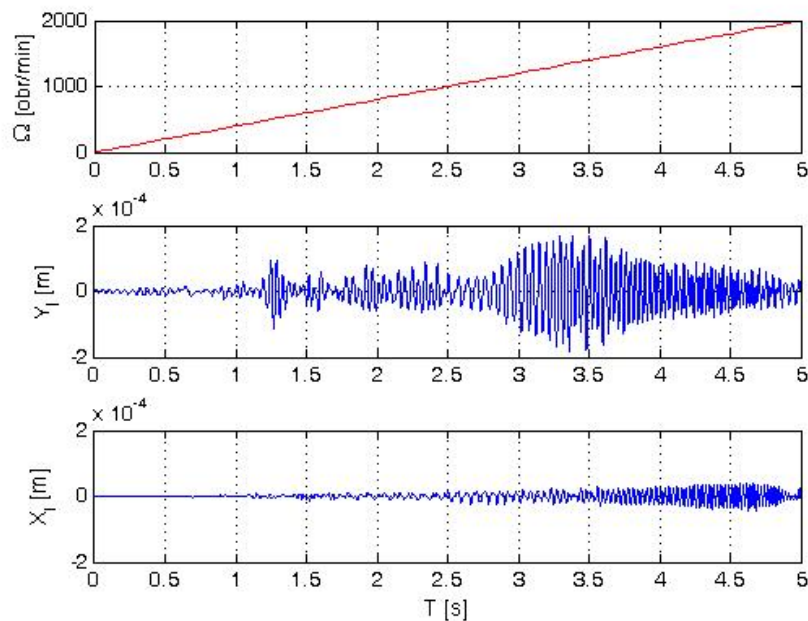


Rys. 10.32. Przebieg prądów sterujących w poziomych cewkach łożyska lewego dla  $\Omega$  od 0 do 7200 [obr/min]

Jak wynika z charakterystyk przedstawionych na rys. od 10.20 do 10.32 regulator odporny zapewnia stabilność oraz tłumienie poszczególnych drgań wirnika. Dodatkowo należy zauważyć, że przebiegi drgań wirnika w obu łożyskach różnią się między sobą. Oznacza to, że łożyska magnetyczne mają różne wartości takich parametrów jak sztywność prądowa i przemieszczeniowa. Jest to spowodowane niedokładnością wykonania bieżni statora łożysk i bieżni wirnika.

Charakterystyki eksperymentalne typu *Swept-Sine* pozwalają na identyfikację częstotliwości drgań własnych wirnika.

W celu przedstawienia pierwszych rezonansów na rys. 10.33 pokazano charakterystykę *Swept-Sine* w zakresie prędkości obrotowych od 0 do 2000 [obr/min].



Rys. 10.33. Przebieg drgań wirnika w łożysku lewym dla  $\Omega$  od 0 do 2000 [obr/min]

Badania doświadczalne potwierdziły wyniki badań symulacyjnych i obliczeń analitycznych. Tym samym przedstawiony model zawieszenia magnetycznego okazał się wystarczająco dokładnym przybliżeniem obiektu fizycznego. Analizując badania eksperymentalne należy podkreślić, że regulator odporny zapewnia dobrą jakość regulacji i stabilność zawieszenia magnetycznego wirnika pomimo niepewności parametrów obiektu, wymuszeń zewnętrznych oraz ograniczeń sygnałów. Dzięki rozbudowanym właściwościom sterowania odpornego możliwe jest uwzględnienie wszystkich cech nie tylko samego łożyska magnetycznego, ale także całej dynamiki związanej z wirnikiem zawieszonym w polu magnetycznym. Zastosowana metoda sterowania odpornego jest zaliczana do metod optymalnych, w której wskaźnikiem optymalizacji jest uzyskanie minimalnego wzmocnienia układu zamkniętego w całej szerokości pasma częstotliwości przenoszenia.

## Rozdział 11. Podsumowanie i wnioski

Przeprowadzone badania symulacyjne i laboratoryjne udowodniły postawioną tezę rozprawy. Układ globalny sterowania zawieszeniem magnetycznym wirnika został rozprzęgnięty względem osi sterowania na cztery układy lokalne. Uzyskano stabilną pracę układu zawieszenia magnetycznego wirnika zapewnioną przez oddzielne lokalne podukłady sterowania odpornego. Dodatkowo, poprzez zastosowanie metody sterowania odpornego, uwzględniono ograniczenia nałożone na sygnały wejściowe i wyjściowe oraz niepewność obiektu sterowania. W przypadku optymalnego sterowania odpornego uzyskano większą efektywność tłumienia drgań i znacznie większy zakres stabilnych prędkości obrotowych wirnika niż w przypadku sterowania PID.

W pracy przedstawiono zaprojektowaną i zbudowaną część mechaniczną stanowiska laboratoryjnego służącego do badań lewitacji magnetycznej wirnika. Przedstawiono szeroki zakres możliwych badań jakie mogą być prowadzone na stanowisku badawczym. Stanowisko jest w pełni funkcjonalne i dzięki pewnej uniwersalności pozwala na badania wirników i łożysk o różnej konstrukcji mechanicznej. W szczególności stanowisko zapewnia:

- możliwość badania dynamiki wirników sztywnych i giętych o różnych kształtach,
- badania aktywnych magnetycznych łożysk heteropolarnych i homopolarnych o różnych średnicach czopów wirnika poddawanych różnym obciążeniom zewnętrznym,
- badania pasywnych łożysk magnetycznych zbudowanych z wykorzystaniem magnesów trwałych,
- precyzyjne sterowanie ruchem wirnika w szczelinie powietrznej,
- niskie zużycie energii i możliwość diagnostyki maszyny wirnikowej.

Na potrzeby badań wykonano następujące łożyska magnetyczne:

- heteropolarne i homopolarne łożyska magnetyczne promieniowe,
- heteropolarne i pasywne łożyska magnetyczne osiowe.

W celu realizacji sterowania i rejestracji badań zbudowano układ pomiarowy:

- pomiar przemieszczenia wirnika w pięciu osiach za pomocą czujników wiropędowych,
- pomiar napięć i prądów na cewkach elektromagnetycznych,
- pomiar prędkości obrotowej wirnika za pomocą czujnika magnetycznego.

Zbudowano układ zasilania łożysk magnetycznych i układ napędowy wirnika:

- zasilanie łożysk za pomocą wzmacniaczy analogowych bipolarnych i impulsowych wykonanych w technice PWM,
- napęd wirnika za pomocą falownika częstotliwości.

Na potrzeby układów sterowania zaprojektowano, wykonano i badano:

- sterowanie zawieszeniem magnetycznym w czasie rzeczywistym za pomocą procesora sygnałowego DSP,
- realizację różnych praw sterowania, np. PID,  $H_\infty$ ,  $H_2$ ,  $\mu$ ,
- sterowanie prędkością obrotową wirnika.

Pierwszym zadaniem badawczym było zamodelowanie układu wirnik-łożyska magnetyczne i wyznaczenie modelu nominalnego zawieszenia magnetycznego (rozdział 2.2). Następnie zbudowano prosty układ sterowania PID w taki sposób, aby stabilizował ruch dwóch postaci wirnika sztywnego: translacyjnej i rotacyjnej (rozdział 2.3). To podstawowe zadanie wynika z faktu, że wirnik łożyskowany magnetycznie bez układu sterowania jest obiektem strukturalnie niestabilnym. Przeprowadzono maksymalne rozprzężenie obiektu sterowania zarówno po stronie współrzędnych pomiarowych jak i po stronie sygnałów sterujących (rozdział 2.4). Uzyskano cztery lokalne niezależne podukłady dla każdej z osi sterowania. Dzięki temu uzyskano możliwość badania dynamiki wirnika niesymetrycznego względem płaszczyzn łożyskowych. Dało to możliwość badania niesymetrycznych magnetycznych łożysk heteropolarnych. Badania

symulacyjne i laboratoryjne układu regulacji PID (rozdział 4) wykazały, że regulator PID najlepiej sprawdza się w układach zawieszenia magnetycznego wirnika obracającego się z niewielkimi prędkościami obrotowymi (patrz charakterystyki 4.15÷4.17). Natomiast sterowanie PID nie pozwala uwzględnić ograniczeń sygnałów, nieliniowości obiektu i niestacjonarności jego parametrów. Wszystkie te cechy występują w szybkoobrotowych wirnikach łożyskowanych magnetycznie o dużych zmianach prędkości obrotowych poddawanych wymuszeniom i zakłóceniom zewnętrznym. Badania eksperymentalne układów z regulatorem PID potwierdziły badania symulacyjne oraz dokładność wyznaczonego modelu zawieszenia magnetycznego wirnika (patrz charakterystyki 4.11÷4.13). Układ zawieszenia magnetycznego wirnika sterowanego regulatorem PID posłużył do wstępnych badań i opracowania modeli niepewności obiektu oraz funkcji wagowych. Wyznaczono modele niepewności strukturalnej w tym parametrycznej oraz niepewności niestrukturalnej w tym addytywnej i multiplikatywnej (rozdział 6). Przedstawiono sposób projektowania funkcji wagowych nałożonych na sygnał uchybu regulacji, sterowania, wyjściowy, szumu pomiarowego i zakłócenia (rozdział 7). Wyznaczone modele niepewności i funkcje wagowe posłużyły w procesie obliczania praw sterowania odporne.

W rozdziale 8 przedstawiono najważniejsze algorytmy sterowania optymalnego jakim jest sterowanie odporne  $H_\infty$ ,  $H_2$  i  $\mu$ . Optymalizacja regulatora  $H_\infty$  i  $H_2$  polegała na takim doborze funkcji wagowych, aby współczynnik optymalizacji  $\gamma$  był jak najmniejszy. Przeprowadzone badania symulacyjne układów regulacji odpornej zawieszeniem magnetycznym wirnika (rozdział 9) wykazały słuszość stosowania tej metody. W badaniach wykazano, że układ zamknięty jest stabilny mimo niepewności parametrów obiektu sięgających  $\pm 25\%$ . Układ regulacji odpornej jest mniej wrażliwy na zakłócenia obiektu niż układ regulacji PID. Dodatkowo sygnał regulowany w układzie regulacji odpornej lepiej naśladuje zmiany sygnału zadanego niż w przypadku sterowania PID. W układzie sterowania odporne udało się uwzględnić ograniczenia sygnałów uchybu regulacji, sterującego i mierzonego. Przeprowadzono także badania układu rozprężonego, w którym wpływ sprzężeń skrośnych zastąpiono przez dodatkowe modele niepewności zaprojektowane dla każdej osi sterowania (rozdział 9.4). Pokazano badania modeli niepewności, w tym charakterystyki czasowe i częstotliwościowe układu rozprężonego. Wyniki badań eksperymentalnych układu regulacji odpornej (rozdział 10) potwierdziły wyniki badań symulacyjnych i obliczeń analitycznych. Uwzględniono funkcje wagowe wchodzące w skład układu sterowania (9.1, 9.2, 9.3). Uzyskano lepszą kompensację zakłóceń sinusoidalnie zmiennych i skokowo zmiennych (patrz charakterystyki 10.2÷10.9) niż w przypadku sterowania PID. Układ zawieszenia magnetycznego wirnika jest odporne stabilny mimo niepewności parametrów obiektu (patrz charakterystyki 10.10 i 10.11). Potwierdzono eksperymentalnie właściwości regulatorów  $H_\infty$  i  $H_2$  (10.17) oraz regulatora  $\mu$  (10.18). Uzyskano dużo większe prędkości obrotowe wirnika (10.20÷10.32) niż w przypadku sterowania PID.

Reasumując najważniejsze wyniki uzyskane na podstawie badań eksperymentalnych i symulacyjnych dotyczących jakości regulacji odpornej układu aktywnego zawieszenia magnetycznego wirnika można przedstawić kilka najważniejszych wniosków.

- 1) Sygnały wejściowe i wyjściowe układu regulacji zostały ograniczone za pomocą funkcji wagowych.
- 2) Przy odpowiednim doborze funkcji wagowych w układach regulacji odpornej zniwelowany jest uchyb statyczny.
- 3) Za pomocą funkcji wagowych możemy kształtować parametry jakości statycznej i dynamicznej układów regulacji odpornej.
- 4) Układ regulacji rozprężnięto na cztery lokalne układy dla każdej z osi sterowania.
- 5) Otrzymano regulatory niskiego rzędu, które są realizowane fizycznie w czasie rzeczywistym mimo małych wartości stałych czasowych obiektu.

- 6) Sterowanie odporne i sterowanie PID zostały zrealizowane w czasie rzeczywistym przy pomocy procesora sygnałowego DSP.
- 7) Regulator odporny pozwala sterować zawieszeniem magnetycznym o nieliniowych charakterystykach statycznych i dynamicznych.
- 8) Układ zamknięty z regulatorem odpornym utrzymuje stałą jakość procesów przejściowych, czego nie można potwierdzić dla innych typów regulatorów.
- 9) Metoda sterowania odpornego pozwoliła na uwzględnienie niepewności obiektu.
- 10) Regulator  $H_\infty$  wykazuje lepsze właściwości tłumienia efektów niewyważenia przy dużej prędkości obrotowej wirnika niż regulator PID.
- 11) Regulator  $H_\infty$  zapewnia większą odporność układu na zakłócenia położenia wirnika w szczelinie powietrznej niż regulator PID.
- 12) Procesy przejściowe, takie jak włączenie łożysk do pracy, podnoszenie wirnika, awaria zasilania, nagła zmiana prędkości obrotowej wirnika, itd. są szczególnie energochłonne i wymagają dużej odporności układu sterowania. W takich stanach dynamicznych układ regulacji  $H_\infty$  zapewnia stabilność i odpowiednią jakość statyczną i dynamiczną regulacji.
- 13) Główny problem w układzie sterowania łożysk magnetycznych, polegający na stabilizacji ruchu wirnika oraz redukcji jego drgań w szerokim zakresie prędkości obrotowych, został pomyślnie rozwiązany przez zastosowanie regulacji odpornej.

