



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

DZIEDZINA NAUK INŻYNIERYJNO-TECHNICZNYCH

DYSCYPLINA INŻYNIERIA MECHANICZNA

ROZPRAWA DOKTORSKA

Wpływ ukształtowania zwojów końcowych
sprężyny śrubowej naciskowej na jej wybrane
właściwości eksploatacyjne

Autor: Robert Baran

Promotor rozprawy: dr hab. inż. Krzysztof Michalczyk, prof. AGH
Promotor pomocniczy: dr inż. Mariusz Warzecha

Praca wykonana: Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

Kraków, 2025

Spis treści

1. Wstęp	3
2. Analiza obecnego stanu wiedzy	6
2.1. Problemy eksploatacyjne sprężyn naciskowych	6
2.2. Typy zakończeń sprężyn i ich właściwości	15
2.3. Materiały stosowane w produkcji sprężyn	22
2.4. Modelowanie pracy sprężyn	24
3. Algorytm generowania wirtualnych modeli bryłowych sprężyn z parametryzacją krzywizny i ciągłą interpolacją kąta wzniosu	27
4. Sztywność osiowa i reakcje poprzeczne w warunkach osiowego ściskania sprężyn 38	
4.1. Metody analityczne obliczania sztywności osiowej	38
4.2. Badania stanowiskowe	42
4.2.1. Próbkki sprężyn	42
4.2.2. Badania materiałowe	45
4.2.3. Stanowisko badawcze i metodyka badań	51
4.2.4. Wyniki badań sztywności osiowej	53
4.2.5. Porównanie wyników sztywności osiowej ze wzorami analitycznymi ..	55
4.3. Opracowanie modelu numerycznego	57
4.4. Badania numeryczne rozszerzonego zestawu próbek	63
4.5. Wpływ długości kontaktu między zwojami biernymi na sztywność osiową oraz reakcje poprzeczne	65
4.5.1. Badania statystyczne zmiennych	65
4.5.2. Opracowanie zależności pozwalającej obliczyć sztywność osiową	75
4.5.3. Opracowanie zależności na wartość reakcji poprzecznej	81
4.5.4. Opracowanie zależności na wartość kąta reakcji poprzecznej	86
4.6. Wpływ wielkości promienia przejścia między zwojami biernymi i aktywnymi na reakcję poprzeczną i sztywność osiową	89

4.7. Wpływ głębokości zeszlifowania ostatniego zwoju na sztywność osiową i reakcję poprzeczną	95
5. Sztywność poprzeczna	97
5.1. Metody analityczne obliczania sztywności poprzecznej	97
5.2. Badania stanowiskowe sztywności poprzecznej.....	99
5.2.1. Stanowisko i metody badawcze	99
5.2.2. Wyniki badań	107
5.2.3. Porównanie wyników badań z metodami analitycznymi	111
5.3. Badania numeryczne	116
5.3.1. Model numeryczny i metoda badawcza	116
5.3.2. Próbkki sprężyn i wyniki badań numerycznych.....	122
5.3.3. Analiza wyników	124
6. Doświadczalna analiza wpływu ukształtowania zwojów końcowych sprężyn na ich stabilność w warunkach pracy poprzecznej	129
7. Wpływ kształtu zwojów końcowych na rozkład naprężeń w drucie sprężyny	135
8. Podsumowanie	139
Literatura.....	141

1. Wstęp

Sprężyna jest podatnym elementem konstrukcyjnym, który znacznie odkształca się sprężyscie pod wpływem przyłożonych obciążeń zewnętrznych i powraca do swych wymiarów pierwotnych po zdjęciu tych obciążeń oraz posiada zdolność gromadzenia energii w określonej objętości (Branowski, 1997; Żukowski, 1954; Wahl, 1944). Z tych powodów sprężyny są stosowane w wielu obiektach mechanicznych. W niniejszej pracy skupiono się na tematyce sprężyn naciskowych, więc wymienione zostaną ich główne funkcje, którymi są:

- pochłanianie energii, tłumienie obciążeń uderowych, kształtowanie charakterystyki dynamicznej i ustalanie położenia oraz pracy maszyn (Żukowski, 1954; Branowski, 1997), przez co stosowane są w układach zawieszenia pojazdów (Kumbhalkar, 2018; Zhou i in., 2020; Romaniszyn, Oramus, Nowakowski, 1989), maszyn wibracyjnych, tj. przenośników (Cieplok, Wójcik, 2020), albo młynów (Cieplok, Piekaj, 2021), lub do ochrony fundamentów maszyn przed drganiami (Żukowski, 1954),
- nadawanie określonej siły – sprężyny zaworowe w silnikach spalinowych (Żukowski, 1954; Zhi-Wei i in., 2009; Zbierski, Smoczyński, 2007).

Współcześnie dąży się do coraz bardziej precyzyjnego określania charakterystyk siłowych, czy częstotliwościowych sprężyn, celem dokładniejszego sterowania pracą maszyn w nie wyposażonych. W wielu przypadkach pomija się jednak wpływ ukształtowania zwojów końcowych na właściwości eksploatacyjne sprężyny. Zwoje końcowe stanowią odcinek przyłożony do podłoża, zwoje stykające się oraz odcinek wyrównujący skok do poziomu skoku zwojów aktywnych. Ostatnia wymieniona część jest zaproponowaną w (Liberlmann, 2006) modyfikacją klasyfikacji zwojów sprężyny. O ile w sprężynach o dużej liczbie zwojów czynnych wymienione powyżej elementy mają generalnie niewielki wpływ na statyczne i dynamiczne charakterystyki sprężyny, o tyle wraz z malejącą liczbą zwojów aktywnych wpływ ten staje się coraz istotniejszy. Biorąc pod uwagę trudności w ukształtowaniu sprężyny w procesach technologicznych, różnice w parametrach geometrycznych w przypadku sprężyn krótkich mogą w dużym stopniu zmienić ich właściwości mechaniczne. Jeżeli projektując sprężynę, zostanie założona konieczność uzyskania wysokiej precyzji przebiegu charakterystyki siła-przemieszczenie, konieczne jest zastosowanie bardziej zaawansowanych metod projektowania i wytwarzania, bądź stosowanie prototypów oraz wielu testów. Celem

uproszczenia tych działań poszukuje się coraz dokładniejszych zależności pozwalających prognozować wartość wybranych właściwości eksploatacyjnych sprężyn naciskowych (Paredes, 2016).

Norma ISO 2162-2:1993(E) (Polski Komitet Normalizacyjny, 1993) wyróżnia sześć form kształtu zwoju końcowego. Mocowanie takich sprężyn w przestrzeni wymaga odpowiedniego ukształtowania podpór, które najprostsze są dla sprężyn o zwojach szlifowanych. Zależności podawane w odpowiednich normach nie uwzględniają wpływu zwojów biernych na sztywność. Badania przeprowadzone na podstawie obliczeń analitycznych (Vogt, 1934) oraz eksperymentalnych na określonej próbie sprężyn (Paredes, 2016), wykazały, że powinno się uwzględniać część długości zwoju biernego jako aktywną. Wynika to z występowania w tych zwojach naprężeń skręcających (Liu, Kim, 2009). Ponadto nie uwzględnia się kolejnego etapu jakim są zwoje przejściowe. W pracach (Liebermann, 2006; Meissner, Schrocht, 2007) dokonano takiego rozróżnienia, podając poprawki na liczbę zwojów aktywnych, ale nie podano konkretnego zastosowania tych poprawek w obliczaniu charakterystyk sztywnościowych lub częstotliwościowych. Zwoje przejściowe definiuje się jako odcinek o zmiennym skoku od poziomu zwojów biernych do ustabilizowanej wartości skoku zwojów aktywnych. Odcinek ten nie jest ściśle projektowany i planowany do wykonania, a wynika raczej z procesu zwijania sprężyn. Należy w związku z tym wskazać, iż sprężyny śrubowe naciskowe, stanowiące elementy maszynowe o skomplikowanej geometrii są modelowane na podstawie bardzo uproszczonych zależności, nie uwzględniających szczegółów geometrycznych. Ponadto ścisłaniu sprężyny towarzyszy zmiana kąta wzniosu linii śrubowej, toteż wszystkie wielkości powinny być określane z uwzględnieniem jego aktualnej wartości.

O ile charakterystyka osiowa sprężyny jest w prosty sposób możliwa do wyznaczenia dzięki osiowemu ścisłaniu na maszynie wytrzymałościowej, to na kierunku poprzecznym sztywność poprzeczna jest zależna od ugięcia osiowego i wymaga specjalnych metod badawczych (Grajnert, 1995). Na tę zależność wskazują też popularne metody analityczne obliczania sztywności poprzecznej sprężyn naciskowych jak Haringxa (Haringx, 1949), Wahla (Wahl, 1944), Grossa (Gross, 1951) i inne. Ponadto sztywność poprzeczna zmienia się na obwodzie sprężyny w zależności od zastosowanego typu zwoju końcowego i wzajemnego ustawienia obydwu końców względem siebie (Branowski, 1997), ale nie wykazano do tej pory żadnych zależności pozwalających określić przebieg statycznych charakterystyk poprzecznych. Z tematyką tą wiążą się

bezpośrednio kwestie charakterystyk dynamicznych oraz rozkładu naprężeń w zwojach końcowych. Jak wspomniano w przypadku maszyn mało precyzyjnych ukształtowanie zwojów końcowych może być mało istotne, ale coraz więcej osób zauważa ten problem w bardziej zaawansowanych urządzeniach, toteż pochylenie się nad tą tematyką nie jest bezcelowe. Pojawiają się też problemy z projektowaniem sprężyn stosowanych w zawieszaniach lokomotyw i wagonów kolejowych, w taki sposób, aby reakcje poprzeczne powstające z osiowego ściskania znosiły się lub były jak najmniejsze. W tej chwili każda sprężyna musi być badana na specjalnym stanowisku badawczym celem ustalenia co najmniej kierunku tejże reakcji. Ustalenie zależności na wartość i kierunek reakcji okazałoby się bardzo pomocne w tej dziedzinie, ponieważ dotychczas tematyka ta praktycznie nie została właściwie opisana w literaturze i normach.

Celem pracy jest eksperymentalna analiza wpływu parametrów geometrycznych zwojów końcowych sprężyn naciskowych na ich statyczne charakterystyki siłowo-odkształceniowe w warunkach obciążenia osiowego oraz poprzecznego. W tej tematyce zawiera się zagadnienie sztywności osiowej i poprzecznej oraz wartości i kąta reakcji poprzecznej powstającej podczas osiowego ściskania sprężyny. Dodatkowym celem pracy jest próba określenia zaleceń konstrukcyjnych potrzebnych w procesie projektowania sprężyn w zakresie wielkości i stanu naprężeń w materiale sprężyny oraz stabilności sprężyny.

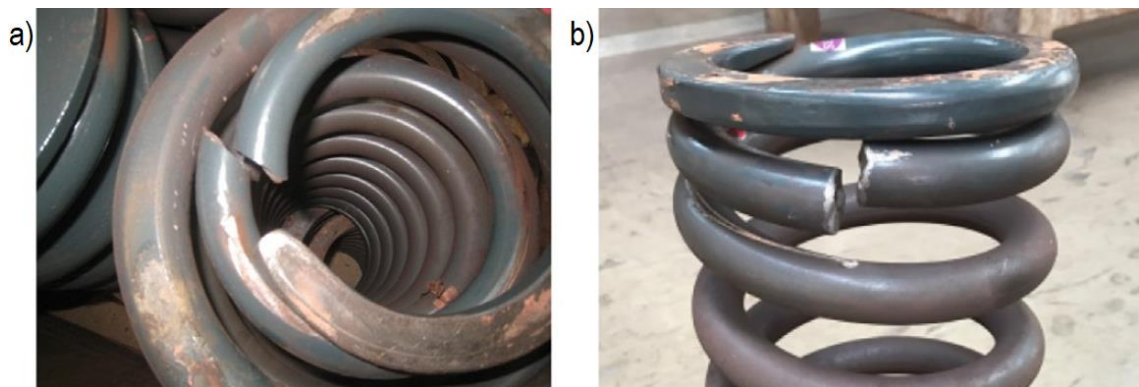
Zakres pracy obejmuje przeprowadzenie obliczeń analitycznych, badań stanowiskowych i numerycznych sztywności osiowych oraz poprzecznych sprężyn naciskowych, walcowych, śrubowych o zwojach przyłożonych i szlifowanych oraz wykonanie analizy statystycznej otrzymanych wyników, służącej próbie sformułowania wzorów empirycznych, opisujących wpływ poszczególnych parametrów na charakterystyki statyczne sprężyn naciskowych. Ponadto zakres pracy obejmuje zagadnienie wyprowadzenia zależności pozwalających obliczyć kąt i wartość reakcji poprzecznych powstających przy osiowym ściskaniu. Dodatkowo zakres pracy obejmuje przeprowadzenie uproszczonych analiz numerycznych rozkładów naprężeń i doświadczalnych utraty stabilności wybranych sprężyn.

2. Analiza obecnego stanu wiedzy

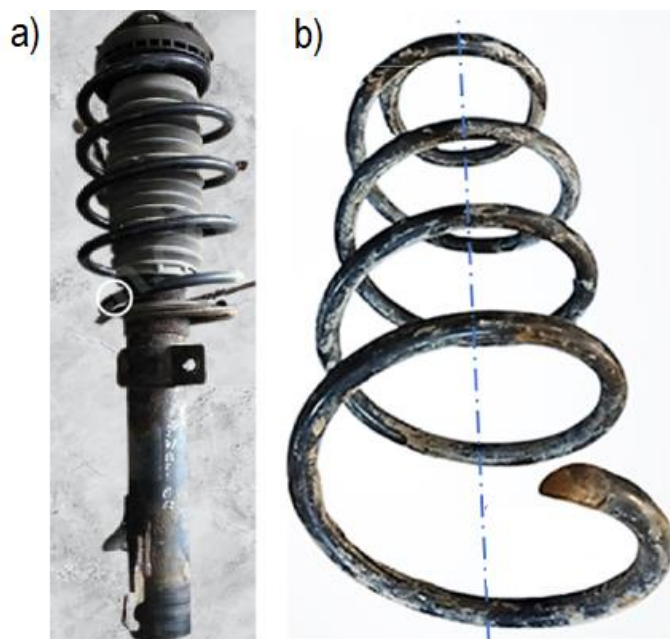
W niniejszym rozdziale przedstawiono przegląd literatury w zakresie tematyki ukształtowania zwojów końcowych sprężyn śrubowych naciskowych oraz metod określania wartości ich parametrów eksploatacyjnych, ze szczególnym uwzględnieniem zagadnień sztywności. W pierwszym podrozdziale wskazano na problemy eksploatacyjne sprężyn naciskowych związane ze zwojami końcowymi. W kolejnym zaprezentowano stosowane typowe zakończenia sprężyn, a w trzecim materiały używane do produkcji sprężyn. W ostatnim podrozdziale dokonano przeglądu dostępnych metod modelowania geometrii i pracy sprężyn naciskowych. Przegląd ten pozwala uzasadnić genezę pracy oraz wskazać kierunki rozwoju badań konieczne do zrealizowania, aby poszerzyć wiedzę na temat sprężyn.

2.1. Problemy eksploatacyjne sprężyn naciskowych

Pierwszym najczęściej spotykanym problemem związanym z eksploatacją sprężyn naciskowych jest pękanie drutu w okolicy zwoju końcowego w układach zawieszenia wózków metra i kolejowych (rys. 1) (Zhou i in., 2020). Sprężyny w zbliżonym miejscu pękają też w zawieszeniu pojazdów samochodowych (rys. 2) (Arslan, 2023; Wittek, Łazarz, 2020). Autorzy przytoczonych publikacji wskazują, że jest to wynikiem wystąpienia korozji osłabiającej przekrój poprzeczny oraz defektów materiałowych i powierzchniowych.



Rys. 2.1. Uszkodzone sprężyny układu zawieszenia wózka metra: a) w zestawie dwóch współśrodkowych sprężyn, b) indywidualnie pokazana sprężyna (Zhou i in., 2020)

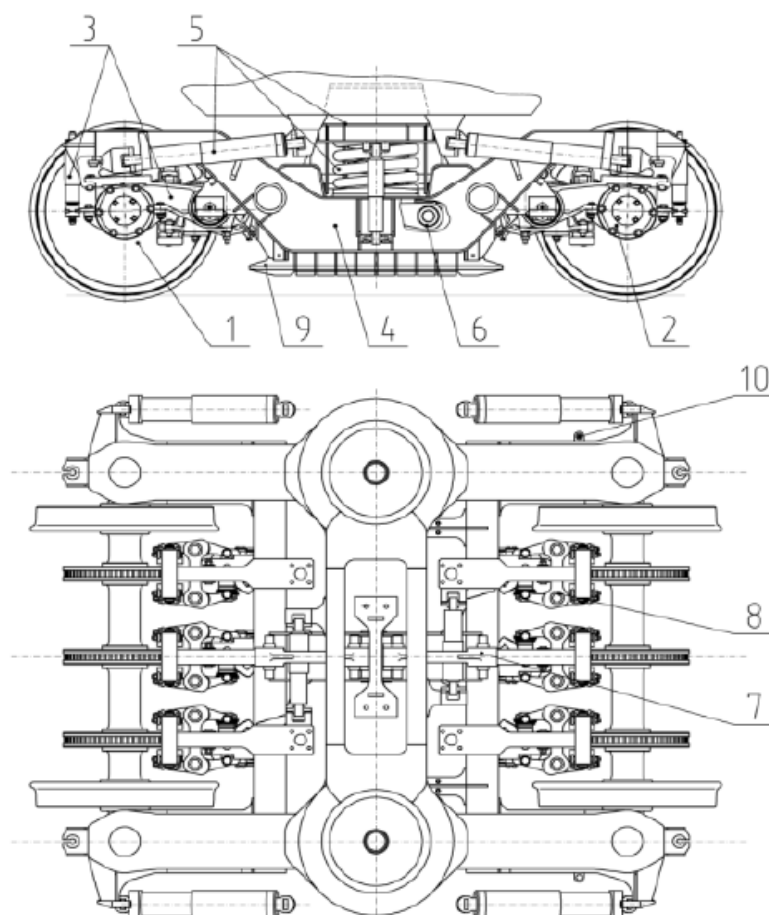


Rys. 2.2. Sprężyna amortyzatora samochodu: a) zamontowana wraz z wskazaniem miejsca pęknięcia, b) sprężyna w powiększeniu (Arslan, 2023)

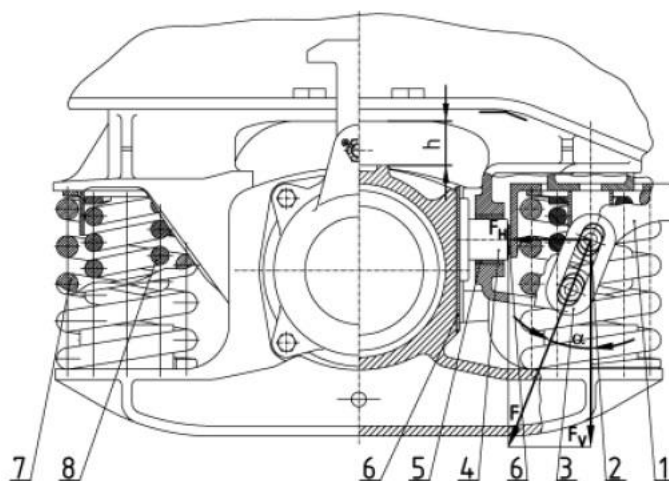
W przypadku pojazdów szynowych pęknięcie sprężyny poniżej zwoju końcowego nie wskazuje na uszkodzenia korozyjne, co można zauważyć porównując rysunki 2.1 i 2.2. Sprężyny występują w nich w zawieszeniu pierwszego lub drugiego stopnia, w zależności od konstrukcji wózka. Zawieszenie to ma przenosić siły osiowe, poprzeczne oraz momenty celem zapewnienia komfortu jazdy i bezpiecznego oddziaływania na tor (Sobaś, 2014). Problemy eksploatacyjne sprężyn pojawiają się głównie przy kolei dużych prędkości, czyli powyżej 200 km/h (Sobaś, 2009). Wówczas istotną rolę zaczyna odgrywać sztywność poprzeczna sprężyn, zmienna w zależności od wielkości ugięcia osiowego (Sobaś, 2014). Przykładowe zawieszenie wózka kolejowego przedstawiono na rysunku 2.3. Natomiast zbliżenie na usprężynowanie pierwszego stopnia zamieszczono na rysunku 2.4.

Sprężyny w zawieszeniach często są ustawiane w sposób podwójny, tzn. koncentrycznie jedna wewnątrz drugiej. Ma to na celu przeniesienie większych obciążeń niż pojedyncza o takim samym gabarycie montażowym, wykorzystując kryterium optymalizacyjne, którym jest stosunek energii sprężystej do objętości montażowej (Branowski, 1997). Wysokość sprężyn koncentrycznych nie musi być identyczna celem uzyskania innej sztywności przy większym ugięciu pakietu. W przypadku pęknięcia jednej ze sprężyn, pozostałe mogą przejmować odpowiednio mniejsze obciążenia i tym samym utrzymać zawieszony obiekt w pozycji roboczej (Sobaś, 2014). Celem uniknięcia zacinania się sprężyn ustawia się je naprzemiennie względem kierunku uzwojenia (np.

prawoskrętna zewnętrzna – lewoskrętna wewnętrzna) oraz przyjmując odpowiednie luzy między sprężynami. Sprężyny te ustawia się również tak, aby czoła były zorientowane w przeciwnym kierunku (rys. 2.5), a wynika to z występowania różnej sztywności na obwodzie sprężyny w zależności od typu zakończenia (Branowski, 1997; Grajnert, 1995) oraz z wiążących się z tym różnych reakcji poprzecznych. Kompensacja tych reakcji obecnie jest możliwa tylko poprzez ustawienie sprężyn przeciwnie zorientowanymi zakończeniami, aby równoważyły się reakcje poprzeczne. Nie jest to jednak dokładnie zbadane zjawisko i jest aktualnym problemem branży kolejowej. W przypadku sprężyn koncentrycznych nie poprawne ustawienie spowoduje uderzanie ich o siebie nawzajem, blokując się lub uszkadzając. Utrzymywanie końców w stałym położeniu względem siebie jest możliwe dzięki zastosowaniu specjalnych uchwytów wraz z trzpieniami centrującymi. Jeżeli obrót sprężyny nie jest zablokowany, może dojść do obracania się sprężyny w uchwycie w sytuacjach równoczesnego spadku obciążenia i działania wibracji. Celem osiągnięcia stabilnej pracy wózków i wysokiej trwałości sprężyn stosuje się różne modyfikacje konstrukcji zawieszenia oraz przeprowadza się analizy modalne całych konstrukcji. Niedokładności wykonania sprężyn sprawiają, że każda z nich przed montażem musi mieć wykonane testy sztywności osiowej i wyznaczenia kierunku „ucieczki”, czyli reakcji poprzecznej powstającej przy osiowym ściskaniu. Kierunek ten oznacza się specjalną metalową opaską. Tym samym proces ten okazuje się być czasochłonny i wymagający precyzji, a tym samym kosztów, które przy produkcji nawet nisko seryjnej mogą być znaczące. Znalezienie metod szybszego określania tych parametrów pozwoliłoby pozyskać oszczędności czasowe i finansowe.



Rys. 2.3. Wózek 11ANc przystosowany do wysokich prędkości (widok od boku i z góry): 1 - zestaw kołowy z maźnicami i z trzema tarczami hamulcowymi, 2 - maźnice, 3 - układ usprężynowania pierwszego stopnia i prowadzenie maźnicy, 4 - rama wózka, 5 - belka nadwózkowa, usprężynowanie drugiego stopnia, tłumiki wężykowania, 6 - fragment stabilizatora przechylenia, 7 - urządzenie pociągowe, 8 - mechanizm zaciskowy hamulca tarczowego, 9 - elektromagnetyczny hamulec szynowy, 10 - ogranicznik przesuwu i skrętu wózka (Sobaś, 2009)

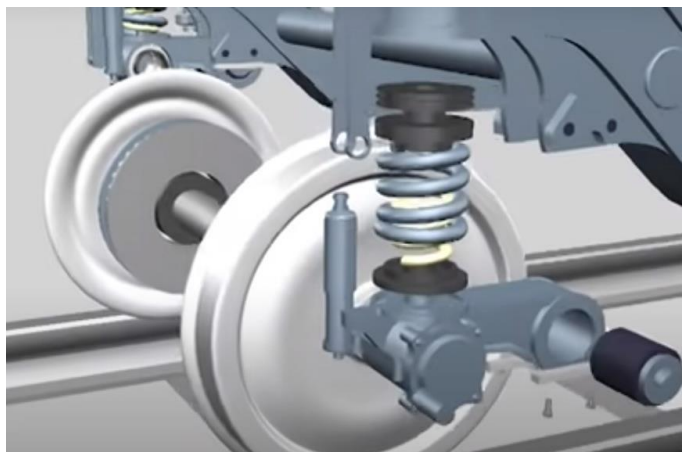


Rys. 2.4. Usprężynowanie wózka Y25L: 1 - korpus dociskacza, 2 - czopiki, 3 - ogniwa, 4 - grzybek cierny, 5 - tulejka, 6 - płyta cierna, 7 - sprężyna zewnętrzna, 8 - sprężyna wewnętrzna (Sobaś, 2014)

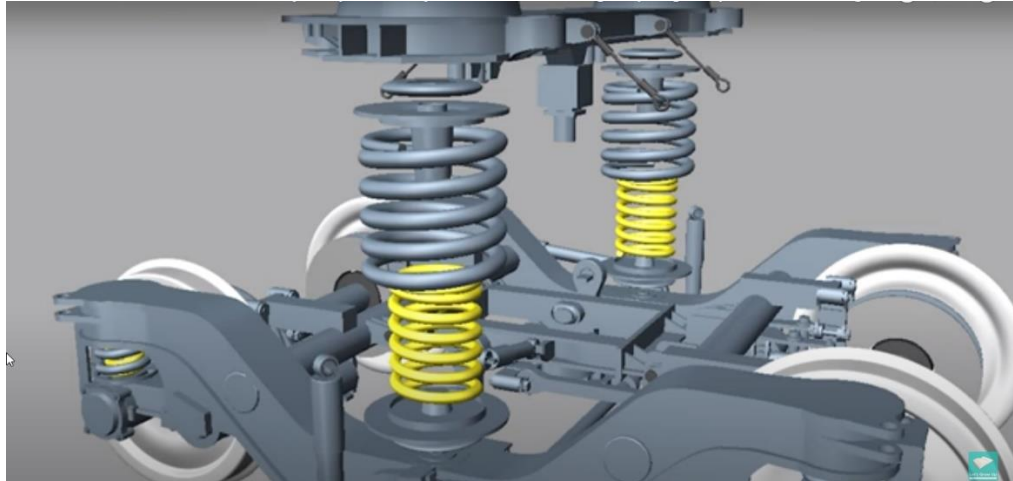


Rys. 2.5. Wzajemne ustawienie sprężyn w gnieździe wózka kolejowego (Górowski, 2021)

W zależności od obciążenia, rodzaju ładunku i warunków pracy projektuje się różne konstrukcje wózków kolejowych. Na rysunku 2.6 w widoku rozstrzelonym pokazano zwieszenie pierwszego stopnia wózka kolejowego z jedną sprężyną na każde koło. Na rysunku 2.7 w takim samym widoku przedstawiono zawieszenie drugiego stopnia. Na rysunku 2.8 zamieszczono zawieszenie z zestawem 4 pakietów sprężyn. Sprężyny są w nim wspierane przez tłumiki obciążeń osiowych i poprzecznych. Nie zawsze jednak zawieszenie jest oparte o sprężyny śrubowe. Czasem wykorzystuje się sprężyny piórowe (resory), sprężyny metalowo-gumowe lub pneumatyczne (Romaniszyn, Oramus, Nowakowski, 1989).



Rys. 2.6. Zawieszenie pierwszego stopnia z wykorzystaniem jednego zestawu sprężyn podwójnych na koło w widoku rozstrzelonym (Let's Grow Up, 2021)

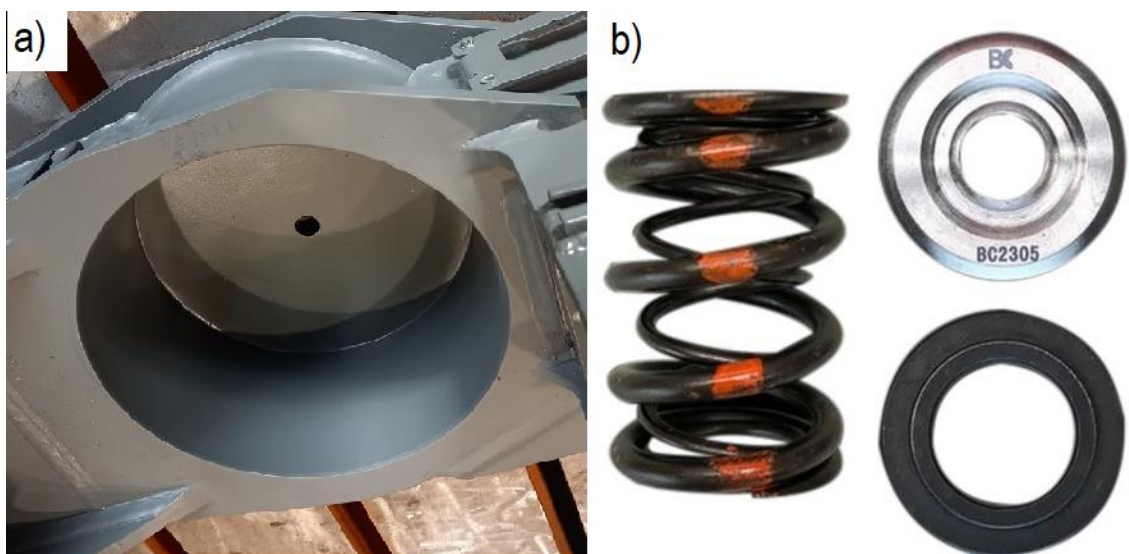


Rys. 2.7. Zawieszenie drugiego stopnia z wykorzystaniem dwóch zestawów podwójnych sprężyn naciskowych w widoku rozstrzelonym (Let's Grow Up, 2021)



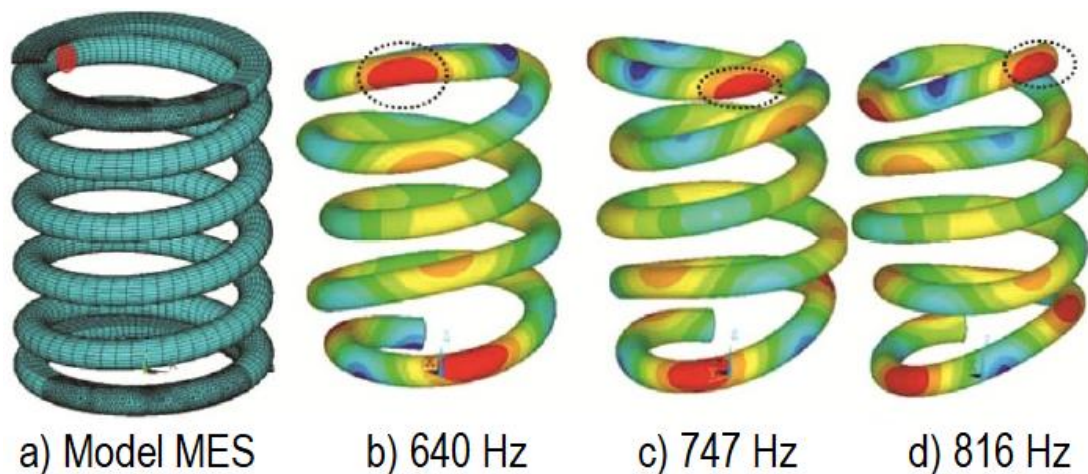
Rys. 2.8. Zawieszenie wózka kolejowego z czterema zestawami sprężyn na drugim stopniu (Let's Grow Up, 2021)

Pakiety sprężyn są zamieszczane w specjalnych gniazdach (rys. 2.9a), które zapewniają prowadzenie sprężyny, tym samym ograniczając poprzeczne wychylenia ostatnich zwojów. Podobne gniazda stosuje się do sprężyn zaworowych (rys. 2.9b).



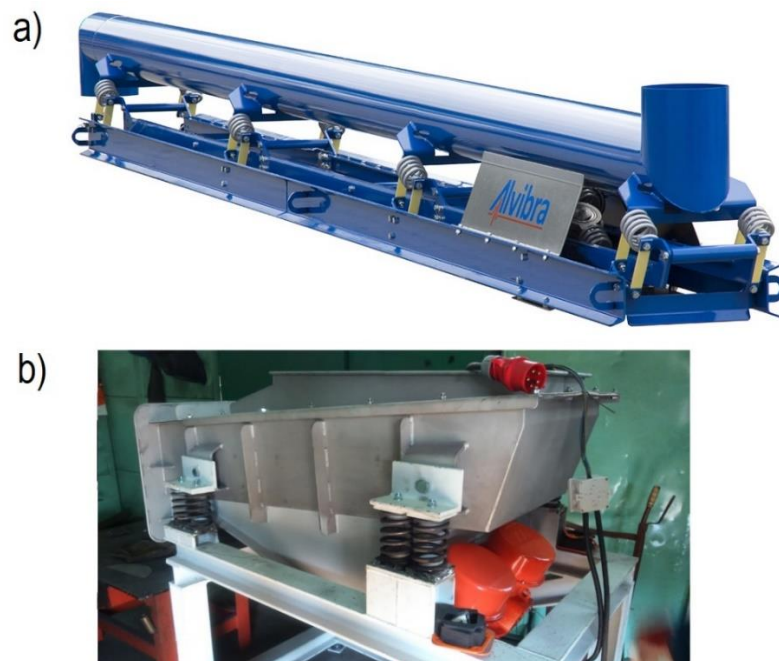
Rys. 2.9. a) Przykład gniazda na pakiet sprężyn zawieszenia wózka kolejowego (Górowski, 2021)
b) Pakiet sprężyn naciskowych zaworowych wraz z gniazdami (Fmic.pl, 2023)

Za główną przyczynę pęknięcia sprężyn uważa się występowanie wibracji wzbudzanych przez falistości szyn kolejowych, o częstotliwości, która może powodować rezonans modalny, a to zaś wpływa na powstawanie naprężeń dynamicznych powodujących uszkodzenie sprężyny. Ling ze współpracownikami w swojej publikacji (Ling i in., 2017) przedstawili wyniki analizy modalnej dla częstotliwości 630 Hz, 747 Hz i 816 Hz, w której wskazali, że największe naprężenia występują w punktach poniżej zwoju końcowego (rys. 2.10). Stwierdzono, że falistość szyny o krótkim skoku (30 – 40 mm) jest przyczyną uszkodzenia sprężyn śrubowych, co poparto eksperymentami w terenie. Taki charakter pracy wpływa na osłabienie wytrzymałości zmęczeniowej sprężyny, a przybliżony sposób prognozowania żywotności zmęczeniowej przedstawiono w tejże publikacji. Nie wskazano jednak dlaczego akurat w tych miejscach występują maksymalne wartości naprężeń. Zasugerowano jedynie, że aby uniknąć tych uszkodzeń należy zwiększyć wartość tłumienia tłumików pionowych.

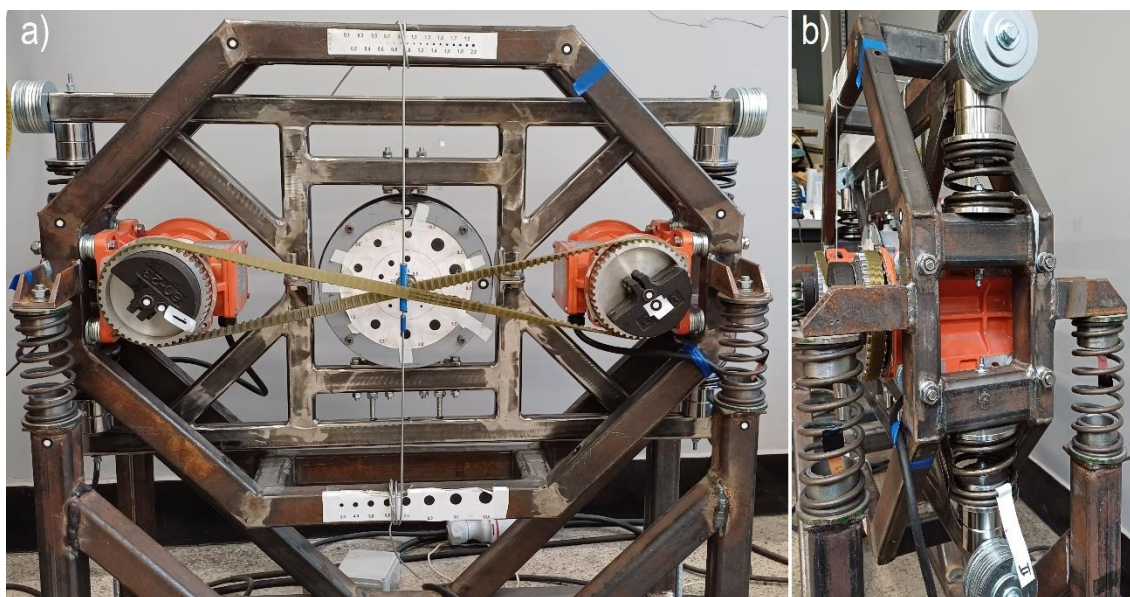


Rys. 2.10. Wyniki analiz modalnych z wykorzystaniem metody elementów skończonych (MES) dla częstotliwości 640 Hz, 747 Hz i 816 Hz wraz ze wskazaniem punktu występowania największych naprężeń i pęknięć rzeczywistych (Ling i in., 2017)

Sprężyny śrubowe naciskowe są również powszechnie wykorzystywane jako zawieszenie maszyn wibracyjnych takich jak przesiewacze, przenośniki (Cieplak, Wójcik, 2020) i młynów wibracyjnych (Piekaj, Cieplak, 2021), których przykłady pokazano na rysunkach 2.11 i 2.12. W przypadku tego typu urządzeń sprężyny często pracują przy wymuszeniu na kierunku zarówno osiowym jak i poprzecznym, stąd ważne jest precyzyjne określenie ich sztywności na obydwu tych kierunkach.

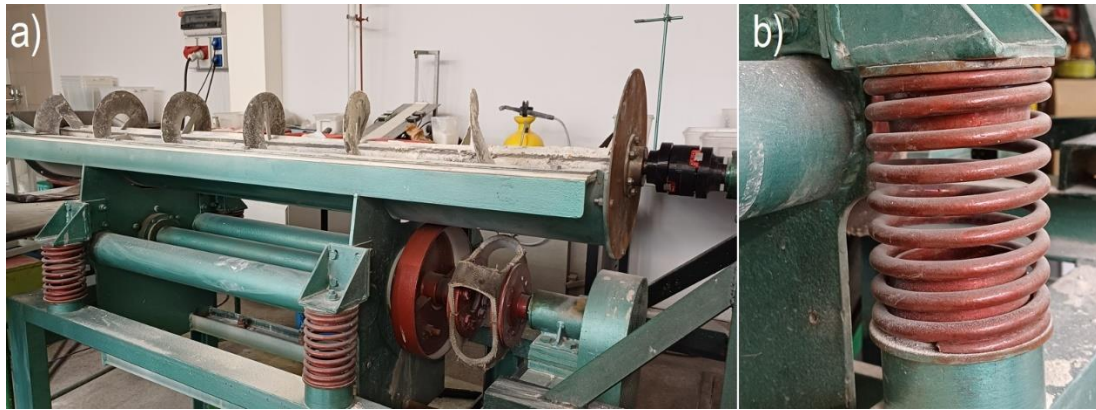


Rys. 2.11. Przenośnik wibracyjny: z) z ukośnym (CTMS, 2020), b) z pionowym ustawieniem sprężyn (Elewar S.A.)

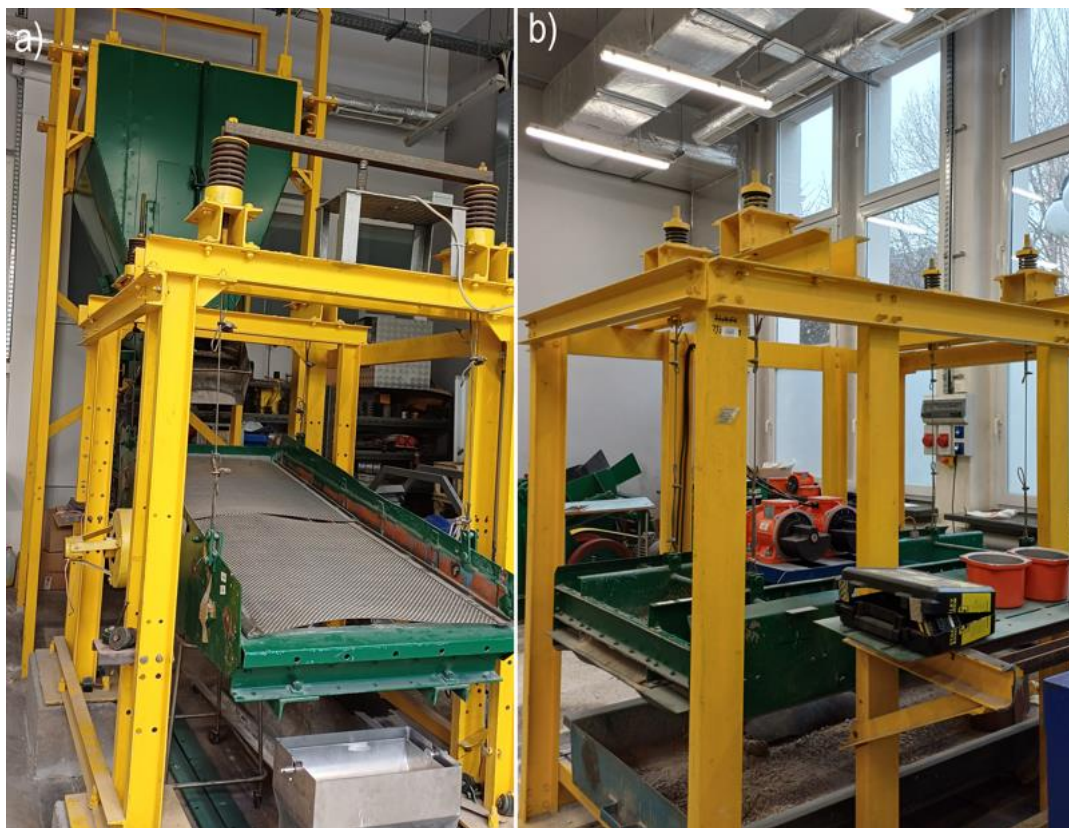


Rys. 2.12. Młyn wibracyjny znajdujący się w Laboratorium Maszyn Przeróbczych AGH: a) widok główny, b) widok od prawej strony pokazujący zastosowane sprężyny, materiały własne.

Sprężyny stosowane są również w mieszalnikach (rys. 2.13) lub przesiewaczach (rys. 2.14), gdzie stanowią zawieszenie jak w typowych maszynach wibracyjnych, biorąc udział w kształtowaniu charakterystyki pracy.



Rys. 2.13. Mieszalnik wibracyjny znajdujący się w Laboratorium Maszyn Przeróbczych AGH: a) widok główny, b) zbliżenie na sprężynę; materiały własne.



Rys. 2.14. Przesiewacze: a) kątowy, b) poziomy na wyposażeniu Laboratorium Maszyn Przeróbczych AGH; materiały własne

Innym zastosowaniem sprężyn są maszyny rolnicze, szczególnie agregaty uprawowe, gdzie mają za zadanie wywołać nacisk na narzędzie uprawowe, przykładowo zęb kultywatora (rys 2.15). Sprężyny są tam również ustawiane jedna wewnątrz drugiej z zastosowaniem przeciwnego kierunku zwojów. Problem z kształtem zwojów końcowych i ich wpływem na charakterystykę pracy maszyny będzie prawdopodobnie znikomy z racji małej precyzji pracy tego typu urządzeń, ale może mieć wpływ na trwałość sprężyny.



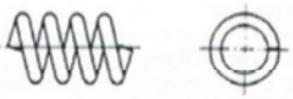

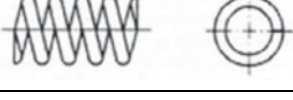
Rys. 2.15. Agregat podorywkowy APN firmy LandStal z zastosowanymi pakietami podwójnych sprężyn naciskowych (Krismar)







2.2. Typy zakończeń sprężyn i ich właściwości

Podstawowe typy zakończeń sprężyn klasyfikuje norma ISO 2162-2:1993(E), która wyróżnia 6 podstawowych form podanych również w tabeli 1:

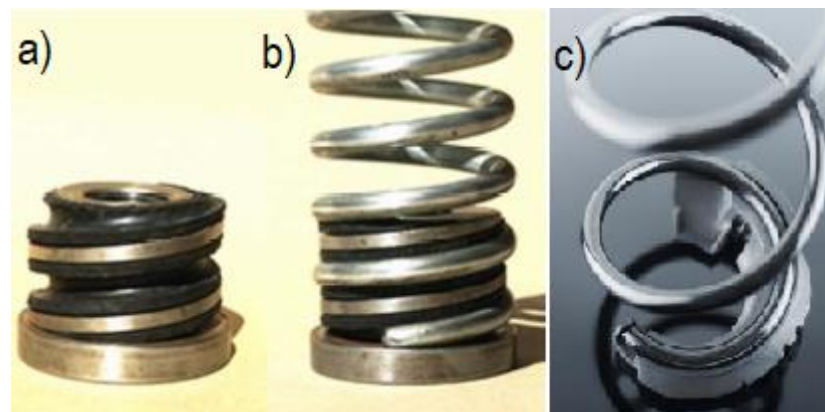
- A – otwarte, nieszlifowane;
- B – zamknięte, nieszlifowane;
- C – otwarte, szlifowane;
- D – zamknięte, szlifowane;
- E – zamknięte z końcami „pigtail”;
- F – zamknięte i zagięte do środka (Baran, 2020; Polski Komitet Normalizacyjny, 1993).

Tab. 2.1. Typy zakończeń sprężyn wg normy ISO 2162-2:1993(E) (opracowano na podstawie Polski Komitet Normalizacyjny, 1993)

Forma	Nazwa	Rysunek
A	Otwarte, nieszlifowane	
B	Zamknięte, nieszlifowane	
C	Otwarte, szlifowane	

D	Zamknięte, szlifowane		
E	Zamknięte z końcami typu „pigtail”		
F	Zamknięte i zagięte do środka		

Zakończenie typu A uniemożliwia stabilne podparcie sprężyny na płaskiej powierzchni. Sprężyny takie wymagają montażu w specjalnie wykonanych uchwytach jakich przykłady przedstawiono na rysunku 2.16 (Michalczyk, 2017; Mubea).



Rys. 2.16. a) Uchwyt z wkładką elastomerową, b) sprężyna zamocowana w uchwycie (Michalczyk, 2017), c) sprężyna w uchwycie polimerowym (Mubea)

Wobec powyższego technologia wykonania takiej sprężyny jest najprostsza, gdyż nie wykonuje się zagięć drutu, natomiast z powodu braku stabilności istnieje wymóg stosowania uchwytów, co jednocześnie podnosi koszty wytworzenia, a więc ogranicza stosowalność. Nie mniej jednak uchwyty te mogą modyfikować charakterystykę pracy sprężyny, odejmując konkretne zwoje z aktywnej pracy, ale pozostawiając im pewną swobodę ruchu. Elastomerowe wykładziny ponadto przeciwdziałają wycieraniu się zwojów (Baran, 2020) oraz tłumią drgania sprężyny w warunkach okołorezonansowych, co wykazano w pracy (Michalczyk, 2017). Możliwe jest też nie dodawanie wkrętek, ale wówczas wymagane jest inne prowadzenie na przykład w tulei lub na trzpieniu. Należy zauważyć, że wówczas nie mamy żadnych zwojów biernych, a ostatni zwoj będzie mocno obciążany.

Sprężyny o zakończeniu według formy B posiadają zwoj końcowy przygięty prostopadle do osi sprężyny. Pozwala to uzyskać większą stabilność, ale tylko dla sprężyn o małej smukłości mniejszej od 4 (China Spring Products Corp., 2025). Sprężyna taka

powinna być osadzana na trzpieniu, w otworze lub na specjalnie ukształtowanych talerzach, wykonanych z blachy tłoczonych (Baran, 2020). Przykładem jest układ zawieszenia w samochodach osobowych, gdzie sprężyny są osadzone na specjalnych talerzykach, co dodatkowo ogranicza zużycie ściernego ostatniego zwoju. Talerze (podpory) są tak ukształtowane, aby w trakcie ściskania sprężyny zwiększała się powierzchnia styku pomiędzy jej zwojami końcowymi a podporą. Przetłoczenia są na tyle głębokie, aby przy pełnym obciążeniu osiowym sprężyny nie dochodziło do kontaktu krawędzi końca drutu z powierzchnią zwojów czynnych (Baran, 2020).

W przypadku formy C i D zastosowano szlifowanie końców sprężyn. Ma to na celu poprawę stabilności ustawienia sprężyny i tym samym nie wymaga stosowania dodatkowych podpór oraz systemu prowadzenia. Nie jest znormalizowana głębokość zeszlifowania, więc zależy to od konstruktora. Większa głębokość daje większą powierzchnię kontaktu, regulując mimośrodowość, przy jednoczesnym osłabianiu zwoju biernego (Baran, 2020). W przypadku formy C osłabienie to jest szczególnie istotne, ponieważ przy kącie wzniosu takim samym jak w części aktywnej, nie jest możliwe duże zeszlifowanie i tym samym sprężyny te mają ograniczoną stabilność. Zdecydowanie lepsza i częściej stosowana jest forma D, która pozwala na zeszlifowanie $\frac{3}{4}$ obwodu sprężyny lub więcej z uwagi na przyłożenie zwoju biernego, dla którego kąt wzniosu linii śrubowej wynosi 0° (Baran, 2020). Poprawę stabilności uzyskuje się poprzez przyłożenie większej liczby zwojów, czasem nawet do 2 – 2,5 dla długich sprężyn (Branowski, 1997). Sprężyny te dodatkowo lepiej rozpraszają wstrząsy i zapewniają korzystniejszy rozkład naprężeń. Wadą zakończenia typu D z większą liczbą zwojów biernych jest przede wszystkim wysoki koszt produkcji, co wynika z jednej strony z zużycia większej długości drutu, a z drugiej strony z zachowania precyzji zwijania sprężyny na określoną liczbę zwojów biernych (China Spring Products Corp., 2025). Z obserwacji wynika, że nie zawsze procesy zwijania sprężyny są precyzyjne i uzyskanie dokładnej długości zwojów przyłożonych okazuje się być bardzo trudne i wymaga wielu wstępnych prób ustawień maszyny.

