



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

DZIEDZINA NAUK ŚCISŁYCH I PRZYRODNICZYCH  
DYSCYPLINA MATEMATYKA

## ROZPRAWA DOKTORSKA

Zastosowania i własności  
nawiasu Poissona pary wielomianów

Autor: Daria Holik

Promotor rozprawy: dr hab. Marek Karaś

Praca wykonana: Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica  
Wydział Matematyki Stosowanej  
Katedra Statystyki Matematycznej, Analizy Danych  
i Matematyki Finansowej

Kraków, 2025

*Składam najserdeczniejsze podziękowania Panu dr hab. Markowi Karasiowi mojemu Promotorowi i Mentorowi na niekiedy zawitych ścieżkach matematycznych. Jestem niezmiernie wdzięczna za inspirujące dyskusje, udzielane rady i wskazówki oraz okazaną życzliwość, wyrozumiałość i poświęcony czas w trakcie powstawania artykułów i przygotowywania rozprawy doktorskiej. Z całego serca jeszcze raz dziękuję!*

*Bardzo dziękuję również moim kochanym Rodzicom i Najbliższym za okazane mi wsparcie, cierpliwość i niewzruszoną wiarę.*

# Spis treści

<b>Streszczenie</b> . . . . .	4
<b>Abstract</b> . . . . .	5
<b>Wstęp</b> . . . . .	6
<b>1. Preliminaria</b> . . . . .	8
1.1. Oznaczenia . . . . .	8
1.2. Kilka podstawowych pojęć . . . . .	9
<b>2. Algebry Liego i algebry Poissona</b> . . . . .	13
2.1. Algebry Liego . . . . .	13
2.2. Grupoid wolny o danym zbiorze generatorów . . . . .	17
2.3. Algebra wolna o danym zbiorze generatorów . . . . .	20
2.4. Konstrukcja algebry Liego . . . . .	27
2.5. Konstrukcja algebry Poissona . . . . .	31
<b>3. Nawias Poissona pary wielomianów</b> . . . . .	37
3.1. Własności nawiasu Poissona pary wielomianów . . . . .	37
3.2. Zbiór rozwiązań równania $[f_1^r, P_1] = [P_2, f_2^s]$ . . . . .	45
3.2.1. Zbiór rozwiązań równania $[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s]$ dla danych form liniowych $L_1, L_2$ . . . . .	45
3.2.2. Zbiór rozwiązań równania $[f_1^r, P_1] = [P_2, f_2^s]$ dla dwuwymiarowego systemu zmiennych . . . . .	51
<b>4. Pary wielomianów o niskim stopniu nawiasu Poissona</b> . . . . .	55
4.1. Zależność pomiędzy składowymi jednorodnymi pary wielomianów o niskim stopniu nawiasu Poissona . . . . .	56
4.2. Podzielność składowej $F_s$ . . . . .	65
4.3. Związek składowych $F_s$ i $F_{s-1}$ . . . . .	70
<b>5. Zastosowanie nawiasu Poissona w badaniu automorfizmów wielomiano- wych</b> . . . . .	77
5.1. Teoria Shestakova i Umirbaeva . . . . .	78
5.2. Zastosowanie nawiasu Poissona w badaniu automorfizmów typu tame . . . . .	80
5.3. Przypadek $(7, 8, 12)$ i $p$ -hipoteza . . . . .	84
<b>Zakończenie</b> . . . . .	88
<b>Spis definicji</b> . . . . .	89
<b>Bibliografia</b> . . . . .	90

# Streszczenie

Przedmiotem rozprawy jest nawias Poissona pary wielomianów, który może być rozumiany jako następująca suma  $[f, g] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) [x_i, x_j]$ . W celu podania formalnej definicji rozważanego nawiasu Poissona, przedstawiona została również konstrukcja wolnej algebry Poissona o wolnym zbiorze generatorów.

W niniejszej dysertacji zajmujemy się pokrótce podstawowymi własnościami nawiasu Poissona pary wielomianów, ale główny nacisk jest położony na jego zastosowania. Inspiracją do rozważań nad tym obiektem były prace [27, 28] oraz teoria Shestakova-Umirbaeva [29, 30, 31], w której istotną rolę odgrywa stopień nawiasu Poissona pary wielomianów, a także rozważania dotyczące badania wielostopni automorfizmów wielomianowych przestrzeni  $k^3$  [15].

Wykorzystując przedstawione własności podajemy pełny opis zbioru rozwiązań równania  $[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s]$  dla danych form liniowych  $L_1, L_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$  oraz  $r, s \in \mathbb{N}_+$ .

Ważnym z punktu widzenia zastosowań nawiasu Poissona jest podanie jawnych wzorów na składowe jednorodnie wielomianu  $G$  przy pomocy składowych jednorodnych wielomianu  $F$  przy założeniu, że stopień nawiasu Poissona pary  $F, G$  jest odpowiednio niski. Prezentujemy również relację pomiędzy składowymi jednorodnymi stopni  $\deg F - 1$  oraz  $\deg F - 2$  wielomianu  $F$ , jak i pewne wyniki dotyczące podzielności składowej jednorodnej stopnia  $\deg F - 1$  przez pewien wielomian związany z formami wiodącymi wielomianów  $F$  i  $G$ .

Kolejnym ważnym aspektem, jest zastosowanie nawiasu Poissona w badaniu wielostopni automorfizmów wielomianowych. W tym kontekście, uwagę poświęciliśmy kwestii istnienia hipotetycznego automorfizmu typu tame o wielostopniu  $(7, 8, 12)$ , co związane jest z ewentualną prawdziwością tak zwanej  $p$ -hipotezy dla  $p = 7$ . Dowodzimy również, że  $p$ -hipoteza nie jest prawdziwa, gdy  $p$  jest liczbą złożoną.

## Słowa kluczowe

nawias Poissona pary wielomianów, stopień nawiasu Poissona, pierścień wielomianów, automorfizm wielomianowy, automorfizm typu tame, automorfizm typu wild, teoria Shestakova-Umirbaeva, wielostopień, algebra Poissona, algebra Liego

# Abstract

The subject of the dissertation is the Poisson bracket of a pair of polynomials, which can be understood as the following sum  $[f, g] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) [x_i, x_j]$ . In order to provide a formal definition of the considered Poisson bracket, the construction of a free Poisson algebra on a free set of generators is presented.

In this dissertation, we briefly deal with basic properties of the Poisson bracket of a pair of polynomials, but the main emphasis is placed on its applications. The inspiration for considering this object were the works [27, 28] and the theory of Shestakov–Umirbaev [29, 30, 31], in which the degree of the Poisson bracket of a pair of polynomials plays an essential role, as well as considerations regarding the study of the multidegrees of polynomial automorphisms of the space  $k^3$  [15].

Using these properties, we give a complete description of the set of all the solutions of the equation  $[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s]$  for given linear forms  $L_1, L_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$  and  $r, s \in \mathbb{N}_+$ .

An important aspect from the point of view of applications of the Poisson bracket is to provide explicit formulas for the homogeneous components of the polynomial  $G$  using homogeneous components of polynomial  $F$ , under the assumption that the degree of the Poisson bracket of the pair  $F, G$  is sufficiently low. We also present relationships between the homogeneous components of degrees  $\deg F - 1$  and  $\deg F - 2$  of the polynomial  $F$ , as well as certain results concerning the divisibility of the homogeneous component of degree  $\deg F - 1$  by a certain polynomial associated with the leading forms of the polynomials  $F$  and  $G$ .

Another important aspect is the application of the Poisson bracket in the study of multidegrees of polynomial automorphisms. In this context, we focus on the issue of the existence of a hypothetical tame automorphism with multidegree  $(7, 8, 12)$ , which is related to the possible truth of the so-called  $p$ -hypothesis for  $p = 7$ . We also prove that the  $p$ -hypothesis is not true when  $p$  is a composite number.

## Keywords

Poisson bracket of a pair of polynomials, degree of Poisson bracket, polynomial ring, polynomial automorphism, tame automorphism, wild automorphism, Shestakov–Umirbaev theory, multidegree, Poisson algebra, Lie algebra

# Wstęp

Rozważania zawarte w rozprawie koncentrują się wokół nawiasu Poissona rozpatrywanego dla pary wielomianów. Obiekt ten wywodzi się z teorii dotyczącej algebr Liego i algebr Poissona, ale może też być zdefiniowany jako następująca suma

$$[f, g] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) [x_i, x_j],$$

gdzie  $[x_i, x_j]$  dla  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  traktujemy jako wyrażenie formalne spełniające warunek antysymetryczności  $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$  dla dowolnych  $i, j$ .

Nawias Poissona pary wielomianów jest pożytecznym narzędziem między innymi w badaniu automorfizmów wielomianowych. W słynnej Księdze Szkockiej [23], Mazur i Orlicz postawili pytanie (Problem 79) dotyczące postaci odwracalnego odwzorowania wielomianowego i związku ze stopniami jego składowych. Dokładniej można je wyrazić w następujący sposób: czy każdy automorfizm wielomianowy  $F$  przestrzeni  $\mathbb{C}^n$  ma wielostopień  $\text{mdeg } F = (1, \dots, 1)$ ? Oczywiście wiemy, że odpowiedź na powyższe pytanie jest negatywna, gdy  $n > 1$  oraz pozytywna dla  $n = 1$ . Co więcej, w Księdze Szkockiej można znaleźć przykład automorfizmu, którego wielostopień nie jest ciągiem złożonym z samych jedynek.

Z twierdzenia Junga i van der Kulka uzyskujemy informację, że wszystkie automorfizmy wielomianowe przestrzeni  $k^2$  są tak zwanymi automorfizmami typu tame. Natomiast w teorii Shestakova-Umirbaeva, pojawia się twierdzenie dotyczące charakteryzacji automorfizmów typu tame przestrzeni  $k^3$ . Przedstawili oni również dowód, że automorfizm Nagaty nie jest automorfizmem typu tame. Do dzisiaj nic nie wiadomo na temat istnienia automorfizmów, które nie są typu tame, przestrzeni  $k^n$ , gdzie  $n \geq 4$ .

Niniejsza rozprawa jest zredagowana w następujący sposób. Rozdziały 1 i 2 mają charakter przygotowawczy. Rozdział 2 zamieszczamy tylko i wyłącznie po to, żeby przedstawić konstrukcję wolnej algebry Poissona, w której można zanurzyć pierścień wielomianów i formalnie zdefiniować nawias Poissona pary wielomianów.

W podrozdziale 3.1 pokazujemy, że nawias Poissona pary wielomianów można rozpatrywać bez konieczności zagłębiania się w materiał z rozdziału 2 oraz podajemy jego pewne własności użyteczne w dalszych częściach pracy. Następnie, w podrozdziale 3.2,

którego wyniki pochodzą z pracy [6], przechodzimy do zastosowania przedstawionych własności w celu podania pełnego opisu zbioru rozwiązań równania

$$[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s],$$

gdzie  $L_1, L_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$  są danymi formami liniowymi,  $r, s \in \mathbb{N}_+$  danymi stałymi, a  $(P_1, P_2) \in k[x_1, \dots, x_n]^2$  poszukiwaną parą wielomianów. Dalej uogólniamy powyższe wyniki opisując zbiór rozwiązań równania  $[f_1^r, P_1] = [P_2, f_2^s]$  dla pary  $(f_1, f_2)$ , która jest dwuwymiarowym systemem zmiennych w  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Rozważania te były zainspirowane pracą Nowickiego [27], w której rozpatrywane jest równanie  $[f, g] = 0$ , gdzie  $f, g \in k[x_1, x_2]$ .

Rozdział 4 jest głównym rozdziałem rozprawy. Składa się z trzech podrozdziałów. Wyniki w nim zawarte pochodzą z pracy [7]. Mając dane dwa wielomiany  $F, G \in k[x_1, \dots, x_n]$  zmiennych  $x_1, \dots, x_n$  nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zero, w podrozdziale 4.1, przedstawiamy związki między  $F$  i  $G$ , gdy ich nawias Poissona ma odpowiednio niski stopień. Okazuje się, że przy tym założeniu istnieją silne zależności pomiędzy składowymi jednorodnymi wielomianów  $F$  i  $G$  (patrz twierdzenia 4.5 i 4.6). Wyniki te uogólniają wyniki z pracy [28]. Co więcej, w podrozdziale 4.2, uzyskujemy informację o podzielności składowej jednorodnej stopnia  $\deg F - 1$  wielomianu  $F$  przez pewien wielomian jednorodny  $h$ , lub jego potęgę, gdzie  $h$  jest taki, że formy wiodące wielomianów  $F$  i  $G$  są z dokładnością do czynnika stałego potęgami  $h$  (patrz twierdzenia 4.7 i 4.12). Istnienie takiego wielomianu  $h$  wynika z założenia, że  $\deg[F, G] < \deg F + \deg G$ . W przypadku, gdy  $\deg h > 1$ , analogiczne wyniki uzyskujemy przy założeniu, że wielomian  $h$  jest bezkwadratowy (patrz twierdzenie 4.15). Następnie w podrozdziale 4.3 prezentujemy związki między składowymi jednorodnymi wielomianu  $F$  stopni  $\deg F - 1$  i  $\deg F - 2$  (patrz twierdzenia 4.20 i 4.22).

Ostatnim rozdziałem rozprawy jest rozdział 5, w którym pokrótce przypominamy teorię Shetakova-Umirbaeva dotyczącą automorfizmów typu tame przestrzeni  $k^3$ . Następnie przedstawiamy wyniki dotyczące zagadnienia, czy pewne uporządkowane trójki są realizowane jako wielostopnie automorfizmów typu tame. W tym kontekście, przywołujemy również tak zwaną  $p$ -hipotezę (patrz hipoteza 5.14). W wynikach tych korzystamy z wyżej wspomnianej teorii, w której zasadniczą rolę pełni nawias Poissona pary wielomianów. Na zakończenie przedstawiamy rozważania dotyczące istnienia hipotetycznego automorfizmu typu tame o wielostopniu  $(7, 8, 12)$ , co związane jest z ewentualną prawdziwością  $p$ -hipotezy dla  $p = 7$  (patrz twierdzenie 5.22). Prezentujemy również twierdzenia pokazujące, że  $p$ -hipoteza nie jest prawdziwa, gdy  $p$  jest liczbą złożoną (patrz twierdzenia 5.24 i 5.25).

---

# Rozdział 1

---

## Preliminaria

### 1.1. Oznaczenia

Zacznijemy od wprowadzenia podstawowych oznaczeń, którymi będziemy się posługiwać w dalszej części pracy. Standardowo przez  $\mathbb{N}$  będziemy oznaczać zbiór liczb naturalnych wraz z zerem, przez  $\mathbb{Z}$  - zbiór liczb całkowitych, natomiast przez  $\mathbb{C}$  - ciało liczb zespolonych. Przyjmujemy również, że:

$k$	- ciało (zazwyczaj charakterystyki zero),
$k^*$	- grupa elementów odwracalnych ciała $k$ ,
$k^n$	- $n$ wymiarowa przestrzeń liniowa nad ciałem $k$ (iloczyn kartezjański $n$ kopii zbioru $k$ ),
$X$	- zestaw zmiennych $x_1, \dots, x_n$ (z wyjątkiem rozdziału 2),
$k[X] = k[x_1, \dots, x_n]$	- pierścień wielomianów $n$ zmiennych o współczynnikach z ciała $k$ , gdy $n = 2$ lub $n = 3$ czasami będziemy pisać $k[x, y]$ lub $k[x, y, z]$ ,
$k(X) = k(x_1, \dots, x_n)$	- ciało funkcji wymiernych,
$k[x_1, \dots, x_n]_d$	- zbiór $\{h \in k[x_1, \dots, x_n] \mid \deg h = d, h - \text{wielomian jednorodny}\} \cup \{0\}$ ,
$f_d$	- (zazwyczaj) składowa jednorodna stopnia $d$ wielomianu $f$ ,
$\bar{f}$	- (zazwyczaj) składowa jednorodna najwyższego stopnia lub inaczej forma wiodąca wielomianu $f$ ,
$\text{supp } f$	- nośnik wielomianu $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha x^\alpha$ , to znaczy zbiór $\{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid a_\alpha \neq 0\}$ ,
$\deg f$	- standardowy stopień wielomianu $f$ ,
$\deg_{x_i} f$	- stopień wielomianu $f$ ze względu na zmienną $x_i$ ,
$\deg_w f$	- stopień wagowy wielomianu $f$ ,
$\text{trdeg}_k k(f_1, \dots, f_r)$	- stopień transcendentny $k(f_1, \dots, f_r)$ nad $k$ ,
$\text{mdeg } F$	- wielostopień odwzorowania wielomianowego $F$ ,
$\text{End}_k(L)$	- zbiór wszystkich endomorfizmów $k$ -liniowych przestrzeni $L$ ,
$\text{Der}_k(A)$	- zbiór wszystkich $k$ -różniczkowań $k$ -algebry $A$ ,
$\text{nwd}(a, b)$	- największy wspólny dzielnik liczb $a, b \in \mathbb{Z}$ ,
$\text{nww}(a, b)$	- najmniejsza wspólna wielokrotność liczb $a, b \in \mathbb{Z}$ ,

$a \equiv b \pmod{d}$	– $a$ przystaje do $b$ modulo $d$ , to znaczy, że $d \mid (a - b)$ , gdzie $a, b, d \in \mathbb{Z}$ ,
$a \not\equiv b \pmod{d}$	– $a$ nie przystaje do $b$ modulo $d$ , to znaczy, że $d \nmid (a - b)$ , gdzie $a, b, d \in \mathbb{Z}$ ,
$M(n, m; R)$	– zbiór macierzy wymiaru $n \times m$ o wyrazach z pierścienia $R$ ,
$(\ )^T, [ \ ]^T$	– wektor, macierz transponowana,
$\text{rz}[ \ ]$	– rząd macierzy $[ \ ]$ ,
$\det[ \ ]$	– wyznacznik macierzy $[ \ ]$ ,
$\#S$	– liczba elementów zbioru $S$ .

## 1.2. Kilka podstawowych pojęć

W tym podrozdziale pokrótce postaramy się przypomnieć elementarne pojęcia, przydatne w dalszej części pracy. Standardowo dla  $f = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ , gdzie tylko skończenie wiele  $a_\alpha$  jest niezerowych przyjmujemy  $\deg f := \max\{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \mid 0 \neq a_\alpha \in k\}$  oraz  $\deg f := -\infty$ , gdy  $f = 0$ . Ponadto wielomian  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ , będziemy nazywać *wielomianem jednorodnym*, jeśli wszystkie jego jednomiany  $a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ ,  $a_\alpha \neq 0$ , są tego samego stopnia. Pierścień wielomianów  $k[x_1, \dots, x_n]$  dzięki funkcji stopnia można wyposażyć w gradację:  $k[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} k[x_1, \dots, x_n]_d$ , gdzie  $k[x_1, \dots, x_n]_d$  jest przestrzenią liniową nad ciałem  $k$  generowaną przez jednomiany postaci  $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = d$ .

Niech  $\Gamma$  będzie zbiorem liczb całkowitych lub rzeczywistych oraz niech  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \Gamma^n$ , gdzie  $w_i \geq 0$  dla  $i = 1, \dots, n$ . Pierścień wielomianów  $k[x_1, \dots, x_n]$  nad ciałem  $k$  można również wyposażyć w gradację wagową w następujący sposób:

$$k[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} k[x_1, \dots, x_n]_\gamma,$$

gdzie  $k[x_1, \dots, x_n]_\gamma$  jest przestrzenią liniową nad ciałem  $k$  generowaną przez jednomiany postaci  $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n = \gamma$ . Dla wielomianu  $f = \sum_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma$ , gdzie  $f_\gamma \in k[x_1, \dots, x_n]_\gamma$  jest składową jednorodną stopnia  $\gamma$  tego wielomianu, przez  $\deg_{\mathbf{w}} f$  będziemy oznaczać stopień wagowy  $f$ , czyli  $\deg_{\mathbf{w}} f := \max\{\gamma \in \Gamma \mid f_\gamma \neq 0\}$ . Ponadto, tak samo jak w przypadku standardowego stopnia przyjmujemy, że  $\deg_{\mathbf{w}} f := -\infty$ , gdy  $f = 0$ . Warto zwrócić uwagę, że jeśli  $\mathbf{w} = (1, \dots, 1)$ , to stopień wagowy odpowiada standardowemu stopniowi wielomianu.

Poniżej przypominamy kilka pojęć z zakresu algebry i geometrii algebraicznej, którymi będziemy posługiwać się w dalszej części pracy.

**Definicja 1.1 (odwzorowanie wielomianowe nad ciałem  $k$ ).** Niech  $k$  będzie ciałem charakterystyki zero i niech  $k[x_1, \dots, x_n]$  będzie pierścieniem wielomianów  $n$  zmiennych  $x_1, \dots, x_n$  nad ciałem  $k$ . *Odwzorowaniem wielomianowym* będziemy nazywać odwzorowanie  $F = (F_1, \dots, F_n) : k^n \rightarrow k^n$  postaci

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)),$$

gdzie  $F_i \in k[x_1, \dots, x_n]$  dla każdego  $i = 1, \dots, n$ .

**Definicja 1.2 (stopień (wielostopień) odwzorowania wielomianowego).** Niech  $F = (F_1, \dots, F_n) : k^n \rightarrow k^n$  będzie odwzorowaniem wielomianowym. *Stopniem odwzorowania wielomianowego  $F$*  będziemy nazywać liczbę:

$$\deg F = \max\{\deg F_1, \dots, \deg F_n\}.$$

*Wielostopniem odwzorowania wielomianowego  $F$*  nazywamy ciąg liczb:

$$\text{mdeg } F = (\deg F_1, \dots, \deg F_n).$$

**Definicja 1.3 (odwzracalne odwzorowanie wielomianowe nad ciałem  $k$ ).** Odwzorowanie wielomianowe  $F : k^n \rightarrow k^n$  nazywamy odwzracalnym (automorfizmem wielomianowym), jeżeli istnieje takie odwzorowanie wielomianowe  $G : k^n \rightarrow k^n$ , że  $G \circ F = F \circ G = \text{Id}_{k^n}$ .

**Definicja 1.4 (układ współrzędnych  $k[x_1, \dots, x_n]$ , współrzędna).** Jeśli  $F : k^n \rightarrow k^n$  jest odwzracalnym odwzorowaniem wielomianowym, to zbiór złożony z jego składowych nazywamy *układem współrzędnych pierścienia  $k[x_1, \dots, x_n]$* . Ponadto wielomian  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$  nazywamy *współrzędną* jeśli istnieją takie  $F_2, \dots, F_n \in k[x_1, \dots, x_n]$ , że  $f, F_2, \dots, F_n$  jest układem współrzędnych  $k[x_1, \dots, x_n]$ .

Mając dowolne odwzorowanie wielomianowe  $F : k^n \rightarrow k^n$  możemy rozważać  $k$ -endomorfizm  $F^* : k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n]$  zdefiniowany w następujący sposób

$$F^* : k[x_1, \dots, x_n] \ni h \mapsto h \circ F \in k[x_1, \dots, x_n].$$

Na odwrót, mając dany  $k$ -endomorfizm  $\Phi : k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n]$  możemy rozważać odwzorowanie wielomianowe  $\Phi_* : k^n \rightarrow k^n$

$$\Phi_* : k^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)) \in k^n,$$

gdzie  $F_i = \Phi(x_i)$ .

Można sprawdzić, że powyżej opisane odwzorowania  $F \mapsto F^*$  oraz  $\Phi \mapsto \Phi_*$  zadają wzajemnie odwrotne bijekcje pomiędzy zbiorami automorfizmów wielomianowych przestrzeni  $k^n$  oraz  $k$ -automorfizmów pierścienia wielomianów  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Dzięki temu, będziemy mogli utożsamiać automorfizmy wielomianowe z odpowiadającymi im  $k$ -automorfizmami pierścienia wielomianów.

Zbiór wszystkich automorfizmów wielomianowych przestrzeni  $k^n$  wraz z działaniem składania tworzy grupę. Będziemy ją oznaczać przez  $\text{Aut}(k^n)$ . Wyróżniamy kilka szczególnych podgrup/podzbiorów tej grupy:

- **podgrupa afiniczna** ( $\text{Aff}(k^n)$ ) składająca się z takich automorfizmów  $F$ , że stopień każdej składowej wynosi 1, czyli dla każdego  $i = 1, \dots, n$  mamy, że  $\deg F_i = 1$ ,
- **podgrupa liniowa** ( $\text{GL}_n(k)$ ), czyli podgrupa składająca się z takich automorfizmów afinicznych, że  $F(0) = 0$ ,
- **podzbiór automorfizmów elementarnych** ( $\text{El}(k^n)$ ), to znaczy automorfizmów postaci

$$F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), x_{i+1}, \dots, x_n),$$

gdzie  $i \in \{1, \dots, n\}$  oraz  $f \in k[x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$ ,

- **podgrupa automorfizmów trójkątnych** ( $\text{Tr}(k^n)$ ), czyli odwzorowań postaci

$$F : k^n \ni \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \mapsto \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 + f_1(x_1) \\ \vdots \\ x_n + f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{Bmatrix} \in k^n,$$

gdzie  $f_i \in k[x_1, \dots, x_i]$  dla  $1 \leq i \leq n-1$ ,

- **podgrupa automorfizmów typu de Jonquières** ( $\text{Jon}(k^n)$ ) składająca się z wszystkich automorfizmów  $F$  postaci

$$F : k^n \ni \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \mapsto \begin{Bmatrix} a_1x_1 + f_0 \\ a_2x_2 + f_1(x_1) \\ \vdots \\ a_nx_n + f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{Bmatrix} \in k^n,$$

gdzie  $a_i \in k^*$ ,  $f_i \in k[x_1, \dots, x_i]$ , dla  $1 \leq i \leq n-1$  oraz  $f_0 \in k$ ,

- **podgrupa automorfizmów typu tame** ( $\text{Tame}(k^n)$ ), to znaczy podgrupa generowana przez automorfizmy afiniczne i elementarne. Innymi słowy, dowolny element tej podgrupy jest złożeniem skończonej liczby automorfizmów afinicznych i trójkątnych (afinicznych i typu de Jonquières). Automorfizmy należące do tej podgrupy są często nazywane również automorfizmami rozkładalnymi lub automorfizmami oswojonymi.

Ponadto rozróżniamy jeszcze automorfizmy typu wild, zwane często automorfizmami dzikimi. Są to odwzorowania, które nie są automorfizmami typu tame.

**Definicja 1.5 ( $R$ -moduł (wolny), [1]).** Niech  $R$  będzie pierścieniem z jedyneką. Lewostronnym modułem nad  $R$  (lewostronnym  $R$ -modułem) nazywamy parę  $(M, \mu)$ , gdzie  $M$  wraz z działaniem dodawania (+) jest grupą abelową, a  $\mu$  odwzorowaniem określonym na iloczynie kartezjańskim pierścienia  $R$  i zbioru  $M$ , o wartościach w  $M$ , które dowolnym elementom  $r \in R$  oraz  $x \in M$  przypisuje wynik działania ( $\cdot$ ) zwanego mnożeniem przez skalar ( $\cdot : R \times M \rightarrow M$ ), czyli  $\mu(r, x) = r \cdot x$  oraz spełnia następujące warunki

- (1)  $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$ ,
- (2)  $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$ ,
- (3)  $(rs) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$ ,
- (4)  $1 \cdot x = x$

dla wszystkich elementów  $r, s \in R$  oraz  $x, y \in M$ .

$R$ -moduł nazywamy *wolnym*, gdy posiada bazę nad  $R$ , to znaczy zbiór generujący, który jest liniowo niezależny nad  $R$ .

**Definicja 1.6 (różniczkowanie,  $R$ -różniczkowanie, [22]).** Niech  $A$  będzie pierścieniem przemiennym z jedyneką, oraz niech  $M$  będzie  $A$ -modułem. Odwzorowanie  $D : A \rightarrow M$  nazywamy *różniczkowaniem* jeśli:

- (a)  $D(a + b) = D(a) + D(b)$  dla każdych  $a, b \in A$  (*addytywność*),
- (b)  $D(ab) = aD(b) + bD(a)$  dla każdych  $a, b \in A$  (*reguła Leibniza*).

Jeśli ponadto  $R$  jest podpierścieniem pierścienia  $A$ , to wtedy różniczkowanie  $A \rightarrow M$ , którego wartość wynosi zero dla każdego elementu pierścienia  $R$  nazywamy *różniczkowaniem nad  $R$*  lub krócej  *$R$ -różniczkowaniem*.

**Uwaga 1.7.** Zbiór wszystkich różniczkowań z  $A$  (pierścienia przemiennego z jedyneką) w  $A$ -moduł  $M$  będziemy oznaczać przez  $\text{Der}(A; M)$ . Natomiast zbiór wszystkich  $R$ -różniczkowań będzie oznaczany przez  $\text{Der}_R(A; M)$ . W przypadku, gdy dziedzina i przeciwdziedzina rozpatrywanych różniczkowań pokrywają się, tzn. gdy  $M = A$ , będziemy pisać  $\text{Der}(A)$  zamiast  $\text{Der}(A; A)$  oraz  $\text{Der}_R(A)$  zamiast  $\text{Der}_R(A; A)$ .

**Definicja 1.8 (element bezkwadratowy).** Niech  $R$  będzie pierścieniem przemiennym z jedyneką, a  $R^*$  zbiorem elementów odwracalnych pierścienia  $R$ . Element  $a \in R$  nazywamy *bezkwadratowym*, gdy nie da się go zapisać jako  $a = b^2c$ , gdzie  $b, c \in R$  oraz  $b \notin R^*$ .

# Algebry Liego i algebry Poissona

W tym rozdziale przedstawiamy wybrane pojęcia i fakty związane z algebrami Liego i algebrami Poissona. Zamieszczamy go w pracy tylko i wyłącznie w celu zaprezentowania konstrukcji wolnej algebry Poissona  $PL(x_1, \dots, x_n)$  i w konsekwencji zdefiniowania nawiasu Poissona pary wielomianów. Nie jest on niezbędny dla wyników przedstawionych w rozprawie, gdyż jak pokażemy w kolejnym rozdziale, można postawić poprawną definicję i posługiwać się nawiasem Poissona pary wielomianów bez konieczności podpierania się teorią dotyczącą algebr Liego i Poissona. Niemniej jednak, ze względu na wygodę Czytelnika, chcieliśmy przedstawić możliwie elementarną konstrukcję algebry  $PL(x_1, \dots, x_n)$ . Materiał zawarty w tym rozdziale oparty został głównie na [10, 19, 9].

## 2.1. Algebry Liego

Zanim przystąpimy do opisu pełnej konstrukcji wolnej algebry Liego o zbiorze wolnych generatorów, a w konsekwencji wolnej algebry Poissona, w tym podrozdziale postaramy się przybliżyć pojęcia algebry Liego i nawiasu Liego - podamy ich definicje oraz zobrazujemy kilkoma przykładami.

Będziemy zakładać, że  $k$  jest ciałem charakterystyki zero. Co prawda można zajmować się ogólniejszą sytuacją, ale to założenie jest niezbędne w rozważaniach zawartych w kolejnych rozdziałach.

**Definicja 2.1 (algebra Liego, nawias Liego).** Niech  $k$  będzie ciałem charakterystyki zero. Przestrzeń liniową  $V$  nad  $k$  nazywamy *algebrą Liego*, gdy jest w niej określona dwuliniowa operacja

$$[-, -] : V \times V \ni (a, b) \mapsto [a, b] \in V,$$

która spełnia warunki:

- (a)  $[a, b] = -[b, a]$  dla każdych  $a, b \in V$  (*antysymetryczność*),
- (b)  $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$  dla każdych  $a, b, c \in V$  (*tożsamość Jacobiego*).

Operację  $[-, -]$  spełniającą warunki (a) i (b) nazywamy *nawiasem Liego* (lub *iloczynem Liego*) w algebrze  $V$ .

Najprostszy przykład algebry Liego dostajemy, gdy odwzorowanie  $[-, -] : V \times V \mapsto V$  określimy jako tożsamościowo równe zero. Warunki (a) i (b) z definicji 2.1 są wtedy spełnione w sposób oczywisty. Jest to jednak mało ciekawa sytuacja. Algebrę tego typu będziemy nazywać trywialną algebrą Liego. Poniżej prezentujemy parę ciekawszych (choć wciąż wciąż niezbyt skomplikowanych) przykładów.

**Przykład 2.2** (algebra Liego endomorfizmów liniowych). Niech  $L$  będzie dowolną przestrzenią liniową nad ciałem  $k$ , a  $V = \text{End}_k(L)$  zbiorem wszystkich endomorfizmów  $k$ -liniowych przestrzeni  $L$ . Zbiór  $V$  wraz z operacjami

$$\begin{aligned} + : V \times V &\ni (\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \varphi_1 + \varphi_2 \in V, \\ \cdot : k \times V &\ni (\alpha, \varphi) \mapsto \alpha\varphi \in V, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 : L &\ni a \mapsto \varphi_1(a) + \varphi_2(a) \in L, \\ \alpha\varphi : L &\ni a \mapsto \alpha\varphi(a) \in L, \end{aligned}$$

jest przestrzenią liniową nad  $k$ . Gdy dodatkowo wyposażymy ją w operację

$$[-, -] : V \times V \ni (\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \varphi_1 \circ \varphi_2 - \varphi_2 \circ \varphi_1 \in V$$

staje się algebrą Liego. Istotnie, operacja  $[-, -]$  jest antysymetryczna, co wynika wprost z definicji. Ponadto dla dowolnych  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in V$  mamy

$$\begin{aligned} [\varphi_1, [\varphi_2, \varphi_3]] &= \varphi_1 \circ [\varphi_2, \varphi_3] - [\varphi_2, \varphi_3] \circ \varphi_1 & (2.1) \\ &= \varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3 - \varphi_3 \circ \varphi_2) - (\varphi_2 \circ \varphi_3 - \varphi_3 \circ \varphi_2) \circ \varphi_1 \\ &= \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3 - \varphi_1 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 - \varphi_2 \circ \varphi_3 \circ \varphi_1 + \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1. \end{aligned}$$

Dokonując w powyższej równości permutacji indeksów  $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$  otrzymujemy

$$[\varphi_2, [\varphi_3, \varphi_1]] = \varphi_2 \circ \varphi_3 \circ \varphi_1 - \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \varphi_3 - \varphi_3 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 + \varphi_1 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \quad (2.2)$$

oraz

$$[\varphi_3, [\varphi_1, \varphi_2]] = \varphi_3 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 - \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 - \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3 + \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \varphi_3. \quad (2.3)$$

Dodając stronami równości (2.1) - (2.3) dostajemy

$$[\varphi_1, [\varphi_2, \varphi_3]] + [\varphi_2, [\varphi_3, \varphi_1]] + [\varphi_3, [\varphi_1, \varphi_2]] = 0.$$

Zatem spełniona jest tożsamość Jacobiego, a przestrzeń endomorfizmów liniowych wraz z  $[-, -]$ , jak już wspomnieliśmy, jest algebrą Liego.