Zastosowana w pracy metoda sterowania strukturalnie niestabilnym układem zawieszenia magnetycznego wirnika pozwoliła na osiągnięcie lepszych efektów niż dotychczasowe metody sterowania. Przedstawione badania zaprojektowanych i wykonanych łożysk magnetycznych pozwoliły na dokładniejsze poznanie tego trudnego do sterowania obiektu. Metody sterowania odpornego pozwolą na rozszerzenie zakresu zastosowania systemów łożyskowania magnetycznego w maszynach wirnikowych.

W kolejnych badaniach dotyczących sterowania odpornego drganiami wirnika łożyskowanego magnetycznie zostaną zastosowane wzmacniacze o większej mocy zapewniające prąd maksymalny 10 [A]. Pozwoli to na stabilne sterowanie zawieszeniem wirnika podczas przejścia przez poszczególne rezonanse, dzięki czemu można będzie osiągnąć większe prędkości obrotowe. Jednocześnie konstruowane i badane będą łożyska o znacznie większych siłach nośnych zapewniających lewitację wirnika o masie ponad 20 [kg]. Umożliwi to zrealizowanie jednego z następujących celów, jakim jest zastosowanie opracowanych łożysk magnetycznych w elektromechanicznym zasobniku energii kinetycznej.

## Literatura

- [1] Antila M., *Electromechanical Properties of Radial Active Magnetic Bearings*, Dissertation, Helsinki University of Technology, 1998.
- [2] Ariffin A.E., Munro N., Robust Control Analysis of A Gas-Turbine Aeroengine, *IEEE Trnas. Cont. Sys. Tech.*, Vol. 5, No. 2, pp. 178-188, 1997.
- [3] Balas G.J., Packard A.K., Safonov M.G., Chiang R.Y., Next generation of tools for robust control, *Proceeding of the 2004 American Control Conference*, Boston, Massachusetts, Vol. 6, pp. 5612-5615, 2004.
- [4] Balas M.J., Feedback Control of Flexible Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-23, No 4, pp.673-679, 1978.
- [5] Beams J., Production and Use of High Centrifugal Fields, *Science*, Vol. 120, pp. 619-625, 1954.
- [6] Beams J., Magnetic Bearings, Paper 810A, *Automotive Engineering Conference*, Detroit, Michigan, USA, SAE, 1964.
- [7] Boulet B., Francis B.A., Hughes P.C., Hong T., Uncertainty Modeling and Experiments in  $H_\infty$  Control of Large Flexible Space Structures, *IEEE Trans. Cont. Sys. Tech*, Vol. 5, No. 5, pp. 504-519, 1997.
- [8] Burrows C., Sainkaya M., Clements S., Active Vibration Control of Flexible Rotors: an Experimental and Theoretical Study, *Proceedings of the Royal Society of London*, 422, pp.123-146, 1989.
- [9] Chandrasekharan P.C., *Robust Control of Linear Dynamical Systems*, Academic Press, 1996.
- [10] Chen B.M., Lee T.H., Hang C.C, Gu Y., Weerasooriya S., An  $H_\infty$  Almost Disturbance Decoupling Robust Controller Design for a Piezoelectric Bimorph Actuator with Hysteresis, *IEEE Trans. Cont. Sys. Tech*, Vol. 7, No. 2, pp. 160-174, 1998.
- [11] Chiba A., Fukao T., Ichikawa O., Oshima M., Takemoto M., Dorrel D., *Magnetic Bearings and Bearingless Drives*, Newnes, 2005.
- [12] Doyle J., Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties, *IEE Proc.*, Vol. 129, No. 6, pp. 242-252, 1982.
- [13] Doyle J.C, Francis B., Tannenbaum A., *Feedback Control Theory*, McMillan Publishing Co., 1990.
- [14] Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A., State-Space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 34, No. 8, pp. 831-847, 1989.
- [15] Doyle J., Zhou K., Glover K., Bodenheimer B., Mixed  $H_2$  and  $H_\infty$  Performance Objectives: Optimal Control, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 39, No. 8, pp. 1575-1587, 1994.
- [16] Earnshaw S., On the Nature of the Molecular Forces which Regulate the Constitution of the Luminiferous Ether, *Trans. of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 7, Part 1, pp. 97-112, 1842.
- [17] Fujiwara H., Takahashi N., Matsushita O., An Evaluation of Stability Indices Using Sensitivity Function for Active Magnetic Bearing Supported High-Speed Rotor, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 129, Issue 2, pp. 230-238, 2007.
- [18] Francis B.A., A Course in  $H_\infty$  Control Theory, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 88, 1987.
- [19] Gahinet P., Apkarian P., A Linear Matrix Inequality Approach to  $H_\infty$  Control, *Int. J. Robust Non. Contr.*, Vol. 4, pp. 421-448, 1994.
- [20] Gahinet P., Nemirovskii A., Laub A.J., Chilali M., The LMI Control Toolbox, *Proc. the 33rd CDC, Lake Buena Vista, FL*, pp. 2038-2041, 1994.

- [21] Gosiewski Z., *Łożyska magnetyczne dla maszyn wirnikowych: Część I: Podstawy teoretyczne*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Koszalinie. Monografia nr 33, str. 148, Koszalin, 1993.
- [22] Gosiewski Z., Falkowski K., *Wielofunkcyjne łożyska magnetyczne–Monografia nr 19*, Wydawnictwo Naukowe Instytutu Lotnictwa, Warszawa, 2003.
- [23] Gosiewski Z., Mystkowski A., Sterowanie odporne układem łożysk magnetycznych w maszynach wirnikowych, *Wyd. Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej. Budowa i Eksploatacja Maszyn nr 13*, str. 25-39, Białystok, 2006.
- [24] Gosiewski Z., Mystkowski A., Dobór funkcji wagowych w układzie sterowania odpornego aktywnym zawieszeniem magnetycznym, *Wyd. Materiały konferencji Automaticon'2006*, str. 402-411, Warszawa, 2006.
- [25] Gosiewski Z., Mystkowski A., Robust control of one axis of shaft supported magnetically, *Developments in machinery design and control*. Vol. 4. pp. 45-47, Bydgoszcz, 2005.
- [26] Gosiewski Z., Mystkowski A., One-DoF robust control of shaft supported magnetically, *Archives of Control Sciences*, Vol. 16(LII), No.3, pp. 247-259, 2006.
- [27] Gosiewski Z., Mystkowski A., The robust control of magnetic bearings for rotating machinery, *Solid State Phenomena*, Vol. 113, pp.125-130, 2006.
- [28] Gosiewski Z., Mystkowski A., Axis-Decomposition Robust Control Systems of Active Magnetic Suspension, *8th International Conference on Motion and Vibration Control (MOVIC)*, Kaist, Daejeon, Korea, pp. 736-741, 2006.
- [29] Gosiewski Z., Mystkowski A., Robust control of active magnetic suspension: Analytical and experimental results, *Mechanical Systems and Signal Processing*, YMSSP, No. 2118, 2007.
- [30] Gosiewski Z., Mystkowski A., Sterowanie wirnikiem łożyskowanym magnetycznie w obróbce powierzchni  $n$ -falowych, *PAR 11/2005*, str. 46-50, Warszawa, 2005.
- [31] Gosiewski Z., Mystkowski A., Robust control of active magnetic suspension analysis and experimental results, *2nd International Conference Mechatronic Systems and Materials (MSM)*, Kraków, 2006.
- [32] Gosiewski Z., Mystkowski A., Optymalne sterowanie odporne położeniem wirnika w aktywnym łożysku homopolarnym, *Wyd. Materiały konferencji Automaticon'2007*, Warszawa, 2007.
- [33] Grimble M.J., Optimal restricted structure control with prespecified gain or phase margins, *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, Vol. 151, No. 3, pp. 271-277, 2004.
- [34] Grimble M.J., Restricted structure optimal linear estimators, *IEE Proceedings: Vision, Image and Signal Processing*, Vol. 151, No. 5, pp. 400-408, 2004.
- [35] Grimble M.J., Restricted structure predictive optimal control, *Optimal Control Applications and Methods*, Vol. 25, No. 3, pp. 107-145, 2004.
- [36] Habermann H., Liard G., Practical Magnetic Bearings, *IEEE Spectrum*, Vol. 16, No. 9, 1979.
- [37] Hu T., Lin Z., Allaire P.E., Reducing Power Loss In Magnetic Bearings by Optimizing Current Allocation. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 40, No. 3, pp. 1625-1635, 2004.
- [38] Hull J.R., Turner L.R., Magnetomechanics of Internal-Dipole, Halbach-Array Motor/Generators, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 36, No. 4, pp. 2004–2011, 2000.
- [39] Hyde R.A., Glover K., The Application of Scheduled  $H_\infty$  Controllers to a VSTOL Aircraft, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol.38, No.7, pp.1021-1039, 1993.
- [40] International Standard Norm ISO 14839-1, 2002.
- [41] Jansen R., DiRusso E., Passive Magnetic Bearing with Ferrofluid Stabilization, *NASA TM-107154*, 1996.
- [42] Jeffrey B., *Linear Optimal Control  $H_2$  and  $H_\infty$  Methods*, Addison-Wesley, 1999.
- [43] Kasarda M., An Overview of Active Magnetic Bearing Technology and Applications, *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 32, No. 2, 2000.

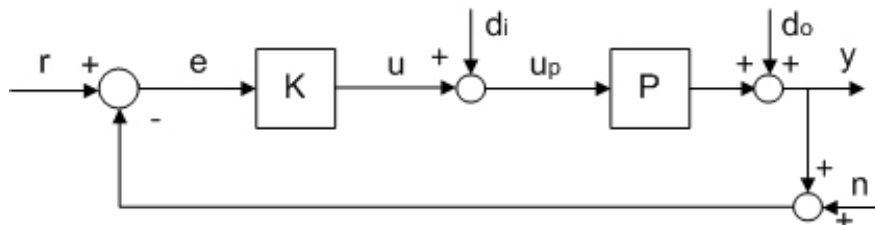
- [44] Kasarda M., Allaire P., Norris P., Mastrangelo C., Maslen E., Experimentally Determined Rotor Power Losses in Homopolar and Heteropolar Magnetic Bearings, *IGTI*, 98-GT-317, 1998.
- [45] Knopse C.R., Hope R.W., Fedigan S.J., Williams R. D., Experimental in the Control of Unbalance Response Using Magnetic Bearings, *Mechatronics*, 55, pp. 385-400, 1995.
- [46] Lantto E., *Robust Control of Magnetic Bearings in Subcritical Machines*, Dissertation, Helsinki University of Technology, 1999.
- [47] Lanzon A., Tsiotras P., Robust Control of Energy Momentum wheels Supported on Active Magnetic Bearings Using  $H_\infty$  Loop-Shaping and  $\mu$ -Synthesis, *15<sup>th</sup> Triennial World Congress*, Barcelona, IFAC, 2002.
- [48] Laub A.J., Schur Method for Solving Algebraic Riccati Equations, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 24, No. 6, pp. 913-921, 1979.
- [49] Lih-Chang L., Tzyh-Biau G., Feedback Linearization and Fuzzy Control for Conical Magnetic Bearings, *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, Vol. 5, No. 4, pp. 417-426, 1997.
- [50] Liu T., Hua H., Zhang Z., Robust control of plate vibration via active constrained layer damping, *Thin-Walled Structures*, Elsevier Ltd, Vol. 42, Issue 3, pp. 427-448, 2004.
- [51] Maciejowski J.M., *Multivariable Feedback Design*, Addison Wesley, 1989.
- [52] Majecki P., Grimble M.J., GMV and restricted-structure GMV controller performance assessment – Multivariable, *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 697-702, 2004.
- [53] Matsuda, K., Okada Y., Self-sensing Magnetic Bearing using Principle of Differential Transformer, *Fifth International Symposium on Magnetic Bearings*, Kanazawa, Japan, pp. 107-112, 1996.
- [54] Matsumura F., Fujita M., Okawa K., Modeling and Control of Magnetic Bearing Systems achieving a Rotation Around the Axis of Inertia, *Proceeding of the 2<sup>nd</sup> International Symposium on Magnetic Bearings*, Tokyo, Japan, pp. 273-280, 1990.
- [55] Mizuno T., Higuchi T., Control of Magnetic Bearing Using the Observer for Unbalance, *Electrical Engineering in Japan*, 112, No. 2, pp. 95-104, 1992.
- [56] Mizuno, T., Namiki H., Araki K., Self-Sensing Operations of Frequency-Feedback Magnetic Bearings, *Fifth International Symposium on Magnetic Bearings*, Kanazawa, Japan, pp.119-123, 1996.
- [57] Morari M., Zafiriou E., *Robust Process Control*, Prentice Hall Inc., 1989.
- [58] Murphy B.T., Ouroua H., Caprio M.T., Herbst J.D., Permanent Magnet Bias, Homopolar Magnetic Bearings for a 130 kW-hr Composite Flywheel, *The Ninth International Symposium on Magnetic Bearings (ISMB9)*, Lexington, KY, USA, 2004.
- [59] Namerikawa T., Fujita M., Matsumura F., Uncertainty Structure and  $\mu$ -Design of a Magnetic Suspension System, *Proc. of the Sixth Int. Symp. on Magnetic Bearings*, pp.439-448, 1998.
- [60] Namerikawa T., Fujita M., Robust Performance of Uncertain Magnetic Bearings, *Proc. of the 45th ASME Int. Gas Turbine & Aeroengine Technical Congress, Exposition and Users Symposium*, 2000-GT-406, Munich, Germany, 2000.
- [61] Namerikawa T., Shinozuka W.,  $H_\infty$  Control of the Magnetic Bearing Considering Initial State Uncertainties, *Proc. of the 8th Int. Workshop on Advanced Motion Control*, pp. 275-280, Kawasaki, Japan, 2004.
- [62] Namerikawa T., Shinozuka W., Fujita M., Disturbance and Initial State Uncertainty Attenuation Control for Magnetic Bearings, *Proc. of the 9th Int. Symposium on Magnetic Bearings*, 2004.
- [63] Nichols R.A., Reichert R.T., Rugh W.J., Gain Scheduling for  $H_\infty$  Controllers: A Flight Control Example, *IEEE Trans. Cont. Sys. Tech*, Vol.1, No. 2, pp. 69-79, 1993.