Sprężyny o formie zakończenia E i F mają większe zastosowanie w zawieszeniach pojazdów samochodowych. Szczególnie częste zastosowanie ma sprężyna Pigtail (forma E) montowana w kolumnie MacPherson'a. Zmniejszenie średnicy na końcach ma poprawiać mocowanie w podporach (Witkowski, 2011). Pozwala również uzyskać niższą wysokość zblokowania sprężyny. Forma F jest zagięciem drutu do środka, co zwiększa powierzchnię kontaktu sprężyny z podstawą w porównaniu z formą B. Wymagane jest

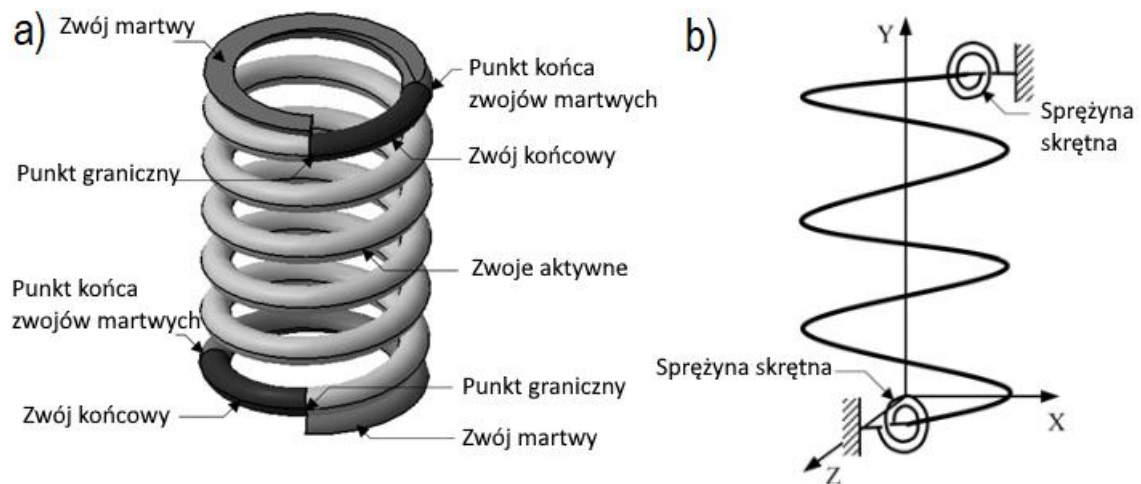
zastosowanie specjalnego uchwytu, a technologia jej wykonania jest trudniejsza (Baran, 2020).

Należy również wskazać, że wpływ na charakterystykę pracy sprężyny mają również zwoje przejściowe (Liebermann, 2006). Jest to odcinek sprężyny o zmiennym skoku rosnącym od zera przy stronie zwojów przyłożonych do wartości skoku aktywnego (rys. 2.17). Często jest pomijany w klasyfikacji, ponieważ jest to zwyczajnie progresywny zwój aktywny, ale ma on niewątpliwie wpływ na sztywność, której zmiana jest bardziej progresywna i łagodniejsza. Nie jest jednak opisany dokładny wpływ zwojów wyrównujących. Liebermann w publikacji (Liebermann, 2006) podaje, że dla około 1 – 1,2 zwojów wyrównujących najmniejszy jest kąt nachylenia podstawy sprężyny względem osi, co wpływa pozytywnie na stabilność sprężyny.



Rys. 2.17. Podział zwojów sprężyny wg Liebermanna (Liebermann, 2006)

Po za tym nie znaleziono publikacji wskazujących na jakiegokolwiek wyróżnianie zwojów przejściowych. Wynika to z tego, że powszechnie przyjmuje się, że zwoje bierne kończą się wraz z końcem styku zwojów przyłożonych. Poza tym punktem występują zwoje aktywne, co jest stwierdzeniem nadzwyczaj umownym. Przykładowo Liu i Kim (Liu, Kim, 2009) zaproponowali podział przedstawiony na rysunku 2.18. Wyróżnili w nich zwoje martwe (zeszlifowane), końcowe (od końca zeszlifowania do punktu granicznego) oraz aktywne (powyżej punktu granicznego). Ten podział jest powszechnie stosowany.



Rys. 2.18. Model sprężyny wg Liu i Kim: a) klasyfikacja zwojów, b) teoretyczny model sprężyny z podziałem zwojów z uwagi na charakter ich pracy (Liu, Kim, 2009)

W tej samej publikacji wykazano na podstawie analizy metodą elementów skończonych, że zwoje biernie również pracują, głównie na skręcanie. Pokazano, że naprężenia skręcające stopniowo zmniejszają się zmiierzając w stronę końca sprężyny. Tym samym zasadny jest zaproponowany model, w którym sprężyna naciskowa złożona tylko ze zwojów aktywnych, na końcach posiada sprężyny skrętowe. Ponadto w miarę ściskania punkt graniczny przemieszcza się w głąb zwojów aktywnych, co sprawia, że rośnie liczba zwojów biernych (Liu, Kim, 2009). Na tej podstawie opracowano model obliczania sztywności sprężyny, który zacytowano w rozdziale 4 oraz model prognozowania wartości częstości drgań własnych sprężyny. Analizując dokładność modeli wykazano, że uwzględnienie efektu zwoju końcowego jest szczególnie ważne dla analiz częstotliwościowych na przykład sprężyn zaworowych.

Niedokładność wartości sztywności sprężyny wynika z co najmniej czterech czynników, którymi są niedokładności wymiarowe sprężyn, tj. średnica drutu d , średnica podziałowa sprężyny D , liczba zwojów aktywnych n_a oraz błędy oszacowania wartości modułu sprężystości G (Branowski, 1997). Dodatkowo mniejszy wpływ na charakterystykę sprężyny ma jeszcze kąt wzniosu linii śrubowej γ (Wahl, 1944) oraz jego odchyłki na całej długości sprężyny, błędy prostopadłości osi sprężyny do powierzchni podporowych (Branowski, 1997), typ zastosowanego zwoju końcowego (Grajnert, 1995) oraz związane z nim przejście między zwojami biernymi i aktywnymi (Liebermann, 2006). Wpływ na kształt charakterystyki ma również sposób zamocowania sprężyny, tj. czy końce sprężyny są usztywnione lub czy mogą się obracać (Wahl, 1944). Dlatego rzeczywista charakterystyka sprężyny jest nieliniowa, ponieważ parametry konstrukcyjne D , n_a , γ ulegają zmianie w procesie odkształcania sprężyny (Branowski, 1997). Podczas

ściskania w pierwszym etapie powstaje nieliniowość charakterystyki wynikająca z nierównoległości czoł sprężyny, braku prostopadłości osi sprężyny do powierzchni podporowych, mimośrodowości obciążenia i błędów przyłożenia zwojów biernych. W ostatnim etapie dochodzi do niejednoczesnego blokowania zwojów czynnych. Z tego powodu zaleca się liczenie sztywności osiowej z zakresu środkowego charakterystyki, tj. dla siły z przedziału od 0,3 do 0,7 siły zblokowania sprężyny F_n (Branowski, 1997).

Różnice w wartości sztywności osiowej wynikają też z powstawania sił poprzecznych podczas ściskania. W pracy (Bobade, 2017) przedstawiono w formie diagramu Ishikawy przyczyny powstawania sił poprzecznych, z których wymieniono asymetrię sprężyny, wyboczenie, naprężenia, nieosiowe obciążenie, niejednorodność średnicy drutu, zmiana wartości skoku. Jeżeli wymienione czynniki są znaczne, powstają większe siły poprzeczne, które zmniejszają wartość siły osiowej, czyli w efekcie sztywność osiową sprężyny. Ukształtowanie zwojów końcowych ma tu też duże znaczenie. Największe wartości siły poprzecznej występują w sprężynach stożkowych (Bobade, 2017). W literaturze znaleźć można zalecenia, aby zawsze stosować tzw. połówkową liczbę zwojów, co spowodowałoby zmianę względnego ustawienia zakończeń sprężyn, zmniejszając mimośrodowość i wyrównując rozkład sztywności poprzecznych (Branowski, 1997). Zazwyczaj sprężyny posiadają po jednym zwoju biernym na obydwu końcach, ale dla długich sprężyn i przy obciążeniach zmiennych stosuje się 2 lub 2,5, co pozwala na poprawienie stabilności sprężyny (Branowski, 1997).

Mała liczba zwojów i niekorzystne ustawienie zakończeń sprężyn powoduje braki stabilności sprężyny, szczególnie dla sprężyn o czołach szlifowanych i nie wyposażonych w uchwyty (Branowski, 1997). Powstają wówczas większe momenty odrywające czoła sprężyny, powodując ich odrywanie od podpory. Norma EN 13906-1:2013(E) szczegółowo określa wartość stosunku sił i ugięć osiowych i poprzecznych, które pozwalają na stabilną pracę sprężyny, bez odstawiania podpór. Warunek ten nie uwzględnia ukształtowania zwoju końcowego, a więc zarówno liczby zwojów przyłożonych, jak i wielkości zeszlifowania ostatniego zwoju. Oznacza, to że powinien zostać zweryfikowany podczas testów stanowiskowych i numerycznych. Odstawianie podpór od powierzchni szlifowanej sprężyny powoduje zaburzenie jej pracy oraz wartości m.in. sztywności z racji zmiany warunków podparcia.

Problem niedokładności obliczania sztywności krótkich sprężyn z powodu braku uwzględniania zwojów biernych przy zastosowaniu wzoru z normy EN 13906-1:2013 (E) wskazano w publikacji (Vogt, 1934) i (Paredes, 2016). W tych artykułach podano

poprawki zwiększające liczbę zwojów aktywnych odpowiednio o 0,5 i o 0,35 zwoju, które poprawiły zbieżność wyników. Nie wskazywały jednak na konkretne liczby zwojów biernych, ale zostały przyjęte eksperymentalnie tak jakby pomijając wpływ zwojów końcowych. Zgodnie stwierdza się, że problem dotyczy sprężyn przeważnie poniżej dwóch zwojów aktywnych. Nie określa się jednak wartości reakcji poprzecznych powstających podczas ściskania osiowego, ani ich kierunku, a pozwoliłoby to łatwiej prognozować mimośrodowość sprężyn naciskowych.

Kolejnym istotnym parametrem eksploatacyjnym jest sztywność poprzeczna sprężyn naciskowych, która jest zmienna na obwodzie i ściśle zależy od zakończeń i wielkości obciążenia (Grajnert, 1995), lecz nie określono dotychczas zależności pozwalających dokładnie opisać zmienności jej rozkładu. Podaje się tylko metody uśredniające rozkład sztywności poprzecznej, tj. Wahla (Wahl, 1944), Haringxa (Haringx, 1949), Grossa (Gross, 1951) i według normy EN 13906-1:2013(E) tożsamej z metodą Haringxa (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023). Wszystko to wskazuje na konieczność podjęcia badań nad usystematyzowaniem zależności geometrii zwojów końcowych od podstawowych właściwości eksploatacyjnych, tj. sztywność osiowa, poprzeczna, mimośrodowość i stabilność.

Zakończenia sprężyn nie muszą być też wykonane z drutu o jednolitym przekroju. Często w sprężynach kolejowych stosuje się spłaszczony okrąg, celem wzmocnienia ostatniego zwoju i poprawieniu sztywności mocowania (Baran, 2020). W publikacji (Gzał, 2017) wyprowadzono wzór na naprężenia styczne w przekroju eliptycznym korzystając ze wzorów Tymoszenki. Uzyskano w niej zgodność wzorów z badaniami stanowiskowymi na wystarczającym poziomie. Tematykę sprężyn o niekołowym przekroju drutu podjęto w publikacji (Yıldırım, 2016), gdzie korzystając z teorii Castigliano wyprowadzono wzory na ugięcia sprężyn o przekroju eliptycznym pionowym i poziomym, prostokątnym, kwadratowym, okrągłym i pierścieniowym, uzyskując bardzo dobrą zgodność z modelem numerycznym. Znaczenie ma również wymiar zasadniczy drutu, ponieważ im drut jest grubszy tym mniejsza jest jego wytrzymałość zmęczeniowa z powodu większej liczby defektów struktury materiałowej niż w drutach cieńszych (Kobelev, 2018). Sprężyny również mogą mieć inny kształt niż klasyczna helisa, ponieważ mogą mieć kształt helisy trójkątnej, prostokątnej, stożkowej lub klepsydrowej. W związku z tym kolejnymi możliwymi modyfikacjami zakończeń sprężyn jest zmiana kształtu lub wymiaru jego przekroju. Poszerza to możliwości

projektowania sprężyn, a jednocześnie wymaga kolejnych badań, co czyni otwartym problem konstrukcji zakończeń sprężyn naciskowych.

2.3. Materiały stosowane w produkcji sprężyn

Najczęściej stosowanymi do produkcji sprężyn materiałami są stale sprężynowe. Norma EN 13906-1:2013(E) (Polski Komitet Normalizacyjny, 2013) wymienia stale wykonane według norm EN 10270-1, EN 10270-2 i EN 10089, które funkcjonują w katalogach sprężyn. Są to przeważnie stale z zawartością chromu, niklu i molibdenu. Ponadto norma wymienia sprężyny ze stopów miedzi z cyną, cynkiem, berylem lub kobaltem, które są zdecydowanie rzadziej stosowane niż stale. Z pośród stali wyróżniają się stale węglowe, które mają niską hartowność, nie mogą pracować w podwyższonych temperaturach, nie mogą być silnie obciążane i grubość pręta nie powinna przekraczać 10 mm (Branowski, 1997). Drugim rodzajem są stale krzemowe, które są powszechne i tanie oraz wykazują dużą odporność na odkształcenia trwałe przy małej wrażliwości na działanie karbu, a czasem ich hartowność poprawia się domieszką chromu, molibdenu, wanadu i magnezu (Branowski, 1997). Stale chromowe zaś są odporne na temperatury do 200°C, wykazują wysoką udarność, lepszą hartowność niż krzemowe, mniejszą wrażliwość na przegrzanie niż chromowo-manganowe oraz są używane do silnie obciążonych i odpowiedzialnych sprężyn (Branowski, 1997; Gross, 1951). Do pracy w podwyższonych temperaturach odpowiednie są stale z dodatkiem wolframu i wanadu (Żukowski, 1954). Temperatury do 350°C wytrzymują stale chromowo-wanadowe, wykazujące wysokie właściwości wytrzymałościowe zarówno w obciążeniach stałych jak i zmiennych (Żukowski, 1954). Jeżeli wymagana jest wysoka odporność na korozję stosuje się stale nierdzewne austenityczne umacniane obróbką plastyczną na zimno lub przemianą martenzytyczną i utwardzaniem dyspersyjnym (Branowski, 1997).

Celem uzyskania zadowalającej twardości wykonuje się obróbkę cieplną na przykład hartowanie z odpuszczaniem (Gross, 1951). Jednym z ważniejszych procesów przygotowania drutu sprężynowego jest patentowanie, mające na celu uzyskanie struktury górnego bainitu lub drobnego perlitu i osiągnięciu tym samym wytrzymałości od 1800 do 2800 MPa. Polega ono na nagrzaniu drutu do temp. 900 – 950°C, wygrzaniu w tej temperaturze i następnie ochłodzeniu, najczęściej w kąpeli ołowiowej lub solnej o temp. 480 – 510°C (PWN, 2025). Używane są one przeważnie do produkcji sprężyn naciskowych. Natomiast do produkcji naciskowych sprężyn zaworowych, a więc silnie

obciążanych dynamicznie, stosuje się druty ulepszone cieplnie, które mają lepsze właściwości niż druty patentowane (Wójcik, 1979).

Za wspomniane wcześniej uszkodzenia sprężyn mogą też odpowiadać ukryte wady materiałowe, które uwydatniają się podczas obciążeń dynamicznych i prowadzą do uszkodzenia. Typowymi wadami prętów stalowych są: naderwania rdzenia, powstania łatwo pękającej warstewki martenzytycznej, przełomy śrubowe, odwęglenie, korozja, mikropęknięcia (Wójcik, 1979).

W przypadku sprężyn głównymi właściwościami materiałowymi są Moduł sprężystości podłużnej Younga E i poprzecznej Kirchoffa G , powiązane Liczbą Poissona ν . Moduł Kirchoffa jest stosowany we wszystkich zależnościach pozwalających obliczyć ugięcie sprężyny, a więc jest istotny z punktu widzenia materiałowego. Moduł ten jest jednak zależny od wielu czynników, m.in. średnicy drutu, materiału, dodatków stopowych, obróbki i tym samym znacznie wpływa na zgodność wyników obliczeń z rzeczywistością (Żukowski, 1954). W związku z tym najlepszym rozwiązaniem jest zmierzenie jego wartości na podstawie próbki drutu, a potem podstawianie tej wartości do obliczeń.

W produkcji sprężyn mają zastosowanie również brązy, mosiądze, stopy miedzi i berylu, lub miedzi, kobaltu i berylu (Polski Komitet Normalizacyjny, 2013) oraz brązy fosforowe (Wahl, 1944). Stosowane są w miejscach, gdzie właściwości mechaniczne mogą być niższe, a wymagana jest wysoka odporność na korozję lub brak ferromagnetyków. Zastępują je coraz częściej sprężyny kompozytowe i polimerowe, szczególnie w samochodach osobowych (Chen i in., 2022). Sprężyny z tworzyw sztucznych są lżejsze od stalowych, mają wysoką wytrzymałość zmęczeniową, dużą niezawodność i odporność na korozję oraz wyższą częstotliwość drgań własnych. W sprężynach kompozytowych stosuje się włókna węglowe, bazaltowe, kewlarowe, szklane zalewane w żywicy epoksydowej. Technologie te są jednak w fazie testów prototypowych i nisko seryjnej produkcji, a opracowane zostały jako pierwsze przez Grupę VAG w samochodach Audi. Dodatkową zaletą sprężyn z tworzyw sztucznych jest możliwość kształtowania ich w niestandardowe geometrie, dzięki na przykład technologiom druku 3D (Cimolai i in., 2022). Zalety te pozwalają stwierdzić, że będzie to niewątpliwie rozwijająca się gałąź w szeroko rozumianej nauce o sprężynach.

2.4. Modelowanie pracy sprężyn

Pracę sprężyn można modelować w sposób analityczny lub numeryczny, starając się odzwierciedlić jak najdokładniej rzeczywistość. Modele analityczne często bazują na założeniach wstępnych pochodzących ze znanych wcześniej teorii na przykład belki Timoshenki (Timoshenko, 1961), zastępczy model kolumny (Haringx, 1949), teorii Castigliano (Yıldırım, 2016), pręta zakrzywionego (Grodzki, 1976). Przyjmuje się określone sztywności ścinania, zginania, skręcania i ściskania (Yıldırım, 2016; Haringx, 1949). Możliwe jest również modelowanie naprężeń resztkowych w sprężynach powstałych w procesie zwijania, wskazując możliwe miejsca występowania defektów. Celem zwiększenia dokładności uwzględnia się kąt wzniosu linii śrubowej (Kruzelecki, Życzkowski, 1990), pomijany w podstawowych zależnościach lub wprowadzając zastępczą liczbę zwojów aktywnych, uwzględniając pracującą część zwojów biernych (Vogt, 1934; Liu, Kim, 2009; Paredes, 2016).

Modele analityczne często są jednak obarczone błędem założeń metody modelowania i nie zawsze w dokładny sposób sprężyny. Największą dokładność metody te uzyskują im bardziej geometria sprężyny jest zbliżona do stosowanego modelu. Powszechnie stosowane zależności są odpowiednie dla sprężyn o liczbie zwojów aktywnych większej od 2,5 – 3 zwojów (Wahl 1944; Branowski, 1997). Sprężyny krótkie są bardziej podatne na działanie momentów gnących oraz mimośrodowości przenoszenia obciążenia. Wówczas większą rolę odgrywają zakończenia sprężyn (Branowski, 1997). Zjawiska te nie zostały jednak dokładnie przebadane w literaturze, a mogą być istotne w specjalnych konstrukcjach sprężyn.

W opisanych sytuacjach pomocne może okazać się modelowanie numeryczne metodą elementów skończonych. Wykorzystując metody komputerowe możliwe jest zamodelowanie konkretnej geometrii sprężyny, a następnie zadając określone parametry siatki elementów skończonych oraz warunki brzegowe w tym parametry kontaktu, możliwe jest zasymulowanie pracy sprężyny (Gu i in., 2020; Gzał i in., 2017). Ponadto metody numeryczne upraszczają modelowanie dla przeciętnego użytkownika. Typowymi programami do modelowania elementów mechanicznych za pomocą metody elementów skończonych są ANSYS, Abaqus, Nastran, Simpack, czy typu open-source Code Aster, Calculix lub Salome Meca (Engineering Gone Wild, 2023; Kreatorzone, 2024). Uproszczone moduły obliczeń numerycznych zazwyczaj posiadają komercyjne programy do modelowania geometrii typu CAD, np. *Autodesk Inventor*, *SolidWorks*, *Catia*.

W kwestii modelowania samej geometrii sprężyn najczęściej spotyka się zastosowanie programu SolidWorks (Gu i in., 2020; Gzal i in., 2017), Solidedge, Creo Parametric (PTC, 2025), Catia V5, SpaceClaim lub Autodesk Inventor. Sprężyny wykonywane są w oparciu o podanie podstawowych parametrów, czyli skok, średnica podziałowa, liczba zwojów, wysokość i średnica drutu. Geometrie sprężyn są dość dobrze odwzorowane, ale czasami trudności pojawiają się wówczas, gdy sprężyna posiada kilka poziomów wartości skoku, a zwłaszcza gdy duże są różnice kątów wzniosu linii śrubowej sprężyny. Może wówczas powstać wyraźna krawędź, która nie występuje w rzeczywistości. Programy stosują wyrównanie poziomu skoku, ale nie określają jego parametrów, co jest wadą tych metod. Istnieją możliwości zbudowania kodu, który wykonuje helisę po wczytaniu go w module odczytywania skryptów napisanych w języku Python. Rozwiązanie to jest lepsze, ponieważ pozwala uzyskać konkretny przebieg helisy, często w darmowym oprogramowaniu. Zostało ono opisane w kolejnym rozdziale.

Podstawową zaletą modelowania numerycznego pracy sprężyn jest obniżenie kosztów przeprowadzenia eksperymentów. W przypadku chęci przebadania dużej liczby próbek sprężyn przy wykorzystaniu rzeczywistego stanowiska badawczego koszty wykonania próbek byłyby duże, a pomiar wymagałby zaangażowania osób go wykonujących, doliczając koszty zakupu i eksploatacji stanowiska. Z drugiej strony symulacje komputerowe również wymagają poniesienia kosztów utrzymania stanowiska komputerowego oraz zakupu licencji oprogramowania, jeśli nie podlega wykorzystaniu licencja typu open-source. Wymagane jest również zatrudnienie wysoko wykwalifikowanego pracownika potrafiącego przygotować model numeryczny. Istotnym plusem symulacji jest możliwość jej parametryzacji, uzyskując powtarzalność, co pozwala zaoszczędzić koszty pracy ludzkiej. Ponadto próbki wykonane numerycznie są idealne pod względem geometrycznym, pozbawione wad produkcyjnych. Tym samym nie jest wymagane powtarzanie testu dla tej samej próbki lub powielanie liczby sztuk tej samej sprężyny, aby uzyskać statystycznie zadowalającą dokładność. Dodatkowo symulacje komputerowe umożliwiają szybkie odczytanie wartości reakcji składowych, momentów, nacisków lub naprężenia, oczywiście jeśli zostaną poprawnie obliczone. Badania rzeczywiste nie pozwalają na zbadanie tych wielkości w prosty sposób dla całego modelu. Wadą symulacji jest niedokładność w odwzorowaniu zjawisk występujących w rzeczywistości. Wiele zachowań modelu rzeczywistego jest trudna lub nie możliwa do zasymulowania. Często stosować należy uproszczenia modelu, ponieważ dokładne symulowanie zjawiska wymaga dużych mocy obliczeniowych. Sprawia to, że czasem

symulacja z pozoru prostego zjawiska, którego zbadanie w rzeczywistości zajęłoby kilka minut może zająć kilka godzin, nie licząc czasu potrzebnego na przygotowanie modelu. Wobec tego istotne jest dobre zaplanowanie eksperymentu, aby wykorzystać zarówno badania rzeczywiste jak i numeryczne, celem walidacji modelu komputerowego. W przypadku małych prób bardziej zalecane byłoby wykorzystanie tylko badań stanowiskowych.

Praca sprężyny jest trudna do odwzorowania modelowego, ponieważ geometria sprężyny jest nieregularna i zmienia się w trakcie pracy. Dodatkowo zachodzą różne zjawiska pochodzące z parametrów materiałowych, czyli naprężenia resztkowe, defekty mikrostruktury, stopień rozdrobnienia ziaren itp. Objęcie tego jednym modelem jest trudne, co potwierdzają cytowane wcześniej publikacje. Stanowi to niewątpliwie podstawowy dowód tego, że nauka o sprężynach nie jest wystarczająco rozwinięta.

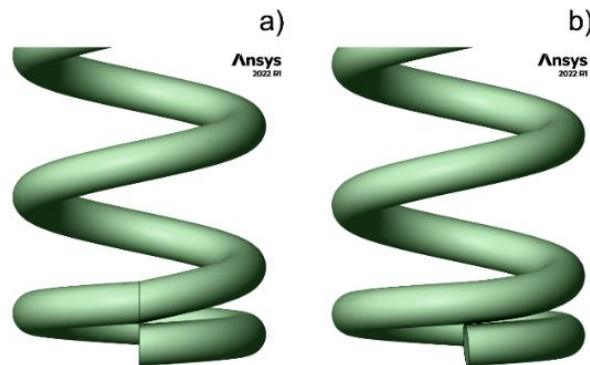
3. Algorytm generowania wirtualnych modeli bryłowych sprężyn z parametryzacją krzywizny i ciągłą interpolacją kąta wzniosu

W większości dostępnych narzędzi do modelowania geometrycznego generowanie sprężyn ogranicza się do zadawania kolejnych kątów wzniosu, pomiędzy którymi program tworzy ostre przejścia. Prowadzi to do powstawania nienaturalnych załamania w modelu, które nie występują w rzeczywistych sprężynach. W procesie wytwarzania zmiana kąta wzniosu zachodzi bowiem stopniowo, dzięki czemu geometria sprężyny charakteryzuje się łagodnymi przejściami. Z tego względu w niniejszej pracy opracowano algorytm umożliwiający bardziej zaawansowane odwzorowanie bryłowej geometrii sprężyn, poprzez parametryzację krzywizny i ciągłą interpolację kąta wzniosu.

Sformułowany algorytm jak również jego implementacja opisane zostały w artykule opublikowanym w czasopiśmie Applied Computer Science (Michalczyk, Warzecha, Baran, 2023). Opisano w nim dwa podejścia do generowania wirtualnych modeli sprężyn: z kontrolą kąta wzniosu oraz z kontrolą wysokości sprężyny. Opracowany algorytm umożliwia precyzyjne odwzorowanie geometrii w kartezjańskim układzie współrzędnych, zapewniając kontrolę nad każdym punktem tworzącym helisę. Rozwiązanie to pozwala na wierne odtworzenie zakończeń sprężyn, zwojów przejściowych i pozostałych parametrów geometrycznych wirtualnego modelu sprężyny. Narzędzie zostało zaimplementowane w języku programowania Python i podzielone na dwie zasadnicze części. Pierwsza odpowiada za generowanie listy punktów opisujących przebieg helisy definiującej sprężynę. Druga pełni funkcję interfejsu do wybranego oprogramowania, w którym tworzona jest geometria sprężyny. Obecnie dostępna jest obsługa programu SpaceClaim, będącego częścią pakietu ANSYS, oraz alternatywnego oprogramowania o otwartym kodzie źródłowym Gmsh. Należy jednak podkreślić, że struktura narzędzia umożliwia łatwe rozszerzenie tego modułu o dowolne środowisko oferujące odpowiednie API (ang. *Application Programming Interface*).

W pracy wykorzystano program SpaceClaim, ponieważ stanowi on integralną część pakietu ANSYS, który został wybrany jako podstawowe środowisko do realizacji obliczeń numerycznych. SpaceClaim wprowadza udostępnia narzędzie do tworzenia helisy, jednak generowane w ten sposób modele wykazują nieciągłości geometryczne pomiędzy kolejnymi zwojami, różniącymi się pomiędzy sobą wartością skoku (rys. 3.1).

Ograniczenie to było główną motywacją do opracowania własnego algorytmu oraz jego implementacji, umożliwiającej wierniejsze odwzorowanie rzeczywistej geometrii sprężyn.



Rys. 3.1 Model sprężyny: a) o skokowej zmianie kąta wzniosu sprężyny wykonanej przy pomocy narzędzi dostępnych w SpaceClaim, b) o zmiennym w ciągły sposób kącie wzniosu sprężyny wykonanej przy pomocy opracowanego algorytmu (Michalczyk, Warzecha, Baran, 2023)

Geometria każdej sprężyny śrubowej jest opisana równaniem parametrycznym helisy (3.1) (Yang, 2014). Równanie to umożliwia przejście ze współrzędnych biegunowych, określonych przez średnicę podziałową sprężyny D oraz parametr kątowy helisy φ , do współrzędnych kartezjańskich x, y, z . Dzięki temu możliwe jest jednoznaczne wyznaczenie położenia dowolnego punktu helisy:

$$\begin{cases} x = \frac{D}{2} \cdot \cos(\varphi) \\ y = \frac{D}{2} \cdot \sin(\varphi) \\ z = \frac{P(\varphi)}{2 \cdot \pi} \cdot \varphi \end{cases} \quad (3.1)$$

gdzie:

D – średnica podziałowa sprężyny, mm,

φ – parametr kątowy helisy, rad,

x, y, z – współrzędne w układzie kartezjańskim, mm,

P – skok sprężyny, $P = \pi \cdot D \cdot \tan(\gamma)$, mm,

$\gamma = \gamma(\varphi)$ – kąt wzniosu linii śrubowej zależny od parametru kąowego helisy, rad.

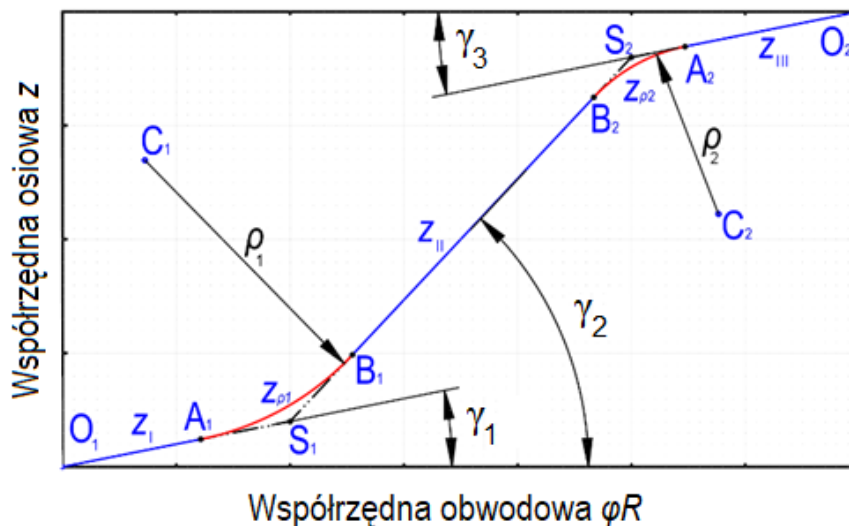
Wykorzystanie równań parametrycznych helisy nie stwarza trudności w przypadku sprężyn o stałym skoku i stałym kącie wzniosu linii śrubowej. Problemy pojawiają się jednak w przypadku sprężyn progresywnych, w których skok uzwojenia jest funkcją parametru kąowego helisy φ . W takim przypadku wysokość sprężyny zależy pośrednio od dwóch zmiennych – kąta wzniosu γ oraz parametru kąowego φ . Każda sprężyna

naciskowa o zmiennym skoku posiada fragment przejściowy, stanowiący odcinek pomiędzy różnymi poziomami skoku. Podczas procesu wytwarzania fragment ten nie jest definiowany wprost przez operatora, lecz wynika z dynamiki zmiany skoku w maszynie nawijającej sprężynę. Jeżeli przedstawi się współrzędną z w funkcji parametru kąowego φ , to przy zmiennym kącie wzniosu otrzymuje się kolejne odcinki prostoliniowe połączone w punktach odpowiadających zmianie skoku. W zaproponowanym algorytmie ostre połączenia pomiędzy tymi odcinkami zastępowane są fragmentem łuku okręgu stycznego do obu, co pozwala uzyskać płynne przejście pomiędzy różnymi wartościami skoku. W kontekście modelowania numerycznego takie rozwiązanie pozwala uniknąć lokalnych koncentracji naprężeń, szczególnie przy dużych różnicach skoku, natomiast w procesie wytwarzania sprężyn umożliwia kompensację drobnych niedokładności oraz różnic pomiędzy wysokością zamawianą a rzeczywistą (Michalczyk, Warzecha, Baran, 2023).

Na potrzeby niniejszej pracy zdefiniowano dwa parametry opisujące omawiany zakres przejściowy sprężyny, między zwojem przyłożonym, a aktywnym. Pierwszym z nich jest promień przejścia ρ - promień równania okręgu opisującego zakres przejściowy, rozciągnięty stycznie między liniami opisującymi kąt wzniosu linii śrubowej (lub skok) zwojów biernych i czynnych. Zakres przejściowy może być zdefiniowany również miarą kąową, jako kąt przejścia φ_{wyr} lub zamiennie – kąt wyrównania skoku. Stanowi on kąt obwodu sprężyny, na którym następuje płynna zmiana skoku (kąta wzniosu linii śrubowej) z poziomu zwojów biernych do czynnych, lub odwrotnie.

Jak wspomniano wcześniej, ostre połączenia pomiędzy odcinkami helisy mogą być zastępowane fragmentem łuku okręgu, co pozwala uzyskać płynne przejście pomiędzy różnymi wartościami skoku. Wyznaczanie przebiegu krzywej należy rozpocząć od znajomości średnicy podziałowej D , skoku P oraz zakresu wartości parametru kąowego φ przypisanych do tego skoku. Dane te umożliwiają określenie kątów wzniosu sprężyny oraz współczynników kierunkowych prostych odpowiadających liniowym odcinkom helisy, w których skok pozostaje stały względem parametru kąowego φ . Docelowy przebieg krzywej opisującej helisę przedstawiono na rys. 3.2, w postaci wykresu funkcji $z(\varphi)$ dla sprężyny dwustopniowej, z wyznaczonymi trzema odcinkami. Spośród nich znane jest jedynie równanie pierwszego odcinka oraz położenie punktów na osi φ , które rozgraniczają poszczególne zakresy obowiązywania stałego kąta wzniosu. W przypadku zastosowania przejść łagodnych (z użyciem promienia zaokrąglenia) punkty graniczne zostają zastąpione fragmentami łuków, które łączą sąsiednie odcinki w sposób styczny.

Punkty te oznaczono symbolem S_i , a ich współrzędne zapisano jako φ_{S_i} , z_{S_i} . Dla przykładu, punkt S_1 ma współrzędną φ_{S_1} przesuniętą względem φ_{A_1} , co wynika z potrzeby wprowadzenia fragmentu łuku zaokrąglającego. Odległość między współrzędnymi φ_{A_1} i φ_{B_1} definiuje zakres zwoju wyrównującego, opisanego w poprzednim rozdziale. Przedstawiany algorytm może bazować wyłącznie na zadanej wartości promienia zaokrąglenia ρ_i . W szczególności przy dużych różnicach skoku zaleca się, aby zakres przejściowy był możliwie duży, co pozwala uniknąć powstania ostrych zmian kierunku przebiegu drutu – zjawiska, które nie występuje w rzeczywistych sprężynach, gdyż zawsze istnieje pewien zwój przejściowy. Z drugiej strony nadmierne zwiększanie długości przejścia pomiędzy zwojem przyłożonym a aktywnym prowadzi do zmniejszenia wysokości sprężyny i redukcji prześwitu w części aktywnej, ponieważ przedział ten obejmuje wyłącznie zwoje aktywne. Dlatego dobór długości przejścia powinien być zrównoważony, tym bardziej że w sprężynach rzeczywistych obszar ten jest zazwyczaj trudny do jednoznacznej identyfikacji.



Rys. 3.2. Wykres zależności wysokości sprężyny naciskowej o trzech poziomach skoku (Michalczyk, Warzecha, Baran, 2023)

Podstawowymi wielkościami opisującymi krzywe przedstawione na rysunku są kąt wzniosu linii śrubowej oznaczany przez γ_i oraz parametr kątowy (zwicia) sprężyny φ_i . Opisują je odpowiednio wzory: (3.2) i (3.3) (Michalczyk, Warzecha, Baran, 2023).

$$\gamma_i = \operatorname{atg} \left(\frac{P_i}{\pi \cdot D} \right) \quad (3.2)$$

$$\varphi_i = 2 \cdot \pi \cdot n_i \quad (3.3)$$

gdzie:

P_i – skok sprężyny, mm,

n_i – liczba zwojów dla danego zakresu skoku P_i sprężyny.

Zależność (3.3) zaadaptowana do przypadku przedstawionego na rysunku 3.2 ma postaci opisane wzorami (3.4-3.6) (Michalczyk, Warzecha, Baran, 2023).

$$\varphi_{A1} = 2 \cdot \pi \cdot n_1 \quad (3.4)$$

$$\varphi_{A2} = 2 \cdot \pi \cdot n_2 + \varphi_{A1} \quad (3.5)$$

$$\varphi_{O2} = 2 \cdot \pi \cdot n_3 + \varphi_{A2} \quad (3.6)$$

W niniejszej dysertacji zastosowano algorytm kontroli kąta wzniosu linii śrubowej, gdyż parametr ten stanowi jeden z kluczowych elementów prowadzonych badań. Alternatywne podejście, oparte na kontroli wysokości sprężyny, powodowałoby konieczność zmiany kąta wzniosu zwojów aktywnych w celu utrzymania zadanej wysokości. Opracowany algorytm umożliwia kontrolę zarówno kąta wzniosu, jak i wysokości sprężyny, jednak parametry te nie mogą być modyfikowane jednocześnie.

Na rys. 3.2 współrzędne obu osi przedstawiono w jednostkach długości, w tym przypadku w milimetrach. Oznacza to, że również promień przejścia ρ może być wyrażony w tych samych jednostkach. Dla ułatwienia operowania wzorami zdecydowano się pozostawić współrzędną kątową w postaci φ , a jednocześnie wprowadzić wielkości zastępcze: wysokość \bar{z}_i oraz promień $\bar{\rho}_i$, zdefiniowane jako wartości podzielone przez promień podziałowy sprężyny. Zależności te przedstawiono we wzorach (3.7) i (3.8).

$$\bar{z} = 2 \cdot \frac{z}{D} \quad (3.7)$$

$$\bar{\rho} = 2 \cdot \frac{\rho}{D} \quad (3.8)$$

Ogólna postać zależności opisujących poszczególne odcinki liniowe jest wyrażona wzorem (3.9). Współczynnik kierunkowy prostej opisany symbolem a_i jest zdefiniowany jako tangens kąta wzniosu linii śrubowej γ_i (3.10).

$$\bar{z}_i = a_i \varphi + b_i \quad (3.9)$$

$$a_i = \operatorname{tg} \gamma_i \quad (3.10)$$

Skok pierwszego zakresu P_I jest równy średnicy drutu d , ewentualnie zwiększony o 0,4 – 1% dla potrzeb uniknięcia przenikania się zwojów, wynikającego z błędów numerycznych powstających na etapie tworzenia geometrii w programach CAD. Wobec tego pierwszy zakres jest wyrażony wzorem (3.11).

$$\bar{z}_I = \varphi \cdot \operatorname{tg} \gamma_1 \quad (3.11)$$

Punkt S_1 , o współrzędnych $\varphi_{S1}, \bar{z}_{S1}$ stanowi punkt wspólny prostych \bar{z}_I i \bar{z}_{II} . Współrzędną \bar{z}_{S1} opisano wzorem (3.12), natomiast φ_{S1} wyznaczono przy użyciu wzoru

(3.13), który został otrzymany poprzez rzutowanie promienia $\bar{\rho}$ na poziomy rzut odcinka $\varphi_{A1}\varphi_{S1}$.

$$\bar{z}_{S1} = \varphi_{S1} \cdot \operatorname{tg} \gamma_1 \quad (3.12)$$

$$\varphi_{S1} = \varphi_{A1} + \bar{\rho}_1 \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \right) \cdot \cos \gamma_1 \quad (3.13)$$

Zależność (3.9) została przekształcona do postaci (3.14). Następnie używając wyznaczonych współrzędnych punktu S_I i stosując przekształcenia algebraiczne wyznaczono stałą b_{II} , opisaną wzorem (3.19). W ten sposób otrzymano pełne równanie dla drugiego zakresu \bar{z}_{II} (3.20) (Michalczyk, Warzecha, Baran, 2023).

$$\bar{z}_{II} = \varphi \cdot \operatorname{tg} \gamma_2 + b_{II} \quad (3.14)$$

$$\bar{z}_{S1} = (\varphi_{A1} + \bar{\rho}_1 \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \right) \cdot \cos \gamma_1) \cdot \operatorname{tg} \gamma_1 \quad (3.15)$$

$$\bar{z}_{S1} = (\varphi_{A1} + \bar{\rho}_1 \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \right) \cdot \cos \gamma_1) \cdot \operatorname{tg} \gamma_2 + b_{II} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} & (\varphi_{A1} + \bar{\rho}_1 \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \right) \cdot \cos \gamma_1) \cdot \operatorname{tg} \gamma_1 \\ & = (\varphi_{A1} + \bar{\rho}_1 \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \right) \cdot \cos \gamma_1) \cdot \operatorname{tg} \gamma_2 + b_{II} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \operatorname{tg} \gamma_2 + \frac{b_{II}}{(\varphi_{A1} + \bar{\rho}_1 \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \right) \cdot \cos \gamma_1)} \quad (3.18)$$

$$b_{II} = (\operatorname{tg} \gamma_1 - \operatorname{tg} \gamma_2) \cdot (\varphi_{A1} + \bar{\rho}_1 \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \right) \cdot \cos \gamma_1) \quad (3.19)$$

$$\bar{z}_{II} = \varphi \cdot \operatorname{tg} \gamma_2 + (\operatorname{tg} \gamma_1 - \operatorname{tg} \gamma_2) \cdot (\varphi_{A1} + \bar{\rho}_1 \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \right) \cdot \cos \gamma_1) \quad (3.20)$$

W analogiczny sposób obliczono kolejne zakresy sprężyny o stałym kącie wzniosu. Pomiedzy punktami A_1 i B_1 poprowadzono łuk o środku w punkcie C_1 i współrzędnych $\varphi_{C1}, \bar{z}_{C1}$. Współrzędne te wyznaczono w odniesieniu do punktu A_1 , wykorzystując fakt, że promień $\bar{\rho}_1$ jest styczny do prostej \bar{z}_I . Ich wartości określić można na podstawie wzorów (3.21) i (3.22) (Michalczyk, Warzecha, Baran, 2023).

$$\varphi_{C1} = \varphi_{A1} - \bar{\rho}_1 \sin \gamma_1 \quad (3.21)$$

$$\bar{z}_{C1} = \varphi_{A1} \tan \gamma_1 + \bar{\rho}_1 \cos \gamma_1 \quad (3.22)$$

Położenie współrzędnych środka okręgu może się różnić w zależności od wzajemnej relacji współczynników kierunkowych prostych opisujących poszczególne zakresy. Relacje te zostały ujęte w postaci warunków (3.23) i (3.24).

$$\begin{aligned} \text{Jeżeli } a_i < a_{i+1} \text{ to:} \\ \varphi_{O_i} < \varphi_{S_i} \text{ oraz } z_{O_i} > z_{S_i} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \text{Jeżeli } a_i > a_{i+1} \text{ to:} \\ \varphi_{O_i} > \varphi_{S_i} \text{ oraz } z_{O_i} < z_{S_i} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Równanie łuku o środku w punkcie C_1 zapisano we wzorze (3.25). Po dokonaniu odpowiednich przekształceń algebraicznych otrzymano postać funkcji $\overline{z_{\rho 1}}$, przedstawioną we wzorze (3.26) (Michalczyk, Warzecha, Baran, 2023). Ogólną postać tej funkcji, zależną od warunków (3.23 - 3.24) podano we wzorze (3.27).

$$(\varphi - \varphi_{C1})^2 + (\overline{z_{\rho 1}} - \overline{z_{C1}})^2 = \bar{\rho}_1 \quad (3.25)$$

$$\overline{z_{\rho 1}} = \overline{z_{C1}} - \bar{\rho}_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi - \varphi_{C1}}{\bar{\rho}_1}\right)^2} \quad (3.26)$$

$$\overline{z_{\rho i}} = +/- \bar{\rho}_i \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi - \varphi_{Ci}}{\bar{\rho}_i}\right)^2} + \overline{z_{Ci}} \quad (3.27)$$

W poprzednich rozważaniach przedstawiono sposób wyznaczania przebiegu poszczególnych odcinków helisy. Uzupełnieniem tego podejścia jest obliczenie współrzędnych końca helisy, co jest istotne przy wyznaczaniu całkowitej wysokości helisy oraz sprężyny. Zadanie to rozwiązano poprzez zastosowanie analogicznych przekształceń algebraicznych, jak w przypadku początku helisy. W pracy (Michalczyk, Warzecha, Baran 2023) podano wzory na współrzędną kątową punktu S_2 (3.28) oraz na trzeci zakres skoku sprężyny $\overline{z_{III}}$ (3.29).

$$\varphi_{S2} = \varphi_{A2} - \bar{\rho}_2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_2 - \gamma_3}{2}\right) \cdot \cos \delta_3 \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \overline{z_{III}} = (\varphi - \varphi_{S2}) \cdot \operatorname{tg} \gamma_3 + \varphi_{S2} \cdot \operatorname{tg} \gamma_2 \\ + \left(\varphi_{A1} + \bar{\rho}_1 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}\right) \cdot \cos \gamma_1\right) (\operatorname{tg} \gamma_1 - \operatorname{tg} \gamma_2) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Równanie okręgu w tym przypadku powiązane jest z ostatnim zakresem liniowym helisy, określonym kątem wzniosu γ_3 . Łuk jest opisany zależnością (3.30), natomiast współrzędne jego środka przedstawiono we wzorach (3.31) oraz (3.32). (Michalczyk, Warzecha, Baran, 2023).

$$\overline{z_{\rho 2}} = \overline{z_{C2}} + \bar{\rho}_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi_{C2} - \varphi}{\bar{\rho}_2}\right)^2} \quad (3.30)$$

$$\varphi_{C2} = \varphi_{A2} + \bar{\rho}_2 \sin \gamma_3 \quad (3.31)$$

$$\bar{z}_{C2} = \bar{z}_{A2} - \bar{\rho}_2 \cos \gamma_3 \quad (3.32)$$

Wysokość helisy H_h odpowiada wartości współrzędnej \bar{z}_{O2} pomnożonej przez promień podziałowy, co przedstawiono we wzorze (3.33). Wartość tej współrzędnej oblicza się na podstawie wzoru (3.29) dla końcowej wartości parametru kąтового φ , odpowiadającej ostatniemu zwojowi sprężyny. Ostateczna wysokość sprężyny H_{spr} o końcach szlifowanych, której poświęcona jest niniejsza praca, została wyrażona wzorem (3.34). Kontrola wysokości sprężyny jest konieczna, aby uzyskać realistyczne odwzorowanie jej geometrii – można ją prowadzić bezpośrednio, niezależnie od skoku czy kąta wzniosu albo pośrednio, poprzez iteracyjne dostosowywanie parametrów wejściowych tak, aby uzyskana wysokość odpowiadała wartości rzeczywistej.

$$H_h = \frac{D}{2} \cdot \bar{z}_{III}(\varphi = \varphi_{O2}) \quad (3.33)$$

$$H_{spr} = H_h - 2 \cdot (q_{sz} \cdot d) \quad (3.34)$$

gdzie:

D – średnica podziałowa sprężyny, mm,

q_{sz} – część zeszlifowana obwodu sprężyny, np. 3/4, bezwymiarowe,

d – średnica drutu, mm.

Zwiększanie wartości promieni $\bar{\rho}_1$ i $\bar{\rho}_2$ powoduje skrócenie zakresu zwojów aktywnych, opisanego funkcją \bar{z}_{II} . W skrajnym przypadku, gdy promienie osiągną wartości maksymalne, zakres ten może zostać całkowicie wyeliminowany. Aby zapewnić poprawność generowanych modeli, konieczne jest spełnienie warunku (3.35), który stanowi relację pomiędzy kątami φ_i a liczbą zwojów aktywnych oznaczoną w tym przypadku jako n_2 . Po odpowiednich przekształceniach równanie to można zapisać w postaci (3.36) (Michalczyk, Warzecha, Baran, 2023).

$$\varphi_{B1} - \varphi_{A1} + \varphi_{A2} - \varphi_{B2} \leq 2\pi n_2 \quad (3.35)$$

$$\bar{\rho}_1 \tan\left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}\right) \cdot (\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2) + \bar{\rho}_2 \tan\left(\frac{\gamma_2 - \gamma_3}{2}\right) \cdot (\cos \gamma_2 + \cos \gamma_3) \leq 2\pi n_2 \quad (3.36)$$

Przy założeniu jednakowych kątów wzniosu linii śrubowej na obu końcach sprężyny, ostateczny warunek przyjmuje postać ze wzoru (3.37).

$$(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2)_{max} = \frac{2\pi n_2}{\tan\left(\frac{\gamma_2 - \gamma_3}{2}\right) \cdot (\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2)} \quad (3.37)$$

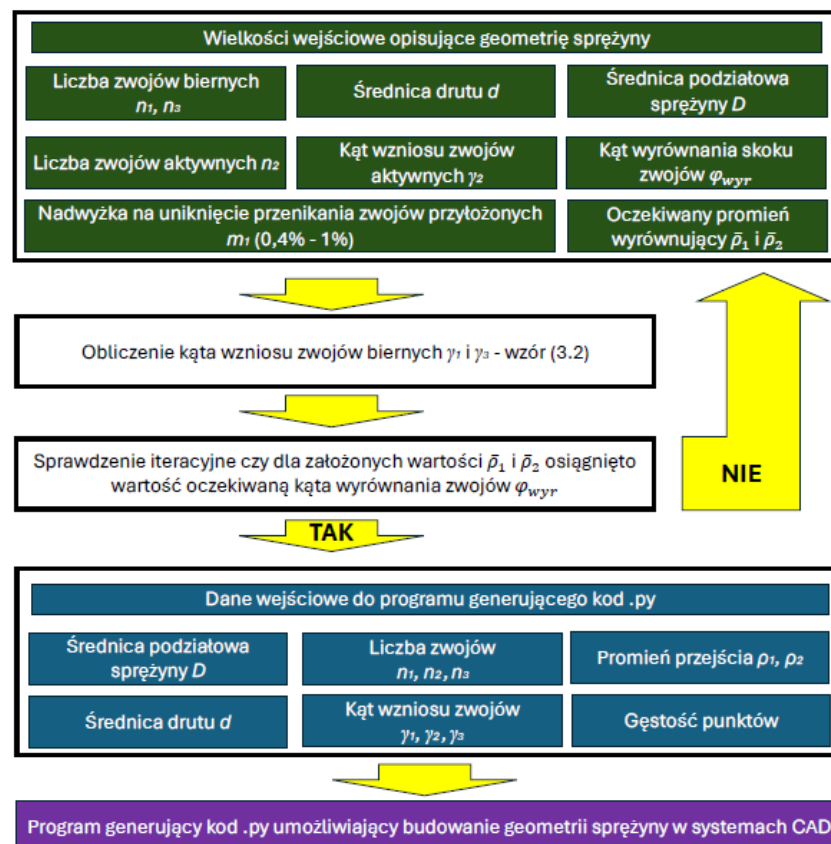
Powyższe równania mogą zostać zaimplementowane w dowolnym środowisku obliczeniowym. W niniejszej pracy wykorzystano program Matlab. Obliczenia

proawdzono w sposób iteracyjny, tj. przyjmując określoną wartość promienia $\bar{\rho}_1$, na podstawie której wyznaczano poszczególne współrzędne kątowe φ_i . Weryfikacja zgodności z warunkiem (3.37) była konieczna jedynie dla dużych wartości promieni, odpowiadających pełnej progresywności wzrostu skoku. W celu ułatwienia interpretacji i jednoznacznego pomiaru promienia wprowadzono opis zakresu przejściowego w postaci miary kątowej, oznaczonej jako zmienna φ_{wyr} , określająca kąt wyrównania skoku zwojów. Wielkość tę opisano zależnością (3.38).

$$\varphi_{wyr} = \varphi_{B1} - \varphi_{A1} \quad (3.38)$$

Zakres wyrównujący może zatem odpowiadać dowolnej części zwoju. Dokładną wartość promienia $\bar{\rho}_1$ można wyznaczyć w sposób iteracyjny, uzyskując przedział φ_{wyr} z dokładnością +/- 1°.