**Przykład 2.3** (algebra Liego  $k$ -różniczkowań). Niech  $A$  będzie dowolną  $k$ -algebrą (niekoniecznie przemienną)<sup>1</sup>. Możemy ją traktować jako przestrzeń liniową nad  $k$  w następujący, naturalny sposób. Mnożenie przez skalary  $\cdot : k \times A \rightarrow A$  definiujemy

1. W tym miejscu  $A$  nazywamy  $k$ -algebrą, gdy  $A$  jest pierścieniem (niekoniecznie przemiennym) zawierającym ciało  $k$ .

jako restrykcję mnożenia  $\cdot : A \times A \rightarrow A$ . Stąd wynika, że możemy rozpatrywać algebrę Liego endomorfizmów liniowych  $\text{End}_k(A)$ . Możemy również rozpatrywać zbiór  $\text{Der}_k(A)$  wszystkich  $k$ -różniczkowań  $k$ -algebry  $A$ . Ponieważ  $\text{Der}_k(A) \subset \text{End}_k(A)$ , więc możemy rozważyć następujące restrykcje odwzorowań zdefiniowanych w poprzednim przykładzie:

$$\begin{aligned} + & : \text{Der}_k(A) \times \text{Der}_k(A) \rightarrow \text{End}_k(A), \\ \cdot & : k \times \text{Der}_k(A) \rightarrow \text{End}_k(A), \\ [-, -] & : \text{Der}_k(A) \times \text{Der}_k(A) \rightarrow \text{End}_k(A). \end{aligned}$$

Ponieważ dowolna kombinacja liniowa (nad  $k$ )  $k$ -różniczkowań w  $A$  jest  $k$ -różniczkowaniem w  $A$ , więc pierwsze dwa z powyższych odwzorowań możemy traktować jako odwzorowania o wartościach w  $\text{Der}_k(A)$ . Podobnie fakt, że  $[D_1, D_2] \in \text{Der}_k(A)$  dla dowolnych  $D_1, D_2 \in \text{Der}_k(A)$  oznacza, że trzecie z powyższych odwzorowań również możemy traktować jako odwzorowanie o wartościach w  $\text{Der}_k(A)$ .

Z poprzedniego przykładu wynika, że  $[-, -]$  określone w  $\text{Der}_k(A)$  spełnia warunki (a) i (b) definicji 2.1, a zatem  $\text{Der}_k(A)$  z wyżej określonym odwzorowaniem  $[-, -]$  jest algebrą Liego. Jest to również przykład podalgebry Liego.

**Definicja 2.4 (podalgebra (Liego) algebry Liego).** Niech  $V$  wraz z odwzorowaniami:  $+ : V \times V \rightarrow V$ ,  $\cdot : k \times V \rightarrow V$ ,  $[-, -] : V \times V \rightarrow V$  będzie algebrą Liego nad ciałem  $k$ . Podprzestrzeń  $k$ -liniową  $W$  przestrzeni  $V$  nazywamy *podalgebrą Liego algebry Liego  $V$* , gdy  $[a, b] \in W$  dla każdych  $a, b \in W$ .

Teraz możemy formalnie stwierdzić, że  $\text{Der}_k(A)$  (z przykładu 2.3) jest podalgebrą Liego algebry Liego  $\text{End}_k(A)$ .

Odnotujmy również następujące spostrzeżenie.

**Uwaga 2.5.** *Dowolna podalgebra Liego algebry Liego jest algebrą Liego.*

Kolejny przykład pokazuje, że z algebrami Liego spotykamy się znacznie wcześniej, niż to się może wydawać.

**Przykład 2.6.** Rozważmy  $V = \mathbb{R}^3$  jako przestrzeń liniową nad  $\mathbb{R}$  ze standardowym dodawaniem wektorów i mnożeniem przez skalary:

$$\begin{aligned} + & : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in \mathbb{R}^3, \\ \cdot & : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \ni (\alpha, (x_1, x_2, x_3)) \mapsto (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Odwzorowanie  $[-, -] : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  zdefiniujemy jako powszechnie znany iloczyn wektorowy, tzn.  $[u, v] = u \times v$  dla dowolnych  $u, v \in \mathbb{R}^3$ .

Niech  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$  będzie standardową bazą w  $\mathbb{R}^3$  nad  $\mathbb{R}$ . Zauważmy, że

$$e_1 \times e_1 = e_2 \times e_2 = e_3 \times e_3 = 0$$

oraz

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_1 = -e_3,$$

$$\begin{aligned} e_2 \times e_3 &= e_1, & e_3 \times e_2 &= -e_1, \\ e_3 \times e_1 &= e_2, & e_1 \times e_3 &= -e_2. \end{aligned}$$

Z dwuliniowości iloczynu wektorowego dla dowolnych  $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$  dostajemy

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) &= (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) \times (y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3) \\ &= \sum_{i,j=1}^3 x_i y_j e_i \times e_j = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (x_i y_j - x_j y_i) e_i \times e_j \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &= \left( \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right). \end{aligned}$$

Teraz dla dowolnych  $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3), z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$  mamy:

$$\begin{aligned} x \times (y \times z) &= (x_1, x_2, x_3) \times (y_2 z_3 - y_3 z_2, y_3 z_1 - y_1 z_3, y_1 z_2 - y_2 z_1) \\ &= (x_2 (y_1 z_2 - y_2 z_1) - x_3 (y_3 z_1 - y_1 z_3), \\ &\quad x_3 (y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_1 (y_1 z_2 - y_2 z_1), \\ &\quad x_1 (y_3 z_1 - y_1 z_3) - x_2 (y_2 z_3 - y_3 z_2)) \\ &= (x_2 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_1 - x_3 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_3, \\ &\quad x_3 y_2 z_3 - x_3 y_3 z_2 - x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1, \\ &\quad x_1 y_3 z_1 - x_1 y_1 z_3 - x_2 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_2). \end{aligned}$$

Analogicznie

$$\begin{aligned} y \times (z \times x) &= (y_2 z_1 x_2 - y_2 z_2 x_1 - y_3 z_3 x_1 + y_3 z_1 x_3, \\ &\quad y_3 z_2 x_3 - y_3 z_3 x_2 - y_1 z_1 x_2 + y_1 z_2 x_1, \\ &\quad y_1 z_3 x_1 - y_1 z_1 x_3 - y_2 z_2 x_3 + y_2 z_3 x_2) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} z \times (x \times y) &= (z_2 x_1 y_2 - z_2 x_2 y_1 - z_3 x_3 y_1 + z_3 x_1 y_3, \\ &\quad z_3 x_2 y_3 - z_3 x_3 y_2 - z_1 x_1 y_2 + z_1 x_2 y_1, \\ &\quad z_1 x_3 y_1 - z_1 x_1 y_3 - z_2 x_2 y_3 + z_2 x_3 y_2). \end{aligned}$$

Dodając stronami powyższe trzy równości dostajemy

$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0.$$

Sprawdziliśmy zatem, że iloczyn wektorowy spełnia tożsamość Jacobiego, a tym samym, że przestrzeń  $\mathbb{R}^3$  wraz z iloczynem wektorowym jest algebrą Liego.

## 2.2. Grupoid wolny o danym zbiorze generatorów

W kolejnych podrozdziałach przedstawimy konstrukcję wolnej algebry Liego o danym zbiorze wolnych generatorów. W tym celu potrzebować będziemy grupoidu wolnego o zadanym zbiorze wolnych generatorów. Konstrukcji wspomnianego grupoidu poświęcony jest obecny podrozdział.

**Definicja 2.7 (grupoid).** Zbiór niepusty  $G$  wraz z dowolnym działaniem dwuarumentowym

$$\bullet : G \times G \ni (a, b) \mapsto a \bullet b \in G$$

nazywamy *grupoidem*.

Należy zwrócić uwagę, że od działania  $\bullet$  w grupoidzie  $G$  nie żąda się, aby spełniało jakiegokolwiek własności. W szczególności działanie  $\bullet$  nie musi być łączne, przemienne, nie musi posiadać elementu neutralnego, ani tym bardziej elementu odwrotnego. Zatem grupoid to jedna z najuboższych struktur algebraicznych. W dalszym ciągu interesować nas będą tzw. wolne grupoidy o zadanym zbiorze wolnych generatorów. Jednak aby zdefiniować pojęcie grupoidu wolnego potrzebujemy pojęcia homomorfizmu grupoidów.

**Definicja 2.8 (homomorfizm grupoidów).** Niech  $(G_1, \bullet)$  oraz  $(G_2, \star)$  będą dwoma grupoidami. Odwzorowanie  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  nazywamy *homomorfizmem grupoidów*, gdy dla każdych  $a, b \in G_1$  zachodzi równość

$$\varphi(a \bullet b) = \varphi(a) \star \varphi(b).$$

Teraz możemy podać definicję grupoidu wolnego.

**Definicja 2.9 (grupoid wolny).** Niech  $(G, \bullet)$  będzie grupoidem, a  $X \subset G$  niepustym podzbiorem zbioru  $G$ . Mówimy, że  $(G, \bullet)$  jest *grupoidem wolnym* o zbiorze wolnych generatorów  $X$ , gdy dla dowolnego grupoidu  $(H, \star)$  oraz dowolnego odwzorowania  $\varphi : X \rightarrow H$  istnieje dokładnie jeden homomorfizm grupoidów  $\bar{\varphi} : G \rightarrow H$  taki, że  $\bar{\varphi}|_X = \varphi$ .

Poniżej przedstawimy konstrukcję grupoidu wolnego o zadanym zbiorze wolnych generatorów.

**Konstrukcja 2.10.** Niech  $X$  będzie dowolnym zbiorem niepustym. Kładziemy  $\Gamma_1(X) = X$  oraz dla dowolnego  $n \geq 2$ :

$$\Gamma_n(X) = \{(u)(v) \mid \exists k \in \{1, \dots, n-1\} \ u \in \Gamma_k(X), \ v \in \Gamma_{n-k}(X)\},$$

tzn.  $\Gamma_n(X)$  jest zbiorem napisów postaci „ $(u)(v)$ ”. Ostatecznie przyjmujemy

$$\Gamma(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} \Gamma_n(X)$$

oraz definiujemy działanie (mnożenia) w  $\Gamma(X)$  następująco

$$\cdot : \Gamma(X) \times \Gamma(X) \ni (u, v) \mapsto (u)(v) \in \Gamma(X).$$

Przy czym w sytuacji, gdy  $u \in \Gamma_1(X)$  (i/lub  $v \in \Gamma_1(X)$ ) opuszczamy nawias wokół  $u$  (i/lub  $v$ ). Na elementy zbioru  $\Gamma(X)$  możemy patrzeć jak na napisy utworzone z elementów „alfabetu”  $X$  oraz nawiasów. Dwa różne napisy, tzn. różniące się chociażby rozkładem nawiasów uznajemy, z definicji, za różne elementy zbioru  $\Gamma(X)$ .

**Przykład 2.11.** Niech  $X = \{a, b\}$ . Wtedy:

$$\begin{aligned}\Gamma_1(X) &= \{a, b\}, \\ \Gamma_2(X) &= \{aa, ab, ba, bb\}, \\ \Gamma_3(X) &= \{a(aa), a(ab), a(ba), a(bb), b(aa), b(ab), b(ba), b(bb), \\ &\quad (aa)a, (ab)a, (ba)a, (bb)a, (aa)b, (ab)b, (ba)b, (bb)b\}, \\ \Gamma_4(X) &= \{u(v) \mid u \in \Gamma_1(X), v \in \Gamma_3(X)\} \\ &\quad \cup \{(u)(v) \mid u, v \in \Gamma_2(X)\} \\ &\quad \cup \{(u)v \mid u \in \Gamma_3(X), v \in \Gamma_1(X)\}.\end{aligned}$$

W szczególności elementami zbioru  $\Gamma_4(X)$  są np.:

$$a(a(aa)), a((aa)a), (aa)(aa), (a(aa))a, ((aa)a)a$$

i są to różne elementy tego zbioru. Warto tu podkreślić, że elementy wymienione w zbiorze  $\Gamma_3(X)$  też są różnymi elementami tego zbioru. Fakt, że np.  $a(ba) \neq (ab)a$  wysławiamy mówiąc, że elementy zbioru  $\Gamma(X)$  są niełącznymi jednomianami (unitarnymi) „zmiennych”  $a, b$  (zmiennych ze zbioru  $X$ ).

Odnotujmy następującą prostą konsekwencję założeń przyjętych w konstrukcji 2.10.

**Uwaga 2.12.** *Dowolny element zbioru  $\Gamma(X)$  można uzyskać na dokładnie jeden sposób (chodzi o kolejność wykonywania działań) przy pomocy elementów ze zbioru  $X$ . W szczególności, gdy  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \Gamma(X)$  oraz  $(u_1)(v_1) = (u_2)(v_2)$ , wtedy  $u_1 = u_2$  oraz  $v_1 = v_2$ .*

Korzystając z powyższej uwagi można udowodnić następujący fakt.

**Lemat 2.13.** *Niech  $X$  będzie dowolnym zbiorem niepustym. Zbiór  $\Gamma(X)$  wraz z działaniem  $\cdot$  opisanym w konstrukcji 2.10 tworzy grupoid wolny o zbiorze wolnych generatorów  $X$ .*

*Dowód.* Niech  $(H, \star)$  będzie dowolnym grupoidem, a  $\varphi : X \rightarrow H$  dowolnym odwzorowaniem. Ponieważ  $\Gamma_1(X) = X$ , więc  $\bar{\varphi}$  (rozszerzenie  $\varphi$  do homomorfizmu grupoidów  $\Gamma(X) \rightarrow H$ ) na  $\Gamma_1(X)$  musi być równe  $\varphi$ . Załóżmy teraz, że  $\bar{\varphi}$  mamy już określone na  $\bigcup_{k < n} \Gamma_k(X)$  dla pewnego  $n \geq 2$ . Dowolny element z  $\Gamma_n(X)$  jednoznacznie przedstawia się w postaci  $(u)(v)$ , gdzie  $u, v \in \bigcup_{k < n} \Gamma_k(X)$ . W tej sytuacji kładziemy  $\bar{\varphi}((u)(v)) = \bar{\varphi}(u) \star \bar{\varphi}(v)$ . W ten sposób mamy  $\bar{\varphi}$  określone na  $\Gamma_n(X)$  i dalej możemy postępować indukcyjnie, określając  $\bar{\varphi}$  na całym  $\Gamma(X)$ .

Z poprzedzającej uwagi wynika, że  $\bar{\varphi}$  w powyższej konstrukcji jest określone jednoznacznie i poprawnie. Fakt, że  $\bar{\varphi}$  jest homomorfizmem grupoidów jest oczywisty.  $\square$

Zdefiniujemy obecnie dwie przydatne funkcje określone na  $\Gamma(X)$ . Niech

$$d : \Gamma(X) \rightarrow \mathbb{N}$$

będzie jedynym homomorfizmem grupoidów (zbiór  $\mathbb{N}$  wraz z działaniem dodawania jest grupoidem) takim, że  $d(x) = 1$  dla każdego  $x \in X$ . Można sprawdzić, np. przez indukcję względem  $n$ , że dla każdego  $n \in \mathbb{N}_+$  oraz  $u \in \Gamma_n(X)$  mamy  $d(u) = n$ . Zachodzi również implikacja w przeciwnym kierunku. Istotnie, niech  $u \in \Gamma(X)$  oraz  $d(u) = n$ . Niech  $m \in \mathbb{N}_+$  będzie takie, że  $u \in \Gamma_m(X)$ . Gdyby  $m$  było różne od  $n$ , wtedy mielibyśmy  $d(u) = n \neq m = d(u)$ , a zatem  $m$  musi być równe  $n$ . Z powyższych rozważań wynika następująca równość

$$\Gamma_n(X) = \{u \in \Gamma(X) \mid d(u) = n\}$$

dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}_+$ .

W celu zdefiniowania drugiej funkcji rozważamy grupoid  $\mathbb{N}^X$  wszystkich funkcji z  $X$  do  $\mathbb{N}$  wraz ze standardowym działaniem

$$+ : \mathbb{N}^X \times \mathbb{N}^X \ni (f, g) \mapsto f + g \in \mathbb{N}^X,$$

gdzie  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  dla każdego  $x \in X$ . Dalej niech

$$m : \Gamma(X) \rightarrow \mathbb{N}^X$$

będzie jedynym homomorfizmem grupoidów takim, że  $m(x) = \alpha_x$  dla dowolnego  $x \in X$ , gdzie  $\alpha_x \in \mathbb{N}^X$  jest funkcją taką, że  $\alpha_x(x) = 1$  oraz  $\alpha_x(y) = 0$  dla  $y \neq x$ .

Przykładowo, gdy  $a, b \in X$ ,  $a \neq b$  mamy  $d(((ab)b)(ab)) = 5$  oraz  $m(((ab)b)(ab)) = 2\alpha_a + 3\alpha_b$ . W sytuacji, gdy zbiór  $X$  jest skończony, powiedzmy  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  wtedy zwyczajowo zamiast  $l_1\alpha_{x_1} + \dots + l_n\alpha_{x_n}$  piszemy  $(l_1, \dots, l_n)$ .

Zauważmy, że dla dowolnego  $u \in \Gamma(X)$  funkcja  $m(u) \in \mathbb{N}^X$  ma skończony nośnik, gdzie dla  $\alpha \in \mathbb{N}^X$  nośnik  $\text{supp } \alpha$  funkcji  $\alpha$  zdefiniowany jest następująco:

$$\text{supp } \alpha = \{x \in X \mid \alpha(x) \neq 0\}.$$

Niech  $\Phi = \{\alpha \in \mathbb{N}^X \mid \#\text{supp } \alpha < +\infty\}$  oraz dla dowolnego  $\alpha \in \Phi$  niech:

$$\Gamma_\alpha(X) = \{u \in \Gamma(X) \mid m(u) = \alpha\}.$$

Można zauważyć, że dla każdego  $\alpha \in \Phi$  mamy  $\Gamma_\alpha(X) \neq \emptyset$  oraz

$$\Gamma(X) = \bigcup_{\alpha \in \Phi} \Gamma_\alpha(X).$$

Ponadto, gdy dla  $\alpha \in \Phi$  położymy  $|\alpha| = \sum_{x \in X} \alpha(x)$ , wtedy zachodzi równość

$$\Gamma_n(X) = \bigcup_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha \in \Phi}} \Gamma_\alpha(X),$$

dla każdego  $n \in \mathbb{N}_+$ .

## 2.3. Algebra wolna o danym zbiorze generatorów

Celem niniejszego podrozdziału jest zaprezentowanie kolejnego kroku w kierunku konstrukcji wolnej algebry Liego o danym zbiorze generatorów. Krokiem tym jest konstrukcja algebry wolnej zadanej przez z góry narzucony zbiór generatorów. Zaczniemy jednak od przypomnienia niezbędnych definicji.

**Definicja 2.14 (algebra (nad ciałem)).** Niech  $k$  będzie ciałem charakterystyki zero. Przestrzeń liniową  $V$  nad  $k$  nazywamy *algebrą*, gdy jest w niej określona dwuliniowa (nad  $k$ ) operacja

$$\cdot : V \times V \ni (a, b) \mapsto a \cdot b \in V.$$

Operację  $\cdot$  zazwyczaj nazywa się *mnożeniem* w algebrze  $V$ . Ponadto, gdy operacja mnożenia:

- (a) jest przemienna, tzn. gdy  $a \cdot b = b \cdot a$  dla każdych  $a, b \in V$ , wtedy algebrę nazywamy *przemienną*,
- (b) jest łączna, tzn.  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  dla każdych  $a, b, c \in V$ , wtedy algebrę nazywamy *łączną*,
- (c) posiada element neutralny, tzn. taki element  $e \in V$ , że  $a \cdot e = e \cdot a = a$  dla każdego  $a \in V$ , wtedy  $V$  nazywamy *algebrą z jedyneką* (względnie *algebrą z jednością*).

Algebrę, która nie jest przemienna, nazywać będziemy *nieprzemienną*, a algebrę, która nie jest łączna *niełączną*.

**Uwaga 2.15.** *Każda nietrywialna algebra Liego jest algebrą nieprzemienną.*

Warto w tym miejscu dodać, że każda algebra łączna w naturalny sposób indukuje pewną algebrę Liego. Mówi o tym następujący lemat.

**Lemat 2.16.** *Niech  $A$  wraz z działaniem  $\cdot : A \times A \rightarrow A$  będzie algebrą łączną nad ciałem  $k$ . Przestrzeń wektorowa  $A$  wraz z działaniem*

$$[-, -] : A \times A \ni (a, b) \mapsto a \cdot b - b \cdot a \in A$$

*jest algebrą Liego.*

*Dowód.* Łatwo sprawdzić, że  $[-, -]$  jest operacją dwuliniową. Istotnie, dla dowolnych  $a_1, a_2, b \in A$  oraz  $\alpha_1, \alpha_2 \in k$  na mocy dwuliniowości działania  $\cdot$  mamy

$$\begin{aligned} [\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b] &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) \cdot b - b \cdot (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) = \alpha_1 a_1 b + \alpha_2 a_2 b - \alpha_1 b a_1 - \alpha_2 b a_2 \\ &= \alpha_1 (a_1 b - b a_1) + \alpha_2 (a_2 b - b a_2) = \alpha_1 [a_1, b] + \alpha_2 [a_2, b]. \end{aligned}$$

Podobnie sprawdzamy, że  $[b, \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2] = \alpha_1 [b, a_1] + \alpha_2 [b, a_2]$ .

Antysymetryczność działania  $[-, -]$  jest oczywista. Przejdźmy zatem do sprawdzenia, że  $[-, -]$  spełnia tożsamość Jacobiego. Na podstawie łączności i dwuliniowości działania  $\cdot$ , dla dowolnych  $a, b, c \in A$ , mamy

$$\begin{aligned} [a, [b, c]] &= a \cdot [b, c] - [b, c] \cdot a = a \cdot (b \cdot c - c \cdot b) - (b \cdot c - c \cdot b) \cdot a \\ &= a \cdot b \cdot c - a \cdot c \cdot b - b \cdot c \cdot a + c \cdot b \cdot a, \end{aligned} \quad (2.4)$$

przy czym w ostatniej linii mogliśmy opuścić nawiasy, gdyż dzięki łączności działania  $\cdot$  mamy:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \dots, (c \cdot b) \cdot a = c \cdot (b \cdot a)$ , dlatego też nie ma znaczenia jak byłyby dopisane nawiasy w tej linii równości (2.4). Analogicznie dostajemy

$$[b, [c, a]] = b \cdot c \cdot a - b \cdot a \cdot c - c \cdot a \cdot b + a \cdot c \cdot b \quad (2.5)$$

oraz

$$[c, [a, b]] = c \cdot a \cdot b - c \cdot b \cdot a - a \cdot b \cdot c + b \cdot a \cdot c. \quad (2.6)$$

Sumując stronami (2.4) - (2.6) uzyskujemy

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0.$$

□

Zauważmy, że w przypadku, gdy  $A$  wraz z działaniem  $\cdot$  jest przemienną algebrą łączną, wtedy nawias Liego  $[-, -]$  zdefiniowany jako komutator  $a \cdot b - b \cdot a$  działania  $\cdot$  jest tożsamościowo równy zero. Dlatego ciekawe przykłady, w oparciu o powyższą konstrukcję, dostajemy tylko wtedy, gdy  $A$  jest nieprzemienną algebrą łączną.

Przejdźmy teraz do konstrukcji algebry wolnej o zadanym zbiorze generatorów. W tym celu będziemy potrzebowali następujących pojęć.

**Definicja 2.17 (homomorfizm algebr nad ciałem).** Niech  $A$  wraz z działaniem  $\cdot$  oraz  $B$  wraz z działaniem  $\circ$  będą dwoma algebrami nad tym samym ciałem  $k$ . Odwzorowanie liniowe  $f : A \rightarrow B$  nazywamy *homomorfizmem algebr* (nad  $k$ ), gdy

$$f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1) \circ f(a_2) \text{ dla } \text{każdych } a_1, a_2 \in A.$$

**Definicja 2.18 (algebra wolna o zbiorze wolnych generatorów).** Niech  $A$  (wraz z działaniem  $\cdot$ ) będzie algebrą nad ciałem  $k$ , a  $X \subset A$  zbiorem niepustym. Mówimy, że  $A$  jest *algebrą wolną o zbiorze wolnych generatorów*  $X$ , gdy dla każdej algebry  $B$  nad  $k$  (wraz z działaniem  $\circ$ ) oraz dowolnego odwzorowania  $\varphi : X \rightarrow B$  istnieje dokładnie jeden homomorfizm algebr (nad  $k$ )  $\bar{\varphi} : A \rightarrow B$  taki, że  $\bar{\varphi}|_X = \varphi$ .

**Uwaga 2.19.**

- (1) Jeśli w powyższej definicji założymy, że  $A$  jest algebrą łączną, a od  $B$  będziemy żądać, aby było dowolną algebrą łączną, to uzyskamy definicję łącznej algebry wolnej. Analogiczne modyfikacje dają definicje przemiennnej algebry wolnej; łącznej, przemiennnej algebry wolnej; wolnej algebry Liego etc.
- (2) *A priori* łączna (przemienna) algebra wolna nie musi być algebrą wolną, gdyż w przypadku algebry wolnej warunek o rozszerzaniu musi być spełniony dla większej klasy algebr  $B$  niż dla np. łącznej algebry wolnej.

Przejdźmy obecnie do, wspomnianej wyżej, konstrukcji algebry wolnej.

**Konstrukcja 2.20.** Niech  $X$  będzie dowolnym zbiorem niepustym, a  $\Gamma(X)$  grupoidem wolnym skonstruowanym w poprzednim podrozdziale (patrz konstrukcja 2.10). Niech teraz

$$F(X) = \{f : \Gamma(X) \rightarrow k \mid \# \text{supp } f < +\infty\}$$

wraz ze standardowymi działaniami dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez element z ciała. Dla dowolnego  $\mu \in \Gamma(X)$  przez  $e_\mu$  oznaczamy funkcję  $e_\mu : \Gamma(X) \rightarrow k$  taką, że

$$e_\mu(u) = \begin{cases} 1 & u = \mu, \\ 0 & u \neq \mu. \end{cases}$$

Rodzina  $\{e_\mu \mid \mu \in \Gamma(X)\}$  stanowi bazę  $F(X)$  jako przestrzeni liniowej nad  $k$ . Innymi słowy

$$F(X) = \bigoplus_{\mu \in \Gamma(X)} k \cdot e_\mu.$$

Ze względu na powyższą równość elementy przestrzeni  $F(X)$  będziemy zapisywać w postaci  $\sum_{u \in \Gamma(X)} \lambda_u \cdot e_u$ , gdzie  $\lambda_u \in k$ , pamiętając przy tym, że tylko skończenie wiele współczynników  $\lambda_u$  może być różnych od zera.

Wprowadźmy operację mnożenia w przestrzeni  $F(X)$  w następujący sposób. Dla  $f = \sum_{u \in \Gamma(X)} a_u e_u$  oraz  $g = \sum_{v \in \Gamma(X)} b_v e_v$ , gdzie  $a_u, b_v \in k$ , przyjmujemy

$$f \cdot g = \sum_{u, v \in \Gamma(X)} (a_u \cdot b_v) e_{(u)(v)}.$$

Fakt, że tak zdefiniowane działanie jest dwuliniowe nad  $k$ , jest łatwy do sprawdzenia. Warto jednak odnotować, że nie jest ono łączne ani przemienne. Istotnie, dla dowolnych  $u, v, w \in \Gamma(X)$  mamy

$$(e_u \cdot e_v) \cdot e_w = e_{((u)(v))(w)} \neq e_{(u)((v)(w))} = e_u \cdot (e_v \cdot e_w)$$

oraz dla dowolnego  $x \in X$  zachodzi

$$e_{xx} \cdot e_x = e_{(xx)x} \neq e_{x(xx)} = e_x \cdot e_{xx}.$$

To, co dla nas istotne, to fakt że  $F(X)$  jest algebrą wolną o wolnym zbiorze generatorów  $X$ . Mówi o tym następujący lemat.

**Lemat 2.21.** *Niech  $X$  będzie dowolnym zbiorem niepustym, a  $F(X)$  przestrzenią liniową z konstrukcji 2.20. Przestrzeń  $F(X)$  wraz z operacją mnożenia zdefiniowaną w konstrukcji 2.20 jest algebrą wolną o wolnym zbiorze generatorów  $X$ .*

*Dowód.* Na początek zauważmy, że zbiór  $\{e_u \mid u \in \Gamma(X)\}$  wraz z działaniem mnożenia określonym w  $F(X)$  jest grupoidem izomorficznym z  $\Gamma(X)$ .

Niech  $B$  (wraz z działaniem  $\circ$ ) będzie dowolną algebrą nad ciałem  $k$ , a  $\varphi : X \rightarrow B$  dowolnym odwzorowaniem. Każdy element  $f$  algebry  $F(X)$  daje się jednoznacznie przedstawić w następujący sposób

$$f = \sum_{u \in \Gamma(X)} f_u e_u,$$

gdzie  $f_u \in k$ , przy czym tylko skończenie wiele  $f_u$  jest różnych od zera. Ewentualny homomorfizm  $\bar{\varphi} : F(X) \rightarrow B$  będący rozszerzeniem odwzorowania  $\varphi : X \rightarrow B$ , w szczególności musi być odwzorowaniem liniowym. Zatem musi być on dany formułą

$$\bar{\varphi} \left( \sum_{u \in \Gamma(X)} f_u e_u \right) = \sum_{u \in \Gamma(X)} f_u \hat{\varphi}(e_u),^2$$

2. Pisząc tę równość utożsamiamy element  $u \in \Gamma(X)$  z funkcją  $e_u$ .

gdzie  $\hat{\varphi} : \Gamma(X) \rightarrow B$  jest jedynym rozszerzeniem odwzorowania  $\varphi : X \rightarrow B$  do homomorfizmu grupoidów  $\Gamma(X) \rightarrow B$  ( $\Gamma(X)$  jest grupoidem wolnym o wolnym zbiorze generatorów  $X$ , a  $B$  wraz z działaniem  $\circ$  możemy traktować jako grupoid). Ponieważ zbiór  $\{e_u \mid u \in \Gamma(X)\}$  jest bazą (nad  $k$ ) przestrzeni liniowej  $F(X)$ , więc na podstawie powyższych rozważań istnieje dokładnie jedno rozszerzenie odwzorowania  $\varphi : X \rightarrow B$  do odwzorowania liniowego (nad  $k$ )  $\bar{\varphi} : F(X) \rightarrow B$ . Wystarczy teraz sprawdzić, że jest ono homomorfizmem algebr. Weźmy zatem dowolne dwa elementy  $f, g$  algebry  $F(X)$  i zapiszmy je w postaci

$$f = \sum_{u \in \Gamma(X)} f_u e_u, \quad g = \sum_{v \in \Gamma(X)} g_v e_v,$$

gdzie  $f_u, g_v \in k$  i tylko skończenie wiele z nich jest różnych od zera. W tej sytuacji mamy

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(f \cdot g) &= \bar{\varphi} \left( \sum_{u, v \in \Gamma(X)} (f_u \cdot g_v) e_{(u)(v)} \right) = \sum_{u, v \in \Gamma(X)} (f_u \cdot g_v) \hat{\varphi}(e_u \cdot e_v) \\ &= \sum_{u, v \in \Gamma(X)} (f_u \cdot g_v) \hat{\varphi}(e_u) \circ \hat{\varphi}(e_v) \end{aligned} \quad (2.7)$$

oraz

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(f) \circ \bar{\varphi}(g) &= \left( \sum_{u \in \Gamma(X)} f_u \hat{\varphi}(e_u) \right) \circ \left( \sum_{v \in \Gamma(X)} g_v \hat{\varphi}(e_v) \right) \\ &= \sum_{u, v \in \Gamma(X)} (f_u \cdot g_v) \hat{\varphi}(e_u) \circ \hat{\varphi}(e_v). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Na podstawie (2.7) oraz (2.8) dostajemy, że  $\bar{\varphi}(f \cdot g) = \bar{\varphi}(f) \circ \bar{\varphi}(g)$ , a to oznacza, że  $\bar{\varphi}$  jest homomorfizmem algebr.  $\square$

Przypomnijmy teraz pojęcie ideału oraz algebry ilorazowej. Pojęcia te przydatne będą przy konstrukcji między innymi przemiennej algebry wolnej, łącznej algebry wolnej, czy wolnej algebry Liego.

**Definicja 2.22 (ideał lewostronny (prawostronny)).** Niech  $A$  będzie algebrą nad ciałem  $k$ . Podzbiór  $L \subset A$  nazywamy *ideałem lewostronnym* w algebrze  $A$  (algebry  $A$ ), gdy:

- (a)  $L$  jest podprzestrzenią liniową (nad  $k$ ) przestrzeni  $A$ ,
- (b) dla każdych  $a \in A, x \in L$  mamy  $ax \in L$ .

Podzbiór  $L \subset A$  nazywamy *ideałem prawostronnym* algebry  $A$ , gdy spełnia powyższy warunek (a) oraz następujący warunek

- (b') dla każdych  $a \in A, x \in L$  mamy  $xa \in L$ .

Podzbiór  $L \subset A$  nazywamy *ideałem dwustronnym* algebry  $A$ , gdy jest jednocześnie ideałem lewostronnym i prawostronnym.