- [64] Noh M.D., Maslen E.H., Position Estimation in Magnetic Bearings Using Inductance Measurements, *Proc. Magnetic Bearings Industrial Conf.*, Alexandria, VA, pp. 249-256, 1995.
- [65] Noh M.D., Maslen E.H., Self-Sensing Magnetic Bearings – Effects of Saturation, *Fifth International Symposium on Magnetic Bearings*, Kanazawa, Japan, 1996.
- [66] Ohji T., Mukhopadhyay S.C., Yamada S., Permanent Magnet Bearings for Horizontal- and Vertical-Shaft Machines: A Comparative Study, *Journal of Applied Physics*, Vol. 31, 8, pp. 4648–4650, 1999.
- [67] Ordys A., Grimble M.J., Uduehi D., Majecki P., Restricted structure control loop performance assessment and benchmarking, *IEE*, 8-1, London, UK, 2002.
- [68] Packard A., Doyle J., The Complex Structured Singular Value, *Automatica*, Vol. 29, No. 1, pp. 71-109, 1993.
- [69] Saberi A., Sannuti P., Chen B.M, *H<sub>2</sub> Optimal Control Series in Systems and Control Engineering*, Prentice Hall, 1995.
- [70] Safonov M.G., Limebeer D.J.N., Chiang R.Y., Simplifying the H<sub>∞</sub> Theory via Loop Shifting, Matrix Pencil and Descriptor Concepts, *Int. J. Control*, Vol. 50, No. 6, pp. 2467-2488, 1989.
- [71] Savkin A., Petersen R., Robust H<sub>∞</sub> Control of Uncertain Systems with Structured Uncertainty, *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control*, Vol. 6, No. 3, pp. 1-14, 1996.
- [72] Schaefer F., Drenkard L., Passive Magnetic Bearings with Mantelfeld- structure, *7th International Symposium on Magnetic Suspension Technology*, Japan, 2003.
- [73] Schweitzer G., Active magnetic bearings – chances and limitations, *8<sup>th</sup> Int. Symposium on Magnetic Bearings*, Mito, Japan, 2002.
- [74] Schweitzer G., Characteristics of a Magnetic Rotor Bearing for Active Vibration Control, Paper C239/76, *First International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*, 1976.
- [75] Schweitzer G., Siegwart R., Herzog R., Proceedings of *The Fourth International Symposium on Magnetic Bearings*, Verlag der Fachvereine (vdf), ETH-Zurich (Swiss Federal Institute of Technology), Zurich, Switzerland, 1994.
- [76] Schweitzer G., Siegwart R., Proceedings of *The Fourth International Conference on Motion and Vibration Control*, ETH-Zurich (Swiss Federal Institute of Technology), Zurich, Switzerland, 1998.
- [77] Schweitzer G., Siegwart R., Lösch F., Berksun R., Proceedings of *The Seventh International Symposium on Magnetic Bearings*, ETH-Zurich (Swiss Federal Institute of Technology), Zurich, Switzerland, 2000.
- [78] Schweitzer G., Bleuler H., Traxler A., *Active Magnetic Bearings. Basics, Properties and Applications of Active Magnetic Bearings*, Verlag der Fachvereine (vdf), ETH-Zurich (Swiss Federal Institute of Technology), Zurich, Switzerland, 1994.
- [79] Shiau T.N., Sheu G.J., Yang C.D., Vibration and Control of a Flexible Rotor in Magnetic Bearings Using Hybrid Method and H Control Theory, *ASME Journal of Engineering for Gas Turbine and Power*, Vol. 119, pp.178-185, 1997.
- [80] Sivrioglu S., Nonami K., Flywheel Zero-bias AMB System with Force Base Switching Servo Backstepping Control, *9<sup>th</sup> Int. Symp. Magnetic Bearings*, Lexington, Kentucky, USA, 2004.
- [81] Sortore C., Allaire P.E., Maslen E.H., Humphris R.R., Studer P.A., Permanent magnet biased magnetic bearings-design, construction, and testing, *In 2nd International Symposium on Magnetic Bearings*, Tokyo, Japan, 1990.
- [82] Thibeault M., Smith R.S., Magnetic Bearing Measurement Configurations and Associated Robustness and Performance Limitations, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 124 pp. 589-598, 2002.

- 
- [83] Wang Z., Daniel W., Output Feedback Robust  $H_\infty$  Control with D-stability and Variance Constraints Parameterization Approach, *Journal of Dynamic and Control System*, Vol. 11, No. 2, pp. 263-280, 2005.
- [84] Weinmann A., *Uncertain Models and Robust Control*, Springer, 1991.
- [85] www.worldpumps.com.
- [86] Yang Ch., Knospe C., Tsiotras P., Optimal Control of a Magnetic Bearing without Bias Flux Using Finite Voltage, *Optimal Control - Applications and Methods*, Vol. 19, pp. 227-246, 1998.
- [87] Yang Ch., Knospe C., Tsiotras P., Optimal Control of a Magnetic Bearing without Bias Flux Using Finite Voltage, *Optimal Control - Applications and Methods*, Vol. 19, pp. 227-246, 1998.
- [88] Yang Z. J., Minashima M., *Robust Nonlinear Control of a Feedback Linearizable Voltage-Controlled Magnetic Levitation System*, Kyushu University Japan, 2000.
- [89] Yi J.H., Park K.H., Kim S.H., Robust Force Control For A Magnetically Levitated Manipulator Using Flux Density Measured, *Control Eng. Practice*, Vol. 4, No. 7, pp. 957-967, 1996.
- [90] Young P.M., Doyle J.C., Properties of the Mixed  $\mu$  Problem and its Bound, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 41, No. 1, pp. 155-159, 1996.
- [91] Zhou K., Comparison Between  $H_2$  and  $H_\infty$  Controllers, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 37, No. 8, pp. 1261-1265, 1992.
- [92] Zhou K., Doyle J.C., *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall, 1998.
- [93] Zhou K., Doyle J.C., Glover K., *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, 1996.

## Załącznik A. Skalowanie układu sterowania

Skalowanie jest pierwszym etapem analizy właściwości układu sterowania [13, 51, 57]. Pozwala na określenie wartości i zakresu zmian sygnałów występujących w układzie. Skalowanie w układzie sterowania jest niezbędne z uwagi na dopasowanie poziomu sygnałów dla uproszczenia procesu modelowania. Dla potrzeb procesu skalowania przyjmuje się liniowy model obiektu. Na rys. A.1 przedstawiono typową konfigurację układu sterowania ze sprzężeniem zwrotnym.



Rys. A.1. Ogólny schemat układu sterowania z sprzężeniem zwrotnym

Sygnał przenoszenia układu oraz sygnał uchybu można opisać następująco:

$$\hat{y} = \hat{P}\hat{u}_p + \hat{W}_o\hat{d}_o; \quad \hat{e} = \hat{r} - \hat{y}, \quad (\text{A.1})$$

gdzie:

- $P$  – obiekt,
- $K$  – regulator,
- $W_o$  – model zaburzeń obiektu,
- $r$  – sygnał zadany,
- $e$  – uchyb regulacji,
- $y$  – sygnał wyjściowy (mierzony),
- $n$  – szum,
- $u$  – sygnał sterujący,
- $u_p$  – sygnał wejściowy obiektu,
- $d_i$  – zakłócenie podane na wejście obiektu,
- $d_o$  – zakłócenie podane na wyjście obiektu,
- znak ” $\hat{\phantom{x}}$ ” oznacza zmienną skalowaną.

Praktycznym podejściem do skalowania jest uzyskanie sygnału o wartości mniejszej od jedności. W tym celu dana zmienna jest dzielona przez jej wartość maksymalną. Dla sygnału zakłócenia i sygnału wejściowego, należy użyć zmiennych skalowanych w postaci:

$$d_o = \hat{d}_o / \hat{d}_{o\max}; \quad u_p = \hat{u}_p / \hat{u}_{p\max}, \quad (\text{A.2})$$

gdzie:

- $\hat{d}_{o\max}$  - największa uwzględniona zmiana zakłócenia,
- $\hat{u}_{p\max}$  - największa uwzględniona zmiana sygnału sterowania.

Maksymalne wartości sygnałów są dobierane na podstawie dokładnej analizy układu. Ponieważ głównym zadaniem regulacji jest minimalizacja wartości uchybu  $\hat{e}$ , dlatego przeprowadza się skalowanie z uwzględnieniem maksymalnego uchybu regulacji. Przeskalowane sygnały układu sterowania z uwzględnieniem uchybu regulacji są opisane następująco:

$$y = \widehat{y}/\widehat{e}_{\max}; r = \widehat{r}/\widehat{e}_{\max}; e = \widehat{e}/\widehat{e}_{\max}, \quad (\text{A.3})$$

gdzie:

$\widehat{e}_{\max}$  - największy uwzględniony uchyb,

$\widehat{r}_{\max}$  - największa uwzględniona zmiana sygnału zadanego.

Po przeprowadzeniu szeregu przekształceń otrzymujemy model przeskalowanego układu sterowania:

$$y = Pu_p + W_o d_o; e = r - y, \quad (\text{A.4})$$

gdzie:

$P = \mathbf{D}_e^{-1} \widehat{P} \mathbf{D}_u$ , gdzie:  $\mathbf{D}_e = \widehat{e}_{\max}$ ,  $\mathbf{D}_u = \widehat{u}_{p\max}$  są wektorami skalowania,

$W_o = \mathbf{D}_e^{-1} \widehat{W}_o \mathbf{D}_{d_o}$ , gdzie:  $\mathbf{D}_{d_o} = \widehat{d}_{o\max}$  jest wektorem skalowania.

Jeżeli przyjmiemy, że  $d_i = 0$  to zadanie regulatora sprowadza się do przewidywania zmiany sygnału  $u$  w zależności od wpływu zakłócenia  $d_o$ , dlatego  $u_p = u$ . W rzeczywistości algorytm regulacji bazuje na informacjach dostępnych z regulatora  $K$ . Aby dokładnie zaprojektować regulator należy dysponować modelem zakłóceń  $W_o$ , znać postać sygnału wymuszenia oraz właściwości obiektu.

## Załącznik B. Normy sygnałów, macierzy i układów

### Normy sygnałów i wektorów

Norma sygnału służy do oceny wielkości sygnału zmiennego w czasie. Norma sygnału może określać jego intensywność, energię lub moc. Norma dowolnego rzędu  $p$  wektora  $\mathbf{x}$  jest wyznaczana następująco [92]:

$$\|\mathbf{x}\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \text{ dla } 1 \leq p \leq \infty. \quad (\text{B.1})$$

Norma wektora oznacza jego długość. Normy kolejnych rzędów dla wektora są następujące:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \|\mathbf{x}\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \\ \|\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

### Normy macierzy

Norma dowolnego rzędu  $p$  macierzy  $\mathbf{A}$  jest wyznaczana następująco:

$$\|\mathbf{A}\|_p := \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}. \quad (\text{B.3})$$

Normy kolejnych rzędów dla macierzy wyznaczają się następująco:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \\ \|\mathbf{A}\|_2 &= \sqrt{\text{Trace}(\mathbf{A}^* \mathbf{A})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2} \\ \|\mathbf{A}\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

### Normy układów – norma $H_\infty$

Często właściwości obiektu określa się na podstawie pomiaru sygnału błędu. W celu określenia wartości dowolnego sygnału możemy wyznaczyć jego normę. Minimalizacja normy  $H_\infty$  dla danej transmitancji oznacza żądanie, aby charakterystyka częstotliwościowa transmitancji miała jak najmniejszą wartość maksymalną dla wszystkich częstotliwości.