Całość procedury związanej z wykorzystaniem algorytmu generowania geometrii sprężyn, opisanego w pracy (Michalczyk, Warzecha, Baran, 2023) została zilustrowana schematem blokowym przedstawionym na rys. 3.3. Wynikiem działania zaimplementowanego programu jest plik z rozszerzeniem .py, możliwy do odczytania przez oprogramowanie typu CAD (SpaceClaim) służące do modelowania geometrii.

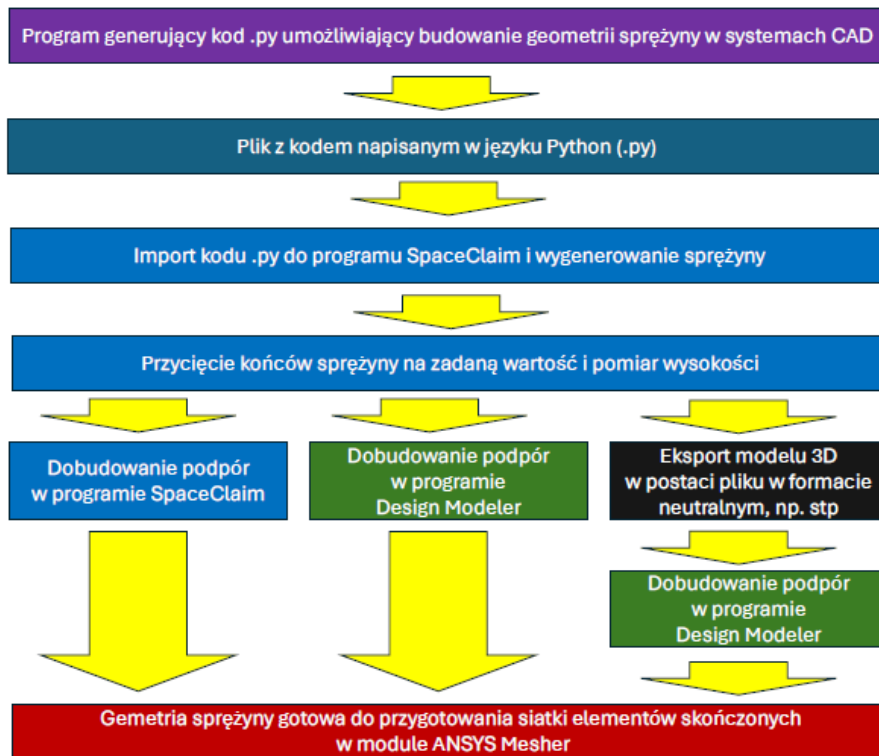


Rys. 3.3. Schemat blokowy postępowania przy przygotowaniu danych do programu tworzącego skrypt generujący geometrię sprężyny w programie SpaceClaim lub Gmsh, źródło: opracowanie własne na podstawie (Michalczyk, Warzecha, Baran, 2023)

Kolejnym etapem jest sposób postępowania z plikami oraz modelowania geometrii sprężyny, przedstawiony na rys. 3.4. Wygenerowany plik *.py* otwierany i uruchamiany jest w programie SpaceClaim. W wyniku wykonania obliczeń tworzona jest jednolita bryła sprężyny, początkowo bez szlifowanych końców. Następnie w programie SpaceClaim przeprowadza się operacje przycięcia (zeszlifowania) końców, zazwyczaj na długość odpowiadającą $3/4$ obwodu sprężyny. W ten sposób uzyskuje się docelową geometrię modelowanej sprężyny o określonej wysokości, istotnej na etapie dobudowy podpór.

Dalsza obróbka modelu polega na przecięciu sprężyny wzdłuż osi *z*, jednokrotnie lub wielokrotnie, w celu utworzenia odrębnych powierzchni ułatwiających definiowanie kontaktu oraz budowę siatki elementów skończonych. Na tym etapie dobudowywane są również podpory sprężyny. We wszystkich modułach, dla każdego fragmentu drutu sprężyny, należy aktywować opcję „*Shared Topology*”, aby uzyskać spójną geometrię przeznaczoną do obliczeń numerycznych. W konsekwencji pomiędzy powierzchniami przecięcia drutu domyślnie tworzone jest wiązanie typu „*Bonded*”. Tak przygotowany model przekazywany jest następnie do modułu ANSYS Mesher, w którym generowana jest jego siatka elementów skończonych.

Przedstawione procedury umożliwiły opracowanie kompletnego algorytmu generowania oraz przygotowania modeli geometrycznych sprężyn do analiz numerycznych, pokazanego na rysunku 3.4. Otrzymana metodologia pozwala na wierne odwzorowanie rzeczywistej geometrii sprężyn oraz na uzyskanie modeli wolnych od nieciągłości topologicznych, odpowiednio przygotowanych do budowy siatki elementów skończonych. Rozdział ten stanowi podstawę dalszych analiz numerycznych, w których oceniono wpływ parametrów geometrycznych sprężyny na jej charakterystyki mechaniczne.



Rys. 3.4. Schemat blokowy procesu budowania geometrii sprężyny z siatką elementów skończonych

4. Sztywność osiowa i reakcje poprzeczne w warunkach osiowego ściskania sprężyn

Sztywność osiowa sprężyn naciskowych jest ich podstawowym parametrem eksploatacyjnym. Dla sprężyn o dużej liczbie zwojów aktywnych zgodność zależności (4.2) podanej w normie EN 13906-1:2013(E) z wynikami doświadczeń jest duża, jednak dla sprężyn o niewielkiej liczbie zwojów aktywnych, rozbieżności pomiędzy uzyskiwanymi wynikami mogą być już znaczące (Branowski, 1997; Wahl, 1944). Ponadto wpływ konkretnych zakończeń na sztywność osiową i wartość reakcji poprzecznej pochodzącej od osiowego ściskania w kontekście zakończeń sprężyn nie został w literaturze wyczerpująco wyjaśniony. W niniejszym rozdziale zostanie przedstawiona propozycja rozwiązania tego problemu. Skupiono się na sprężynach naciskowych o zwojach przyłożonych i szlifowanych.

4.1. Metody analityczne obliczania sztywności osiowej

Sztywność osiową k wyraża się jako stosunek siły F do ugięcia s wywołanego przez jej działanie, co podaje zależność (4.1) (Meissner, Schrocht, 2007). Dla obliczeń analitycznych powszechnie stosowaną zależnością pozwalającą obliczyć sztywność osiową sprężyn naciskowych k_N jest zależność (4.2) według normy EN 13906-1:2013 (E) oraz wzór na ugięcie s (4.3) będący przekształceniem (4.1) i (4.2).

$$k = \frac{F}{s} = \frac{\Delta F}{\Delta s} \quad (4.1)$$

$$k_N = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n_a} \quad (4.2)$$

$$s = \frac{8 \cdot D^3 \cdot n_a \cdot F}{G \cdot d^4} \quad (4.3)$$

gdzie:

F – siła osiowa, ΔF – przyrost siły osiowej, N,

s – ugięcie osiowe, Δs – przyrost ugięcia osiowego, mm,

G – moduł sprężystości poprzecznej Kirchhoffa, MPa,

d – średnica drutu, mm,

D – średnica podziałowa sprężyny, mm,

n_a – liczba zwojów aktywnych sprężyny.

Wzory te są uproszczone i nie uwzględniają kąta wzniosu zwojów linii śrubowej γ . Jak podano w (Wahl, 1944) dla sprężyn o kącie mniejszym niż 10° błąd wynikający z jego nieuwzględnienia nie przekracza 2,5%. Wahl wskazuje, że większy wpływ na sztywność niż kąt wzniosu mają wymienione wcześniej parametry oraz kształt zwoju końcowego. Zależność (4.4) pozwala obliczyć sztywność osiową uwzględniając kąt wzniosu zakładając sztywne mocowanie końców sprężyny, natomiast zależność (4.5) dla założenia swobodnie zamocowanych końców sprężyny (Branowski, 1997).

$$k_{\gamma S} = \frac{4 \cdot \cos(\gamma) \cdot (E \cdot I \cdot \sin^2 \gamma + G \cdot I_t \cdot \cos^2 \gamma)}{\pi \cdot D^3 \cdot n_a} \quad (4.4)$$

$$k_{\gamma L} = \frac{4 \cdot \cos(\gamma)}{\left(\frac{\sin^2 \gamma}{E \cdot I} + \frac{\cos^2 \gamma}{G \cdot I_t}\right) \cdot \pi \cdot D^3 \cdot n_a} \quad (4.5)$$

gdzie:

γ – kąt wzniosu zwojów sprężyny, rad,

E – moduł sprężystości podłużnej Younga, MPa,

I – osiowy moment bezwładności przekroju drutu, mm^4 ,

I_t – biegunowy moment bezwładności przekroju drutu, mm^4 .

Podobne podejście uwzględniające kąt wzniosu linii śrubowej γ , wysokość nieobciążonych zwojów aktywnych H_a , początkowy promień podziałowy sprężyny R_0 , wpływ ściskania EI oraz ścinania, uwzględniany w liczbie Poissona ν , zaproponowali Krużelecki i Życzkowski, co wyrażono zależnością (4.6) (Krużelecki, Życzkowski, 1990).

$$k_K = \frac{E \cdot I \cdot \sin(\gamma)}{R_0^2 \cdot (1 + \nu \cdot \cos^2(\gamma)) \cdot H_a} \quad (4.6)$$

Uzupełnieniem metody Krużeleckiego i Życzkowskiego jest zależność Yildirim (4.7), ponieważ uwzględnia sztywność ściskania K_c (4.8), zginania K_b (4.9), ścinania K_s (4.10) oraz skręcania K_t (4.11) (Yildirim, 2016).

$$k_Y = \left(\frac{1}{4} D n_a \pi \left(\cos(\gamma) \left(\frac{4}{K_s} + \frac{D^2}{K_t} \right) + \sin(\gamma) \tan(\gamma) \left(\frac{4}{K_c} + \frac{D^2}{K_b} \right) \right) \right)^{-1} \quad (4.7)$$

$$K_s = \frac{G \pi d^2}{4j}, \quad j = 1,1 \text{ lub } j = \frac{7 + 6\nu}{6(1 + \nu)} \quad (4.8)$$

$$K_c = 2(1 + \nu) \cdot \frac{G \pi d^2}{4} \quad (4.9)$$

$$K_b = 2(1 + \nu) \cdot \frac{G \pi d^4}{64} \quad (4.10)$$

$$K_t = \frac{G \pi d^4}{32} \quad (4.11)$$

Wahl (Wahl, 1944) proponuje modyfikację wzoru klasycznego (4.2), poprzez pomnożenie go przez współczynnik zależny od wskaźnika sprężyny C . Zależność jest opisana równaniem (4.12).

$$k_{W1} = k_N \cdot \left(1 + \frac{3}{16} \left(\frac{1}{C^2 - 1} \right) \right) \quad (4.12)$$

Dokładniejszą metodą jest uwzględnienie kąta wzniosu linii śrubowej sprężyny, co uwzględniono w rozszerzonej metodzie Wahla zdefiniowaną wzorem (4.13) (Wahl, 1944).

$$k_{W2} = \frac{k_N}{\frac{\cos(\gamma)}{\left(1 + \frac{3}{16} \left(\frac{\cos^4(\gamma)}{C^2 - 1} \right) \right)} + \frac{2G}{E} \cdot \sin(\gamma) \cdot \tan(\gamma)} \quad (4.13)$$

Inną metodą opartą o równania belki Timoshenki stosowaną dla większych kątów wzniosu helisy, uwzględniającą kąt wzniosu, sztywność zginania i skręcania opracował Timoshenko (Yıldırım, 2016; Timoshenko, 1961), którą po wykonaniu niezbędnych przekształceń przedstawia wzór (4.14).

$$k_T = \cos(\gamma) \cdot \left(2\pi n_a R_0^3 \left(\frac{\sin^2(\gamma)}{K_b} + \frac{\cos^2(\gamma)}{\left(1 + \frac{3}{16} \left(\frac{1}{C^2 - 1} \right) \right) K_t} \right) \right)^{-1} \quad (4.14)$$

Kolejną metodą, którą zacytowano w publikacji (Yıldırım, 2016) zaproponował Ancker i Goodier w dwóch formułach rozszerzonej i uproszczonej, lecz z uwagi na podobne wyniki zacytowano wersję uproszczoną, którą wyraża wzór (4.15).

$$k_{AG} = k_N \cdot \left(1 - \frac{3}{16} \left(\frac{1}{C} \right)^2 + \frac{(3 + \nu)}{2(1 + \nu)} \tan^2(\gamma) \right)^{-1} \quad (4.15)$$

Metodę uwzględniającą kąt wzniosu linii śrubowej ugiętej sprężyny γ_u zaproponowali Kato i Suzuki w publikacji (Kato, Suzuki, 2021), co definiuje wzór (4.16). Uwzględnienie ugięcia sprawia, że teoretycznie zamknięte w jego wyniku zwoje bliskie końcowym zostały uwzględnione, jednak nie można określić w jakim stopniu do tego doszło.

$$k_{KS} = k_N \cdot \left(1 + \frac{2G \tan^2(\gamma_u)}{E} \right)^{-1} \quad (4.16)$$

Wszystkie wymienione wzory odnoszą się jedynie do liczby zwojów aktywnych. Pomija się fakt pracy zwojów biernych, o czym wspomniano wcześniej. Bez uwzględnienia wpływu zwojów biernych nie jest możliwe dokładne obliczenie sztywności osiowej. Na problem ten wskazał jako pierwszy Vogt w 1934 roku (Vogt,

1934), proponując dodanie połowy zwoju do liczby zwojów czynnych uzyskując zastępczą liczbę zwojów używaną do obliczeń parametrów sprężyn. W 2016 roku Paredes zaproponował zmianę poprzez dodanie 0,35 zwoju do liczby zwojów aktywnych (Paredes, 2016). Wobec tego zależności te można opisać następującą uogólnioną postacią (4.17), gdzie wzór podstawowy (4.2) uzupełniono o korekcyjną liczbę zwojów aktywnych n_{cor} .

$$k_{V,P} = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot (n_a + n_{cor})} \quad (4.17)$$

Uwzględnienie zwojów biernych nieszlifowanych zaproponowali Liu i Kim w publikacji (Liu, Kim, 2009). Wskazano w niej, że obecna klasyfikacja zwojów czynnych i biernych nie jest odpowiednia, ponieważ zwoje bierne również pracują podczas ściskania sprężyny, głównie wykazując naprężenia skręcające. Wyróżniono tym samym zwoje nieaktywne (do końca powierzchni zeszlifowanej), końcowe efektywne i aktywne (rys. 2.18a), z czego nieaktywne i końcowe są nadal zwojami biernymi w powszechnie stosowanej klasyfikacji. Spowodowało to zaproponowanie modelu sprężyny zakończonej sprężynami spiralnymi o osi stycznej do linii głównej helisy (rys. 2.18b). Wzór opisujący niniejszy model opisuje zależność (4.18).

$$k_{LK} = k_N \cdot \frac{n_a}{x_n + x_{end}} \quad (4.18)$$

gdzie:

x_n – liczba zwojów licząc od dolnego punktu granicznego,

x_{end} – liczba efektywnych zwojów końcowych w dolnej części sprężyny.

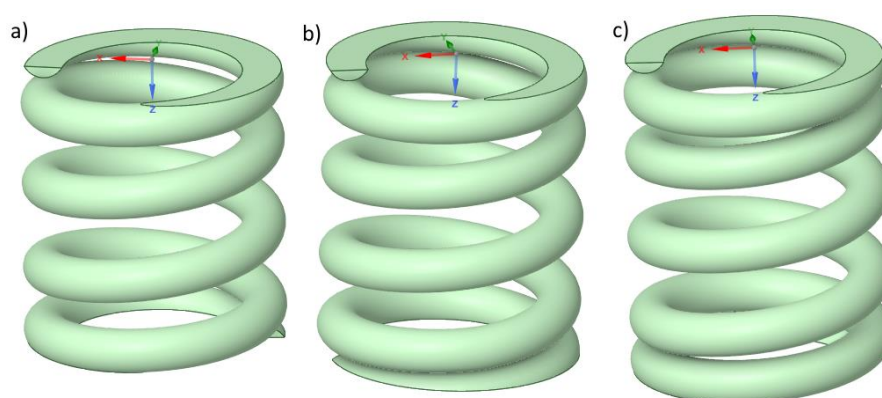
Przedstawione metody opierają się o założenia teoretyczne, wynikające z zasad mechaniki i wytrzymałości materiałów. Ich dokładność zostanie porównana w kolejnym podrozdziale. Jednak cel przeprowadzanych badań polega na wyznaczeniu nowego wzoru opartego o doświadczenia empiryczne – stanowiskowe oraz numeryczne. Jeśli udało się sformułować metodę uwzględniającą dokładny kształt zwojów końcowych, jako wielkość wejściową do obliczeń sztywności, byłoby to podejście nowatorskie, z punktu widzenia nauki o sprężynach. Literatura też nie wykazuje, żadnych metod analitycznych pozwalających obliczyć wartość reakcji poprzecznej, pochodzącej od osiowego ściskania sprężyny oraz kąta tej reakcji. Reakcja ta wpływa na rozkłady sztywności poprzecznych sprężyny. Zagadnienie to będzie analizowane w dalszej części pracy.

4.2. Badania stanowiskowe

4.2.1. Próbkki sprężyn

Badania stanowiskowe sztywności osiowej pozwalają na weryfikację metod analitycznych oraz zbudowanie modelu numerycznego, który umożliwi rozszerzenie próby badawczej. Jako przedmiot badań zostały wybrane próbki sprężyn naciskowych z drutu o średnicy 5 mm ze stali sprężynowej 55CrSi FD Becrosi 26, zgodnej z normą EN 10270-2, o Module Younga 206 GPa, oraz Module Kirchhoffa 79,5 GPa. Dane te zostały poddane weryfikacji w dalszej części pracy. Sprężyny wykonano w kilku procesach technologicznych, na które składało się zwijanie na maszynie OMD Coiler C12 CNC, odpuszczanie w temperaturze 220°C przez 15 minut, szlifowanie na maszynie OMD Grinder Ma6/2E, a następnie ponowne odpuszczanie w 220°C w czasie 10 minut. Dodanie procesu odpuszczania miało zniwelować naprężenia powstałe w wyniku procesów zwijania i szlifowania, ale nie ma możliwości sprawdzenia na jakim poziomie są te naprężenia, więc zaufano doświadczeniu i wiedzy producenta.

Celem przeprowadzenia badań wykonano 18 próbek, każda w trzech egzemplarzach. Sprężyny miały indeks C równy 5 i 7, liczbę zwojów aktywnych $n_a = 2,5$; 2,75 oraz 3, skok $P = 10$ mm (czyli kąty wzniosu γ odpowiednio względem wskaźnika 7,26° i 5,2°) oraz długość styku zwojów biernych z czynnymi: 0; 0,25 i 0,5 zwoju. Na rysunku 4.1 pokazano 3 trójwymiarowe modele sprężyn różniące się długością styku pomiędzy zwojami biernymi a czynnymi, wykonane w programie SpaceClaim. Natomiast rysunek 4.2 przedstawia wszystkie próbki sprężyn użyte do badań bez drugich i trzecich egzemplarzy tych samych próbek.



Rys. 4.1. Sprężyny o styku a) punktowym, b) 0,25 długości zwoju, c) 0,5 zwoju (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023)



Rys. 4.2. Zdjęcie poglądowe próbek sprężyn wykonane do badań; oprac. na podst. (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023)

Próbki poddano kontroli jakości poprzez pomiar wysokości, prześwitu międzyzwojowego oraz długości styku zwojów biernych i aktywnych. Wysokość i prześwit mierzono suwmiarką elektroniczną ze względu na odchyłki mierzonych wymiarów względem wartości nominalnych. Norma EN 13298:2003(E) dopuszcza tolerancję wysokości o wartości 1% nominalnej wysokości, lecz z punktu widzenia badań należy ocenić, które sprężyny są najbardziej zbliżone do zadanej geometrii. Domyślna tolerancja sztywności osiowej podawana przez tę samą normę wynosi +/-5%, dla sprężyn o liczbie zwojów nie mniejszej od 5. Natomiast przykładowo dla 3 zwojów tolerancja ta wynosi już +/-8,3%. Norma natomiast nie precyzuje odchyłek długości styku pomiędzy zwojami biernymi a czynnymi. Pomiaru styku dokonano poprzez wkładanie blaszki szczelinomierza o grubości 0,07 mm między stykające się zwoje, sprawdzając w którym momencie blaszka ulegnie zablokowaniu. Sprężynę ustawiano na kartce papieru i odrysowywano na niej kąt długości styku z jednego i drugiego końca sprężyny, mierząc go kątomierzem z dokładnością 1°. Metodę pomiaru zilustrowano na rysunku 4.3. Wyniki pomiarów zamieszczono w tabeli 4.1 pogrubiając wartości wysokości najbardziej zbliżonych do teoretycznej oraz sprężyny o kącie przylegania zwojów najbardziej zbliżonym do modelu teoretycznego.



Rys. 4.3. Metoda pomiaru kąta styku zwojów biernych

Tab. 4.1. Zmierzone wartości prześwitów, wysokości i kątów przylegania zwojów

Wskaźnik C [-]	Liczba zwojów aktywnych n_a [-]	Długość styku zwojów s [-]	Wysokość teoretyczna H_T [mm]	Uśredniony prześwit między zwojami [mm]	Wysokość sprężyny 1 [mm]	Wysokość sprężyny 2 [mm]	Wysokość sprężyny 3 [mm]	Kąty długości styku zwojów z obydwu końców [°]		
								Sprężyna 1	Sprężyna 2	Sprężyna 3
5	2,5	0	32,5	4,25	32,5	32,5	32,4	0	0	0
		0,25	35	4,8	34,6	34,6	34,4	105/95	120/98	110/117
		0,5	37,5	4,65	37,4	37,6	37,6	130/200	130/200	120/200
	2,75	0	35	4,97	35,3	35	35,7	0	0	0
		0,25	37,5	4,75	36,9	36,9	37,2	115/130	115/120	125/120
		0,5	40	4,75	39,9	39,7	40,1	200/140	135/210	210/135
	3	0	37,5	4,95	37,7	37,4	37,6	0	0	0
		0,25	40	4,6	39,2	39,3	39,25	105/120	115/120	110/125
		0,5	42,5	4,75	42,4	41,9	42,25	115/180	125/190	125/200
7	2,5	0	32,5	4,4	32,9	32,5	33	0	0	0
		0,25	35	4,7	35	35,3	35,1	38/90	30/80	55/93
		0,5	37,5	4,95	37,8	37,6	37,9	155/170	155/178	160/170
	2,75	0	35	4,5	34,9	34,9	35	0	0	0
		0,25	37,5	5	37,8	38	37,9	100/78	100/60	95/90
		0,5	40	4,7	39,1	39,5	39,25	168/175	164//173	168/163
	3	0	37,5	4,7	38	38	38	0	0	0
		0,25	40	4,95	40,2	40,3	40	80/90	74/90	50/90
		0,5	42,5	4,7	41,4	41,3	41,8	160/200	155/200	160/195

Na podstawie tabeli 4.1 przeprowadzono ocenę dokładności próbek, w wyniku której stwierdzono, że uzyskany prześwit między zwojami był mniejszy od wzorcowej

wartości 5 mm średnio o 5,5%, z czego mediana wyniosła również 5,5%, a wartość maksymalna 15%. Wysokość sprężyny odbiegała od wartości wzorcowej o średnio o 0,32%, przy medianie 0,12% oraz maksymalnym zaniżeniu wysokości o 2,8%, a zawyżeniu o 1,3%. Odchylenie wartości kąta styku występowało najczęściej dla sprężyn o styku 0,5 zwoju i osiągało nawet 65°. Dla długości kontaktu 0,25 i 0,5 średnie odchylenie wartości kąta styku wynosiło około 23° i nie było ono symetryczne, tzn. z jednej strony kontakt był dłuższy niż wymagany, a z drugiej krótszy, nawet o ponad 50%. Powoduje to niemożliwość odwzorowania pracy tych sprężyn przy użyciu modelu numerycznego bez wykonania dokładnych pomiarów i przeniesienia ich do przestrzeni wirtualnej.

Przedstawiony w rozdziale 3 algorytm pozwala w sposób dokładny odwzorować wartości długości styku i wysokości, toteż na potrzeby walidacji dokładnie odwzorowano konkretny model. Ze względu na trudność we wprowadzaniu kilku poziomów kąta wzniosu linii śrubowej, zdecydowano, że przedmiotem badań będą próbki o jednej wartości skoku dla zwojów aktywnych i jednej dla biernych. Analizowane próbki rzeczywiste miały kilka poziomów skoku w części aktywnej, co możliwe jest do zmierzenia poprzez zastosowanie maszyny współrzędnościowej, skanowania 3D lub odwzorowania obrysu zewnętrznego sprężyny poprzez jej przetoczenie bez poślizgu po płaskiej powierzchni pokrytej kalką maszynową. Na wstępnym etapie walidacji zdecydowano, że pomiary wykonane w tabeli 4.1 wystarczą dla budowy modeli wzorcowych dla programu ANSYS. Do weryfikacji modelu numerycznego wybrano sprężyny o geometrii najbardziej zbliżonej do teoretycznej i zaznaczono je grubą czcionką w tabeli 4.1.

4.2.2. Badania materiałowe

W celu uzyskania możliwie wysokiej dokładności modelu numerycznego zdecydowano się na wykonanie weryfikacji właściwości materiałowych drutu sprężyn, mierząc moduł sprężystości podłużnej, poprzecznej oraz współczynnik tarcia. Wielkości te pozwolą na poprawne porównanie wyników badań z wartościami uzyskanymi przy wykorzystaniu metod analitycznych. W tym celu zamówiono 3 druty o średnicy 5 mm o dokładnie takich samych właściwościach jak zastosowany na sprężyny, czyli po wykonaniu takiej samej obróbki cieplnej. Jeden drut zagięto i zamocowano w przyrządzie umożliwiającym wyznaczenie Modułu Kirchhoffa (rys. 4.4), a dwa poddano badaniu

rozciągania osiowego w celu wyznaczenia Modułu Younga (rys. 4.5). Przyrząd do wyznaczenia Modułu Kirchhoffa składał się z przekładni zębatkowej zamocowanej w maszynie wytrzymałościowej. Badany drut został zamocowany z jednej strony nieruchomo a z drugiej strony do obracającego się wału przekładni, której koło zębate posiadało średnicę podziałową 171 mm. Uchwyt maszyny wytrzymałościowej połączony z zębatką nadawał jej przemieszczenie. Rejestrowano siłę działającą na zębatkę oraz jej przemieszczenie. Mając dane przemieszczenie zębatki, obliczono kąt skręcenia koła, a więc i zamocowanego do niego drutu. Wyniki badania modułu sprężystości poprzecznej (Kirchhoffa), składające się z 14 pomiarów siły, z wyróżnieniem wyników najbardziej powtarzalnych, a pominięciem odstających, zamieszczono w tabeli 4.2, a wyniki badania modułu sprężystości podłużnej (Younga) w tabeli 4.3.



Rys. 4.4. Przyrząd do badania Modułu Kirchhoffa zamocowany w maszynie wytrzymałościowej HT-2402 Hung Ta Instrument Co., LTD., Taiwan (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025)



Rys. 4.5. Pomiar Modułu Younga na maszynie wytrzymałościowej HT-2402 Hung Ta Instrument Co., LTd., Taiwan, wyposażonej w ekstensometr ZEPWN CL25D-R B50 L30 (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025)

Tab. 4.2. Wyniki pomiarów siły naciskającej na prowadnicę liniową dla przemieszczenia równego 20 mm, odpowiadającemu kąтови skręcenia 0,229786 rad wraz z obliczonym Modułem Kirchhoffa na podstawie zależności (4.19)

L.p.	Siła F [N] dla 20 mm przemieszczenia trawersy
1	114
2	116
3	115,1
4	117,4
5	117,5
6	117,8
7	119,3
8	118,9
9	118,8
10	118,8
11	119,1
12	118,6
13	118,8
14	119,5
Średnia	117,8
Średnia z 4-14	118,6
Moduł Kirchhoffa [MPa]	80550

Tab. 4.3. Wyniki pomiaru Modułu Younga na podstawie zależności (4.20)

Drut	Długość początkowa L_0 [mm]	Wydłużenie L_1 [mm]	Wydłużenie L_2 [mm]	Naprężenia σ_1 [MPa]	Naprężenia σ_2 [MPa]	Moduł Younga E [MPa]
1	60,23	0,031	0,207	120	720	205330
2	60,82	0,031	0,211	120	720	202733
Średni Moduł Younga						204031

$$G = \frac{32 \cdot F \cdot R_K \cdot L}{\phi \cdot \pi \cdot d^4} \quad (4.19)$$

$$E = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) \cdot L_0}{(L_2 - L_1)} \quad (4.20)$$

gdzie:

F – siła mierzona przez czujnik maszyny wytrzymałościowej, N,

R_K – promień koła zębatego przyrządu do Modułu Kirchhoffa, mm,

L – skręcana długość pręta, mm,

ϕ – kąt skręcenia drutu, rad,

d – średnica drutu, mm,

σ_1, σ_2 – naprężenia w przekroju poprzecznym drutu o średnicy $d = 5$ mm,

L_0 – długość początkowa próbki, mm,

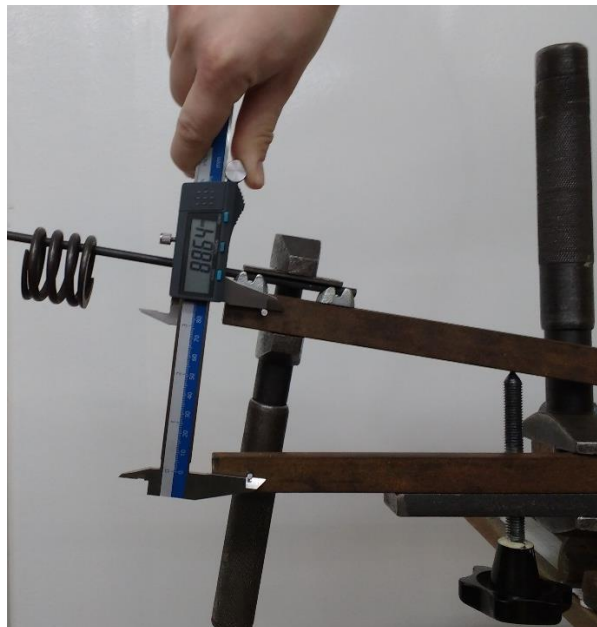
L_1, L_2 – wydłużenia próbki odpowiadające naprężeniom σ_1, σ_2 , mm.

W wyniku przeprowadzonych testów uzyskano wartość Modułu Younga wynoszącą 204031 MPa oraz Modułu Kirchhoffa – 80550 MPa, które różnią się nieznacznie od wartości podanych w normie EN 10270-2. Dokładniejsze wyniki uzyskano by przy większej próbie drutów, ale z racji, że do dalszych badań przyjęto dane normowe, a pomiar służył jedynie określeniu dokładności modelu, przyjęto, że przeprowadzona próba jest wystarczająca. Pozostałe wytrzymałościowe parametry materiałowe nie były weryfikowane z braku takiej potrzeby z racji przyjęcia obciążeń sprężyny gwarantujących zachowanie zakresu sprężystego odkształcenia jej materiału.

Dla potrzeb zbudowania modelu numerycznego konieczne było zdefiniowanie właściwości kontaktu między zwojami, którego głównym parametrem jest współczynnik tarcia. Pozostałe właściwości jak naciski międzyzwojowe, naprężenia resztkowe są trudne do dokładnego oszacowania i zamodelowania w programie ANSYS, w którym

przeprowadzono analizy. W literaturze podaje się zazwyczaj wartość współczynnika tarcia statycznego dla pary ciernej stal-stal równą 0,15, aczkolwiek zakres zmienności jest o wiele szerszy, ponieważ przykładowo dla powierzchni zardzewiałych zakres ten może wynosić od 0,5 do 0,8 (Pijpers, Slot, 2020). Drut sprężyny posiadał gładką powierzchnię, a zeszlifowana powierzchnia podstawy posiadała ostre krawędzie. Wobec tego model powinien mieć zdefiniowane dwa współczynniki tarcia lub założony jedną wartość jednocześnie odwzorowującą inne oddziaływania kontaktowe.

W celu zbadania współczynnika tarcia występującego pomiędzy zwojami sprężyny, wykonano badanie z użyciem schematu równi pochyłej. Elementem stanowiącym równię pochyłą był prosty odcinek drutu sprężynowego, natomiast elementem współpracującym były próbki sprężyn, tak jak pokazano na rysunku 4.6. Przy pomocy pokrętła widocznego na rysunku 4.6 zwiększano kąt pomiędzy prostym odcinkiem drutu a poziomem, do momentu, gdy ułożona na nim sprężyna zaczynała się zsuwać. Wówczas suwmiarką elektroniczną mierzono odległość pomiędzy punktami pomiarowymi stanowiska i obliczano uzyskany kąt tarcia. Pomiar przeprowadzono dla dwóch przeciwległych stron sprężyny zsuwanej po jednym drucie, powtarzając go sześciokrotnie. Zbadano 3 sztuki sprężyn. Wyniki badań zamieszczono w tabeli 4.4.



Rys. 4.6. Badanie współczynnika tarcia drutów sprężyny; pomiar rozwarcia ramion równi pochyłej za pomocą suwmiarki elektronicznej z dokładnością do 0,01 mm

Tab. 4.4. Wyniki pomiaru odległości między ramionami równi pochyłej na potrzeby obliczenia współczynnika tarcia między zwojami sprężyny; na czerwono zaznaczono pomiary znacznie odstające od średniej

		Odległość między ramionami [mm]		Błąd procentowy względem średniej [%]	
Para cierna	Numer pomiaru	Strona A	Strona B	Strona A	Strona B
drut 1 sprężyna 1	1	90,50	107,93	0,87	18,00
	2	84,50	103,99	-5,81	13,69
	3	96,07	83,36	7,08	-8,86
	4	95,72	82,43	6,69	-9,88
	5	88,31	88,57	-1,57	-3,17
	6	83,19	82,53	-7,27	-9,77
Średnia		89,72	91,47		
Odchylenie standardowe		5,46	11,52		
drut 1 sprężyna 2	1	86,91	94,92	10,38	3,17
	2	77,41	92,94	-1,69	1,02
	3	74,55	89,88	-5,32	-2,31
	4	70,66	86,29	-10,26	-6,21
	5	72,75	99,03	-7,61	7,64
	6	90,16	88,96	14,50	-3,31
Średnia		78,74	92,00		
Odchylenie standardowe		7,97	4,59		
drut 1 sprężyna 3	1	85,56	107,47	3,79	12,26
	2	85,14	110,33	3,28	15,25
	3	84,38	89,13	2,36	-6,89
	4	77,61	89,16	-5,85	-6,86
	5	78,63	87,07	-4,61	-9,05
	6	83,28	91,22	1,03	-4,71
Średnia		82,43	95,73		
Odchylenie standardowe		3,44	10,33		

Z wyników podanych w tabeli 4.4 usunięto po jednym wyniku najbardziej odstającym od średniej i ponownie obliczono średnią oraz kąt tarcia, wiedząc, że ramiona równi pochyłej tworzą trójkąt równoramienny o ramionach równych 500 mm. Współczynnik tarcia jest równy tangensowi kąta tarcia, co obliczono korzystając ze wzoru (4.21). Wyniki zapisano w tabeli 4.5.

Tab. 4.5. Dane do obliczenia kąta tarcia sprężyny o drut na równi pochyłej z pominięciem pomiarów odstających i obliczeniem średniego kąta tarcia.

		Odległość między ramionami [mm]	
Para cierna	Numer pomiaru	Strona A	Strona B
drut 1 sprężyna 1	1	90,50	103,99
	2	84,50	83,36

	3	96,07	82,43
	4	95,72	88,57
	5	88,31	82,53
Średnia		91,02	88,18
Odchylenie standardowe		4,94	9,20
Kąt [rad]		0,182	0,177
drut 1 sprężyna 2	1	86,91	94,92
	2	77,41	92,94
	3	74,55	89,88
	4	70,66	86,29
	5	72,75	88,96
Średnia		76,46	90,60
Odchylenie standardowe		31,66	3,39
Kąt [rad]		0,153	0,181
drut 1 sprężyna 3	1	85,14	107,47
	2	84,38	89,13
	3	85,56	89,16
	4	78,63	87,07
	5	83,28	91,22
Średnia		83,40	92,81
Odchylenie standardowe		2,80	8,33
Kąt [rad]		0,167	0,186
Średni kąt tarcia α_T [rad]		0,174	
Przedział zmienności kąta tarcia		0,153	0,186

$$\mu_s = \operatorname{tg}(\alpha_T) = \operatorname{tg}(0,174) = 0,176 \quad (4.21)$$

W wyniku obliczeń uzyskano średni współczynnik tarcia równy 0,176, z przedziałem zmienności od 0,154 do 0,188. Z związku z tym do dalszych obliczeń przyjęto wartość 0,18 jako współczynnik tarcia stali 55CrSi Becrosi 22, z której są wykonane druty sprężyn, będące przedmiotem badań.

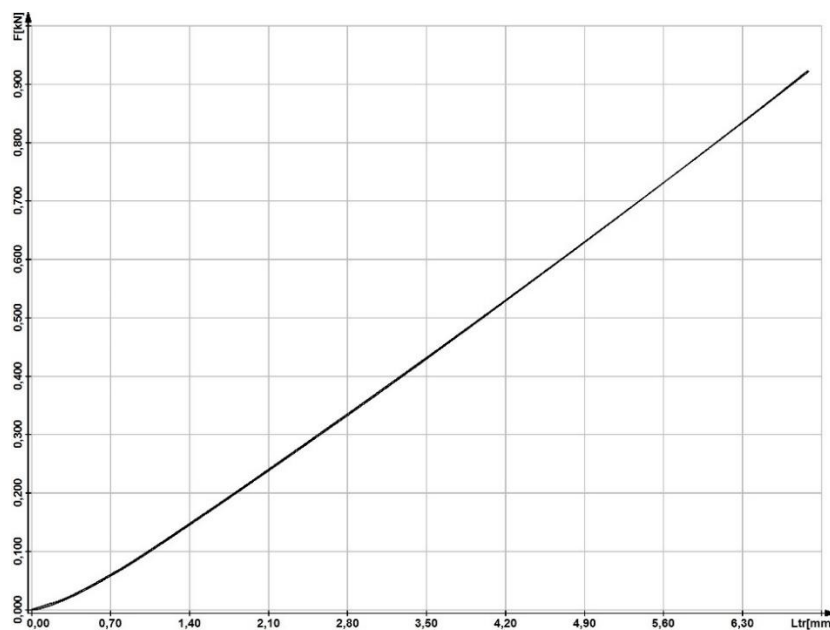
4.2.3. Stanowisko badawcze i metodyka badań

Badania sztywności osiowej przeprowadzono na maszynie wytrzymałościowej HT-2402 Hung Ta Instrument Co., LTd., Taiwan wyposażonej w czujnik siły CL16md firmy ZEPWN sp. z o.o. sp.k. o zakresie 5 kN, klasy 0,5 zgodnie z ISO 376 (rys. 4.7). Pomiar polegał na ścisaniu osiowym sprężyny ustawionej na stole maszyny wytrzymałościowej do wartości ugięcia odpowiadającej dopuszczalnym naprężeniom. Zgodnie ze specyfikacją producenta materiał drutu osiąga wytrzymałość doraźną R_m równą 1800 MPa. Przyjęto, że naprężenia dopuszczalne wynoszą $1/2 R_m$, czyli 900 MPa. Pozwoliło to

uzyskać ugięcia dla 2,5; 2,75 i 3 zwojów aktywnych odpowiednio 6,25 mm, 6,875 mm i 7,5 mm. Na rysunku 4.8 przedstawiono przykładowy wykres siły osiowej F w zależności od przemieszczenia trawersy L_{tr} .



Rys. 4.7. Stanowisko badawcze do pomiaru sztywności osiowej (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025)



Rys. 4.8. Wykres zależności siły osiowej F od przemieszczenia trawersy maszyny wytrzymałościowej L_{tr} dla sprężyny o wskaźniku $C = 5$, liczbie zwojów aktywnych $n_a = 2,75$, długości styku $s = 0,25$, próbki numer 3

W początkowym etapie powyższej charakterystyki występuje nieliniowość charakterystyki, która wynika z błędów prostopadłości osi sprężyny do powierzchni podporowych, mimośrodowości obciążenia i błędów przyłożenia zwojów biernych (Branowski, 1997). Gdyby sprężyna była ściskana do zablokowania zwojów uzyskano by nieliniowość również w końcowym etapie krzywej ściskania. Wynikałoby to

z niejednoczesnego blokowania się zwojów czynnych, co jest związane z nierównością kąta wzniosu linii śrubowej (Branowski, 1997). Zgodnie z zaleceniami literaturowymi (Branowski, 1997) do obliczenia sztywności osiowej należy odrzucić wartości siły poniżej 0,3 i powyżej 0,7 siły zblokowania (nominalnej F_n), licząc sztywność tylko dla liniowego zakresu środkowego. Zakres ten odpowiada zakresowi pracy sprężyny. Następnie możliwe jest wyznaczenie sztywności sprężyny k poprzez skorzystanie z zależności (4.22), bądź wyznaczenie linii trendu i współczynnika kierunkowego tej linii, który jest równy sztywności osiowej sprężyny k .

$$k = \frac{F_B - F_A}{s_B - s_A} \quad (4.22)$$

gdzie:

F_B – wartość siły w górnym punkcie zakresu pomiarowego, N,

F_A – wartość siły w dolnym punkcie zakresu pomiarowego, N,

s_B – wartość ugięcia dla górnego punktu, mm,

s_A – wartość ugięcia dla dolnego punktu, mm.

Z uwagi na to, że charakterystyka liniowa rozpoczynała się dość szybko oraz nie osiągnięty został poziom zblokowania zwojów, zakres pomiarowy przyjęto jako równy między 20% a 95% obliczonego ugięcia dopuszczalnego.

4.2.4. Wyniki badań sztywności osiowej

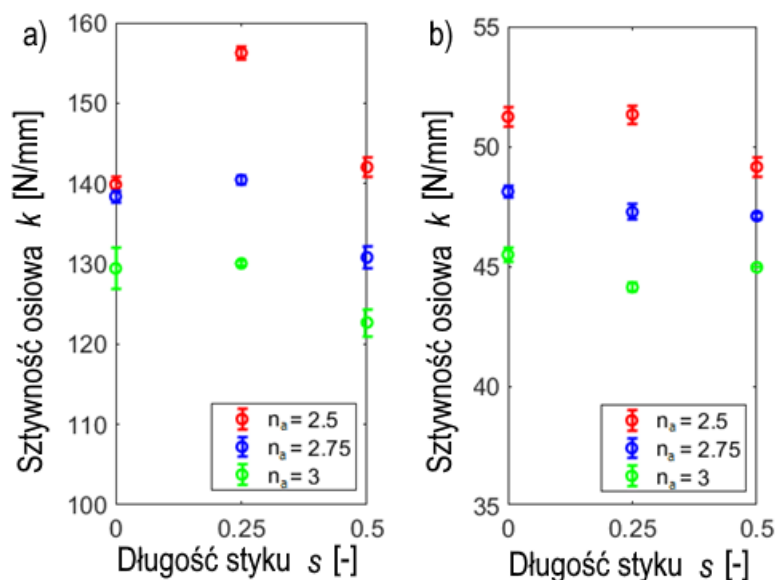
W wyniku pomiarów siły i przemieszczenia uzyskano wartości sztywności osiowej, wyznaczone metodą różnicową zgodnie z wzorem (4.22) oraz zestawiono je w tabeli 4.6.

Tab. 4.6. Wyniki pomiarów sztywności osiowej uzyskane metodą różnicową (4.22)

Wskaźnik C [-]	Liczba zwojów aktywnych n_a [-]	Długość styku zwojów s [-]	Sztywność sprężyny 1 k_1 [N/mm]	Sztywność sprężyny 2 k_2 [N/mm]	Sztywność sprężyny 3 k_3 [N/mm]	Średnia sztywność osiowa k [N/mm]	Odechylenie standardowe σ_k [N/mm]	Współczynnik zmienności σ_k/k [%]
5	2,5	0	139,90	140,75	138,96	139,87	0,90	0,64
		0,25	155,90	155,68	157,17	156,25	0,80	0,51
		0,5	143,20	142,20	140,68	142,03	1,27	0,89
	2,75	0	137,69	139,12	138,33	138,38	0,72	0,52
		0,25	140,14	140,17	141,04	140,45	0,51	0,36
		0,5	130,19	129,92	132,30	130,80	1,30	1,00
	3	0	127,99	132,32	127,99	129,43	2,50	1,93
		0,25	130,01	129,78	130,34	130,04	0,28	0,22
		0,5	122,35	124,51	121,21	122,69	1,68	1,37

7	2,5	0	51,56	51,38	50,77	51,24	0,41	0,81
		0,25	50,91	51,50	51,62	51,34	0,38	0,74
		0,5	49,22	49,51	48,73	49,15	0,39	0,80
	2,75	0	48,27	47,87	48,23	48,12	0,22	0,46
		0,25	47,44	47,46	46,91	47,27	0,31	0,66
		0,5	47,28	47,03	46,99	47,10	0,16	0,33
	3	0	45,66	45,16	45,63	45,49	0,28	0,62
		0,25	43,92	44,25	44,22	44,13	0,18	0,41
		0,5	44,97	44,95	44,95	44,96	0,01	0,03

Analizując powyższą tabelę należy zauważyć, że współczynnik zmienności przekroczył 1% tylko w przypadku trzech pakietów sprężyn, co pozwala stwierdzić dużą powtarzalność pomiaru i przyjąć, że do porównywania eksperymentu z metodami analitycznymi można przyjąć wartość średnią. Lepsze zobrazowanie zmian ilustruje rysunek 4.9.



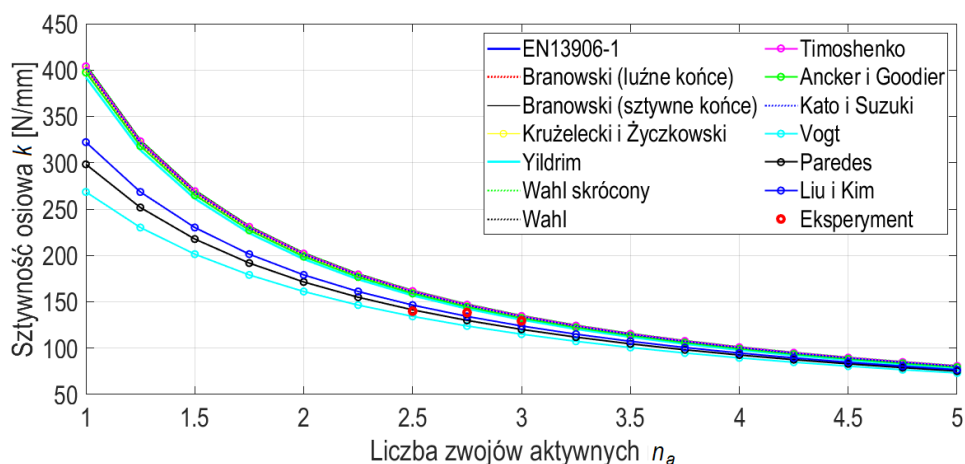
Rys. 4.9. Wykres zmiany sztywności osiowej k badanych sprężyn względem liczby zwojów aktywnych n_a i długości styku s dla sprężyn o wskaźniku: a) $C = 5$, b) $C = 7$ (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025)

Dla wskaźnika $C = 5$ wykres 4.9a jednoznacznie wskazuje na zwiększenie sztywności osiowej dla 0,25 długości styku zwojów biernych. Tłumaczyć można to tym, że styk ćwiartkowy pozwala uwzględnić wpływ skręcania, pozwalając na pracę zwojowi biernemu, ale jednocześnie nie daje jeszcze tak dużo swobody, aby zwoje te pracowały aktywnie. Dla styku 0,5 uzyskujemy większy wpływ skręcania i zniwelowanie usztywnienia jakie daje styk ćwiartkowy. Trend ten nie jest widoczny dla wskaźnik $C = 7$ (rys. 4.9b), a nawet bywa odwrotny. Ponadto w przypadku stosunkowo niewiele większego wskaźnika nastąpiło praktycznie spłaszczenie wykresu, ponieważ zmiany były niewidoczne. Większy wskaźnik niewątpliwie zmniejsza wpływ zakończeń sprężyn na

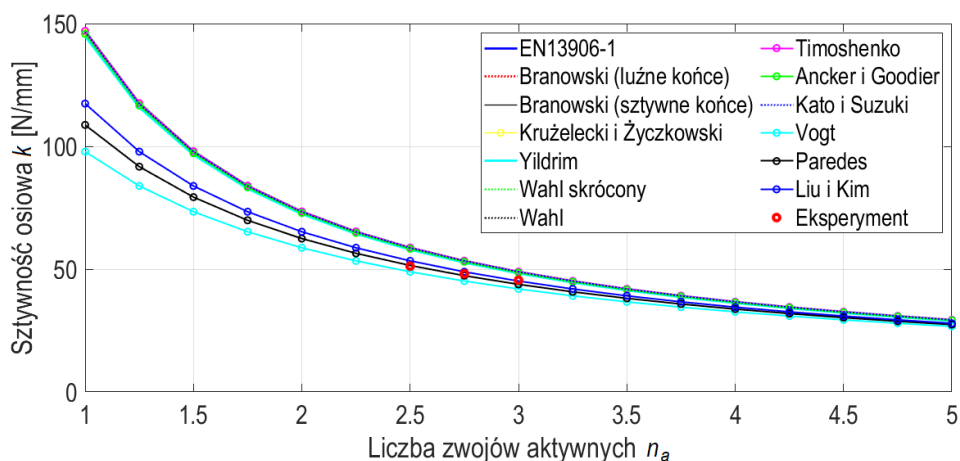
sztwność osiową, lecz należy zauważyć, że sprężyny nie były też wykonane w wysokiej dokładności, szczególnie te o wskaźniku $C = 5$. Z tego powodu trend ten został zbadany przy pomocy badań numerycznych.

4.2.5. Porównanie wyników sztywności osiowej ze wzorami analitycznymi

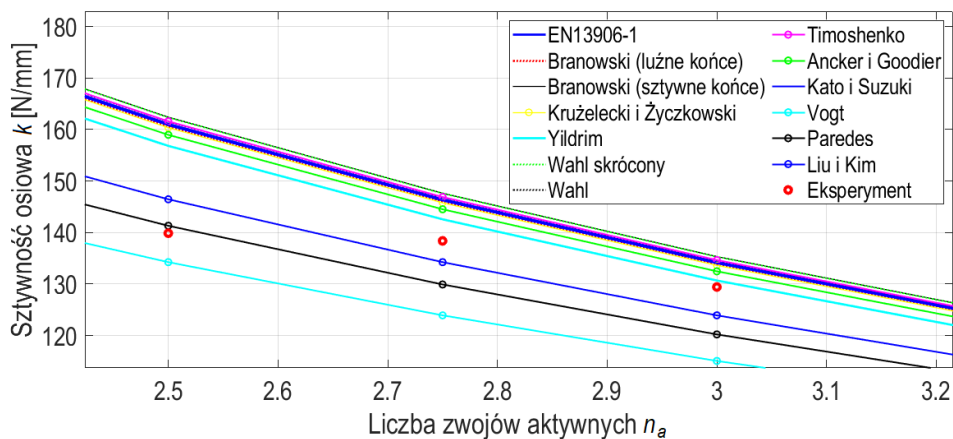
W tym punkcie dokonano porównania przedstawionych w podrozdziale 4.1 metod analitycznych pozwalających obliczyć sztywność osiową z wynikami uzyskanymi z eksperymentu, celem znalezienia zależności dających najdokładniejsze wyniki. Rysunek 4.10 przedstawia zestawienie uzyskanych wyników z przebiegami uzyskanymi ze wzorów dla sprężyn o wskaźniku $C = 5$, skoku $P = 10$ mm, styku punktowym oraz liczbie zwojów aktywnych od 1 do 5. Natomiast na rysunku 4.11 zestawiono takie same sprężyny, lecz o wskaźniku $C = 7$. Dla wskaźnika $C = 5$ porównano w powiększeniu relację wzorów analitycznych do wyników eksperymentu dla wszystkich badanych długości styku (rys. 4.12 - 4.14).