**Uwaga 2.23.** *Gdy algebra  $A$  jest algebrą przemiennej, wtedy wszystkie trzy pojęcia ideału są sobie tożsame.*

---

3. Zbiór  $X$  utożsamiamy ze zbiorem funkcji  $e_x$ , gdzie  $x \in X$ .

Bezpośrednio z definicji wynika, że przecięcie dowolnej rodziny ideałów lewostronnych (odpowiednio prawostronnych, dwustronnych) jest ideałem lewostronnym (odpowiednio prawostronnym, dwustronnym). Ponieważ jednocześnie cała algebra jest ideałem lewostronnym (odpowiednio prawostronnym, dwustronnym) możemy postawić następującą definicję.

**Definicja 2.24 (ideał generowany lewostronny (prawostronny, dwustronny)).** Niech  $A$  będzie algebra nad  $k$ , a  $S \subset A$  dowolnym zbiorem niepustym. *Ideałem lewostronnym (względnie prawostronnym lub dwustronnym) generowanym przez zbiór  $S$*  nazywamy przecięcie rodziny wszystkich ideałów lewostronnych (względnie prawostronnych lub dwustronnych) zawierających  $S$ .

**Uwaga 2.25.** *Można sprawdzić, że ideał (lewostronny, prawostronny, dwustronny) generowany przez  $S$ , to najmniejszy w sensie inkluzji ideał (lewostronny, prawostronny, dwustronny) zawierający  $S$ .*

Warto zwrócić uwagę, że jądro dowolnego homomorfizmu algebr jest ideałem dwustronnym.

**Uwaga 2.26.** *Niech  $A_i$  wraz z działaniem  $\circ_i$ , dla  $i = 1, 2$ , będą algebraami nad ciałem  $k$ , a  $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$  homomorfizmem algebr. Wtedy  $\ker \varphi = \{a \in A_1 \mid \varphi(a) = 0\}$  jest ideałem dwustronnym algebry  $A_1$ .*

*Dowód.* Ponieważ  $\varphi$  jest odwzorowaniem liniowym, więc  $\ker \varphi$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $A_1$ . Ponadto dla dowolnych  $a \in A_1, x \in \ker \varphi$  mamy

$$\varphi(a \circ_1 x) = \varphi(a) \circ_2 \varphi(x) = \varphi(a) \circ_2 0 = 0$$

oraz

$$\varphi(x \circ_1 a) = \varphi(x) \circ_2 \varphi(a) = 0 \circ_2 \varphi(a) = 0,$$

czyli  $a \circ_1 x, x \circ_1 a \in \ker \varphi$ . □

Istotność ideałów dwustronnych wynika z następującego lematu.

**Lemat 2.27.** *Niech  $A$  wraz z działaniem  $\cdot$  będzie algebra nad ciałem  $k$ , a  $I \subset A$  ideałem dwustronnym algebry  $A$ . Przestrzeń ilorazowa  $A/I$  (jako przestrzeń liniowa nad  $k$ ) wraz z działaniem*

$$\circ : A/I \times A/I \ni (a + I, b + I) \mapsto a \cdot b + I \in A/I$$

*jest algebra nad  $k$ .*

*Ponadto, gdy  $A$  jest przemienna (łączna), wtedy również  $A/I$  jest przemienna (łączna).*

*Dowód.* Sprawdźmy na początek, czy działanie  $\circ$  jest dobrze określone, tzn. że nie zależy od wyboru reprezentantów warstw. Weźmy zatem  $a_1, a_2, b_1, b_2$  takie, że

$$a_1 + I = a_2 + I, \quad b_1 + I = b_2 + I.$$

W tej sytuacji mamy  $a_1 - a_2, b_1 - b_2 \in I$ . Zatem

$$a_1b_1 - a_2b_2 = a_1b_1 - a_1b_2 + a_1b_2 - a_2b_2 = a_1(b_1 - b_2) + (a_1 - a_2)b_2.$$

Z faktu, że  $I$  jest ideałem lewostronnym dostajemy, że  $a_1(b_1 - b_2) \in I$ , a z faktu, że  $I$  jest ideałem prawostronnym dostajemy  $(a_1 - a_2)b_2 \in I$ . Ostatecznie  $a_1b_1 - a_2b_2 \in I$ , czyli

$$a_1b_1 + I = a_2b_2 + I,$$

a to oznacza, że działanie  $\circ$  jest dobrze określone. Fakt, że własności takie jak dwuliniowość, przemienność, łączność przenoszą się z działania  $\cdot$  na działanie  $\circ$  wynika z tego, że działanie dotyczące warstw (względem ideału  $I$ ) wykonywane jest tak naprawdę na ich reprezentantach.  $\square$

Algebrę skonstruowaną w powyższym lemacie nazywać będziemy algebrą ilorazową (algebry  $A$  względem ideału  $I$ ).

Zanim przejdziemy dalej, warto zwrócić uwagę na fakt, że przyporządkowanie elementowi algebry  $A$  jego warstwy (względem dowolnego ideału dwustronnego) jest homomorfizmem algebr.

**Lemat 2.28.** *Niech  $A$  wraz z działaniem  $\cdot$  będzie algebrą, a  $A/I$  wraz z działaniem  $\circ$  algebrą ilorazową opisaną w poprzednim lemacie. Odwzorowanie*

$$\pi : A \ni a \mapsto a + I \in A/I$$

*jest surjektywnym homomorfizmem algebr, nazywanym epimorfizmem kanonicznym.*

*Dowód.* Wiemy, że odwzorowanie  $\pi$  jest surjektywnym odwzorowaniem liniowym przestrzeni liniowych nad  $k$  (innymi słowy jest surjektywnym homomorfizmem w kategorii przestrzeni liniowych). Ponadto, dla dowolnych  $a, b \in A$  mamy:

$$\pi(a \cdot b) = (a \cdot b) + I = (a + I) \circ (b + I) = \pi(a) \circ \pi(b),$$

czyli  $\pi$  jest homomorfizmem algebr.  $\square$

Do przeprowadzenia konstrukcji np. przemiennej algebry wolnej potrzebować będziemy następującego lematu.

**Lemat 2.29.** *Niech  $\varphi : A \rightarrow B$  będzie homomorfizmem algebr nad ciałem  $k$ , a  $I \subset A$  ideałem dwustronnym algebry  $A$  takim, że  $I \subset \ker \varphi$ . Wtedy istnieje dokładnie jeden homomorfizm algebr  $\bar{\varphi} : A/I \rightarrow B$  taki, że następujący diagram jest przemienny:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\ A/I & & \end{array} \quad (2.9)$$

*Innymi słowy  $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$ .*

*Dowód.* Traktując  $\varphi : A \rightarrow B$  jako odwzorowanie liniowe między dwiema przestrzeniami liniowymi (nad  $k$ ) mamy, że istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe  $\bar{\varphi} : A/I \rightarrow B$  takie, że diagram (2.9) jest przemienny. Ponadto na podstawie przemienności diagramu (2.9) oraz konstrukcji  $A/I$  oraz  $\pi$ , dla dowolnych  $a_1, a_2 \in A$  mamy

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}((a_1 + I) \circ (a_2 + I)) &= \bar{\varphi}(a_1 \cdot a_2 + I) = \bar{\varphi}(\pi(a_1 \cdot a_2)) = \varphi(a_1 \cdot a_2) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2) \\ &= \bar{\varphi}(\pi(a_1)) \cdot \bar{\varphi}(\pi(a_2)) = \bar{\varphi}(a_1 + I) \cdot \bar{\varphi}(a_2 + I).\end{aligned}$$

Zatem  $\bar{\varphi}$  jest homomorfizmem algebr. □

Zaprezentujemy teraz konstrukcję przemienną algebry wolnej.

**Lemat 2.30.** *Niech  $X$  będzie zbiorem niepustym,  $F(X)$  algebrą wolną z konstrukcji 2.20, a  $I \subset F(X)$  ideałem dwustronnym generowanym przez zbiór*

$$\{e_{(u)(v)} - e_{(v)(u)} \mid u, v \in \Gamma(X)\}.$$

*Algebra ilorazowa  $F(X)/I$  jest przemienną algebrą wolną o zbiorze wolnych generatorów  $X$ .*

*Dowód.* Na początek sprawdzimy, że  $F(X)/I$  jest algebrą przemienną. Niech  $f, g \in F(X)$  będą dowolne, powiedzmy, że

$$f = \sum_{u \in \Gamma(X)} f_u e_u, \quad g = \sum_{v \in \Gamma(X)} g_v e_v,$$

gdzie  $f_u, g_v \in k$  i tylko skończenie wiele z nich jest różnych od zera. W tej sytuacji

$$f \cdot g = \sum_{u, v \in \Gamma(X)} (f_u \cdot g_v) e_{(u)(v)}$$

oraz

$$g \cdot f = \sum_{u, v \in \Gamma(X)} (f_u \cdot g_v) e_{(v)(u)}.$$

Zatem

$$f \cdot g - g \cdot f = \sum_{u, v \in \Gamma(X)} (f_u \cdot g_v) (e_{(u)(v)} - e_{(v)(u)}) \in I.$$

Na podstawie powyższych rozważań dostajemy

$$(f + I) \cdot (g + I) = f \cdot g + I = g \cdot f + I = (g + I) \cdot (f + I).$$

Pokazaliśmy zatem, że  $F(X)/I$  jest algebrą przemienną.

Rozważmy teraz dowolną algebrą przemienną  $B$  oraz dowolne odwzorowanie  $\varphi : X \rightarrow B$ . Ponieważ  $F(X)$  jest algebrą wolną o zbiorze wolnych generatorów  $X$ , więc istnieje dokładnie jeden homomorfizm algebr  $\hat{\varphi} : F(X) \rightarrow B$ , taki, że  $\hat{\varphi}|_X = \varphi$ .

Zauważmy, że  $I \subset \ker \hat{\varphi}$ . Istotnie, dla dowolnych  $u, v \in \Gamma(X)$ , na mocy przemienności algebry  $B$ , mamy

$$\hat{\varphi}(e_{(u)(v)}) = \hat{\varphi}(e_u \cdot e_v) = \hat{\varphi}(e_u) \cdot \hat{\varphi}(e_v) = \hat{\varphi}(e_v) \cdot \hat{\varphi}(e_u) = \hat{\varphi}(e_v \cdot e_u) = \hat{\varphi}(e_{(v)(u)}).$$

Zatem  $e_{(u)(v)} - e_{(v)(u)} \in \ker \hat{\varphi}$  dla każdych  $u, v \in \Gamma(X)$ . Ponieważ  $\ker \hat{\varphi}$  jest ideałem dwustronnym zawierającym zbiór generujący  $I$ , więc  $I \subset \ker \hat{\varphi}$ . Na podstawie lematu 2.29 istnieje dokładnie jeden homomorfizm algebr  $\bar{\varphi} : F(X)/I \rightarrow B$  taki, że  $\bar{\varphi} \circ \pi = \hat{\varphi}$ , gdzie  $\pi : F(X) \rightarrow F(X)/I$  jest epimorfizmem kanonicznym.

Oczywiście w tym kontekście element  $x \in X$  utożsamiamy z warstwą  $e_x + I$  elementu  $e_x \in F(X)$ . Z przeprowadzonej konstrukcji jest jasne, że dla każdego  $x \in X$  mamy

$$\bar{\varphi}(e_x + I) = \hat{\varphi}(e_x) = \varphi(x). \quad (2.10)$$

Pokażemy teraz, że  $\bar{\varphi}$  jest jedynym homomorfizmem  $F(X)/I \rightarrow B$  będącym rozszerzeniem odwzorowania  $\varphi$ . Załóżmy, więc że  $\bar{\psi} : F(X)/I \rightarrow B$  jest homomorfizmem takim, że  $\bar{\psi}(e_x + I) = \varphi(x)$  dla każdego  $x \in X$ . Kładąc  $\hat{\psi} = \bar{\psi} \circ \pi$  dostalibyśmy homomorfizm  $F(X) \rightarrow B$  taki, że  $\hat{\psi}(e_x) = \bar{\psi}(e_x + I) = \varphi(x)$ ,  $x \in X$ . Z faktu, że  $F(X)$  jest algebrą wolną dostalibyśmy  $\hat{\psi} = \hat{\varphi}$ . Zatem na mocy lematu 2.29 zachodzi równość  $\bar{\psi} = \bar{\varphi}$ .  $\square$

W podobny sposób dowodzimy następujące lematy:

**Lemat 2.31.** *Niech  $X$  będzie zbiorem niepustym,  $F(X)$  algebrą wolną z konstrukcji 2.20, a  $I \subset F(X)$  ideałem dwustronnym generowanym przez zbiór*

$$\{e_{(u)((v)(w))} - e_{((u)(v))(w)} \mid u, v, w \in \Gamma(X)\}.$$

*Algebra ilorazowa  $F(X)/I$  jest łączną algebrą wolną o zbiorze wolnych generatorów  $X$ .*

**Lemat 2.32.** *Niech  $X$  będzie zbiorem niepustym,  $F(X)$  algebrą wolną z konstrukcji 2.20, a  $I \subset F(X)$  ideałem dwustronnym generowanym przez zbiór*

$$\{e_{(u)(v)} - e_{(v)(u)} \mid u, v \in \Gamma(X)\} \cup \{e_{(u)((v)(w))} - e_{((u)(v))(w)} \mid u, v, w \in \Gamma(X)\}.$$

*Algebra ilorazowa  $F(X)/I$  jest przemienną, łączną algebrą wolną o zbiorze wolnych generatorów  $X$ .*

## 2.4. Konstrukcja algebry Liego

W niniejszym podrozdziale możemy dokończyć konstrukcję wolnej algebry Liego o danym zbiorze generatorów.

**Lemat 2.33.** *Niech  $X$  będzie zbiorem niepustym,  $F(X)$  algebrą wolną z konstrukcji 2.20, a  $I \subset F(X)$  ideałem dwustronnym generowanym przez zbiór*

$$\{e_{(u)(v)} + e_{(v)(u)} \mid u, v \in \Gamma(X)\} \cup \{e_{(u)((v)(w))} + e_{(v)((w)(u))} + e_{(w)((u)(v))} \mid u, v, w \in \Gamma(X)\}.$$

*Algebra ilorazowa  $F(X)/I$  jest wolną algebrą Liego o zbiorze wolnych generatorów  $X$ .*

*Dowód.* W tym dowodzie dla dowolnych  $f, g \in F(X)$  zamiast pisać  $(f+I) \circ (g+I)$  jak w lemacie 2.27, będziemy pisać  $[f+I, g+I]$ . W szczególności  $[f+I, g+I]$  z definicji równy jest  $f \cdot g + I$ . Sprawdźmy najpierw, że  $F(X)/I$  jest algebrą Liego. Weźmy dowolne  $f, g, h \in F(X)$ . Mamy

$$f = \sum_{u \in \Gamma(X)} f_u e_u, \quad g = \sum_{v \in \Gamma(X)} g_v e_v, \quad h = \sum_{w \in \Gamma(X)} h_w e_w,$$

gdzie  $f_u, g_v, h_w \in k$  przy czym tylko skończenie wiele z nich jest różnych od zera.

W tej sytuacji mamy

$$\begin{aligned} f \cdot g + g \cdot f &= \sum_{u, v \in \Gamma(X)} (f_u g_v)(e_u \cdot e_v + e_v \cdot e_u) \\ &= \sum_{u, v \in \Gamma(X)} (f_u g_v)(e_{(u)(v)} + e_{(v)(u)}) \in I. \end{aligned}$$

Zatem  $[f+I, g+I] + [g+I, f+I] = 0$  dla dowolnych  $f, g \in F(X)$ , czyli odwzorowanie  $[-, -]$  jest antysymetryczne.

Analogicznie mamy

$$\begin{aligned} f \cdot (g \cdot h) + g \cdot (h \cdot f) + h \cdot (f \cdot g) \\ = \sum_{u, v, w \in \Gamma(X)} (f_u g_v h_w)(e_{(u)((v)(w))} + e_{(v)((w)(u))} + e_{(w)((u)(v))}) \in I. \end{aligned}$$

Zatem  $[f+I, [g+I, h+I]] + [g+I, [h+I, f+I]] + [h+I, [f+I, g+I]] = 0$  dla dowolnych  $f, g, h \in F(X)$ , czyli odwzorowanie  $[-, -]$  spełnia tożsamość Jacobiego. Sprawdziliśmy więc, że algebra ilorazowa  $F(X)/I$  jest algebrą Liego.

Ponieważ dalsza część dowodu przebiega analogicznie jak dowód lematu 2.30, ograniczymy się do sprawdzenia, że ideał  $I$  zawiera się w jądrze homomorfizmu pomocniczego występującego w dowodzie wspomnianego lematu 2.30. Niech zatem  $B$  wraz z iloczynem  $[-, -]_2$  będzie dowolną algebrą Liego, a  $\hat{\varphi} : F(X) \rightarrow B$  homomorfizmem algebr analogicznym jak w dowodzie lematu 2.30.

Pokażemy, że  $I \subset \ker \hat{\varphi}$ . Dla dowolnych  $u, v, w \in \Gamma(X)$ , z faktu, że  $B$  jest algebrą Liego, dostajemy

$$\hat{\varphi}(e_{(u)(v)} + e_{(v)(u)}) = \hat{\varphi}(e_u \cdot e_v) + \hat{\varphi}(e_v \cdot e_u) = [\hat{\varphi}(e_u), \hat{\varphi}(e_v)]_2 + [\hat{\varphi}(e_v), \hat{\varphi}(e_u)]_2 = 0$$

oraz

$$\begin{aligned} &\hat{\varphi}(e_{(u)((v)(w))} + e_{(v)((w)(u))} + e_{(w)((u)(v))}) \\ &= \hat{\varphi}(e_{(u)((v)(w))}) + \hat{\varphi}(e_{(v)((w)(u))}) + \hat{\varphi}(e_{(w)((u)(v))}) \\ &= [\hat{\varphi}(e_u), [\hat{\varphi}(e_v), \hat{\varphi}(e_w)]_2]_2 + [\hat{\varphi}(e_v), [\hat{\varphi}(e_w), \hat{\varphi}(e_u)]_2]_2 + [\hat{\varphi}(e_w), [\hat{\varphi}(e_u), \hat{\varphi}(e_v)]_2]_2 = 0. \end{aligned}$$

Sprawdziliśmy więc, że zbiór generujący ideał (dwustronny)  $I$  zawiera się w  $\ker \hat{\varphi}$ , a stąd wnioskujemy, że  $I \subset \ker \hat{\varphi}$ .  $\square$

Wolną algebrą Liego skonstruowaną w powyższym lemacie będziemy oznaczać przez  $L(X)$ . Ponadto przez  $\tilde{\Gamma}(X)$  będziemy oznaczać następujący podzbiór  $L(X)$ :

$$\{e_u + I \mid u \in \Gamma(X), e_u \notin I\}.$$

Z przeprowadzonej konstrukcji algebry  $L(X)$  jasne jest, że dowolny element tej algebry jest kombinacją liniową elementów ze zbioru  $\tilde{\Gamma}(X)$ . Okazuje się, że nie wszystkie elementy zbioru  $\tilde{\Gamma}(X)$  są potrzebne do wygenerowania  $L(X)$  jako przestrzeni liniowej nad  $k$ .

**Lemat 2.34.** *Każdy element algebry Liego  $L(X)$  można zapisać w postaci kombinacji liniowej (nad  $k$ ) elementów postaci*

$$[y_1, [y_2, [\dots, [y_{d-1}, y_d] \dots]], \quad (2.11)$$

gdzie  $d \in \mathbb{N}_+$  oraz  $y_1, \dots, y_d \in X$  <sup>4</sup>.

Zanim przejdziemy do dowodu powyższego lematu wprowadzimy gradację w algebrze  $L(X)$ . W tym celu rozważymy najpierw gradację w algebrze  $F(X)$ :

$$F(X) = \bigoplus_{d=1}^{\infty} F_d(X), \quad (2.12)$$

gdzie  $F_d(X) = \bigoplus_{\mu \in \Gamma_d(X)} k \cdot e_\mu$ .

Z faktu, że każdy element zbioru generującego ideał  $I$  z lematu 2.33 jest elementem jednorodnym względem gradacji (2.12), wynika, że ideał ten jest jednorodny. Zatem dla dowolnych  $u, v \in \Gamma(X)$  prawdziwa jest następująca implikacja:

$$e_u - e_v \in I \Rightarrow d(u) = d(v) \text{ lub } e_u, e_v \in I.$$

Pozwala to przenieść funkcję  $d$  określoną na zbiorze  $\Gamma(X)$  na zbiór  $\tilde{\Gamma}(X)$ , a następnie przy jej pomocy zdefiniować funkcję stopnia w  $L(X)$ , która zadaje gradację:

$$L(X) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_n(X),$$

gdzie

$$L_n(X) = \sum_{f \in \tilde{\Gamma}_n(X)} k \cdot f$$

oraz  $\tilde{\Gamma}_n(X) = \{e_u + I \mid u \in \Gamma_n(X), e_u \notin I\}$ .

*Dowód. (lematu 2.34)* Ponieważ dowolny element algebry Liego  $L(X)$  jest kombinacją liniową elementów ze zbioru  $\tilde{\Gamma}(X)$ , wystarczy więc pokazać, że dowolny element ze zbioru  $\tilde{\Gamma}(X)$  jest kombinacją liniową elementów postaci (2.11).

Dowód przeprowadzimy ze względu na stopień  $t$  elementu  $f$  z  $\tilde{\Gamma}(X)$ . Przypadek, gdy  $t = 1$  lub  $t = 2$ , nie wymaga dowodu. Natomiast dla  $t = 3$  mamy dwa przypadki: (1)  $f = [y_1, [y_2, y_3]]$  lub (2)  $f = [[y_1, y_2], y_3]$ . W pierwszym przypadku element  $f$  jest już żądanej postaci, natomiast w drugim mamy  $f = -[y_3, [y_1, y_2]]$ .

Założmy teraz, że dla pewnego  $t \geq 3$  wiemy już, że dowolny element z  $\tilde{\Gamma}(X)$  stopnia mniejszego lub równego  $t$  jest kombinacją liniową elementów postaci (2.11). Weźmy dowolny element z  $\tilde{\Gamma}(X)$  stopnia  $t + 1$ . Z definicji zbioru  $\Gamma(X)$  element ten jest postaci  $[u, v]$ , gdzie  $u, v \in \tilde{\Gamma}(X)$  są elementami stopni, odpowiednio,  $t_1, t_2 \leq t$ .

4. Zbiór  $X$  utożsamiamy ze zbiorem warstw  $e_x + I$ , gdzie  $x \in X$ , czyli ze zbiorem  $\tilde{\Gamma}_1(X)$ .

Z założenia indukcyjnego  $u$  oraz  $v$  są kombinacjami liniowymi elementów postaci (2.11), oczywiście odpowiednio stopni  $t_1, t_2$ . Ze względu na dwuliniowość nawiasu Liego możemy założyć, że już  $u$  i  $v$  są elementami postaci (2.11). Ponieważ  $[u, v] = -[v, u]$ , możemy założyć, że  $t_1 \leq t_2$ .

Dalsza część rozumowania będzie przez indukcję ze względu na  $t_1$ . W przypadku gdy  $t_1 = 1$ , element  $[u, v]$  jest już postaci (2.11). Załóżmy zatem, że  $t_2 \geq t_1 > 1$ . Wtedy

$$u = [y_1, \bar{y}_1], \quad v = [y_2, \bar{y}_2],$$

gdzie  $y_1, y_2 \in \tilde{\Gamma}_1(X)$ ,  $\bar{y}_1 \in \tilde{\Gamma}_{t_1-1}(X)$ ,  $\bar{y}_2 \in \tilde{\Gamma}_{t_2-1}(X)$ , przy czym  $\bar{y}_1, \bar{y}_2$  są postaci (2.11). Korzystając teraz z antysymetryczności nawiasu Liego oraz z tożsamości Jacobiego dostajemy:

$$[u, v] = -[v, u] = -[[y_2, \bar{y}_2], [y_1, \bar{y}_1]] = [y_1, [\bar{y}_1, [y_2, \bar{y}_2]]] + [\bar{y}_1, [[y_2, \bar{y}_2], y_1]]. \quad (2.13)$$

Ponieważ stopień elementu  $[\bar{y}_1, [y_2, \bar{y}_2]]$  jest równy  $t$ , więc jest on kombinacją liniową elementów postaci (2.11) i tym samym pierwszy składnik sumy (2.13) jest kombinacją liniową takich elementów.

Elementy  $[y_1, [y_2, \bar{y}_2]]$  oraz  $\bar{y}_1$  są już postaci (2.11), a ponadto stopień elementu  $\bar{y}_1$  wynosi  $t_1 - 1$ , więc możemy skorzystać z założenia indukcyjnego (ze względu na  $t_1$ ) dostając, że również drugi składnik sumy (2.13) jest kombinacją liniową elementów postaci (2.11).  $\square$

Przyjmijmy teraz, że zbiór  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  jest zbiorem skończonym oraz rozważmy zbiory:

$$\tilde{B}_d(X) = \{[y_1, [y_2, [\dots, [y_{d-1}, y_d] \dots]] \mid (y_1, \dots, y_d) \in X^d\} \subset \tilde{\Gamma}_d(X) \cup \{0\}.$$

Do zbiorów tych należą również elementy zerowe, np.  $[x_1, x_1] \in \tilde{B}_2(X)$ , czy  $[x_1, [x_2, x_2]] \in \tilde{B}_3(X)$ . Z poprzedniego lematu wynika, że zbiór:

$$\tilde{B}(X) = \bigcup_{d=1}^{\infty} \tilde{B}_d(X)$$

generuje  $L(X)$  jako przestrzeń liniową. Dla każdego  $d = 1, 2, \dots$  w zbiorze  $X^d$  możemy rozważyć porządek leksykograficzny (w  $X^1 = X$  mamy  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ). Obecnie dla  $d = 1, 2, \dots$  utworzymy zbiór  $B_d(X) \subset \tilde{B}_d(X)$  w następujący sposób. Startując od zbioru pustego, jako początkowa wartość zbioru  $B_d(X)$ , będziemy brali w kolejności leksykograficznej elementy zbioru  $X^d$  i odpowiadające im elementy zbioru  $\tilde{B}_d(X)$ . Gdy wybrany w ten sposób element nie jest kombinacją liniową wcześniej dołączonych elementów do zbioru  $B_d(X)$ , to również go dołączamy do tego zbioru. Ponieważ zbiór  $X^d$  jest skończony, to po skończonej liczbie kroków mamy w pełni zdefiniowany zbiór  $B_d(X)$ . Z konstrukcji zbioru  $B_d(X)$  wynika, że jest to zbiór liniowo niezależny, a ponadto generuje tę samą podprzestrzeń liniową w  $L(X)$  co  $\tilde{B}_d(X)$ . Z powyższych rozważań wynika, że zbiór

$$B(X) = \bigcup_{d=1}^{\infty} B_d(X)$$

jest bazą  $L(X)$  rozpatrywanej jako przestrzeń liniowa.

Od tej pory, gdy będziemy posługiwać się bazą przestrzeni liniowej  $L(X)$ , to będziemy korzystać z wyżej skonstruowanej bazy  $B(X)$ . Dodatkowo w zbiorze  $B(X)$  będziemy rozważać kolejność elementów ze względu na stopień, tzn. elementy zbioru  $B_{d_1}(X)$  poprzedzają elementy zbioru  $B_{d_2}(X)$  dla  $d_1 < d_2$ , natomiast wewnątrz zbiorów  $B_d(X)$  zgodnie z kolejnością dołączania do zbioru  $B_d(X)$ , odpowiadającą kolejności leksykograficznej w  $X^d$ . W szczególności mamy:

$$\begin{aligned} B_1(X) &= \{x_1, \dots, x_n\}, \\ B_2(X) &= \{[x_1, x_2], [x_1, x_3], \dots, [x_1, x_n], \\ &\quad [x_2, x_3], \dots, [x_2, x_n] \\ &\quad \vdots \\ &\quad [x_{n-1}, x_n]\}, \end{aligned}$$

przy czym elementy występujące po prawej stronie powyższych równości wymienione są zgodnie z kolejnością opisaną we wcześniejszych rozważaniach.

## 2.5. Konstrukcja algebry Poissona

Celem niniejszego podrozdziału jest zaprezentowanie ostatniego kroku konstrukcji wolnej algebry Poissona o danym zbiorze wolnych generatorów  $X$ . Przyjmować będziemy tutaj, że zbiór  $X$  jest przeliczalny, chociaż interesuje nas przypadek, gdy zbiór  $X$  jest zbiorem skończonym. Zaczniemy od przypomnienia pojęcia algebry Poissona.

**Definicja 2.35 (algebra Poissona, nawias Poissona).** Niech  $V$  będzie przestrzenią wektorową nad ciałem  $k$  wyposażoną w dwie dwuliniowe operacje: mnożenia  $\cdot : V \times V \ni (a, b) \mapsto ab \in V$  oraz nawiasu Liego  $[-, -] : V \times V \ni (a, b) \mapsto [a, b] \in V$ . Przestrzeń  $V$  wraz z wyżej wymienionymi dwoma operacjami nazywamy *algebrą Poissona* jeśli jest ona łączną algebrą przemianą ze względu na mnożenie  $\cdot$ , jest algebrą Liego ze względu na  $[-, -]$  oraz spełnia warunek Leibniza  $[ab, c] = [a, c]b + a[b, c]$  dla każdych  $a, b, c \in V$ . W sytuacji, gdy wiadomo, w jakie operacje dwuliniowe wyposażona jest przestrzeń  $V$ , to przestrzeń  $V$  będziemy po prostu nazywać algebrą Poissona. Gdy  $V$  jest algebrą Poissona, nawias Liego jest nazywany *nawiasem Poissona*.

**Uwaga 2.36.** *Nawias Poissona spełnia regułę Leibniza również ze względu na drugą zmienną, tzn.  $[a, bc] = [a, b]c + b[a, c]$ .*

*Dowód.* Zauważmy, że  $[a, bc] = -[bc, a] = -([b, a]c + b[c, a]) = -[b, a]c - b[c, a] = [a, b]c + b[a, c]$ .  $\square$

Aby zdefiniować pojęcie wolnej algebry Poissona potrzebujemy pojęcia homomorfizmu algebr Poissona.

**Definicja 2.37 (homomorfizm algebr Poissona).** Niech  $P$  wraz z działaniami  $\cdot$  i  $[-, -]_P$  oraz  $B$  wraz z działaniami  $\circ$  i  $[-, -]_B$  będą dwiema algebrami Poissona nad tym samym ciałem  $k$ . Odwzorowanie  $k$ -liniowe  $f : P \rightarrow B$  nazywamy *homomorfizmem algebr Poissona*, gdy dodatkowo spełnia dwa warunki:

(a)  $f(p_1 \cdot p_2) = f(p_1) \circ f(p_2)$  dla każdych  $p_1, p_2 \in P$ ,

(b)  $f([p_1, p_2]_P) = [f(p_1), f(p_2)]_B$  dla każdych  $p_1, p_2 \in P$ .

Możemy teraz przedstawić definicję wolnej algebry Poissona.

**Definicja 2.38 (wolna algebra Poissona).** Niech  $P$  będzie algebrą Poissona, a  $X \subset P$  zbiorem niepustym. Mówimy, że  $P$  jest wolną algebrą Poissona o zbiorze wolnych generatorów  $X$ , gdy dla dowolnej algebry Poissona  $B$  oraz dowolnego odwzorowania  $\varphi : X \rightarrow B$  istnieje dokładnie jeden homomorfizm algebr Poissona  $\bar{\varphi} : P \rightarrow B$  taki, że  $\bar{\varphi}|_X = \varphi$ .

Teraz możemy przejść do konstrukcji wolnej algebry Poissona o danym zbiorze wolnych generatorów  $X$ . Konstrukcja ta będzie przebiegać w następujący sposób. Najpierw mając dany zbiór przeliczalny  $X$ , konstruujemy wolną algebrę Liego  $L(X)$  o danym zbiorze wolnych generatorów  $X$ . Następnie dokonujemy rozszerzenia algebry Liego  $L(X)$  do algebry Poissona, która to okaże się być wolną algebrą Poissona o zbiorze wolnych generatorów  $X$ . Ponieważ konstrukcję wolnej algebry Liego  $L(X)$  przedstawiliśmy w podrozdziale 2.4, więc została do zaprezentowania konstrukcja rozszerzenia  $L(X)$  do algebry Poissona i wykazanie, że to rozszerzenie jest właśnie szukaną wolną algebrą Poissona o zbiorze wolnych generatorów  $X$ .

Konstrukcję wspomnianego wyżej rozszerzenia do algebry Poissona zaprezentujemy w nieco ogólniejszym kontekście, a mianowicie dla dowolnej algebry Liego, która jako przestrzeń liniowa nad  $k$  posiada bazę przeliczalną. Oczywiście w tej sytuacji uzyskana algebra Poissona nie musi być wolną algebrą Poissona. W przypadku, gdy rozszerzaną algebrą Liego będzie wolna algebra Liego  $L(X)$  o zbiorze wolnych generatorów  $X$ , wtedy uzyskana algebra Poissona będzie wolną algebrą Poissona (o zbiorze wolnych generatorów  $X$ ).

**Konstrukcja 2.39.** Załóżmy, że  $L$  jest taką algebrą Liego nad ciałem  $k$ , że  $L$  jako przestrzeń liniowa nad  $k$  posiada bazę przeliczalną  $l_1, l_2, \dots$ . Przez  $P(L)$  będziemy oznaczać pierścień wielomianów przeliczalnej liczby zmiennych  $l_1, l_2, \dots$ , tzn.:

$$P(L) = \bigcup_{n=1}^{\infty} k[l_1, \dots, l_n].$$

Zbiór  $P(L)$  jest oczywiście przestrzenią liniową nad  $k$ , gdzie dodawanie wektorów to dodawanie wielomianów, a mnożenie wektorów przez skalary to restrykcja mnożenia wielomianów do przypadku, gdy pierwszy z czynników jest wielomianem stałym (elementem ciała  $k$ ). Przestrzeń liniowa  $P(L)$  wraz z mnożeniem wielomianów jest zatem algebrą przemianą nad ciałem  $k$ . Jednocześnie  $L = \bigoplus_{n=1}^{\infty} kl_n \subset P(L)$  jest podprzestrzenią liniową  $P(L)$ . Zatem  $P(L)$  jest rozszerzeniem przestrzeni liniowej  $L$ . Obecnie zajmiemy się rozszerzeniem nawiasu Liego  $[-, -] : L \times L \rightarrow L$  do przestrzeni  $P(L)$  tak, aby otrzymane rozszerzenie  $[-, -]_P : P(L) \times P(L) \rightarrow P(L)$  było nawiasem Poissona.