Dla układu SISO opisanego przez  $G$ , norma  $H_\infty$  jest następująca [92]:

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega \in R} |G(j\omega)|. \quad (\text{B.5})$$

Dla układu MIMO norma  $H_\infty$  jest następująca:

$$\|\mathbf{G}\|_\infty = \sup_{\omega \in R} \sigma_{\max} |\mathbf{G}(j\omega)|. \quad (\text{B.6})$$

Wyznaczanie normy  $H_\infty$  sprowadza się do znalezienia minimalnej wartości współczynnika  $\gamma$  (współczynnik kosztów lub współczynnik optymalizacji) dla którego macierz  $\mathbf{H}$  (Hamiltonian) nie posiada wartości własnych na osi urojonej. Macierz Hamiltonianu jest opisana następująco:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{C}^T(\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^T)\mathbf{C} & (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{C})^T \end{bmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

gdzie:

$$\mathbf{R} = \gamma^2\mathbf{I} - \mathbf{D}^T\mathbf{D} \text{ i } \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} - \text{macierze układu w przestrzeni stanu.}$$

Oznacza to znalezienie  $\gamma$ , dla którego spełniony jest warunek:

$$\|G\|_{\infty} < \gamma_{\min}. \quad (\text{B.8})$$

### Normy układów – norma $H_2$

Norma  $H_2$  dla układu jest określona jako wariancja sygnału wyjściowego przy podaniu na wejście układu szumu białego. Definicja kwadratury normy jest następująca [92]:

$$\|H\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Trace}[G^T(j\omega)G(j\omega)]d\omega. \quad (\text{B.9})$$

Współczynnik  $\frac{1}{2\pi}$  jest dodany w celu otrzymania zgodności normy  $\|H\|_2$  z normą odpowiedzi impulsowej obiektu  $G(s)$ .

Norma  $H_2$  istnieje, jeżeli macierz  $\mathbf{D}$  układu jest równa zero, oznacza to brak bezpośredniej transmisji sygnału wejściowego (np. szumu białego) na wyjście.

Jednym ze sposobów wyznaczenia normy  $H_2$  dla obiektu opisanego macierzami:  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  jest obliczenie śladu macierzy:

$$\|H\|_2^2 = \text{Trace}(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T) = \text{Trace}(\mathbf{B}^T\mathbf{Q}\mathbf{B}), \quad (\text{B.10})$$

gdzie:

$$\text{Trace}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} - \text{ślad macierzy } \mathbf{A} \text{ (suma elementów na przekątnej),}$$

$\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$  jest symetrycznym rozwiązaniem następującego równania *Lapunowa* (gramian obserwowalności):  $\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}$ ,

$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$  jest symetrycznym rozwiązaniem następującego równania *Lapunowa* (gramian sterowalności):  $\mathbf{A}^T\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A} + \mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{0}$ .

Aby wyznaczyć gramiany sterowalności i obserwowalności obiekt sterowania musi być stabilny.

### Uwaga

Norma  $\|H\|_{\infty}$  wywołuje normę  $\|H\|_2$ . Oznacza to, że przy istnieniu normy  $\|H\|_2$  norma  $\|H\|_{\infty}$  nie zawsze musi istnieć.

### Dowód:

Norma  $\|H\|_2$  układu o transmitancji  $G(s)$  odpowiada opisowi układu w przestrzeni Hilberta (przestrzeń iloczynów skalarnych zupełna w normie generowanej przez ten iloczyn), definiowanej w następujący sposób:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^* \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i. \quad (\text{B.11})$$

Norma  $H_\infty$  układu odpowiada opisowi tego układu w przestrzeni Banacha. Ponieważ każda przestrzeń Hilberta jest podprzestrzenią Banacha, dlatego prawdziwe jest stwierdzenie, że norma:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}, \quad (\text{B.12})$$

należy do przestrzeni Banacha oraz ta sama przestrzeń z normą określoną wzorem:

$$\|\mathbf{x}\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad (\text{B.13})$$

jest przestrzenią Banacha.

## Załącznik C. Badania odporności regulatorów PID, $H_\infty$ i $\mu$

Praca wielu przemysłowych obiektów regulacji (w tym łożysk magnetycznych) odbywa się w kilku różnych trybach. Oznacza to, że obiekt taki nie może być zdefiniowany jednym modelem, ponieważ jego dynamika zmienia się w zależności od trybu jego pracy. Każdy z trybów pracy obiektu zapisany jest inną transmitancją operatorową. W takim przypadku bardzo trudno jest zaprojektować regulator, który zapewni stabilną pracę obiektu we wszystkich jego trybach pracy. Jeśli taki regulator istnieje, to określany jest regulatorem odpornym.

Na przykład każdy z obiektów opisanych następującymi transmitancjami:

$$P_1(s) = \frac{s-1}{3s-2}, P_2(s) = \frac{-s-2}{s-3}, P_3(s) = \frac{-3s-1}{s-1}, \quad (C.1)$$

może być stabilizowany przez jeden i ten sam regulator o transmitancji:

$$K(s) = \frac{2.6052s + 3.4019}{-1.1480s - 1.4675}. \quad (C.2)$$

Regulator  $K(s)$  nazywamy regulatorem odpornym dla obiektu, którego model w kolejnych stanach pracy opisany jest za pomocą transmitancji:  $P_1(s)$ ,  $P_2(s)$  i  $P_3(s)$ .

### C.1. Teoria odpornej stabilności dla układu zawieszenia magnetycznego

Odporność układu sterowania jest ściśle powiązana z niepewnością obiektu, która musi spełniać następujący warunek [92]:

$$\|\Delta\|_\infty \leq 1. \quad (C.3)$$

Przyjmuje się, że układ jest odpornie stabilny (ang. *Robust Stable*), jeżeli dla wszystkich niepewności opisanych normą (C.3) układ zamknięty będzie stabilny. Warunek odpornej stabilności układu opisuje teoria o *małym wzmocnieniu* (ang. *Small Gain Theorem*) [92], która mówi kiedy układ zamknięty z modelem niepewności jest stabilny. Teoria ta jest zapisana następującym warunkiem:

$$\forall \Delta \in H_\infty, \|l_{m/a}^{-1} \Delta\|_\infty < 1 \text{ jeżeli } \|l_{m/a} F(P, K)\|_\infty \leq 1, \quad (C.4)$$

gdzie:

$l_{m/a}$  – jest ograniczeniem modelu niepewności odpowiednio: multiplikatywnej lub addytywnej.

Z warunku (C.4) wynika, że norma  $\|l_{m/a}(j\omega)\|$  powinna być tak minimalna jak to możliwe w celu ograniczenia wartości maksymalnej modelu niepewności powodującej niestabilność układu zamkniętego.

Analiza teorii *małego wzmocnienia* prowadzi do następującego uogólnienia:

$$\forall \Delta(s) \in \mathbb{R}H_\infty \|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma \Leftrightarrow \|PK\|_\infty \leq \gamma, \quad (C.5)$$

gdzie:

$\gamma$  – współczynnik minimalizowany w drodze poszukiwań regulatora odpornego i  $\gamma < 1$ .

Drugie podejście służące do badania stabilnej odporności układu z niepewnością można zapisać następującym twierdzeniem:

Układ zamknięty  $M(s)$  z modelem niepewności jest stabilny dla wszystkich modeli niepewności  $\Delta(s)$ , jeżeli spełniony jest następujący warunek:

$$\|\Delta(j\omega)\|_\infty < \frac{1}{\|M(j\omega)\|_\infty}. \quad (\text{C.6})$$

Analiza powyższej teorii pozwala sformułować kilku praktycznych uwag:

- małe zmiany w modelu niepewności  $\Delta(s)$  nie powodują dużych zmian wartości  $\bar{\sigma}(\Delta(s))$  i vice versa,
- istnieją modele niepewności  $\Delta(s)$ , dla których  $\|\Delta(j\omega)\|_\infty = \frac{1}{\|M(j\omega)\|_\infty}$ , wtedy układ zamknięty nie jest stabilny asymptotycznie.

W celu udowodnienia powyższych teorii stabilności zostały obliczone wartości szczególne funkcji:  $L(s)$ ,  $S(s)$ ,  $T(s)$  i obiektu  $P(s)$  z niepewnością. Rozważmy model zawieszenia magnetycznego dla sterowania w jednej osi wirnika, który można zapisać następującą transmitancją:

$$P(s) = \frac{2k_i}{ms^2 - 2k_s} = \frac{560}{22s^2 - 4.6 \cdot 10^6}. \quad (\text{C.7})$$

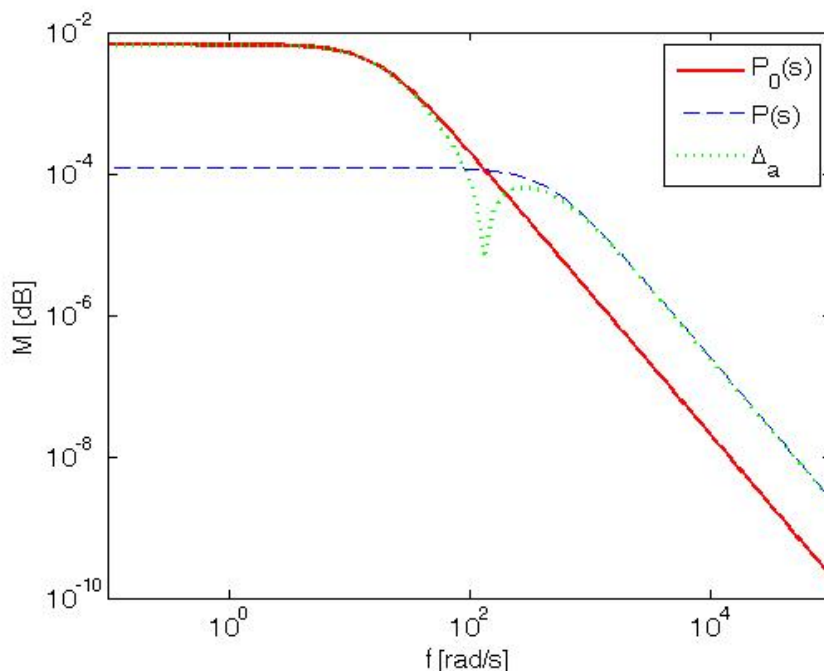
Przyjmujemy model nominalny obiektu zapisany następująco:

$$P_0(s) = \frac{1}{ms^2} = \frac{1}{22s^2}. \quad (\text{C.8})$$

Model niepewności addytywnej obliczamy następująco:

$$\Delta_a(s) = P(s) - P_0(s) = \frac{12276s^2 + 9.2 \cdot 10^6}{484s^4 - 1.012 \cdot 10^8 s^2}. \quad (\text{C.9})$$

Na rys. C.1 przedstawiono szczególne wartości modelu nominalnego obiektu, modelu rzeczywistego obiektu i modelu niepewności addytywnej.



Rys. C.1. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe

Z rys. C.1 widać, że warunek (C.6) nie jest spełniony, ponieważ dla  $\|\Delta\|_\infty = \infty$   $\|P(j\omega)\|_\infty = 1.2174 \cdot 10^{-4} \approx 0$ . Oznacza to, że przyjęty model nominalny obiektu, a w efekcie model niepewności nie spełnia założeń teorii odporności. Natomiast dla modelu nominalnego obiektu zapisanego transmitancją:

$$P_0(s) = \frac{2}{s^2 - 300}, \quad (\text{C.10})$$

warunek (C.6) jest spełniony ponieważ  $\|\Delta\|_\infty = 6.5449 \cdot 10^{-3} \|P(j\omega)\|_\infty = 1.2174 \cdot 10^{-4} \approx 0$ .

Z powyższej analizy wypływa następujący wniosek:

*Podczas projektowania modelu niepewności dla danego obiektu należy pamiętać, aby model ten odzwierciedlał właściwości obiektu nieopisane modelem nominalnym i nie przekraczał wartości dopuszczalnych, dla których istnieje regulator odporny.*

## C.2. Badanie odpornej stabilności w układzie sterowania z regulatorem PID

W celu przetestowania zakresu odpornej stabilności układu zamkniętego z regulatorem PID należy wyznaczyć funkcje nominalne: wrażliwości  $S_0(j\omega)$  i komplementarnej wrażliwości  $T_0(j\omega)$ , które są opisane następująco:

$$\begin{aligned} S_0(j\omega) &= (I + L_0(j\omega))^{-1} \\ T_0(j\omega) &= L_0(I + L_0(j\omega))^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

gdzie:

$L_0(j\omega) = K(j\omega) \cdot P_0(j\omega)$  – nominalna funkcja układu otwartego,

$K$  – regulator,

$P_0$  – nominalny model obiektu.