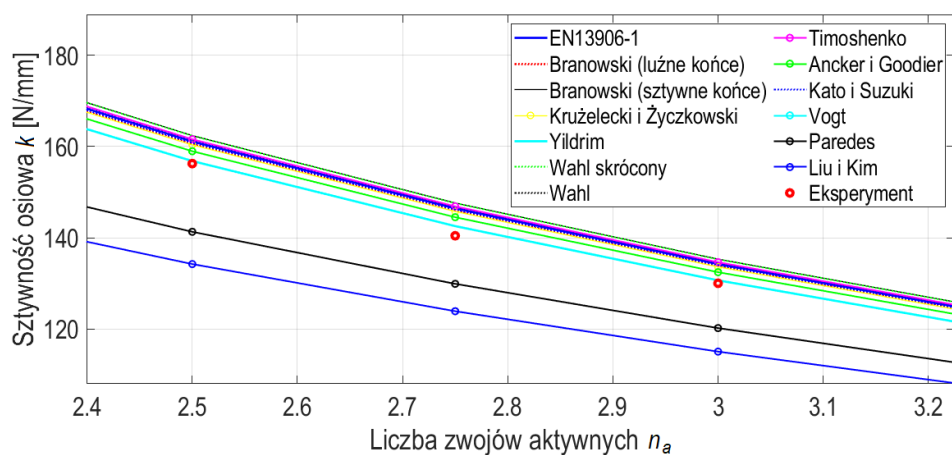
Rys. 4.10. Porównanie wyznaczonych eksperymentalnie wartości sztywności osiowej sprężyn o wskaźniku $C = 5$, skoku $P = 10$ mm, styku punktowym i liczbie zwojów 2,5; 2,75 i 3 na tle wszystkich cytowanych w podrozdziale 4.1 metod obliczania sztywności osiowej



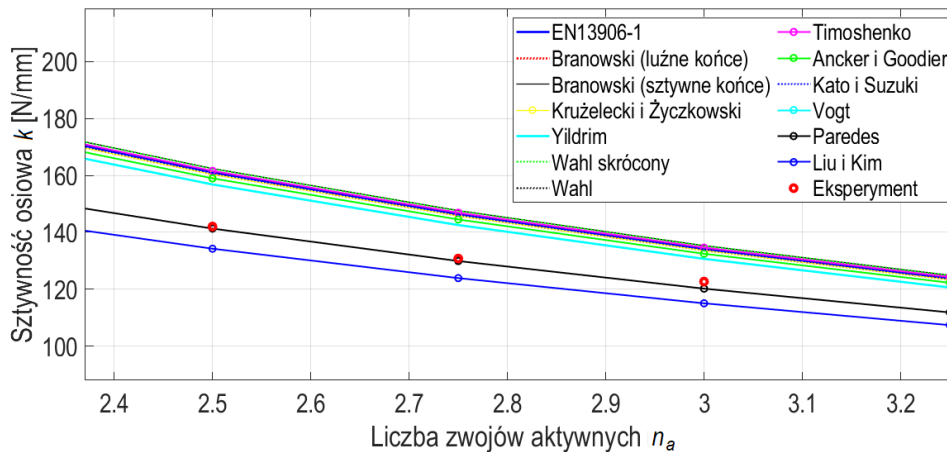
Rys. 4.11. Porównanie wyznaczonych eksperymentalnie wartości sztywności osiowej sprężyn o wskaźniku $C = 7$, skoku $P = 10$ mm, styku punktowym i liczbie zwojów 2,5; 2,75 i 3 na tle wszystkich cytowanych w podrozdziale 4.1 metod obliczania sztywności osiowej



Rys. 4.12. Powiększenie wykresu 4.10 ze zbliżeniem na zakres eksperymentu



Rys. 4.13. Relacja wyników badań sprężyn o wskaźniku $C = 5$ oraz styku $s = 0,25$ do wzorów analitycznych (Metoda Vogta oraz Liu i Kim zrównały się)



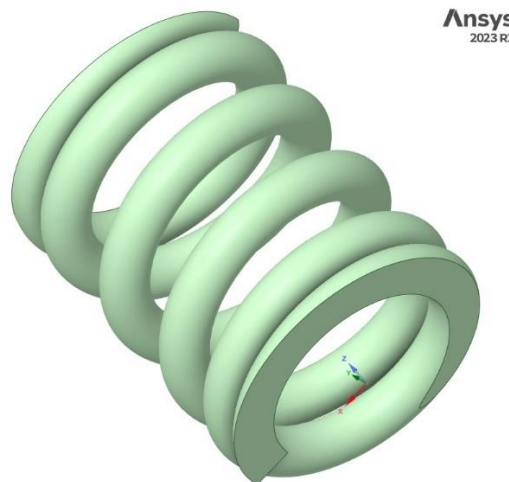
Rys. 4.14. Relacja wyników badań sprężyn o wskaźniku $C = 5$ oraz styku $s = 0,5$ do wzorów analitycznych. (Metoda Vogta oraz Liu i Kim zrównały się)

Poglądowa analiza wykresów 4.10 – 4.14 pozwala stwierdzić, że najbliższe wyniki można uzyskać stosując wzory zwiększające liczbę zwojów aktywnych. Metody uwzględniające poszczególne sztywności oraz kąt wzniosu linii śrubowej nie dały aż tak zadawalających rezultatów. Analizy dokładności poszczególnych metod zostaną dodatkowo wykonane po rozszerzeniu próby o badania numeryczne. Istotnym szczegółem zauważalnych we wszystkich zależnościach jest wykładniczy lub potęgowy kształt przebiegów zmienności sztywności osiowej.

4.3. Opracowanie modelu numerycznego

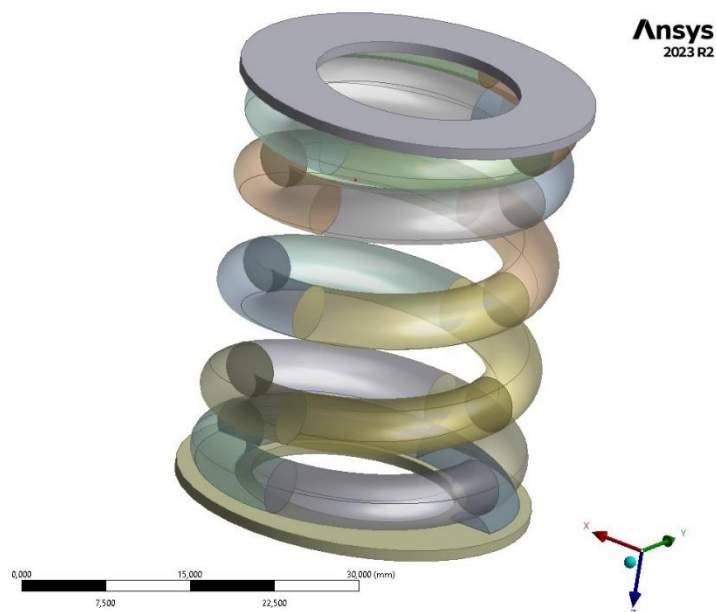
Badania numeryczne sztywności osiowej pozwalają rozszerzać próbę badawczą oraz poszerzyć możliwości pomiarowe, poprzez odczyt naprężeń, przemieszczeń i reakcji w poszczególnych punktach sprężyny. Tym samym możliwe jest określenie zależności analitycznej na podstawie szerszej próby, co byłoby kosztowne w przypadku badań laboratoryjnych. Wadą badań symulacyjnych jest jednak trudność w odwzorowaniu dokładnej pracy sprężyny. Nie mniej jednak współcześnie konstruktorzy decydują się na wykorzystanie obliczeń komputerowych nawet kosztem uproszczeń modelowych. W niniejszym podrozdziale przedstawiono proces budowy modelu numerycznego, jego walidacji oraz przeanalizowane wyniki badań, wraz z nowymi wzorami pozwalającymi obliczyć sztywność osiową oraz wartość i kąt reakcji poprzecznej powstającej podczas osiowego ściskania sprężyny naciskowej o szlifowanych i przyłożonych zwojach końcowych.

Model numeryczny opracowano w programie ANSYS wykorzystując moduł analizy statycznej *Static Structural* w środowisku *Workbench*. Początkowym etapem jest wykonanie trójwymiarowych modeli sprężyn, korzystając z algorytmu opisanego w rozdziale 3. W celu opracowania modelu wykonano modele 12 sprężyn z pośród 18 badanych na maszynie wytrzymałościowej. Były to sprężyny o 2,5 i 3 zwojach aktywnych, o wskaźniku C równym 5 i 7 oraz o skoku $P = 10$ mm, zeszlifowane z każdej strony na $\frac{3}{4}$ obwodu, styku punktowym ($s = 0$), ćwiartkowym ($s = 0,25$) oraz połówkowym ($s = 0,5$). W tabeli 4.1. zaznaczono sprężyny, które mają długość styku zwojów najbardziej zbliżoną do teoretycznej, oczekiwanej i na jej podstawie sporządzono modele trójwymiarowe (przykład na rys. 4.15) w programie SpaceClaim wykorzystując cytowany algorytm.



Rys. 4.15. Przykładowy model sprężyny o wskaźniku $C = 5$ wykonany w programie SpaceClaim na podstawie algorytmu z (Michalczyk, Warzecha, Baran, 2023)

Kolejnym krokiem było zmodyfikowanie modelu sprężyny w module Design Modeler, polegające na podziale jego bryły dwiema płaszczyznami symetrii przechodzącymi przez oś sprężyny. Pozwoliło to na precyzyjne zdefiniowanie powierzchni kontaktu między sąsiadującymi zwojami, oraz na utworzenie siatki ES o wysokich parametrach jakości i zachowującej ciągłość w całym modelu sprężyny. Następnie wykonano modele podpór w postaci dwóch pierścieni widocznych na rysunku 4.16. Na rysunku tym widać również model sprężyny z przeciętymi zwojami.



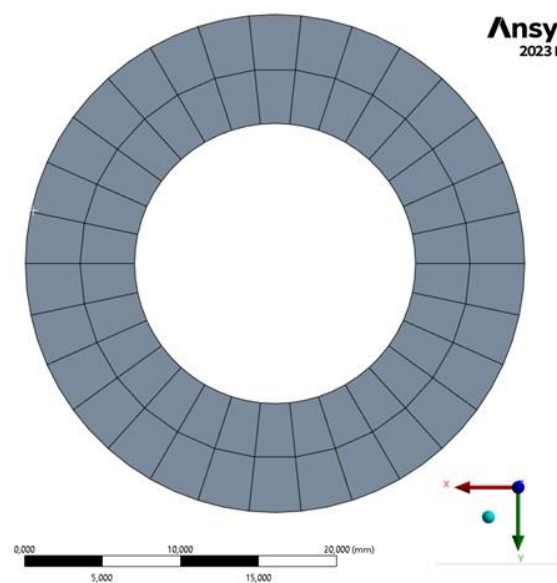
Rys. 4.16. Sprężyna wraz z pierścieniami zamodelowana w programie Design Modler ANSYS

Właściwości materiałowe w analizach 12 modeli sprężyn, służących weryfikacji poprawności modelu numerycznego przyjęto na podstawie opisanych w punkcie 4.2 badań eksperymentalnych.

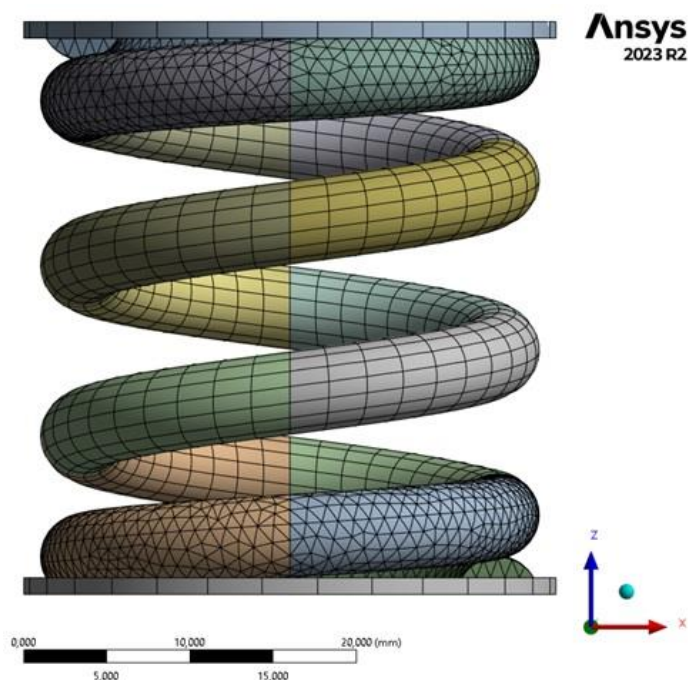
Następnym krokiem było zdefiniowanie parametrów kontaktu. Dla wszystkich kontaktów przyjęto, że będą one symetryczne oraz wybrano metodę obliczeń *Augment Lagrange*, najczęściej stosowaną do tego typu obliczeń i charakteryzującą się relatywnie krótkim czasem obliczeniowym (Mesco, 2023). Włączono możliwość małych poślizgów i przyjęto kombinowaną metodę wykrywania kontaktów. Dopuszczono penetrację kontaktu równą 0,01 mm. Mniejsza penetracja wydłużała czas obliczeń, a nawet je uniemożliwiała. Pozostawiono kontrolowaną przez program wartość elastycznego poślizgu. Ustawiono współczynnik sztywności kontaktu równy 1 oraz współczynnik tłumienia równy 0. Parametr promienia kontaktu (ang. *Pinball radius*) ustawiono na wartość 0,2 mm, natomiast wszystkie powierzchnie ustawiono w relacji przylegania (ang. *Adjust to touch*). Dobór tych parametrów był dokonany na podstawie znalezionej literatury oraz wykonaniu wielu prób (Özgün, 2023).

Zdefiniowanie siatki podobnie było obarczone pewnymi ograniczeniami. Ustawiono siatkę typu mechanicznego nieliniowego (ang. *Nonlinear Mechanical*). Z uwagi na zeszlifowanie ostatnich zwojów sprężyny nie możliwe było wykonanie jednolitej siatki z elementów sześciennych drugiego rzędu, metodą *sweep*. Wobec tego cały ostatni zwój wykonano z elementów czworościennych drugiego rzędu, metodą *tetrahedrons quadratic patch conforming*. Środkową część wykonano metodą *sweep*

o wymiarze wzdłużnym równym 2 mm i poprzecznym 1 mm. Rozmiar siatki czworokątnej wynosił 1 mm. Pierścienie podporowe również wykonano metodą *sweep* z jednym elementem na kierunku osiowym i o rozmiarze 2,5 mm w kierunku poprzecznym przyjmując dodatkowo metodę *Face meshing*, która wyrównała siatkę na powierzchni pierścienia (rys. 4.17). Na rysunku 4.18 pokazano całą siatkę elementów skończonych zamodelowanej sprężyny wraz z podporami. Podobną geometrię siatki dla sprężyny o zbliżonym kształcie zaproponowano w publikacji (Yetgin, 2024), gdzie przeanalizowano wpływ jej rozmiaru na wartość naprężeń ścinających oraz sztywność. Jednocześnie praca ta potwierdziła słuszność kształtowania siatki dla takiej sprężyny.



Rys. 4.17. Siatka elementów skończonych na powierzchni pierścienia



Rys. 4.18. Siatka elementów skończonych na powierzchni sprężyny i pierścieni

Przeprowadzono testy dokładności siatki określając jej wskaźniki geometryczne i porównując wartości sztywności osiowej. Zbadano jakość siatki ES za pomocą wbudowanych metod oceny jakości oraz porównano je z danymi literaturowymi. Zastosowana siatka ES dla wszystkich 12 zbadanych sprężyn wzorcowych osiągnęła średnią wartość skośności na poziomie 0,237. Parametr ortogonalności osiągnął wartość średnią 0,797, natomiast współczynnik proporcji osiągnął wartość średnią 2,112. Wartości wzorcowe tych parametrów pozyskano z literatury (Fatchurrohman, 2017; Özgün, 2023), a uzyskane wyniki wskazują na wysoką jakość opracowanych modeli numerycznych. W celu dodatkowego sprawdzenia jakości siatki ES, wykonano badania dla sprężyny $C = 5$, $n_a = 2,5$ i $s = 0,5$ (rys. 4.18), dla nowego rozmiaru elementów skończonych 0,75 mm, a w kontaktach pomiędzy stykającymi się zwojami – 0,4 mm. Ponadto zmniejszono wymiar podłużny elementów sześciennych (*sweep*) do 1 mm. Względny błąd między sztywnościami osiowymi obliczonymi według obydwu modeli osiągnął jedynie 0,04%, co w połączeniu z dużo dłuższym czasem obliczeń oznaczało brak opłacalności prowadzenia dokładnych obliczeń w tym przypadku.

W przeprowadzanych analizach uwzględniono duże przemieszczenia. Zdefiniowano też 5 kroków symulacji, dla których zadano narastające przemieszczenie osiowe górnego pierścienia o wartościach od 1,25 mm do 6,25 mm dla $n_a = 2,5$ oraz od 1,5 mm do 7,5 mm dla $n_a = 3$. Wartości te były uzależnione od liczby zwojów, ale wartość maksymalna była równa wartości maksymalnego ugięcia, takiego samego jak przy

badaniach stanowiskowych, czyli 50% prześwietu teoretycznego. Przeszczenia w kierunku x oraz y zostały zablokowane. Zablokowano też obrót obciążanej powierzchni względem wszystkich osi układu. Dolną powierzchnię dolnego pierścienia utwierdzono.

Zestawienie wyników badań numerycznych ze stanowiskowymi w odniesieniu do wartości sztywności osiowych, dla 12 sprężyn przedstawiono w tabeli 4.7. W tabeli tej zaprezentowano również średni bezwzględny błąd procentowy MAPE. Porównania dokonywano względem konkretnego rzeczywistego modelu sprężyny wybranego w klasyfikacji w tabeli 4.1.

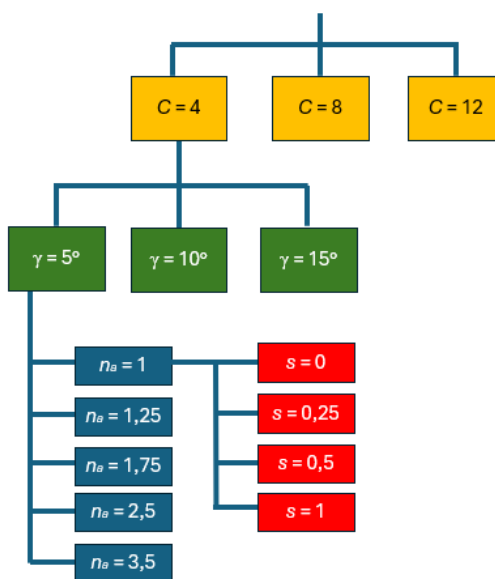
Tab. 4.7. Wyniki testowych obliczeń numerycznych budowanego modelu wraz z porównaniem z badaniami stanowiskowymi takich samych sprężyn (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025)

Wskaźnik C [-]	Liczba zwojów aktywnych n_a [-]	Długość styku zwojów s [-]	Sztywność sprężyny wyznaczonej do testów [N/mm]	Sztywność obliczona w MES [N/mm]	Błąd względny procentowy [%]	Średnia modułów błędów procentowego dla n_a [%]	Średnia modułów błędów procentowego dla C [%]
5	2,5	0	140,75	143,56	-2,0%	3,0%	3,3%
		0,25	155,90	148,55	4,7%		
		0,5	142,20	139,01	2,2%		
	3	0	127,99	121,43	5,1%	3,7%	
		0,25	130,01	126,03	3,1%		
		0,5	121,21	117,67	2,9%		
7	2,5	0	51,38	51,76	-0,8%	2,3%	1,7%
		0,25	51,62	49,94	3,3%		
		0,5	49,51	50,90	-2,8%		
	3	0	45,16	44,28	1,9%	1,2%	
		0,25	43,92	43,76	0,4%		
		0,5	44,95	44,34	1,4%		
Średni bezwzględny błąd procentowy MAPE [%]							2,7%

W wyniku obliczeń numerycznych uzyskano model, który wykazuje średni bezwzględny błąd procentowy na poziomie 2,7% względem badań stanowiskowych (w tabeli są wartości zaokrąglone), co pozwala stwierdzić, że zgodność modelu jest wystarczająca. W związku z powyższym zdecydowano, że wszystkie modele wykonane dla badań numerycznych sztywności osiowej będą miały dokładanie takie same parametry siatki, kontaktu i charakteru obciążenia.

4.4. Badania numeryczne rozszerzonego zestawu próbek

Kolejnym etapem badań było przeprowadzenie analiz numerycznych 245 modeli sprężyn w celu opracowania nowego modelu obliczeniowego sztywności osiowej sprężyn śrubowych o większej dokładności niż modele dotychczas stosowane oraz opracowania nowych modeli obliczeniowych umożliwiających określenie wartości i kierunków reakcji poprzecznych powstających przy osiowym ścisnieniu sprężyn. W analizach tych przyjęto właściwości materiałowe drutu sprężyn, zgodne z normą EN 10270-2, tj. Moduł Younga 206 GPa oraz Moduł Kirchhoffa 79,5 GPa. Badania numeryczne przeprowadzono dla wstępnie dobranej próby 180 sprężyn o średnicy drutu $d = 1$ mm, różniących się wskaźnikiem sprężyny C (4, 8, 12), kątem wzniosu linii śrubowej γ (5° , 10° , 15°), liczbą zwojów aktywnych n_a (1; 1,25; 1,75; 2,5; 3,5) oraz długością styku s (0; 0,25; 0,5; 1). Rozkład próbek podstawowego zestawu sprężyn pokazano na rysunku 4.19.



Rys. 4.19. Podstawowy zestaw 180 próbek sprężyn zastosowany w badaniach sztywności osiowej

Po analizie statystycznej uzyskanych wyników przeprowadzono 65 dodatkowych symulacji, umożliwiających opracowanie na ich podstawie uogólnionych wyników. Wszystkie sprężyny miały zeszlifowane czoła na wartość $\frac{3}{4}$ obwodu. Odcinek przejściowy drutu na którym następuje zmiana kąta wzniosu linii śrubowej z wartości odpowiadającej zwojom biernym na kąt wzniosu zwojów czynnych obejmował $\frac{1}{8}$ zwoju. Odpowiadająca tej długości wartość kąta wyrównania φ_{wyr} , danego zależnością (3.38) wynosi 45° .

Zestaw 180 sprężyn przyjęto jako wstępny do wyznaczania zależności na sztywność osiową. Zakres próbek był rozwijany w miarę potrzeb potwierdzenia trendu zmian danych wielkości. W efekcie przeprowadzono analizy dla 245 próbek, potrzebnych do określenia zależności pozwalających obliczyć wartość i kąt reakcji poprzecznej pochodzącej od osiowego ściskania. Z uwagi na objętość pracy i chęć zachowania czytelności próbki dodatkowe opisano na etapie ich wykorzystania. Na podstawie przeprowadzonych analiz numerycznych uzyskiwano wartości reakcji poprzecznych (na kierunku x i y), i reakcji osiowej (z).

W przypadku określania wpływu zwoju przejściowego na sztywność osiową i reakcje poprzeczne przyjęto wartości kątów φ_{wyr} równe $22,5^\circ$, 45° , 90° , 180° , 270° i 360° , jako odpowiednio część zwoju aktywnego na stronę sprężyny. Zastosowano tę modyfikację dla sprężyn o 2 zwojach aktywnych, wskaźniku $C = 4$, kącie wzniosu $\gamma = 10^\circ$ i 20° i styku punktowym. Dla kąta $\gamma = 20^\circ$ wykonano dodatkowo symulacje dla 3,5 zwojów aktywnych. Wykonano też modele sprężyn o wskaźniku $C = 8$ oraz kącie $\gamma = 10^\circ$. We wszystkich przypadkach zachowano styk punktowy i zeszlifowanie ostatniego zwoju na $3/4$ obwodu. W tym badaniu przeprowadzono 24 symulacje. Określenie podstawowych trendów pozwoliło znacznie ograniczyć próbę przy wyznaczeniu wpływu wielkości zakresu przejściowego na te parametry.

W przypadku analizy wpływu zeszlifowania z uwagi na powstające błędy geometryczne, zwiększono wartość kąta wyrównania φ_{wyr} do 50° z tolerancją $\pm 1^\circ$. Wykonano badania dla liczby zwojów aktywnych n_a równej 1; 1,25; 1,75 i 2,5, wskaźnika $C = 8$ oraz kącie wzniosu $\gamma = 10^\circ$ zadano następujące wartości zeszlifowania obwodu ostatniego zwoju: 0,25; 0,375; 0,5; 0,75 i 0,875. Szczególne problemy kształtowania poprawnej geometrii pojawiały się w przypadku sprężyn o najmniejszym zeszlifowaniu. Łącznie w tej serii przebadano 20 sprężyn.

4.5. Wpływ długości kontaktu między zwojami biernymi na sztywność osiową oraz reakcje poprzeczne

W tym podrozdziale przedstawiono wyniki badań numerycznych dotyczące wpływu długości linii kontaktu między zwojami biernymi na sztywność osiową oraz wartość i kąt reakcji pochodzącej od osiowego ściskania, które posłużyły do opracowania nowych zależności pozwalających je obliczyć. Wykorzystano wyniki oraz komentarze opublikowane w artykule czasopisma *Acta Mechanica et Automatica* o tytule: „*Effect of the end coil shape of the helical compression spring on its stiffness and distribution of transverse reactions during axial loading*” (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025). Wykonano badania statystyczne, określające podstawowe trendy i wzajemne uzależnienie badanych wielkości od zmiennych wejściowych. Porównano wyniki z dotychczas stosowanymi metodami i opracowano nowe zależności, określając ich dokładność.

4.5.1. Badania statystyczne zmiennych

Wpływ niektórych zmiennych na wartość sztywności osiowej jest oczywisty. Zarówno zwiększanie wskaźnika sprężyny C jak i liczby zwojów aktywnych n_a zmniejsza sztywność osiową. Niejednoznaczny jest wpływ długości kontaktu między zwojami biernymi (długości styku) s i kąta wzniosu linii śrubowej γ , które zostały poddane analizie w niniejszym punkcie.

Analizy wyselekcjonowanych danych wykonano w programie Matlab, obliczając współczynnik korelacji Pearsona r , współczynnik zmienności (iloraz odchylenia standardowego i wartości średniej wyrażony w procentach) i względny rozstęp danych (różnica maksymalnej i minimalnej wartości w zakresie danych odniesiona do wartości średniej wyrażona w procentach). Dla pomiaru zakresu zmienności kąta reakcji poprzecznej pochodzącej od osiowego ściskania zastosowano zwykły rozstęp danych z racji na występowanie miary kątowej wyrażonej w stopniach. W pozostałych przypadkach odniesiono rozstęp do wartości średniej, aby uzyskać wartość bezwymiarową dającą się porównać z innymi danymi. Obliczeń dokonano dla podstawowej grupy 180 próbek sprężyn. Przyjmuje się, że jeśli współczynnik korelacji Pearsona ma wartość bliską 1 lub -1 to występuje silna korelacja zmiennych, odpowiednio dodatnia i ujemna, wskazując jednocześnie stopień uporządkowania danych

w trend liniowy. W przypadku współczynnika zmienności założono, że dla wartości poniżej 1% zmienność danych jest niska, a powyżej 5% wysoka. Dla względnego rozstępu danych przyjęto wartość odpowiednio 5% - niska, powyżej 10% - wysoka.

W tabeli 4.8 zamieszczono wpływ długości kontaktu s na sztywność osiową. Odzwierciedla ona rozkład próbek z rysunku 4.19, tj. parametry statystyczne obliczono dla zestawów zawierających po 4 próbki różniące się wartością długości styku s .

Tab. 4.8. Analiza wpływu długości kontaktu zwojów biernych s na wartość sztywności osiowej

Wskaźnik C [-]	Kąt wzniosu γ [°]	Liczba zwojów aktywnych n_a [-]	Współczynnik korelacji r [-]	Współczynnik zmienności [%]	Względny rozstęp danych [%]
4	5	1	0,23	1,12	2,64
		1,25	0,29	1,38	3,16
		1,75	-0,78	1,17	2,85
		2,5	-0,44	0,49	1,16
		3,5	0,88	2,82	5,75
	10	1	-0,46	0,25	0,56
		1,25	0,83	0,62	1,14
		1,75	-0,12	0,30	0,67
		2,5	-0,68	0,51	1,09
		3,5	-0,02	0,20	0,43
	15	1	-0,81	0,40	0,91
		1,25	-0,26	0,30	0,68
		1,75	-0,79	0,59	1,28
		2,5	0,2	0,21	0,44
		3,5	0,04	0,12	0,26
8	5	1	0,75	0,23	0,53
		1,25	0,80	0,81	1,72
		1,75	0,54	0,64	1,40
		2,5	-0,57	0,34	0,63
		3,5	0,36	0,14	0,33
	10	1	0,23	0,33	0,69
		1,25	0,35	0,04	0,08
		1,75	-0,06	0,36	0,79
		2,5	-0,03	0,28	0,66
		3,5	0,28	0,13	0,29
	15	1	-0,25	0,13	0,27
		1,25	-0,52	0,22	0,52
		1,75	-0,75	0,31	0,72
		2,5	-0,11	0,10	0,25
		3,5	0,62	0,17	0,39
12	5	1	0,63	0,48	1,06
		1,25	0,62	0,29	0,66
		1,75	-0,01	0,35	0,82
		2,5	0,03	0,35	0,82
		3,5	0,88	0,13	0,30
	10	1	-0,02	0,42	0,95
		1,25	0,56	0,33	0,76
		1,75	0,60	0,17	0,38
		2,5	0,57	0,20	0,43
		3,5	-0,13	0,22	0,51

15	1	-0,93	0,30	0,67
	1,25	0,72	0,38	0,82
	1,75	-0,74	0,92	2,02
	2,5	0,56	0,13	0,29
	3,5	-0,10	0,22	0,53

Zgodnie z tabelą 4.8 zmiana długości styku zwojów biernych wpływa na sztywność osiową w sposób umiarkowany. Współczynnik korelacji Pearsona policzony z modułów ich wartości osiągnął poziom 0,45, a więc umiarkowany. Maksymalny poziom wynosił 0,88 i -0,93, a tylko w łącznie 3 przypadkach przekroczone 0,8. Średni współczynnik zmienności osiągnął bardzo niski średni poziom wynoszący 0,44%, przy maksymalnej wartości 2,82% dla $C = 4$, $\gamma = 5^\circ$, $n_a = 3,5$. Oznacza, to że wyniki nie są zróżnicowane względem siebie. Największe wartości uzyskiwano dla wskaźnika $C = 4$ i $\gamma = 5^\circ$, co oznacza, że dla małego wskaźnika i niskiej wartości kąta wzniosu linii śrubowej sprężyny wpływ długości styku zwojów biernych może być istotny lub przeswyt w tych sprężynach jest na tyle mały, że dochodzi do błędów numerycznych. Dla tych sprężyn również rozstęp względny przyjmował najwyższe wartości, maksymalna wyniosła 5,75% dla $C = 4$, $\gamma = 5^\circ$, $n_a = 3,5$. Pozostałe wartości nie przekraczały 2%, więc sklasyfikowano to jako małe rozproszenie danych.

W celu sprawdzenia wpływu kąta wzniosu linii śrubowej sprężyny γ na wartość sztywności osiowej wykonano dokładnie takie same obliczenia, odpowiednio sortując wyniki spośród wejściowych 180 próbek. Analizowano wymienione parametry statystyczne dla kątów wzniosu linii śrubowej przyjmujących wartości 5° , 10° , 15° dla danego styku zwojów biernych, które zgrupowane były dla odpowiedniego zwoju aktywnego, a te zaś w grupie wskaźnika C . Rezultat analizy przedstawia tabela 4.9.

Tab. 4.9. Analiza wpływu wartości kąta wzniosu linii śrubowej γ na sztywność osiową sprężyny

Wskaźnik C [-]	Liczba zwojów aktywnych n_a [-]	Długość styku zwojów biernych [-]	Współczynnik korelacji r [-]	Współczynnik zmienności [%]	Względny rozstęp danych [%]
4	1	0	-1,00	1,97	3,93
		0,25	-0,95	2,17	4,15
		0,5	-0,85	1,31	2,32
		1	-1,00	2,76	5,51
	1,25	0	-1,00	3,31	6,61
		0,25	-0,98	3,41	6,72
		0,5	-1,00	4,67	9,34
		1	-0,98	3,79	7,40
	1,75	0	-0,84	1,18	2,11
		0,25	-1,00	1,52	3,04
		0,5	-0,78	1,09	2,03
		1	-0,45	1,46	2,91

	2,5	0	-0,88	2,60	4,59
		0,25	-0,87	2,21	3,87
		0,5	-0,87	2,22	3,86
		1	-0,92	2,11	3,86
	3,5	0	-0,96	3,03	5,83
		0,25	-0,97	3,08	5,95
		0,5	-0,98	3,02	5,93
		1	-0,99	5,82	11,52
8	1	0	-0,96	2,39	4,58
		0,25	-0,99	2,38	4,73
		0,5	-0,95	2,51	4,77
		1	-0,98	2,60	5,08
	1,25	0	-0,95	3,84	7,28
		0,25	-0,98	4,23	8,32
		0,5	-0,99	4,71	9,30
		1	-0,99	4,64	9,15
	1,75	0	-0,92	2,03	3,73
		0,25	-0,91	1,38	2,50
		0,5	-0,94	2,08	3,93
		1	-0,97	2,39	4,61
	2,5	0	-0,97	2,95	5,72
		0,25	-0,98	2,76	5,40
		0,5	-0,98	2,95	5,77
		1	-0,96	2,71	5,19
	3,5	0	-0,97	3,33	6,46
		0,25	-0,98	3,46	6,77
		0,5	-0,96	3,21	6,19
		1	-0,98	3,31	6,47
12	1	0	-0,94	2,66	5,00
		0,25	-0,98	2,47	4,82
		0,5	-0,97	2,98	5,81
		1	-0,97	3,17	6,16
	1,25	0	-1,00	5,19	10,37
		0,25	-1,00	4,86	9,70
		0,5	-1,00	5,25	10,47
		1	-1,00	4,97	9,92
	1,75	0	-1,00	2,00	4,00
		0,25	-1,00	1,29	2,58
		0,5	-0,99	2,60	5,13
		1	-0,97	2,54	4,93
	2,5	0	-0,99	3,24	6,42
		0,25	-0,98	2,84	5,57
		0,5	-1,00	2,96	5,90
		1	-0,98	3,08	6,05
	3,5	0	-0,98	3,27	6,41
		0,25	-0,99	3,60	7,12
		0,5	-1,00	3,50	6,96
		1	-0,99	3,50	6,91

Przeprowadzone analizy wskazują, że istnieje wyraźna korelacja między kątem wzniosu i sztywnością osiową, ponieważ współczynnik korelacji w wielu przypadkach przekracza wartość -0,95 oraz często zbliża się do -1. W dodatku, we wszystkich przypadkach była to korelacja ujemna, czyli wraz ze wzrostem kąta wzniosu sztywność maleje. Współczynnik zmienności osiągnął wartość między 1,09% a 5,82%, co oznacza

niedużą zmienność danych, ale większą niż w przypadku długości styku, podanych w tabeli 4.8. Świadczy to o umiarkowanym wpływie, możliwym do pominięcia zgodnie z zaleceniami literaturowymi (Branowski, 1997; Wahl, 1944) ale też możliwym do uwzględnienia (Kruzelecki, Życzkowski, 1990), nawet w formie zwykłej funkcji liniowej, jak sugerują wyniki korelacji. Wartości rozstępu względnego mieściły się w zakresie 2,03% - 11,52%, co nie jest dużą wartością.

Drugim analizowanym parametrem sprężyny była wartość reakcji poprzecznej pochodzącej od osiowego ściskania, którą wyrażono jako stosunek reakcji poprzecznej do osiowej podany w procentach i oznaczony jako R_{rel} . Wpływ długości styku i kąta wzniosu na jej wartość przeanalizowano analogicznie do sztywności osiowej. Wyniki przedstawiono odpowiednio w tabelach 4.10 i 4.11.

Tab. 4.10. Analiza wpływu długość kontaktu zwojów biernych s na wartość względnej reakcji poprzecznej R_{rel}

Wskaźnik C [-]	Kąt wzniosu γ [°]	Liczba zwojów aktywnych n_a [-]	Współczynnik korelacji r [-]	Współczynnik zmienności [%]	Względny rozstępn danych [%]
4	5	1	0,19	37,38	82,08
		1,25	-0,94	25,11	53,23
		1,75	-0,92	14,19	31,39
		2,5	-0,59	6,32	14,46
		3,5	-0,85	31,79	65,40
	10	1	-0,34	15,52	33,03
		1,25	-0,81	6,84	15,85
		1,75	-0,82	6,37	15,40
		2,5	-0,47	2,44	5,53
		3,5	-0,40	2,13	4,78
	15	1	-0,67	8,61	20,07
		1,25	-0,13	4,35	10,36
		1,75	-0,73	4,16	10,09
		2,5	-0,78	1,43	3,49
		3,5	-0,78	0,76	1,47
8	5	1	-0,33	15,16	30,85
		1,25	-0,85	12,84	30,41
		1,75	-0,96	4,62	9,83
		2,5	-0,86	2,58	6,05
		3,5	-0,81	2,52	5,79
	10	1	-0,40	9,10	19,94
		1,25	-0,25	5,62	12,32
		1,75	-0,82	4,26	10,04
		2,5	-0,81	2,03	4,85
		3,5	-0,74	1,37	3,34
	15	1	-0,67	,61	20,07
		1,25	-0,13	4,35	10,36
		1,75	-0,73	4,16	10,09
		2,5	-0,78	1,43	3,49
		3,5	-0,78	0,76	1,47

12	5	1	-0,45	9,09	20,99
		1,25	-0,96	8,33	20,19
		1,75	-0,94	4,88	10,28
		2,5	-0,93	3,50	7,90
		3,5	-0,98	2,42	5,90
	10	1	-0,50	4,84	10,99
		1,25	-0,82	6,33	14,44
		1,75	-0,77	4,70	11,39
		2,5	-0,99	1,90	4,48
		3,5	-0,01	3,04	6,57
	15	1	-0,73	8,50	20,75
		1,25	-0,87	8,14	19,00
		1,75	-0,76	6,34	13,90
		2,5	-0,80	1,39	2,95
		3,5	-0,52	1,75	3,85

Tab. 4.11. Analiza wpływu wartości kąta wzniosu linii śrubowej γ na wartość względną reakcji poprzecznej R_{rel}

Wskaźnik C [-]	Liczba zwojów aktywnych n_a [-]	Długość styku zwojów biernych [-]	Współczynnik korelacji r [-]	Współczynnik zmienności [%]	Względny rozstęp danych [%]
4	1	0	1,00	54,98	109,87
		0,25	0,99	43,59	85,98
		0,5	0,99	68,20	135,58
		1	1,00	39,59	79,18
	1,25	0	0,78	25,78	47,94
		0,25	0,80	21,00	38,73
		0,5	0,86	26,46	46,13
		1	0,90	46,34	83,11
	1,75	0	0,95	24,33	46,38
		0,25	0,95	24,41	46,21
		0,5	0,96	30,64	58,55
		1	0,96	33,77	64,91
	2,5	0	0,34	9,91	19,51
		0,25	0,04	8,93	15,80
		0,5	0,09	9,36	17,01
		1	0,45	12,27	24,51
3,5	0	-0,88	17,16	30,10	
	0,25	-0,90	18,66	33,71	
	0,5	-0,87	19,36	33,87	
	1	0,50	35,68	71,37	
8	1	0	0,99	45,02	88,70
		0,25	0,94	34,71	65,36
		0,5	1,00	50,99	101,98
		1	0,99	45,06	89,01
	1,25	0	1,00	15,24	30,42
		0,25	0,94	16,14	30,28
		0,5	0,99	22,18	43,78
		1	0,98	27,49	54,02
	1,75	0	0,94	23,08	43,43
		0,25	0,94	24,80	46,85
		0,5	0,96	25,34	48,82
		1	0,95	24,96	47,35
2,5	0	0,14	8,05	14,93	
	0,25	0,27	10,50	20,35	

	3,5	0,5	0,22	8,18	15,64
		1	0,37	8,99	17,78
		0	-0,95	19,08	36,32
		0,25	-0,89	17,96	31,88
		0,5	-0,93	19,20	35,81
		1	-0,91	18,12	33,01
12	1	0	0,97	39,78	77,27
		0,25	0,98	37,17	72,90
		0,5	0,97	37,43	72,71
		1	0,93	37,52	70,15
	1,25	0	0,97	28,65	55,74
		0,25	0,97	27,25	52,69
		0,5	0,96	28,10	53,85
		1	0,95	29,63	56,02
	1,75	0	0,97	25,04	48,82
		0,25	0,97	27,50	53,41
		0,5	0,95	23,17	43,92
		1	0,96	26,05	50,05
	2,5	0	0,38	10,37	20,54
		0,25	0,25	9,59	18,45
		0,5	0,33	10,77	21,14
		1	0,51	11,37	22,74
	3,5	0	-0,90	19,51	35,04
		0,25	-0,85	17,04	29,90
		0,5	-0,75	18,81	35,61
		1	-0,81	16,40	29,88

Powyższe analizy wykazują duży wpływ zarówno długości styku jak i kąta wzniosu linii śrubowej na wartość względną reakcji poprzecznej pochodzącej od osiowego ściskania. Współczynnik korelacji dla analizy wpływu długości styku na wartość R_{rel} mieścił się w granicach od 0,19 do -0,99, z przeważającą większością wartości ujemnych, średnio na poziomie -0,67. Świadczy to o umiarkowanej korelacji między długością styku zwojów biernych a wartością reakcji poprzecznej. Został zachowany trend mówiący, że wraz ze wzrostem długości styku wartość względną reakcji poprzecznej maleje. Jednak z powodu małej regularności trendu na etapie wyprowadzenia zależności należało będzie rozstrzygnąć czy ten czynnik uwzględnić w nowej zależności. Współczynnik zmienności osiągnął średnią wartość 6,98%, przy dość niejednorodnym rozkładzie tych wartości w całej próbie. Rozstęp względny natomiast wynosił około 16%, co jest dużą wartością. Świadczy to o braku skupienia danych, więc sugeruje, że długość styku może być istotna.

W przypadku wpływu kąta wzniosu linii śrubowej γ na wartość względną reakcji poprzecznej R_{rel} uzyskano wysokie wartości współczynnika korelacji o wartości bezwzględnej średnio 0,8, lecz wyniki wykazują dodatnie wartości dla wszystkich sprężyn oprócz właściwych dla 3,5 zwojów aktywnych, gdzie trend jest odwrócony. Dane wykazują też duże zróżnicowanie, przyjmując wartości wysokie ponad 0,95 lub niskie -

około 0,25. Maksymalny współczynnik zmienności wyniósł 68,2%, co stanowi wysoką wartość. Podobnie maksymalny rozstęp względny wynoszący prawie 136%. Oznacza to duże zróżnicowanie danych uporządkowanych w funkcję niekoniecznie liniową

Określenie wpływu długości styku i kąta wzniosu linii śrubowej na kierunek reakcji poprzecznej przeprowadzono poprzez wyliczenie rozstępu wartości kąta reakcji poprzecznej oraz ich współczynników korelacji. Pozostałe, stosowane wcześniej wielkości statystyczne nie są miarodajne w przypadku miar kątowych, dlatego nie przeprowadzono ich wyliczeń. Obliczone parametry dla relacji długość styku – kąt reakcji poprzecznej zapisano w tabeli 4.12.

Tab. 4.12. Analiza wpływu długości styku s na kąt reakcji poprzecznej ψ sprężyny ściskanej osiowo

Wskaźnik C [-]	Kąt wzniosu γ [°]	Liczba zwojów aktywnych n_a [-]	Współczynnik korelacji r [-]	Rozstęp [°]
4	5	1	-0,05	189,77
		1,25	0,24	275,56
		1,75	0,02	175,89
		2,5	0,23	267,51
		3,5	0,20	173,50
	10	1	-0,05	178,46
		1,25	0,23	274,42
		1,75	-0,05	179,53
		2,5	0,23	269,14
		3,5	-0,83	356,48
	15	1	-0,05	180,47
		1,25	0,23	272,31
		1,75	-0,05	180,28
		2,5	-0,05	179,96
		3,5	1,00	359,74
8	5	1	-0,06	182,24
		1,25	0,23	268,81
		1,75	-0,05	180,32
		2,5	0,23	269,99
		3,5	-0,83	358,85
	10	1	-0,06	182,03
		1,25	0,23	269,22
		1,75	-0,05	180,02
		2,5	-0,83	359,68
		3,5	1,00	358,95
	15	1	0,97	179,87
		1,25	0,23	269,95
		1,75	-0,05	180,83
		2,5	0,23	270,13
		3,5	0,23	269,82
12	5	1	-0,06	182,00
		1,25	0,22	270,35
		1,75	-0,04	180,72
		2,5	0,23	269,69
		3,5	0,23	268,87
	10	1	-0,05	179,39
		1,25	0,22	268,72

		1,75	-0,05	180,88
		2,5	-0,83	359,26
		3,5	1,00	359,47
	15	1	-0,06	182,18
		1,25	0,23	269,73
		1,75	-0,06	180,19
		2,5	-0,83	359,82
		3,5	-0,05	180,38

Wyniki z tabeli 4.12 pokazują, że nie zawsze występuje wyraźna korelacja między długością styku zwojów biernych i kątem reakcji poprzecznej pochodzącej od osiowego ściskania sprężyny. Występują jednak bardzo duże rozstępy danych, a wartości kąta przyjmują najczęściej regularne wartości z krokiem 45°, co zostanie przedstawione w późniejszym punkcie. W związku z tym wpływ długości styku jest istotny, ale nie wykazuje cech liniowości, a prawdopodobnie zależność tę najlepiej opisałaby funkcja trygonometryczna, lub liniowa opisana w odpowiednich przedziałach.

Wpływ kąta wzniosu linii śrubowej sprężyny na wartość kąta reakcji przedstawiono w analogiczny sposób w tabeli 4.13. Zauważa się znikomy rozstęp danych, wynoszący średnio 8,2°. Wykazano również liniowe zależności między tymi wielkościami, przy wysokim poziomie współczynnika korelacji, lecz bez jednolitego trendu. Oznacza to, że kąt wzniosu nie zmienia w istotny sposób wartości kąta reakcji poprzecznej, mimo pozornego uporządkowania trendu, więc przy wyznaczaniu zależności pozwalającej obliczyć jego wartość, nie powinien być brany pod uwagę, ponieważ niedokładności geometrii rzeczywistej sprężyny będą większe niż potencjalna precyzja takiej zależności.

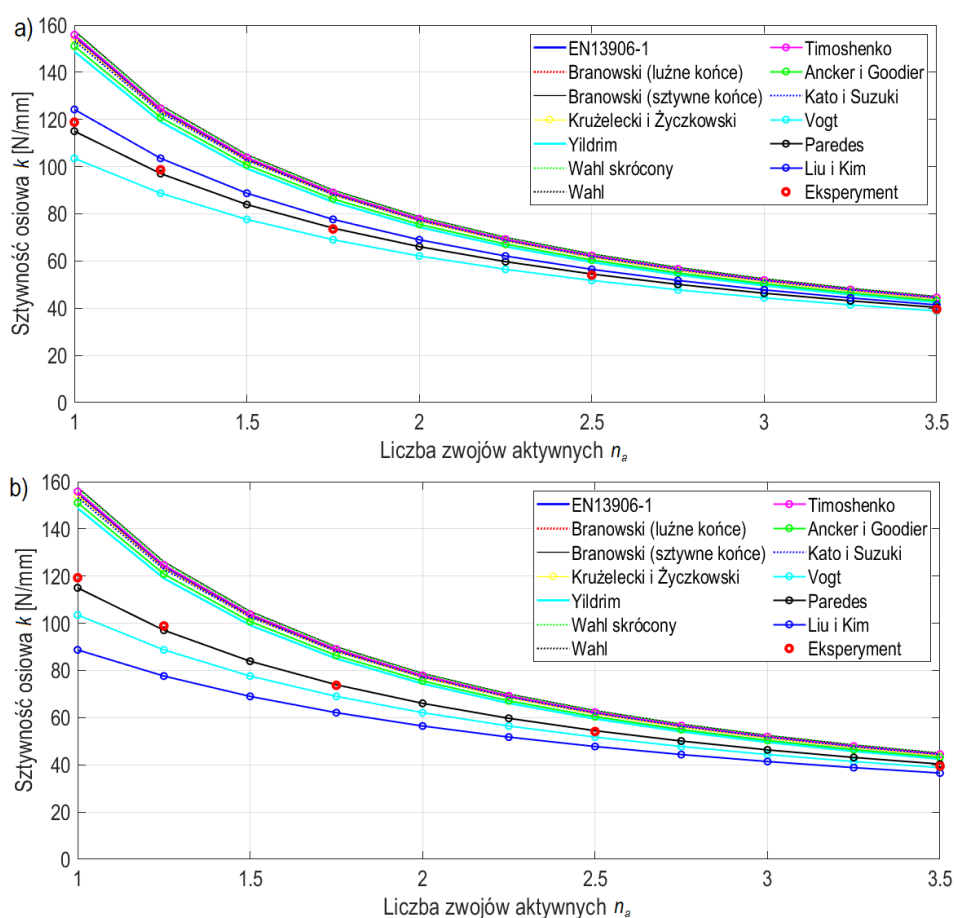
Tab. 4.13. Analiza wpływu kąta wzniosu linii śrubowej sprężyny γ na kąt reakcji poprzecznej sprężyny ψ ściskanej osiowo

Wskaźnik C [-]	Liczba zwojów aktywnych n_a [-]	Długość styku zwojów biernych [-]	Współczynnik korelacji r [-]	Rozstęp [°]
4	1	0	0,77	3,64
		0,25	0,41	1,06
		0,5	-0,77	7,67
		1	0,92	4,32
	1,25	0	0,94	7,72
		0,25	0,99	7,00
		0,5	0,81	4,94
		1	0,86	3,09
	1,75	0	0,81	2,76
		0,25	0,98	1,66
		0,5	0,93	6,85
		1	-0,84	11,51
	2,5	0	-0,87	1,85
		0,25	-0,54	1,39
		0,5	0,91	3,55
		1	-0,87	2,15

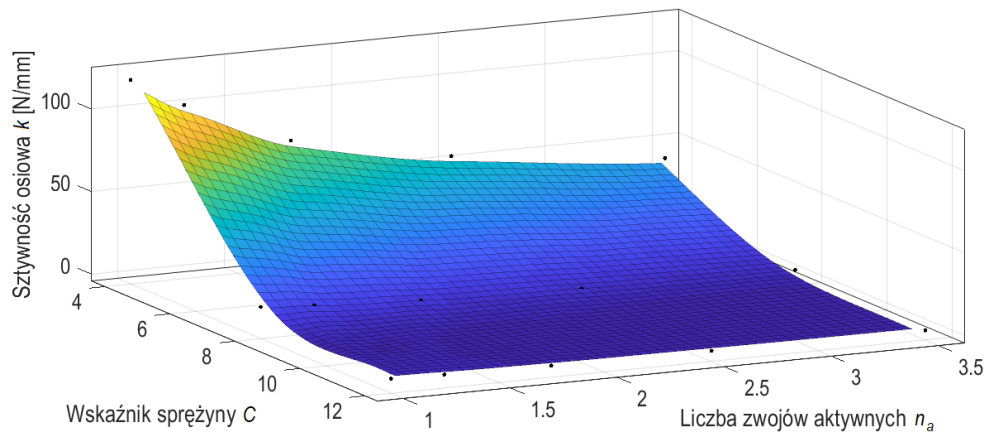
	3,5	0	-0,01	2,84
		0,25	1,00	1,18
		0,5	0,89	4,17
		1	0,80	0,94
8	1	0	0,85	2,16
		0,25	-0,86	90,51
		0,5	-0,86	92,65
		1	0,87	182,93
	1,25	0	0,70	1,47
		0,25	0,21	1,41
		0,5	0,86	2,04
		1	0,79	2,51
	1,75	0	0,41	0,44
		0,25	0,88	0,53
		0,5	1,00	0,31
		1	-0,24	1,51
	2,5	0	0,86	0,79
		0,25	0,70	0,27
		0,5	0,31	0,69
		1	0,00	0,34
	3,5	0	0,00	0,71
		0,25	0,80	1,28
		0,5	0,97	0,99
		1	0,87	0,93
12	1	0	-0,43	0,65
		0,25	-0,99	1,26
		0,5	0,26	1,54
		1	0,10	2,19
	1,25	0	-0,76	1,21
		0,25	-0,23	0,54
		0,5	0,96	1,04
		1	0,67	1,37
	1,75	0	0,94	0,78
		0,25	0,91	7,43
		0,5	-0,07	0,32
		1	-0,99	0,63
	2,5	0	0,82	0,57
		0,25	-0,15	0,48
		0,5	0,90	0,96
		1	-0,87	0,35
	3,5	0	-0,87	0,58
		0,25	-0,56	2,00
		0,5	0,88	0,74
		1	-0,87	0,77

4.5.2. Opracowanie zależności pozwalającej obliczyć sztywność osiową

Zgodnie z wykresami 4.10 – 4.14 istniejące metody obliczania sztywności osiowej w wielu przypadkach znacząco odbiegają od rzeczywistości, co szczególnie widać w przypadku sprężyn krótszych niż 3 zwoje. Wyniki badań numerycznych potwierdzają tę tendencję, co pokazano na rysunku 4.20 dla sprężyn o wskaźniku $C = 4$, kącie wzniosu linii śrubowej $\gamma = 10^\circ$ i długości styku odpowiednio $s = 0$ oraz $s = 0,5$. W całej próbie dla wzoru normowego błąd względny często przekraczał 30%, a wyniósł średnio 22,59%. Pełny przekrój wyników dla styku ćwiartkowego pokazano na wykresie 4.21.