Weźmy dowolne  $f, g \in P(L)$ . Ponieważ dowolny wielomian z  $P(L)$  jest wielomianem skończonej liczby zmiennych, więc możemy założyć, że  $f, g \in k[l_1, \dots, l_r]$  dla pewnego  $r \in \mathbb{N}$ . Niech

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r} f_{\alpha}(l_1, \dots, l_r)^{\alpha},$$

$$g = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^r} g_\beta (l_1, \dots, l_r)^\beta,$$

gdzie dla  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \mathbb{N}^r$  przez  $(l_1, \dots, l_r)^\gamma$  oznaczamy  $l_1^{\gamma_1} \cdots l_r^{\gamma_r}$ . Oczywiście w powyższych sumach tylko skończenie wiele  $f_\alpha, g_\beta \in k$  jest różnych od zera. Innymi słowy, powyższe sumy są skończone. Załóżmy, że  $[-, -]_P : P(L) \times P(L) \rightarrow P(L)$  jest rozszerzeniem nawiasu Liego  $[-, -] : L \times L \rightarrow L$ , które jest nawiasem Poissona w  $P(L)$ . W szczególności  $[-, -]_P$  jest odwzorowaniem dwuliniowym (nad  $k$ ), więc

$$[f, g]_P = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^r} f_\alpha g_\beta [(l_1, \dots, l_r)^\alpha, (l_1, \dots, l_r)^\beta]_P \quad (2.14)$$

Ponadto  $[f, g]_P$  spełnia regułę Leibniza, więc:

$$\begin{aligned} [(l_1, \dots, l_r)^\alpha, (l_1, \dots, l_r)^\beta]_P &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (l_1, \dots, l_r)^{\alpha - e_i} [l_i, (l_1, \dots, l_r)^\beta]_P \\ &= \sum_{i,j=1}^r \alpha_i \beta_j (l_1, \dots, l_r)^{\alpha + \beta - e_i - e_j} [l_i, l_j], \end{aligned} \quad (2.15)$$

gdzie  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_r = (0, \dots, 0, 1)$ . Zauważmy, że w powyższej sumie, gdy  $\alpha_i \beta_j \neq 0$ , wtedy każda składowa wielowskaźnika  $\alpha + \beta - e_i - e_j$  jest nieujemna.

Na podstawie (2.14) i (2.15) dostajemy

$$[f, g]_P = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^r} \sum_{i,j=1}^r f_\alpha g_\beta \alpha_i \beta_j (l_1, \dots, l_r)^{\alpha + \beta - e_i - e_j} [l_i, l_j]. \quad (2.16)$$

Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli  $[-, -]_P : P(L) \times P(L) \rightarrow P(L)$  jest rozszerzeniem nawiasu Liego  $[-, -]$ , będącym nawiasem Poissona, to musi być dany formułą (2.16). Zauważmy ponadto, że gdy  $s \in \mathbb{N}, s \geq r$  oraz  $f, g$  potraktujemy jako wielomiany z  $k[l_1, \dots, l_s] \supset k[l_1, \dots, l_r]$ , oraz zastosujemy formułę (2.16) dla  $k[l_1, \dots, l_s]$  to uzyskamy taką samą wartość  $[f, g]_P$ .

Łatwo sprawdzić, że odwzorowanie  $[-, -]_P$  określone formułą (2.16) jest odwzorowaniem dwuliniowym (nad  $k$ ). Sprawdźmy teraz, że  $[-, -]_P$  spełnia regułę Leibniza. Weźmy zatem dowolne  $f, g, h \in P(L)$ . Możemy założyć, że  $f, g, h \in k[l_1, \dots, l_r]$  oraz

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r} f_\alpha l^\alpha, \quad g = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^r} g_\beta l^\beta, \quad h = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^r} h_\gamma l^\gamma,$$

gdzie  $l^\alpha$  dla  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  oznacza  $(l_1, \dots, l_r)^\alpha = l_1^{\alpha_1} \cdots l_r^{\alpha_r}$ .

Korzystając z dwuliniowości  $[-, -]_P$  mamy

$$[fg, h]_P = \sum_{\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^r} f_\alpha g_\beta h_\gamma [l^\alpha l^\beta, l^\gamma]_P \quad (2.17)$$

oraz

$$f[g, h]_P + g[f, h]_P = \sum_{\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^r} f_\alpha g_\beta h_\gamma (l^\alpha [l^\beta, l^\gamma]_P + l^\beta [l^\alpha, l^\gamma]_P). \quad (2.18)$$

Ponadto, na podstawie formuły (2.16), mamy

$$[l^\alpha l^\beta, l^\gamma]_P = [l^{\alpha+\beta}, l^\gamma]_P = \sum_{i,j=1}^r (\alpha_i + \beta_i) \gamma_j l^{\alpha+\beta+\gamma-e_i-e_j} [l_i, l_j] \quad (2.19)$$

oraz

$$\begin{aligned} l^\alpha [l^\beta, l^\gamma]_P + l^\beta [l^\alpha, l^\gamma]_P &= \sum_{i,j=1}^r l^\alpha \beta_i \gamma_j l^{\beta+\gamma-e_i-e_j} [l_i, l_j] + \sum_{i,j=1}^r l^\beta \alpha_i \gamma_j l^{\alpha+\gamma-e_i-e_j} [l_i, l_j] \\ &= \sum_{i,j=1}^r (\alpha_i + \beta_i) \gamma_j l^{\alpha+\beta+\gamma-e_i-e_j} [l_i, l_j]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Z równości (2.17) - (2.20) dostajemy, że  $[fg, h]_P = f[g, h]_P + g[f, h]_P$ . Pokazaliśmy zatem, że  $[-, -]_P$  spełnia regułę Leibniza.

Przejdźmy do wykazania, że odwzorowanie  $[-, -]_P$  spełnia tożsamość Jacobiego, przy czym od teraz będziemy pisać  $[-, -]$  zamiast  $[-, -]_P$ . W tym celu rozważmy odwzorowanie

$$J : P(L) \times P(L) \times P(L) \ni (f, g, h) \mapsto J(f, g, h) \in P(L),$$

gdzie

$$J(f, g, h) = [f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]].$$

Pokażemy, że odwzorowanie  $J$  jest tożsamościowo równe zero, co będzie oznaczać, że  $[-, -]$  spełnia tożsamość Jacobiego. Z faktu, że  $[-, -]$  jest odwzorowaniem dwuliniowym wynika, że  $J$  jest odwzorowaniem trójliniowym. Zatem aby pokazać, że  $J \equiv 0$ , wystarczy sprawdzić, że  $J(f, g, h) = 0$ , gdzie  $f, g, h$  są jednomianami (unitarnymi) zmiennych  $l_1, l_2, \dots$ . Dalej, dla dowolnego ciągu  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$  o wyrazach naturalnych takiego, że  $|\alpha| = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty$ , przez  $l^\alpha$  będziemy oznaczać iloczyn  $\prod_{i=1}^{\infty} l_i^{\alpha_i} \in P(L)$ . Ponieważ  $|\alpha| < \infty$ , więc powyższy iloczyn jest dobrze określonym iloczynem skończonej liczby czynników.

Weźmy dowolne  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  takie, że  $|\alpha|, |\beta|, |\gamma| < \infty$ . Chcemy pokazać, że  $J(l^\alpha, l^\beta, l^\gamma) = 0$ . Na początek zauważmy, że możemy założyć, że  $|\alpha|, |\beta|, |\gamma| > 0$ . Istotnie, gdyby na przykład  $|\alpha| = 0$ , wtedy  $l^\alpha = 1$ , a  $[1, P] = 0$  dla każdego  $P \in P(L)$ , gdyż  $[1, P] = [1 \cdot 1, P] = 1[1, P] + 1[1, P]$ . Z powyższego wynika, że każdy ze składników definiujących  $J(l^\alpha, l^\beta, l^\gamma)$  jest równy zero.

Teraz załóżmy, że  $|\alpha|, |\beta|, |\gamma| > 0$ . Dowód w tym przypadku przeprowadzimy przez indukcję ze względu na  $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$ . Gdy  $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = 3$ , wtedy  $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$  i tym samym istnieją takie  $i, j, k \in \mathbb{N}$ , że  $l^\alpha = l_i$ ,  $l^\beta = l_j$ ,  $l^\gamma = l_k$ . Ponieważ w tej sytuacji  $l^\alpha, l^\beta, l^\gamma \in L$ , więc  $J(l^\alpha, l^\beta, l^\gamma) = 0$ , gdyż  $L$  jest algebrą Liego.

Weźmy teraz dowolne  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  takie, że  $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = d > 3$ ,  $d < \infty$  i załóżmy, że dla dowolnych  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  takich, że  $|\tilde{\alpha}| + |\tilde{\beta}| + |\tilde{\gamma}| < d$  mamy  $J(l^{\tilde{\alpha}}, l^{\tilde{\beta}}, l^{\tilde{\gamma}}) = 0$ . Ponieważ  $J(l^\alpha, l^\beta, l^\gamma) = J(l^\beta, l^\gamma, l^\alpha) = J(l^\gamma, l^\alpha, l^\beta)$ , więc możemy założyć, że  $|\alpha| > 1$ . Istnieje zatem takie  $i \in \mathbb{N}$ , że  $\alpha = \bar{\alpha} + e_i$ , gdzie  $\bar{\alpha}, e_i \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  oraz  $e_i$  ma jedynkę na  $i$ -tym miejscu i zera na pozostałych. W tej sytuacji

$$J(l^\alpha, l^\beta, l^\gamma) = J(l_i l^{\bar{\alpha}}, l^\beta, l^\gamma) = [l_i l^{\bar{\alpha}}, [l^\beta, l^\gamma]] + [l^\beta, [l^\gamma, l_i l^{\bar{\alpha}}]] + [l^\gamma, [l_i l^{\bar{\alpha}}, l^\beta]]. \quad (2.21)$$

Z faktu, że  $[-, -]$  spełnia regułę Leibniza, dostajemy

$$[l_i l^{\bar{\alpha}}, [l^{\beta}, l^{\gamma}]] = l_i [l^{\bar{\alpha}}, [l^{\beta}, l^{\gamma}]] + l^{\bar{\alpha}} [l_i, [l^{\beta}, l^{\gamma}]], \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} [l^{\beta}, [l^{\gamma}, l_i l^{\bar{\alpha}}]] &= [l^{\beta}, l_i [l^{\gamma}, l^{\bar{\alpha}}] + l^{\bar{\alpha}} [l^{\gamma}, l_i]] = [l^{\beta}, l_i [l^{\gamma}, l^{\bar{\alpha}}]] + [l^{\beta}, l^{\bar{\alpha}} [l^{\gamma}, l_i]] \\ &= l_i [l^{\beta}, [l^{\gamma}, l^{\bar{\alpha}}]] + [l^{\gamma}, l^{\bar{\alpha}}] [l^{\beta}, l_i] + l^{\bar{\alpha}} [l^{\beta}, [l^{\gamma}, l_i]] + [l^{\gamma}, l_i] [l^{\beta}, l^{\bar{\alpha}}], \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} [l^{\gamma}, [l_i l^{\bar{\alpha}}, l^{\beta}]] &= [l^{\gamma}, l_i [l^{\bar{\alpha}}, l^{\beta}] + l^{\bar{\alpha}} [l_i, l^{\beta}]] = [l^{\gamma}, l_i [l^{\bar{\alpha}}, l^{\beta}]] + [l^{\gamma}, l^{\bar{\alpha}} [l_i, l^{\beta}]] \\ &= l_i [l^{\gamma}, [l^{\bar{\alpha}}, l^{\beta}]] + [l^{\bar{\alpha}}, l^{\beta}] [l^{\gamma}, l_i] + l^{\bar{\alpha}} [l^{\gamma}, [l_i, l^{\beta}]] + [l_i, l^{\beta}] [l^{\gamma}, l^{\bar{\alpha}}]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Dodając stronami (2.22)-(2.24) i korzystając z (2.21) dostajemy:

$$J(l^{\alpha}, l^{\beta}, l^{\gamma}) = l_i J(l^{\bar{\alpha}}, l^{\beta}, l^{\gamma}) + l^{\bar{\alpha}} J(l^{e_i}, l^{\beta}, l^{\gamma}). \quad (2.25)$$

Ponieważ  $|\bar{\alpha}| + |\beta| + |\gamma|, |e_i| + |\beta| + |\gamma| < d$ , więc  $J(l^{\bar{\alpha}}, l^{\beta}, l^{\gamma}) = 0$  oraz  $J(l^{e_i}, l^{\beta}, l^{\gamma}) = 0$ . Podstawiając powyższe równości do (2.25) dostajemy, że  $J(l^{\alpha}, l^{\beta}, l^{\gamma}) = 0$ . Kończy to dowód faktu, że  $J \equiv 0$  i całą konstrukcję.

**Lemat 2.40.** *Niech  $L$  wraz z iloczynem Liego  $[-, -]_L$  będzie algebrą Liego o przeliczalnej bazie  $l_1, l_2, \dots$ , a  $B$  wraz z iloczynem  $\cdot$  oraz iloczynem Poissona  $[-, -]_B$  będzie algebrą Poissona. Ponieważ  $B$  wraz z  $[-, -]_B$  jest algebrą Liego, więc możemy rozważyć homomorfizm algebr Liego  $\varphi : L \rightarrow B$ . W tej sytuacji istnieje dokładnie jeden homomorfizm algebr Poissona  $\bar{\varphi} : P(L) \rightarrow B$  taki, że  $\bar{\varphi}|_L = \varphi$ , gdzie  $P(L)$  jest algebrą Poissona z konstrukcji 2.39.*

*Dowód.* Dla dowolnego wielomianu  $f \in P(L)$  istnieje takie  $r \in \mathbb{N}$ , że  $f \in k[l_1, \dots, l_r]$ . Wtedy

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r} f_{\alpha} l^{\alpha},$$

gdzie  $f_{\alpha} \in k$  i tylko skończenie wiele z nich jest różnych od zera. Wartość odwzorowania  $\bar{\varphi}(f)$  definiujemy formułą

$$\bar{\varphi}(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r} f_{\alpha} \varphi(l_1)^{\alpha_1} \cdots \varphi(l_r)^{\alpha_r}. \quad (2.26)$$

Oczywiście wartość  $\bar{\varphi}(f)$  dana wzorem (2.26) nie zależy od tego czy  $f$  potraktujemy jako element  $k[l_1, \dots, l_r]$ , czy  $k[l_1, \dots, l_s]$  dla  $s \geq r$ .

Ponieważ dla dowolnych  $f, g \in P(L)$  istnieje takie  $r \in \mathbb{N}$ , że  $f, g \in k[l_1, \dots, l_r]$ , można więc sprawdzić, że odwzorowanie  $\bar{\varphi} : P(L) \rightarrow B$  jest liniowe oraz spełnia warunek

$$\bar{\varphi}(fg) = \bar{\varphi}(f)\bar{\varphi}(g) \quad (2.27)$$

dla dowolnych  $f, g \in P(L)$ . Ponadto żądanie, aby  $\bar{\varphi}$  było liniowe i spełniało (2.27) powoduje, że  $\bar{\varphi}$  musi być zadane formułą (2.26).

Sprawdźmy teraz, że  $\bar{\varphi}$  spełnia również warunek

$$\bar{\varphi}([f, g]_P) = [\bar{\varphi}(f), \bar{\varphi}(g)]_B$$

dla dowolnych  $f, g \in P(L)$ . W tym celu weźmy takie  $r \in \mathbb{N}$ , że  $f, g \in k[l_1, \dots, l_r]$  oraz zapiszmy wielomiany  $f, g$  w postaci

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r} f_\alpha l^\alpha, \quad g = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^r} g_\beta l^\beta,$$

gdzie  $f_\alpha, g_\beta \in k$  i tylko skończenie wiele z nich jest różnych od zera. Na podstawie (2.27), liniowości  $\bar{\varphi}$  oraz formuły definiującej  $[-, -]_P$  (patrz wzór (2.16)) dostajemy

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}([f, g]_P) &= \bar{\varphi} \left( \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^r} \sum_{i, j=1}^r f_\alpha g_\beta \alpha_i \beta_j l^{\alpha+\beta-e_i-e_j} [l_i, l_j]_L \right) \\ &= \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^r} \sum_{i, j=1}^r f_\alpha g_\beta \alpha_i \beta_j (\varphi(l_1), \dots, \varphi(l_r))^{\alpha+\beta-e_i-e_j} \varphi([l_i, l_j]_L), \end{aligned}$$

a ponieważ  $\varphi : L \rightarrow B$  jest homomorfizmem algebr Liego, więc ostatecznie dostajemy:

$$\bar{\varphi}([f, g]_P) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^r} \sum_{i, j=1}^r f_\alpha g_\beta \alpha_i \beta_j (\varphi(l_1), \dots, \varphi(l_r))^{\alpha+\beta-e_i-e_j} [\varphi(l_i), \varphi(l_j)]_B. \quad (2.28)$$

Podobnie, korzystając z reguły Leibniza dla  $[-, -]_B$ , uzyskujemy:

$$\begin{aligned} [\bar{\varphi}(f), \bar{\varphi}(g)]_B &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r} \sum_{i=1}^r f_\alpha \alpha_i (\varphi(l_1), \dots, \varphi(l_r))^{\alpha-e_i} [\varphi(l_i), \bar{\varphi}(g)]_B \\ &= \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^r} \sum_{i, j=1}^r f_\alpha g_\beta \alpha_i \beta_j (\varphi(l_1), \dots, \varphi(l_r))^{\alpha+\beta-e_i-e_j} [\varphi(l_i), \varphi(l_j)]_B. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Na podstawie (2.28) i (2.29) mamy

$$\bar{\varphi}([f, g]_P) = [\bar{\varphi}(f), \bar{\varphi}(g)]_B.$$

Sprawdziliśmy zatem, że  $\bar{\varphi} : P(L) \rightarrow B$  jest homomorfizmem algebr Poissona.  $\square$

Obecnie możemy zaprezentować główny wynik tego podrozdziału. W tym celu rozważmy dowolny niepusty zbiór przeliczalny  $X$  (lub skończony) oraz wolną algebrę Liego  $L(X)$  daną konstrukcją z podrozdziału 2.4. Ponieważ w tej sytuacji zbiór  $\bar{\Gamma}(X)$  jest przeliczalny, więc możemy z niego wybrać bazę, która również jest przeliczalna. W oparciu o tę bazę konstruujemy (jak w konstrukcji 2.39) algebrę Poissona  $P(L(X))$ , którą będziemy oznaczać  $PL(X)$ . Okazuje się, że jest ona wolną algebrą Poissona.

**Lemat 2.41.** *Algebra  $PL(X)$  jest wolną algebrą Poissona o zbiorze wolnych generatorów  $X$ .*

*Dowód.* Wynika z faktu, że  $L(X)$  jest wolną algebrą Liego o zbiorze wolnych generatorów  $X$  oraz z lematu 2.40.  $\square$

Założmy teraz, że zbiór  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  jest zbiorem skończonym oraz wybierzmy taką bazę  $l_1, l_2, \dots$  w  $L(X)$ , że  $l_1 = x_1, \dots, l_n = x_n$  (na przykład baza  $B(X)$  skonstruowana na końcu poprzedniego podrozdziału). W tej sytuacji pierścień wielomianów zmiennych  $x_1, \dots, x_n$  możemy traktować jako podalgebrę algebry  $PL(x_1, \dots, x_n) = PL(\{x_1, \dots, x_n\})$ . Mając dane dwa wielomiany  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$  możemy rozpatrywać ich nawias Poissona (zdefiniowany w  $PL(x_1, \dots, x_n)$ ). Obiektem tym będziemy się zajmować w dalszej części pracy.

## Nawias Poissona pary wielomianów

W tym rozdziale będziemy zakładać, że  $k$  jest ciałem charakterystyki zero.

### 3.1. Własności nawiasu Poissona pary wielomianów

W pierwszym podrozdziale przedstawimy podstawowe własności nawiasu Poissona pary wielomianów. W tym celu ustalmy pierścień wielomianów  $k[x_1, \dots, x_n]$  zmiennych  $x_1, \dots, x_n$  nad ciałem  $k$  charakterystyki zero oraz rozważmy wolną algebrę Poissona  $PL(x_1, \dots, x_n)$  o zbiorze wolnych generatorów  $x_1, \dots, x_n$ . Wiemy, z poprzedniego rozdziału, że  $k[x_1, \dots, x_n]$  możemy traktować jako podalgebrę algebry  $PL(x_1, \dots, x_n)$ . Tym samym możemy rozpatrywać odwzorowanie:

$$[-, -] : k[x_1, \dots, x_n]^2 \ni (f, g) \mapsto [f, g] \in C,$$

gdzie

$$C = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} k[x_1, \dots, x_n][x_i, x_j]$$

jest  $k[x_1, \dots, x_n]$ -podmodułem  $PL(x_1, \dots, x_n)$  generowanym przez elementy postaci  $[f, g]$ , gdzie  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$  (można sprawdzić, że  $PL(x_1, \dots, x_n)$  jest  $k[x_1, \dots, x_n]$ -modułem).

Dwie najbardziej podstawowe własności nawiasu Poissona pary wielomianów wynikają bezpośrednio z definicji algebry Poissona.

**Lemat 3.1.**

- (1) *Odwzorowanie  $[-, -] : k[x_1, \dots, x_n]^2 \rightarrow C$  jest dwuliniowe nad  $k$ .*
- (2) *Odwzorowanie  $[-, -] : k[x_1, \dots, x_n]^2 \rightarrow C$  spełnia regułę Leibniza, tzn.  $[fg, h] = f[g, h] + g[f, h]$  oraz  $[h, fg] = f[h, g] + g[h, f]$  dla dowolnych  $f, g, h \in k[x_1, \dots, x_n]$ .*

Kolejna własność może być także traktowana jako definicja nawiasu Poissona pary wielomianów w sytuacji, gdybyśmy chcieli badać nawias Poissona bez wprowadzania algebry Poissona  $PL(x_1, \dots, x_n)$ .

**Lemat 3.2.** *Dla dowolnych  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$  zachodzi równość*

$$[f, g] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) [x_i, x_j]. \quad (3.1)$$

*Dowód.* Niech  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ . Na mocy reguły Leibniza zastosowanej najpierw do pierwszego, później do drugiego argumentu nawiasu Poissona dostajemy równość

$$\begin{aligned} [f, g] &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} [x_i, g] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} [x_i, x_j] \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) [x_i, x_j]. \end{aligned}$$

□

Definiując nawias Poissona pary wielomianów formułą (3.1), nawias  $[x_i, x_j]$  dla  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  traktujemy jako obiekt formalny spełniający warunek antysymetryczności:

$$[x_i, x_j] = -[x_j, x_i] \quad \text{dla każdego } i, j.$$

Zauważmy, że własności podane w lemacie 3.1 implikują, że odwzorowania  $D_{[f, -]} : g \mapsto [f, g]$  oraz  $D_{[-, f]} : g \mapsto [g, f]$  są  $k$ -różniczkowaniami. Fakt ten można również wyprowadzić z formuły (3.1), gdy potraktujemy ją jako definicję nawiasu Poissona pary wielomianów.

**Propozycja 3.3.** *Dla dowolnego  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$  odwzorowania*

$$D_{[f, -]} : k[x_1, \dots, x_n] \ni g \mapsto [f, g] \in C$$

oraz

$$D_{[-, f]} : k[x_1, \dots, x_n] \ni g \mapsto [g, f] \in C$$

są  $k$ -różniczkowaniami, innymi słowy  $D_{[f, -]}, D_{[-, f]} \in \text{Der}_k(k[X]; C)$ .

*Dowód.* Korzystając z własności pochodnej cząstkowej mamy

$$\begin{aligned} D_{[f, -]}(g + h) &= [f, g + h] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial(g+h)}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial(g+h)}{\partial x_i} \right) [x_i, x_j] \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \left( \frac{\partial g}{\partial x_j} + \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial x_j} \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) \right) [x_i, x_j] \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) [x_i, x_j] \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) [x_i, x_j] \\ &= [f, g] + [f, h] = D_{[f, -]}(g) + D_{[f, -]}(h) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} D_{[f, -]}(gh) &= [f, gh] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial(gh)}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial(gh)}{\partial x_i} \right) [x_i, x_j] \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \left( \frac{\partial g}{\partial x_j} h + g \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial x_j} \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} h + g \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) \right) [x_i, x_j] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) [x_i, x_j] \\
&\quad + g \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) [x_i, x_j] \\
&= h[f, g] + g[f, h] = hD_{[f, -]}(g) + gD_{[f, -]}(h).
\end{aligned}$$

Ponadto łatwo sprawdzić, że dla dowolnego elementu  $g \in k$  zachodzi  $D_{[f, -]}(g) = [f, g] = 0$ .

Sprawdzenie w drugim przypadku jest analogiczne.  $\square$

Kolejne własności dotyczyć będą związku wartości nawiasu Poissona z algebraiczną zależnością pary wielomianów. Zaczniemy jednak od zaprezentowania następującego faktu.

**Lemat 3.4** ([30, 20]). *Dla dowolnych elementów  $f_1, \dots, f_r$  należących do  $k$ -algebry  $k[x_1, \dots, x_n]$ , gdzie  $r \leq n$ ,<sup>1</sup> następujące warunki są równoważne:*

- (1)  $f_1, \dots, f_r$  są algebraicznie zależne nad  $k$ ,
- (2) wektory  $\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right), \dots, \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_r}{\partial x_n}\right)$  są liniowo zależne nad pierścieniem  $k[x_1, \dots, x_n]$ ,
- (3) wektory  $\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)^T, \dots, \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_r}{\partial x_n}\right)^T$  są liniowo zależne nad pierścieniem  $k[x_1, \dots, x_n]$ .

*Dowód.* Warunki (2) i (3) są w sposób oczywisty równoważne, gdyż są to tak na prawdę dwie formy zapisu jednego i tego samego warunku.

Przejdziemy teraz do pokazania równoważności warunku (1) z warunkami (2) i (3). Załóżmy najpierw, że  $f_1, \dots, f_r$  są algebraicznie zależne nad  $k$  i niech  $P \in k[y_1, \dots, y_r]$  będzie niezerowym wielomianem zmiennych  $y_1, \dots, y_r$  minimalnego stopnia takim, że

$$P(f_1, \dots, f_r) = 0. \quad (3.2)$$

Stosując różniczkowanie  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ , dla  $i = 1, \dots, n$ , do równości (3.2) dostajemy

$$\frac{\partial P}{\partial y_1}(f_1, \dots, f_r) \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial P}{\partial y_r}(f_1, \dots, f_r) \frac{\partial f_r}{\partial x_i} = 0. \quad (3.3)$$

Powyższy układ równości (dla  $i = 1, \dots, n$ ) można zapisać następująco w postaci macierzowej:

$$\frac{\partial P}{\partial y_1}(f_1, \dots, f_r) \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \end{bmatrix} + \dots + \frac{\partial P}{\partial y_r}(f_1, \dots, f_r) \begin{bmatrix} \frac{\partial f_r}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Zauważmy, że przynajmniej jeden ze współczynników  $\frac{\partial P}{\partial y_1}(f_1, \dots, f_r), \dots, \frac{\partial P}{\partial y_r}(f_1, \dots, f_r)$  jest różny od zera. Istotnie z faktu, że  $P \neq 0$  oraz, że ciało  $k$  jest

1. Dla  $r > n$  teza lematu 3.4 jest w sposób oczywisty prawdziwa. Jednak jest to mało interesujący przypadek.

charakterystyki zero wynika, że istnieje  $i_0 \in \{1, \dots, r\}$  takie, że  $\frac{\partial P}{\partial y_{i_0}} \neq 0$ . Jednocześnie wielomian  $\frac{\partial P}{\partial y_{i_0}}$  jest istotnie mniejszego stopnia niż  $\deg P$ , więc z minimalności  $P$  dostajemy, że  $\frac{\partial P}{\partial y_{i_0}}(f_1, \dots, f_r) \neq 0$ . Zatem po lewej stronie (3.4) mamy nietrywialną kombinację liniową wektorów  $\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)^T, \dots, \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_r}{\partial x_n}\right)^T$ , która jest równa zero. Ponieważ współczynniki tej kombinacji są wielomianami z  $k[x_1, \dots, x_n]$ , więc wektory  $\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)^T, \dots, \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_r}{\partial x_n}\right)^T$  są liniowo zależne nad  $k[x_1, \dots, x_n]$ .

Założmy teraz, że wielomiany  $f_1, \dots, f_r$  są algebraicznie niezależne nad  $k$ . Ponieważ  $f_1, \dots, f_r \in k[x_1, \dots, x_n] \subset k(x_1, \dots, x_n)$  oraz  $\text{trdeg}_k k(x_1, \dots, x_n) = n$ , więc istnieją elementy  $f_{r+1}, \dots, f_n \in k(x_1, \dots, x_n)$  takie, że układ  $f_1, \dots, f_n$  jest algebraicznie niezależny nad  $k$ . Ustalmy dowolne  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Ponieważ  $f_1, \dots, f_n, x_j \in k(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\text{trdeg}_k k(x_1, \dots, x_n) = n$  oraz  $\#\{f_1, \dots, f_n, x_j\} > n$ , więc układ  $f_1, \dots, f_n, x_j$  jest algebraicznie zależny nad  $k$ . Niech  $G_j \in k[y_1, \dots, y_{n+1}]$  będzie niezerowym wielomianem zmiennych  $y_1, \dots, y_{n+1}$ , minimalnego stopnia takim, że  $G_j(f_1, \dots, f_n, x_j) = 0$ . Stosując  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  do powyższej równości, dla  $i = 1, \dots, n$ , dostajemy:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial G_j}{\partial y_k}(f_1, \dots, f_n, x_j) \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \frac{\partial G_j}{\partial y_{n+1}}(f_1, \dots, f_n, x_j) \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = 0. \quad (3.5)$$

Powyższy układ równości (dla  $i = 1, \dots, n$ ) możemy zapisać następująco:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial G_j}{\partial y_k}(f_1, \dots, f_n, x_j) \begin{bmatrix} \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{bmatrix} + \frac{\partial G_j}{\partial y_{n+1}}(f_1, \dots, f_n, x_j) \begin{bmatrix} \frac{\partial x_j}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_j}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

dla  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Z dowolności  $j \in \{1, \dots, n\}$  mamy  $n$  równości postaci (3.6) dla każdego  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Zbiorczo te równości możemy zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1}(f_1, \dots, f_n, x_1) & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial y_1}(f_1, \dots, f_n, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_1}{\partial y_n}(f_1, \dots, f_n, x_1) & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial y_n}(f_1, \dots, f_n, x_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_{n+1}}(f_1, \dots, f_n, x_1) \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial y_{n+1}}(f_1, \dots, f_n, x_n) \frac{\partial x_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_1}{\partial y_{n+1}}(f_1, \dots, f_n, x_1) \frac{\partial x_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial y_{n+1}}(f_1, \dots, f_n, x_n) \frac{\partial x_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Zauważmy, że ostatnia macierz po lewej stronie równości (3.7) jest macierzą diagonalną o następujących wyrazach wzdłuż głównej przekątnej:  $\frac{\partial G_1}{\partial y_{n+1}}(f_1, \dots, f_n, x_1)$ ,  $\frac{\partial G_2}{\partial y_{n+1}}(f_1, \dots, f_n, x_2)$ ,  $\dots$ ,  $\frac{\partial G_n}{\partial y_{n+1}}(f_1, \dots, f_n, x_n)$ . Ponadto  $\frac{\partial G_j}{\partial y_{n+1}} \neq 0$  dla  $j = 1, \dots, n$ . Istotnie gdyby dla pewnego  $j_0 \in \{1, \dots, n\}$  zachodziła równość  $\frac{\partial G_{j_0}}{\partial y_{n+1}} = 0$ , wtedy z założenia, że  $\text{char } k = 0$  mielibyśmy, że wielomian  $G_{j_0}$  nie zależy od zmiennej  $y_{n+1}$ , a to dawałoby algebraiczną zależność nad  $k$  elementów  $f_1, \dots, f_n$ , wbrew ich wyborowi. Teraz korzystając z faktu, że  $\deg \frac{\partial G_j}{\partial y_{n+1}} < \deg G_j$ ,  $\frac{\partial G_j}{\partial y_{n+1}} \neq 0$  oraz minimalności  $G_j$  dostajemy, że  $\frac{\partial G_j}{\partial y_{n+1}}(f_1, \dots, f_n, x_j) \neq 0$  dla  $j = 1, \dots, n$ . Zatem ostatnia macierz po lewej stronie równości (3.7) jest macierzą diagonalną, której wszystkie wyrazy

na głównej przekątnej są różne od zera. Oznacza to, że ta macierz jest odwracalna nad ciałem  $k(x_1, \dots, x_n)$ . Odwracalne (nad  $k(x_1, \dots, x_n)$ ) są zatem pozostałe dwie macierze po lewej stronie równości (3.7). W szczególności dostajemy, że

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Oznacza to, że zarówno kolumny, jak i wiersze powyższej macierzy są liniowo niezależne nad  $k(x_1, \dots, x_n)$  i tym bardziej nad  $k[x_1, \dots, x_n]$ . W szczególności,  $r$  pierwszych kolumn powyższej macierzy jest liniowo niezależnych nad  $k[x_1, \dots, x_n]$ .  $\square$

Przejdźmy do odnotowania wniosków z powyższego lematu.