Transmitancja widmowa nominalnego modelu obiektu jest następująca:

$$P_0(j\omega) = \frac{2k_{i0}}{m(j\omega)^2 - 2k_{s0}} \quad (C.12)$$

Funkcja  $L_0(j\omega)$  dla przyjętych danych:  $k_i=280$  [N/A],  $k_s=2.3 \cdot 10^6$  [N/m],  $m=22$  [kg] i wyznaczonego regulatora PID wynosi odpowiednio:

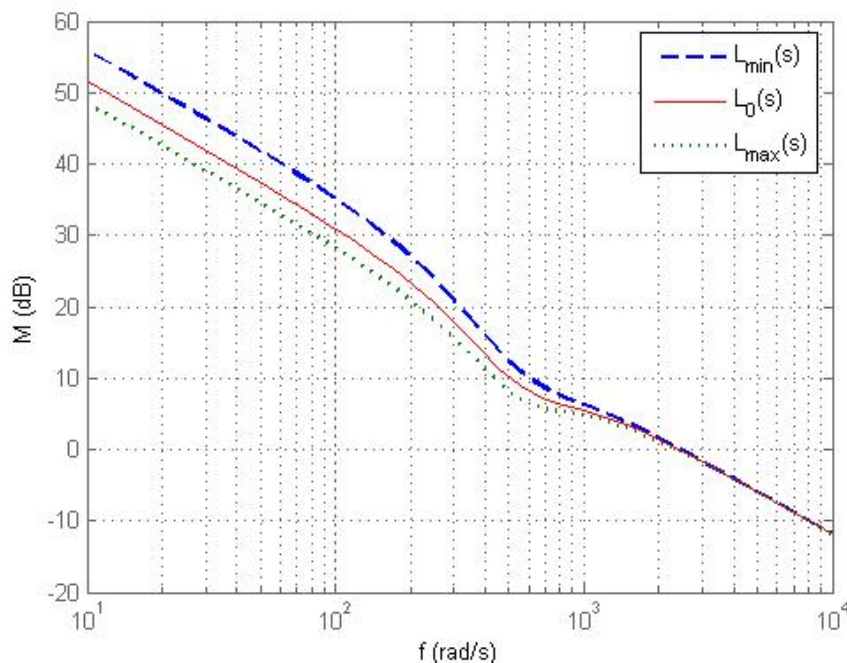
$$L_0(j\omega) = \frac{56320(j\omega)^2 + 3.14 \cdot 10^7(j\omega) + 1.7 \cdot 10^{10}}{22(j\omega)^3 - 4.6 \cdot 10^6(j\omega)} \quad (C.13)$$

Natomiast wartości funkcji  $S_0(j\omega)$  i  $T_0(j\omega)$  są następujące:

$$S_0(j\omega) = \frac{22(j\omega)^3 - 4.6 \cdot 10^6(j\omega)}{22(j\omega)^3 + 56320(j\omega)^2 + 2.68 \cdot 10^7(j\omega) + 1.73 \cdot 10^{10}} \quad (C.14)$$

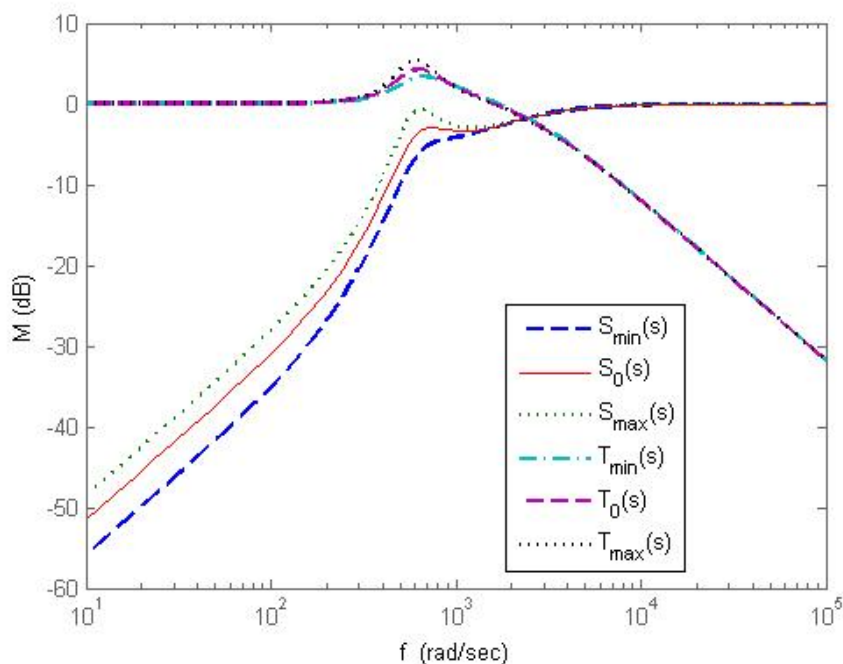
$$T_0(j\omega) = \frac{1.2 \cdot 10^6(j\omega)^5 + 6.9 \cdot 10^8(j\omega)^4 + 1.2 \cdot 10^{11}(j\omega)^3 - 1.4 \cdot 10^{14}(j\omega)^2 - 7.96 \cdot 10^{16}(j\omega)}{484(j\omega)^6 + 1.3 \cdot 10^6(j\omega)^5 + 5 \cdot 10^8(j\omega)^4 + 1.2 \cdot 10^{11}(j\omega)^3 - 1.2 \cdot 10^{14}(j\omega)^2 - 8 \cdot 10^{16}(j\omega)} \quad (C.15)$$

Na rys. C.2 przedstawiono charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową funkcji  $L(s)$  dla zaburzenia wartości parametrów:  $k_i$ ,  $k_s$   $\pm 40\%$ .



Rys. C.2. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa funkcji:  $L_{\min}$  – minimalne wartości  $k_i$  i  $k_s$ ,  $L_0$  – nominalne wartości  $k_i$  i  $k_s$ ,  $L_{\max}$  – maksymalne wartości  $k_i$  i  $k_s$

Na rys. C.3. przedstawiono charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową funkcji:  $S(s)$  i  $T(s)$  dla zaburzenia wartości parametrów:  $k_i$ ,  $k_s$   $\pm 40\%$ .

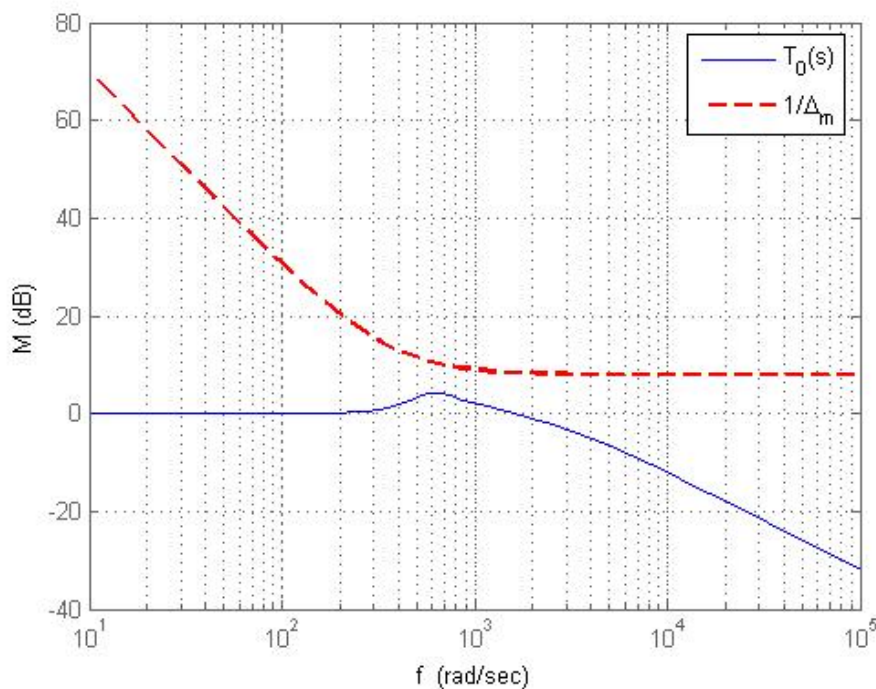


Rys. C.3. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa funkcji:  $T_{min}$ ,  $S_{min}$  – minimalne wartości  $k_i$  i  $k_s$ ,  $T_0$ ,  $S_0$  – nominalne wartości  $k_i$  i  $k_s$ ,  $T_{max}$ ,  $S_{max}$  – maksymalne wartości  $k_i$  i  $k_s$

Stabilna odporność dla układu zamkniętego zostanie zbadana przyjmując multiplikatywny model niepewności. W takim wypadku warunek odpornej stabilności jest następujący:

$$|T_0(j\omega)| < \frac{1}{|\Delta_m(j\omega)|}. \quad (C.16)$$

Na rys. C.4 przedstawiono częstotliwościową reprezentację warunku (C.16).



Rys. C.4. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa funkcji  $T_0(s)$  i modelu niepewności multiplikatywnej

Z rys. C.4 widać, że warunek odpornej stabilności układu jest spełniony. Linia ciągła określa obszar dobrych właściwości pracy układu, natomiast linia przerywana oznacza granicę odporności układu.

### C.3. Badanie odpornej stabilności układu z niepewnością dla regulatora $H_\infty$

Odporne właściwości układu z niepewnością można wyznaczyć za pomocą procedury  $[stabmarg, destabunc, report, info] = robuststab(sys, opt)$  [3]. Jest to rozbudowane narzędzie, które oferuje oprogramowanie Matlab. Jeżeli margines zapasu odpornej stabilności jest większy od 1, to układ niepewny jest stabilny dla wszystkich wartości modelowanych niepewności. Jeżeli margines jest mniejszy od 1, to dopuszczalne wartości modeli niepewności mogą prowadzić do niestabilności całego układu.

W wyniku obliczeń w parametrze *stabmarg* podane są następujące informacje:

- ograniczenie dolne marginesu stabilności (ang. *Lower Bound*) – jeżeli wartość tego parametru jest większa od 1, to układ niepewny ma zagwarantowaną stabilność dla wszystkich wartości modeli niepewności,
- ograniczenie górne marginesu stabilności (ang. *Upper Bound*) – jeżeli wartość tego parametru jest mniejsza od 1, to układ niepewny nie jest stabilny,
- częstotliwość krytyczna (ang. *Critical Frequency*) – częstotliwość, powyżej której pojawia się niestabilność.

Parametr *destabunc* podaje elementy niepewne układu o wartościach bliskich nominalnym powodujących niestabilność całego układu.

Parametr *report* jest polem tekstowym opisującym wynik analizy odporności układu.

Parametr *info* podaje następujące informacje:

- określenie wpływu modeli niepewnych na wrażliwość całego układu sterowania,
- zakres częstotliwości analizy układu,
- niewłaściwe wartości niepewności (ang. *Bad Uncertain Values*), tzn. wartości modeli niepewności bliskie ich wartościom nominalnym, które powodują migrację biegunów układu poza zakres częstotliwości granicznej (granica stabilności układu).

Procedura  $[perfmarg, wcu, report, info] = robustperf(sys)$  [3] wyznacza odporne właściwości układu z niepewnością, tzn. zakres w jakim może zmieniać się wielkość modelu niepewności obiektu, która nie spowoduje niestabilności układu zamkniętego. Procedura *robuststab* zwraca zakresy odpornych właściwości układu (rys. C.4) i częstotliwość krytyczną.

Badania symulacyjne wykonano dla następujących danych:

- obiekt nominalny:  $P_0(s) = \frac{3.78 \cdot 10^4}{3s^2 - 2.1 \cdot 10^5}$ ,

- funkcje wagowe:  $W_1(s) = \frac{0.5s + 100}{s + 1}$ ,  $W_2(s) = \frac{s + 3.3 \cdot 10^4}{0.01s + 1 \cdot 10^7}$ ,  $W_3(s) = \frac{s + 4545}{0.01s + 10000}$ .

Dla tak skonstruowanego układu rozbudowanego wyznaczono regulator  $H_\infty$ , którego transmitancja jest następująca:

$$H_\infty(s) = \frac{5.76 \cdot 10^4 s^4 + 5.7 \cdot 10^{13} s^3 + 5.7 \cdot 10^{19} s^2 + 1.9 \cdot 10^{22} s + 8.1 \cdot 10^{23}}{s^5 + 9.9 \cdot 10^6 s^4 + 9.3 \cdot 10^{12} s^3 + 3.2 \cdot 10^{17} s^2 + 9.8 \cdot 10^{20} s + 9.8 \cdot 10^{20}}. \quad (C.17)$$

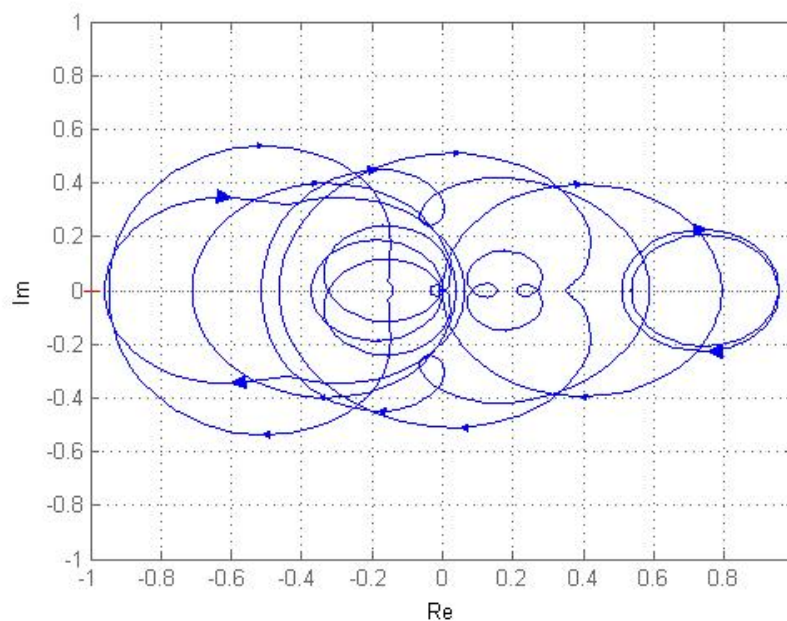
Następnie zbudowano układ zamknięty, w którym obiekt nominalny połączony jest z niepewnością multiplikatywną. Model niepewności multiplikatywnej jest następujący:

$\Delta_m = W_m \Delta$ , gdzie:  $W_m(s) = \frac{2s+2513}{s+5027}$  oraz  $\Delta$  jest niepewnością o ograniczeniu normy

$\|\Delta\|_\infty \leq 1$  opisaną przez procedurę programu Matlab *ultidyn* następująco:

```
Name: 'niezamodelowana_dynamika'
  NominalValue: 0
    Type: 'GainBounded'
    Bound: 1
  SampleStateDim: 1
  AutoSimplify: 'basic'
```

Dla zobrazowania modelu niepewności na rys. C.5 przedstawiono 10 przykładowych próbek modelu w postaci wykresu Nyquista.