Rys. 4.20. Porównanie obliczonych przy wykorzystaniu eksperymentu numerycznego wartości sztywności osiowej sprężyn o wskaźniku $C = 4$, kącie wzniosu helisy $\gamma = 10^\circ$ i długości styku a) $s = 0$, b) $s = 0,5$ na tle wszystkich cytowanych w podrozdziale 4.1 metod obliczania sztywności osiowej



Rys. 4.21. Zmiana sztywności osiowej sprężyn względem wskaźnika C i liczby zwojów aktywnych n_a dla sprężyn o kącie wzniosu $\gamma = 10^\circ$ i długości styku $s = 0,25$

Zgodnie z rysunkiem 4.20 model numeryczny najlepiej jest odwzorowany przez metodę Paredesa. Widoczne rozbieżności występują jedynie przy 1 i 1,25 zwojach aktywnych. Z rysunku 4.20 wynika, że największą dynamikę zmiany sztywności osiowej względem liczby zwojów aktywnych i wskaźnika odnotowuje się dla najmniejszych ich wartości. Zmiana tych wielkości natomiast może być opisana funkcją wykładniczą lub potęgową. Analizy parametrów statystycznych badania przeprowadzonego w poprzednim punkcie sugerują pominięcie wyników dla wskaźnika $C = 4$ i kąta $\gamma = 5^\circ$, zawierające najwięcej niezgodności z trendami odpowiadającymi wyższym wskaźnikom.

Na początku procesu budowy nowego wzoru pominięto wpływ długości styku zwojów biernych z powodu małego znaczenia i obliczono średnią sztywność wyznaczoną za pomocą metody elementów skończonych (MES) k_{MES} . Następnie wyznaczono iloraz χ (4.23) sztywności osiowej wyznaczonej przy pomocy MES i sztywności wyznaczonej według normy EN 13906-1:2013(E), którą oznaczono jako k_N (4.2).

$$\chi = \frac{k_{MES}}{k_N} \quad (4.23)$$

Wykorzystując narzędzie Curve Fitting w programie Matlab dokonano aproksymacji wyników do funkcji dążącej do 1, ponieważ w zdecydowanej większości przypadków sztywność obliczana według cytowanej normy zawiązała jej wartość. Zastosowano funkcję nieliniową postaci (4.24), a wartości jej parametrów dla poszczególnych grup sprężyn zawarto w tabeli 4.14, podając dodatkowo współczynnik determinacji R^2 celem określenia dokładności dopasowania.

$$\chi = 1 - (a \cdot n_a^b)^{-1} \quad (4.24)$$

Tab. 4.14. Wartości parametrów a i b z równania (4.24) w zależności od wskaźnika sprężyny C , kąta wzniosu linii śrubowej γ razem z wartościami współczynnika determinacji R^2 (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025)

Wskaźnik C [-]	Kąt wzniosu γ [°]	Parametr a	Parametr b	R^2
4	5	4,550	0,6462	0,8685
	10	4,328	0,5942	0,9889
	15	3,946	0,4576	0,9917
8	5	4,409	0,5350	0,9164
	10	4,168	0,4938	0,9726
	15	3,701	0,3970	0,9961
12	5	4,393	0,5183	0,9021
	10	4,055	0,4600	0,9751
	15	3,587	0,3937	0,9910

Najniższa wartość R^2 wyniosła 0,8685, a średnio około 0,95, co jest dobrym rezultatem. Wszystkie parametry wykazują zgodny trend możliwy do opisanie przez funkcję liniową postaci (4.25) i (4.26), a wartości parametrów k_i oraz m_i przedstawiono w tabeli 4.15.

$$a = k_1 \cdot \gamma + k_2 \quad (4.25)$$

$$b = m_1 \cdot \gamma + m_2 \quad (4.26)$$

Tab. 4.15. Wartości parametrów k_1 , k_2 , m_1 i m_2 z równań (4.25) i (4.26) wraz z podaniem współczynnika determinacji R^2 oraz wartościami średnimi (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025).

C [-]	k_1	k_2	R^2	m_1	m_2	R^2
4	-0,060	4,879	0,9771	-0,019	0,755	0,9371
8	-0,071	4,801	0,9672	-0,014	0,613	0,9487
12	-0,081	4,818	0,9914	-0,012	0,582	0,9986
Średnia	-0,071	4,833	0,9786	-0,015	0,650	0,9615

Wyznaczone wartości średnie współczynników pozwoliły określić ostateczną postać funkcji (4.27) i (4.28) pozwalających obliczyć wartości parametrów a i b w zależności od kąta wzniosu linii śrubowej sprężyny, tym samym uwzględniając go we wzorze na sztywności osiową. Dokładność dopasowania wyrażona współczynnikiem determinacji R^2 osiągnęła wartość powyżej 0,96, co jest zadawalające.

$$a = -0,071 \cdot \gamma + 4,833 \quad (4.27)$$

$$b = -0,015 \cdot \gamma + 0,650 \quad (4.28)$$

Dokonano weryfikacji dokładności wyznaczonych zależności porównując je z wartościami uzyskanymi w tabeli 4.14, wyznaczając również średni współczynnik determinacji. Wyniki porównania zestawiono w tabeli 4.16.

Tab. 4.16. Porównanie wartości parametrów a i b obliczonych przy użyciu wzorów (4.27) i (4.28) z ich docelowymi wartościami z tabeli 4.14. (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025)

C [-]	γ [°]	a	a (4.27)	b	b (4.28)
4	5	4,550	4,478	0,6462	0,575
	10	4,328	4,123	0,5942	0,500
	15	3,946	3,768	0,4576	0,425
8	5	4,409	4,478	0,5350	0,575
	10	4,168	4,123	0,4938	0,500
	15	3,701	3,768	0,3970	0,425
12	5	4,393	4,478	0,5183	0,575
	10	4,055	4,123	0,4600	0,500
	15	3,587	3,768	0,3937	0,425
		R^2	0,9786	R^2	0,9615

Współczynnik determinacji dla parametrów a i b wyniósł odpowiednio średnio 0,9786 i 0,9615, co jest wartościami zadawalającymi. Wobec tego ostateczna postać zależności na sztywność osiową ma postać (4.29).

$$k_{\chi} = k_N \cdot \left(1 - \frac{1}{(4,83 - 0,071 \cdot \gamma) \cdot n_a^{(0,65 - 0,015 \cdot \gamma)}} \right) \quad (4.29)$$

Zależność przetestowano dla 8 losowo wybranych sprężyn z zakresu zmienności wskaźnika C od 4 do 20, kąta wzniosu od 5 do 20, liczby zwojów aktywnych od 1 do 5 oraz długości styku zwojów biernych od 0 do 2, zbadane do ugięcia równego 60% wartości prześwitu. Wynikiem analiz była sztywność osiowa obliczona numerycznie k_F . Zestawienia wyników dokonano w tabeli 4.17.

Tab. 4.17. Sprawdzenie zakresu stosowania opracowanej zależności (4.29)

C [-]	γ [°]	n_a [-]	s [-]	k_F [N/mm]	k_{χ} [N/mm]	Błąd względny [%]
7	13	3,50	0,125	7,050	7,080	-0,4
10	5	2,75	0,250	3,082	3,162	-2,6
5	18	2,00	0,000	30,63	31,15	-1,7
16	15	1,50	1,000	1,188	1,256	-5,7
17	8	5,00	1,375	0,360	0,364	-1,1
13	10	3,25	0,875	1,185	1,204	-1,6
6	9	1,25	0	29,48	28,98	1,7
5	20	2,00	0,500	23,52	23,25	1,2

W wyniku weryfikacji dokładności wzoru (4.29) na podstawie losowej próby 8 sprężyn obliczono, iż średni błąd względny wyniósł 2%. Dla szerszego porównania dokonano obliczenia średniego błędu MAPE dla zestawienia wyników badań numerycznych z najbardziej znanymi metodami, które zamieszczono w tabeli 4.18.

Tab. 4.18. Porównanie dokładności wybranych metod obliczania sztywności osiowej sprężyn (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025)

Zależność na sztywność osiową	Średni bezwzględny błąd procentowy (MAPE)
EN 13906-1:2013(E)	23,40%
Vogt (1934)	5,91%
Paredes (2016)	3,62%
Krużelecki i Życzkowski (1990)	22,17%
Yıldırım (2016)	18,95%
Liu i Kim (2009)	13,93%
k_x (4.29)	1,38%

Zgodnie z tabelą 4.18, opracowana zależność (4.29) okazała się najdokładniejszą, biorąc pod uwagę badania numeryczne, ponieważ MAPE wyniósł dla niej 1,38%. Następnym jest wzór Paredesa z MAPE równym 3,62%. Prognozowanie wyników badań numerycznych nie jest jednak najlepszym sposobem, ponieważ jest obarczone błędami numerycznego odwzorowania modelu. W związku z tym zestawiono metodę podaną w normie, Paredesa i opracowaną powyżej z wynikami uzyskanymi podczas wcześniejszego pomiaru z wykorzystaniem maszyny wytrzymałościowej. Wyniki zamieszczono w tabeli 4.19.

Tab. 4.19. Porównanie sztywności osiowej sprężyn obliczonych z wykorzystaniem trzech wybranych metod z badaniami stanowiskowymi (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025)

Wskaźnik C [-]	Liczba zwojów aktywnych n_a [-]	Długość styku s [-]	Sztywność eksperymentalna [N/mm]	Błąd względny [%]		
				k_N (1)	k_x (18)	k_P (2)
5	2,5	0	139,9	-15	1	-1
		0,25	156,3	-3	12	10
		0,5	142,0	-13	3	1
	2,75	0	138,4	-6	8	6
		0,25	140,5	-4	10	7
		0,5	130,8	-12	3	1
	3	0	129,4	-4	10	7
		0,25	130,0	-3	10	8
		0,5	122,7	-9	5	2

MAPE [%]				8	7	5
Rozstęp [%]				12	10	11
7	2,5	0	51,2	-15	1	-1
		0,25	51,3	-14	1	0
		0,5	49,2	-19	-4	-5
	2,75	0	48,1	-11	3	2
		0,25	47,3	-13	1	0
		0,5	47,1	-13	1	-1
	3	0	45,5	-8	5	4
		0,25	44,1	-11	2	1
		0,5	45,0	-9	4	3
MAPE [%]				13	2	2
Rozstęp [%]				12	9	8

Zestawienie wyników obliczeń sztywności osiowej przy wykorzystaniu opracowanego wzoru z wynikami badań rzeczywistych wykazały MAPE na poziomie od 2% do 7% dla wskaźnika $C = 7$. Dokładniejsza okazała się metoda Paredesa dając od 2% dla $C = 7$ do 5 % dla $C = 5$. Nie mniej jednak opracowana metoda jest dokładniejsza od podanej w normie EN 13906-1, więc jest konkurencyjna wobec wszystkich dokładniejszych od normowej.

Możliwe jest opracowanie jeszcze dokładniejszej zależności poprzez przeprowadzenie badań szerszych stanowiskowych i numerycznych. Możliwe jest zastosowanie sztucznych sieci neuronowych do opracowania dokładniejszego wzoru, który uwzględni większą liczbę czynników. Opracowana zależność jest zdolna do zastosowania dla sprężyn stalowych, dla wskaźników C od 4 do 20, kąta wzniosu od 5° do 20° i każdej liczby zwojów aktywnych, większej od 1, ponieważ opracowana poprawka dąży do 1 przy dużej liczbie zwojów. Zastosowanie dla innych materiałów i innych zakresów wymaga szerszych badań, stanowiskowych, bądź numerycznych, wykorzystując opracowany model.

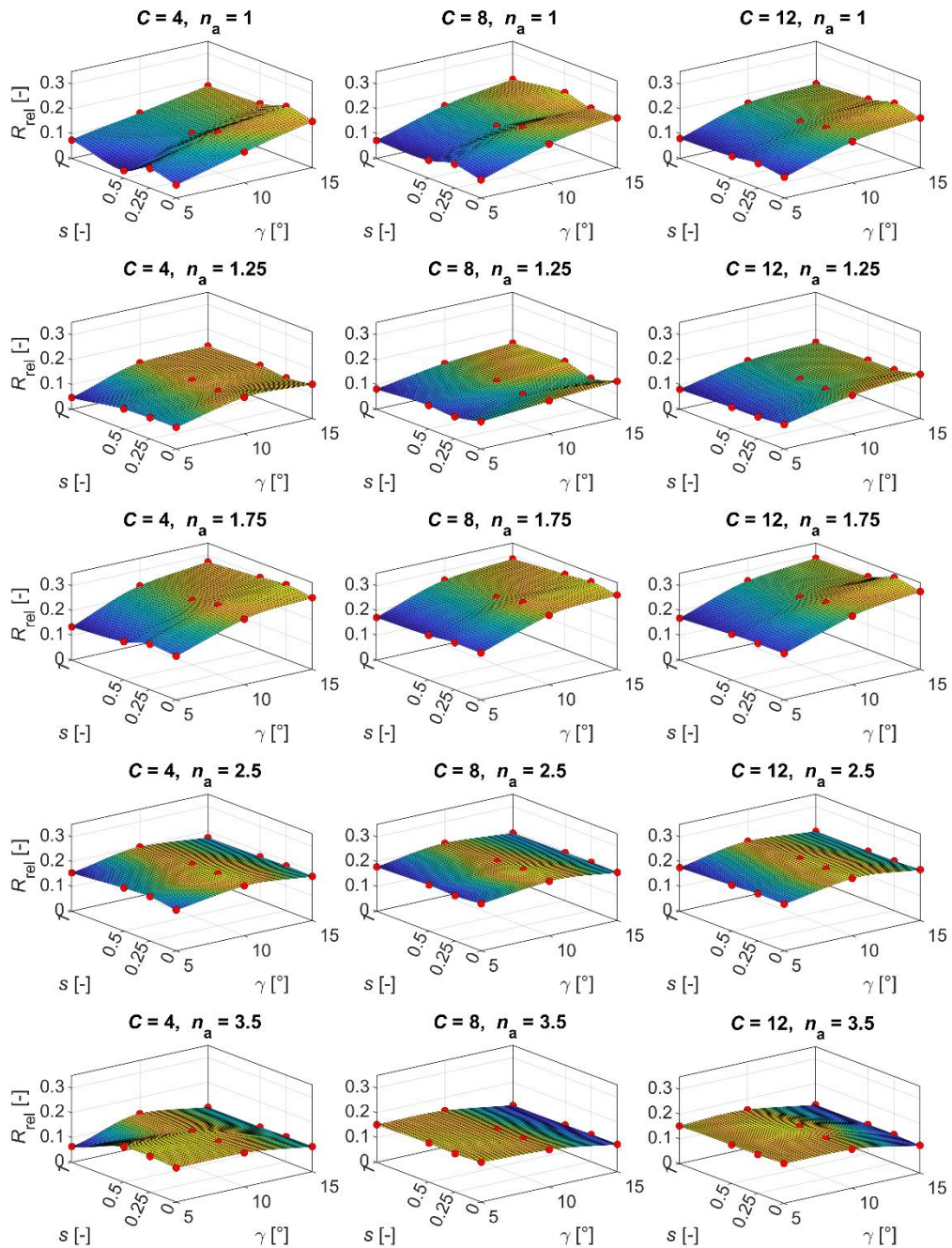
4.5.3. Opracowanie zależności na wartość reakcji poprzecznej

Podczas osiowego ściskania przy założeniu nieruchomego poprzecznie i kątowno górnego talerza obciążającego, tak jak zastosowano dla badań sztywności osiowej, powstaje reakcja poprzeczna R_p . Jak wspomniano we wstępie jest to istotny problem przy budowie zawieszenia wagonów kolejowych, lokomotyw i innych pojazdów szynowych zawieszonych na sprężynach. Reakcja ta musi być zrównoważona poprzez sąsiednią sprężynę, więc istotny jest też jej kąt. Zgodnie z normą EN 13298 reakcja ta warunkuje wartość i kierunek pomiaru sztywności poprzecznej. W tym punkcie dokonano analizy rozkładu wartości reakcji poprzecznych, wyprowadzając empiryczną zależność, pozwalającą wyznaczyć jej wartość. Bazowano na wejściowych 180 sprężynach, ale na potrzeby badań dokonano wyboru kolejnych na łączną liczbę 225 sprężyn. Z racji, że podobnie jak w przypadku sztywności osiowej pominięto wpływ długości styku zwojów biernych, wykonano badania tylko dla sprężyn o styku punktowym. Tym samym wykorzystano sprężyny o liczbie zwojów aktywnych: 1; 1,25; 1,5; 1,75; 2; 2,25; 2,5; 2,75; 3; 3,25; 3,5; 3,75; 4; 4,25; 4,5 i 5. Dodatkowe pomiary wykonano dla kąta wzniosu linii śrubowej: 5° , 10° i 15° , lecz tylko dla wskaźnika $C = 8$ (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025).

Z uzyskanych danych reakcji na kierunku osi X i Y, odpowiednio R_x , R_y , wyznaczono reakcję wypadkową R_p i odniesiono ją do reakcji osiowej R_z , wyznaczając reakcję względną R_{rel} (4.30):

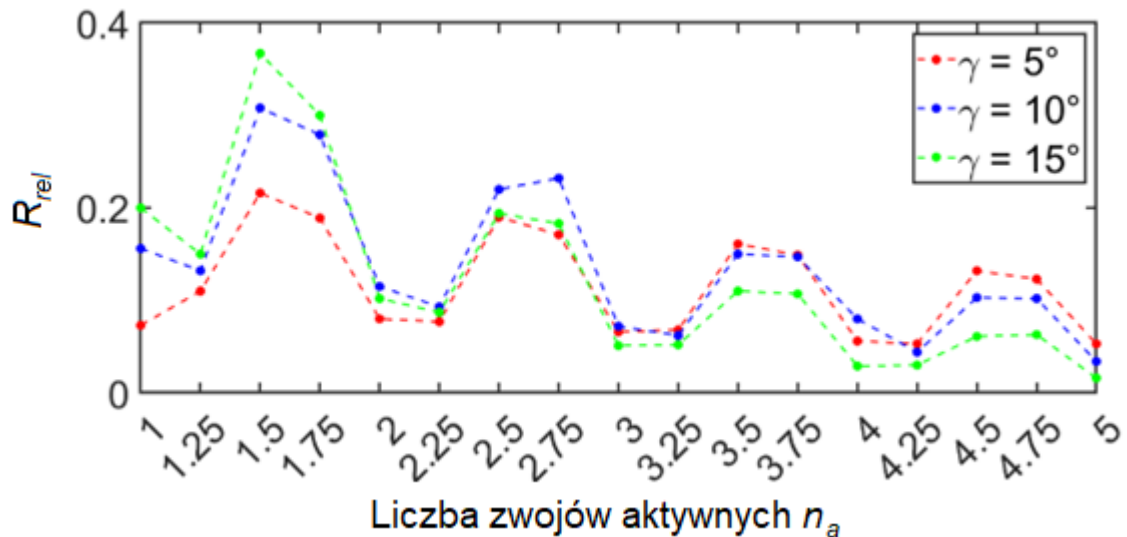
$$R_{rel} = \frac{\sqrt{R_x^2 + R_y^2}}{|R_z|} \quad (4.30)$$

Następnie sporządzono mapy rozkładu wartości R_{rel} względem długości styku s i kąta wzniosu γ , co przedstawiono na rysunku 4.22. Wynika z niego fakt, że wpływ długości styku na wartość reakcji poprzecznej nie jest istotny dla większych wskaźników i większych liczb zwojów aktywnych. Potwierdzają to też obliczenia statystyczne wykonane w punkcie 4.5.1. W związku z tym pominięto ten parametr geometryczny, aby uprościć obliczenia. Możliwe byłoby jego uwzględnienie, ale po wykonaniu dużej liczby badań i wykorzystaniu na przykład sztucznych sieci neuronowych, a tych metod nie zakładano do wykorzystania w niniejszej dysertacji. Większy udział w wartości reakcji poprzecznej ma kąt wzniosu linii śrubowej i on będzie uwzględniany w nowej zależności.



Rys. 4.22. Rozkład wartości względnej reakcji poprzecznej R_{rel} względem długości styku s i kąta wzniosu linii śrubowej sprężyny γ (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025)

Wykresy z rysunku 4.22 pokazują również niezależnienie reakcji względnej R_{rel} od wskaźnika sprężyny, co ułatwiło proces wyprowadzenia zależności, ponieważ skupiono się tylko na najbardziej regularnych sprężynach o wskaźniku $C = 8$ oraz styku $s = 0$, wykonując dodatkowe badania dla większej liczby zwojów aktywnych, których wyniki przedstawiono na rysunku 4.23.

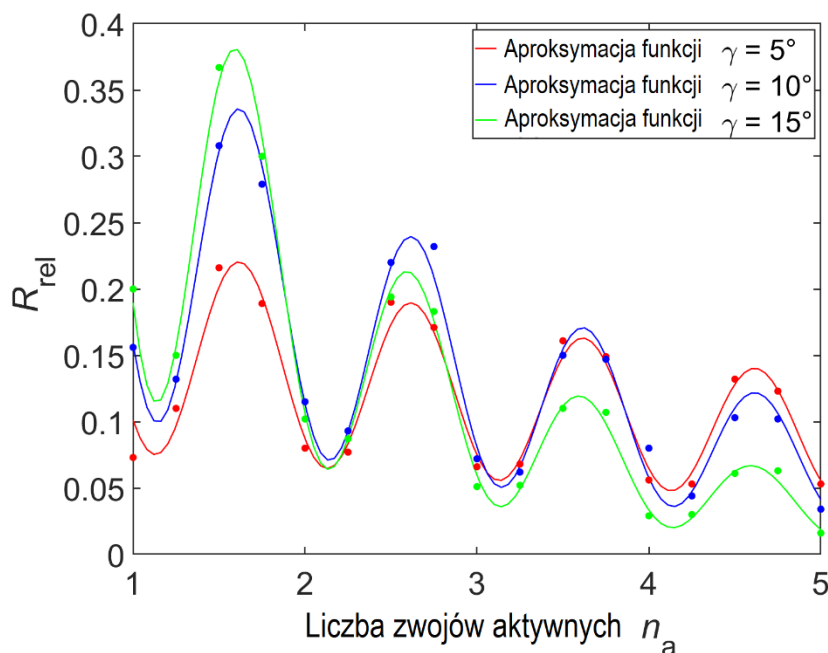


Rys. 4.23. Zależność reakcji względnej R_{rel} od liczby zwojów aktywnych n_a dla sprężyn o wskaźniku $C = 8$ i styku $s = 0$ (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025)

Zauważalny jest widoczny trend spadku wartości względnej reakcji poprzecznej, niezależny od kąta wzniosu. Ponadto w większości przypadków powtarzalna jest jej największa wartość dla połówkowej liczby zwojów aktywnych, na drugim miejscu dla 3/4, na trzecim pełnej, a najmniejsza dla ćwiartkowej (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025). Trend ten przypomina gasnące drgania, toteż do jego opisu zastosowano funkcję pozwalającą je opisać, postaci (4.31):

$$R_{rel} = c_1 e^{c_2 n_a} \cdot (c_3 - c_4 \cos(2\pi n_a) - \sin(2\pi n_a)) \quad (4.31)$$

Wykorzystując narzędzie Matlab Curve Fitter dokonano dopasowania do danych z rysunku 4.23 funkcją (4.31), uzyskując prognozę wartości reakcji względnej przedstawioną na rysunku 4.24. Parametry równania (4.31) dla każdego z przebiegów funkcji zostały podane w tabeli 4.20.



Rys. 4.24. Zależność R_{rel} w funkcji n_a z rysunku 4.23 opisana funkcją (4.31) (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025)

Tab. 4.20. Wartości współczynników funkcji (4.31) wraz z współczynnikiem determinacji (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025)

γ [°]	c_1	c_2	c_3	c_4	R^2
5	0,0685	-0,1508	2,7048	1,2563	0,9862
10	0,1660	-0,3381	2,1928	0,8522	0,9853
15	0,2731	-0,5805	2,1819	0,9409	0,9948

W celu uproszczenia postaci funkcji zdecydowano o przyjęciu stałej wartości parametrów c_3 i c_4 , zastępując je wartością średnią wszystkich wartości odpowiadających poszczególnym kątom γ . Obliczono, że $c_3 = 2,3598$, $c_4 = 1,0165$. Następnie dokonano ponownej aproksymacji funkcji, której parametry podano w tabeli 4.21.

Tab. 4.21. Wartości współczynników funkcji (4.31) ze stałymi wartościami c_3 i c_4 (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025)

γ [°]	c_1	c_2	c_3	c_4	R^2
5	0,0787	-0,1529	2,3598	1,0165	0,9760
10	0,1541	-0,3385			0,9796
15	0,2502	-0,5745			0,9934

Parametry c_1 i c_2 opisano funkcją odpowiednio liniową i potęgową w zależności od kąta wzniosu linii śrubowej sprężyny, otrzymując następujące postaci (4.32) i (4.33) (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025):

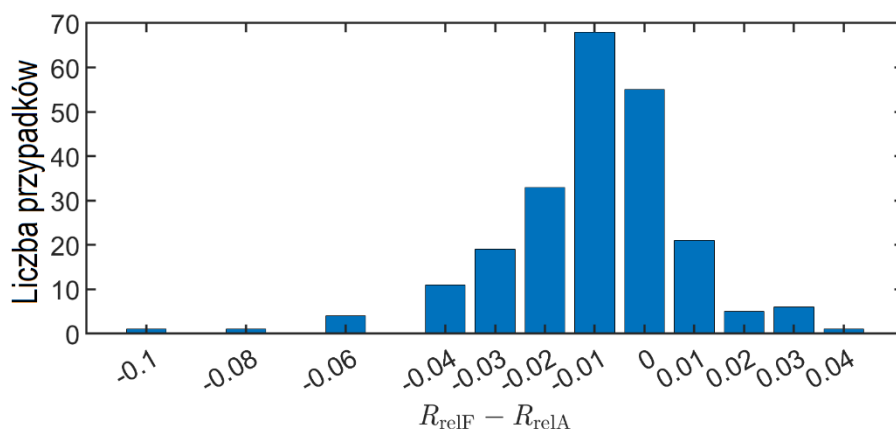
$$c_1(\gamma) = 0,0162\gamma \quad (4.32)$$

$$c_2(\gamma) = -0,0199\gamma^{1,24} \quad (4.33)$$

Uzyskały one wysokie współczynniki determinacji R^2 , odpowiednio 0,9920 dla c_1 i 0,9988 dla c_2 , co można określić mianem wysoce dokładnego dopasowania. Ostateczna zależność ma postać (4.34) (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025):

$$R_{rel} = \frac{0,0231\gamma}{e^{0,0199n_a\gamma^{1,24}}} \cdot (1,66 - \cos(2\pi n_a - 0,777)) \quad (4.34)$$

Dokładność powyższej zależności określono poprzez obliczenie różnicy między wynikami uzyskanymi przy użyciu metody elementów skończonych R_{relF} i w sposób analityczny R_{relA} . Różnicę opisano za pomocą histogramu zamieszczonego na rysunku 4.25. Zgodnie z nim aż 144 przypadków tej różnicy (z 225) nie przekroczyło 0,01, a 75 zmieściło się między 0,01 a 0,05. Oznacza to, że wyprowadzona zależność dość dokładnie prognozuje wyniki numeryczne na podstawie danych wejściowych.



Rys. 4.25. Rozkład różnicy wartości względnej reakcji obliczonej numerycznie R_{relF} od analitycznej R_{relA} (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025)

Tak jak poprzednio dokonano weryfikacji dokładności opracowanej zależności na innych modelach numerycznych, czyli dla losowo wybranych 8 sprężyn o szerszym zakresie zmienności parametrów geometrycznych. Wyniki porównania podano w tabeli 4.22.

Tab. 4.22. Weryfikacja dokładności zależności (4.34)

C [-]	γ [°]	n_a [-]	s [-]	R_{relF} [N/mm]	R_{relA} [N/mm]	Błąd względny [%]
7	13	3,50	0,125	0,1370	0,1334	2,6
10	5	2,75	0,250	0,1718	0,1823	-6,1
5	18	2,00	0,000	0,1134	0,0939	17,2

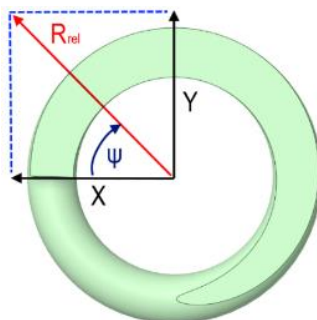
16	15	1,50	1,000	0,3428	0,3488	-1,8
17	8	5,00	1,375	0,0375	0,0472	-25,7
13	10	3,25	0,875	0,0769	0,0720	6,4
6	9	1,25	0	0,1152	0,1364	-18,5
5	20	2,00	0,500	0,0816	0,0757	7,3

Analiza przedstawiona w tabeli 4.22 pokazuje dobrą zgodność wartości reakcji względnych R_{rel} obliczonych za pomocą zależności (4.34) z obliczonymi numerycznie. Uzyskano błąd MAPE równy około 10,7%.

4.5.4. Opracowanie zależności na wartość kąta reakcji poprzecznej

Zagadnieniem bezpośrednio wiążącym się z reakcją poprzeczną pochodzącą od osiowego ściskania jest kąt i kierunek tej reakcji. W dziedzinie eksploatacji sprężyn kolejowych jest to nawet ważniejsze niż sama wartość reakcji. Zawsze przed montażem każda sprężyna musi mieć wyznaczony kierunek „ucieczki” i jest on zaznaczany na sprężynie. Wykonuje się to po to, aby ustawiając takie same sprężyny reakcje znosiły się wzajemnie. Opracowanie prostej zależności pozwoliłoby uniknąć badań stanowiskowych.

Analizując dane wartości kąta reakcji ψ , zauważono konkretny trend. Wszystkie wartości przyjmowały wartości kątów z krokiem 45° , z dokładnością około $\pm 3^\circ$ i były zależne od długości styku s oraz cząstkowej liczby zwojów aktywnych n_p , niezależnie od wskaźnika i kąta wzniosu sprężyny. Zakładając układ współrzędnych zamieszczony na rysunku 4.26 zmierzono wartości kąta reakcji poprzecznej dla dotychczas zbadanych 225 sprężyn i zaokrąglone zamieszczono w tabeli 4.23, pomijając najbardziej odstające wyniki dla $C = 4$ i $\gamma = 5^\circ$. Problem tych wyników wynika z dużej bliskości zwojów, przez co interakcje między zwojami mogą pojawiać się w różnych miejscach i nie jest możliwe dokładne ich opisanie. Sprężyny o większym skoku są łatwiejsze w opisie jej parametrów.

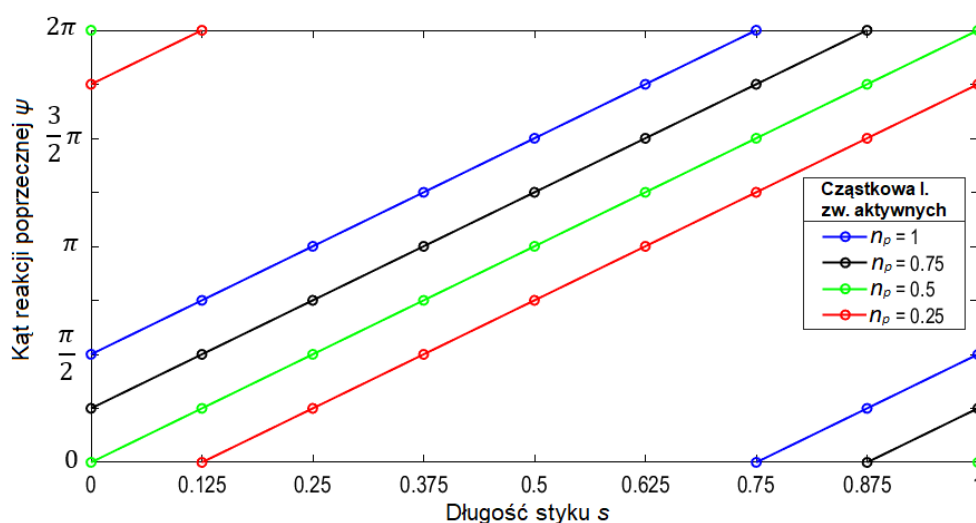


Rys. 4.26. Układ współrzędnych zastosowany do pomiaru kąta reakcji poprzecznej (tzw. „ucieczki”) (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025)

Tab. 4.23. Przybliżone wyniki pomiarów kąta reakcji poprzecznej sprężyny (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025)

Zwoje aktywne n_a [-]	Długość styku s [-]	Kąt reakcji ψ [°]	Zwoje aktywne n_a [-]	Długość styku s [-]	Kąt reakcji ψ [°]
1	0	90	2,25	0	315
1	0,25	180	2,5	0	0
1	0,5	270	2,5	0,25	90
1	1	90	2,5	0,5	180
1,25	0	315	2,5	1	0
1,25	0,25	45	2,75	0	45
1,25	0,5	135	3	0	90
1,25	1	315	3,25	0	315
1,5	0	0	3,5	0	0
1,5	0,25	90	3,5	0,25	90
1,5	0,5	180	3,5	0,5	180
1,5	1	0	3,5	1	0
1,75	0	45	3,75	0	45
1,75	0,25	135	4	0	90
1,75	0,5	225	4,25	0	315
1,75	1	45	4,5	0	0
2	0	90	4,75	0	45

Podjęto decyzję o uzupełnieniu wyników symulacji o kolejne 20 sprężyn pośrednich pomiędzy dotychczas zmierzonymi, aby upewnić się co do kwestii prognozowanego trendu. Wykonano badania dla $C = 8$, $\gamma = 10^\circ$, $n_a = 1; 1,25; 1,5; 1,75$ i długości styku zwojów biernych $s = 0,125; 0,375; 0,625, 0,75; 0,875$. Wyniki pokryły się z trendem i zostały umieszczone na rysunku 4.27, jako mapa, mogąca z powodzeniem służyć do graficznego wyznaczania wartości kąta „ucieczki” sprężyny ψ .



Rys. 4.27. Graficzne przedstawienie zależności między kątem reakcji poprzecznej ψ a długością styku s i cząstkową liczbą zwojów aktywnych n_p (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2025)

Wykres z rysunku 4.27 opisano równaniem (4.35), przyjmując, że dla pełnej liczby zwojów aktywnych za n_p należy wstawić wartość 1.

$$\psi = \pi \cdot (2 \cdot s + n_p - 0,5) \quad (4.35)$$

Podobnie jak w poprzednich przypadkach wykonano testy numeryczne dla tych samych ośmiu losowo wybranych sprężyn. Wyniki porównania pokazano w tabeli 4.24, podając różnicę między wynikami wyrażoną w stopniach.

Tab. 4.24. Porównanie wartości kąta reakcji poprzecznej pochodzącej od osiowego ściskania sprężyny wyznaczonego numerycznie ψ_F oraz analitycznie ψ_A

C [-]	γ [°]	n_a [-]	s [-]	ψ_F [N/mm]	ψ_A [N/mm]	$\psi_F - \psi_A$ [°]
7	13	3,50	0,125	44,65	45	-0,35
10	5	2,75	0,250	134,26	135	-0,74
5	18	2,00	0,000	90,72	90	0,72
16	15	1,50	1,000	0,14	360	-359,86
17	8	5,00	1,375	224,67	585	-360,33
13	10	3,25	0,875	270,25	270	0,25
6	9	1,25	0	-44,00	-45	1,00
5	20	2,00	0,500	269,23	270	-0,77

Opracowana zależność wykazała bardzo dobrą dokładność na poziomie $\pm 1^\circ$. Większe różnice wynoszące około 360° wynikają z zastosowania większej długości styku niż 1 zwoj, toteż obliczając wartość kąta reakcji poprzecznej należy to uwzględnić i od wyniku odjąć kąt 360° , albo przyjmując do zależności (4.35) cząstkową długość styku. Tym razem również z racji braku stanowiska badawczego nie wykonano pomiarów rzeczywistych, które ostatecznie zweryfikowałyby wyprowadzoną zależność.

4.6. Wpływ wielkości promienia przejścia między zwojami biernymi i aktywnymi na reakcję poprzeczną i sztywność osiową

Wpływ zwojów wyrównujących jest całkowicie pomijany przez normy i literaturę z wyjątkiem (Libermann, 2006). Zakres ten jest progresywnym odcinkiem sprężyny powstających na skutek kształtowania sprężyny w maszynie obróbczej. Opisany jest on równaniem okręgu o określonej wartości promienia, co zdefiniowano w rozdziale 3. Możliwe jest oznaczenie tego odcinka wielkością kątową φ_{wyr} jako część zwoju aktywnego. Oczywiście projektuje się sprężyny progresywne, ale są to dłuższe i zaplanowane odcinki. Analizowany w tym podrozdziale parametr jest nieokreślany na etapie projektowania sprężyn. Natomiast nie wątpliwie, zmniejsza on kąt wzniosu linii śrubowej, upłynniając jego zmianę, kosztem wysokości sprężyny. Wobec tego zdecydowano się na przeprowadzenie badań, których celem jest określenie wpływu wielkości zwoju przejściowego na sztywność osiową i wartość oraz kąt reakcji poprzecznej powstającej w wyniku osiowego ściskania.

Zdecydowano się na wybór pięciu odcinków wyrównujących o kącie φ_{wyr} równym $22,5^\circ$, 45° , 90° , 180° , 270° i 360° (zwój pełny), przy zachowaniu tolerancji wynoszącej $\pm 0,5^\circ$. Celem badań było stwierdzenie na ile istotny jest to parametr i czy można uzyskać zależności szacujące przybliżone wartości sztywności i reakcji sprężyn poddanych tej modyfikacji geometrycznej.

Badania wykonano dla sprężyn o wskaźniku $C = 4$, kącie wzniosu linii śrubowej $\gamma = 10^\circ$ i $\gamma = 20^\circ$, liczbie zwojów aktywnych n_a równej 2 i 3,5, punktowym styku zwojów biernych oraz zeszlifowaniu $\frac{3}{4}$ ostatnich zwojów. Ponadto wykonano badania dla $C = 8$, $\gamma = 10^\circ$ i $n_a = 2$, $s = 0$. Dla sprężyn o 2 zwojach aktywnych udział odcinka progresywnego w całkowitej liczbie zwojów aktywnych wynosił maksymalnie 100%, natomiast dla sprężyny o 3,5 zwojach aktywnych udział progresywności wyniósł maksymalnie 57%.

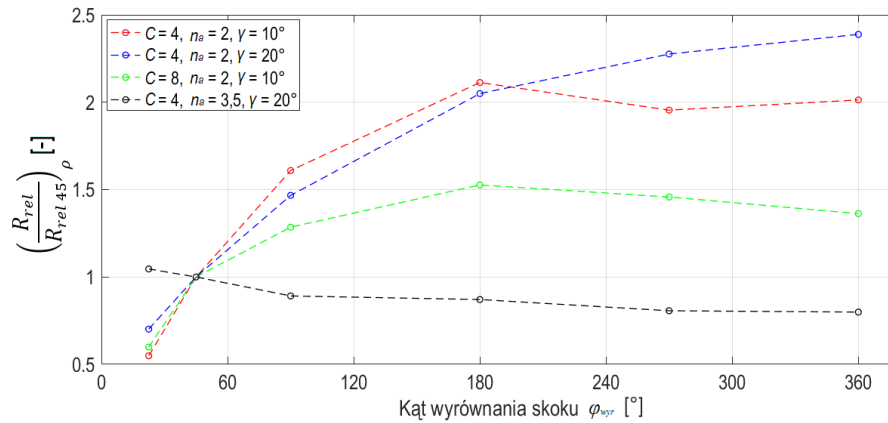
Pierwszym aspektem badań było sprawdzenie wartości kąta reakcji poprzecznej. Zgodnie z wynikami był on zmienny dla różnych długości odcinka przejściowego, ale nie znaleziono stałego trendu. Rozstęp jego wartości dla poszczególnych serii sprężyn przedstawiono w tabeli 4.25.

Tab. 4.25. Rozstęp wartości kąta reakcji poprzecznej pochodzącej od osiowego ściskania sprężyny różniących się długością odcinka przejściowego φ_{wyr} dla poszczególnych wartości wskaźnika, kąta wzniosu linii śrubowej i liczby zwojów aktywnych sprężyny.

Sprężyna	C = 4		C = 8
	$n_a = 2$		$n_a = 3,5$
	$\gamma = 10^\circ$	$\gamma = 20^\circ$	$\gamma = 20^\circ$
Rozstęp kąta reakcji poprzecznej [°]	2,89	2,26	0,39
			$\gamma = 10^\circ$
			1,34

Rozstęp między wartościami kąta reakcji poprzecznej pochodzącej od osiowego ściskania jest stosunkowo niewielki i mieści się w granicach przyjętych w punkcie 4.5.4., czyli +/-3°. Największą wartość równą 2,89° osiągnął dla sprężyny $C = 4$, $n_a = 2$, $\gamma = 10^\circ$, najmniejszą (0,39°) dla $C = 4$, $n_a = 3,5$, $\gamma = 20^\circ$. Zauważalny jest spadek rozstępu dla większej liczby zwojów aktywnych, większego kąta wzniosu i większego wskaźnika sprężyny.

Na rysunku 4.28 przedstawiono zmianę stosunku względnej reakcji poprzecznej odniesionej do jej wartości uzyskanej dla kąta $45^\circ \left(\frac{R_{rel}}{R_{rel45}} \right)_\rho$, czyli tej dla której wykonano wcześniejsze badania reakcji poprzecznej w dziedzinie kąta wyrównania (przejścia) φ_{wyr} . Wykres pokazuje, że wartość kąta przejścia ma znaczenie dla sprężyn o małej liczbie zwojów aktywnych, niezależnie od wskaźnika sprężyny. Zauważalny jest trend wzrostu reakcji poprzecznej wraz ze wzrostem φ_{wyr} . W przypadku sprężyny $C = 4$, $n_a = 2$, $\gamma = 20^\circ$ wzrost ten jest prawie 2,5-krotny dla $\varphi_{wyr} = 360^\circ$ względem $\varphi_{wyr} = 45^\circ$. Wynika to ze zmiany kąta wzniosu linii śrubowej sprężyny, od którego zależy ta reakcja. Przy zwiększeniu liczby zwojów aktywnych tylko o 1,5 zwoju (do $n_a = 3,5$), doszło do spadku wartości względnej reakcji R_{rel} o 78% przy kącie $\varphi_{wyr} = 360^\circ$, co świadczy o zmianie trendu ze wzrostowego na spadkowy. Ponadto zauważa się tendencję dążenia do wartości reakcji osiąganey już przy $\varphi_{wyr} = 180^\circ$, tzn. dalsze zwiększanie zakresu przejściowego nie ma już takiego znaczenia. Przy tym zestawie danych możliwe jest wyprowadzenie zależności z osobna dla każdego przebiegu z rysunku 4.28, bez możliwości zbudowania zależności uogólnionej. Możliwe jest wyprowadzenie zależności opisującej tę funkcję, ale będzie ona zależna od wskaźnika sprężyny (wzrost C powoduje spadek R_{rel}), kąta wzniosu linii śrubowej (możliwy niewielki wpływ) oraz liczby zwojów aktywnych. Tym samym cel badań został wykonany – istnieje możliwość opisanie tej zależności funkcją, a przedstawienie wstępnej propozycji wspomnianej zależności jest dodatkowym efektem niniejszych badań.



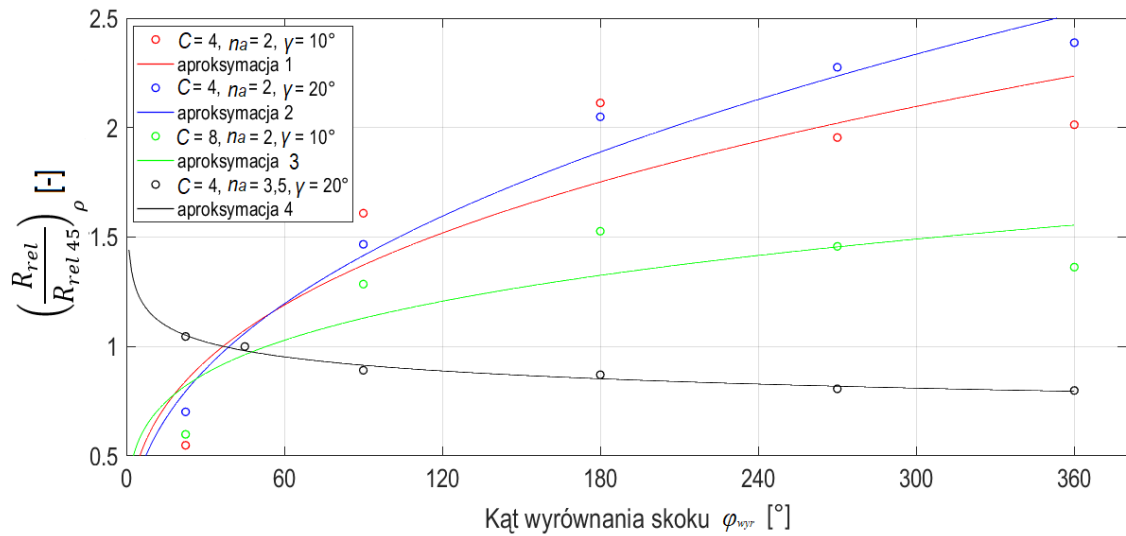
Rys. 4.28. Zależność współczynnika określającego stosunek względnej reakcji poprzecznej powstającej przy osiowym ściskaniu R_{rel} do wartości tej reakcji dla kąta 45° , dla którego była opracowana zależność (4.34) podana w funkcji kąta wyrównania skoku ϕ_{wypr} , opisującego długość zakresu przejściowego zwojów aktywnych

Wykorzystując narzędzie Matlab Curve Fitting Toolbox dokonano próby aproksymacji wartości współczynnika $\left(\frac{R_{rel}}{R_{rel\ 45^\circ\ \rho}}\right)$ funkcją postaci (4.36), uzyskując wartości współczynnika determinacji R^2 powyżej 0,95. Wartości poszczególnych czynników równania podano w tabeli 4.26, natomiast przebiegi funkcji zobrazowano na rysunku 4.29.

$$y_\rho = a_\rho \cdot x^{b_\rho} \quad (4.36)$$

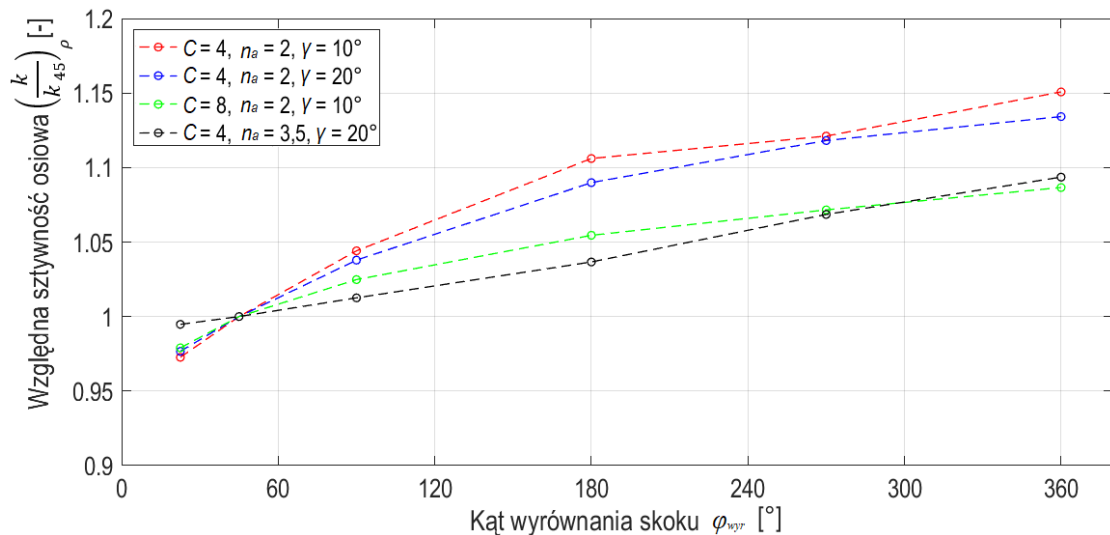
Tab. 4.26. Wartości parametrów równania (4.36) wraz ze współczynnikami determinacji R^2 dla 4 zestawów danych badania zależności między względną reakcją poprzeczną R_{rel} a wielkością zakresu przejściowego ϕ_{wypr}

Numer zestawu	1	2	3	4	Średnia bez zestawu 4
Sprężyna	$C = 4, n_a = 2, \gamma = 10^\circ$	$C = 4, n_a = 2, \gamma = 20^\circ$	$C = 8, n_a = 2, \gamma = 10^\circ$	$C = 4, n_a = 3,5, \gamma = 20^\circ$	
a_ρ	0,2811	0,2176	0,3999	1,44	0,2995
b_ρ	0,3523	0,4161	0,2307	-0,1009	0,3330
R^2	0,8342	0,9756	0,7495	0,9722	0,8531



Rys. 4.29. Dopasowanie funkcji z współczynnikami z tabeli 4.26 do danych z rysunku 4.28.

Sztywność osiowa również jest uzależniona od promienia przejścia między skokiem zwojów i skokiem zwojów aktywnych. Zwiększenie zakresu przejściowego skutkuje zwiększeniem sztywności, na skutek lokalnego obniżenia kąta wzniosu linii śrubowej sprężyny. Podobnie jak poprzednio wyznaczono współczynnik sztywności względnej w odniesieniu do wartości przypadającej dla $\phi_{wyr} = 45^\circ$, oznaczony jako $\left(\frac{k}{k_{45}}\right)_\rho$, którego przebieg zmiany zamieszczono na rysunku 4.30.