**Wniosek 3.5** ([30], wn. 1). *Elementy  $f_1, \dots, f_r$  należące do algebry  $k[x_1, \dots, x_n]$ , gdzie  $r \leq n$ , są algebraicznie zależne nad  $k$  wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\text{rz} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \end{bmatrix} < r.$$

**Wniosek 3.6** ([30], wn. 2). *Elementy  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$  są algebraicznie zależne wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą równości*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \quad \text{dla} \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

**Wniosek 3.7** ([30], wn. 3). *Elementy  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$  są algebraicznie zależne wtedy i tylko wtedy, gdy  $[f, g] = 0$ .*

W sytuacji, gdy  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$  spełniają równanie  $[f, g] = 0$ , okazuje się, że można powiedzieć nieco więcej niż tylko to, że są one algebraicznie zależne.

**Lemat 3.8** ([33], lem. 2). *Wielomiany  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$  spełniają równanie  $[f, g] = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian  $h \in k[x_1, \dots, x_n]$ , że  $f, g \in k[h]$ .*

W przypadku, gdy  $f, g$  są wielomianami jednorodnymi, uzyskujemy dokładniejszą informację o ich postaci.

**Lemat 3.9** ([30], lem. 3). *Jeśli wielomiany jednorodne  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$  spełniają równanie  $[f, g] = 0$ , to istnieje taki wielomian  $h \in k[x_1, \dots, x_n]$ , że  $f = ah^{d_1}$ ,  $g = bh^{d_2}$ , gdzie  $a, b \in k$ ,  $d_1, d_2 \geq 0$ .*

Kolejna własność, przedstawiona w poniższym lemacie, jest jednym z podstawowych narzędzi, jakich będziemy używać w dalszej części pracy. Tym razem dodatkowo zakładamy, że ciało  $k$  jest algebraicznie domknięte. Podobnie zakładać będziemy w uwadze 3.11 i wniosku 3.12.

**Lemat 3.10 (metoda H-redukcji, [7], lem. 2.2).** Niech  $H \in k[x_1, \dots, x_n]$  będzie niestalym wielomianem jednorodnym, który nie jest potęgą wielomianu niższego stopnia oraz niech  $P \in k[x_1, \dots, x_n]$  będzie wielomianem jednorodnym, dla którego zachodzi

$$[H, P] = 0.$$

Wtedy istnieją takie  $a \in k$  i  $d \in \mathbb{N}$ , że

$$P = aH^d.$$

Ponadto, jeśli  $\deg H \nmid \deg P$ , to  $P = 0$ .

*Dowód.* Wielomiany  $H$  i  $P$  są algebraicznie zależne, ponieważ  $[H, P] = 0$  (patrz wniosek 3.7). Na podstawie lematu 3.9 istnieją elementy  $a, b$  z ciała  $k$ ,  $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$  oraz taki wielomian jednorodny  $h$ , że

$$P = ah^{d_1} \quad \text{i} \quad H = bh^{d_2}.$$

Ponieważ  $k$  jest algebraicznie domknięte, istnieje  $\tilde{b} \in k$  takie, że  $H = (\tilde{b}h)^{d_2}$ . Korzystając z założenia, że  $H$  nie jest potęgą wielomianu niższego stopnia, mamy  $d_2 = 1$ . Możemy zatem przyjąć, że  $h = H$ . Jeśli  $P \neq 0$ , czyli  $a \neq 0$ , to  $\deg P$  jest podzielny przez  $\deg H$ .  $\square$

**Uwaga 3.11.** W szczególności powyższy lemat zachodzi dla wielomianu  $H$ , który jest bezkwadratowy.

**Wniosek 3.12** ([7], wn. 2.3). Niech  $H \in k[x_1, \dots, x_n]$  będzie niestalym wielomianem jednorodnym, który nie jest potęgą wielomianu niższego stopnia oraz niech  $P \in k[x_1, \dots, x_n]$  będzie wielomianem, dla którego zachodzi

$$[H, P] = 0.$$

Wtedy  $P \in k[H]$ .

*Dowód.* Rozłóżmy  $P$  na sumę składowych jednorodnych  $P = P_0 + \dots + P_d$ , gdzie  $d = \deg P$ . Korzystając z założenia  $[H, P] = 0$ , otrzymujemy

$$[H, P_0] + [H, P_1] + \dots + [H, P_d] = 0.$$

Ponieważ jednak  $[H, P_i]$  są składnikami jednorodnymi różnych stopni (patrz lemat 3.13 poniżej i rozważania go poprzedzające), więc

$$[H, P_i] = 0 \quad \text{dla } i = 0, \dots, d. \quad (3.8)$$

Z faktu, że  $P_d \neq 0$  oraz  $[H, P_d] = 0$ , wynika, że  $d = r \deg H$  dla pewnego  $r \in \mathbb{N}$ . Na podstawie (3.8) i lematu 3.10 istnieją takie  $a_0, \dots, a_r \in k$ ,  $a_r \neq 0$ , że

$$P_{l \deg H} = a_l H^l \quad \text{dla } l = 0, \dots, r$$

oraz  $P_i = 0$  dla  $i \notin \{0, \deg H, 2 \deg H, \dots, r \deg H\}$ .  $\square$

Kolejne własności, jakie zaprezentujemy, związane są ze stopniem nawiasu Poissona pary wielomianów. Stopień ten definiować będziemy w następujący sposób:

$$\deg[f, g] = \max_{1 \leq i < j \leq n} \deg \left\{ \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) [x_i, x_j] \right\},$$

gdzie przyjmujemy, że

$$\deg [x_i, x_j] = 2 \text{ dla każdego } i \neq j \text{ oraz } \deg 0 = -\infty.$$

Ponieważ  $2 - \infty = -\infty$ , więc mamy również

$$\deg[f, g] = 2 + \max_{1 \leq i < j \leq n} \deg \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right).$$

Powyżej zdefiniowany stopień nawiasu Poissona pozwala nam wprowadzić w  $C = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} k[x_1, \dots, x_n][x_i, x_j]$  coś w rodzaju gradacji:

$$C = \bigoplus_{d=0}^{\infty} C_d,$$

gdzie

$$C_d = \begin{cases} \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} k[x_1, \dots, x_n]_{d-2}[x_i, x_j], & \text{dla } d \geq 2 \\ 0, & \text{dla } d = 0, 1 \end{cases}$$

oraz  $k[x_1, \dots, x_n]_l = \{h \in k[x_1, \dots, x_n] \mid \deg h = l, h - \text{wielomian jednorodny}\} \cup \{0\}$ . Elementy z  $C_d$  nazywać będziemy jednorodnymi stopnia  $d$ . Przy tak zdefiniowanej „gradacji” w  $C$  zachodzi następujący lemat.

**Lemat 3.13.** *Jeżeli  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$  są wielomianami jednorodnymi, to*

$$[f, g] \in C_{\deg f + \deg g}.$$

*Dowód.* Ze względu na definicję  $C_{\deg f + \deg g}$  oraz formułę

$$[f, g] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) [x_i, x_j],$$

wynika to z faktu, że  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in k[x_1, \dots, x_n]_{\deg f - 1}$  oraz  $\frac{\partial g}{\partial x_j} \in k[x_1, \dots, x_n]_{\deg g - 1}$  dla każdego  $i, j$ . Innymi słowy

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \in k[x_1, \dots, x_n]_{\deg f + \deg g - 2} \text{ dla każdego } 1 \leq i < j \leq n.$$

□

Poniższa propozycja przedstawia związek  $\deg[f, g]$  z  $\deg f$  i  $\deg g$ .

**Propozycja 3.14.** *Niech  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ . Wtedy:*

(a)  $\deg[f, g] \leq \deg f + \deg g$ ,

(b)  $\deg[f, g] = \deg f + \deg g$  wtedy i tylko wtedy, gdy formy wiodące  $\bar{f}, \bar{g}$  wielomianów  $f, g$  są algebraicznie niezależne (nad  $k$ ).

*Dowód.* Nierówność (a) wynika z faktu, że

$$\deg[f, g] = 2 + \max_{1 \leq i < j \leq n} \deg \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)$$

oraz  $\deg \frac{\partial f}{\partial x_l} \leq \deg f - 1$  i  $\deg \frac{\partial g}{\partial x_l} \leq \deg g - 1$ , dla  $l = 1, \dots, n$ .

Dla dowodu punktu (b) przyjmijmy, że  $d = \deg f$ ,  $m = \deg g$  oraz przedstawmy te wielomiany w postaci:

$$\begin{aligned} f &= f_0 + f_1 + \dots + f_d, \\ g &= g_0 + g_1 + \dots + g_m, \end{aligned} \tag{3.9}$$

gdzie  $f_i, g_j$  są składowymi jednorodnymi stopnia, odpowiednio,  $i$  oraz  $j$  wielomianów  $f$  i  $g$ . Ponieważ  $d = \deg f$ ,  $m = \deg g$ , mamy  $f_d \neq 0, g_m \neq 0$ . Na podstawie (3.9) oraz lematu 3.13 mamy:

$$[f, g] = \sum_{l=2}^{d+m-1} \sum_{i+j=l} [f_i, g_j] + [f_d, g_m],$$

przy czym

$$\sum_{i+j=l} [f_i, g_j] \in C_l$$

dla każdego  $l = 2, 3, \dots, d + m - 1$  oraz

$$[f_d, g_m] \in C_{d+m}.$$

Zatem  $\deg[f, g] = d + m$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $[f_d, g_m] \neq 0$ . Natomiast to jest równoważne z faktem, że  $f_d = \bar{f}$  oraz  $g_m = \bar{g}$  są algebraicznie niezależne nad  $k$ .  $\square$

Kolejną własność nawiasu Poissona i jego stopnia podaje następujący użyteczny lemat.

**Lemat 3.15** ([15], lem. 3.20). *Załóżmy, że  $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  są postaci*

$$f = x_1 + f_2 + \dots + f_l, \quad g = x_2 + g_2 + \dots + g_m,$$

gdzie  $f_i, g_i$  są formami jednorodnymi stopnia  $i$  oraz  $\deg[f, g] = 2$ . Wtedy  $f, g \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ .

Na zakończenie przedstawimy własność niezmienniczości stopnia nawiasu Poissona względem liniowej zmiany układu współrzędnych.

**Lemat 3.16** ([15], lem. 2.8). *Załóżmy, że  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ , oraz że  $L \in \text{GL}_n(k)$ . Wtedy*

$$\deg[L^*(f), L^*(g)] = \deg[f, g],$$

gdzie  $L^*(h) = h \circ L$  dla dowolnego  $h \in k[x_1, \dots, x_n]$ .

### 3.2. Zbiór rozwiązań równania $[f_1^r, P_1] = [P_2, f_2^s]$

W niniejszym podrozdziale przedstawimy zastosowanie omówionych wcześniej własności nawiasu Poissona do pełnego opisu zbioru rozwiązań równania  $[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s]$ . Podrozdział ten oparty jest w całości na wynikach pochodzących z pracy [6].

#### 3.2.1. Zbiór rozwiązań równania $[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s]$ dla danych form liniowych $L_1, L_2$

W tym podrozdziale zajmiemy się poszukiwaniem rozwiązań równania

$$[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s], \quad (3.10)$$

gdzie  $L_1, L_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$  są danymi formami liniowymi,  $r, s \in \mathbb{N}_+$  danymi stałymi, a  $(P_1, P_2) \in k[x_1, \dots, x_n]^2$  poszukiwaną parą wielomianów. Nasze rozważania będą podzielone na podanie przykładów rozwiązań (patrz lematy 3.17 i 3.18) oraz pokazanie, że przykłady podane w lematach 3.17 i 3.18 wyczerpują pełny zbiór rozwiązań (patrz twierdzenia 3.19 i 3.24). W obrębie tego podziału będziemy równolegle rozpatrywać przypadki, gdy  $L_1, L_2$  są liniowo zależnymi lub liniowo niezależnymi formami liniowymi. Przejdźmy do lematu, który prezentuje rodzinę przykładów rozwiązań w przypadku, gdy  $L_1, L_2$  są liniowo zależnymi formami liniowymi.

**Lemat 3.17.** *Niech  $L_1, L_2 \in k[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$  będą liniowo zależnymi formami liniowymi, czyli  $L_2 = \lambda L_1$  dla pewnego  $\lambda \in k \setminus \{0\}$ , oraz niech  $r, s \in \mathbb{N}_+$ . Jeśli*

$$r \leq s \text{ oraz } P_1 = \frac{1}{r} \left( G(L_1) - \mu L_1^{s-r} P_2 \right), \quad (3.11)$$

gdzie  $\mu = s\lambda^s$ , a  $P_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$  i  $G \in k[t]$  są dowolne;

lub

$$r > s \text{ oraz } P_2 = \frac{1}{\mu} \left( G(L_1) - r L_1^{r-s} P_1 \right), \quad (3.12)$$

gdzie  $\mu = s\lambda^s$ , a  $P_1 \in k[x_1, \dots, x_n]$  i  $G \in k[t]$  są dowolne,

to zachodzi równość  $[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s]$ .

*Dowód.* Przypomnijmy, że odwzorowania  $D_{[P,-]} : Q \mapsto [P, Q]$ ,  $D_{[-,P]} : Q \mapsto [Q, P]$  są  $k$ -różniczkowaniami (patrz lemat 3.1 lub propozycja 3.3). Warto jeszcze odnotować, że  $L_1 \in \ker D_{[L_1,-]}$  ( $L_1 \in \ker D_{[-,L_1]}$ ). Dokładniej,  $[L_1, L_1] = 0$ , jak również  $[F(L_1), L_1] = [L_1, F(L_1)] = 0$  dla dowolnego wielomianu  $F$  jednej zmiennej.

Zgodnie z wypowiedzią lematu będziemy rozważać dwa przypadki (ze względu na relację jaka występuje pomiędzy wykładnikami stojącymi przy  $L_1$  i  $L_2$ ):

1. dla  $r \leq s$  mamy

$$\begin{aligned} [L_1^r, P_1] &= r L_1^{r-1} [L_1, P_1] = r L_1^{r-1} \left[ L_1, \frac{1}{r} \left( G(L_1) - \mu L_1^{s-r} P_2 \right) \right] \\ &= -\mu L_1^{s-1} [L_1, P_2] \end{aligned} \quad (3.13)$$

oraz

$$[P_2, L_2^s] = [P_2, (\lambda L_1)^s] = s \lambda^s L_1^{s-1} [P_2, L_1] = -\mu L_1^{s-1} [L_1, P_2], \quad (3.14)$$

a więc z (3.13) i (3.14) otrzymujemy  $[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s]$ ;

2. dla  $r > s$  zachodzą równości:

$$[L_1^r, P_1] = rL_1^{r-1}[L_1, P_1]$$

oraz

$$\begin{aligned} [P_2, L_2^s] &= \left[ \frac{1}{\mu} \left( G(L_1) - rL_1^{r-s}P_1 \right), (\lambda L_1)^s \right] = \frac{1}{\mu} \lambda^s s L_1^{s-1} \left[ G(L_1) - rL_1^{r-s}P_1, L_1 \right] \\ &= -rL_1^{r-1}[P_1, L_1] = rL_1^{r-1}[L_1, P_1], \end{aligned}$$

na podstawie których również  $[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s]$ .

□

Kolejny lemat przedstawia rodzinę przykładów rozwiązań w przypadku, gdy  $L_1, L_2$  są liniowo niezależnymi formami liniowymi.

**Lemat 3.18.** *Niech  $L_1, L_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$  będą liniowo niezależnymi formami liniowymi oraz niech  $r, s \in \mathbb{N}_+$ . Jeśli*

$$P_1 = L_2^s G_0(L_1, L_2) + \frac{1}{r} L_1 L_2^s \frac{\partial G_0}{\partial x}(L_1, L_2) + G_1(L_1), \quad (3.15)$$

$$P_2 = L_1^r G_0(L_1, L_2) + \frac{1}{s} L_1^r L_2 \frac{\partial G_0}{\partial y}(L_1, L_2) + G_2(L_2), \quad (3.16)$$

gdzie wielomiany  $G_0 \in k[x, y]$ ,  $G_1, G_2 \in k[t]$  są dowolne, to

$$[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s].$$

*Dowód.* Korzystając z faktu, że  $D_{[-,P]}, D_{[P,-]} \in \text{Der}_k(k[X]; C)$ ,  $[L_1, L_1] = 0$  oraz z (3.15) dostajemy poniższy ciąg równości:

$$\begin{aligned} [L_1^r, P_1] &= rL_1^{r-1}[L_1, P_1] \quad (3.17) \\ &= rL_1^{r-1} \left[ L_1, L_2^s G_0(L_1, L_2) + \frac{1}{r} L_1 L_2^s \frac{\partial G_0}{\partial x}(L_1, L_2) + G_1(L_1) \right] \\ &= rL_1^{r-1} \left\{ sL_2^{s-1} G_0(L_1, L_2) [L_1, L_2] + L_2^s \frac{\partial G_0}{\partial y}(L_1, L_2) [L_1, L_2] \right. \\ &\quad \left. + \frac{s}{r} L_1 L_2^{s-1} \frac{\partial G_0}{\partial x}(L_1, L_2) [L_1, L_2] + \frac{1}{r} L_1 L_2^s \frac{\partial^2 G_0}{\partial x \partial y}(L_1, L_2) [L_1, L_2] \right\} \\ &= \left\{ r s L_1^{r-1} L_2^{s-1} G_0(L_1, L_2) + r L_1^{r-1} L_2^s \frac{\partial G_0}{\partial y}(L_1, L_2) \right. \\ &\quad \left. + s L_1^r L_2^{s-1} \frac{\partial G_0}{\partial x}(L_1, L_2) + L_1^r L_2^s \frac{\partial^2 G_0}{\partial x \partial y}(L_1, L_2) \right\} [L_1, L_2]. \end{aligned}$$

Argumentując analogicznie jak powyżej uzyskujemy:

$$\begin{aligned} [P_2, L_2^s] &= sL_2^{s-1}[P_2, L_2] \quad (3.18) \\ &= sL_2^{s-1} \left[ L_1^r G_0(L_1, L_2) + \frac{1}{s} L_1^r L_2 \frac{\partial G_0}{\partial y}(L_1, L_2) + G_2(L_2), L_2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= sL_2^{s-1} \left\{ rL_1^{r-1}G_0(L_1, L_2)[L_1, L_2] + L_1^r \frac{\partial G_0}{\partial x}(L_1, L_2)[L_1, L_2] \right. \\
&\quad \left. + \frac{r}{s}L_1^{r-1}L_2 \frac{\partial G_0}{\partial y}(L_1, L_2)[L_1, L_2] + \frac{1}{s}L_1^rL_2 \frac{\partial^2 G_0}{\partial x \partial y}(L_1, L_2)[L_1, L_2] \right\} \\
&= \left\{ rsL_1^{r-1}L_2^{s-1}G_0(L_1, L_2) + sL_1^rL_2^{s-1} \frac{\partial G_0}{\partial x}(L_1, L_2) \right. \\
&\quad \left. + rL_1^{r-1}L_2^s \frac{\partial G_0}{\partial y}(L_1, L_2) + L_1^rL_2^s \frac{\partial^2 G_0}{\partial x \partial y}(L_1, L_2) \right\} [L_1, L_2].
\end{aligned}$$

Z równości (3.17) oraz (3.18) otrzymujemy tezę.  $\square$

Teraz przejdziemy do pełnego opisu zbioru rozwiązań równania  $[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s]$ . Pokażemy, że innych rozwiązań niż te, które zostały podane w lematy 3.17 i 3.18, nie ma. Naturalnie, jak poprzednio, będziemy rozpatrywać dwa przypadki: gdy  $L_1, L_2$  są liniowo zależnymi lub liniowo niezależnymi formami liniowymi. Następujące twierdzenie dotyczy pierwszego z nich.

**Twierdzenie 3.19.** *Niech  $L_1, L_2 \in k[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$  będą liniowo zależnymi formami liniowymi, czyli  $L_2 = \lambda L_1$  dla pewnego  $\lambda \in k \setminus \{0\}$ , oraz niech  $r, s \in \mathbb{N}_+$ . Załóżmy ponadto, że wielomiany  $P_1, P_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$  spełniają równość  $[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s]$ .*

- Jeśli  $r \leq s$ , to  $P_1 = \frac{1}{r} (G(L_1) - \mu L_1^{s-r} P_2)$  dla pewnego  $G \in k[t]$  oraz  $\mu = s\lambda^s$ .
- Jeśli  $r > s$ , to  $P_2 = \frac{1}{\mu} (G(L_1) - r L_1^{r-s} P_1)$  dla pewnego  $G \in k[t]$  oraz  $\mu = s\lambda^s$ .

*Dowód.* Korzystając z własności nawiasu Poissona mamy:

$$[L_1^r, P_1] = rL_1^{r-1}[L_1, P_1] = [L_1, rL_1^{r-1}P_1], \quad (3.19)$$

$$[P_2, L_2^s] = [P_2, (\lambda L_1)^s] = s\lambda^s L_1^{s-1}[P_2, L_1] = [\mu L_1^{s-1}P_2, L_1]. \quad (3.20)$$

Następnie z założenia  $[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s]$ , antysymetryczności nawiasu Poissona oraz (3.19) i (3.20) dostajemy równość

$$[L_1, rL_1^{r-1}P_1] = [L_1, -\mu L_1^{s-1}P_2]$$

lub równoważnie

$$[L_1, rL_1^{r-1}P_1 + \mu L_1^{s-1}P_2] = 0.$$

Na podstawie wniosku 3.12 istnieje  $\tilde{G} \in k[t]$  taki, że:

$$rL_1^{r-1}P_1 + \mu L_1^{s-1}P_2 = \tilde{G}(L_1). \quad (3.21)$$

Lewa strona równości (3.21) jest podzielna przez  $L_1^{\min\{r-1, s-1\}}$ , a więc odpowiednia podzielność musi zachodzić dla strony prawej, zatem rozpatrujemy dwa przypadki:

1. gdy  $r \leq s$ , wtedy

$$P_1 = \frac{1}{r} \left( \frac{\tilde{G}(L_1)}{L_1^{r-1}} - \mu L_1^{s-r} P_2 \right), \text{ gdzie } \frac{\tilde{G}(L_1)}{L_1^{r-1}} \in k[L_1];$$

2. gdy  $r > s$ , wtedy

$$P_2 = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\tilde{G}(L_1)}{L_1^{s-1}} - rL_1^{r-s}P_1 \right), \text{ gdzie } \frac{\tilde{G}(L_1)}{L_1^{s-1}} \in k[L_1].$$

□

Zanim przejdziemy do twierdzenia dotyczącego opisu pełnego zbioru rozwiązań w przypadku, gdy  $L_1, L_2$  są liniowo niezależnymi formami liniowymi (twierdzenie 3.24), podamy narzędzia, które będą wykorzystywane w jego dowodzie. Na początek przeanalizujemy przykład, który przedstawia ideę dowodu twierdzenia 3.24.

**Przykład 3.20.** Rozważmy  $P, Q \in k[x, y]$ , dla których zachodzi równość

$$[x, P] = [Q, y]. \quad (3.22)$$

Jest to szczególny przypadek równości  $[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s]$ . Rozpisując wprost z definicji nawiasu Poissona otrzymujemy

$$\begin{aligned} [x, P] &= \left( \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} \right) [x, y] = \frac{\partial P}{\partial y} [x, y], \\ [Q, y] &= \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \right) [x, y] = \frac{\partial Q}{\partial x} [x, y]. \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

a więc możemy skorzystać z lematu Poincarégo dla  $k[x, y]$  (lemat 3.21 poniżej). Na jego podstawie istnieje taki wielomian  $G \in k[x, y]$ , że  $P = \frac{\partial G}{\partial x}$  oraz  $Q = \frac{\partial G}{\partial y}$ . Podsumowując, wszystkie rozwiązania (3.22) są postaci

$$P = \frac{\partial G}{\partial x} \text{ oraz } Q = \frac{\partial G}{\partial y},$$

gdzie  $G \in k[x, y]$  jest dowolnym wielomianem.

Przypomnijmy wypowiedź lematu Poincarégo.

**Lemat 3.21 (lemat Poincarégo - wersja algebraiczna, [3], lem. 1.3.53).** *Niech  $R$  będzie  $\mathbb{Q}$ -algebrą oraz niech  $b_1, \dots, b_n \in R[x_1, \dots, x_n]$  będą takimi wielomianami, że dla każdego  $i, j$  mamy  $\frac{\partial b_i}{\partial x_j} = \frac{\partial b_j}{\partial x_i}$ . Wtedy istnieje taki wielomian  $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ , że  $b_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$  dla każdego  $i$ .*

Przejdźmy do lematów, z których będziemy korzystać w dowodzie twierdzenia 3.24. Pierwszy z nich mówi, że wszystkie rozwiązania równania (3.10) są tzw. rozwiązaniami wewnętrznymi tj.  $P_1, P_2 \in k[L_1, L_2] \subset k[x_1, \dots, x_n]$ .

**Lemat 3.22.** *Niech  $L_1, L_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$  będą liniowo niezależnymi formami liniowymi oraz niech  $r, s \in \mathbb{N}_+$ . Jeśli wielomiany  $P_1, P_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$  spełniają równość  $[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s]$ , to istnieją takie  $H_1, H_2 \in k[x, y]$ , że*

$$P_1 = H_1(L_1, L_2) \text{ oraz } P_2 = H_2(L_1, L_2).$$

*Dowód.* Dobieramy formy liniowe  $L_3, \dots, L_n \in k[x_1, \dots, x_n]$  w taki sposób, by wraz z  $L_1, L_2$  tworzyły układ liniowo niezależny. Wtedy  $k[L_1, \dots, L_n] = k[x_1, \dots, x_n]$ . Tak więc istnieją takie wielomiany  $H_1, H_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$ , że

$$P_i = H_i(L_1, \dots, L_n) \quad \text{dla } i = 1, 2.$$

Naszym celem jest pokazanie, że wielomiany  $H_1$  oraz  $H_2$  nie zależą od zmiennych  $x_3, \dots, x_n$ . W związku z tym przyjrzymy się następującym równościom:

$$\begin{aligned} [L_1^r, P_1] &= rL_1^{r-1} [L_1, P_1] = rL_1^{r-1} [L_1, H_1(L_1, \dots, L_n)] \\ &= \sum_{i=1}^n rL_1^{r-1} \frac{\partial H_1}{\partial x_i} (L_1, \dots, L_n) [L_1, L_i] \\ &= rL_1^{r-1} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} (L_1, \dots, L_n) [L_1, L_2] + \sum_{i=3}^n rL_1^{r-1} \frac{\partial H_1}{\partial x_i} (L_1, \dots, L_n) [L_1, L_i] \end{aligned} \quad (3.23)$$

oraz

$$\begin{aligned} [P_2, L_2^s] &= sL_2^{s-1} [P_2, L_2] = \sum_{i=1}^n sL_2^{s-1} \frac{\partial H_2}{\partial x_i} (L_1, \dots, L_n) [L_i, L_2] \\ &= sL_2^{s-1} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} (L_1, \dots, L_n) [L_1, L_2] - \sum_{i=3}^n sL_2^{s-1} \frac{\partial H_2}{\partial x_i} (L_1, \dots, L_n) [L_2, L_i]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Elementy postaci  $[L_i, L_j]$ ,  $1 \leq i < j \leq n$  tworzą bazę  $k[x_1, \dots, x_n]$ -modułu wolnego  $\{\sum_l h_l [f_l, g_l] \mid h_l, f_l, g_l \in k[L_1, \dots, L_n]\}$ . Z założenia mamy  $[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s]$ , więc musi zachodzić równość współczynników stojących przy odpowiednich elementach bazowych w wyrażeniach stojących po prawej stronie równości (3.23) i (3.24). Ponieważ składniki zawierające wyrażenia  $[L_1, L_i]$ , dla  $i \geq 3$ , po prawej stronie (3.24) występują ze współczynnikami równymi zero, więc i współczynniki przy tych elementach w (3.23) muszą się zerować. Zatem  $\frac{\partial H_1}{\partial x_i} = 0$ , dla każdego  $i \geq 3$ , a to znaczy, że  $H_1 \in k[x_1, x_2]$ . Podobnie argumentując uzyskujemy, że również  $H_2 \in k[x_1, x_2]$ .  $\square$

**Lemat 3.23.** *Niech  $L_1, L_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$  będą liniowo niezależnymi formami liniowymi. Załóżmy, że  $P_1, P_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$  spełniają równość  $[L_1, P_1] = [P_2, L_2]$ . Wtedy*

$$P_1 = \frac{\partial G}{\partial x}(L_1, L_2) \quad \text{oraz} \quad P_2 = \frac{\partial G}{\partial y}(L_1, L_2)$$

dla pewnego  $G \in k[x, y]$ .

*Dowód.* Na podstawie lematu 3.22 wiemy, że

$$P_1, P_2 \in k[L_1, L_2] \subset k[x_1, \dots, x_n].$$

Formy liniowe  $L_1, L_2$  są liniowo niezależne (nad  $k$ ), zatem są również algebraicznie niezależne (nad  $k$ ) i tym samym  $k[L_1, L_2] \cong k[x, y]$ . W takim razie mamy sytuację jak w przykładzie 3.20, gdzie  $L_1$  i  $L_2$  pełnią rolę  $x$  i  $y$ .  $\square$

Następujące twierdzenie wspólnie z lematem 3.18 podaje opis pełnego zbioru rozwiązań, gdy  $L_1, L_2$  są liniowo niezależnymi formami liniowymi.

**Twierdzenie 3.24.** *Niech  $L_1, L_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$  będą liniowo niezależnymi formami liniowymi oraz niech  $r, s \in \mathbb{N}_+$ . Załóżmy, że  $P_1, P_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$  spełniają równość  $[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s]$ . Wtedy*

$$\begin{aligned} P_1 &= L_2^s G_0(L_1, L_2) + \frac{1}{r} L_1 L_2^s \frac{\partial G_0}{\partial x}(L_1, L_2) + G_1(L_1), \\ P_2 &= L_1^r G_0(L_1, L_2) + \frac{1}{s} L_1^r L_2 \frac{\partial G_0}{\partial y}(L_1, L_2) + G_2(L_2), \end{aligned}$$

dla pewnych  $G_0 \in k[x, y]$  oraz  $G_1, G_2 \in k[t]$ .

*Dowód.* Korzystając z faktu, że nawias Poissona jest różniczkowaniem zarówno ze względu na pierwszy, jak i na drugi argument, uzyskujemy równości:

$$\begin{aligned} [L_1^r, P_1] &= r L_1^{r-1} [L_1, P_1] = [L_1, r L_1^{r-1} P_1], \\ [P_2, L_2^s] &= s L_2^{s-1} [P_2, L_2] = [s L_2^{s-1} P_2, L_2]. \end{aligned}$$

Z powyższych równości wynika, że zbiór rozwiązań równania  $[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s]$  jest równy zbiorowi rozwiązań równania  $[L_1, r L_1^{r-1} P_1] = [s L_2^{s-1} P_2, L_2]$ . Na podstawie lematu 3.23 istnieje taki wielomian  $G \in k[L_1, L_2]$  ( $L_1, L_2$  są algebraicznie niezależne nad  $k$ , więc mogą być traktowane jako zmienne), że

$$r L_1^{r-1} P_1 = \frac{\partial G}{\partial L_1} \quad \text{oraz} \quad s L_2^{s-1} P_2 = \frac{\partial G}{\partial L_2}. \quad (3.25)$$

Zatem

$$L_1^{r-1} \mid \frac{\partial G}{\partial L_1} \quad \text{oraz} \quad L_2^{s-1} \mid \frac{\partial G}{\partial L_2}.$$

Zauważmy, że wielomian  $G \in k[L_1, L_2]$  może być jednoznacznie przedstawiony w następujący sposób

$$G = L_1^r L_2^s G_0(L_1, L_2) + L_1^r \widehat{G}_1(L_1, L_2) + L_2^s \widehat{G}_2(L_1, L_2) + \widehat{G}_3(L_1, L_2),$$

gdzie  $\deg_{L_2} \widehat{G}_1(L_1, L_2) < s$ ,  $\deg_{L_1} \widehat{G}_2(L_1, L_2) < r$ , natomiast  $\deg_{L_1} \widehat{G}_3(L_1, L_2) < r$  oraz  $\deg_{L_2} \widehat{G}_3(L_1, L_2) < s$ .

Policzmy pochodną cząstkową z  $G$  względem pierwszej zmiennej:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial L_1} &= r L_1^{r-1} L_2^s G_0(L_1, L_2) + L_1^r L_2^s \frac{\partial G_0}{\partial L_1}(L_1, L_2) + r L_1^{r-1} \widehat{G}_1(L_1, L_2) + L_1^r \frac{\partial \widehat{G}_1}{\partial L_1}(L_1, L_2) \\ &\quad + L_2^s \frac{\partial \widehat{G}_2}{\partial L_1}(L_1, L_2) + \frac{\partial \widehat{G}_3}{\partial L_1}(L_1, L_2). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Z poprzednich rozważań wiemy, że  $L_1^{r-1} \mid \frac{\partial G}{\partial L_1}$ . Ponieważ  $L_1^{r-1}$  dzieli każdy z pierwszych czterech składników prawej strony (3.26), więc musi dzielić również sumę dwóch pozostałych. Ponadto  $\deg_{L_2} \frac{\partial \widehat{G}_3}{\partial L_1} \leq \deg_{L_2} \widehat{G}_3 < s$ , więc  $\text{supp} \left( L_2^s \frac{\partial \widehat{G}_2}{\partial L_1} \right) \cap \text{supp} \left( \frac{\partial \widehat{G}_3}{\partial L_1} \right) = \emptyset$ . Oznacza to, że te składniki możemy rozważać oddzielnie, w następującym sensie

$$L_1^{r-1} \mid \left( L_2^s \frac{\partial \widehat{G}_2}{\partial L_1} + \frac{\partial \widehat{G}_3}{\partial L_1} \right) \iff L_1^{r-1} \mid L_2^s \frac{\partial \widehat{G}_2}{\partial L_1} \quad \text{oraz} \quad L_1^{r-1} \mid \frac{\partial \widehat{G}_3}{\partial L_1}.$$

Ponieważ  $\deg_{L_1} \left( L_2^s \frac{\partial \widehat{G}_2}{\partial L_1} \right) < r - 1$  oraz  $\deg_{L_1} \frac{\partial \widehat{G}_3}{\partial L_1} < r - 1$ , więc żądane podzielności zachodzą, gdy  $\frac{\partial \widehat{G}_2}{\partial L_1} = 0$  oraz  $\frac{\partial \widehat{G}_3}{\partial L_1} = 0$ . Wnioskujemy stąd, że  $\widehat{G}_2, \widehat{G}_3 \in k[L_2]$ .