Rys. C.5. Charakterystyki Nyquista modelu dynamiki niepewności

Poniżej przedstawiono badania odporności układu zamkniętego z niepewnością multiplikatywną. Wykonanie polecenia *robuststab* daje następujące wyniki:

```
stabmarg =
    UpperBound: 1.2094
    LowerBound: 1.2094
  DestabilizingFrequency: 318.9973
destabunc =
  unmod_dynamic: [1x1 ss]
report =
Uncertain System is robustly stable to modeled uncertainty.
-- It can tolerate up to 121% of the modeled uncertainty.
-- A destabilizing combination of 121% of the modeled uncertainty exists,
  causing an instability at 319 rad/s.
-- Sensitivity with respect to uncertain element ...
  'unmod_dynamic' is 100%. Increasing 'unmod_dynamic' by 25% leads to a 25%
  decrease in the margin.
info =
  Sensitivity: [1x1 struct]
  Frequency: [84x1 double]
  BadUncertainValues: {84x1 cell}
  MussvBnds: [1x2 frd]
  MussvInfo: [1x1 struct]
```

Układ z niepewnością jest odpornie stabilny nawet do 121% zmiany modelu niepewności. Przekroczenie tego zakresu spowoduje niestabilność układu już przy częstotliwości równej 319 [rad/s] zwanej częstotliwością krytyczną.

Procedura *robustperf* dla tego samego układu z niepewnością multiplikatywną daje następujące wyniki:

```
perfmarg =
    UpperBound: 0.4700
    LowerBound: 0.4700
    CriticalFrequency: 318.9973
perfmargunc =
    unmod_dynamic: [1x1 ss]
Report =
Uncertain System achieves a robust performance margin of 0.47.
-- A model uncertainty exists of size 47% resulting in a performance margin
  of 2.13 at 319 rad/sec.
-- Sensitivity with respect to uncertain element ...
  'unmod_dynamic' is 33%. Increasing 'unmod_dynamic' by 25% leads to a 8%
  decrease in the margin.
```

Jak wynika z powyższych informacji parametry *UpperBound* i *LowerBound* są sobie równe i oznaczają punkt przecięcia się funkcji  $1/\Delta$  z funkcją  $T_0$  w dziedzinie częstotliwości (rys. C.4), powyżej częstotliwości punktu przecięcia układ zamknięty jest niestabilny.

#### C.4. Badanie odpornej stabilności układu z niepewnością dla regulatora $\mu$

W tym punkcie dla porównania odpornych właściwości układu zamkniętego przedstawiono badania dla układu zamkniętego z regulatorem  $\mu$ . Dane do symulacji są identyczne jak w punkcie poprzednim.

Badanie procedurą *robuststab* daje następujące wyniki:

```
stabmarg =
    UpperBound: 1.3452
    LowerBound: 1.3452
    DestabilizingFrequency: 203.4440
destabunc =
    niezamodelowana_dynamika: [1x1 ss]
report =
Uncertain System is robustly stable to modeled uncertainty.
-- It can tolerate up to 135% of the modeled uncertainty.
-- A destabilizing combination of 135% of the modeled uncertainty exists,
  causing an instability at 203 rad/s.
-- Sensitivity with respect to uncertain element ...
  'niezamodelowana_dynamika' is 100%. Increasing 'niezamodelowana_dynamika'
  by 25% leads to a 25% decrease in the margin.
info =
    Sensitivity: [1x1 struct]
    Frequency: [98x1 double]
    BadUncertainValues: {98x1 cell}
    MussvBnds: [1x2 frd]
    MussvInfo: [1x1 struct]
```

Natomiast badanie właściwości odpornych funkcją *robustperf* daje następujące wyniki:

```
perfmarg =
    UpperBound: 0.7613
    LowerBound: 0.7610
    CriticalFrequency: 152.4801
perfmargunc =
    niezamodelowana_dynamika: [1x1 ss]
```

## Załącznik D. Redukcja rzędu regulatora

Często rząd zaprojektowanego regulatora odpornego jest dużo większy od rzędu obiektu. Regulator taki może być trudny do zrealizowania fizycznie lub całkowicie nie realizowalny. W takich sytuacjach należy przeprowadzić redukcję stopnia regulatora w celu zmniejszenia jego rzędu. Nowe metody sterowania takie jak sterowanie odporne z minimalizacją normy  $\|H\|_\infty$  wyznaczają regulator równy stopniowi obiektu lub wyższy ze względu na uwzględnione funkcje wagowe. Dzięki redukcji rzędu regulatora możliwa jest realizacja algorytmu sterowania w czasie rzeczywistym z mniejszym okresem próbkowania. Należy przy tym pamiętać, że każda redukcja rzędu regulatora oznacza pominięcie części jego dynamiki. Redukcja rzędu modelu oraz badanie właściwości regulatorów optymalnych zredukowanego rzędu zostało przeprowadzone w wielu pracach [1, 16, 22, 37, 86].

Aby wyznaczony regulator był niższego rzędu przeprowadza się czasami redukcję stopnia obiektu. W tym celu poszukuje się niskiego rzędu transmitancji  $P_a$ , która opisuje aproksymację modelu obiektu  $P$ , tak aby następująca norma była minimalna:

$$\|P - P_a\|_\infty = \min. \quad (\text{D.1})$$

Wyróżnia się 3 metody służące do redukcji stopnia modelu (poszukiwania stabilnej aproksymacji modelu modelem o niższym rzędzie):

- 1) Metoda obcinania symetrycznego (ang. *Truncation Method*).
- 2) Metoda residuum symetrycznego (ang. *Residuum Method*).
- 3) Metoda aproksymacji normy Hankela (ang. *Henkel Norm Method*).

Każda z tych metod pozwala uzyskać stabilny model zredukowanego rzędu.

### D.1. Metoda obcinania symetrycznego

Niech minimalna realizacja układu stabilnego  $P(s)$  będzie wyrażona za pomocą macierzy  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  i wektor stanu o wymiarze  $n$  będzie zdefiniowany następująco:  $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$  gdzie  $\mathbf{x}_2$  jest wektorem o  $k$  stanach, które chcemy wyeliminować. Układ w przestrzeni stanu zapiszemy następująco:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{C}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Każdy układ  $P=(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  możemy zastąpić modelem obcięty  $P_a=(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{D})$ , który spełnia następująca zależność:

$$P(\infty) = P_a(\infty) = \mathbf{D}. \quad (\text{D.3})$$

Jeżeli macierz  $\mathbf{A}$  jest zapisana w formie *Jordana*, wtedy łatwo możemy określić model obcięcia:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \quad (\text{D.4})$$

oraz jeżeli wartości  $\lambda_i$  są uporządkowane tak, że  $|\lambda_1| < |\lambda_2| < |\lambda_3| \dots$ , wtedy różnica między modelem oryginalnym  $P$ , a modelem obciążenia  $P_a$  wynosi:

$$P - P_a = \sum_{i=k+1}^n \frac{c_i b_i^T}{s - \lambda_i}, \quad (\text{D.5})$$

zatem norma jest następująca:

$$\|P - P_a\|_{\infty} \leq \sum_{i=k+1}^n \frac{\overline{\sigma}(c_i b_i^T)}{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|}. \quad (\text{D.6})$$

Należy zauważyć, że błąd aproksymacji modelu zależy od wartości  $c_i b_i^T$  jak również od  $\lambda_i$ . Odległość wartości  $\lambda_i$  od osi urojonej jest realnym wyznacznikiem czy biegun powinien należeć do zredukowanego bieguna. Układ  $P_a = (\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{D})$  nazywamy obciążeniem symetrycznym modelu pełnego rzędu  $P = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ .

## D.2. Metoda residuum symetrycznego

W metodzie symetrycznego obcinania odrzucono stany modelu zapisane wektorem  $\mathbf{x}_2$ . W metodzie residuum symetrycznego założono, że  $\dot{\mathbf{x}}_2 = 0$ . Wtedy układ można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}) \mathbf{x}_1 + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2) \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}) \mathbf{x}_1 + (\mathbf{D} - \mathbf{C}_2 \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Zakładając, że macierz  $\mathbf{A}_{22}$  jest odwracalna, można zapisać macierze residuum układu  $P$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_r &\triangleq \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} \\ \mathbf{B}_r &\triangleq \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_r &\triangleq \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} \\ \mathbf{D}_r &\triangleq \mathbf{D} - \mathbf{C}_2 \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2 \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Model zredukowanego rzędu obiektu będący residuum modelu pełnego rzędu  $P(s)$  jest następujący:

$$P_a(s) = (\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r, \mathbf{D}_r). \quad (\text{D.9})$$

## D.3. Metoda aproksymacji normy Hankela

W metodzie aproksymacji normy Hankela problem jest sformułowany następująco: dla stabilnego modelu  $P(s)$  rzędu  $n$  należy znaleźć zredukowany model  $P_h^k(s)$  rzędu  $k$  taki, że norma Hankela błędu aproksymacji:

$$\|P(s) - P_h^k(s)\|_H \text{ jest minimalna.} \quad (\text{D.10})$$

Norma Hankela dla stabilnego modelu zapisanego transmitancją operatorową  $E(s)$  jest następująca:

$$\|E(s)\|_H \triangleq \sqrt{\lambda(\mathbf{PQ})}, \quad (\text{D.11})$$

gdzie:

$\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$  jest symetrycznym rozwiązaniem równania *Lapunowa* (gramian obserwowalności).

$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$  jest symetrycznym rozwiązaniem równania *Lapunowa* (gramian sterowalności).

Oznacza to znalezienie maksymalnej szczególnej wartości transmitancji  $E(s)$ .

#### D.4. Przykład redukcji rzędu regulatora $H_\infty$ w układzie zawieszenia magnetycznego

Postać regulatora odpornego  $H_\infty$  pełnego rzędu dla układu łożyska magnetycznego z trzema funkcjami wagowymi:  $W_1, W_2, W_3$  jest dana następującą transmitancją:

$$H_\infty(s) = \frac{5102000 (s+1 \cdot 10^6) (s+9998) (s+339.2) (s+9.611)}{(s+5.778 \cdot 10^7) (s+1 \cdot 10^4) (s+1) (s^2+2707s+2.838 \cdot 10^6)}. \quad (\text{D.12})$$

Następnie model regulatora został zredukowany do rzędu 2-go opisanymi powyżej trzema metodami redukcji.

Model zredukowany regulatora metodą obciążenia wynosi:

$$H_\infty(s) = \frac{-1972(s-621.2)}{(s+1354)(s+1)}. \quad (\text{D.13})$$

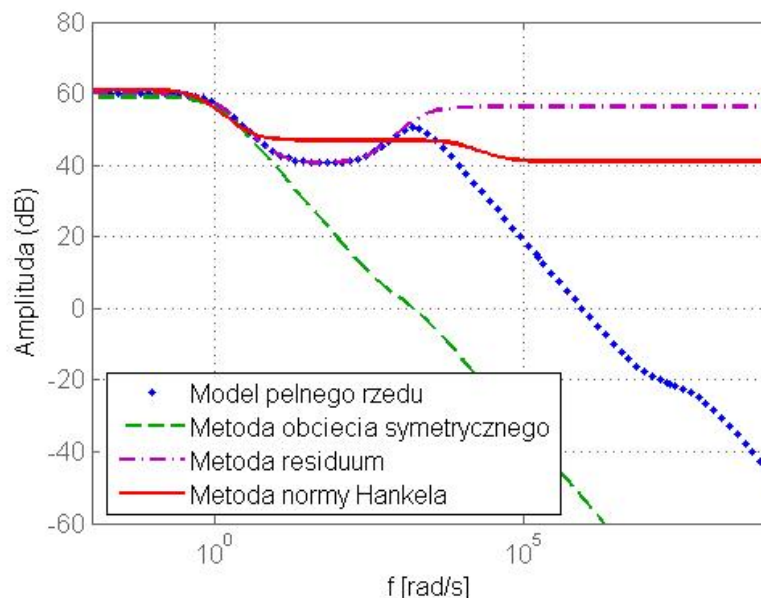
Model zredukowany regulatora metodą residuum wynosi:

$$H_\infty(s) = \frac{653.6 (s+336.9) (s+9.651)}{(s+2096) (s+1)}. \quad (\text{D.14})$$

Model zredukowany regulatora metodą aproksymacji normy Hankela wynosi:

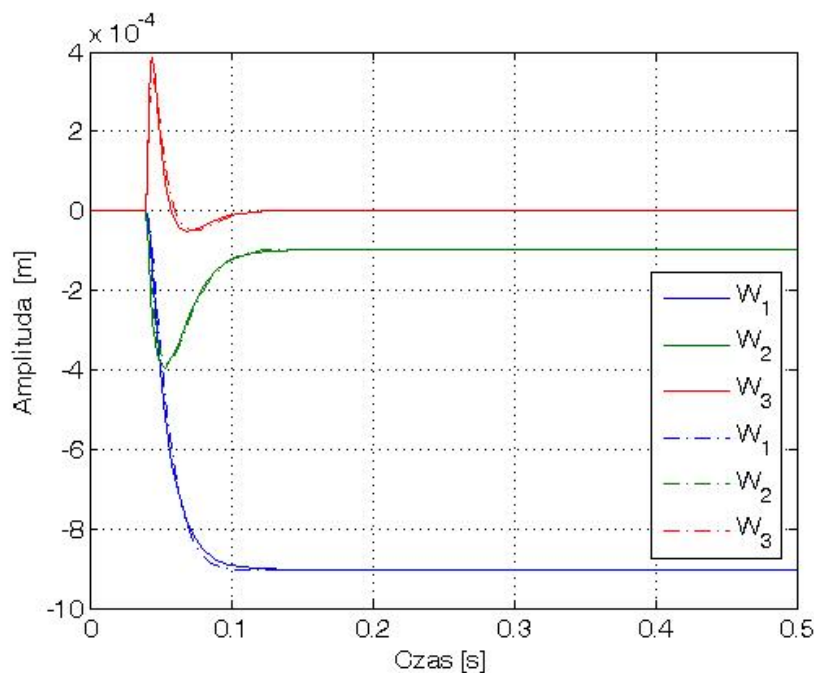
$$H_\infty(s) = \frac{-112.9 (s-2.70 \cdot 10^4) (s+3.06)}{(s+1.38 \cdot 10^4) (s+0.6)}. \quad (\text{D.15})$$

Na rys. D.1 przedstawiono porównanie charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych regulatora pełnego i zredukowanego rzędu trzema metodami redukcji.