Rys. 4.30. Wartości współczynników $\left(\frac{k}{k_{45}}\right)_\rho$ wyrażone w funkcji kąta wyrównania skoku ϕ_{wyr}

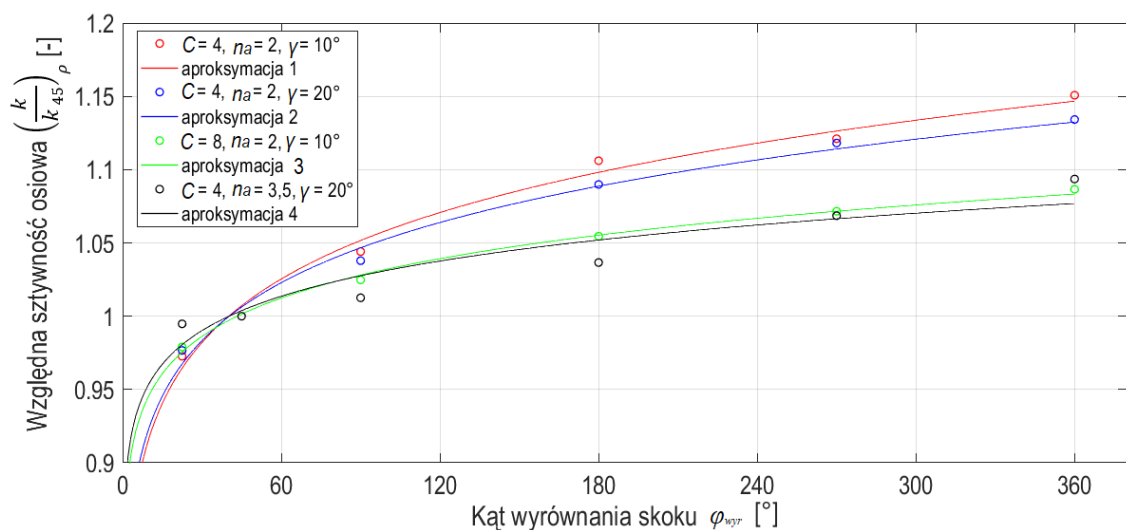
Zmiany względnej sztywności miały zbliżony przebieg. Największą dynamikę zmian odnotowano dla pierwszego zestawu, a najmniejszą (w przybliżeniu liniową) dla ostatniego. Stosunek $\left(\frac{k}{k_{45}}\right)_\rho$ osiągał wartość 1,15 dla kąta 360° w pierwszym zestawie.

Oznacza to wzrost sztywności osiowej o 1,15 razy, jeśli zostanie zastosowany jeden zwój wyrównujących skok na stronę zamiast 1/8.

Do aproksymacji danych zamieszczonych na rysunku 4.30 wykorzystano funkcję potęgową postaci (4.36). Wartości współczynników $\left(\frac{k}{k_{45}}\right)_\rho$ zamieszczone w tabeli 4.27, a ich zastosowanie na rysunku 4.31. W tym przypadku jest możliwe opracowanie jednej zależności opisującej wszystkie przebiegi przy pewnym przybliżeniu. Z wartości poszczególnych parametrów równania (4.36) obliczono średnią arytmetyczną i otrzymane parametry zostały przyjęte jako parametry zależności opisujące stosunek $\left(\frac{k}{k_{45}}\right)_\rho$.

Tab. 4.27. Wartości parametrów równania (4.36) wraz ze współczynnikami determinacji R^2 dla 4 zestawów danych badania zależności między sztywnością osiową a wielkością zakresu przejściowego φ_{wyr}

Numer zestawu	1	2	3	4	Średnia
Sprężyna	$C = 4, n_a = 2, \gamma = 10^\circ$	$C = 4, n_a = 2, \gamma = 20^\circ$	$C = 8, n_a = 2, \gamma = 10^\circ$	$C = 4, n_a = 3,5, \gamma = 20^\circ$	
a_ρ	0,7942	0,8106	0,8672	0,8826	0,8387
b_ρ	0,0624	0,0568	0,0378	0,0338	0,0477
R^2	0,9889	0,9893	0,9960	0,8785	0,9632



Rys. 4.31. Dopasowanie funkcji ze współczynnikami z tabeli 4.27 do danych z rysunku 4.30

Zgodnie z tabelą uzyskano wysoką dokładność dopasowania wzorów ze średnim R^2 równym 0,9632. Opracowana zależność (4.37) z parametrami będącymi wartością średnią wszystkich parametrów, pozwoliła osiągnąć błąd MAPE równy około 1,6%, co stanowi zadawalającą dokładność, którą dodatkowo potwierdza wysoki współczynnik determinacji R^2 równy 0,9638.

$$\left(\frac{k}{k_{45}}\right)_\rho = 0,8387 \cdot \varphi_{wyr}^{0,0477} \quad (4.37)$$

Reasumując, wielkość odcinka wyrównującego skok między zwojami biernymi a aktywnymi ma istotny wpływ na wartość reakcji poprzecznej pochodzącej od osiowego ściskania, bez większego wpływu na wartość jej kąta oraz przy istotnym wpływie na sztywność osiową. Możliwe jest też sporządzenie szczegółowych zależności opisujących te zmiany, ale przy odpowiednio dużej próbie badawczej, ponieważ przebieg ewentualnej funkcji byłby zależny od wartości parametrów takich jak wskaźnik sprężyny, kąt wzniosu linii śrubowej, czy liczba zwojów aktywnych. Dużo mniej uzależniona od tych parametrów jest sztywność osiowa, co pozwoliło wyprowadzić zależność o wysokiej dokładności. Czynniki progresywnego przejścia nie mogą być pomijane, szczególnie jeśli przyjmuje wartość większą niż 90°.

4.7. Wpływ głębokości zeszlifowania ostatniego zwoju na sztywność osiową i reakcję poprzeczną

W przeważającej liczbie przypadków spotykanych sprężyn naciskowych ostatni zwoj jest zeszlifowany na wartość 0,75 obwodu ostatniego zwoju, co powoduje powstanie charakterystycznej łukowej powierzchni oporowej, zapewniającej stabilne ustawienie sprężyny. Maksymalna długość powierzchni szlifowanej, mierzona po obwodzie sprężyny zależy m.in. od wskaźnika sprężyny oraz aktywnego kąta wzniosu linii śrubowej. Wykonanie sprężyny o możliwie najdłuższej powierzchni szlifowanej może być ekonomicznie nieuzasadnione, ze względu na dużą długość drutu użytą do wykonania takiej sprężyny. Uzasadnione zatem jest zbadanie wpływu długości powierzchni szlifowanej na właściwości eksploatacyjne sprężyn naciskowych. W niniejszym podrozdziale przeprowadzono analizę wpływu tego parametru na sztywność oraz reakcję poprzeczną.

Badania wykonano dla sprężyn o wskaźniku $C = 8$ i kącie wzniosu 10° , liczbie zwojów aktywnych 1; 1,25; 1,75 i 2,5. Wszystkie wymienione próbki miały punktową długość styku ($s = 0$) oraz długość odcinka wyrównującego równą $50^\circ \pm 1^\circ$. Zadano następujące wartości zeszlifowania obwodu ostatniego zwoju n_{szlif} : 0,5; 0,75 i 0,875. Ugięcie osiowe miało wartość taką samą jak w badaniach sztywności osiowej, zachowując również wszystkie pozostałe warunki brzegowe.

W wyniku przeprowadzonych badań uzyskano następujące wartości kąta reakcji poprzecznej pochodzącej od osiowego ściskania ψ , wartości tejże reakcji R_q , również w przeliczeniu do wartości względnej R_{rel} oraz sztywności osiowej k , które zamieszczono w tabeli 4.28. Podano również ilorazy wartości reakcji względnej i sztywności osiowej względem tych wartości odpowiednich dla zeszlifowania równego 0,75 obwodu sprężyny odpowiednio $R_{rel0,75}$ i $k_{0,75}$. Obliczono też stosunki tych wartości do wyznaczonych według zależności opracowanych w niniejszej pracy, czyli (4.29) i (4.34), oznaczone w tabeli 4.28 odpowiednio $\frac{k}{k_x}$ i $\frac{R_{rel}}{R_{relA}}$. Zestawienie tabelaryczne ma odpowiedzieć na pytanie, czy wartość powyższych wielkości można prognozować za pomocą znanych lub opracowanych zależności, przy zachowaniu wystarczającej dokładności.

Tab. 4.28. Wyniki badań numerycznych wpływu wielkości zeszlifowania ostatniego zwoju n_{szlif} na kąt reakcji poprzecznej, jej wartość oraz sztywność osiową sprężyny wraz z porównaniem z wartościami przypadającymi dla zeszlifowania $\frac{3}{4}$ zwoju i obliczonymi z zależności (4.29) i (4.34) dla sprężyny $C = 8$, $\gamma = 10^\circ$, $s = 0$.

n_a [-]	n_{szlif} [-]	ψ [°]	ψ_A [°]	R_q [N]	R_{rel} [-]	$\frac{R_{rel}}{R_{rel0,75}}$ [-]	$\frac{R_{rel}}{R_{relA}}$ [-]	k [N/mm]	$\frac{k}{k_{0,75}}$ [-]	$\frac{k}{k_x}$ [-]
$C = 8 \quad \gamma = 10^\circ \quad s = 0$										
1	0,5	91,08	90	3,65	0,1466	0,88	0,95	14,52	0,98	0,99
	0,75	92,27		4,21	0,1657	1,00	1,07	14,87	1,00	1,01
	0,875	91,51		4,05	0,1600	0,97	1,03	14,82	1,00	1,01
1,25	0,5	312,66	-45	2,81	0,1062	0,89	0,74	12,39	1,00	1,05
	0,75	314,91		3,17	0,1199	1,00	0,83	12,41	1,00	1,06
	0,875	315,26		3,79	0,1452	1,21	1,01	12,28	0,99	1,04
1,75	0,5	45,16	45	8,28	0,3080	1,10	1,03	8,94	0,99	1,06
	0,75	44,89		7,59	0,2804	1,00	0,94	9,02	1,00	1,07
	0,875	45,36		7,42	0,2763	0,99	0,93	8,95	0,99	1,07
2,5	0,5	0,29	0	6,22	0,2206	1,02	0,96	6,55	0,99	1,11
	0,75	0,25		6,13	0,2156	1,00	0,93	6,63	1,00	1,13
	0,875	0,19		6,36	0,2248	1,04	0,97	8,25	1,24	1,40

Zgodnie z danymi z tabeli 4.28 stwierdzono, że wielkość zeszlifowania ostatniego zwoju ma nieznaczny wpływ na wartość reakcji poprzecznej, pochodzącej od osiowego ściskania, ale trudny do jednolitego opisanie. Praktycznie nie istnieje wpływ wielkości zeszlifowania ostatniego zwoju na sztywność osiową, ponieważ stosunek $\frac{k}{k_{0,75}}$ osiągnął wartość między 0,98 a 1, oprócz odstającego wyniku dla $n_a = 2,5$ i szlifowania równego 0,875. Różnice między maksymalną i minimalną wartością kąta reakcji poprzecznej nie przekroczyły 2° , co oznacza zupełny brak wpływu szlifowania na kąt reakcji poprzecznej w warunkach rzeczywistych.

5. Sztywność poprzeczna

Określenie sztywności poprzecznej wymaga wykonania badań eksperymentalnych lub numerycznych obciążenia poprzecznego sprężyny napiętej wstępnie osiowo. Istnieją w literaturze metody analityczne, który były lub są nadal stosowane, lecz określają one wartość sztywności poprzecznej jako stałą na obwodzie. Celem niniejszego rozdziału jest próba wyznaczenia zależności analitycznej opisującej w sposób uproszczony rozkład sztywności poprzecznej na obwodzie sprężyny, który mógłby być przydatny w praktyce inżynierskiej. Przewidując konieczność dość licznych, kosztownych i czasochłonnych badań, zdecydowano się tylko na wskazanie zależności i relacji uproszczonych. Wynika to z ograniczonych zasobów finansowych w realizacji badań stanowiskowych oraz czasochłonności obliczeń numerycznych.

5.1. Metody analityczne obliczania sztywności poprzecznej

W literaturze wyróżnia się kilka metod obliczania sztywności poprzecznej k_Q sprężyn śrubowych naciskowych, ale nie zawsze dające dobre wyniki. Podstawowa metoda jest opisana w normie EN 13906-1:2013(E), która jest wyrażona wzorem (5.1).

$$\begin{aligned} k_Q &= \\ &= k\xi \left[\xi - 1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{2} + \frac{G}{E}} \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{G}{E}\right) \left(\frac{G}{E} + \frac{1-\xi}{\xi}\right)} \operatorname{tg} \left\{ \lambda \xi \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{G}{E}\right) \left(\frac{G}{E} + \frac{1-\xi}{\xi}\right)} \right\} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (5.1)$$

gdzie:

k – sztywność osiowa, N/mm,

$\xi = \frac{s}{h_0}$ – względne ugięcie sprężyny,

$\lambda = \frac{h_0}{D}$ – współczynnik smukłości,

G – Moduł sprężystości poprzecznej Kirchoffa, MPa,

E – Moduł sprężystości podłużnej Younga, MPa.

Bardzo zbliżone wyniki do powyższej zależności daje wzór Haringxa (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023), który opisują zależności (5.2 – 5.4) (Haringx, 1949; Wahl, 1944).

$$k_Q = \frac{F_0}{h \left(\left(1 + \frac{F_0}{\beta}\right) \frac{\tan\left(\frac{1}{2} h \sqrt{\frac{F_0}{\alpha} \cdot \left(1 + \frac{F_0}{\beta}\right)}\right)}{\frac{1}{2} h \sqrt{\frac{F_0}{\alpha} \cdot \left(1 + \frac{F_0}{\beta}\right)}} - 1 \right)} \quad (5.2)$$

$$\alpha = \frac{2 \cdot h \cdot I \cdot E \cdot G}{\pi \cdot n_a \cdot \frac{D}{2} \cdot (2G + E)} \quad (5.3)$$

$$\beta = \frac{E \cdot h \cdot I}{\pi \cdot n_a \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^3} \quad (5.4)$$

gdzie:

F_0 – obciążenie osiowe, N,

h – wysokość sprężyny obciążonej, mm,

α – sztywność zginania,

β – sztywność ścinania,

I – osiowy moment bezwładności przekroju drutu, mm⁴,

n_a – liczba zwojów aktywnych,

D – średnica podziałowa sprężyny, mm.

Z takich samych zależności na sztywność zginania oraz ścinania korzysta metoda Wahla (Wahl, 1944), opisana wzorem (5.5) oraz metoda Grossa (Gross, 1951) (5.6).

$$k_Q = \left(1 - \frac{2 \cdot F_0}{\beta \left(\sqrt{1 + \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \alpha}{h^2 \cdot \beta}} - 1 \right)} \right) \cdot \left(\frac{h^3}{12 \cdot \alpha} + \frac{h}{\beta} \right)^{-1} \quad (5.5)$$

$$k_Q = \frac{1}{\frac{1}{F_0} \cdot \left[\frac{2}{\sqrt{\frac{F_0}{\alpha} \left(1 - \frac{F_0}{\beta}\right)}} \cdot \tan\left(\frac{h}{2} \cdot \sqrt{\frac{F_0}{\alpha \left(1 - \frac{F_0}{\beta}\right)}}\right) - h \right] + \frac{h}{\beta}} \quad (5.6)$$

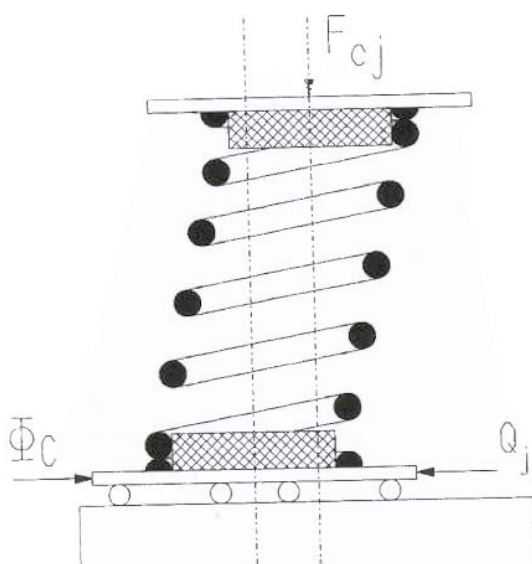
W literaturze można znaleźć jeszcze mniej popularne wzory jak Robertsa (Żukowski, 1954), Budricka (Ofierzyński, Sobczak, 1975), Timoszenki i Ponomariewa (Ofierzyński, Sobczak, 1975) oraz współczynnik Wilsona między sztywnością poprzeczną i osiową (Ofierzyński, Sobczak, 1975), których nie cytowano z uwagi na uzyskiwane duże rozbieżności z wzorem podanym w normie EN 130906-1:2013(E).

5.2. Badania stanowiskowe sztywności poprzecznej

Wyniki badań stanowiskowych sztywności poprzecznej zostały zaprezentowane w publikacji *Experimental analysis of transverse stiffness distribution of helical compression springs* (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023). Wykazały one duże rozbieżności w wartości sztywności poprzecznej na obwodzie w stosunku do metod analitycznych zakładających jej stałą wartość, niezależnie od kierunku obciążenia. Na zagadnienie nierównomiernego rozkładu sztywności poprzecznych zwrócono również uwagę w pracy (Grajnert, 1995).

5.2.1. Stanowisko i metody badawcze

Opisana w normie EN 13298:2003(E) metoda pomiaru sztywności poprzecznej zakłada stosowanie stanowiska umożliwiającego wychylenie sprężyny w dowolnym kierunku poprzecznym w wyniku ściskania osiowego i następnie obciążanie poprzeczne tej sprężyny w kierunku jej swobodnego wychylenia oraz w przeciwnym. Następnie w sposób różnicowy z dwóch punktów na każdej stronie wychylenia oblicza się średnią sztywność poprzeczną. Model ten przedstawia rysunek 5.1, zaczerpnięty z niniejszej normy.



Rys. 5.1. Model eksperymentalnego pomiaru sztywności poprzecznej sprężyny naciskowej zaprezentowany w normie EN 13298:2003(E) (Polski Komitet Normalizacyjny, 2003)

W eksperymencie zastosowano zmodyfikowany model, który umożliwił swobodne wychylenie się sprężyny tylko w jednym kierunku, w którym będzie prowadzone ściskanie poprzeczne. W przypadkach, gdy kąt poprzecznego ugięcia

wstępnego nie jest zgodny z kierunkiem obciążania, sprężyna oddziałuje na uchwyt reakcją poprzeczną. Tym samym swobodny ruch poprzeczny sprężyny pochodzący od ugięcia osiowego rozkładał się na ugięcie, możliwe do zmierzenia przy wykorzystaniu maszyny wytrzymałościowej oraz na nie mierzoną reakcję poprzeczną. Dlatego na potrzeby budowy modelu numerycznego wybrano tylko te przypadki obciążenia na stanowisku badawczym, które odpowiadały warunkom badania zgodnym ze wspomnianą normą.

Modyfikacja metody z normy EN 13298:2003 polegała też na zastosowaniu aż 12 pomiarów, co 30° każdy. Dodatkowo każdy pomiar sztywności poprzecznej był wykonywany trzykrotnie dla danego kąta, a ostateczna wartość sztywności była wartością średnią z tych 3 pomiarów. Jeśli pojawiały się wadliwe pomiary, wykonywano dodatkowy odczyt. Pozwoliło to zmniejszyć błąd zastosowanej metody badawczej i wyznaczać wartości sztywności poprzecznej zbliżone do wyznaczanej analitycznie, przy wykorzystaniu uznawanych metod obliczeniowych, co zostanie udowodnione w tym rozdziale.

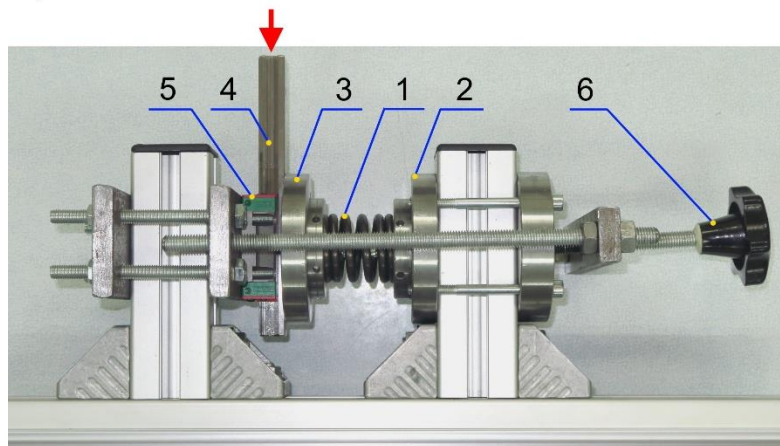
Zastosowany przyrząd do pomiaru sztywności poprzecznej został przedstawiony na rysunku 5.2. W przyrządzie umieszcza się sprężynę 1 między obrotowymi uchwytami 2 i 3. Uchwyty są łożyskowane ślizgowo w panwiach zamocowanych na podporach przykręcanych śrubami. Podpora uchwyty 3 jest stała, natomiast 2 – ruchoma, przesuwana pokrętłem 6 o wartość zmierzoną suwmiarką. Po zadaniu obciążenia osiowego w formie przemieszczenia, zakręcane są śruby podstawy uchwyty 2. Następnie przyrząd jest umieszczany w polu roboczym maszyny wytrzymałościowej. Podczas testu uchwyt trawersy maszyny naciska na prowadnicę 4 łożyskowaną w łożysku liniowym 5, powodując jej przesuw, który jest przemieszczeniem poprzecznym sprężyny. Po odciążeniu prowadnicy podpory 2 i 3 są obracane o zadany kąt – w tym przypadku

o 30°, bez zdejmowania obciążenia osiowego. Następnie wykonywany jest kolejny pomiar dla danej pozycji.

a)



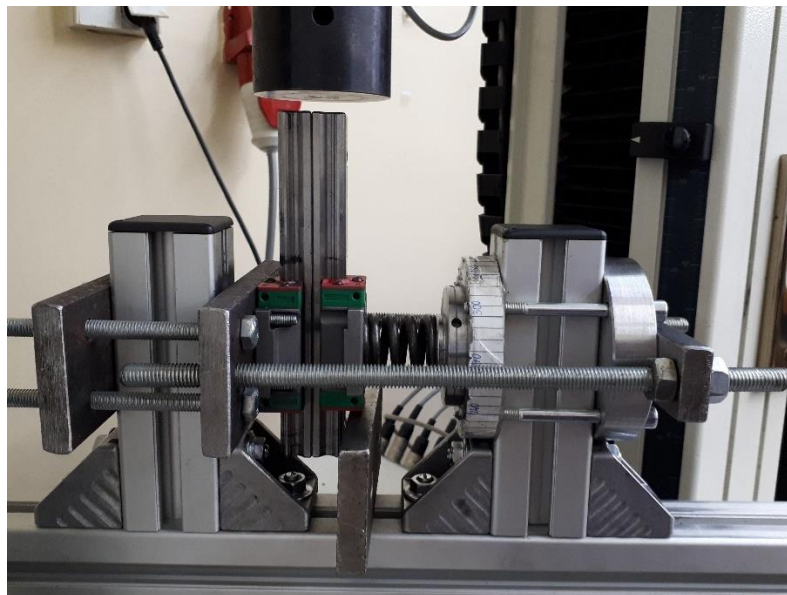
b)



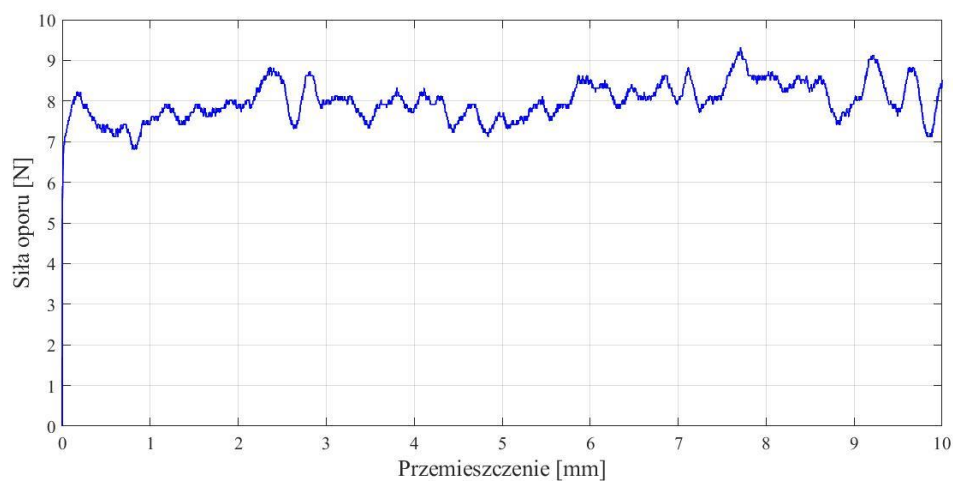
Rys. 5.2. a) Stanowisko do badania sztywności poprzecznej zbudowane z maszyny wytrzymałościowej HT2402 Hung Ta, komputera i przyrządu, b) przyrząd do poprzecznego ściskania sprężyn: 1 – sprężyna, 2, 3 – uchwyty, 4 – prowadnicą liniową, 5 – łożysko prowadnicy, 6 – pokrętko obciążające (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023)

Zaprojektowane stanowisko zostało wykonane w warunkach warsztatowych, więc wymagane było określenie jego dokładności. Dokładność utrzymywania obciążenia osiowego mierzono suwmiarką i spadek obciążenia nie był większy niż 0,05 mm. Konieczne było wyznaczenie oporów prowadnicy liniowej, ponieważ mogą one wpływać na rejestrowaną wartość reakcji na kierunku poprzecznym sprężyny. W tym celu przeprowadzono test prowadnicy, modyfikując posiadany przyrząd, poprzez dołożenie drugiej takiej samej prowadnicy w sposób pokazany na rysunku 5.3. Dodana sprężyna miała za zadanie utrzymać obciążenie prowadnicy na wartości dokładnej siły osiowej, którą zadawano poprzez obrócenie przyrządu do ustawienia pionowego i ściśnięcie podpór przy użyciu maszyny wytrzymałościowej do wartości oczekiwanej siły.

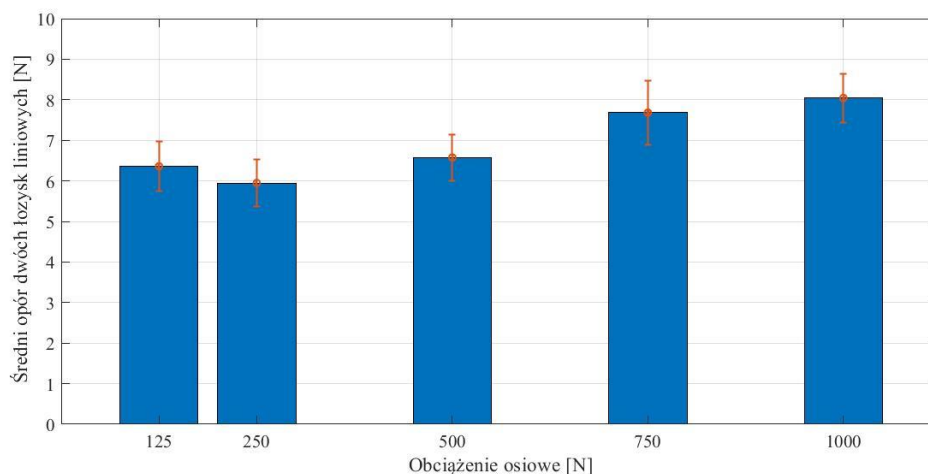
Zmierzono opory dla 125 N, 250 N, 500 N, 750 N i 1000 N. Przykładowy przebieg charakterystyki oporów przedstawiono na rysunku 5.4, a zbiorcze wyniki oporów na rysunku 5.5.



Rys. 5.3. Zmodyfikowany przyrząd przeznaczony do zbadania oporu dwóch połączonych ze sobą przewodnic liniowych



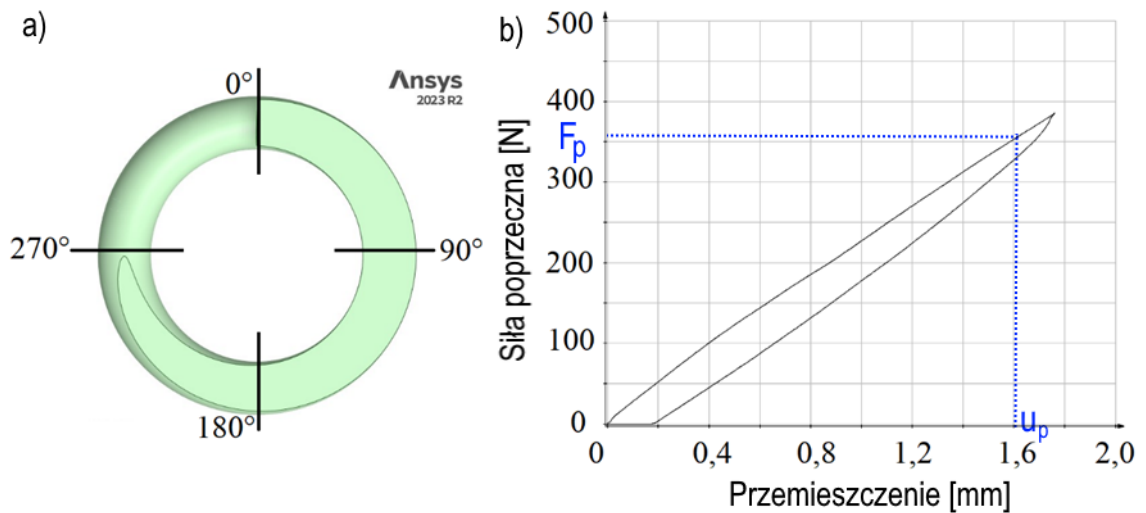
Rys. 5.4. Przykładowy przebieg oporów dwóch przewodnic w funkcji przemieszczenia (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023)



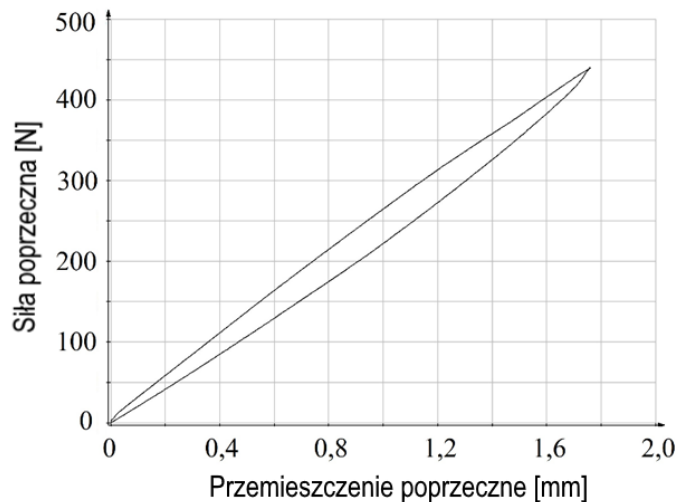
Rys. 5.5. Opory ruchu dwóch prowadnic w zależności od wielkości obciążenia osiowego wraz z zaznaczonymi słupkami błędów (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023)

W wyniku przeprowadzonych analiz stwierdzono, że opory ruchu jednej prowadnicy nie przekroczą 5 N oraz są jednolite, co pokazuje rysunek 5.4. Stwierdzono, że powstające zaburzenia nie powinny wpływać na przebieg charakterystyki obciążania. Może powstać większa histereza powrotu prowadnicy, co nie wpływa na wynik sztywności, gdyż krzywa powrotu nie była mierzona.

Pomiary sztywności poprzecznej wykonywano co 30° , mierząc kąt jak pokazano na rysunku 5.6a. Na rysunku 5.6b przedstawiono przebieg charakterystyki siły od przemieszczenia dla sprężyny poprzecznie zginanej, obciążonej ugięciem osiowym równym 50% prześwitu. Zauważalna jest dość duża histereza spowodowana oporami prowadnicy oraz prawdopodobnie nierównomiernością przesuwania się zwojów końcowych. Zawsze podczas badań zauważano, że drugi przebieg na tym samym kącie ma mniejszą histerezę schodzącą do 0, co pokazuje rysunek 5.7. Po ręcznym kilkukrotnym obciążeniu prowadnicy ponownie uzyskuje się histerezę nie kończącą się w początku układu współrzędnych.

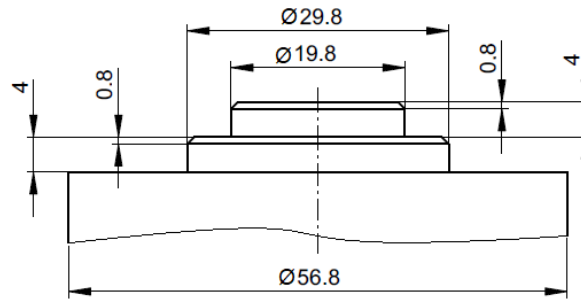


Rys. 5.6. a) Widok z góry na model sprężyny wykonanej programie SpaceClaim wraz z naniesionym układem współrzędnych, b) charakterystyka siła poprzeczna – przemieszczenie poprzeczne sprężyny o wskaźniku $C = 5$, 2,5 zwojach aktywnych i styku 0,25 obciążonej osiowo do 50% prześwitu oraz poprzecznie do 1,75 mm (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023)



Rys. 5.7. Charakterystyka sztywności poprzecznej sprężyny ponownie obciążonej bez luzowania prowadnicy; widoczny powrót histerezy do punktu 0

Innym szczególnym zjawiskiem występującym w obciążaniu sprężyn jest utrata kontaktu między szlifowaną powierzchnią sprężyny a podporą. Podpory zostały wykonane tak, że tworzą je dwa trzpienie dostosowane do średnicy wewnętrznej sprężyny o wskaźniku $C = 5$ i $C = 7$. Każdy stopień miał 4 mm wysokości i był sfazowany na wysokości 0,8 mm i kącie 45° , jak pokazano na rysunku 5.8. Sprężyny były osadzone z luzem.



Rys. 5.8. Rysunek uchwytu przyrządu

Przeprowadzono badania tych samych próbek sprężyn, które zostały użyte do stanowiskowych testów sztywności osiowej, czyli sprężyn o wskaźniku $C = 5$ i 7 , liczbie zwojów aktywnych $n_a = 2,5$, $2,75$ i 3 oraz długości styku zwojów biernych $s = 0$, $0,25$ i $0,5$. Obciążenie sprężyn było dobierane z warunku na naprężenia dopuszczalne (5.7) i z warunku na przyleganie podpór (5.10) podanych w normie EN 13906-1:2013(E). Dobrane obciążenia zamieszczono w tabeli 5.1. Sprężyny uginano osiowo na 25% i 50% teoretycznego prześwitu, a dla wybranych sztuk wykonano ugięcie 37,5% prześwitu. Oznaczono je odpowiednio c25, c50 i c375. Założono, że ugięcie poprzeczne jest proporcjonalne do aktualnej aktywnej długości sprężyny, dzięki czemu zachowany jest w przybliżeniu taki sam kąt wychylenia dla wszystkich sprężyn. Przyjęto, że iloraz ugięcia poprzecznego do aktualnej aktywnej wysokości sprężyny wynosi 0,0933 – co zapewnia, że maksymalne naprężenia nie przekraczają $0,5R_m$, tj. 900 MPa (+/-2%).

$$\tau_{kmax} = w_i \cdot \frac{8}{\pi \cdot d^3} \cdot [F_0(D + u_p) + F_p(h - d)] \quad (5.7)$$

gdzie:

F_0 – obciążenie osiowe, N,

D – średnica podziałowa, mm,

u_p – ugięcie poprzeczne, mm,

F_p – siła poprzeczna, N,

h – wysokość sprężyny obciążonej, mm,

d – średnica drutu, mm,

w_i – współczynnik Wahla (5.8) lub Bergsträssera (5.9).

$$w_W = \frac{4C - 1}{4C - 4} + \frac{0,615}{C} \quad (5.8)$$

$$w_B = \frac{C + 0,5}{C - 0,75} \quad (5.9)$$

$$F_p \cdot \frac{h}{2} \leq F_0 \cdot \frac{D - u_p}{2} \quad (5.10)$$

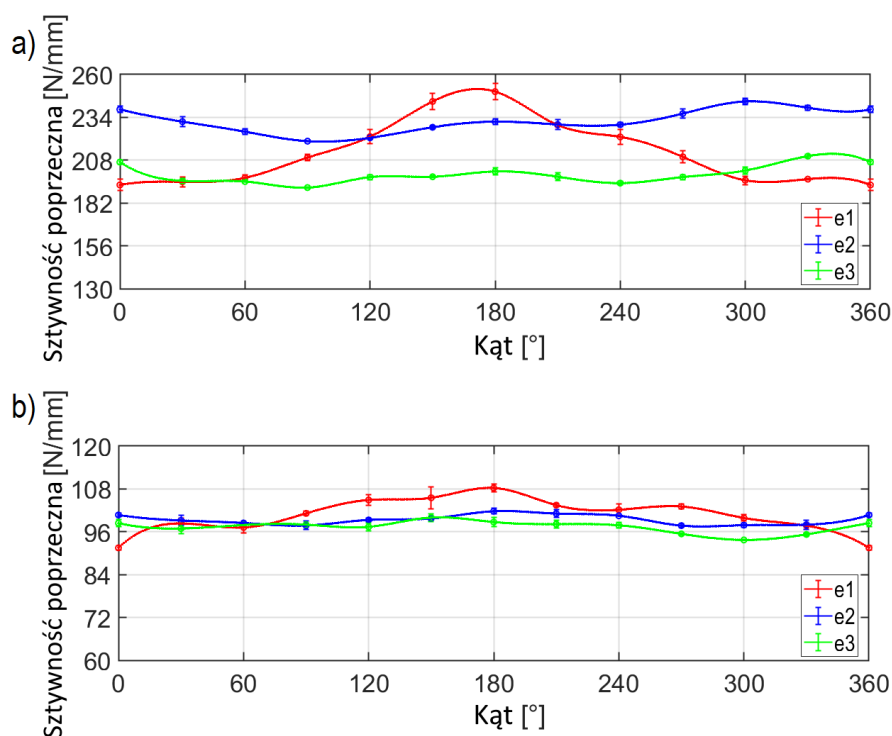
Tab. 5.1. Ugięcia osiowe i poprzeczne przyjęte do badań stanowiskowych (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023)

Zwoje aktywne	$n_a = 2,5$	$n_a = 2,75$	$n_a = 3$
Ugięcie osiowe [mm] (c25)	3,13	3,44	3,75
Ugięcie poprzeczne [mm] (c25)	2,04	2,25	2,45
Ugięcie osiowe [mm] (c375)	4,69	5,16	5,63
Ugięcie poprzeczne [mm] (c375)	1,92	2,12	2,31
Ugięcie osiowe [mm] [mm] (c50)	6,25	6,88	7,50
Ugięcie poprzeczne [mm] (c50)	1,75	1,92	2,10

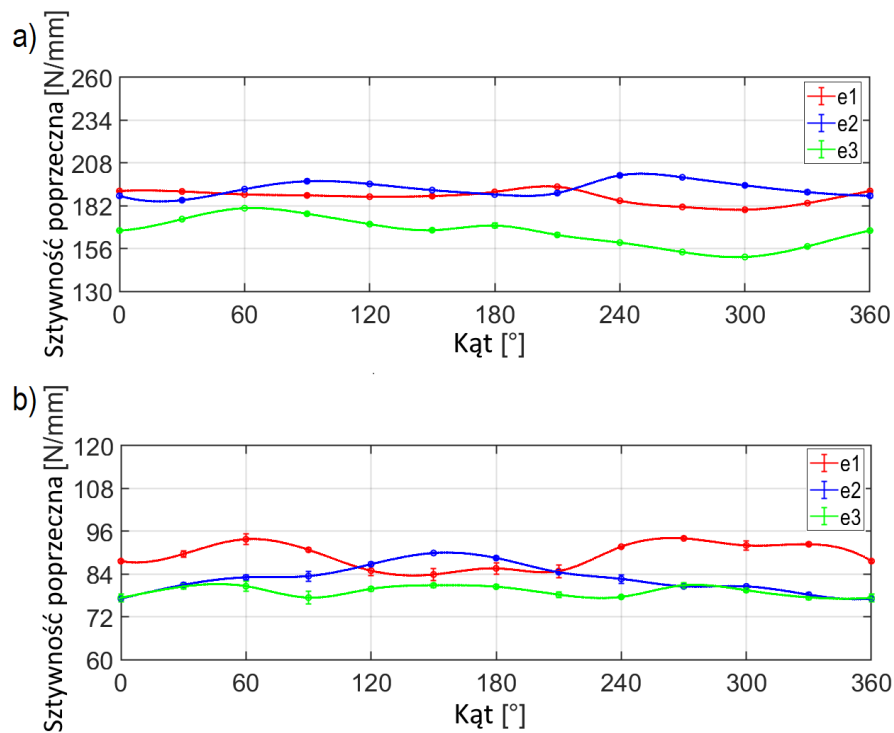
Każda sprężyna była wykonana w trzech próbkach, pomiar dla każdego kąta był wykonany trzykrotnie, a uzyskiwaną wartością sztywności poprzecznej dla danego kąta zawsze była wartość średnia z 3 wyników. Wobec tego średnia sztywność była obliczona ze 108 wyników. Odczytywano wartość siły dla w przybliżeniu tego samego ugięcia poprzecznego. Jeśli odczyt wykonano na krótszym ugięciu z powodu zagięcia charakterystyki, do arkusza kalkulacyjnego wpisywano tę wartość. Wszystkie pomiary dotyczyły pierwszego zakresu liniowego sprężyny, więc przyjęto uproszczenie polegające na założeniu idealnej liniowości charakterystyki i obliczaniu sztywności poprzecznej względem punktu 0, jak pokazano na rysunku 5.6b. Wspomniane zakrzywienie charakterystyki pojawiało się na skutek odrywania się sprężyny od uchwyty, zmieniając warunek podparcia. Działo się to, mimo spełnienia warunku (5.10), który pochodzi z normy EN 13906-1:2013(E). Zobowiązywało to do powtórki pomiaru lub do odczytu wartości z początkowego odcinka liniowego. Zjawisko to zdecydowano się szczegółowo opisać w rozdziale 6 niniejszej dysertacji.

5.2.2. Wyniki badań

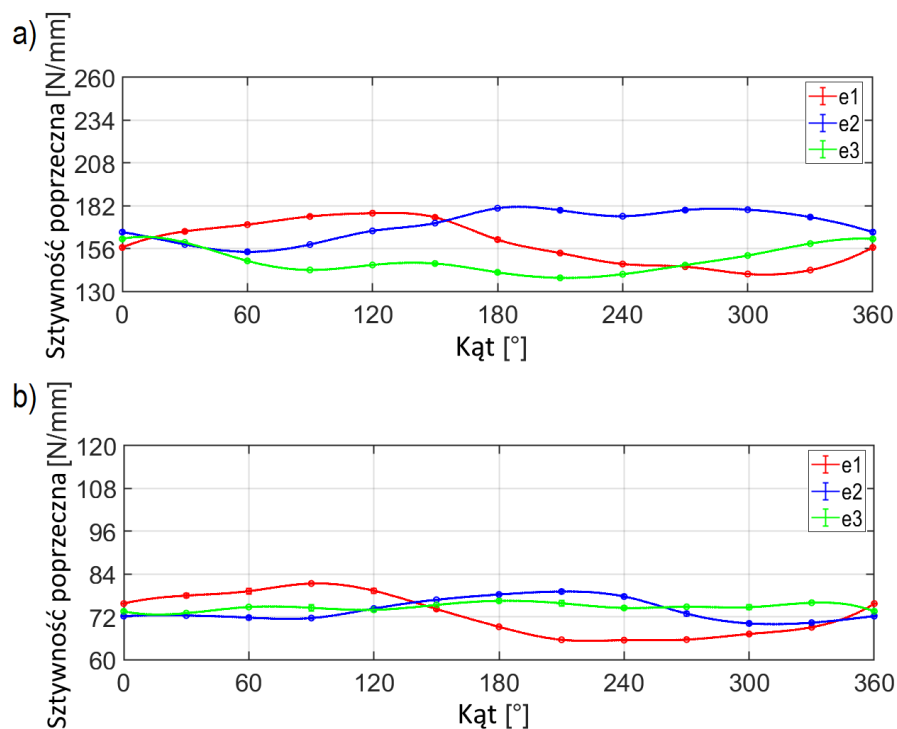
Wyniki badań przedstawiono w formie wykresów liniowych (rys. 5.9-5.11) dla ugięcia osiowego wynoszącego 50% prześwitu i poprzecznego zgodnie z tabelą 5.1. Na wykresach długości styku $s = 0; 0,25; 0,5$ oznaczono symbolami odpowiednio e1, e2, e3. Zaznaczono też zakresy zmienności wartości 3 próbek sprężyn, które nie są widoczne z racji wysokiej powtarzalności wyników.



Rys. 5.9. Zależność sztywności poprzecznej od kąta obrotu sprężyny dla sprężyn o $n_a = 2,5$ obciążonych ugięciem osiowym o wartości 50% prześwitu dla zakończeń o styku punktowym (e1), ćwiartkowym (e2) i połówkowym (e3): a) $C = 5$, b) $C = 7$ (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023)



Rys. 5.10. Zależność sztywności poprzecznej od kąta obrotu sprężyny dla sprężyn o $n_a = 2,75$ obciążonych ugięciem osiowym o wartości 50% prześwitu dla zakończeń o styku punktowym (e1), ćwiartkowym (e2) i półówkowym (e3): a) $C = 5$, b) $C = 7$ (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023)



Rys. 5.11. Zależność sztywności poprzecznej od kąta obrotu sprężyny dla sprężyn o $n_a = 3$ obciążonych ugięciem osiowym o wartości 50% prześwitu dla zakończeń o styku punktowym (e1), ćwiartkowym (e2) i półówkowym (e3): a) $C = 5$, b) $C = 7$ (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023)

Zgodnie z wykresami sztywność poprzeczna była istotnie zależna od kierunku przyłożonej siły, co potwierdzają też dane literaturowe (Grajnert, 1995). Zależność ta szczególnie była widoczna dla sprężyny o wskaźniku $C = 5$. Dla większego wskaźnika i większej liczby zwojów aktywnych wartości sztywności poprzecznej były mniejsze, przy równoczesnym wygładzaniu przebiegu wykresu (Baran, Michalczyk, Warzecha 2023).

W tabelach 5.2 i 5.3 przedstawiono dokładne dane dla ugięcia 50% (c50) i 25% (c25) wraz z obliczoną wartością średnią sztywności poprzecznej, współczynnika zmienności rozkładu, wskazaniem kątów gdzie sztywność osiągała ekstremum minimalne i maksymalne oraz względny rozstęp.

Tab. 5.2. Wyniki badań sztywności poprzecznej dla ugięcia osiowego równego 25% prześwitu (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023)

Wskaźnik sprężyny C [-]	Liczba zwojów aktywnych n_a [-]	Długość styku zwojów biernych s [-]	Średnia sztywność poprzeczna k_p [N/mm]	Współczynnik zmienności [%]	Wartość maksymalna [N/mm] / (Kąt występowania [°])	Wartość minimalna [N/mm] / (Kąt występowania [°])	Względny rozstęp [%]
5	2,5	0	164	3,8	175/0°	153/300°	13,7
		0,25	186	5,0	209/0°	170/270°	21,5
		0,5	163	4,1	176/210°	153/120°	14,4
5	2,75	0	154	7,4	171/60°	136/150°	22,7
		0,25	160	3,5	170/150°	151/240°	11,9
		0,5	137	3,5	148/150°	132/270°	11,7
5	3	0	127	4,6	138/120°	118/30°	16,3
		0,25	142	5,6	154/180°	130/60°	17,2
		0,5	125	1,5	128/330°	121/300°	5,4
7	2,5	0	84	3,2	87/90°	78/270°	11,3
		0,25	85	4,9	91/60°	78/300°	14,8
		0,5	80	6,6	92/210°	70/300°	26,7
7	2,75	0	78	7,7	88/60°	71/150°	21,5
		0,25	75	4,5	83/150°	72/30°	14,6
		0,5	69	4,5	74/60°	64/180°	13,3
7	3	0	71	2,1	73/30°	68/300°	6,8
		0,25	66	3,2	68/300°	61/0°	12,0
		0,5	67	2,4	69/180°	64/240°	7,6

Tab. 5.3. Wyniki badań sztywności poprzecznej dla ugięcia osiowego równego 50% prześwitu (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023)

Wskaźnik sprężyny C [-]	Liczba zwojów aktywnych n_a [-]	Długość styku zwojów biernych s [-]	Średnia sztywność poprzeczna k_p [N/mm]	Współczynnik zmienności [%]	Wartość maksymalna [N/mm] / (Kąt występowania [°])	Wartość minimalna [N/mm] / (Kąt występowania [°])	Względny rozstęp [%]
5	2,5	0	214	9,2	250/180°	193/0°	26,5
		0,25	231	3,2	244/300°	220/90°	10,4
		0,5	199	2,7	210/330°	191/90°	9,6
5	2,75	0	187	2,2	194/210°	180/300°	7,4
		0,25	193	2,4	200/240°	185/30°	7,8
		0,5	166	5,5	181/60°	151/300°	17,8
5	3	0	159	8,6	177/120°	141/300°	23,2
		0,25	170	5,5	180/180°	154/60°	15,5
		0,5	149	5,3	162/0°	138/210°	15,9
7	2,5	0	101	4,5	108/180°	91/0°	16,6
		0,25	99	1,4	102/180°	98/270°	4,0
		0,5	97	1,8	100/150°	94/300°	6,4
7	2,75	0	89	4,2	94/270°	84/150°	11,3
		0,25	83	4,7	90/150°	77/0°	15,4
		0,5	79	1,9	81/270°	77/0°	4,4
7	3	0	72	8,4	81/90°	65/240°	21,9
		0,25	74	4,3	79/210°	70/300°	12,1
		0,5	75	1,3	76/180°	73/30°	4,6

Analizując wyniki zawarte w tabelach 3 i 4, można zauważyć, że zarówno przy ugięciu osiowym równym 25% prześwitu, jak i 50%, różnice między maksymalną a minimalną wartością sztywności poprzecznej pojedynczej sprężyny mogą przekraczać 25% jej średniej sztywności. Obliczenia współczynnika zmienności wykazały, że zmienność rozkładu sztywności poprzecznej na obwodzie sprężyny nie przekracza 10% dla przyjętych parametrów geometrycznych i pomiarowych, co jest wartością nie wskazującą na duże asymetrie rozkładu sztywności. Ugięcie osiowe znacząco wpływa na rozkład sztywności, ponieważ zmienia cząstkową liczbę zwojów czynnych. Widać to na przykładzie sprężyny o wskaźniku $C = 7$, $n_a = 2,5$ i kształcie zwoju końcowego e_3 ($s = 0,5$), dla której względny rozstęp wyniósł 26,7% przy ugięciu osiowym c25, a przy ugięciu osiowym c50 rozstęp względny wyniósł 6,4% (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023). Oznacza to, że przy większym ugięciu wartości sztywności poprzecznej są bardziej skupione. Wartości kątów występowania ekstremum minimalnego

i maksymalnego sztywności poprzecznej nie zawsze się pokrywały. Podobnie całe rozkłady sztywności nie były jednakowe, co utrudniało zaproponowanie jakiegokolwiek jego opisu, celem budowy nowej zależności. Wynika to z faktu, że każde ugięcie zamyka inną liczbę czynnych zwojów, co przekłada się na różną sztywność dla poszczególnych kierunków obciążenia poprzecznego (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023).