Następnie policzmy pochodną cząstkową względem drugiej zmiennej:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial L_2} &= L_1^r s L_2^{s-1} G_0(L_1, L_2) + L_1^r L_2^s \frac{\partial G_0}{\partial L_2}(L_1, L_2) + L_1^r \frac{\partial \widehat{G}_1}{\partial L_2}(L_1, L_2) + s L_2^{s-1} \widehat{G}_2(L_2) \\ &\quad + L_2^s \frac{\partial \widehat{G}_2}{\partial L_2}(L_2) + \frac{\partial \widehat{G}_3}{\partial L_2}(L_2). \end{aligned}$$

Argumentując analogicznie, jak poprzednio, otrzymujemy, że  $\widehat{G}_1, \widehat{G}_3$  nie zależą od  $L_2$ . Reasumując,  $\widehat{G}_1 \in k[L_1], \widehat{G}_2 \in k[L_2]$  oraz  $\widehat{G}_3 \in k$ . W tym momencie wiemy więcej o postaci wielomianu  $G$ , a mianowicie

$$G = L_1^r L_2^s G_0(L_1, L_2) + L_1^r \widehat{G}_1(L_1) + L_2^s \widehat{G}_2(L_2) + \widehat{G}_3. \quad (3.27)$$

Na podstawie (3.27) pochodne cząstkowe względem pierwszej i drugiej zmiennej możemy teraz zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial L_1} &= r L_1^{r-1} \left[ L_2^s G_0(L_1, L_2) + \frac{1}{r} L_1 L_2^s \frac{\partial G_0}{\partial L_1}(L_1, L_2) + \widehat{G}_1(L_1) + \frac{1}{r} L_1 \frac{\partial \widehat{G}_1}{\partial L_1}(L_1) \right], \\ \frac{\partial G}{\partial L_2} &= s L_2^{s-1} \left[ L_1^r G_0(L_1, L_2) + \frac{1}{s} L_1^r L_2 \frac{\partial G_0}{\partial L_2}(L_1, L_2) + \widehat{G}_2(L_2) + \frac{1}{s} L_2 \frac{\partial \widehat{G}_2}{\partial L_2}(L_2) \right]. \end{aligned}$$

Korzystając z równości (3.25) oraz przyjmując  $G_1(L_1) = \widehat{G}_1(L_1) + \frac{1}{r} L_1 \frac{\partial \widehat{G}_1}{\partial L_1}(L_1)$  oraz  $G_2(L_2) = \widehat{G}_2(L_2) + \frac{1}{s} L_2 \frac{\partial \widehat{G}_2}{\partial L_2}(L_2)$  dostajemy tezę.  $\square$

### 3.2.2. Zbiór rozwiązań równania $[f_1^r, P_1] = [P_2, f_2^s]$ dla dwuwymiarowego systemu zmiennych

Przypomnimy kilka pojęć i faktów z algebry liniowej, które będą istotne w dalszych rozważaniach.

Dla danej macierzy  $C$  wymiaru  $n \times m$  o wyrazach z pierścienia przemiennego  $R$ , czyli  $C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} \end{bmatrix} \in M(n, m; R)$ , i dwóch ciągów liczb całkowitych  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$  oraz  $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq m$ , gdzie  $r \leq \min\{n, m\}$ , przez  $C_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r}$  będziemy oznaczać minor stopnia  $r$  macierzy  $C$ , o wyrazach z wierszy  $i_1, \dots, i_r$  i kolumn  $j_1, \dots, j_r$ , a więc

$$C_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} = \det \begin{bmatrix} c_{i_1 j_1} & \cdots & c_{i_1 j_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i_r j_1} & \cdots & c_{i_r j_r} \end{bmatrix}.$$

Poniższy lemat, przedstawiający minory iloczynu macierzy  $A$  i  $B$  przy pomocy minorów macierzy  $A$  oraz  $B$ , będzie potrzebny w dalszych rozważaniach.

**Lemat 3.25** ([25], str. 160). *Dla dowolnych macierzy  $A \in M(l, n; R)$ ,  $B \in M(n, m; R)$  oraz dwóch ciągów silnie rosnących  $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq l$ ,  $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq m$ , gdzie  $r \leq \min\{l, n, m\}$ , zachodzi równość*

$$(A \cdot B)_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_r \leq n} A_{l_1 \dots l_r}^{i_1 \dots i_r} \cdot B_{j_1 \dots j_r}^{l_1 \dots l_r}.$$

Pojęcie częściowego systemu zmiennych można znaleźć w [5, rozdział 3.1]. Poniżej zdefiniowane pojęcie  $r$ -wymiarowego systemu zmiennych jest jego nieznaczną modyfikacją.

**Definicja 3.26** ( $r$ -wymiarowy system zmiennych). Niech  $1 \leq r \leq n$  oraz niech  $k[X] = k[x_1, \dots, x_n]$ . Układ  $(f_1, \dots, f_r) \in k[X]^r$  nazywamy  $r$ -wymiarowym systemem zmiennych w  $k[X]$ , gdy istnieją  $f_{r+1}, \dots, f_n \in k[X]$  takie, że  $(f_1, \dots, f_n)$  jest  $k$ -automorfizmem  $k[X]$ .

**Uwaga 3.27.** Układ  $(f_1, \dots, f_r) \in k[X]^r$  jest  $r$ -wymiarowym systemem zmiennych, jeżeli daje się go dopełnić do pełnego systemu zmiennych. Zatem  $f_1$  jest jednowymiarowym systemem zmiennych w  $k[X]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f_1$  jest zmienną w  $k[X]$ . Jak również układ  $(f_1, \dots, f_n)$  jest  $n$ -wymiarowym systemem zmiennych w  $k[X]$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest on układem współrzędnych.

W kolejnym lemacie, jak również w dalszych rozważaniach, będziemy używać następującego oznaczenia dla zbioru rozwiązań równania  $[h_1, P_1] = [P_2, h_2]$  danego przez dowolną parę wielomianów  $h_1, h_2 \in k[X]$ :

$$\text{SolSet}(h_1, h_2) := \left\{ (P_1, P_2) \in k[X]^2 \mid [h_1, P_1] = [P_2, h_2] \right\}.$$

**Lemat 3.28.** *Dla dowolnej pary wielomianów  $(h_1, h_2) \in k[X]^2$  oraz dowolnego automorfizmu  $F$  przestrzeni  $k^n$  zachodzi równość*

$$\Phi_F(\text{SolSet}(h_1, h_2)) = \text{SolSet}(\Phi_F(h_1, h_2)),$$

gdzie  $\Phi_F$  jest odwzorowaniem zdefiniowanym następująco

$$\Phi_F : k[X]^2 \ni (G_1, G_2) \mapsto (G_1 \circ F^{-1}, G_2 \circ F^{-1}) \in k[X]^2.$$

*Dowód.* Zaczniemy od spostrzeżenia, że nawias Poissona możemy zapisać przy pomocy minorów stopnia dwa z macierzy Jacobiego pary wielomianów  $f, g \in k[X]$ :

$$[f, g] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\text{Jac}(f, g))_{ij}^{12} \cdot [x_i, x_j], \quad (3.28)$$

gdzie

$$\text{Jac}(f, g) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

jest macierzą Jacobiego odwzorowania  $(f, g) : k^n \rightarrow k^2$ . W pierwszej kolejności zajmujemy się zawieraniem  $\Phi_F(\text{SolSet}(h_1, h_2)) \supset \text{SolSet}(\Phi_F(h_1, h_2))$ . Zanim udowodnimy tę inkluzję, zauważmy, że odwzorowanie  $\Phi_F : k[X]^2 \mapsto k[X]^2$  jest bijektywne oraz  $(\Phi_F)^{-1} = \Phi_{F^{-1}}$ . Biorąc dowolne  $(P_1, P_2) \in k[X]^2$  i zakładając, że  $(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2) =$

$\Phi_F(P_1, P_2) \in \text{SolSet}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$ , gdzie  $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) = \Phi_F(h_1, h_2)$ , mamy  $[\tilde{h}_1, \tilde{P}_1] = [\tilde{P}_2, \tilde{h}_2]$  i dalej na podstawie (3.28) dostajemy

$$\left(\text{Jac}(\tilde{h}_1, \tilde{P}_1)\right)_{ij}^{12} = \left(\text{Jac}(\tilde{P}_2, \tilde{h}_2)\right)_{ij}^{12} \quad (3.29)$$

dla każdych  $1 \leq i < j \leq n$ . Ponieważ

$$P_i = \tilde{P}_i \circ F \quad \text{oraz} \quad h_i = \tilde{h}_i \circ F \quad \text{dla } i = 1, 2, \quad (3.30)$$

więc na podstawie (3.28) otrzymujemy

$$[h_l, P_l] = [\tilde{h}_l \circ F, \tilde{P}_l \circ F] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\text{Jac}((\tilde{h}_l, \tilde{P}_l) \circ F)\right)_{ij}^{12} \cdot [x_i, x_j], \quad (3.31)$$

dla  $l = 1, 2$ . Przyjrzyjmy się pojedynczemu współczynnikowi powyższej sumy przy ustalonych  $i, j$ . Stosując regułę łańcuchową, lemat 3.25 (dla  $l = 2, m = n$  oraz  $R = k[X]$ ), a następnie równość (3.29) mamy

$$\begin{aligned} \left(\text{Jac}((\tilde{h}_1, \tilde{P}_1) \circ F)\right)_{ij}^{12} &= \left(\text{Jac}(\tilde{h}_1, \tilde{P}_1)(F) \cdot \text{Jac } F\right)_{ij}^{12} \\ &= \sum_{1 \leq l_1 < l_2 \leq n} \left(\text{Jac}(\tilde{h}_1, \tilde{P}_1)(F)\right)_{l_1 l_2}^{12} \cdot (\text{Jac } F)_{ij}^{l_1 l_2} \\ &= \sum_{1 \leq l_1 < l_2 \leq n} \left(\text{Jac}(\tilde{P}_2, \tilde{h}_2)(F)\right)_{l_1 l_2}^{12} \cdot (\text{Jac } F)_{ij}^{l_1 l_2} \\ &= \left(\text{Jac}((\tilde{P}_2, \tilde{h}_2) \circ F)\right)_{ij}^{12}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Na podstawie równości (3.32), która zachodzi dla każdych  $1 \leq i < j \leq n$ , oraz równości (3.31) dostajemy  $[h_1, P_1] = [P_2, h_2]$ . Tak więc  $(P_1, P_2) \in \text{SolSet}(h_1, h_2)$ , a zatem  $\Phi_F(P_1, P_2) \in \Phi_F(\text{SolSet}(h_1, h_2))$ . Z dowolności wyboru pary  $(P_1, P_2) \in k[X]^2$  oraz bijektywności odwzorowania  $\Phi_F$  otrzymujemy żądane zawieranie.

W celu uzyskania przeciwnej inkluzji posłużymy się podobną argumentacją dla odwzorowania  $\Phi_{F^{-1}}$ . Ponieważ  $\Phi_F(h_1, h_2) = (h_1 \circ F^{-1}, h_2 \circ F^{-1}) = (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$ , więc  $\Phi_{F^{-1}}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) = (\tilde{h}_1 \circ F, \tilde{h}_2 \circ F) = (h_1, h_2)$ . Korzystając z udowodnionej inkluzji, ale dla  $\Phi_{F^{-1}} = \Phi_F^{-1}$ , mamy:

$$\text{SolSet}(h_1, h_2) = \text{SolSet}(\Phi_{F^{-1}}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)) \subset \Phi_{F^{-1}}(\text{SolSet}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)) = \Phi_{F^{-1}}(\text{SolSet}(\Phi_F(h_1, h_2))).$$

Stosując  $\Phi_F$  do powyższej inkluzji dostajemy

$$\Phi_F(\text{SolSet}(h_1, h_2)) \subset \text{SolSet}(\Phi_F(h_1, h_2)).$$

□

Teraz możemy przedstawić główne twierdzenie tego podrozdziału.

**Twierdzenie 3.29.** *Niech  $(f_1, f_2) \in k[X]^2$  będzie dwuwymiarowym systemem zmiennych. Para  $(P_1, P_2) \in k[X]^2$  jest rozwiązaniem równania*

$$[f_1^r, P_1] = [P_2, f_2^s]$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P_1 = f_2^s G_0(f_1, f_2) + \frac{1}{r} f_1 f_2^s \frac{\partial G_0}{\partial x}(f_1, f_2) + G_1(f_1),$$

$$P_2 = f_1^r G_0(f_1, f_2) + \frac{1}{s} f_1^r f_2 \frac{\partial G_0}{\partial y}(f_1, f_2) + G_2(f_2),$$

gdzie  $G_0 \in k[x, y]$  oraz  $G_1, G_2 \in k[t]$ .

*Dowód.* Z definicji dwuwymiarowego systemu zmiennych istnieją  $f_3, \dots, f_n \in k[X]$  takie, że  $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  jest automorfizmem przestrzeni  $k^n$ . Teraz dla odwzorowania  $\Phi_F$  mamy  $\Phi_F(f_1^r, f_2^s) = (x_1^r, x_2^s)$ . Z twierdzenia 3.24 oraz lematu 3.18, w którym przyjmujemy  $L_1 = x_1$  oraz  $L_2 = x_2$ , otrzymujemy pełny opis zbioru  $\text{SolSet}(\Phi_F(f_1^r, f_2^s))$ , a mianowicie  $(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2) \in \text{SolSet}(\Phi_F(f_1^r, f_2^s))$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\tilde{P}_1 = x_2^s G_0(x_1, x_2) + \frac{1}{r} x_1 x_2^s \frac{\partial G_0}{\partial x}(x_1, x_2) + G_1(x_1), \quad (3.33)$$

$$\tilde{P}_2 = x_1^r G_0(x_1, x_2) + \frac{1}{s} x_1^r x_2 \frac{\partial G_0}{\partial y}(x_1, x_2) + G_2(x_2) \quad (3.34)$$

dla  $G_0 \in k[x, y]$  oraz  $G_1, G_2 \in k[t]$ . W szczególności dostajemy

$$\text{SolSet}(\Phi_F(f_1^r, f_2^s)) \subset k[x_1, x_2]^2. \quad (3.35)$$

Na podstawie lematu 3.28 oraz (3.35) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{SolSet}(f_1^r, f_2^s) &= \left\{ (P_1, P_2) \in k[X]^2 \mid \Phi_F(P_1, P_2) \in \text{SolSet}(\Phi_F(f_1^r, f_2^s)) \right\} \\ &= \left\{ \Phi_F^{-1}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2) \mid (\tilde{P}_1, \tilde{P}_2) \in \text{SolSet}(\Phi_F(f_1^r, f_2^s)) \right\} \\ &= \left\{ \Phi_{F^{-1}}(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2) \mid (\tilde{P}_1, \tilde{P}_2) \in \text{SolSet}(\Phi_F(f_1^r, f_2^s)) \right\} \\ &= \left\{ (\tilde{P}_1(f_1, f_2), \tilde{P}_2(f_1, f_2)) \mid (\tilde{P}_1, \tilde{P}_2) \in \text{SolSet}(\Phi_F(f_1^r, f_2^s)) \right\}. \end{aligned}$$

Z powyższej równości oraz z (3.33) i (3.34) dostajemy tezę. □

## Pary wielomianów o niskim stopniu nawiasu Poissona

Materiał znajdujący się w tym rozdziale w całości został opracowany na podstawie wyników zawartych w pracy [7]. Wyniki te sformułowane są dla ciała  $\mathbb{C}$ , niemniej jednak prawdziwe są dla dowolnego ciała algebraicznie domkniętego charakterystyki zero.

Założmy, że mamy dwa wielomiany  $n$  zmiennych  $F$  i  $G$  odpowiednio stopnia  $d$  i  $N$ , gdzie  $d \leq N$ . Możemy je jednoznacznie przedstawić jako sumę wielomianów jednorodnych nazywanych składowymi jednorodnymi:

$$F = F_1 + \cdots + F_d \quad \text{oraz} \quad G = G_1 + \cdots + G_N.$$

Składową jednorodną  $F_0$  jak i  $G_0$  pomijamy, gdyż w naszych rozważaniach będziemy zakładać, że są one równe zero (nawias Poissona nie zależy od wyrazów wolnych).

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że stopień nawiasu Poissona tej pary wielomianów jest odpowiednio niski. W szczególności będziemy zakładać, że  $\deg[F, G] < d + N$  (to znaczy nie osiąga swojej maksymalnej wartości, czyli nie jest równy sumie stopni wielomianów  $F$  i  $G$ ). To implikuje, że składowa jednorodna stopnia  $d + N$  nawiasu Poissona pary  $F, G$ , czyli  $[F_d, G_N]$  jest równa zero. Zatem na mocy lematu 3.9 istnieją takie  $a, b \in \mathbb{C}^*$ ,  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$  i wielomian jednorodny  $h$ , że  $F_d = ah^{k_1}$  oraz  $G_N = bh^{k_2}$ . Innymi słowy, formy wiodące wielomianów  $F$  i  $G$  możemy zapisać przy pomocy jednego i tego samego wielomianu jednorodnego  $h$ . Bez straty ogólności możemy założyć, że  $h$  jest wielomianem jednorodnym, który nie jest potęgą żadnego innego wielomianu istotnie niższego stopnia niż  $t = \deg h$ , oraz korzystając z algebraicznej domkniętości ciała  $\mathbb{C}$ , że  $a = 1$ . Wtedy forma jednorodna najwyższego stopnia wielomianu  $F$  ma postać  $F_d = h^{\frac{d}{t}}$ , natomiast dla wielomianu  $G$ :  $G_N = a_N h^{\frac{N}{t}}$ , gdzie dla wygody zapisu  $b = a_N \in \mathbb{C}^*$ . Oczywiście stopień wielomianu  $h$  musi dzielić zarówno stopień  $F$ , jak i stopień  $G$ . Ze względu na wygodę Czytelnika wyniki zawarte w całym tym rozdziale będą najpierw formułowane i dowodzone w przypadku  $t = 1$ , a następnie uogólniane dla dowolnego  $t \geq 1$ . Ponadto, w przypadku  $t > 1$  wyniki podrozdziałów 4.2 i 4.3 wymagają dodatkowego założenia, że  $h$  jest wielomianem bekwadratowym.

### 4.1. Zależność pomiędzy składowymi jednorodnymi pary wielomianów o niskim stopniu nawiasu Poissona

Ten podrozdział zaczniemy od przedstawienia lematów przygotowawczych, o charakterze technicznym, które wykorzystamy w dalszych obliczeniach. Podamy teraz lemat, który pozwala w pewnych sytuacjach przedstawić sumę kilku nawiasów Poissona w postaci jednego nawiasu Poissona.

**Lemat 4.1.** *Załóżmy, że dla  $u = i, \dots, i + s - 1$  wielomiany  $G_u \in \mathbb{C}[X]$  można przedstawić przy pomocy wielomianów  $F_1, \dots, F_s, h \in \mathbb{C}[X]$  w następujący sposób:*

$$G_u = \sum_{\alpha=(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s} c_\alpha^{(u)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0}, \quad (4.1)$$

gdzie  $c_\alpha^{(u)} \in \mathbb{C}$ ,  $s = d - 1$ . Załóżmy ponadto, że dla każdych  $k$  i  $l$  takich, że  $1 \leq k, l \leq s$ , oraz dla dowolnego wielowskaźnika  $\alpha \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s$  współczynniki  $c_\alpha^{(u)}$  spełniają warunek

$$(C1) \quad (\alpha_k + 1) c_{\alpha + e_k}^{(i+s-l)} = (\alpha_l + 1) c_{\alpha + e_l}^{(i+s-k)},$$

gdzie  $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_s = (0, \dots, 0, 1)$  są wektorami bazy standardowej w  $\mathbb{R}^{s+1}$ . Wtedy

$$\begin{aligned} & [F_s, G_i] + [F_{s-1}, G_{i+1}] + \dots + [F_1, G_{i+s-1}] \\ &= \left[ \begin{aligned} & \sum_{\alpha \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}^{s-1}} \frac{\alpha_0}{\alpha_1} c_{\alpha - e_1}^{(i+s-1)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0 - 1} \\ & + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z} \times \{0\} \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}^{s-2}} \frac{\alpha_0}{\alpha_2} c_{\alpha - e_2}^{(i+s-2)} F_2^{\alpha_2} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0 - 1} \\ & \vdots \\ & + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z} \times \{(0, \dots, 0)\} \times \mathbb{N}_+} \frac{\alpha_0}{\alpha_s} c_{\alpha - e_s}^{(i)} F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0 - 1} \end{aligned} \right], \quad h \end{aligned} \quad (4.2)$$

*Dowód.* Na podstawie propozycji 3.3 dostajemy

$$\begin{aligned} [F_i, F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0}] &= \alpha_0 F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0 - 1} [F_i, h] + \alpha_1 F_1^{\alpha_1 - 1} F_2^{\alpha_2} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0} [F_i, F_1] \\ &+ \dots + \alpha_s F_1^{\alpha_1} \dots F_{s-1}^{\alpha_{s-1}} F_s^{\alpha_s - 1} h^{\alpha_0} [F_i, F_s] \\ &= \alpha_0 F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0 - 1} [F_i, h] + \sum_{j=1}^s \alpha_j F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} F_j^{-1} h^{\alpha_0} [F_i, F_j]. \end{aligned}$$

Następnie stosując założenie o postaci wielomianów  $G_u$ , liniowość nawiasu Poissona oraz powyższą równość, otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} & [F_s, G_i] + [F_{s-1}, G_{i+1}] + \dots + [F_1, G_{i+s-1}] \\ &= \sum_{l=1}^s [F_l, G_{i+s-l}] = \sum_{l=1}^s [F_l, \sum_{\alpha=(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s} c_\alpha^{(i+s-l)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0}] \\ &= \sum_{l=1}^s \sum_{\alpha=(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s} \left( c_\alpha^{(i+s-l)} \alpha_0 F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0 - 1} [F_l, h] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^s c_{\alpha}^{(i+s-l)} \alpha_k F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} F_k^{-1} h^{\alpha_0} [F_l, F_k] \\
 = & \sum_{\alpha=(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s} \sum_{l=1}^s c_{\alpha}^{(i+s-l)} \alpha_0 F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0-1} [F_l, h] \\
 & + \sum_{\alpha=(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s} \sum_{l=1}^s \sum_{k=1}^s c_{\alpha}^{(i+s-l)} \alpha_k F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} F_k^{-1} h^{\alpha_0} [F_l, F_k].
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pokażemy teraz, że drugi ze składników w powyższej sumie wynosi zero. W tym celu skorzystamy z antysymetryczności nawiasu Poissona oraz z warunku (C1). W pierwszej kolejności zauważmy, że na mocy antysymetryczności wszystkie składniki z  $k = l$  są równe zero. Zatem

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\alpha=(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s} \sum_{l=1}^s \sum_{k=1}^s c_{\alpha}^{(i+s-l)} \alpha_k F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} F_k^{-1} h^{\alpha_0} [F_l, F_k] \\
 = & \sum_{\alpha=(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s} \left( \sum_{1 \leq k < l \leq s} c_{\alpha}^{(i+s-l)} \alpha_k F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} F_k^{-1} h^{\alpha_0} [F_l, F_k] \right. \\
 & \left. + \sum_{1 \leq l < k \leq s} c_{\alpha}^{(i+s-l)} \alpha_k F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} F_k^{-1} h^{\alpha_0} [F_l, F_k] \right) \\
 = & \sum_{\alpha=(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s} \sum_{1 \leq k < l \leq s} \left( c_{\alpha}^{(i+s-l)} \alpha_k F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} F_k^{-1} h^{\alpha_0} [F_l, F_k] \right. \\
 & \left. + c_{\alpha}^{(i+s-k)} \alpha_l F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} F_l^{-1} h^{\alpha_0} [F_k, F_l] \right).
 \end{aligned}$$

Grupując odpowiadające sobie wyrazy, powyższą sumę możemy zapisać następująco:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\alpha=(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s} \sum_{1 \leq k < l \leq s} \left( c_{\alpha+e_k}^{(i+s-l)} (\alpha_k + 1) F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0} [F_l, F_k] \right. \\
 & \left. + c_{\alpha+e_l}^{(i+s-k)} (\alpha_l + 1) F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0} [F_k, F_l] \right).
 \end{aligned}$$

Wystarczy teraz skorzystać z antysymetryczności nawiasu Poissona oraz warunku (C1), aby zauważyć, że

$$\begin{aligned}
 & c_{\alpha+e_k}^{(i+s-l)} (\alpha_k + 1) F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0} [F_l, F_k] + c_{\alpha+e_l}^{(i+s-k)} (\alpha_l + 1) F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0} [F_k, F_l] \\
 = & \left[ c_{\alpha+e_k}^{(i+s-l)} (\alpha_k + 1) - c_{\alpha+e_l}^{(i+s-k)} (\alpha_l + 1) \right] F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0} [F_l, F_k] = 0.
 \end{aligned}$$

Zajmijmy się w takim razie pierwszym składnikiem sumy (4.3), czyli

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s} \sum_{l=1}^s \alpha_0 c_{\alpha}^{(i+s-l)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0-1} [F_l, h]. \tag{4.4}$$

Ze względu na wygodę zapisu przyjmujemy, że dla dowolnego  $u$  współczynnik występujący w przedstawieniu  $G_u$ , czyli  $c_{(\alpha_0, \dots, \alpha_s)}^{(u)}$  jest równy zero, gdy  $\alpha_l < 0$ , dla pewnego  $l = 1, \dots, s$ . Zatem przenumerowując sumę (4.4) (w obrębie każdego składnika sumy wewnętrznej z osobna) możemy ją zapisać następująco:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s} \alpha_0 c_{\alpha}^{(i+s-1)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0-1} [F_1, h] \\
& + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s} \alpha_0 c_{\alpha}^{(i+s-2)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0-1} [F_2, h] \\
& + \dots + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s} \alpha_0 c_{\alpha}^{(i)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0-1} [F_s, h] \\
& = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s} \alpha_0 h^{\alpha_0-1} \left( c_{\alpha-e_1}^{(i+s-1)} F_1^{\alpha_1-1} F_2^{\alpha_2} \dots F_s^{\alpha_s} [F_1, h] \right. \\
& + c_{\alpha-e_2}^{(i+s-2)} F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2-1} F_3^{\alpha_3} \dots F_s^{\alpha_s} [F_2, h] \\
& \left. + \dots + c_{\alpha-e_s}^{(i)} F_1^{\alpha_1} \dots F_{s-1}^{\alpha_{s-1}} F_s^{\alpha_s-1} [F_s, h] \right). \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Jeżeli  $\alpha_l \neq 0$  dla pewnego  $l \in \{1, \dots, s\}$ , to korzystając z faktu, że nawias Poissona jest  $\mathbb{C}$ -różniczkowaniem, zachodzi poniższa równość

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{1}{\alpha_l} c_{\alpha-e_l}^{(i+s-l)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s}, h \right] &= \frac{\alpha_1}{\alpha_l} c_{\alpha-e_l}^{(i+s-l)} F_1^{\alpha_1-1} F_2^{\alpha_2} \dots F_s^{\alpha_s} [F_1, h] \\
& + \frac{\alpha_2}{\alpha_l} c_{\alpha-e_l}^{(i+s-l)} F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2-1} F_3^{\alpha_3} \dots F_s^{\alpha_s} [F_2, h] \\
& + \dots + \frac{\alpha_s}{\alpha_l} c_{\alpha-e_l}^{(i+s-l)} F_1^{\alpha_1} \dots F_{s-1}^{\alpha_{s-1}} F_s^{\alpha_s-1} [F_s, h] \\
& = c_{\alpha-e_1}^{(i+s-1)} F_1^{\alpha_1-1} F_2^{\alpha_2} \dots F_s^{\alpha_s} [F_1, h] \\
& + c_{\alpha-e_2}^{(i+s-2)} F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2-1} F_3^{\alpha_3} \dots F_s^{\alpha_s} [F_2, h] \\
& + \dots + c_{\alpha-e_s}^{(i)} F_1^{\alpha_1} \dots F_{s-1}^{\alpha_{s-1}} F_s^{\alpha_s-1} [F_s, h], \tag{4.6}
\end{aligned}$$

gdzie drugą z powyższych równości możemy uzasadnić w następujący sposób. Mianowicie dla  $l \in \{1, \dots, s\}$  warunek (C1) zastosowany do  $\alpha - e_l - e_k$  daje równość

$$[(\alpha_k - 1) + 1] c_{(\alpha-e_l-e_k)+e_k}^{(i+s-l)} = [(\alpha_l - 1) + 1] c_{(\alpha-e_l-e_k)+e_l}^{(i+s-k)},$$

lub równoważnie

$$\begin{aligned}
\frac{(\alpha_k-1)+1}{(\alpha_l-1)+1} c_{(\alpha-e_l-e_k)+e_k}^{(i+s-l)} &= c_{(\alpha-e_l-e_k)+e_l}^{(i+s-k)}, \\
\frac{\alpha_k}{\alpha_l} c_{\alpha-e_l}^{(i+s-l)} &= c_{\alpha-e_k}^{(i+s-k)}.
\end{aligned}$$

Zauważmy również, że dla  $\alpha_k = 0$  współczynnik  $c_{(\alpha-e_l-e_k)+e_l}^{(i+s-k)}$  jest równy zero, ponieważ  $(\alpha - e_l - e_k) + e_l \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s$ . Zatem z (4.5) i (4.6) wynika, że sumę (4.4) możemy zapisać w następujący sposób:

$$\left[ \sum_{\alpha \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s} h^{\alpha_0-1} \frac{\alpha_0}{\alpha_l} c_{\alpha-e_l}^{(i+s-l)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s}, h \right].$$

Dalej odpowiednio grupując składniki w powyższej sumie otrzymujemy tezę.  $\square$

Przedstawimy teraz dwa lematy, które łącznie pozwolą nam w dalszej części na przeprowadzenie pewnego rodzaju indukcji.

**Lemat 4.2.** *Niech  $h$  będzie wielomianem jednorodnym, który nie jest potęgą wielomianu niższego stopnia. Ponadto niech wielomiany  $G_i, \dots, G_{i+s-1}$  mają postać jak w lemacie 4.1 oraz spełniają warunek (C1). Jeśli dla pewnego  $r \in \mathbb{N}_+$  i wielomianu  $G_{i-1}$  jest spełnione równanie  $[h^r, G_{i-1}] + [F_s, G_i] + \dots + [F_1, G_{i+s-1}] = 0$ , to*

$$G_{i-1} = \sum_{\alpha=(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s} c_\alpha^{(i-1)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0},$$

gdzie  $c_\alpha^{(i-1)} \in \mathbb{C}$ . Ponadto, dla każdego  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s$  oraz  $l \in \{1, \dots, s\}$ , jeśli  $\alpha_l > 0$ , to zachodzi równość

$$(P1) \quad c_{\alpha - r e_0}^{(i-1)} = \frac{\alpha_0}{r \alpha_l} c_{\alpha - e_l}^{(i+s-l)}.$$

*Dowód.* Korzystając najpierw z faktu, że nawias Poissona jest różniczkowaniem ze względu na pierwszy argument, a potem, że jest różniczkowaniem ze względu na drugi argument (patrz propozycja 3.3) oraz antysymetryczności nawiasu Poissona dostajemy

$$[h^r, G_{i-1}] = r h^{r-1} [h, G_{i-1}] = [h, r h^{r-1} G_{i-1}] = [-r h^{r-1} G_{i-1}, h]. \quad (4.7)$$

Na podstawie założeń lematu, równości (4.7) i lematu 4.1 mamy

$$\begin{aligned} 0 &= [h^r, G_{i-1}] + [F_s, G_i] + \dots + [F_1, G_{i+s-1}] \\ &= \left[ -r h^{r-1} G_{i-1} + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}^{s-1}} \frac{\alpha_0}{\alpha_1} c_{\alpha - e_1}^{(i+s-1)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0-1} \right. \\ &\quad + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z} \times \{0\} \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}^{s-2}} \frac{\alpha_0}{\alpha_2} c_{\alpha - e_2}^{(i+s-2)} F_2^{\alpha_2} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0-1} \\ &\quad \vdots \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z} \times \{(0, \dots, 0)\} \times \mathbb{N}_+} \frac{\alpha_0}{\alpha_s} c_{\alpha - e_s}^{(i)} F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0-1}, \quad h \right], \end{aligned}$$

a zatem z wniosku 3.12 istnieje taki wielomian  $P$  jednej zmiennej, że

$$\begin{aligned} P(h) &= -r h^{r-1} G_{i-1} + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}^{s-1}} \frac{\alpha_0}{\alpha_1} c_{\alpha - e_1}^{(i+s-1)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0-1} \\ &\quad + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z} \times \{0\} \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}^{s-2}} \frac{\alpha_0}{\alpha_2} c_{\alpha - e_2}^{(i+s-2)} F_2^{\alpha_2} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0-1} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z} \times \{(0, \dots, 0)\} \times \mathbb{N}_+} \frac{\alpha_0}{\alpha_s} c_{\alpha - e_s}^{(i)} F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0-1}. \end{aligned}$$

Rozwiązując powyższą równość ze względu na  $G_{i-1}$  dostajemy

$$\begin{aligned} G_{i-1} &= \frac{1}{r h^{r-1}} \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}^{s-1}} \frac{\alpha_0}{\alpha_1} c_{\alpha - e_1}^{(i+s-1)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0-1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z} \times \{0\} \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}^{s-2}} \frac{\alpha_0}{\alpha_2} c_{\alpha - e_2}^{(i+s-2)} F_2^{\alpha_2} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0-1} \right) \quad (4.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z} \times \{(0, \dots, 0)\} \times \mathbb{N}_+} \frac{\alpha_0}{\alpha_s} c_{\alpha - e_s}^{(i)} F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0 - 1} - P(h) \end{aligned} \Bigg) .$$

Pokazaliśmy zatem, że wielomian  $G_{i-1}$  ma stosowne przedstawienie.