Rys. D.1. Charakterystyki częstotliwościowo-amplitudowe regulatora

Z rys. D.1 wynika, że najbardziej płaską charakterystykę wykazuje regulator zredukowany metodą normy Hankela. Natomiast najszersze pasmo odwzorowywania dynamiki regulatora pełnego rzędu wykazuje regulator zredukowany metodą residuum. Na rys. D.2 przedstawiono porównanie charakterystyk odpowiedzi układu zamkniętego z funkcjami wagowymi na wymuszenie skokowe dla regulatora  $H_\infty$  pełnego rzędu i zredukowanego rzędu metodą residuum.



Rys. D.2. Charakterystyki skokowe układu zamkniętego, linie ciągłe – regulator pełnego rzędu, linie przerywane – regulator zredukowanego rzędu

## Załącznik E. Optymalizacja zużycia energii w łożysku magnetycznym

### E.1. Energia zużywana przez łożysko magnetyczne

Energia zużywana przez elektromagnesy łożysk magnetycznych jest ponad dziesięciokrotnie mniejsza, niż energia tracona na pokonanie tarcia w klasycznych łożyskach ślizgowych lub tocznych. Nie oznacza to, że trzeba na tym poprzestać. Moc łożyska magnetycznego jest opisana następująco:

$$P = i_1 u_1 + i_2 u_2 = R(i_1^2 + i_2^2) + (L_1 i_1 \dot{i}_1 + L_2 i_2 \dot{i}_2) + (i_1^2 \frac{dL_1}{dt} + i_2^2 \frac{dL_2}{dt}) \dot{x}, \quad (\text{E.1})$$

gdzie:

$i_1, i_2, u_1, u_2, L_1, L_2$  – prądy, napięcia i indukcyjności górnej i dolnej cewki elektromagnesu.

We wzorze (E.1) występuje suma kwadratów prądów płynących w cewkach. Warto zauważyć, że:

$$i_1^2 + i_2^2 = (i_o + i)^2 + (i_o - i)^2 = i_o^2 + i^2. \quad (\text{E.2})$$

gdzie:

$i_o$  – prąd punktu pracy,

$i$  – prąd sterujący.

Tym samym, można dojść do konkluzji, że moc, w pewnym przybliżeniu, jest proporcjonalna do sumy kwadratów prądu punktu pracy i prądu sterującego.

Zużyta energię elektryczną znajdziemy przez całkowanie po czasie wyrażenia na moc:

$$E = \int_0^t P d\tau. \quad (\text{E.3})$$

Z powyższych wyrażeń widzimy, że zarówno moc, jak i energia zależą przede wszystkim od prądu płynącego przez cewki. Natomiast prądy płynące w cewkach są złożeniem prądu punktu pracy i prądu sterującego.

Energia w łożysku magnetycznym jest tracona od strony sterowania na:

- zadany prąd punkt pracy (prąd pracy  $i_o$  jest dużo większy od prądu sterującego  $i$ ),
- stabilizację układu w punkcie pracy (układ posiada ujemną sztywność),
- tłumienie drgań.

Energia w łożysku magnetycznym jest tracona od strony sprzętowej na:

- histerezę magnetyczną,
- prądy wirowe (narastające liniowo wraz ze wzrostem prędkości obrotowej, prądy wirowe ulegają istotnej redukcji po zastosowaniu na wirniku pakietu pierścieni laminowanych pod biegunami elektromagnesów, im cieńsze blachy tym większe tłumienie prądów wirowych),
- reluktancję (oporność omowa) przewodów elektrycznych,
- zjawiska samoindukcji (wynikającej z ruchu wirnika jako zwory względem cewek),
- straty mocy związane z elektroniką wzmacniaczy prądowych lub napięciowych.

## E.2. Sterowanie punktem pracy

Większość układów sterowania aktywnym zawieszeniem magnetycznym wykorzystuje prąd punktu pracy (ang. *Bias Current*). Prąd punktu pracy wprowadza ujemną sztywność układu zawieszenia magnetycznego. Powoduje to duże straty energii. Dla odpowiedniego doboru wartości prądu punktu pracy (około 50% wartości prądu nasycenia) siła generowana przez elektromagnesy jest w przybliżeniu liniowa. Aby ograniczyć energię zużywaną przez łożysko magnetyczne stosuje się układy sterowania bez prądu punktu pracy [86].

Prądy w górnej i dolnej cewce łożyska magnetycznego można opisać następująco:

$$\begin{aligned}i_1 &= i_0 + i \\i_2 &= i_0 - i\end{aligned}\tag{E.4}$$

Siła elektromagnetyczna w przypadku kiedy przemieszczenie wirnika  $x=0$  jest opisana następująco:

$$F = \left( \frac{\mu_0 N^2 A_p i_0}{x_0^2} \right) i ,\tag{E.5}$$

gdzie:

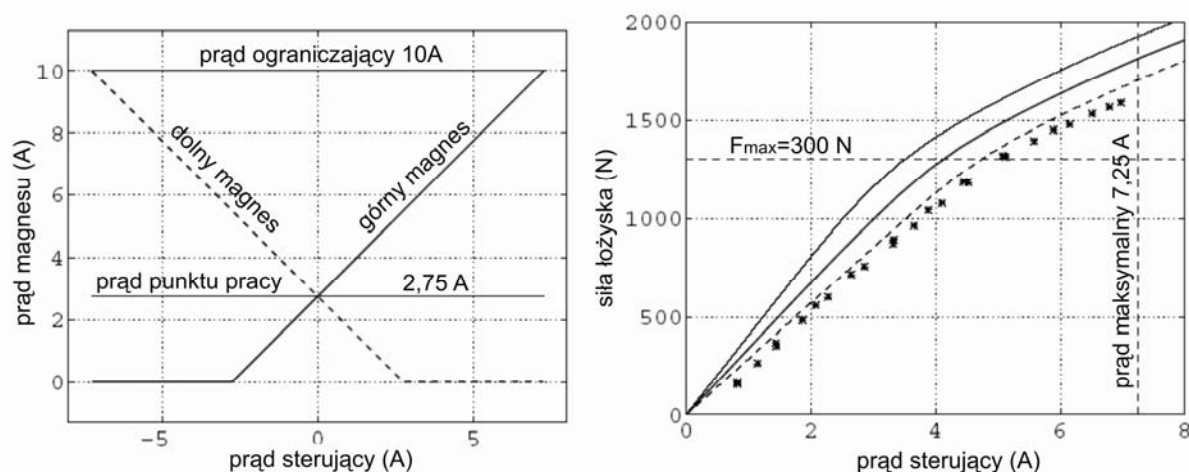
- $N$  – liczba zwojów cewki,
- $A_p$  – pole przekroju nabiegownika cewki,
- $\mu_0$  – przenikalność magnetyczna próżni.

Jeżeli przemieszczenie wirnika  $x$  jest nieduże, siła elektromagnetyczna jest opisana następująco:

$$F = \left( \frac{\mu_0 N^2 A_p i_0}{x_0^2} \right) i - \left( \frac{\mu_0 N^2 A_p i_0^2}{x_0^3} \right) x .\tag{E.6}$$

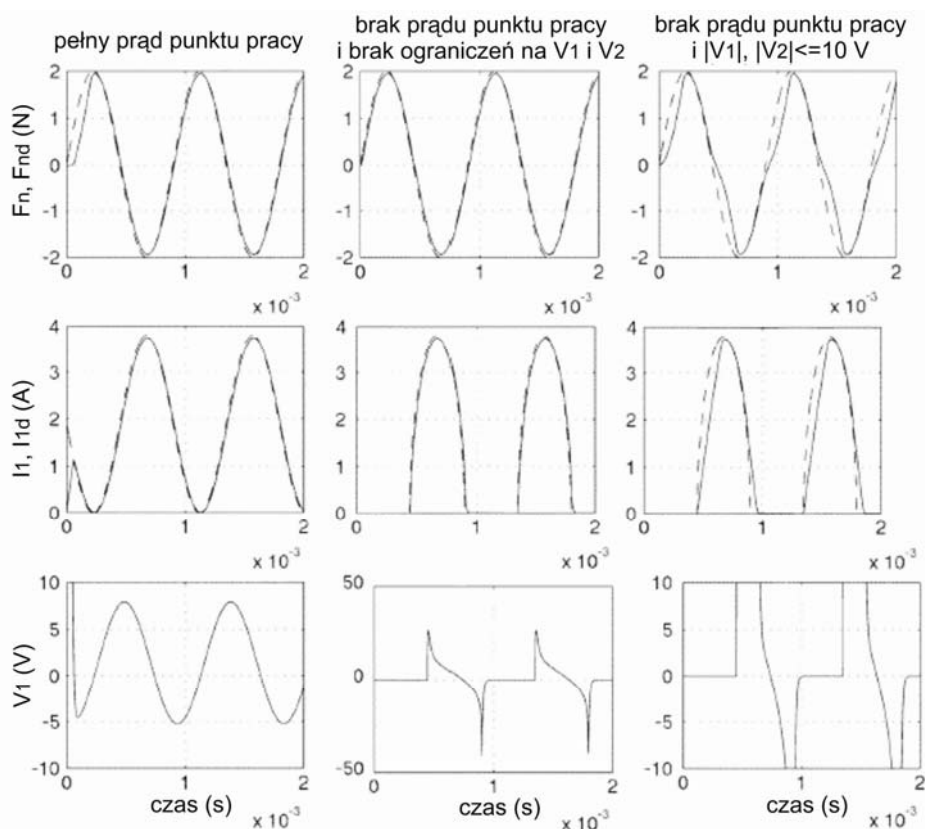
Gdy prąd punktu pracy stanowi połowę prądu nasycenia to łożysko magnetyczne działa w zakresie liniowym, co w sposób istotny upraszcza prawa sterowania [1].

Działanie proporcjonalne  $k_p$  regulatora PID jest proporcjonalne do różnicy pomiędzy zadaną sztywnością układu zamkniętego  $k$  a sztywnością obiektu. Sztywność obiektu ma wartość ujemną. Najlepszym jest przypadek, gdy nie trzeba zmieniać sztywności układu, czyli  $k=k_s$ . Wówczas  $k_p=0$ . Energia generowana przez prąd punktu pracy jest energią traconą na uzyskanie ujemnej sztywności układu otwartego. Z kolei ujemna sztywność, jak to wcześniej wyjaśniono, wymaga dodatkowej energii na sterowanie. Zmniejszenie prądu punktu pracy oznacza niższą sztywność układu, a więc mniejszą wartość zarówno współczynnika sztywności przemieszczeniowej jak i współczynnika sztywności prądowej. Po drugie, w zakresie wysokich wartości prądu sterującego, siła generowana przez łożysko jest silnie nieliniowa (rys. E.1). Wymaga to stosowania nieliniowych metod sterowania, np. sterowania odpornego.



Rys. E.1. Prądy w górnym i dolnym elektromagniesie (lewy wykres) oraz charakterystyka siły łożyskowej w funkcji prądu sterującego (prawy wykres), [1]

W przypadku zrezygnowania z prądu punktu pracy należy stosować duże wartości napięć, gdyż układ z ograniczeniem wartości napięcia nie jest w stanie wygenerować odpowiednich sił sterujących co w skrajnych przypadkach doprowadzi do niestabilności układu zawieszenia magnetycznego (kolumna trzecia na rys. E.2).



Rys. E.2. Porównanie obciążeń prądowych i napięciowych wzmacniaczy dla przypadku układu z dużym prądem punktu pracy i układu z zerowym prądem punktu pracy, [1]

### E.3. Zastosowanie łożysk z dodatnią sztywnością

Znane są liczne rozwiązania łożysk magnetycznych z użyciem magnesów trwałych [32, 41, 44, 58, 66, 72, 81]. Prąd punktu pracy powinien być zapewniony przez elementy pasywne. W ten sposób nie będziemy zużywać energii na generowanie punktu pracy. Jednak będziemy zużywać energię na prąd sterujący, jaki jest potrzebny do pokonania ujemnej sztywności łożyska.

Elementy pasywne powinny pracować w trybie odpychania, gdyż ten tryb zapewni dodatnią sztywność łożyska w układzie otwartym. W przypadku dodatniej sztywności nie trzeba będzie stabilizować układu, a tym samym zmniejsza się zużycie energii na sterowanie drganiami wirnika.