W przypadku sprężyn o wskaźniku $C = 7$ nie zaobserwowano istotnego wpływu konstrukcji zwoju końcowego na sztywność, natomiast w przypadku sprężyn o $C = 5$ wpływ ten jest wyraźny (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023). Wynika to z bardziej zwartej konstrukcji sprężyn o małym wskaźniku, co sprawia, że trudniej je wykonać, przez co wszelkie niedokładności geometrii są uwypuklane z racji generowania większych nacisków w zwojach końcowych, które utrudniają ich przemieszczanie się, a tym samym zwiększają sztywność poprzeczną sprężyny. Wówczas każda niedokładność może być przyczyną blokowania się zwojów na konkretnym kierunku. Zauważono, też że większa długość styku zwojów biernych zmniejszała sztywność poprzeczną.

5.2.3. Porównanie wyników badań z metodami analitycznymi

Uzyskane eksperymentalne wyniki badań sztywności poprzecznej zestawiono z metodami analitycznymi wymienionymi w podrozdziale 5.1. Miało to na celu porównanie metod względem uzyskanych wyników, a jednocześnie potwierdzić dokładność przyjętej metody badawczej. W tabelach 5.4 i 5.5 przedstawiono porównanie wyznaczonej wartości średniej sztywności poprzecznej z metodą Grossa (5.6), Wahla (5.5) i Haringxa (5.2). Metoda przedstawiona w normie EN 13906-1:2013(E) dawała takie same wyniki jak metoda Haringxa, toteż nie wykonano w tabeli osobnej kolumny (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023). W nawiasach pod wartością obliczoną analitycznie podano wartość błędu względnego obliczoną względem zmierzonej wartości sztywności poprzecznej.

Tab. 5.4. Porównanie średnich wartości zmierzonej sztywności poprzecznej (dla ugięcia osiowego c25) i ich odchyleń od obliczeń metodami analitycznymi (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023)

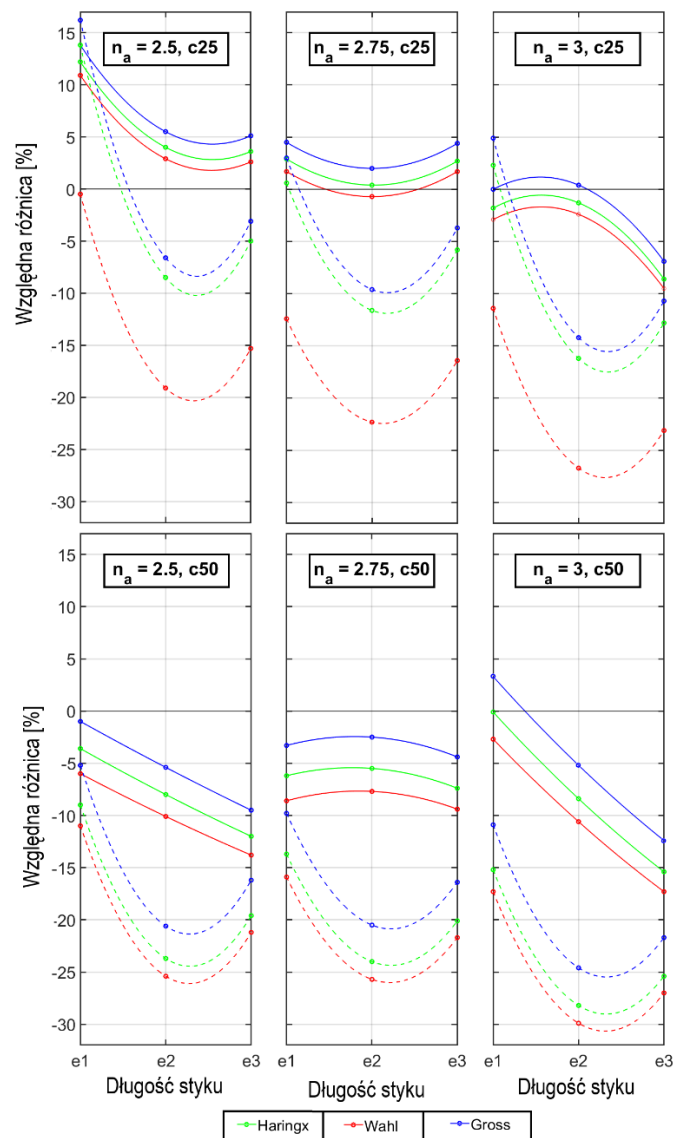
Wskaźnik sprężyny C [-]	Liczba zwojów aktywnych n_a [-]	Długość styku zwojów biernych s [-]	Średnia sztywność poprzeczna k_p [N/mm]	Metoda Grossa [N/mm]	Metoda Wahla [N/mm]	Metoda Haringxa [N/mm] (PN EN 13906-1:2013)
5	2.5	0	164	190 (16%)	163 (0%)	186 (14%)
		0,25	186	174 (-7%)	150 (-19%)	170 (-9%)
		0,5	163	158 (-3%)	138 (-15%)	155 (-5%)
5	2.75	0	154	159 (3%)	135 (-12%)	155 (1%)
		0,25	160	145 (-10%)	124 (-22%)	141 (-12%)
		0,5	137	132 (-4%)	115 (-16%)	129 (-6%)
5	3	0	127	133 (5%)	113 (-11%)	130 (2%)
		0,25	142	122 (-14%)	104 (-27%)	119 (-16%)
		0,5	125	111 (-11%)	96 (-23%)	109 (-13%)
7	2.5	0	84	95 (14%)	93 (11%)	94 (12%)
		0,25	85	89 (6%)	87 (3%)	88 (4%)
		0,5	80	84 (5%)	82 (3%)	83 (4%)
7	2.75	0	78	82 (5%)	79 (2%)	80 (3%)
		0,25	75	77 (2%)	75 (-1%)	75 (0%)
		0,5	69	72 (4%)	70 (2%)	71 (3%)
7	3	0	71	71 (0%)	69 (-3%)	69 (-2%)
		0,25	66	66 (0%)	64 (-2%)	65 (-1%)
		0,5	67	62 (-7%)	60 (-10%)	61 (-9%)

Tab. 5.5. Porównanie średnich wartości zmierzonej sztywności poprzecznej (dla ugięcia osiowego c50) i ich odchyień od obliczeń metodami analitycznymi (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023)

Wskaźnik sprężyny C [-]	Liczba zwojów aktywnych n_a [-]	Długość styku zwojów biernych s [-]	Średnia sztywność poprzeczna k_p [N/mm]	Metoda Grossa [N/mm]	Metoda Wahla [N/mm]	Metoda Haringxa [N/mm] (PN EN 13906-1:2013)
5	2.5	0	214	202 (-5%)	190 (-11%)	194 (-9%)
		0,25	231	184 (-21%)	172 (-25%)	176 (-24%)
		0,5	199	167 (-16%)	157 (-21%)	160 (-20%)
5	2.75	0	187	169 (-10%)	158 (-16%)	162 (-14%)
		0,25	193	153 (-21%)	143 (-26%)	146 (-24%)
		0,5	166	139 (-16%)	130 (-22%)	133 (-20%)
5	3	0	159	142 (-11%)	132 (-17%)	135 (-15%)
		0,25	170	128 (-25%)	120 (-30%)	122 (-28%)
		0,5	149	116 (-22%)	108 (-27%)	111 (-25%)
7	2.5	0	101	100 (-1%)	95 (-6%)	97 (-4%)
		0,25	99	94 (-5%)	89 (-10%)	91 (-8%)
		0,5	97	88 (-9%)	84 (-14%)	86 (-12%)
7	2.75	0	89	86 (-3%)	82 (-9%)	84 (-6%)
		0,25	83	81 (-3%)	77 (-8%)	78 (-6%)
		0,5	79	76 (-4%)	72 (-9%)	73 (-7%)
7	3	0	72	75 (3%)	71 (-3%)	72 (0%)
		0,25	74	70 (-5%)	66 (-11%)	62 (-17%)
		0,5	75	66 (-12%)	62 (-17%)	63 (-15%)

Tabele 5.4 i 5.5 wykazały, że metody analityczne zazwyczaj niedoszacowują wartości sztywności, zwłaszcza dla tych o wskaźniku $C = 5$. Niedoszacowania osiągały wartość nawet 25%. Dla sprężyny o wskaźniku $C = 7$ ugiętej osiowo na 25% prześwitu większość metod przeszacowywała wartość sztywności o maksymalnie 14% dla sprężyny

o 2,5 zwojach aktywnych i styku punktowym. W większości badanych przypadków najbliższe wynikom eksperymentalnym rezultaty uzyskiwano dla metody Grossa, ale nawet w przypadku tej metody rozbieżności z wynikami eksperymentalnymi często przekraczały 20%. Wzrostowi ugięcia osiowego towarzyszy również wzrost rozbieżności między wynikami wzorów a wynikami eksperymentalnymi, co potwierdzono wykonując wybrane badania dla ugięcia osiowego równego 37,5% prześwitu (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023). Wzajemną relację między metodami analitycznymi i wynikami badań przedstawiono graficznie na rysunku 5.12.



Rys. 5.12. Względna różnica między wartościami sztywności uzyskanymi z eksperymentów a wartościami sztywności obliczonymi za pomocą cytowanych metod. Linie ciągłe odpowiadają sprężynom o indeksie $C = 7$, a linie przerywane – sprężynom o indeksie $C = 5$; długość styku e1 odpowiada $s = 0$, e2 – $s = 0,25$, a e3 – $s = 0,5$ (Baran, Michalczyk, Warzecha, 2023)

Na rysunku 5.12 widoczne są dużo większe wartości względnych różnic dla wskaźnika $C = 5$ niż dla wskaźnika $C = 7$, co może wynikać z tych samych powodów dla których w poprzednim punkcie uzasadniono większą nieregularność rozkładów sztywności poprzecznej dla wskaźnika $C = 5$. Największe różnice występowały dla styku oznaczonego jako e2, czyli dla $s = 0,25$ zwoju. Przeprowadzona analiza wykazała, że największa rozbieżność między wynikami wzorów a wynikami eksperymentalnymi jest dla pełnej ($n_a = 3$) lub połówkowej ($n_a = 2,5$) liczby zwojów czynnych. W przypadku sprężyn o pośredniej liczbie zwojów ($n_a = 2,75$) wpływ ten był najmniejszy, w szczególności dla sprężyn o $C = 7$. Można również zauważyć, że sztywności obliczone metodą Grossa są zawsze najwyższe, a metodą Wahla – najniższe. Metoda Haringxa daje wyniki pośrednie.

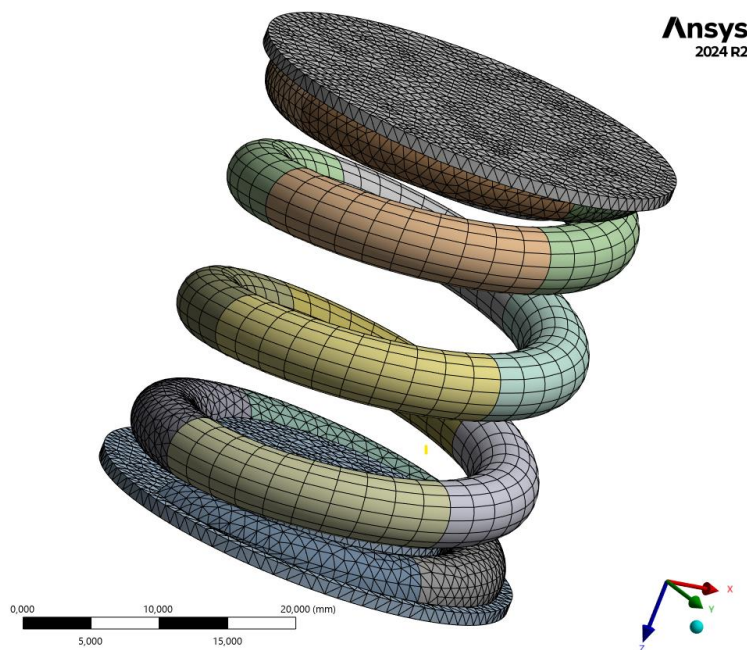
Różnice między metodami analitycznymi i wynikami stanowiskowymi oraz wzajemne różnice między zależnościami wskazują, że metody analityczne mogą nie wystarczyć do precyzyjnego oszacowania wartości sztywności poprzecznej. Wówczas najlepsze jest przeprowadzenie badania stanowiskowego lub numerycznego.

5.3. Badania numeryczne

Badania numeryczne tak jak w poprzednich przypadkach miały za zadanie rozszerzyć próbę badawczą o nowe modele oraz szerzej przyjrzeć się interakcjom zachodzącym w relacji sprężyna uchwyt. W tym podrozdziale przedstawiono zastosowany model badawczy oraz przekrój badań wraz z nawiązaniem do poprzednich zależności dotyczących reakcji poprzecznej.

5.3.1. Model numeryczny i metoda badawcza

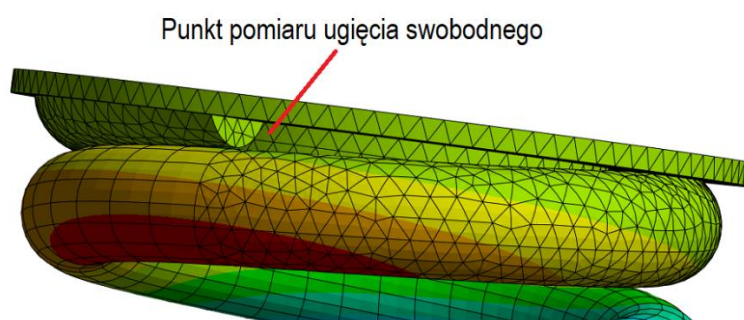
Dla badań numerycznych wykorzystano ten sam model co w przypadku sztywności osiowej, tj. takie same sprężyny z tą samą siatką. Zmodyfikowano jedynie podpory, dobudowując trzpień środkujący o średnicy takiej samej jak na rysunku 5.8, w zależności od średnicy sprężyny. W związku z tym zmodyfikowano zastosowaną siatkę trzpienia, przyjmując elementy czworościenne z powodu konieczności zachowania bliższej zgodności węzłów ostatniego zwoju sprężyny i trzpienia. Jeden z modeli walidacyjnych, czyli sprężynę o wskaźniku $C = 5$, skoku $P = 10$ mm, liczbie zwojów aktywnych $n_a = 2,5$ i styku punktowym, przedstawiono na rysunku 5.13.



Rys. 5.13. Siatka na modelu wirtualnym sprężyny o wskaźniku $C = 5$, skoku $P = 10$ mm, 1. zwojów $n_a = 2,5$ i styku punktowym, wraz z trzpieniami centrującymi

Dla pokazanego na rysunku przypadku uzyskano 103777 węzłów i 58645 elementów. Średnia skośność wynosiła 0,247, a jakość ortogonalna 0,765, które zgodnie z poprzednio cytowanymi wartościami są parametrami zapewniającymi wystarczającą

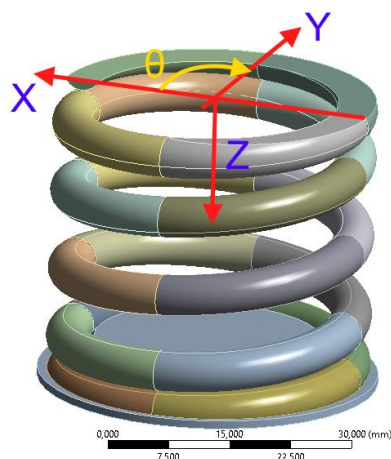
jakość modelu. Sprężynę ugięto osiowo do wartości podanej w tabeli 5.1. Dla sprężyny z rysunku 5.13 jest to wartość 6,25 mm. Obciążenie osiowe narastało linowo w pięciu krokach symulacji, przy jednoczesnym pozostawieniu stopni swobody na kierunku poprzecznym (x i y). Pozwala to ugiąć się sprężynie w dowolnym kierunku poprzecznym. Górna podpora dodatkowo miała zablokowane obrotowe stopnie swobody. Dolna podpora została utwierdzona. Odczyt poprzecznego ugięcia swobodnego u_s wykonano na bocznej powierzchni górnego uchwytu przy samym końcu zwoju sprężyny, co pokazano na rysunku 5.14.



Rys. 5.14. Oznaczenie punktu pomiaru ugięcia swobodnego sprężyny, które warunkuje dalsze uginanie sprężyny

We wszystkich badaniach stosowano ten sam układ współrzędnych odczytu wartości kąta obciążenia poprzecznego, który został przyjęty dla odczytu wartości kąta reakcji poprzecznej ψ powstającej w wyniku osiowego ściskania. W przybliżeniu może być ona tożsama z kątem ugięcia swobodnego sprężyny, dlatego zastosowano dla niego oznaczenie ψ_u . Odczyt kąta zaczyna się od początku sprężyny patrząc od góry, zgodnie z rysunkiem 5.15. Wartość kąta przykładania obciążenia poprzecznego nazwano zmienną θ , która może przyjmować różne wartości, niezależnie od ψ_u , ponieważ każdą sprężynę ugiętą wstępnie w danym kierunku o kącie ψ_u można ugiąć na dowolnym kierunku o kącie θ .

Po uzyskaniu wartości i kierunku swobodnego ugięcia poprzecznego zadano obciążenie w postaci ugięcia poprzecznego u_p , narastającego w pięciu krokach, zachowując wartość ugięcia swobodnego u_s dla 1 kroku oraz ciągle utrzymując ugięcie osiowe. Najpierw obciążenie poprzeczne zadano na kierunku zgodnym z ugięciem swobodnym, a następnie w kolejnej symulacji – na przeciwnym. Następnie wyznaczono sztywności poprzeczne na tych kierunkach, a potem ich wartość średnią, która stanowiła wartość sztywności poprzecznej. Oddaje to istotę pomiaru normowego z rysunku 5.1.



Rys. 5.15. Sposób pomiaru kąta przyłożenia obciążenia poprzecznego θ

Do badań walidacyjnych wybrano 2 sprężyny, których wyniki sztywności poprzecznej, ukazane na rysunku 5.9 i 5.11, odpowiadały założeniom normowego pomiaru sztywności poprzecznej. W tych sprężynach kierunek swobodnego ugięcia był zgodny z kierunkiem przyłożenia obciążenia poprzecznego i tym samym w tych miejscach uzyskano maksymalną i minimalną wartość sztywności poprzecznej. Wybrano sprężyny o wskaźniku $C = 5$, skoku teoretycznym $P = 10$ mm, liczbie zwojów aktywnych $n_a = 2,5$ i $n_a = 3$ oraz długości styku zwojów końcowych odpowiednio $s = 0$ i $s = 0,5$. Zastosowano ugięcie osiowe równe odpowiednio 6,25 mm i 7,5 mm, a ugięcie poprzeczne u_p równe 1,75 mm i 2,1 mm. Uzyskane wartości sztywności poprzecznej zamieszczono w tabeli 5.6. Podano również sztywności osiowe, jako dodatkowy punkt weryfikacji modelu i zweryfikowano je z badaniami stanowiskowymi, których wyniki podano w tabeli 4.7. Wówczas dla mniejszej sprężyny sztywność osiowa wynosiła 140,8 N/mm, a dla większej – 121,2 N/mm. Ponadto zamieszczono sztywności poprzeczne, pochodzące z badań stanowiskowych, zmierzone jako średnia wartości odpowiadającym najbliższym kątom przyłożenia obciążenia θ , wyznaczonych w symulacji. Sztywności poprzeczne składowe uzyskane z badań numerycznych odczytywano z charakterystyki poprzecznej względem poziomu zero, czyli tak jak w badaniach stanowiskowych.

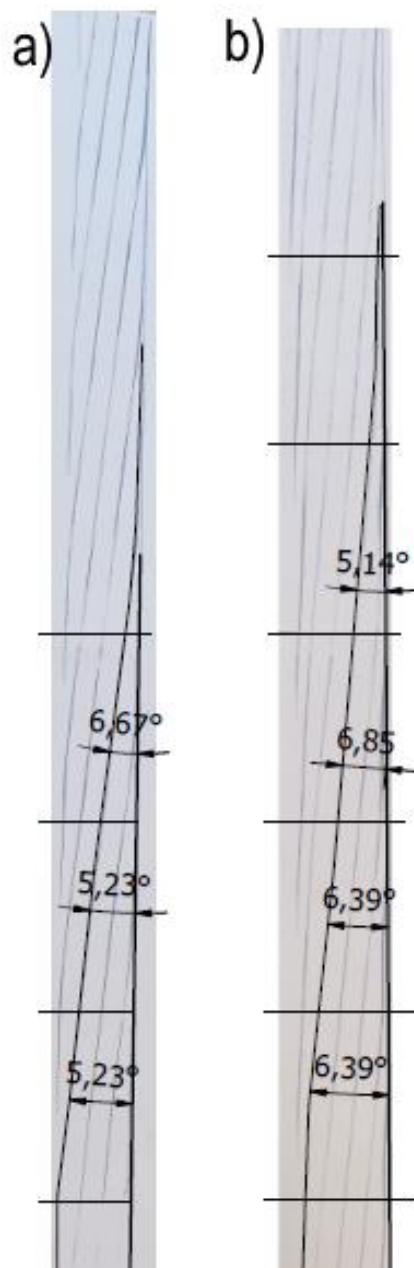
Tab. 5.6. Sztywność poprzeczna dla wybranych sprężyn z porównaniem z wartościami uzyskanymi w wyniku eksperymentu stanowiskowego

Sprężyna	Kąt przyłożenia obciążenia θ [°]	Sztywność osiowa k [N/mm]	Sztywność poprzeczna k_p [N/mm]	Średnia sztywność poprzeczna k_p [N/mm]	Sztywność poprzeczna rzeczywista k_{pr} [N/mm]	Błąd względny [%]
$n_a = 2,5$, $s = 0$	0,5	140,0	175,3	183,5	221,3	17
	180,5		191,7			
$n_a = 3$, $s = 0,5$	127,6	117,6	120,3	122,6	148,9	18
	307,6		125,0			

Otrzymane wyniki testów walidacyjnych pokazują niezadawalającą zgodność modelu z rzeczywistością, ponieważ otrzymano błąd względny równy średnio 17,5%. Zachowano bardzo dobrą zgodność z wynikami sztywności osiowej, ponieważ dla sprężyny $n_a = 2,5$, $s = 0$ błąd względny wyniósł około 0,6%. Gorszy rezultat uzyskano dla $n_a = 3$, $s = 0,5$, gdzie błąd względny był równy 2,9%, co mieści się w normowych granicach tolerancji sztywności. Duży błąd sztywności poprzecznej nie oznacza, że sposób modelowania i warunki brzegowe są nieodpowiednie. Jedną z przyczyn niedokładności może być błędnie odwzorowana geometria sprężyny, co postanowiono zweryfikować. W tym celu przeprowadzono proste badanie umożliwiające precyzyjne określenie rzeczywistych parametrów badanej sprężyny. Badanie polegało na przetoczeniu sprężyny po płaskiej powierzchni, na której zamocowano kalkę maszynową. W celu zachowania prostoliniowego toru przetaczania sprężyny, jej czoła były prowadzone przez odpowiednie podpory (rys. 5.16). W wyniku przeprowadzonych badań otrzymano odciski pokazane na rysunku 5.17, gdzie zaznaczono też zmierzone w programie Autodesk Inventor wartości kątów wzniosu linii śrubowej drutu sprężyny, po uprzednim zeskanowaniu otrzymanych arkuszy.



Rys. 5.16. Stanowisko do odrysowania drutów sprężyny na kartkę celem pomiaru kąta wzniosu



Rys. 5.17. Opracowane w programie Autodesk Inventor Professional skany odbitek sprężyn o wskaźniku $C = 5$ i skoku $P = 10$ mm wraz ze zmierzonymi wartościami kąta wzniosu linii śrubowej dla sprężyny: a) $n_a = 2,5$, $s = 0$, b) $n_a = 3$, $s = 0,5$.

Przeprowadzone pomiary pokazały, że wartość kąta wzniosu linii śrubowej jest zmienna dla każdego zwoju, co stanowi niezgodność ze stosowanymi modelami numerycznymi, które miały wartość $\gamma = 7,26^\circ$. Wykorzystywany algorytm tworzenia geometrii sprężyn nie został dostosowany do sprężyn o większej liczbie poziomów skoku niż 3, toteż pozostało albo łączenie sprężyny z kilku odcinków, albo szacowanie sztywności. Z poprzednich badań nad sztywnością osiową wynikało, że im większy był kąt wzniosu, tym sztywność zmniejszała się. Zgodne jest to z zasadą, że im większe ściśnięcie osiowe sprężyny, tym większa jest sztywność poprzeczna. Wobec tego, że kąt

wzniosu linii śrubowej sprężyny był mniejszy od wartości teoretycznej oraz biorąc pod uwagę, że sprężyny wykazywały klepsydrowość (szczególnie o 3 zwojach aktywnych i styku połówkowym) oraz drut w niewidoczny gołym okiem sposób uległ odkształceniu eliptycznemu, należy stwierdzić, że w przypadku sztywności poprzecznej różnice jej wartości mogą być duże i trudne do odwzorowania. Różnice między modelem a rzeczywistością nie były tak widoczne w przypadku pomiaru sztywności osiowej, ponieważ nie występowały tam ruchy poprzeczne zwojów, a tym samym odległości między nimi nie odgrywały tak dużej roli. Zwoje były jedynie doginane i skręcane. W przypadku pracy poprzecznej sprężyny dochodzi do opierania się zwojów na sobie i przesuwania poprzecznego. Tym samym istotną rolę stanowią nieliniowe zjawiska tarcia, naprężenia wewnętrzne i drobne niedokładności geometryczne, a odwzorowanie modelowe pracy poprzecznej sprężyny jest trudne i wymaga bardziej wyspecjalizowanych modeli.

Jak pokazano na rysunku 5.17 odciski zwojów sprężyn podzielono na równe odcinki i w każdym z nich zmierzono kąt wzniosu linii śrubowej. Następnie obliczono jego wartość średnią, która dla sprężyny o liczbie zwojów aktywnych równej 2,5 wyniosła $5,71^\circ$ (rys. 5.17a). Natomiast dla sprężyny $n_a = 3, s = 0,5$ wartość ta wyniosła $6,19^\circ$ (rys. 5.17b). Zachowano możliwie jak najmniejszym odcinek wyrównujący skok, z powodu dążenia do zachowania wysokości modelu, które zostały zmierzone w tabeli 4.1. Mimo to nie udało się wykonać modeli sprężyn o takiej samej wysokości. Okazały się być niższe o odpowiednio około 8,3 mm (-23,7%) oraz 4,5 mm (-10,5%). Rozbieżności w wysokości można tłumaczyć odkształceniem eliptycznym drutu i występowaniem nieznacznego zmniejszenia średnicy podziałowej sprężyn na odcinku zwojów aktywnych. Na etapie przygotowania symulacji zachowano wszystkie warunki brzegowe łącznie z wielkością obciążenia. Uzyskane w wyniku obliczeń numerycznych sztywności poprzeczne zamieszczono w tabeli 5.3.

Tab. 5.7. Sztywność poprzeczna dla wybranych sprężyn po modyfikacji kąta wzniosu linii śrubowej z porównaniem z wartościami uzyskanymi wyniku eksperymentu stanowiskowego.

Sprężyna	Kąt przyłożenia obciążenia θ [°]	Sztywność osiowa k [N/mm]	Sztywność poprzeczna k_p [N/mm]	Średnia sztywność poprzeczna k_p [N/mm]	Sztywność poprzeczna rzeczywista k_{pr} [N/mm]	Błąd względny [%]
$n_a = 2,5,$ $s = 0$	0,4	148,0	209,8	216,9	221,3	2
	180,4		224,0			
$n_a = 3,$ $s = 0,5$	126,0	118,9	143,3	145,6	148,9	2
	306,0		148,0			

Otrzymane wyniki symulacji są zdecydowanie bliższe rzeczywistym. Dla obydwu sprężyn błąd względny sztywności poprzecznej, obliczonej numerycznie względem wartości uzyskanej w badaniach stanowiskowych wyniósł 2%. Wartości te odzwierciedlają dużą dokładność obliczania sztywności poprzecznej, toteż przyjęto, że sporządzony model numeryczny może być stosowany do wykonania obliczeń na szerszej próbie sprężyn teoretycznych.

Badania wstępne wykazały, że kąt wzniosu linii śrubowej sprężyny ma bardzo duże znaczenie w charakterystyce sztywności poprzecznej. Praca poprzeczna sprężyny bazuje na poprzecznym, wzajemnym przemieszczaniu się zwojów. Jeśli któryś z nich szybciej ulegnie zamknięciu w wyniku mniejszego kąta wzniosu linii śrubowej, to wzrośnie sztywność poprzeczna sprężyny. Błąd względny sztywności osiowej wyniósł -5,1% i 1,9%, co jest dopuszczalne, gdyż podobne błędy zdarzały się w walidacji symulacji sztywności osiowej. Dlatego mimo dodania podpór z trzpieniami centrującymi, uzyskane wartości sztywności osiowej można odnosić do poprzecznej, tak jakby były to wyniki sztywności osiowej mierzonej bez trzpieni centrujących. Z racji bardzo dobrej zgodności uzyskanych sztywności poprzecznych uznano model za wystarczający.

5.3.2. Próbki sprężyn i wyniki badań numerycznych

Badania sztywności poprzecznej przeprowadzono dla sprężyn o wskaźniku $C = 4$ i 8 oraz średnicy drutu $d = 1$ mm, tak jak w badaniach sztywności osiowej. Dla wskaźnika $C = 8$ kąt wzniosu linii śrubowej γ wynosił 10° . Dla sprężyn $C = 4$, $\gamma = 5^\circ$, 10° i 15° . Dla sprężyny $C = 4$, $\gamma = 10^\circ$ wykonano badania dla liczby zwojów aktywnych $n_a = 1; 1,25; 1,5; 1,75; 2$ oraz dla długości styku zwojów biernych $s = 0; 0,25; 0,5; 1$, stosując w nich ugięcie wstępne osiowe równe 25% i 50% wartości teoretycznego prześwitu sprężyny. Pozostałe sprężyny były badane tylko dla 50% ugięcia. Ponadto zostały zbadane tylko próbki o styku punktowym dla wymienionych liczb zwojów aktywnych, a wszystkie długości kontaktu zbadano dla sprężyn o 1 zwoju. Łącznie wykonano 47 modeli, które przełożyły się na 67 wyników symulacji sztywności poprzecznej.

Badania sztywności poprzecznej pokazały, że rozbieżności między sztywnością na przeciwległych kierunkach, tożsamy z kierunkiem ugięcia poprzecznego sprężyny, mogą być duże w zależności od geometrii. W tabeli 5.8 i 5.9 zamieszczono wyniki badań sztywności poprzecznej k_p wraz z wyznaczeniem współczynnika asymetrii k_{p1}/k_{p2} (stosunku obydwu sztywności na jednym kierunku, ale na przeciwnych zwrotach) oraz

stosunku średniej sztywności poprzecznej do osiowej k_p/k . Podano również kąt ugięcia swobodnego sprężyny ψ_u , który w tym przypadku będzie tożsamy z kątem przyłożenia obciążenia poprzecznego θ , uwzględniając przeciwne zwroty dla odpowiedniej sztywności.

Tab. 5.8. Wyniki badań sztywności poprzecznej sprężyn dla ugięcia równego 50% prześwitu

n_a [-]	s [-]	ψ_u [°]	k_{p1} [N/mm]	k_{p2} [N/mm]	k_p [N/mm]	k_{p1}/k_{p2} [-]	k_p/k [-]
$C = 4 \gamma = 5^\circ$							
1	0	86,5	136,7	242,7	189,7	0,56	1,57
	0,25	177,9	132,1	244,0	188,0	0,54	1,57
	0,5	82,4	108,6	143,0	125,8	0,76	1,06
	1	78,2	79,8	112,8	96,3	0,71	0,79
1,25	0	48,1	155,2	163,4	159,3	0,95	1,54
1,5	0	1,5	197,1	126,3	161,7	1,56	1,91
1,75	0	43,1	118,2	128,5	123,4	0,92	1,70
2	0	93,4	83,6	134,1	108,8	0,62	1,66
$C = 4 \gamma = 10^\circ$							
1	0	94,8	171,5	221,4	196,5	0,77	1,68
	0,25	179,4	165,5	212,1	188,8	0,78	1,62
	0,5	92,0	160,9	173,0	166,9	0,93	1,43
	1	89,7	141,0	154,1	147,5	0,91	1,26
1,25	0	47,7	175,8	171,8	173,8	1,02	1,74
	0,25	42,9	128,2	129,8	129,0	0,99	1,29
	0,5	135,5	114,5	126,2	120,3	0,91	1,19
	1	45,0	125,0	129,5	127,3	0,97	1,26
1,5	0	3,6	140,5	129,4	135,0	1,09	1,67
	0,25	89,3	114,1	113,3	113,7	1,01	1,43
	0,5	179,9	100,6	113,9	107,3	0,88	1,33
	1	0,1	102,4	93,4	97,9	1,10	1,21
1,75	0	46,3	128,6	115,1	121,8	1,12	1,75
	0,25	134,9	98,3	109,4	103,8	0,90	1,50
	0,5	135,6	79,4	79,1	79,3	1,00	1,14
	1	44,0	93,5	90,9	92,2	1,03	1,32
2	0	85,9	84,7	93,4	89,1	0,91	1,38
	0,25	178,9	80,3	80,5	80,4	1,00	1,26
	0,5	88,6	72,6	79,8	76,2	0,91	1,18
	1	89,8	72,0	70,4	71,2	1,02	1,11
$C = 4 \gamma = 15^\circ$							
1	0	87,9	198,0	209,4	203,7	0,95	1,80
	0,25	179,0	175,1	163,2	169,1	1,07	1,53
	0,5	90,0	147,7	173,7	160,7	0,85	1,44
	1	89,9	151,0	146,3	148,6	1,03	1,34
1,25	0	51,7	149,2	156,3	152,7	0,95	1,58
1,5	0	12,6	83,1	82,6	82,9	1,01	0,91
1,75	0	45,6	79,8	85,6	82,7	0,93	1,26
2	0	91,1	51,6	50,2	50,9	1,03	0,90

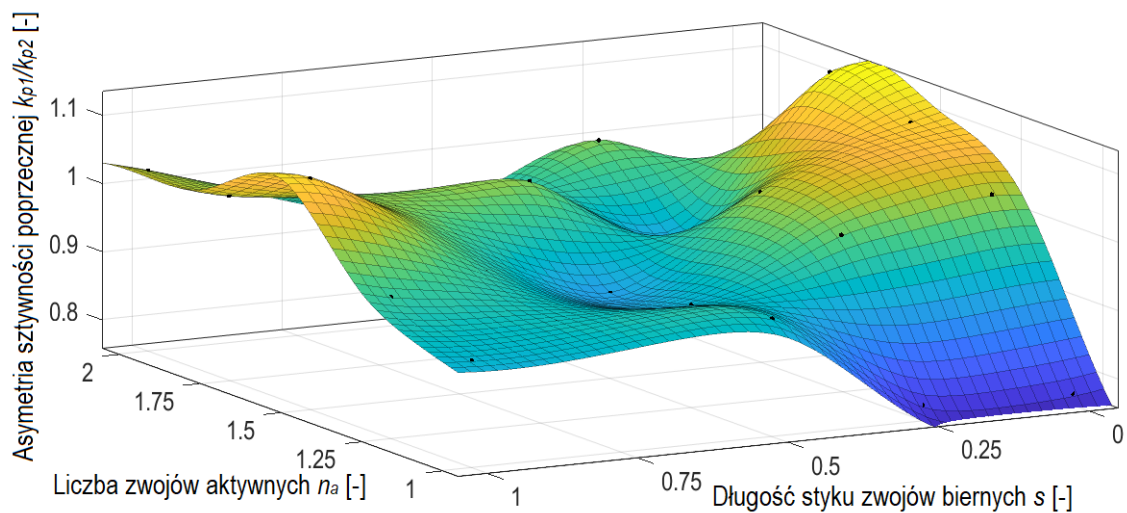
$C = 8 \gamma = 10^\circ$							
1	0	90,2	27,5	25,8	26,6	1,06	1,84
	0,25	179,5	26,9	25,3	26,1	1,07	1,82
	0,5	89,5	20,3	23,9	22,1	0,85	1,53
	1	89,8	22,6	22,9	22,7	0,98	1,57
1,25	0	45,3	22,8	22,5	22,6	1,01	1,85
1,5	0	0,1	18,0	16,5	17,2	1,09	1,77
1,75	0	45,4	15,2	14,6	14,9	1,04	1,74
2	0	90,6	11,4	10,7	11,0	1,07	1,39

Tab. 5.9. Wyniki badań sztywności poprzecznej sprężyn dla ugięcia równego 25% prześwitu

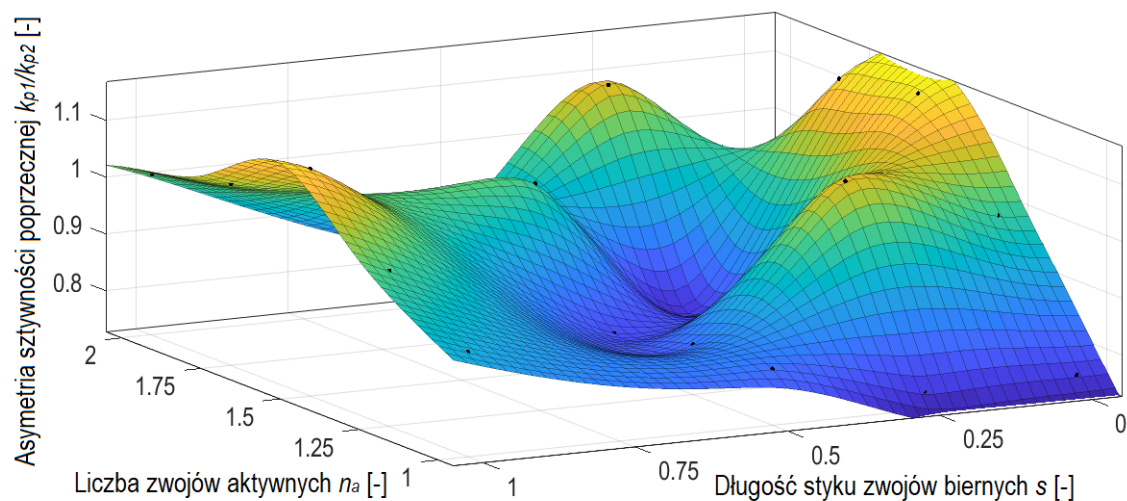
n_a [-]	s [-]	ψ_u [°]	k_{p1} [N/mm]	k_{p2} [N/mm]	k_p [N/mm]	k_{p1}/k_{p2} [-]	k_p/k [-]
$C = 4 \gamma = 10^\circ$							
1	0	93,8	154,9	203,6	179,3	0,76	1,54
	0,25	179,7	142,7	187,9	165,3	0,76	1,42
	0,5	93,4	121,2	146,6	133,9	0,83	1,15
	1	88,6	104,2	114,2	109,2	0,91	0,94
1,25	0	47,1	146,9	148,7	147,8	0,99	1,56
	0,25	42,7	116,0	107,9	112,0	1,08	1,17
	0,5	136,1	87,3	107,0	97,2	0,82	1,01
	1	45,0	98,2	98,0	98,1	1,00	1,01
1,5	0	2,5	131,9	114,9	123,4	1,15	1,56
	0,25	89,6	91,7	108,0	99,9	0,85	1,28
	0,5	179,9	82,6	105,6	94,1	0,78	1,20
	1	0,9	85,1	75,5	80,3	1,13	1,02
1,75	0	44,9	112,1	100,1	106,1	1,12	1,52
	0,25	134,7	73,5	98,3	85,9	0,75	1,24
	0,5	135,7	64,2	64,7	64,5	0,99	0,92
	1	45,1	78,1	74,6	76,3	1,05	1,10
2	0	83,3	70,3	78,2	74,3	0,90	1,15
	0,25	177,0	68,7	63,4	66,1	1,08	1,04
	0,5	88,2	56,5	67,2	61,9	0,84	0,97
	1	89,0	53,5	53,0	53,2	1,01	0,83

5.3.3. Analiza wyników

Dla lepszego zobrazowania zmiany wartości współczynnika asymetrii sztywności poprzecznej oraz stosunku sztywności poprzecznej do osiowej wykonano ich wykresy. Analizę rozpoczęto od asymetrii sztywności poprzecznej sprężyn, co pokazano na wykresach powierzchniowych 5.18 i 5.19.

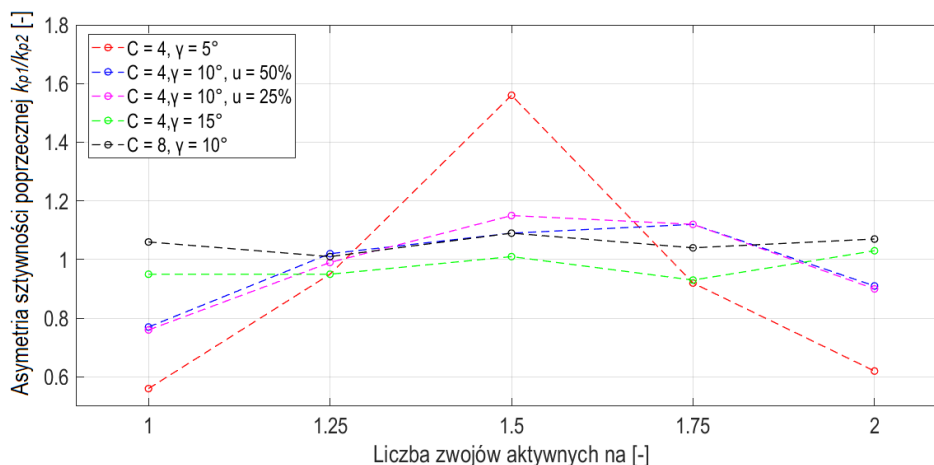


Rys. 5.18. Zależność współczynnika asymetrii sztywności poprzecznej względem liczby zwojów aktywnych i długości styku zwojów biernych dla 50% ugięcia sprężyny o $C = 4$ $\gamma = 10^\circ$



Rys. 5.19. Zależność współczynnika asymetrii sztywności poprzecznej względem liczby zwojów aktywnych i długości styku zwojów biernych dla 25% ugięcia sprężyny o $C = 4$ $\gamma = 10^\circ$

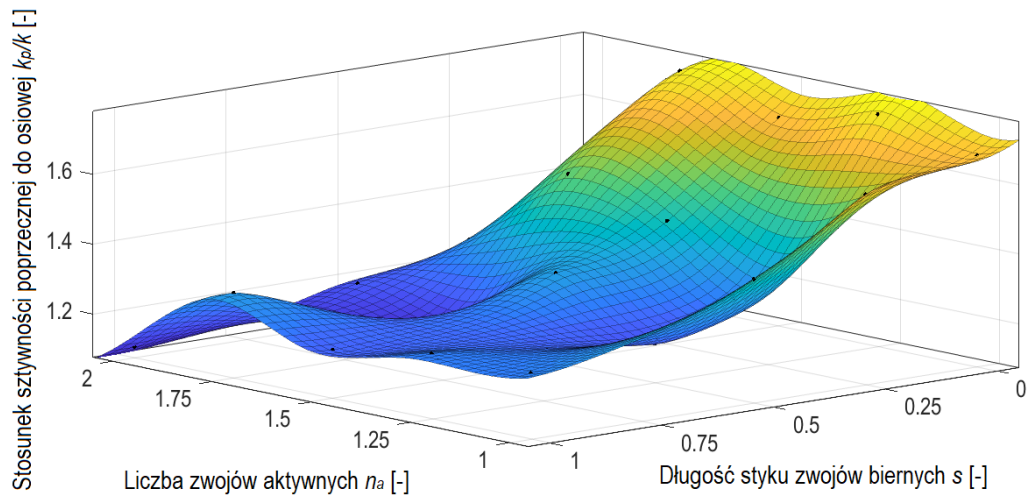
W obydwu przypadkach obciążenia współczynnik asymetrii sztywności poprzecznej sprężyny mieścił się w granicach 0,8 - 1,1, a przebieg zmiany był nieregularny, ale powtarzalny. Największe anomalie wykryto dla styku 0, 0,25 i 1. Dla styku połówkowego zmiany asymetrii sztywności poprzecznej względem liczby zwojów aktywnych były łagodniejsze. Zwiększenie liczby zwojów aktywnych nie sprawiło, że sztywności stały się bardziej symetryczne. Porównano też wyniki dla innych sprężyn o styku punktowym, aby sprawdzić czy występuje regularna zależność (rys. 5.20).



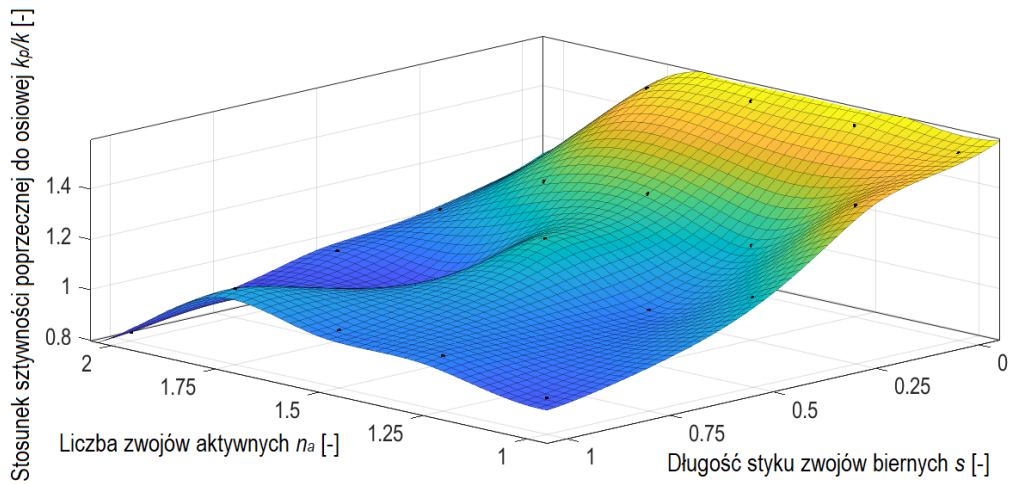
Rys. 5.20. Zależność współczynnika asymetrii sztywności poprzecznej względem liczby zwojów aktywnych

Rysunek 5.20 pokazuje, że w zmianie współczynnika asymetrii sztywności poprzecznej sprężyny względem liczby zwojów aktywnych brakuje trendu, który można by opisać funkcją. Powodem jest też niewystarczająca liczba danych. Można jednak wyciągnąć kilka istotnych wniosków. Po pierwsze zmiana ugięcia osiowego u z 50% do 25% praktycznie nie zmieniała współczynnika asymetrii sztywności poprzecznej. Dla większego wskaźnika ($C = 8$) zmiana asymetrii praktycznie nie występuje i ustabilizowała się na wartości około 1,05. Największa asymetria wystąpiła dla 1,5 zwojów aktywnych, a dla $C = 4$ i $\gamma = 5^\circ$, wystąpiło w tym miejscu wyraźne ekstremum wynoszące prawie 1,6. Świadczy to o tym, że problem asymetrii sztywności poprzecznej występuje, gdy zwoje muszą blisko ze sobą współpracować na kierunku poprzecznym, jak ma to miejsce w sprężynie o niskim kącie wzniosu linii śrubowej γ . Dla liczby zwojów 1 i 2 dochodzi do zmniejszenia wartości współczynnika do poziomu poniżej 1, oprócz $C = 8$. Świadczy to o tym, że dla tych zwojów dochodzi do wykazywania większej sztywności na kierunku przeciwnym do ugięcia swobodnego jaki odpowiadał sztywności k_{pl} . Koncepcja budowy zależności uwzględniającej tę relację w obliczaniu sztywności poprzecznej może być etapem dalszych szeroko zakrojonych badań, zdecydowanie wychodzących poza zakres niniejszej pracy.

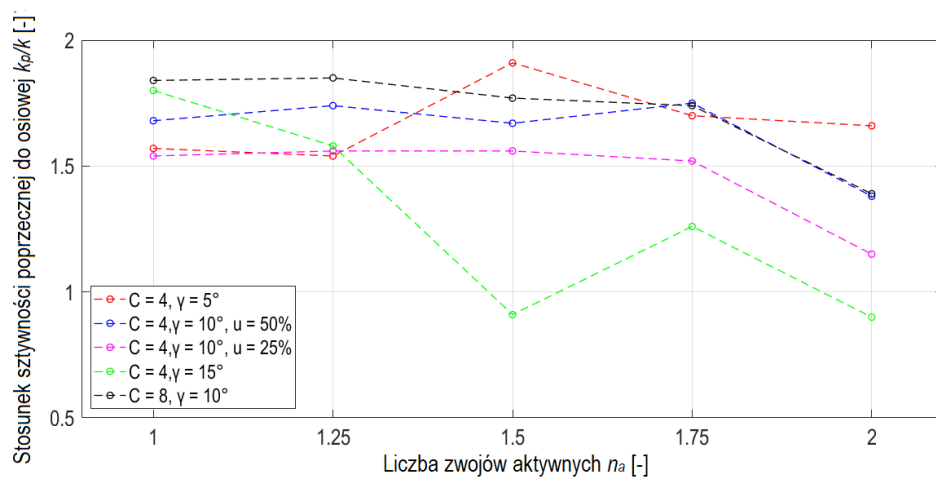
Następnym współczynnikiem podlegającym analizie jest stosunek sztywności poprzecznej do osiowej. Rysunki 5.21 i 5.22 przedstawiają przebiegi stosunku sztywności poprzecznej do osiowej względem liczby zwojów aktywnych i długości styku zwojów biernych. Natomiast rysunek 5.23 pokazuje zmianę tego stosunku w funkcji liczby zwojów aktywnych dla różnych geometrii sprężyn.



Rys. 5.21. Zależność stosunku sztywności poprzecznej do osiowej względem liczby zwojów aktywnych i długości styku zwojów biernych dla 50% ugięcia sprężyny o $C = 4$ $\gamma = 10^\circ$



Rys. 5.22. Zależność stosunku sztywności poprzecznej do osiowej względem liczby zwojów aktywnych i długości styku zwojów biernych dla 25% ugięcia sprężyny o $C = 4$ $\gamma = 10^\circ$



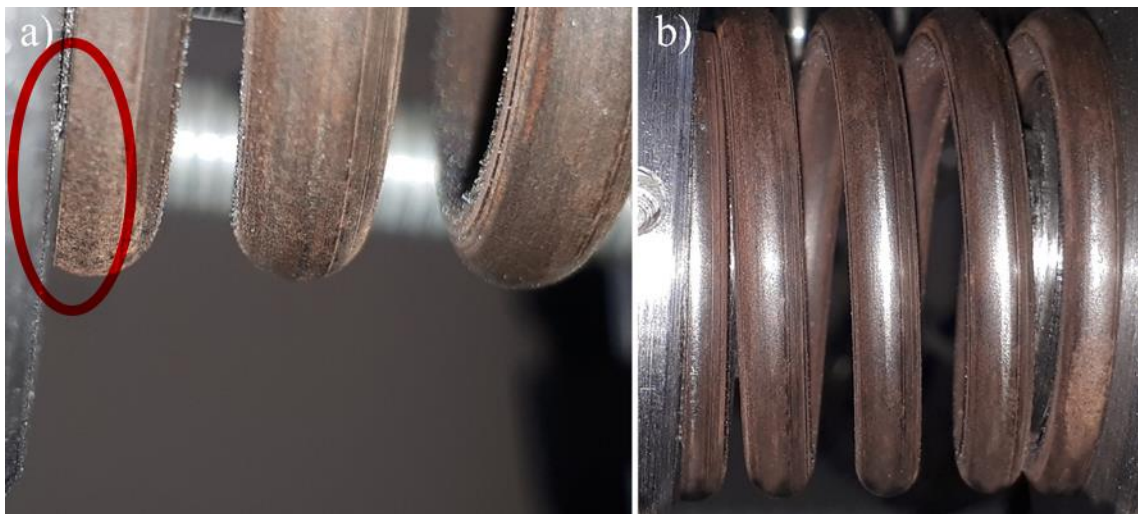
Rys. 5.23. Zależność stosunku sztywności poprzecznej do osiowej względem liczby zwojów aktywnych

Analizując powyższe wykresy zauważa się dużą regularność przebiegu zmian stosunku sztywności poprzecznej do osiowej. Rysunki 5.21 i 5.22 pokazują, że jedynie dla styku punktowego stosunek ten jest wysoki, bliski 1,8 dla $u = 50\%$ prześwitu lub bliski 1,6 dla $u = 25\%$. Im mniejsza była długość styku tym stosunek ten był mniejszy. Dla styku zwojów biernych dłuższego niż 0,5 stosunek sztywności zawierał się między 0,8 a 1. Można określić wpływ zwojów przyłożonych jako istotny w zakresie analizy sztywności poprzecznej sprężyn krótkich. Zgodnie z rysunkiem 5.23 stosunek k_p/k widocznie obniża się dla 2 zwojów aktywnych. Wszystkie krzywe układają się też w jednolity trend zależny od wielkości ugięcia osiowego i kąta wzniosu lirii śrubowej sprężyny, natomiast pomijalnie, od wskaźnika C .