Przejdziemy teraz do dowodu warunku (P1). Jeżeli  $l = 1$ , to jest on bezpośrednią konsekwencją (4.8). Istotnie, w tym przypadku interesują nas tylko współczynniki składników występujących w pierwszej sumie po prawej stronie równości (4.8), wielomian  $h$  występuje w potęgce  $\alpha_0 - r$ , więc współczynniki  $c_{\alpha - re_0}^{(i-1)}$  wielomianu  $G_{i-1}$  spełniają równość z warunku (P1). Załóżmy zatem, że  $l > 1$  i  $\alpha_l > 0$ . Jeśli dla ustalonego  $l$  poprzedzające wykładniki  $\alpha_1 = \dots = \alpha_{l-1} = 0$ , to jak wyżej równość w warunku (P1) wynika z (4.8). W przeciwnym przypadku możemy założyć, że istnieje liczba naturalna dodatnia  $k < l$ , dla której  $\alpha_k > 0$  oraz zachodzi równość

$$c_{\alpha - re_0}^{(i-1)} = \frac{\alpha_0}{r\alpha_k} c_{\alpha - e_k}^{(i+s-k)} .$$

W szczególności możemy wziąć najmniejsze  $k$ , dla którego  $\alpha_k > 0$ , a to na mocy wcześniejszego rozumowania daje nam gwarancję, że zachodzi powyższa równość. Wystarczy teraz skorzystać z warunku (C1) zastosowanego do  $\alpha - e_l - e_k$ , z którego dostajemy

$$[(\alpha_k - 1) + 1] c_{(\alpha - e_l - e_k) + e_k}^{(i+s-l)} = [(\alpha_l - 1) + 1] c_{(\alpha - e_l - e_k) + e_l}^{(i+s-k)} ,$$

lub równoważnie

$$\alpha_k c_{\alpha - e_l}^{(i+s-l)} = \alpha_l c_{\alpha - e_k}^{(i+s-k)} ,$$

co w konsekwencji daje

$$\frac{\alpha_0}{r\alpha_l} c_{\alpha - e_l}^{(i+s-l)} = \frac{\alpha_0}{r\alpha_k} c_{\alpha - e_k}^{(i+s-k)}$$

i kończy dowód. □

**Lemat 4.3.** Niech  $r \in \mathbb{N}_+$ , oraz niech  $h$  będzie wielomianem jednorodnym, który nie jest potęgą wielomianu niższego stopnia. Ponadto niech wielomiany  $G_i, \dots, G_{i+s-1}$  mają postać jak w lemacie 4.1 oraz spełniają warunek (C1), a wraz z wielomianem  $G_{i+s}$ , również postaci jak w lemacie 4.1, dla każdego  $1 \leq l \leq k \leq s$  i  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s$  spełniają warunek

$$(C2) \quad c_{\alpha - re_0}^{(i+l-1)} = \frac{\alpha_0}{r\alpha_k} c_{\alpha - e_k}^{(i+l+s-k)} \quad \text{dla } \alpha_k > 0 .$$

Jeśli ponadto dla wielomianu  $G_{i-1}$  zachodzi  $[h^r, G_{i-1}] + [F_s, G_i] + \dots + [F_1, G_{i+s-1}] = 0$ , to

- (a) wielomiany  $G_{i-1}, G_i, \dots, G_{i+s-2}$  spełniają warunek (C1),
- (b) wielomiany  $G_{i-1}, G_i, \dots, G_{i+s-1}$  spełniają warunek (C2),

przy czym zastępujemy  $i$  przez  $i - 1$ , a  $r$  pozostaje to samo.

*Dowód.* W pierwszej kolejności udowodnimy podpunkt (b). W takim razie niech  $1 \leq l \leq k \leq s$ ,  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s$  oraz  $\alpha_k > 0$ . Jeśli  $l = 1$ , to podpunkt (b) wynika z własności (P1), w której za  $l$  należy podstawić  $k$ . Natomiast dla  $l \geq 2$ ,

na podstawie warunku (C2), który zachodzi dla pakietu wielomianów  $G_i, \dots, G_{i+s}$ , otrzymujemy

$$c_{\alpha-re_0}^{((i-1)+l-1)} = c_{\alpha-re_0}^{(i+(l-1)-1)} = \frac{\alpha_0}{r\alpha_k} c_{\alpha-e_k}^{(i+(l-1)+s-k)} = \frac{\alpha_0}{r\alpha_k} c_{\alpha-e_k}^{((i-1)+l+s-k)}.$$

Zatem wielomiany  $G_{i-1}, \dots, G_{i+s-1}$  spełniają warunek (C2).

Przejdźmy teraz do dowodu podpunktu (a). Niech  $1 \leq k, l \leq s$  oraz  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s$ . Dodatkowo ze względu na symetrię warunku (C1) możemy założyć, że  $l \leq k$ . Przyjrzyjmy się wyrażeniu  $(\alpha_l + 1)c_{\alpha+e_l}^{((i-1)+s-k)} = (\alpha_l + 1)c_{\alpha+e_l}^{(i+(s-k)-1)}$ . Tak więc dla  $k = s$  możemy skorzystać z własności (P1) otrzymując

$$\begin{aligned} (\alpha_l + 1)c_{\alpha+e_l}^{(i+(s-k)-1)} &= (\alpha_l + 1)c_{\alpha+e_l}^{(i-1)} = (\alpha_l + 1)c_{(\alpha+e_l+re_0)-re_0}^{(i-1)} \\ &= (\alpha_l + 1)\frac{\alpha_0+r}{r(\alpha_l+1)} c_{\alpha+e_l+re_0-e_l}^{(i+s-l)} = (\alpha_l + 1)\frac{\alpha_0+r}{r(\alpha_l+1)} c_{\alpha+re_0}^{(i+(s-k)+s-l)}. \end{aligned}$$

W przypadku, gdy  $k < s$ , posłużymy się warunkiem (C2), który wiemy z założenia, że jest spełniony dla pakietu wielomianów  $G_i, \dots, G_{i+s}$ , a stąd

$$(\alpha_l + 1)c_{\alpha+e_l}^{(i+(s-k)-1)} = (\alpha_l + 1)c_{(\alpha+e_l+re_0)-re_0}^{(i+(s-k)-1)} = (\alpha_l + 1)\frac{\alpha_0+r}{r(\alpha_l+1)} c_{\alpha+re_0}^{(i+(s-k)+s-l)}.$$

Reasumując,

$$(\alpha_l + 1)c_{\alpha+e_l}^{((i-1)+s-k)} = (\alpha_l + 1)c_{\alpha+e_l}^{(i+(s-k)-1)} = (\alpha_l + 1)\frac{\alpha_0+r}{r(\alpha_l+1)} c_{\alpha+re_0}^{(i+(s-k)+s-l)}. \quad (4.9)$$

Postępując analogicznie, jak powyżej, otrzymujemy

$$(\alpha_k + 1)c_{\alpha+e_k}^{((i-1)+s-l)} = (\alpha_k + 1)c_{\alpha+e_k}^{(i+(s-l)-1)} = (\alpha_k + 1)\frac{\alpha_0+r}{r(\alpha_k+1)} c_{\alpha+re_0}^{(i+(s-l)+s-k)}. \quad (4.10)$$

Ponieważ prawe strony równości (4.9) i (4.10) są takie same, więc dostajemy żądaną równość

$$(\alpha_l + 1)c_{\alpha+e_l}^{((i-1)+s-k)} = (\alpha_k + 1)c_{\alpha+e_k}^{((i-1)+s-l)}.$$

□

Powyższy lemat pozwala stosować indukcję ze względu na przesuwany się pakiet wielomianów. Potrzebny jednak będzie lemat, który pozwoli wystartować z tą indukcją.

**Lemat 4.4.** *Niech  $h$  będzie wielomianem jednorodnym, którego stopień dzieli  $N$ , oraz niech  $G_N = \alpha_N h^{\frac{N}{\deg h}}$ , natomiast  $G_{N+1} = \dots = G_{N+s} = 0$ . Wtedy*

- (a) *wielomiany  $G_N, G_{N+1}, \dots, G_{N+s-1}$  spełniają warunek (C1),*
- (b) *wielomiany  $G_N, G_{N+1}, \dots, G_{N+s}$  spełniają warunek (C2) dla dowolnego  $r \in \mathbb{N}_+$ ,*

*gdzie w miejsce  $i$  należy podstawić  $N$ .*

Celem dwóch poniższych twierdzeń jest podanie wzoru na składowe jednorodne wielomianu  $G$  stopni  $i, i+1$  oraz wyższych przy pomocy składowych jednorodnych wielomianu  $F$ , gdy stopień nawiasu Poissona pary tych wielomianów jest odpowiednio niski ( $\deg[F, G] < \deg F + i$ ). Dowody tych twierdzeń będą oparte na powyższych

lematach. Zanim jednak przejdziemy do wypowiedzi i pełnego dowodu pierwszego ze wspomnianych twierdzeń, przedstawimy jego ideę.

Przypomnijmy, że mamy dwa wielomiany wyrażone jako sumy składowych jednorodnych  $F = F_1 + \dots + F_s + F_d$  i  $G = G_1 + \dots + G_N$ , gdzie  $F_d = h^d$  oraz  $G_N = a_N h^N$ . Gdy zakładamy, że  $\deg[F, G] < d + N - 1$ , wtedy składowa jednorodna stopnia  $d + N - 1$  tego nawiasu Poissona jest równa zero, tzn.:

$$[F_d, G_{N-1}] + [F_s, G_N] = 0.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} [F_d, G_{N-1}] + [F_s, G_N] &= [h^d, G_{N-1}] + [F_s, a_N h^N] = dh^{d-1}[h, G_{N-1}] - Na_N h^{N-1}[h, F_s] \\ &= [h, dh^{d-1}G_{N-1} - Na_N h^{N-1}F_s], \end{aligned}$$

więc ostatecznie dostajemy

$$[h, dh^{d-1}G_{N-1} - Na_N h^{N-1}F_s] = 0.$$

Zauważmy, że  $dh^{d-1}G_{N-1} - Na_N h^{N-1}F_s$  jest wielomianem jednorodnym stopnia  $d + N - 2$  lub zerowym. Zatem na podstawie lematu 3.10 otrzymujemy równość

$$dh^{d-1}G_{N-1} - Na_N h^{N-1}F_s = \tilde{a}_{N-1} h^{d+N-2}$$

dla pewnego  $\tilde{a}_{N-1} \in \mathbb{C}$ , z której możemy wyliczyć składową jednorodną  $G_{N-1}$ :

$$G_{N-1} = a_{N-1} h^{N-1} + \frac{Na_N}{d} h^{N-d} F_s, \quad \text{gdzie } a_{N-1} = \frac{\tilde{a}_{N-1}}{d}.$$

Jeżeli wiemy trochę więcej, a mianowicie, że  $\deg[F, G] < d + N - 2$ , to w szczególności (tak jak poprzednio) składowa jednorodna stopnia  $d + N - 2$  tego nawiasu Poissona jest równa zero. Postępując analogicznie jak w powyższym rozumowaniu oraz podstawiając już wyliczoną składową  $G_{N-1}$ , mamy

$$\begin{aligned} 0 &= [F_d, G_{N-2}] + [F_s, G_{N-1}] + [F_{s-1}, G_N] \\ &= [h^d, G_{N-2}] + \left[ F_s, a_{N-1} h^{N-1} + \frac{Na_N}{d} h^{N-d} F_s \right] + [F_{s-1}, a_N h^N] \\ &= dh^{d-1}[h, G_{N-2}] + a_{N-1}(N-1)h^{N-2}[F_s, h] \\ &\quad + \frac{Na_N}{d}(N-d)h^{N-d-1} \left[ \frac{1}{2} F_s^2, h \right] + Na_N h^{N-1} [F_{s-1}, h] \\ &= \left[ -dh^{d-1}G_{N-2} + a_{N-1}(N-1)h^{N-2}F_s \right. \\ &\quad \left. + \frac{Na_N}{d}(N-d)h^{N-d-1} \frac{1}{2} F_s^2 + Na_N h^{N-1} F_{s-1}, h \right]. \end{aligned}$$

Zatem dla pewnego  $\tilde{a}_{N-2} \in \mathbb{C}$ , mamy

$$\begin{aligned} G_{N-2} &= -\frac{\tilde{a}_{N-2}}{d} h^{N-2} + \frac{a_{N-1}}{d} (N-1) h^{N-d-1} F_s \\ &\quad + \frac{Na_N}{d^2} (N-d) h^{N-2d} \frac{1}{2} F_s^2 + \frac{Na_N}{d} h^{N-d} F_{s-1}. \end{aligned}$$

W kolejnym kroku moglibyśmy uzyskać formułę na składową jednorodną  $G_{N-3}$  wielomianu  $G$  i tak dalej.

Teraz podamy wypowiedź i dowód twierdzenia, z którego ideą zapoznaliśmy się powyżej.

**Twierdzenie 4.5.** *Niech  $F = F_1 + \dots + F_s + F_d$  i  $G = G_1 + \dots + G_N$  będą elementami pierścienia wielomianów  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , dla których odpowiednio  $F_i$  i  $G_j$  są wielomianami jednorodnymi stopni  $i$  oraz  $j$ . Dodatkowo założymy, że*

$$F_d = h^d \quad \text{oraz} \quad G_N = a_N h^N,$$

gdzie  $h \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  jest wielomianem jednorodnym stopnia 1 oraz  $a_N \in \mathbb{C}^*$ . Jeśli  $\deg[F, G] < d + i$  dla pewnego  $i \in \{1, \dots, N\}$ , to istnieją takie  $a_i, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{C}$ , że dla  $j = i, i + 1, \dots, N$ , mamy

$$G_j = \sum_{\substack{\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s \\ \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = j \\ \alpha_0 + d(\alpha_1 + \dots + \alpha_s) \leq N}} c_\alpha^{(j)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0}, \quad (4.11)$$

gdzie współczynniki  $c_\alpha^{(j)}$  dane są wzorem

$$c_\alpha^{(j)} = \frac{\prod_{k=1}^{\alpha_1 + \dots + \alpha_s} (\alpha_0 + dk)}{\left( \prod_{i_1=1}^{\alpha_1} di_1 \right) \dots \left( \prod_{i_s=1}^{\alpha_s} di_s \right)} a_{\alpha_0 + d(\alpha_1 + \dots + \alpha_s)}. \quad (4.12)$$

*Dowód.* Po pierwsze zauważmy, że składowa jednorodna  $G_N$  wielomianu  $G$  daje się przedstawić wzorami (4.11) i (4.12). Istotnie, jeśli  $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{N}^s \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  oraz  $\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = N$  (założenie dotyczące stopnia składowej jednorodnej), to  $\alpha_0 + d(\alpha_1 + \dots + \alpha_s) > N$ . Wnioskujemy więc, że w formule na  $G_N$ , w sumie (4.11) występuje tylko jeden składnik, mianowicie  $a_N h^N$ . Co więcej zauważmy, że formuły (4.11) i (4.12) zachodzą również dla składowych jednorodnych  $G_{N+1} = \dots = G_{N+s} = 0$  (zerowa liczba składników występujących w sumie (4.11)). Ponadto na podstawie lematu 4.4 wielomiany  $G_N, \dots, G_{N+s-1}$  spełniają warunek (C1), a wielomiany  $G_N, \dots, G_{N+s}$  spełniają warunek (C2).

Przejdźmy do przedstawienia kroku indukcyjnego. Załóżmy więc, że składowe jednorodne odpowiednio stopni  $m, \dots, m + s$  wielomianu  $G$ , czyli  $G_m, \dots, G_{m+s}$ , dla  $m \in \{i + 1, i + 2, \dots, N\}$  spełniają formuły (4.11) i (4.12) oraz dla  $G_m, \dots, G_{m+s-1}$  zachodzi warunek (C1), a dla  $G_m, \dots, G_{m+s}$  zachodzi warunek (C2). Z założeń twierdzenia i wyboru  $m$  wiemy, że  $\deg[F, G] < d + i \leq d + (m - 1)$ , a stąd składowa jednorodna stopnia  $d + m - 1$  nawiasu Poissona pary wielomianów  $F, G$  jest równa zero, czyli  $[h^d, G_{m-1}] + [F_s, G_m] + \dots + [F_1, G_{m+s-1}] = 0$ . Zatem spełnione są wszystkie założenia lematu 4.2, na którego podstawie składowa jednorodna stopnia  $m - 1$  daje się przedstawić w następujący sposób

$$G_{m-1} = \sum_{\substack{\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s \\ \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = m-1}} c_\alpha^{(m-1)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0}$$

oraz spełnione są zależności (P1). Odpowiednio grupując składniki (ze względu na pierwszy niezerowy wykładnik, który występuje przy składowej jednorodnej wielomia-

nu  $F$  oraz gdy wszystkie  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  są równe zero) powyższe przedstawienie możemy zapisać

$$\begin{aligned}
 G_{m-1} &= a_{m-1}h^{m-1} \\
 &+ \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}^{s-1} \\ \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = m-1}} c_{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)}^{(m-1)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0} \\
 &+ \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \{0\} \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}^{s-2} \\ \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = m-1}} c_{(\alpha_0, 0, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s)}^{(m-1)} F_2^{\alpha_2} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0} \\
 &\vdots \\
 &+ \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \{(0, \dots, 0)\} \times \mathbb{N}_+ \\ \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = m-1}} c_{(\alpha_0, 0, \dots, 0, \alpha_s)}^{(m-1)} F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0}.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Wiedząc, że każdy ze współczynników występujący w (4.13) z wyjątkiem  $a_{m-1}$  (ponieważ  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = 0$ ) spełnia zależność (P1), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 G_{m-1} &= a_{m-1}h^{m-1} \\
 &+ \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}^{s-1} \\ \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = m-1}} \frac{\alpha_0 + d}{d\alpha_1} c_{(\alpha_0 + d, \alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)}^{(m+s-1)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0} \\
 &+ \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \{0\} \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}^{s-2} \\ \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = m-1}} \frac{\alpha_0 + d}{d\alpha_2} c_{(\alpha_0 + d, 0, \alpha_2 - 1, \alpha_3, \dots, \alpha_s)}^{(m+s-2)} F_2^{\alpha_2} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0} \\
 &\vdots \\
 &+ \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \{(0, \dots, 0)\} \times \mathbb{N}_+ \\ \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = m-1}} \frac{\alpha_0 + d}{d\alpha_s} c_{(\alpha_0 + d, 0, \dots, 0, \alpha_s - 1)}^{(m+s-s)} F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0}.
 \end{aligned}$$

Zauważmy, że  $c_{(\alpha_0 + d, \alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)}^{(m+s-1)}$  może być różne od zera tylko wtedy, gdy  $\alpha_0 + d(\alpha_1 + \dots + \alpha_s) = \alpha_0 + d + d(\alpha_1 - 1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s) \leq N$ . Podobnie mamy dla  $c_{(\alpha_0 + d, 0, \alpha_2 - 1, \alpha_3, \dots, \alpha_s)}^{(m+s-2)}$ ,  $\dots$ ,  $c_{(\alpha_0 + d, 0, \dots, 0, \alpha_s - 1)}^{(m+s-s)}$ . Zatem w (4.13) możemy dołożyć ograniczenie  $\alpha_0 + d(\alpha_1 + \dots + \alpha_s) \leq N$ . Przyjrzyjmy się współczynnikom występującym w sumie zawierającej składniki, w których  $\alpha_1 > 0$ . Ze względu na zależność (P1) oraz założenie indukcyjne mamy

$$\begin{aligned}
 c_{(\alpha_0, \dots, \alpha_s)}^{(m-1)} &= \frac{\alpha_0 + d}{d\alpha_1} c_{(\alpha_0 + d, \alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)}^{(m+s-1)} \\
 &= \frac{\alpha_0 + d}{d\alpha_1} \frac{\prod_{k=1}^{\alpha_1 - 1 + \dots + \alpha_s} ((\alpha_0 + d) + dk)}{\left( \prod_{i_1=1}^{\alpha_1 - 1} di_1 \right) \dots \left( \prod_{i_s=1}^{\alpha_s} di_s \right)} a_{(\alpha_0 + d) + d((\alpha_1 - 1) + \alpha_2 + \dots + \alpha_s)} \\
 &= \frac{\prod_{k=1}^{\alpha_1 + \dots + \alpha_s} (\alpha_0 + dk)}{\left( \prod_{i_1=1}^{\alpha_1} di_1 \right) \dots \left( \prod_{i_s=1}^{\alpha_s} di_s \right)} a_{\alpha_0 + d(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s)}.
 \end{aligned}$$

W związku z powyższym współczynniki występujące we wspomnianej sumie wyrażają się wzorem (4.12).

Podobnie sprawdzamy w przypadku współczynników występujących w sumie, gdzie  $\alpha_1 = 0$ , a  $\alpha_2 > 0$ , mianowicie:

$$c_{(\alpha_0, \dots, \alpha_s)}^{(m-1)} = \frac{\alpha_0 + d}{d\alpha_2} c_{(\alpha_0 + d, 0, \alpha_2 - 1, \alpha_3, \dots, \alpha_s)}^{(m+s-2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha_0 + d}{d\alpha_2} \frac{\prod_{k=1}^{\alpha_2 - 1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_s} ((\alpha_0 + d) + dk)}{\left(\prod_{i_2=1}^{\alpha_2 - 1} di_2\right) \cdots \left(\prod_{i_s=1}^{\alpha_s} di_s\right)} a_{(\alpha_0 + d) + d((\alpha_2 - 1) + \alpha_3 + \dots + \alpha_s)} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_s} (\alpha_0 + dk)}{\left(\prod_{i_2=1}^{\alpha_2} di_2\right) \cdots \left(\prod_{i_s=1}^{\alpha_s} di_s\right)} a_{\alpha_0 + d(\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_s)}.
\end{aligned}$$

Dokonując analogicznych obliczeń w pozostałych przypadkach, czyli dla  $\alpha_1 = \dots = \alpha_q = 0$  i  $\alpha_{q+1} > 0$ , dla wszystkich  $q = 2, \dots, s-1$ , współczynniki występujące w przedstawieniu (4.13) dają się wyrazić wzorem (4.12). Z powyższych rozważań wynika, że składowa jednorodna stopnia  $m-1$  wielomianu  $G$  daje się przedstawić formułami (4.11) i (4.12). Korzystając z lematu 4.3 otrzymujemy również, że składowe jednorodne  $G_{m-1}, \dots, G_{m+s-2}$  spełniają warunek (C1), a  $G_{m-1}, \dots, G_{m+s-1}$  spełniają warunek (C2). Zatem możemy kontynuować indukcję.  $\square$

Poniższe twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia 4.5.

**Twierdzenie 4.6.** Niech  $F = F_1 + \dots + F_s + F_d$  i  $G = G_1 + \dots + G_N$  będą elementami pierścienia wielomianów  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , dla których odpowiednio  $F_i$  i  $G_j$  są wielomianami jednorodnymi stopni  $i$  oraz  $j$ . Załóżmy, że  $h \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  jest wielomianem jednorodnym stopnia  $t$ , który nie jest potęgą wielomianu niższego stopnia, oraz że  $\deg h \mid \text{nwd}(d, N)$ , gdzie

$$F_d = h^{d/\deg h} \quad i \quad G_N = a_N h^{N/\deg h}$$

dla pewnego  $a_N \in \mathbb{C}^*$ . Oznaczmy przez  $r = \frac{d}{\deg h}$ . Jeśli  $\deg[F, G] < d + i$  dla pewnego  $i \in \{1, \dots, N\}$ , to istnieją takie  $a_i, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{C}$ , że dla  $j = i, i+1, \dots, N$  mamy

$$G_j = \sum_{\substack{\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s \\ t\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = j \\ t\alpha_0 + d(\alpha_1 + \dots + \alpha_s) \leq N}} c_\alpha^{(j)} F_1^{\alpha_1} \cdots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0}, \quad (4.14)$$

gdzie współczynniki  $c_\alpha^{(j)}$  dane są wzorem

$$c_\alpha^{(j)} = \frac{\prod_{k=1}^{\alpha_1 + \dots + \alpha_s} (\alpha_0 + rk)}{\left(\prod_{i_1=1}^{\alpha_1} ri_1\right) \cdots \left(\prod_{i_s=1}^{\alpha_s} ri_s\right)} a_{t\alpha_0 + d(\alpha_1 + \dots + \alpha_s)}. \quad (4.15)$$

Ponadto, jeśli  $\deg h \nmid j$ , to  $a_j = 0$ .

*Dowód.* Dowód tego twierdzenia przebiega analogicznie do dowodu twierdzenia 4.5. Jedynie część kroku indukcyjnego wymaga niewielkiej modyfikacji związanej z faktem, że  $\deg h = t$  oraz, że do uzyskania informacji o  $G_{m-1}$  zamiast równości  $[h^d, G_{m-1}] + [F_s, G_m] + \dots + [F_1, G_{m+s-1}] = 0$  posługujemy się równością  $[h^r, G_{m-1}] + [F_s, G_m] + \dots + [F_1, G_{m+s-1}] = 0$ .  $\square$

## 4.2. Podzielność składowej $F_s$

W tym podrozdziale pokażemy, że jeżeli stopień nawiasu Poissona pary wielomianów  $F, G$  jest wystarczająco niski, to składowa jednorodna  $F_s$  stopnia  $s = d-1$ , gdzie  $d = \deg F \geq 2$ , jest podzielna przez wielomian jednorodny  $h$  lub jego potęgę.

Nasze rozważania podzielimy na dwa przypadki: pierwszy, gdy  $\deg h = 1$  oraz drugi, gdy  $\deg h > 1$ . W drugim przypadku zakładamy, że wielomian  $h$  jest bezkwadratowy.

**Twierdzenie 4.7.** *Niech  $F, G$  i  $h$  spełniają założenia twierdzenia 4.5. Jeśli  $N \not\equiv 0 \pmod{d}$  oraz  $\deg[F, G] < d + i$  dla pewnego  $i < \frac{s}{d}N = \frac{d-1}{d}N$ , to  $F_s$  jest podzielne przez  $h$ .*

W celu zwiększenia przejrzystości dalszych obliczeń wprowadźmy oznaczenia jak w poniższej uwadze.

**Uwaga 4.8.** *Teza powyższego twierdzenia mówi, że istnieje taki wielomian jednorodny  $\tilde{F}_{s,s-1}$  stopnia  $s - 1$ , że  $F_s = \tilde{F}_{s,s-1}h$ .*

Chcąc udowodnić powyższe twierdzenie będziemy potrzebować pewnego lematu. Poniżej przedstawimy tylko jego wypowiedź, ponieważ dowód zaprezentujemy w ogólniejszym przypadku (patrz lemat 4.11).

**Lemat 4.9.** *Dla każdej liczby całkowitej  $j$  z przedziału  $1 \leq j < N$ , wartość*

$$\min\{\alpha_0 \mid (\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s, \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = j, \\ \alpha_0 + d(\alpha_1 + \dots + \alpha_s) \leq N\}$$

wynosi  $dj - sN$  i jest osiągnięta dokładnie w jednym punkcie  $(dj - sN, 0, \dots, 0, N - j)$ .

*Dowód.* (**twierdzenia 4.7**) Wielomiany  $F$  i  $G$  spełniają założenia twierdzenia 4.5 oraz zachodzi nierówność  $\deg[F, G] < d + i$ . Zatem  $i$ -tą składową jednorodną wielomianu  $G$  możemy zapisać w następujący sposób

$$G_i = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s \\ \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = i \\ \alpha_0 + d(\alpha_1 + \dots + \alpha_s) \leq N}} c_\alpha^{(i)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0}. \quad (4.16)$$

Z lematu 4.9 wynika, że wszystkie składniki występujące w (4.16) z wyjątkiem  $c_{(di-sN, 0, \dots, 0, N-i)}^{(i)} F_s^{N-i} h^{di-sN}$ , zawierają  $h^u$ , dla których  $u > di - sN$ . Natomiast z założenia, że  $i < \frac{s}{d}N$ , mamy  $di - sN < 0$ . Przemnażając obustronnie przez  $h^{sN-di}$  równość (4.16) otrzymujemy

$$h^{sN-di} G_i = c_{(di-sN, 0, \dots, 0, N-i)}^{(i)} F_s^{N-i} \\ + \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s \setminus \{(di-sN, 0, \dots, 0, N-i)\} \\ \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = i \\ \alpha_0 + d(\alpha_1 + \dots + \alpha_s) \leq N}} c_\alpha^{(i)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0 + sN - di}. \quad (4.17)$$

Zarówno po lewej, jak i prawej stronie równości (4.17) wielomian  $h$  występuje w dodatniej potędze, z wyjątkiem składnika  $c_{(di-sN, 0, \dots, 0, N-i)}^{(i)} F_s^{N-i}$ . Zatem wnioskujemy, że  $h$  dzieli ten składnik. Teraz pokażemy, że współczynnik stojący przy  $F_s^{N-i}$  jest niezerowy. Biorąc pod uwagę, że  $N \not\equiv 0 \pmod{d}$ , mamy również, że  $-sN \not\equiv 0 \pmod{d}$ , co w konsekwencji daje  $c_{(di-sN, 0, \dots, 0, N-i)}^{(i)} = \frac{\prod_{k=1}^{N-i} (di-sN+dk)}{\prod_{i_s=1}^{N-i} di_s} a_N \neq 0$ , więc  $h \mid F_s^{N-i}$ . Uzyskujemy również podzielność  $h \mid F_s$ , ponieważ  $h$  jest wielomianem nierozkładalnym.  $\square$

Warto przywołać poniższy wniosek będący konsekwencją twierdzeń 4.5 oraz 4.7.

**Wniosek 4.10.** *Niech wielomiany  $F$  i  $G$  spełniają założenia twierdzenia 4.5. Jeśli  $N \not\equiv 0 \pmod{d}$  oraz zachodzi  $\deg[F, G] < d + i$  dla pewnego  $i < \frac{s}{d}N$ , to składowa jednorodna wielomianu  $G$  stopnia  $j$  dla  $j = i, i + 1, \dots, N$  jest równa*

$$G_j = \sum_{\substack{\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s \\ \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = j \\ \alpha_0 + d(\alpha_1 + \dots + \alpha_s) \leq N}} c_\alpha^{(j)} F_1^{\alpha_1} \dots F_{s-1}^{\alpha_{s-1}} \tilde{F}_{s,s-1}^{\alpha_s} h^{\alpha_0 + \alpha_s}.$$

Współczynniki  $c_\alpha^{(j)}$  dane są formułą (4.12), natomiast  $\tilde{F}_{s,s-1}$  jest wielomianem jednorodnym stopnia  $s - 1$  takim, że  $F_s = \tilde{F}_{s,s-1}h$ .

W tym miejscu zaprezentujemy kolejny techniczny lemat, który pozwoli nam udowodnić podzielność składowej jednorodnej  $F_s$  przez wielomian  $h^{k+1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**Lemat 4.11.** *Dla każdej liczby naturalnej  $k$  takiej, że  $2k < d$  oraz dla każdego  $j \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$  wartość*

$$\min\{\alpha_0 + k\alpha_s \mid (\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in Z_{j,N,d}\}$$

wynosi  $(d-k)j - (s-k)N$  i jest osiągnięta dokładnie w jednym punkcie  $(dj - sN, 0, \dots, 0, N - j)$ , gdzie  $Z_{j,N,d} := \{(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s \mid \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = j, \alpha_0 + d(\alpha_1 + \dots + \alpha_s) \leq N\}$ .

*Dowód.* Dowód przeprowadzimy w przypadku, gdy  $s > 1$ . W przypadku, gdy  $s = 1$ , co implikuje, że  $k = 0$ , dowód jest prostszy. Odejmując stronami warunki określające zbiór  $Z_{j,N,d}$ , dostajemy

$$s\alpha_1 + (s-1)\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{s-1} + \alpha_s \leq N - j \quad (4.18)$$

(a w szczególności nierówność  $\alpha_s \leq N - j$ ). Przenosząc wszystkie, poza ostatnim, składniki sumy znajdującej się po lewej stronie (4.18) na prawą stronę, a następnie przemnażając obustronnie przez  $s - k$ , otrzymujemy

$$(s-k)\alpha_s \leq (s-k)(N-j) - (s-k)(s\alpha_1 + (s-1)\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{s-1}). \quad (4.19)$$

Zauważmy, że  $j - (\alpha_0 + k\alpha_s) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (s-1)\alpha_{s-1} + s\alpha_s - k\alpha_s$ . Zatem dodając do obydwu stron nierówności (4.19) wyrażenie  $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (s-1)\alpha_{s-1}$  dostajemy

$$j - (\alpha_0 + k\alpha_s) \leq (s-k)(N-j) - [(s-k)s-1]\alpha_1 - [(s-k)(s-1)-2]\alpha_2 - \dots - [(s-k) \cdot 2 - (s-1)]\alpha_{s-1}.$$

Powyższą nierówność możemy zapisać równoważnie

$$\alpha_0 + k\alpha_s \geq j - (s-k)(N-j) + [(s-k)s-1]\alpha_1 + [(s-k)(s-1)-2]\alpha_2 + \dots + [(s-k) \cdot 2 - (s-1)]\alpha_{s-1}. \quad (4.20)$$

Nasze rozważania podzielimy na trzy przypadki. W pierwszym z nich zakładamy, że  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}) \neq (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^{s-1}$ . Wtedy dla  $(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in Z_{j,N,d}$  korzystając

z szacowania (4.20) oraz następujących nierówności  $(s-k)s-1 > (s-k)(s-1)-2 > \dots > (s-k) \cdot 2 - (s-1) = s - (2k-1) = d - 2k > 0$ , dostajemy, że  $\alpha_0 + k\alpha_s > j - (s-k)(N-j) = (d-k)j - (s-k)N$ . W drugim przypadku zakładamy, że  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^{s-1}$  oraz  $\alpha_s < N-j$ . Wtedy  $\alpha_0 + k\alpha_s = j - (s-k)\alpha_s > j - (s-k)(N-j) = (d-k)j - (s-k)N$ . Pozostał przypadek, w którym  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^{s-1}$  oraz  $\alpha_s = N-j$ . Przy tych założeniach,  $\alpha_0 + k\alpha_s = j - (s-k)\alpha_s = j - (s-k)(N-j) = (d-k)j - (s-k)N$ . W ten sposób udowodniliśmy, że najmniejsza wartość wyrażenia  $\alpha_0 + k\alpha_s$  na zbiorze  $Z_{j,N,d}$  wynosi  $(d-k)j - (s-k)N$  i jest osiągnięta dokładnie w jednym punkcie, a mianowicie w  $(dj - sN, 0, \dots, 0, N-j)$ , ponieważ  $\alpha_0 = (d-k)j - (s-k)N - k(N-j) = dj - kj - sN + kN - kN + kj = dj - sN$ .  $\square$

Używając powyższego lematu (patrz również wniosek 4.10) możemy kilka razy powtórzyć rozumowanie z dowodu twierdzenia 4.7 uzyskując następujący fakt.