W chwili obecnej narzucają się dwie możliwości realizowania tego typu rozwiązań. Można wykorzystać materiały diamagnetyczne, które mają naturalną skłonność do odpychania się od ciał generujących pole magnetyczne. Można również konstruować pewne konfiguracje magnesów trwałych, które będą się wzajemnie odpychały. W celu maksymalnego skupienia strumienia magnetycznego magnesy trwale układa się w tzw. tablice Halbacha (ang. *Halbach Arrays*) [38].

W 1842r. Earnshaw [16] wykazał, że nie ma żadnej kombinacji pasywnych pól elektrostatycznych, magnetostatycznych czy grawitacyjnych, która pozwoliłaby na stabilną lewitację elektrycznego ładunku lub ferromagnetycznego obiektu.

## Załącznik F. Opis zastosowanego sprzętu pomiarowego

Do głównej aparatury pomiarowej zalicza się:

a) procesor sygnałowy czasu rzeczywistego DSP wraz ze skrzynką rozdzielającą złącza typu BNC do kart A/C i D/C,



Rys. F.1. Procesor DSP



Rys. F.2. Skrzynki złącza sygnałów pomiarowych i sterujących

- b) dwukanałowy analizator sygnałów dynamicznych AGILIENT 35670A, który umożliwia:
- analizę częstotliwościową sygnału w czasie rzeczywistym,
  - pomiar w pasmach kaskadowych i analiza sygnałów w pasmach oktaowych do 40 [kHz] w czasie rzeczywistym,
  - pomiar kaskady widma w funkcji wybranego parametru,
  - identyfikację modelu z wykorzystaniem funkcji przemiatania częstotliwości,
  - generowanie funkcji sinusoidalnej o zmiennej częstotliwości (ang. *Swept-Sine Function*).



Rys. F.3. Analizator sygnałów dynamicznych

c) oscyloskop AGILIANT 54624A, który posiada:

- pasmo pomiaru od 0 do 100 [MHz],
- 4 kanały pomiarowe,
- funkcję dużego powiększenia (ang. *Mega Zoom*),
- pamięć 4 [MB],
- możliwość zapisu przebiegu sygnału w formacie BMO i TIF,
- komunikację z innymi urządzeniami przez port USB lub RS232.



Rys. F.4. Oscyloskop

d) wzmacniacze PWM jako sterowane źródła prądowe, które posiadają:

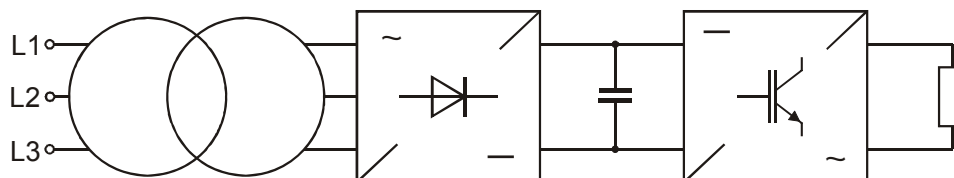
- przekształtniki AC/DC/AC sterowane poprzez modulację szerokości impulsów PWM (ang. *Pulse-Width Modulation*),
- napięcie maksymalne 300 [V],
- prąd maksymalny 10 [A],

- zasilanie mostka prostowniczego poprzez transformator trójfazowy wyposażony w funkcję dopasowywania i separacji,
- prostownik diodowy zasilający obwód silnoprądowy o danych zawartych w tabeli F.1.

Tabela F.1.

typ	EZ3-3.0; IP23
moc	3.0 [kW]
napięcie U1	3 x AC 400 [V]
napięcie U2	DC 300 [V] przy DC 10 [A]
przeciążalność	1.5xIn (w ciągu 5min) 1.1xIn (ciągła)
grupa połączeń	Yy0
klasa izolacji	T45F
częstotliwość	50/60 [Hz]
wykonanie	N/3 (lądowe)
chłodzenie	AN (naturalne, powietrzne)
położenie	stożące
impregnacja	lakier impregacyjny, bezbarwny
stopień ochrony	IP00, klasa I (przeznaczony do zabudowy w szafie o stopniu ochrony IP23)

Konfiguracja prostownik-falownik została przedstawiona na rys. F.5.

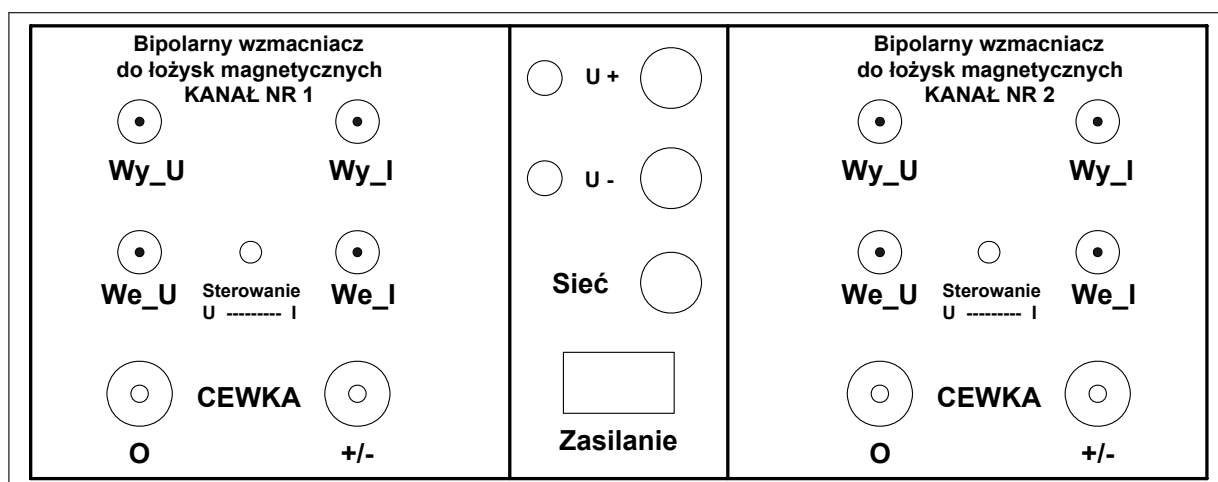


Rys. F.5. Schemat jednego kanału układu przekształtnikowego wzmacniacza

e) wzmacniacze analogowe, których podstawowe dane techniczne są następujące:

- praca wzmacniacza jest możliwa w dwóch zakresach. Pierwszy zakres, to sterowane napięciowo, stabilizowane źródło napięciowe (zakres napięciowy). Drugi zakres, to sterowane napięciowo, stabilizowane źródło prądowe (zakres prądowy),
- w każdym z zakresów pracy istnieje zabezpieczenie przeciw przepięciowe i nadmierowe prądowe dla wyjścia wzmacniacza,
- wzmacniacz może współpracować z obciążeniem rezystancyjnym i indukcyjnym o rezystancji dla prądu stałego w przedziale  $0.2 \div 2.4$  [ $\Omega$ ] dla zakresu prądowego i  $0.2 \div \infty$  [ $\Omega$ ] dla zakresu napięciowego,
- wzmacniacz pracuje jako rewersyjny tzn. rozróżnia znak napięcia sterującego i w zależności od niego zmienia znak napięcia wyjściowego, mierzonego względem zera odniesienia symetrycznego napięcia zasilającego,
- maksymalna wartość natężenia prądu w każdym zakresie pracy mierzona na obciążeniu wynosi  $\pm 5$  [A],
- maksymalna wartość napięcia sterującego wynosi  $\pm 10$  [V].

Na rys. F.6 przedstawiono widok płyty czołowej wzmacniacza analogowego dwukanałowego.



Rys. F.6. Widok płyty czołowej układu dwóch wzmacniaczy analogowych

Znaczenie poszczególnych elementów zewnętrznych na płycie czołowej jest następujące:

- CEWKA – zaciski laboratoryjne dla podłączenia cewki zawieszenia magnetycznego,
- – zacisk neutralny podłączony do ogólnej masy układu,
- +/- - zacisk „gorący” którego polaryzacja względem zacisku „O” zmienia się w zależności od polaryzacji sygnału sterującego, podawanego na wejście „WE\_U” lub „WE\_I”,
- WE\_U – wejście sterujące z gniazdem BNC wykorzystywane tylko na zakresie napięciowym pracy wzmacniacza,
- WE\_I – wejście sterujące z gniazdem BNC wykorzystywane tylko na zakresie prądowym pracy wzmacniacza,
- WY\_U – wyjście z gniazdem BNC, z którego sygnał napięciowy jest proporcjonalny do napięcia na cewce zawieszenia magnetycznego. Wyjście jest aktywne niezależnie od zakresu pracy wzmacniacza,
- WY\_I – wyjście z gniazdem BNC, z którego sygnał napięciowy jest proporcjonalny do natężenia prądu w cewce zawieszenia magnetycznego. Wyjście jest aktywne niezależnie od zakresu pracy wzmacniacza,
- sterowanie U --- I - przełącznik zakresów pracy wzmacniacza,
- położenie U – zakres programowanej napięciowo nadążnej stabilizacji napięcia (zakres napięciowy),
- położenie I – zakres programowanej napięciowo nadążnej stabilizacji natężenia prądu (zakres prądowy),
- U+ – bezpiecznik stabilizowanego napięcia dodatniego i sygnalizacyjna dioda LED sygnalizująca istnienie napięcia na wyjściu zasilacza stabilizowanego,
- U- – bezpiecznik stabilizowanego napięcia ujemnego i sygnalizacyjna dioda LED sygnalizująca istnienie napięcia na wyjściu zasilacza stabilizowanego,
- SIEĆ – bezpiecznik napięcia sieci 230 [V],
- zasilanie – wyłącznik z sygnalizacją napięcia sieci 230 [V].

Na rysunku F.7 przedstawiono zdjęcie wzmacniacza analogowego.

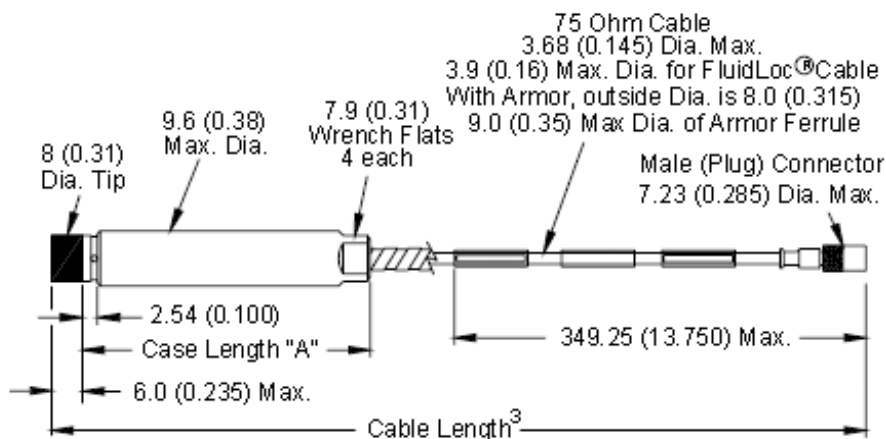


Rys. F.7. Wzmacniacz analogowy

f) czujniki wiropądowe do pomiaru przemieszczenia wirnika w płaszczyźnie  $x$ - $y$ - $z$ , które posiadają:

- zakres liniowy do 0.002 [m],
- dokładność pomiaru do 0.000001 [m],
- zakres napięć wyjściowych przetwornika od -17 [V] do -1 [V].

Czujniki wiropądowe zostały zastosowane do bezkontaktowego pomiaru przemieszczenia wirnika w zakresie szczeliny powietrznej. Zastosowano czujniki firmy *Bently Nevada* typu 3300 XL PROXIMITY PROBE. Zalecana szerokość szczeliny pomiarowej (odległość czoła głowicy czujnika od obiektu pomiarowego) wynosi 0.00127 [m]. Zalecana średnica wirnika wynosi 0.0508 [m] (minimalna powierzchnia obserwacji czujnika). Maksymalny błąd pomiaru wynosi 5%. Pasmo przenoszenia toru pomiarowego zawiera się w zakresie od 0 do 6.5 [kHz]. Napięcie zasilania wynosi od -26 do -17.5 DC [V], maksymalny pobór prądu wynosi 12 [mA]. Na rys. F.8 przedstawiono widok czujnika wiropądowego, a na rys. F.9 widok zasilaczy.



Rys. F.8. Czujnik wiropądowy



Rys. F.9. Układ zasilania przetwornika czujnika wiropądowego

g) teslomierz (ang. *GaussMeter*). Przyrząd do pomiaru indukcji pola magnetycznego cewek łożyska, model 421-MFT-3E03-VG. Parametry sondy pomiarowej są następujące:

- płaskie zakończenie sondy pomiarowej o grubości max. 0.0006 [m] i szerokości 0.0035 [m],
- częstotliwościowy zakres pomiarowy do 400 [Hz],
- dokładność pomiaru do  $\pm 0.15\%$ ,
- poprzeczny pomiar indukcji magnetycznej,
- elastyczny materiał wykonania sondy.

Parametry teslomierza są następujące:

- interfejs RS 232 i wejście do podłączenia sondy pomiarowej,
- wyświetlacz cyfrowy o rozdzielczości do  $4\frac{3}{4}$  cyfry,
- analogowe wyjście napięciowe pomiaru indukcji (zakres do  $\pm 3$  [V], częstotliwość DC do 400 [Hz]) oraz korekcji (rozdzielczość do 1.25 [mV] z dokładnością do  $\pm 0.35\%$ ),
- wyświetlanie błędów pomiaru, funkcja alarmu, auto zakres, filtr i liniowa korekcja.



Rys. F.10. Teslomierz wraz z sondą pomiarową