Podsumowując, w przypadku sztywności poprzecznej wpływ zakończeń sprężyn różniących się długością styku zwojów biernych na jej wartość jest ważniejszy niż w przypadku sztywności osiowej. Trendy w jakie układają się wyniki sugerują, że możliwe jest formułowanie nowych zależności empirycznych przy odpowiednio dużej liczbie badań numerycznych i rzeczywistych.

6. Doświadczalna analiza wpływu ukształtowania zwojów końcowych sprężyn na ich stabilność w warunkach pracy poprzecznej

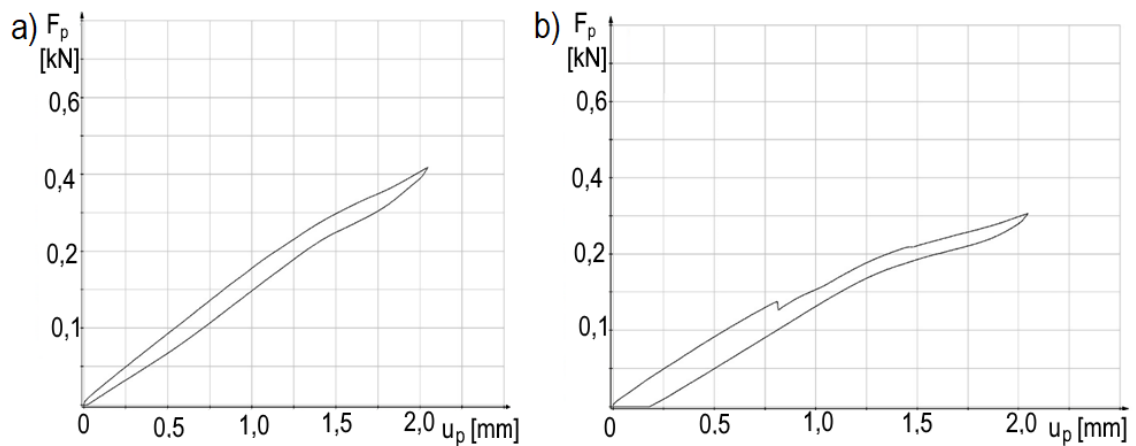
Problematyka stateczności sprężyn jest zagadnieniem wiążącym się ze sztywnościami sprężyn. Tak jak powiązane ze sobą są sztywność osiowa i poprzeczna, tak są powiązane siły osiowe i poprzeczne, które działając na sprężynę zachowują ją w równowadze lub wywierają konkretne przemieszczenie, którego wartość zależy od sztywności. Zależność tę definiuje norma EN 13906-1:2013(E), którą zacytowano jako równanie (5.10). Jak wówczas wspomniano mimo spełnienia warunków równania, zwój czołowy sprężyny oderwał się o około 0,3 – 0,5 mm od powierzchni uchwytu, jak pokazano na rysunku 6.1. Do odrywania podpór najczęściej dochodziło przy pomiarze kątów między 150° a 210° w zależności od wzajemnego ułożenia szlifowanych końców, czyli tam gdzie nie ma dużej powierzchni oporowej, którą zapewnia zeszlifowany zwój.



Rys. 6.1. a) Odgięcie sprężyny w powiększeniu, b) sprężyna z utraconym stykiem z podporą

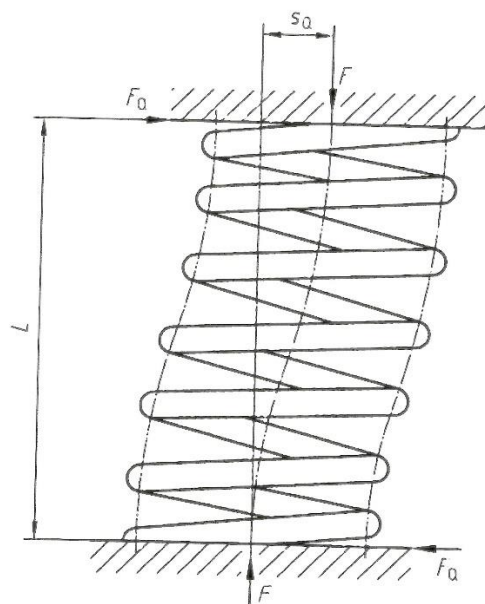
Na rysunku 6.2 przedstawiono dwie charakterystyki w funkcji ugięcia poprzecznego, gdzie zarejestrowano oderwanie podpory – płynne i nagłe. Praktycznie żadna charakterystyka nie była w pełni liniowa, ale jeśli krzywizna była znaczna, nie uznawano tego co jest po zakrzywieniu, ponieważ dochodziło wówczas do zmiany warunków podparcia i w efekcie wykreślania innej charakterystyki niż odpowiednia dla przyjętych parametrów wejściowych badania. Natomiast, gdyby podjąć ściśle kryterium ugięcia, niezależnie od kształtu charakterystyki, należałoby zastosować wyrażenie sztywności poprzecznej za pomocą funkcji nieliniowej, a nie wartości pojedynczej, jak

powszechnie się stosuje. W warunkach rzeczywistych sprężyna pod wpływem działania takiego ugięcia poprzecznego straciłaby stabilność i praca odbywałaby się na pochylonej względem pierwotnej charakterystyce, do czego nie powinno się dopuszczać. Z tego powodu w tym rozdziale zdecydowano o wykonaniu pogłębionej analizy dla wybranych sprężyn, celem wskazania miejsca występowania utraty stabilności sprężyny i podjęcia próby wyjaśnienia tego zjawiska.



Rys. 6.2. Poprzeczna charakterystyka siła-przemieszczenie a) z łagodnym zagięciem, b) z nagłym zerwaniem kontaktu między szlifowanym zwojem sprężyny a podporą

Dotychczas stosowana zależność z normy EN 13906-1:2013(E) (5.10) opiera się na porównaniu iloczynu siły poprzecznej F_p i połowy wysokości sprężyny obciążonej h do iloczynu siły osiowej F_0 i połowy różnicy średnicy podziałowej D i ugięcia poprzecznego u_p . Jest to zobrazowane na rysunku, pochodzącym z normy EN 13906-1:2013(E) (rys. 6.3).



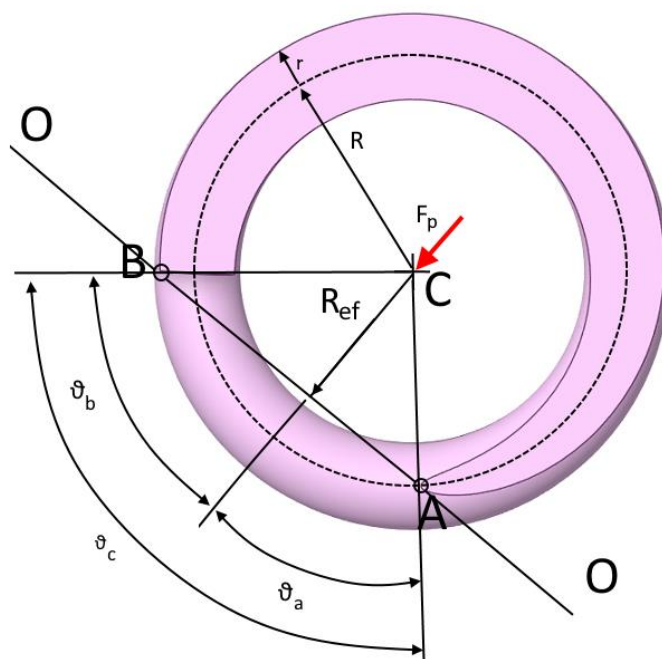
Rys. 6.3. Model ilustrujący siły działające na sprężynę w warunkach pracy poprzecznej zaprezentowany w normie EN 13906:2013(E) (Polski Komitet Normalizacyjny, 2013)

Zależność (5.10) zmodyfikowano, wpisując promień R zamiast połowy średnicy podziałowej D , celem zapisania jej jako równanie (6.1).

$$F_p \cdot \frac{h}{2} \leq F_0 \cdot \left(R - \frac{u_p}{2} \right) \quad (6.1)$$

W związku z tym siła osiowa działa na promieniu $R - 0,5u_p$. Model zakłada, że sprężyna jest jednolitym prętem ściskanym, obustronnie utwierdzonym, poddanym ścinaniu poprzecznemu. W rzeczywistości sprężyna nie jest jednolitym prętem, a jej zwoj końcowy jest zeszlifowany na określonej części obwodu sprężyny. Dąży się do jak największego zeszlifowania zwojów, dla uzyskania większej stabilności sprężyny, ale często używanym jest zeszlifowanie $\frac{3}{4}$ obwodu, tak jak w badanych próbkach. Stanowi to pewien kompromis między wytrzymałością ostatniego zwoju, a stabilnością. Wobec tego w każdym przypadku sprężyna pracuje na tzw. promieniu efektywnym R_{ef} , który w miejscu powierzchni zeszlifowanych powinien być równy promieniowi podziałowemu, a w miejscu braku zeszlifowania odległości cięciwy AB od środka sprężyny, tak jak pokazano na rysunku 6.4. Przedstawiony przypadek jest najgorszym scenariuszem, w którym utrata stabilności sprężyny nastąpi w wyniku obrotu jej czoła względem osi O-O. Równanie (6.1) tym samym powinno mieć postać (6.2):

$$F_p \cdot \frac{h}{2} \leq F_0 \cdot \left(R_{ef} - \frac{u_p}{2} \right) \quad (6.2)$$



Rys. 6.4. Rysunek objaśniający występowanie promienia efektywnego R_{ef} w przypadku zginania sprężyn z czołami szlifowanymi

Na podstawie rysunku, przy założeniu, że znane jest R , r i ϑ_c możliwe jest zapisanie zależności pomiędzy tymi zmiennymi:

$$\cos(\vartheta_a) = \frac{R_{ef}}{AC} = \frac{R_{ef}}{R} \quad (6.3)$$

$$\cos(\vartheta_b) = \frac{R_{ef}}{BC} = \frac{R_{ef}}{R+r} \quad (6.4)$$

$$R_{ef} = R \cos(\vartheta_a) \quad (6.5)$$

$$R_{ef} = (R+r) \cos(\vartheta_b) \quad (6.6)$$

Porównując ze sobą zależności (6.5) i (6.6) otrzymano równanie (6.7), które po przekształceniu pozwala obliczyć cosinus kąta ϑ_b (6.8).

$$R_{ef} = R \cos(\vartheta_a) = (R+r) \cos(\vartheta_b) \quad (6.7)$$

$$\cos(\vartheta_b) = \frac{R}{R+r} \cos(\vartheta_a) \quad (6.8)$$

Zgodnie z rysunkiem zależność między kątami ϑ_a , ϑ_b , ϑ_c jest następująca:

$$\vartheta_c = \vartheta_a + \vartheta_b \quad (6.9)$$

$$\vartheta_b = \vartheta_c - \vartheta_a \quad (6.10)$$

Po podstawieniu (6.10) do równania (6.8) otrzymano (6.11):

$$\frac{R}{R+r} \cos(\vartheta_a) = \cos(\vartheta_c - \vartheta_a) \quad (6.11)$$

Korzystając z przekształcenia cosinusa różnicy kątów, uzyskano (6.12):

$$\frac{R}{R+r} \cos(\vartheta_a) = \cos(\vartheta_c) \cdot \cos(\vartheta_a) + \sin(\vartheta_c) \cdot \sin(\vartheta_a) \quad (6.12)$$

Przy założeniu że: $\vartheta_a \in [0; 90^\circ]$, przyjęto, że $\cos(\vartheta_a) \neq 0$, na skutek czego możliwe było zapisanie równania (6.13):

$$\frac{R}{R+r} = \cos(\vartheta_c) + \sin(\vartheta_c) \cdot \tan(\vartheta_a) \quad (6.13)$$

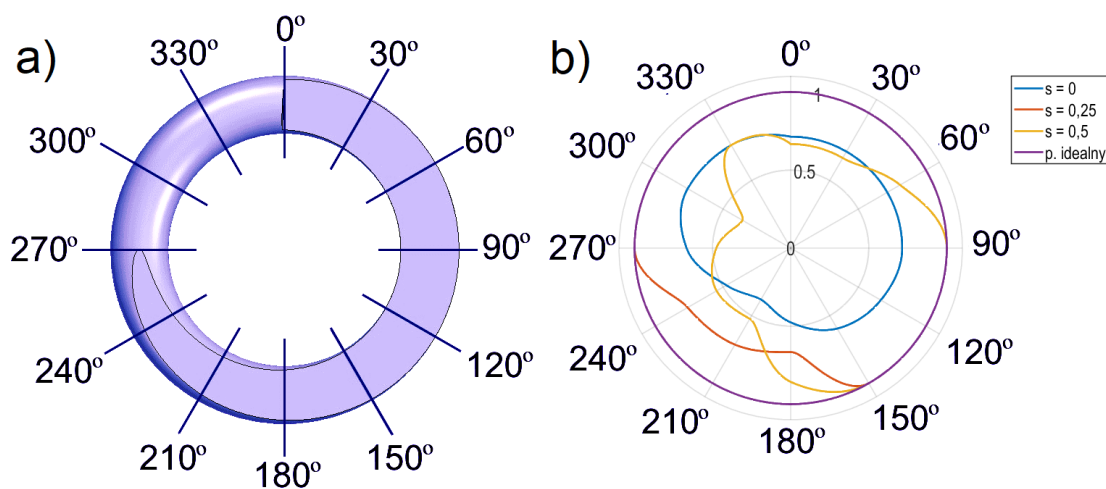
Po wykonaniu przekształceń matematycznych otrzymano zależność (6.14): pozwalającą obliczyć kąt ϑ_a :

$$\vartheta_a = \operatorname{atan} \left(\frac{\frac{R}{R+r} - \cos(\vartheta_c)}{\sin(\vartheta_c)} \right) \quad (6.14)$$

Ostatecznie, przekształcając równanie (6.2), poprzez wykorzystanie (6.5), otrzymano zależność (6.15), która jest modyfikacją równania znajdującego się w normie EN 13906-1:2013(E), dla której kąt ϑ_a oblicza się korzystając z zależności (6.14).

$$F_p \cdot \frac{h}{2} \leq F_0 \cdot \left(R \cos(\vartheta_a) - \frac{u_p}{2} \right) \quad (6.15)$$

Do badań sztywności poprzecznej w rozdziale 5 dobrano obciążenia, korzystając z zależności normowej. Jak wspomniano w kilku przypadkach doszło do oderwania podpory. Odczytano wartości ugięć dla poszczególnych kątów pomiaru, w których dochodziło do zakrzywienia charakterystyki lub jej przerywania. Następnie wyznaczono ich stosunek względem idealnej, niezagiętej charakterystyki i zamieszczono na wykresie radarowym. Na rysunku 6.5 przedstawiono przyjęty układ współrzędnych i wykres pokazujący utratę stabilności sprężyny w okolicy kątów między 180° a 330° dla sprężyny o wskaźniku $C = 5$, liczbie zwojów aktywnych $n_a = 2,5$ dla trzech długości styku zwojów biernych, przy ugięciu osiowym równym 25% prześwitu sprężyny.



Rys. 6.5. Wyniki badań utraty stabilności sprężyny w warunkach pracy poprzecznej: a) przyjęty układ współrzędnych patrząc od strony zginanej, b) względne ugięcie do czasu zgięcia charakterystyki dla sprężyny $C = 5$, $n_a = 2,5$ dla trzech długości styku zwojów biernych i zaznaczonym poziomem charakterystyki idealnej.

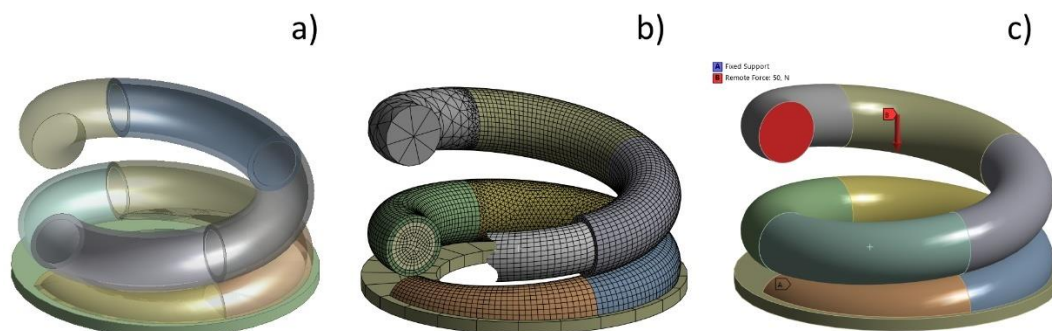
Przedstawiony przypadek sprężyn z rysunku 6.5 był najbardziej jaskrawym przejawem utraty stabilności. W przypadku sprężyny o styku $s = 0$ nastąpiła ona dużo wcześniej, w całym zakresie do poziomu około 0,7 względem charakterystyki idealnej. W pozostałych sprężynach zjawisko to również zdarzało się sporadycznie, dla wartości kątów około $210^\circ - 270^\circ$. Układ ten wynika z wzajemnego ułożenia zwojów końcowych, których części nieszlifowane sumują się w określonych konfiguracjach. Z tego powodu

zaleca się, aby stosować sprężyny z możliwie dużym zakresem zeszlifowanym i unikać jednakowej pozycji szlifowania z obydwu stron sprężyny.

7. Wpływ kształtu zwojów końcowych na rozkład naprężeń w drucie sprężyny

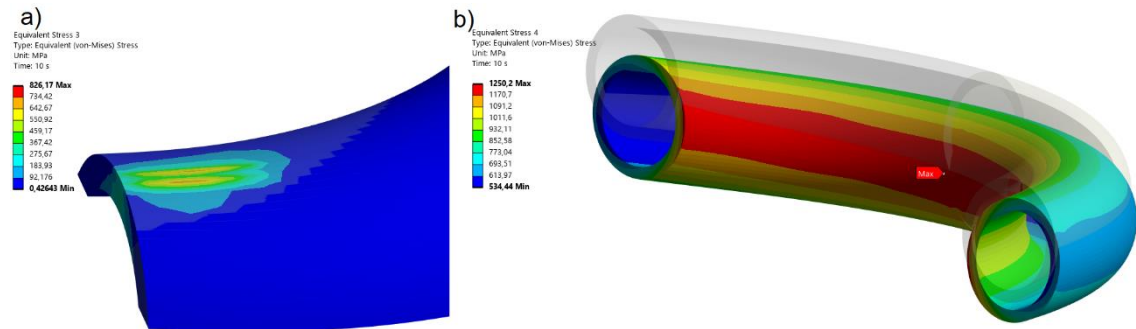
W celu zbadania wpływu ukształtowania zwojów końcowych na rozkłady naprężeń zredukowanych powstających w warunkach osiowego ściskania przeprowadzono numeryczne analizy wytrzymałościowe dla sześciu modeli sprężyn o wybranych parametrach geometrycznych. Do analiz wybrano sprężyny o wskaźniku $C = 4$, średnicy drutu $d = 1$ mm oraz kącie wzniosu linii śrubowej $\gamma = 10^\circ$. Modele sprężyn różniły się długością styku zwoju biernego z czynnym – przyjęto 2 wartości: styk punktowy oraz styk o długości 0,25 obwodu zwoju, a także wartością kąta przejścia φ_{wyr} dla którego przyjęto trzy wartości: $22,5^\circ$, 45° oraz 90° .

Na rysunku 7.1 przedstawiono etapy przygotowania modeli do analiz, na przykładzie sprężyny o styku 0,25 oraz kącie przejścia $\varphi_{wyr} = 45^\circ$. Modele bryłowe sprężyn zmodyfikowano, tak aby zewnętrzna warstwa drutu stanowiła osobne bryły, co umożliwiło przeprowadzenie poprawnej dyskretyzacji modelu. Do dyskretyzacji modelu użyto elementów drugiego stopnia, a tam gdzie konieczna jest wysoka dokładność obliczeń zastosowano siatkę z elementów sześciennych. Rozmiar elementów tworzących zewnętrzną warstwę drutu wynosił 0,078 mm co odpowiada 40 elementom na obwodzie. Współczynniki tarcia pomiędzy zwojami oraz pomiędzy sprężyną a podporą przyjęto tak jak poprzednio, odpowiednio 0,18 oraz 0,5. Jakość siatki ES sprawdzano parametrem skośności, którego średnia wartość dla wszystkich modeli była zbliżona do 0,25. Zgodnie z rysunkiem 7.1.c, dolna podpora była utwierdzana, natomiast do swobodnego końca sprężyny oznaczonego kolorem czerwonym przykładano narastające w pięciu kolejnych krokach obciążenie o wartości 50 N, którego punkt zaczepienia znajdował się na osi sprężyny. Taki sposób zadania obciążenia pozwolił na wiarygodne odwzorowanie typowych warunków pracy sprężyny naciskowej.

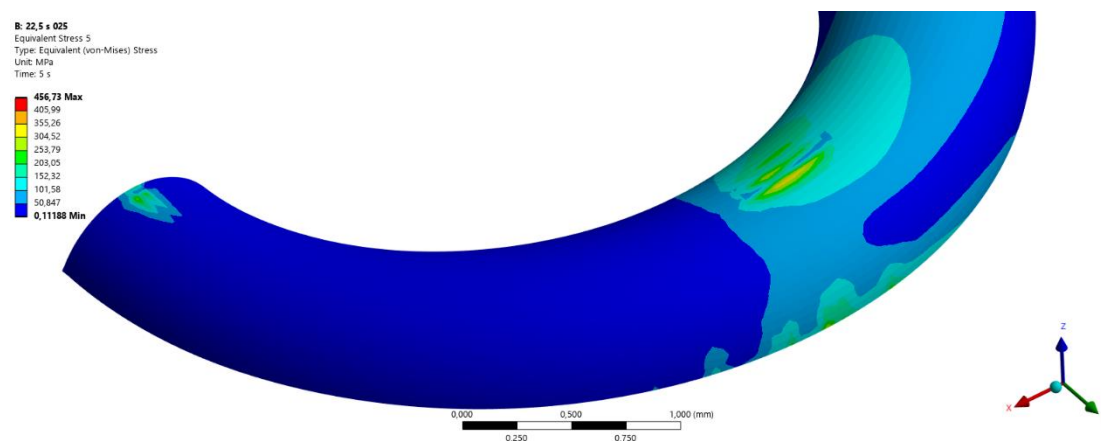


Rys. 7.1. a) Model bryłowy sprężyny, b) widok siatki elementów skończonych, c) warunki brzegowe

W wyniku przeprowadzonych symulacji uzyskano wartości naprężeń Hubra Misesa Hencky’ego (HMH) mierzone globalnie, na zwojach stykających się oraz na zwoju aktywnym. Ponadto odnotowano wyniki nacisków w styku zwojów. Rozkład naprężeń HMH na powierzchni zwojów biernych i czynnych dla sprężyny o styku punktowym i kącie przejścia równym $22,5^\circ$ przedstawiono na rysunku 7.2. Natomiast rysunek 7.3 przedstawia zmianę rozkładu naprężeń w styku zwojów biernych dla styku $s = 0,25$.

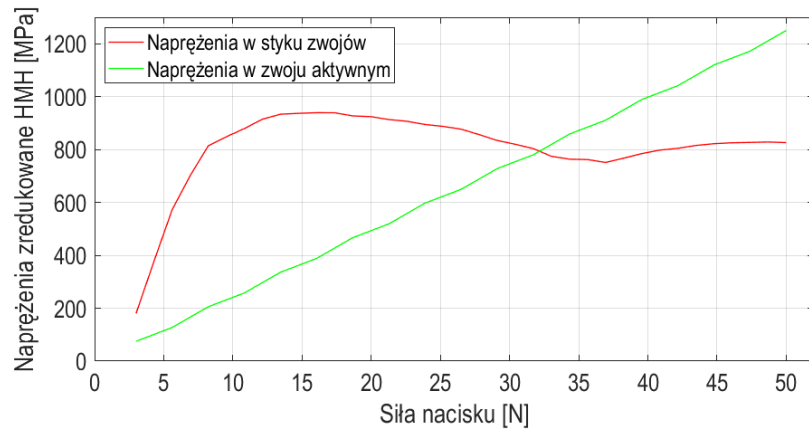


Rys. 7.2. Naprężenia HMH w sprężynie o styku punktowym i kącie przejścia $\varphi_{wyr} = 22,5^\circ$ w zwoju: a) biernym, stykającym się, b) aktywnym

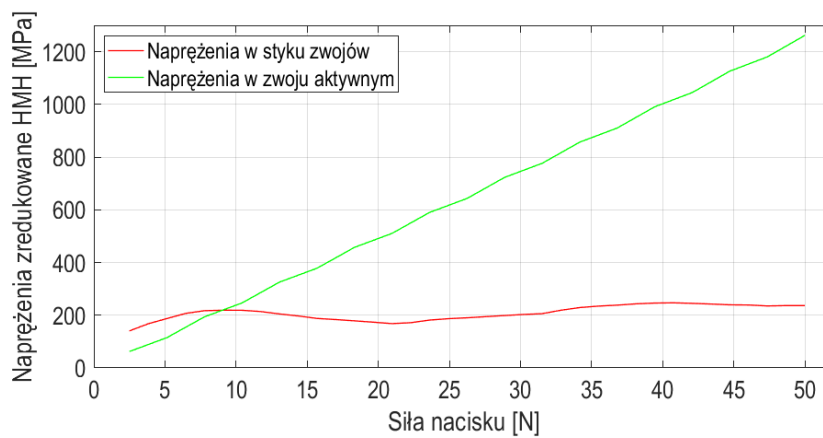


Rys. 7.3. Naprężenia HMH na powierzchni stykowej zwoju biernego w sprężynie o styku ćwiartkowym ($s = 0,25$) i kącie przejścia $\varphi_{wyr} = 22,5^\circ$

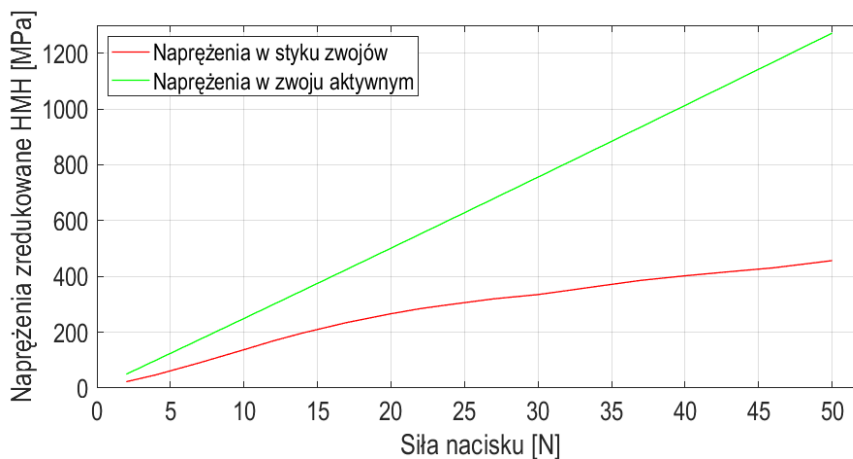
Na rysunku 7.2a widoczny jest rozkład naprężeń charakterystyczny dla kontaktu zwojów sprężyn o styku punktowym, gdzie główna koncentracja naprężeń występuje blisko krawędzi zwoju. Na rysunku 7.3 dla zwoju o styku ćwiartkowym widoczne są dwa punkty koncentracji naprężeń – jeden przy krawędzi, a drugi w miejscu zakończenia kontaktu między zwojami. Większe naprężenia uzyskiwano dla drugiego z wymienionych obszarów. Wybrane rozkłady naprężeń zestawiono na rysunkach 7.4 – 7.6, rozróżniając naprężenia w zwoju stykającym się oraz naprężenia w zwoju aktywnym.



Rys. 7.4. Wykres zależności naprężeń HMH dla sprężyny o styku punktowym i kącie przejścia równym $22,5^\circ$



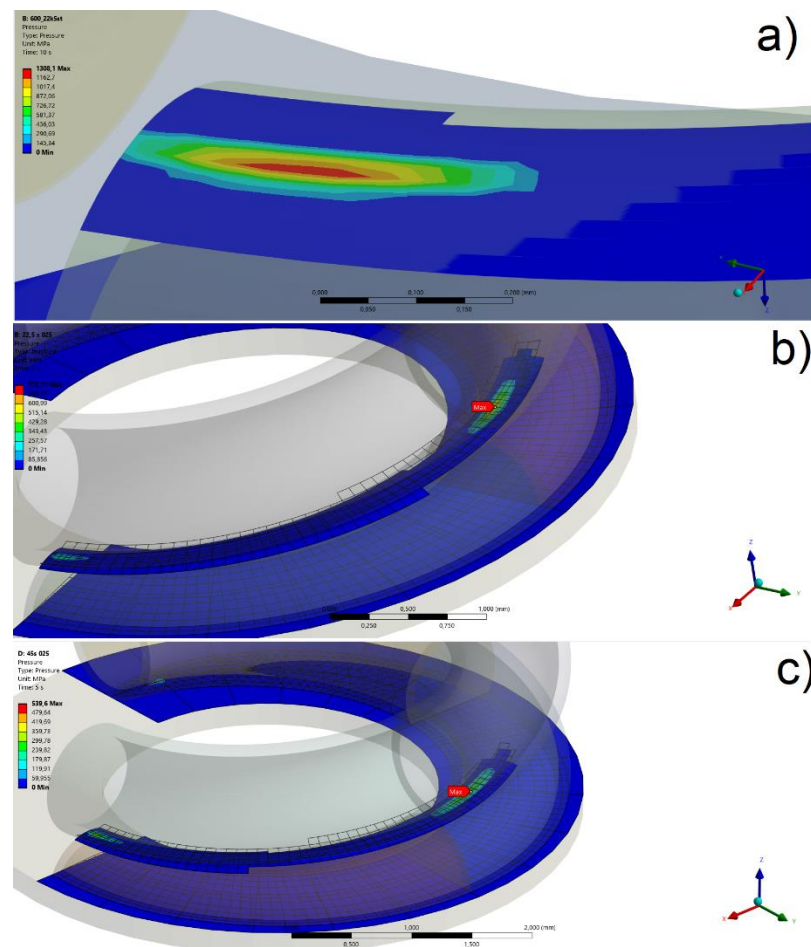
Rys. 7.5. Wykres zależności naprężeń HMH dla sprężyny o styku punktowym i kącie przejścia równym 90°



Rys. 7.6. Wykres zależności naprężeń HMH dla sprężyny o styku ćwiartkowym $s = 0,25$ i kącie przejścia równym $22,5^\circ$

Wyniki badań z powyższych rysunków pokazały, że w początkowym etapie ściskania naprężenia zredukowane HMH w styku zwojów biernych rosną nieliniowo i mogą być większe niż naprężenia zredukowane w zwojach aktywnych, w bliskiej odległości od styku. Naprężenia te mogą powodować pęknięcie zwoju nad punktem styku,

co wykazywała publikacja (Zhou i in., 2020). Zmniejszenie tego zakresu jest możliwe dzięki zastosowaniu większego kąta przejścia lub dłuższego styku zwojów biernych, dla których nie odnotowano tego zjawiska zgodnie z rysunkiem 7.6. Wydłużenie długości styku wpływało również pozytywnie na wartości nacisków powierzchniowych z powodu powstawania dwóch punktów podparcia – na końcu zwoju i na końcu styku od strony zwojów aktywnych. Zmniejszenie nacisków pokazano na rysunku 7.7 dla 3 modeli sprężyn.



Rys. 7.7. Naciski powierzchniowe w styku zwojów końcowych dla sprężyny: a) $s = 0$, $\varphi_{wyr} = 22,5^\circ$, b) $s = 0,25$, $\varphi_{wyr} = 22,5^\circ$, c) $s = 0,25$, $\varphi_{wyr} = 45^\circ$

Dla sprężyny o styku punktowym i kącie przejścia $22,5^\circ$ uzyskano maksymalną wartość nacisków powierzchniowych równą 1308,1 MPa (rys. 7.7.a). Natomiast zwiększając długość styku do 0,25 uzyskano zmniejszenie nacisków do 772,7 MPa (rys. 7.7.b). Poprawienie modelu poprzez zwiększenie kąta przejścia dodatkowo zmniejszyło naciski do 539,6 MPa. Wobec tego wnioskiem z analizy nacisków powierzchniowych jest to, że każde zwiększenie powierzchni, ograniczające punkty koncentracji naprężeń skutkuje zmniejszeniem wartości nacisków, co pozytywnie przekłada się na eksploatację sprężyn, ograniczając ich pękanie w okolicy zwojów końcowych.

8. Podsumowanie

W pracy przedstawiono analizę wpływu ukształtowania zwojów końcowych na wybrane właściwości eksploatacyjne sprężyn śrubowych. Badania prowadzono metodami eksperymentalnymi, numerycznymi oraz analitycznymi. Pozwoliły one m.in. na opracowanie nowych modeli obliczeniowych oraz weryfikację dotychczas istniejących, w odniesieniu do zagadnień sztywności osiowej, rozkładu sztywności poprzecznych, reakcji poprzecznych przy osiowym ściskaniu sprężyny, oraz stabilności jej podparcia przy pracy poprzecznej. Analizie poddano również wpływ ukształtowania zwojów końcowych na rozkłady naprężeń w materiale sprężyny.

Do najważniejszych wyników pracy należy zaliczyć:

1. Opracowanie nowego narzędzia, umożliwiającego generowanie geometrii sprężyn śrubowych naciskowych o kontrolowanych parametrach strefy przejściowej pomiędzy zwojami czynnymi a biernymi. Umożliwia ono wprowadzanie zmian parametrów strefy przejściowej przy ustalonej wysokości całkowitej sprężyny, lub przy ustalonej wartości kąta wzniosu linii śrubowej zwojów aktywnych. Narzędzie to może być zaimplementowane w dowolnym oprogramowaniu CAD posiadającym interfejs programowania aplikacji (API).
2. Wykazanie, że znane z literatury zależności opisujące sztywność osiową sprężyn śrubowych mogą dawać wyniki różniące się między sobą o kilkadziesiąt procent, zwłaszcza w odniesieniu do sprężyn o niewielkiej liczbie zwojów aktywnych.
3. Opracowanie na podstawie wyników analiz numerycznych nowej zależności (4.29), pozwalającej z dużą dokładnością obliczyć sztywność osiową sprężyn o niewielkiej liczbie zwojów. Uzyskano średni bezwzględny błąd procentowy (MAPE) dopasowania wartości sztywności osiowych obliczonych numerycznie z bazowymi symulacjami numerycznymi równy 1,38%, co było najlepszym rezultatem na tle dotychczas znanych zależności. Weryfikacja dokładności na podstawie 8 losowo wybranych numerycznych geometrii sprężyn pokazała, że błąd prognozy sztywności osiowej osiągnął wartość MAPE równego w przybliżeniu 2%. Względem badań stanowiskowych wartość ta mieściła się w granicach od 2% do 7% w zależności od wskaźnika sprężyny.
4. Opracowanie nowej zależności (4.34) umożliwiającej obliczenie wartości siły reakcji poprzecznej, powstającej w trakcie osiowego ściskania sprężyn,

charakteryzujących się kątem przejścia $\varphi_{wyr} = 45^\circ$. Jest to pierwsza taka zależność w dostępnej literaturze. Weryfikacja jej zgodności z wynikami analiz MES na wspomnianej próbie testowej 8 losowo wybranych sprężyn wykazała dokładność powyżej 89%, co przy obecnym braku innych metod pozwalających obliczyć jej wartość jest bardzo dobrym rezultatem.

5. Opracowanie nowej zależności (4.35), pozwalającej obliczyć wartość kąta reakcji poprzecznej z dokładnością do $\pm 3^\circ$. Zależność uzupełniono specjalnie opracowaną mapą, z której można odczytać wartość tego kąta. Stanowi to innowacyjny wkład w określanie tego kąta, który jest bardzo istotny w montażu układów zawieszek kolejowych. Wykazano również, że zmiany wartości kąta przejścia φ_{wyr} w zakresie pomiędzy $22,5^\circ$ a 360° w stosunku do wartości $\varphi_{wyr} = 45^\circ$ mogą istotnie wpływać zarówno na sztywność osiową jak i reakcję poprzeczną i podjęto próbę opisu tego wpływu zależnościami (4.36) oraz (4.37).
6. Przeprowadzenie ponad 1000 testów eksperymentalnych obciążania poprzecznego sprężyn napiętych wstępnie osiowo, wykazując że rozkłady sztywności osiowej w przypadku sprężyn o niewielkiej liczbie zwojów mogą charakteryzować się znaczącą nierównomiernością, przekraczającą 25%. Wykazano, że w przypadku sprężyn o małej liczbie zwojów aktywnych rozbieżności między wynikami eksperymentu a wynikami zależności literaturowych mogą w odniesieniu do sztywności poprzecznej osiągać kilkadziesiąt procent.
7. Wykazano na podstawie eksperymentów, że zależność normowa służąca do określenia maksymalnego wychylenia poprzecznego sprężyny napiętej wstępnie osiowo bez ryzyka utraty jej stabilnego podparcia jest obciążona błędem na niekorzyść bezpieczeństwa obliczeń. Zaproponowano nową zależność (6.15), uwzględniającą rzeczywistą geometrię zwojów końcowych sprężyny i dającą znacznie dokładniejsze wyniki.
8. Wykazano, że sposób ukształtowania zwojów końcowych może determinować wytrzymałość sprężyn, co nie jest brane pod uwagę w powszechnie stosowanych metodach obliczania sprężyn śrubowych.

Literatura

1. Arslan, E., Genel, K. (2023). Failure analysis of automotive helical spring. *Engineering Failure Analysis*, 153. Dostępny: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2023.107569>
2. Baran, R., Michalczyk, K., Warzecha, M. (2025). Effect of the end coil shape of the helical compression spring on its stiffness and distribution of transverse reactions during axial loading. *Acta Mechanica et Automatica*. 19(3). Dostępny: <https://doi.org/10.2478/ama-2025-0055>
3. Baran, R., Michalczyk, K., Warzecha, M. (2023). Experimental analysis of transverse stiffness distribution of helical compression springs. *Acta Mechanica et Automatica*. 17(1): 95-103. Dostępny: <https://doi.org/10.2478/ama-2023-0011>
4. Baran, R. (2020). Przegląd wybranych konstrukcji sprężyn śrubowych naciskowych w kontekście ich właściwości eksploatacyjnych; W: Talarek, K., Maciąg, K. Rozwiązania i optymalizacje techniczne jako przedmiot badań naukowych. *Wydawnictwo Naukowe Tygiel*, Lublin
5. Bobade, R.S., Yadav, S.K. (2017). Lateral Forces in the Helical Compression Spring. *International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology*, 5(12): 2589-2593. Dostępny: https://www.researchgate.net/publication/342782816_Lateral_Forces_in_the_Helical_Compression_Spring
6. Branowski, B. (1997). Sprężyny metalowe. *Wydawnictwo Naukowe PWN*
7. Chen, L. i in. (2022). Understanding multiple parameters affecting static and dynamic performances of composite helical springs. *Journal of materials research and technology*. 20. Dostępny: <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2022.07.120>
8. China Spring Products Corp. (2025). Compression spring end types. Dostępny: <https://chinaspringcorp.com/compression-spring-end-types.html>; [dostęp: 20.07.2025]
9. Cieplik, G., Wójcik, K. (2020) Conditions for self-synchronization of inertial vibrators of vibratory conveyors in general motion. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 58(2): 513–524. Dostępny: <https://doi.org/10.15632/jtam-pl/119023>.
10. Cimolai, G., Dayyani, I., Qin, Q. (2022). Multi-objective shape optimization of large strain 3D helical structures for mechanical metamaterials. *Materials & Design*. 215. Dostępny: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2022.110444>
11. CTMS. (2020). Przesiewacze i podajniki wibracyjne. Dostępny: <https://www.ctms.com.pl/produkty/przesiewacze-i-podajniki-wibracyjne-alvibra/podajnik-wibracyjny-rurowy-typ-flexconveyor-atc/> [dostęp: 15.09.2025]
12. Elewar S.A. Przenośnik. Dostępny: <https://www.elewar.pl/images/img-gallery/wibracyjny/wibracyjny-5.JPG> przenośnik [dostęp: 15.09.2025]
13. Engineering Gone Wild. (2023). Best FREE FEA Software for Students & Engineers. Dostępny: https://www.youtube.com/watch?v=VWn_Q5_kTsY [dostęp: 19.08.2025]
14. Fatchurrohman, N., Chia, S.T. (2017). Performance of hybrid nano-micro reinforced mg metal matrix composites brake calliper: simulation approach. *IOP*

- Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 257. Dostępny: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/257/1/012060>
15. Fmic.pl. (2023). Podwójne Sprężynki i talerzyki zaworowe tytanowe BC Brian Crower BC0240 Nissan SR20VE. Dostępny: <https://fmic.pl/183140-podwojne-sprezynki-i-talerzyki-zaworowe-tytanowe-bc-brian-crower-bc0240-nissan-sr20ve-usa-bc0240.html> [dostęp: 12.09.2025]
 16. Górowski, M. (2021). Transport szynowy. Dostępny: <https://www.transportszynowy.pl/Kolej/kolopiswozki-usprezynowanie> [dostęp: 20.09.2024]
 17. Grajnert, J. i in. (1995). Izolacja drgań w maszynach i pojazdach. *Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej*. 62-67
 18. Grodzki, E. (1976). Obliczanie śrubowych sprężyn walcowych, stożkowych i paraboloidalnych w oparciu o teorię prętów zakrzywionych. *Wydawnictwo Uczelniane WSP*
 19. Gross, S. (1951). Berechnung und Gestaltung von Metallfedern. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH*
 20. Gu, Z., Hou, X., Keating, E., & Ye, J. (2020). Non-linear finite element model for dynamic analysis of high-speed valve train and coil collisions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 173. Dostępny: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105476>
 21. Gzal, M., Groper, M., Gendelman, O. (2017). Analytical, experimental and finite element analysis of elliptical cross-section helical spring with small helix angle under static load. *ScienceDirect, International Journal of Mechanical Sciences*. 130, 476-486
 22. Haringx, J.A. (1949). On Highly Compressible Helical Springs and Rubber Rods, and their Application for Vibration-Free Mountings. *Philips research reports*. 4, 49–80
 23. Kato, H., Suzuki, H. (2021). Nonlinear deflection analysis of helical spring in elastic–perfect plastic material: Application to the plastic extension of piano wire spring. *Mechanics of Materials*.160. Dostępny: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2021.103971>
 24. Kobelev, V. (2014). Effect of Static Axial Compression on the Natural Frequencies of Helical Springs. *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures*. 10, 379–398. Dostępny: <https://doi.org/10.1108/MMMS-12-2013-0078>
 25. Kobelev, V. (2018). Durability of Springs, *Springer*, Nowy Jork, 215-227
 26. Kreatorzone. (2024). Top Free Software for Finite element analysis FEA | Opensource tools for Mechanical Engineering. Dostępny: https://www.youtube.com/watch?v=fObZmAh_DzQ [dostęp: 20.08.2025]
 27. Krismar: Agregat Landstal: Dostepny: <https://www.krismar.net/agregat-podorywkowy-apn-zabezpieczenie-non-stop-landstal> [dostęp: 02.09.2025]
 28. Kumbhalkar, M.A., Bhope, D.V., Vanalkar, A.V., Chaoji, P.P. (2018). Failure Analysis of Primary Suspension Spring of Rail Road Vehicle, *J Fail. Anal. and Preven.* 18: 1447–1460. Dostępny: <https://doi.org/10.1007/s11668-018-0542>
 29. Let's Grow Up: Pojazdy Kolejowe; dostepny: <https://www.youtube.com/@LetsGrowUp> [dostęp: 20.09.2025]

30. Libermann, K.(2006). Optimierung von Schraubendruckfedern. Seminar Kaltgeformte Federn - Vortrag 10. Technische Akademie Esslingen. Ostfildern-Nellingen. Dostępny: https://www.db-thueringen.de/servlets/MCRFileNodeServlet/dbt_derivate_00010614/TAE2006_L.pdf
31. Ling, L., Li, W., Foo, E., Wu, L., Wen, Z., Jin, X. (2017). Investigation into the Vibration of Metro Bogies Induced by Rail Corrugation. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*. 30(1), 93-102
32. Liu, H, Kim, D. (2009). Effects of end Coils on the Natural Frequency of Automotive Engine Valve Springs. *International Journal of Automotive Technology*.10(4), 413–420. Dostępny: <https://doi.org/10.1007/s12239-009-0047-8>
33. Meissner, M., Schrocht, H.J. (2007). Metallfedern. Grundlagen, Werkstoffe, Berechnung, Gestaltung und Rechnereinsatz. *Springer Berlin Heidelberg*. Dostępny: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-39123-1>
34. Mesco. (2023). Poprawa jakości symulacji z uwzględnieniem kontaktu. Dostępny: <https://mesco.com.pl/poprawa-jakosci-symulacji-z-uwzlednieniem-kontaktu/> [dostęp: 09.06.2025]
35. Michalczyk, K., Sikora, W. (2017). Analysis of the influence of parameters of elastomeric layer in shock-absorbing holder of helical spring on its dynamic and static properties. W: Awrejcewicz J i in. *Engineering dynamics and life sciences. DSTA*. 2017, 355-364. Dostępny: <https://doi.org/10.34658/9788393531240>
36. Michalczyk, K., Warzecha, M., Baran, R. (2023). A new method for generating virtual models of nonlinear helical springs based on a rigorous mathematical model. *Applied Computer Science*. 19(2), 96–111. Dostępny: <https://doi.org/10.35784/acs-2023-17>
37. Mubea. Uchwyt sprężyn. Dostępny: <https://www.mubea.com/zh-hans/node/275> uchwyt sprężyny [dostęp: 20.07.2025]
38. Ofierzyński, M., Sobczak, M. (1975). Poprzeczna praca cylindrycznych sprężyn śrubowych w ujęciu charakterystyk mechanicznych. *Pojazdy szynowe*. 1, 33-40
39. Özgün. (2023). Ansys Mesh Metrics Explained. Mechead – engineering, analysis, design. Dostępny: <https://www.mechead.com/mesh-quality-checking-ansys-workbench/> [dostęp: 20.07.2025]
40. Paredes, M. (2016). Enhanced Formulae for Determining Both Free Length and Rate of Cylindrical Compression Springs. *Journal of Mechanical Design*. 138(2). Dostępny: <https://doi.org/10.1115/1.4032094>
41. Pijper, R.J.M, Slot, H.M. (2020). Friction coefficient for steel to steel contact surfaces in air and seawater. *Journal of Physics: Conference Series*. 1669. Dostępny: <https://doi:10.1088/1742-6596/1669/1/012002>
42. Piekaj, P., Cieplak, G. (2021). Experimental tests of the antiresonance vibratory mill of a sectional movement trajectory. *Open Engineering*. 11, 1180–1184. Dostępny: <https://doi.org/10.1515/eng-2021-0116>
43. Polski Komitet Normalizacyjny. (2013). Cylindrical helical springs made from round wire and bar - calculation and design - part 1: compression springs, EN 13906-1:2013(E)
44. Polski Komitet Normalizacyjny. (2003). Railway applications - suspension components - helical suspension springs, steel, EN 13298:2003

45. Polski Komitet Normalizacyjny. (1993). Technical product documentation - springs - part 2: Presentation of data for cylindrical helical compression springs, ISO 2162-2:1993(E)
46. PTC. (2025). About Springs. Dostępny: https://support.ptc.com/help/creo/creo_pma/r11.0/usascii/index.html#page/simulate/simulate/springs_top.html [dostęp: 25.09.2025]
47. Romaniszyn, Z., Oramus, Z., Nowakowski, Z. (1989). Podwozia trakcyjnych pojazdów szynowych. *Wydawnictwa Komunikacji i Łączności*
48. Sobaś, M. (2014). Analysis of the Suspension of Freight Wagons Bogies Type Y25. *Pojazdy Szynowe*. 3, 33–44
49. Sobaś, M. (2009). Wózek 11 ANc dla wagonu osobowego przeznaczonego do wysokich prędkości. *Pojazdy Szynowe*. 3, 329-334
50. Timoshenko, S.P., Gere, J.M. (1961). Theory of Elastic Stability. *Dover Publications*. Nowy Jork
51. Vogt, R.F. (1934). Number of active coils in helical springs. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*. 56(4), 467-476. Dostępny: https://cybra.lodz.pl/Content/6327/RP_56_4.pdf
52. Wahl, A., M. (1944). Mechanical Springs. *Penton Publishing Company*. Dostępny: [http://hdl.handle.net/2027/uc1.\\$b76475](http://hdl.handle.net/2027/uc1.$b76475)
53. Witkowski, S. (2011). Sprężyny śrubowe w samochodowych układach zawieszenia. Dostępny: <https://autokult.pl/sprezyny-srubowe-w-samochodowych-ukladach-zawieszenia,6808011416303745a> [dostęp: 19.06.2025]
54. Wittek, A.M., Łazarz, B. (2020). Elementy sprężyste zawiesznień pojazdów samochodowych. *Wydawnictwo Politechniki Śląskiej*
55. Wójcik, A. (1979). Zagadnienia materiałowe, technologiczne i konstrukcyjne w produkcji stalowych sprężyn śrubowych. *Instytut Mechaniki Precyzyjnej. Branżowy Ośrodek Informacji Naukowo-Technicznej i Ekonomicznej*
56. Yang, C.-J., Zhang, W.H., Ren, G.X., & Liu, X.-Y. (2014). Modeling and dynamics analysis of helical spring under compression using a curved beam element with consideration on contact between its coils. *Meccanica*, 49, 907–917. Springer. Dostępny: <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9837-1>
57. Yetgin, A. (2024). Failure analysis of a helical compression spring with relatively low spring index. *Engineering Failure Analysis*. 165. Dostępny: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2024.108798>
58. Yıldırım, V. (2016). Exact Determination of the Global Tip Deflection of both Close-Coiled and Open-Coiled Cylindrical Helical Compression Springs having Arbitrary Doubly-Symmetric Cross-Sections. *International Journal of Mechanical Sciences*. 115–116, 280–298. Dostępny: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.06.022>
59. Zbierski, K., Smoczyński, M. (2007). Rozrząd bezkrzywkowy czterosuwowego silnika spalinowego na tle rozrządu krzywkowego. *Archiwum Motoryzacji*. 3, 247-271
60. Zhi-Wei, Y., Xiao-Lei X. (2009). Failure Analysis on Diesel-Engine Valve Springs. *Springer, J Fail. Anal. and Preven.* 9, 329-334

61. Zhou, C. i in. (2020). An Investigation of Abnormal Vibration – Induced Coil Spring Failure in Metro Vehicles. *Engineering Failure Analysis*. 108. Dostępny: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2019.104238>
62. Żukowski, S. (1954). Sprężyny. *Państwowe Wydawnictwa Techniczne*.