**Twierdzenie 4.12.** *Niech  $F, G$  i  $h$  spełniają założenia twierdzenia 4.5. Jeśli  $N \not\equiv 0 \pmod{d}$  oraz  $\deg[F, G] < d + i$  dla pewnego  $i < \frac{s-k}{d-k}N$ , gdzie  $2k < d$ , to  $F_s$  jest podzielny przez  $h^{k+1}$ .*

Na podstawie twierdzeń 4.5 oraz 4.12 możemy sformułować następujący wniosek.

**Wniosek 4.13.** *Niech  $F$  i  $G$  spełniają założenia twierdzenia 4.5. Jeśli  $N \not\equiv 0 \pmod{d}$  oraz  $\deg[F, G] < d + i$  dla pewnego  $i < \frac{s-k}{d-k}N$ , gdzie  $2k < d$ , wtedy składowa jednorodna wielomianu  $G$  stopnia  $j$  dla  $j = i, i+1, \dots, N$ , jest równa*

$$G_j = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s \\ \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = j \\ \alpha_0 + d(\alpha_1 + \dots + \alpha_s) \leq N}} c_\alpha^{(j)} F_1^{\alpha_1} \dots F_{s-1}^{\alpha_{s-1}} \tilde{F}_{s,s-k-1}^{\alpha_s} h^{\alpha_0 + (k+1)\alpha_s}.$$

Współczynniki  $c_\alpha^{(j)}$  mają postać jak w twierdzeniu 4.5, a  $\tilde{F}_{s,s-k-1}$  jest wielomianem jednorodnym stopnia  $s-k-1$  takim, że  $F_s = \tilde{F}_{s,s-k-1} h^{k+1}$ .

Od tego miejsca będziemy się zajmować przypadkiem, gdy  $\deg h > 1$ . Zaczniemy od lematu, który wskaże nam najmniejszą wartość wyrażenia  $\alpha_0 + k\alpha_s$ .

**Lemat 4.14.** *Dla  $d, t$  i  $N$  opisanych w twierdzeniu 4.6, dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  takiego, że  $2kt < d$  oraz dla każdej liczby całkowitej z przedziału  $1 \leq j < N$ , wartość*

$$\min\{\alpha_0 + k\alpha_s \mid (\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in Z_{j,N,d}^{(t)}\}$$

wynosi  $\frac{1}{t}[(d-kt)j - (s-kt)N]$  i jest osiągnięta dokładnie w jednym punkcie  $(\frac{1}{t}(dj - sN), 0, \dots, 0, N-j)$ , gdzie zbiór  $Z_{j,N,d}^{(t)}$  zdefiniowany jest następująco:

$$Z_{j,N,d}^{(t)} = \{(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s : t\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = j, \\ t\alpha_0 + d(\alpha_1 + \dots + \alpha_s) \leq N\}.$$

*Dowód.* Rozważymy tylko przypadek dla  $s > 1$ , gdyż w sytuacji  $s = 1$ , mamy  $d = 2$ ,  $k = 0$  oraz z definicji zbioru  $Z_{j,N,d}^{(t)}$ , wynika, że  $\alpha_0 = \frac{j - \alpha_1}{t}$ , gdzie  $\alpha_1 \leq N - j$ , a stąd otrzymujemy tezę.

Analogicznie jak w dowodzie lematu 4.11 zachodzi

$$(s-kt)\alpha_s \leq (s-kt)(N-j) - (s-kt)(s\alpha_1 + (s-1)\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{s-1}).$$

Z powyższej nierówności uzyskujemy  $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (s-1)\alpha_{s-1} + (s-kt)\alpha_s \leq (s-kt)(N-j) - [(s-kt)s-1]\alpha_1 - [(s-kt)(s-1)-2]\alpha_2 - \dots - [(s-kt)\cdot 2 - (s-1)]\alpha_{s-1}$ . Pamiętając o tym, że  $\alpha_0 = \frac{1}{t}[j - (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s)]$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \alpha_0 + k\alpha_s &= \frac{1}{t}[j - (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s)] + \frac{kt\alpha_s}{t} \\ &= \frac{1}{t}[j - (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (s-1)\alpha_{s-1} + (s-kt)\alpha_s)] \\ &\geq \frac{1}{t}\{j - (s-kt)(N-j) + [(s-kt)s-1]\alpha_1 \\ &\quad + [(s-kt)(s-1)-2]\alpha_2 + \dots + [(s-kt)\cdot 2 - (s-1)]\alpha_{s-1}\}. \end{aligned}$$

Dzięki założeniu  $d > 2kt$  wiemy, że  $(s-kt)s-1 > (s-kt)(s-1)-2 > \dots > (s-kt)\cdot 2 - (s-1) = s - (2kt-1) > 0$ . W takim razie dla  $(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in Z_{j,N,d}^{(t)}$ , jeśli  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}) \neq (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^{s-1}$ , to  $\alpha_0 + k\alpha_s > \frac{1}{t}\{(d-kt)j - (s-kt)N\}$ . Natomiast jeśli  $(\alpha_0, 0, \dots, 0, \alpha_s) \in Z_{j,N,d}^{(t)}$ , gdzie  $\alpha_s < N-j$ , to wartość  $\alpha_0 + k\alpha_s = \frac{1}{t}\{j - (s-kt)\alpha_s\} > \frac{1}{t}\{j - (s-kt)(N-j)\} = \frac{1}{t}\{(d-kt)j - (s-kt)N\}$ . To kończy dowód lematu, gdyż dla  $(\alpha_0, 0, \dots, 0, \alpha_s) = (\frac{1}{t}(dj - sN), 0, \dots, 0, N-j)$  wartość  $\alpha_0 + k\alpha_s$  wynosi  $\frac{1}{t}\{(d-kt)j - (s-kt)N\}$ .  $\square$

Teraz możemy przejść do następującego twierdzenia.

**Twierdzenie 4.15.** *Niech wielomiany  $F, G$  oraz  $h$  spełniają założenia twierdzenia 4.6. Załóżmy dodatkowo, że wielomian  $h$  jest bezkwadratowy. Jeśli  $N \not\equiv 0 \pmod{d}$  oraz  $\deg[F, G] < d+i$  dla pewnego  $i < \frac{s-kt}{d-kt}N$ , gdzie  $2kt < d$ , to  $F_s$  jest podzielne przez  $h^{k+1}$ .*

*Dowód.* Korzystając z twierdzenia 4.6, składową jednorodną  $G_i$  możemy zapisać w postaci

$$G_i = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s \\ t\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = i \\ t\alpha_0 + d(\alpha_1 + \dots + \alpha_s) \leq N}} c_{\alpha}^{(i)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0}. \quad (4.21)$$

Dalsza część dowodu twierdzenia ma charakter indukcyjny, przebiega w  $k+1$  powtarzających się krokach. Przedstawimy szczegółowy opis dwóch pierwszych kroków. Pozostałe zachodzą w analogiczny sposób. Na podstawie lematu 4.14, w którym przyjmujemy  $k=0$ , wszystkie składniki występujące w (4.21), z wyjątkiem  $c_{(\frac{1}{t}(di-sN), 0, \dots, 0, N-i)}^{(i)} F_s^{N-i} h^{\frac{1}{t}(di-sN)}$ , zawierają  $h^u$ , gdzie  $u > \frac{1}{t}(di-sN)$ . Zauważmy, że z założenia  $i < \frac{s}{d}N$ , mamy  $\frac{1}{t}(di-sN) < 0$ . Tak więc przemnażając obustronnie równość (4.21) przez  $h^{\frac{1}{t}(sN-di)}$ , uzyskujemy, że  $h$  dzieli  $c_{(\frac{1}{t}(di-sN), 0, \dots, 0, N-i)}^{(i)} F_s^{N-i}$ . Korzystając z założenia  $N \not\equiv 0 \pmod{d}$ , widzimy, że również  $-sN \not\equiv 0 \pmod{d}$ , a zatem

$c_{(\frac{1}{t}(di-sN), 0, \dots, 0, N-i)}^{(i)} = \frac{\prod_{l=1}^{N-i} \left(\frac{1}{t}(di-sN) + rl\right)}{\prod_{i_s=1}^{N-i} r i_s} a_N = \frac{\prod_{l=1}^{N-i} (di-sN+dl)}{\prod_{i_s=1}^{N-i} d i_s} a_N \neq 0$ . W taki sposób uzyskujemy podzielność  $h \mid F_s^{N-i}$ . Ponieważ  $h$  jest wielomianem bezkwadratowym, więc także  $h \mid F_s$ .

Uwzględniając powyższe rozważania, składową jednorodną stopnia  $i$  wielomianu  $G$  możemy zapisać jako

$$G_i = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0,\dots,\alpha_s)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^s \\ t\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2+\dots+s\alpha_s=i \\ t\alpha_0+d(\alpha_1+\dots+\alpha_s)\leq N}} c_\alpha^{(i)} F_1^{\alpha_1} \dots F_{s-1}^{\alpha_{s-1}} \left(\frac{F_s}{h}\right)^{\alpha_s} h^{\alpha_0+\alpha_s}, \quad (4.22)$$

gdzie wyrażenie  $\frac{F_s}{h}$  jest wielomianem jednorodnym stopnia  $s-t$ .

W drugim kroku użyjemy lematu 4.14 dla  $k=1$ . Na jego podstawie wszystkie składniki 4.22 z wyjątkiem  $c_{(\frac{1}{t}(di-sN),0,\dots,0,N-i)}^{(i)} \left(\frac{F_s}{h}\right)^{N-i} h^{\frac{1}{t}[(d-t)i-(s-t)N]}$ , zawierają  $h^u$ , gdzie  $u > \frac{1}{t}[(d-t)i-(s-t)N]$ . Podobnie jak poprzednio, z założenia  $i < \frac{s-t}{d-t}N$ , widzimy, że  $\frac{1}{t}[(d-t)i-(s-t)N] < 0$ . Przemnażając obydwie strony (4.22) przez  $h^{\frac{1}{t}[(s-t)N-(d-t)i]}$  dostajemy, że  $h$  dzieli  $c_{(\frac{1}{t}(di-sN),0,\dots,0,N-i)}^{(i)} \left(\frac{F_s}{h}\right)^{N-i}$ . Jak wyżej,  $c_{(\frac{1}{t}(di-sN),0,\dots,0,N-i)}^{(i)} \neq 0$ , a stąd  $h \mid \left(\frac{F_s}{h}\right)^{N-i}$  i dalej  $h \mid \frac{F_s}{h}$ . W związku z tym postać składowej jednorodnej wielomianu  $G$  jest następująca

$$G_i = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0,\dots,\alpha_s)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^s \\ t\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2+\dots+s\alpha_s=i \\ t\alpha_0+d(\alpha_1+\dots+\alpha_s)\leq N}} c_\alpha^{(i)} F_1^{\alpha_1} \dots F_{s-1}^{\alpha_{s-1}} \left(\frac{F_s}{h^2}\right)^{\alpha_s} h^{\alpha_0+2\alpha_s}, \quad (4.23)$$

gdzie  $\frac{F_s}{h^2}$  jest wielomianem jednorodnym stopnia  $s-2t$ .

Powtarzając powyższy tok rozumowania odpowiednią liczbę razy, otrzymujemy tezę.  $\square$

**Wniosek 4.16.** *Niech  $F$  i  $G$  spełniają założenia twierdzenia 4.6. Ponadto niech  $h$  będzie wielomianem bezkwadratowym. Jeśli  $N \not\equiv 0 \pmod{d}$  oraz  $\deg[F, G] < d+i$  dla pewnego  $i < \frac{s-kt}{d-kt}N$ , gdzie  $2kt < d$ , to składowa jednorodna wielomianu  $G$  stopnia  $j$ , dla  $j = i, i+1, \dots, N$ , jest równa*

$$G_j = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0,\dots,\alpha_s)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^s \\ t\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2+\dots+s\alpha_s=j \\ t\alpha_0+d(\alpha_1+\dots+\alpha_s)\leq N}} c_\alpha^{(j)} F_1^{\alpha_1} \dots F_{s-1}^{\alpha_{s-1}} \tilde{F}_{s,s-t(k+1)}^{\alpha_s} h^{\alpha_0+(k+1)\alpha_s}. \quad (4.24)$$

Współczynniki  $c_\alpha^{(j)}$  dane są formułą (4.15), natomiast  $\tilde{F}_{s,s-t(k+1)}$  jest wielomianem jednorodnym stopnia  $s-t(k+1)$  takim, że  $F_s = \tilde{F}_{s,s-t(k+1)} h^{k+1}$ .

### 4.3. Związek składowych $F_s$ i $F_{s-1}$

Niniejszy podrozdział poświęcony jest relacji pomiędzy składowymi jednorodnymi stopnia  $s$  oraz  $s-1$  wielomianu  $F$  przy założeniu, że  $\deg[F, G]$  jest odpowiednio niski. Będziemy tutaj zakładać, że  $d = 2d_1$ , gdzie  $d_1 = \text{nwd}(d, N) \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . W tej sytuacji  $N = d_1(2k+1)$  dla pewnego  $k \in \mathbb{N}_+$  (przypomnijmy, że  $N \geq d$ ).

Dwa kolejne lematy będą wykorzystywane w późniejszych rozważaniach.

**Lemat 4.17.** *Dla danych dodatnich liczb całkowitych  $j, N, d, t$  spełniających nierówności  $j < N$ ,  $d \leq N$  i podzielności  $t \mid \text{nwd}(d, N)$  oraz dla zbiorów*

$$Z_{j,N,d} = \left\{ (\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s \mid \alpha_0 + \sum_{l=1}^s l\alpha_l = j, \alpha_0 + d \sum_{l=1}^s \alpha_l \leq N \right\},$$

$$Z_{j,N,d}^{(t)} = \left\{ (\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s \mid t\alpha_0 + \sum_{l=1}^s l\alpha_l = j, t\alpha_0 + d \sum_{l=1}^s \alpha_l \leq N \right\},$$

$$\Delta_{j,N,d} = \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^s \mid \sum_{l=1}^s (d-l)\alpha_l \leq N-j \right\},$$

zachodzą następujące stwierdzenia:

- (a) Odwzorowanie  $\varphi : \Delta_{j,N,d} \cap \mathbb{N}^s \ni (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \mapsto (j - \sum_{l=1}^s l\alpha_l, \alpha_1, \dots, \alpha_s) \in Z_{j,N,d}$  jest bijektywne.
- (b) Odwzorowanie  $\psi : Z_{j,N,d} \cap (t\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s) \ni (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s) \mapsto (\frac{\alpha_0}{t}, \alpha_1, \dots, \alpha_s) \in Z_{j,N,d}^{(t)}$  jest bijektywne.
- (c) Zbiór  $\Delta_{j,N,d}$  jest sympleksem o wierzchołkach:  $(0, \dots, 0)$ ,  $\frac{N-j}{s}e_1$ ,  $\frac{N-j}{s-1}e_2, \dots, \frac{N-j}{2}e_{s-1}$  oraz  $(N-j)e_s$ , gdzie  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_s = (0, \dots, 0, 1)$  są wektorami bazy standardowej  $\mathbb{R}^s$ . Innymi słowy, zbiór wierzchołków sympleksu  $\Delta_{j,N,d}$  składa się z punktu  $(0, \dots, 0)$  oraz punktów postaci  $\frac{N-j}{d-l}e_l$  dla  $l = 1, \dots, s$ .
- (d) Dla funkcji  $f_{\beta_1, \dots, \beta_s} : \Delta_{j,N,d} \ni (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \mapsto j - \sum_{l=1}^s (l - \beta_l)\alpha_l \in \mathbb{R}$ , gdzie  $(\beta_1, \dots, \beta_s) \in \mathbb{N}^s$ , zachodzą równości  $f_{\beta_1, \dots, \beta_s}(0, \dots, 0) = j$  oraz  $f_{\beta_1, \dots, \beta_s}(\frac{N-j}{d-l}e_l) = j - \frac{l-\beta_l}{d-l}(N-j)$  dla  $l = 1, \dots, s$ .
- (e) Jeśli  $2\beta_s < d$ , to wartość minimalna funkcji  $f_{0, \dots, 0, \beta_s}$  na zbiorze  $\Delta_{j,N,d}$  wynosi  $j - (s - \beta_s)(N - j)$  i jest osiągnięta dokładnie w jednym punkcie  $(0, \dots, 0, N - j)$ .
- (f) Jeśli  $2\beta_s = d$ , to wartość minimalna funkcji  $f_{0, \dots, 0, \beta_s}$  na zbiorze  $\Delta_{j,N,d}$  wynosi  $j - (s - \beta_s)(N - j)$  i jest osiągnięta na odcinku o końcach w punktach  $(0, \dots, 0, \frac{N-j}{2}, 0)$  i  $(0, \dots, 0, N - j)$ .

*Dowód.* Punkty (a), (b) i (c) nie wymagają dowodu, a punkt (d) wynika wprost z podstawienia do wzoru i prostego przeliczenia.

W celu udowodnienia punktów (e) i (f) zauważmy, że  $\Delta_{j,N,d}$  jest wielościanem wypukłym, a funkcja  $f_{0, \dots, 0, \beta_s}$  jest liniowa z dokładnością do składnika stałego, więc wystarczy zbadać wartości funkcji w wierzchołkach zbioru  $\Delta_{j,N,d}$ . Na podstawie powyższego, punktu (d) oraz faktu, że  $N - j > 0$ , znalezienie minimalnej wartości funkcji  $f_{0, \dots, 0, \beta_s}$  jest równoważne znalezieniu maksymalnej wartości ułamka  $\frac{l-\beta_l}{d-l}$  po  $l = 1, \dots, s$ . Biorąc pod uwagę, że  $\beta_1 = \dots = \beta_{s-1} = 0$ , wartości  $\frac{l-\beta_l}{d-l}$  dla  $l = 1, \dots, s-1$  tworzą następujący ciąg  $\frac{1}{d-1} < \frac{2}{d-2} < \dots < \frac{d-2}{2} = \frac{s-1}{2}$ . Natomiast dla  $\beta_s \neq 0$  mamy  $\frac{s-\beta_s}{d-s} = s - \beta_s$ . W przypadku, gdy  $2\beta_s < d$ , czyli  $\beta_s < \frac{d}{2}$ , zachodzi  $\frac{s-1}{2} = s - \frac{d}{2} < s - \beta_s$ , a to oznacza, że największą wartość ułamka  $\frac{l-\beta_l}{d-l}$  dostajemy tylko dla  $l = s$ . Gdy  $2\beta_s = d$ , otrzymujemy  $\frac{s-1}{2} = s - \beta_s$ , a to oznacza, że największą wartość ułamka  $\frac{l-\beta_l}{d-l}$  dostajemy dla  $l = s$  oraz  $l = s - 1$ .  $\square$

**Lemat 4.18.** Niech  $d = 2d_1$  i  $N = d_1(2k + 1)$  dla pewnego  $k \in \mathbb{N}_+$  oraz  $d_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Wtedy

- (a)  $\min\{\alpha_0 + d_1\alpha_s \mid (\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in Z_{j,N,d}\}$  wynosi  $(d - d_1)j - (s - d_1)N = d_1j - (d_1 - 1)N$  i jest osiągnięte dokładnie w punktach należących do zbioru  $\{(dj - sN + dl, 0, \dots, 0, l, N - j - 2l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s \mid 0 \leq 2l \leq N - j\}$ .
- (b) Ponadto niech  $t$  będzie taką liczbą całkowitą, że  $t \mid d_1$  oraz niech  $r = \frac{d}{t}$  i  $\tilde{r} = \frac{d_1}{t}$  (w szczególności więc  $r = 2\tilde{r}$ ). Wtedy  $\min\{\alpha_0 + \tilde{r}\alpha_s \mid (\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in Z_{j,N,d}^{(t)}\}$  wynosi

$\tilde{r}j - (d_1 - 1)\tilde{r}(2k + 1)$  i jest osiągnięte dokładnie w punktach należących do zbioru  $\{(rj - s\tilde{r}(2k + 1) + rl, 0, \dots, 0, l, N - j - 2l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s \mid 0 \leq 2l \leq N - j\}$ .

*Dowód.* Rozważmy zbiór  $\Delta_{j,N,d} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^s \mid \sum_{l=1}^s (d-l)\alpha_l \leq N - j\}$  i funkcję  $f_{0,\dots,0,d_1}(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = j - \sum_{l=1}^s (l - \delta_{ls}d_1)\alpha_l$ , gdzie  $\delta_{ls}$  oznacza deltę Kroneckera. Zbiory  $Z_{j,N,d}$  oraz  $\varphi(\Delta_{j,N,d} \cap \mathbb{N}^s)$  są sobie równe, ponieważ odwzorowanie  $\varphi$  jest bijektywne (lemat 4.17 (a)). Dla  $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \Delta_{j,N,d} \cap \mathbb{N}^s$  oraz  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s) = \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ , mamy  $f_{0,\dots,0,d_1}(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = j - \alpha_1 - 2\alpha_2 - \dots - (s-1)\alpha_{s-1} - (s-d_1)\alpha_s = \alpha_0 + d_1\alpha_s$ , czyli  $f_{0,\dots,0,d_1}(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$  jest równe wyrażeniu, dla którego szukamy wartości minimalnej. Z powyższych rozważań oraz lematu 4.17 (c) i (f) wiemy, że najmniejsza wartość funkcji na zbiorze  $Z_{j,N,d}$  wynosi  $j - (s-d_1)(N-j) = j - (s-d_1)N + (s-d_1)j = (d-d_1)j - (s-d_1)N = d_1j - (d_1-1)N$  i jest osiągnięta w punktach kratowych odcinka o końcach  $\varphi(0, \dots, 0, \frac{N-j}{2}, 0) = (dj - sN + d\frac{N-j}{2}, 0, \dots, 0, \frac{N-j}{2}, 0)$  i  $\varphi(0, \dots, 0, N-j) = (dj - sN, 0, \dots, 0, N-j)$ . Teraz wystarczy zauważyć, że zbiór punktów kratowych odcinka o końcach  $(dj - sN, 0, \dots, 0, N-j)$  oraz  $(dj - sN + d\frac{N-j}{2}, 0, \dots, 0, \frac{N-j}{2}, 0)$  pokrywa się ze zbiorem opisanym w punkcie (a).

Z lematu 4.17 (b) wiemy, że  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s) \in Z_{j,N,d}^{(t)}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $(\tilde{\alpha}_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s) = (t\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s) \in Z_{j,N,d} \cap (t\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s)$ . Z drugiej strony szukanie punktów, w których wyrażenie  $\alpha_0 + \tilde{r}\alpha_s$  przyjmuje najmniejszą wartość na zbiorze  $Z_{j,N,d}^{(t)}$  jest równoważne szukaniu punktów, dla których wartość wyrażenia  $t(\alpha_0 + \tilde{r}\alpha_s) = \tilde{\alpha}_0 + d_1\alpha_s$  jest najmniejsza na zbiorze  $Z_{j,N,d} \cap (t\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s)$ . Ponieważ  $\{(dj - sN + dl, 0, \dots, 0, l, N - j - 2l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s \mid 0 \leq 2l \leq N - j\} \subset t\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s$ , gdyż  $t \mid d$  i  $t \mid N$ , więc korzystając z (a) otrzymujemy tezę.  $\square$

Dalsze rozważania, tak jak poprzednio, podzielimy na dwa przypadki, gdy stopień wielomianu jednorodnego  $h$  równa się 1, oraz gdy stopień tego wielomianu jest większy od 1. Przypomnijmy, że dla  $\deg h = 1$  mamy  $F = F_1 + \dots + F_{s-1} + F_s + h^d$  oraz  $G = G_1 + \dots + G_{N-1} + a_N h^N$ , gdzie  $d = 2d_1$ ,  $d_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,  $N = d_1(2k + 1)$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}_+$ . W dowodzie twierdzenia traktującego o zależności składowych jednorodnych stopnia  $s-1$  oraz  $s$  wielomianu  $F$  (patrz twierdzenie 4.20 poniżej) będziemy potrzebować następującego lematu.

**Lemat 4.19.** *Niech  $d = 2d_1$  dla pewnego  $d_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,  $N = 2d_1k + d_1$  dla pewnego  $k \in \mathbb{N}_+$  oraz niech  $\deg[F, G] < d + N - 2k - 2$ . Załóżmy ponadto, że  $F_d = h^d$  i  $G_N = a_N h^N$ , gdzie  $h$  jest wielomianem jednorodnym stopnia 1, a  $a_N \in \mathbb{C}^*$ . Wtedy dla każdego  $l \in \{0, 1, \dots, k+1\}$  zachodzi*

$$c_{(-2d_1k-3d_1+2d_1l, 0, \dots, 0, l, 2k+2-2l)}^{(N-2k-2)} = (-4)^l \binom{k+1}{l} c_{(-2d_1k-3d_1, 0, \dots, 0, 0, 2k+2)}^{(N-2k-2)}. \quad (4.25)$$

*Dowód.* Przy powyższych założeniach dotyczących nawiasu Poissona pary wielomianów oraz formy jednorodnej najwyższego stopnia, składowa jednorodna wielomianu  $G$  stopnia  $N - 2k - 2$  jest postaci (porównaj z (4.11) oraz (4.12))

$$G_{N-2k-2} = \sum_{\substack{\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s \\ \alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = N - 2k - 2 \\ \alpha_0 + 2d_1(\alpha_1 + \dots + \alpha_s) \leq N}} c_{\alpha}^{(N-2k-2)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0},$$

gdzie

$$c_{\alpha}^{(N-2k-2)} = \frac{\prod_{i=1}^{\alpha_1+\dots+\alpha_s} (\alpha_0 + 2d_1 i)}{\left(\prod_{i_1=1}^{\alpha_1} 2d_1 i_1\right) \cdots \left(\prod_{i_s=1}^{\alpha_s} 2d_1 i_s\right)} a_{\alpha_0+2d_1(\alpha_1+\dots+\alpha_s)}. \quad (4.26)$$

Korzystając z formuły (4.26) dla  $\alpha = (-2d_1 k - 3d_1 + 2d_1(l+1), 0, \dots, 0, l+1, 2k+2-2(l+1))$  mamy

$$\begin{aligned} & c_{(-2d_1 k - 3d_1 + 2d_1(l+1), 0, \dots, 0, l+1, 2k+2-2(l+1))}^{(N-2k-2)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{2k+2-(l+1)} (-2d_1 k - 3d_1 + 2d_1(l+1) + 2d_1 i)}{\prod_{i_{s-1}=1}^{l+1} 2d_1 i_{s-1} \cdot \prod_{i_s=1}^{2k+2-2(l+1)} 2d_1 i_s} a_N. \end{aligned}$$

Z tej samej formuły (4.26) zastosowanej dla  $\alpha = (-2d_1 k - 3d_1 + 2d_1 l, 0, \dots, 0, l, 2k+2-2l)$  otrzymujemy

$$c_{(-2d_1 k - 3d_1 + 2d_1 l, 0, \dots, 0, l, 2k+2-2l)}^{(N-2k-2)} = \frac{\prod_{i=1}^{2k+2-l} (-2d_1 k - 3d_1 + 2d_1 l + 2d_1 i)}{\prod_{i_{s-1}=1}^l 2d_1 i_{s-1} \cdot \prod_{i_s=1}^{2k+2-2l} 2d_1 i_s} a_N$$

dla dowolnego  $l = 0, 1, \dots, k$ . Z powyższego wynika, że

$$\begin{aligned} & c_{(-2d_1 k - 3d_1 + 2d_1(l+1), 0, \dots, 0, l+1, 2k+2-2(l+1))}^{(N-2k-2)} \\ &= \frac{2d_1(2k+1-2l)2d_1(2k+2-2l)}{2d_1(l+1)(-2d_1 k - d_1 + 2d_1 l)} c_{(-2d_1 k - 3d_1 + 2d_1 l, 0, \dots, 0, l, 2k+2-2l)}^{(N-2k-2)} \\ &= \frac{(k+1-l)(-4)}{l+1} c_{(-2d_1 k - 3d_1 + 2d_1 l, 0, \dots, 0, l, 2k+2-2l)}^{(N-2k-2)}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

W szczególności dla  $l = 0$  dostajemy

$$\begin{aligned} c_{(-2d_1 k - d_1, 0, \dots, 0, 1, 2k)}^{(N-2k-2)} &= \frac{(k+1)(-4)}{1} c_{(-2d_1 k - 3d_1, 0, \dots, 0, 0, 2k+2)}^{(N-2k-2)} \\ &= (-4) \binom{k+1}{1} c_{(-2d_1 k - 3d_1, 0, \dots, 0, 0, 2k+2)}^{(N-2k-2)}. \end{aligned}$$

Natomiast dla  $l = 1$  mamy

$$\begin{aligned} c_{(-2d_1 k + d_1, 0, \dots, 0, 2, 2k-2)}^{(N-2k-2)} &= \frac{(k+1-1)(-4)}{1+1} c_{(-2d_1 k - d_1, 0, \dots, 0, 1, 2k)}^{(N-2k-2)} \\ &= \frac{(k+1)k(-4)^2}{1 \cdot 2} c_{(-2d_1 k - 3d_1, 0, \dots, 0, 0, 2k+2)}^{(N-2k-2)} \\ &= (-4)^2 \binom{k+1}{2} c_{(-2d_1 k - 3d_1, 0, \dots, 0, 0, 2k+2)}^{(N-2k-2)}. \end{aligned}$$

Kontynuując obliczenia indukcyjnie otrzymujemy tezę.  $\square$

**Twierdzenie 4.20.** Niech  $d = 2d_1$  dla pewnego  $d_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,  $N = 2d_1 k + d_1$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}_+$ , oraz niech  $\deg[F, G] < d + N - 2k - 2$ . Ponadto załóżmy, że  $F_d = h^d$  i  $G_N = a_N h^N$  dla pewnego wielomianu jednorodnego  $h$  stopnia 1 oraz  $a_N \in \mathbb{C}^*$ . Wtedy istnieje taki wielomian jednorodny  $\hat{F}_{s-2}$  stopnia  $s-2$ , że

$$F_{s-1} = \frac{1}{4} (\tilde{F}_{s, d_1-1}^2 + h \hat{F}_{s-2}),$$

gdzie  $\tilde{F}_{s, d_1-1}$  spełnia równość  $F_s = h^{d_1} \tilde{F}_{s, d_1-1}$ .

*Dowód.* Na początek zauważmy, że spełnione są założenia twierdzenia 4.12 dla  $i = N - 2k - 2$  oraz  $k = d_1 - 1$ . Istotnie,  $\frac{s-(d_1-1)}{d-(d_1-1)} = \frac{d_1}{d_1+1} > \frac{d_1-1}{d_1}$ , a więc  $\frac{s-(d_1-1)}{d-(d_1-1)}N = \frac{d_1}{d_1+1}N > \frac{d_1-1}{d_1}N = \frac{d_1-1}{d_1}(2d_1k + d_1) = N - 2k - 1$ . Ponadto na podstawie założenia  $\deg[F, G] < d + N - 2k - 2$ . Zatem możemy skorzystać z twierdzenia 4.12 uzyskując podzielność  $F_s$  przez  $h^{d_1}$ . W związku z tym istnieje taki wielomian jednorodny  $\tilde{F}_{s,d_1-1}$  stopnia  $d_1 - 1$ , że  $F_s = h^{d_1}\tilde{F}_{s,d_1-1}$ .

Z przeprowadzonych do tej pory rozważań, założenia dotyczącego stopnia nawiasu Poissona oraz z wniosku 4.13, w którym przyjmujemy  $d = 2d_1$ ,  $s = 2d_1 - 1$  oraz  $j = N - 2k - 2$ , otrzymujemy

$$G_{N-2k-2} = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0,\dots,\alpha_s)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^s \\ \alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2+\dots+s\alpha_s=N-2k-2 \\ \alpha_0+d(\alpha_1+\dots+\alpha_s)\leq N}} c_\alpha^{(N-2k-2)} F_1^{\alpha_1} \dots F_{s-1}^{\alpha_{s-1}} \tilde{F}_{s,d_1-1}^{\alpha_s} h^{\alpha_0+d_1\alpha_s}. \quad (4.28)$$

Na mocy lematu 4.18 (a) wartość minimalna wyrażenia  $\alpha_0 + d_1\alpha_s$  rozważanego na zbiorze  $Z_{j,N,d}$ , gdzie  $j = N - 2k - 2$ ,  $N = 2d_1k + d_1$ ,  $d = 2d_1$ , wynosi  $d_1j - (d_1 - 1)N = d_1(N - 2k - 2) - (d_1 - 1)N = N - 2d_1k - 2d_1 = N - (2d_1k + d_1) - d_1 = -d_1$  i jest osiągnięta na zbiorze  $\{(dj - sN + dl, 0, \dots, 0, l, N - j - 2l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s \mid 0 \leq 2l \leq N - j\} = \{(-2d_1k - 3d_1 + 2d_1l, 0, \dots, 0, l, 2k + 2 - 2l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s \mid l = 0, 1, \dots, k + 1\}$ . Istotnie,  $dj - sN + dl = d(N - 2k - 2) - sN + dl = -2dk - 2d + N + dl = -2(2d_1)k - 4d_1 + 2d_1k + d_1 + 2d_1l = -2d_1k - 3d_1 + 2d_1l$  oraz  $N - j - 2l = N - N + 2k + 2 - 2l = 2k + 2 - 2l$ . W konsekwencji wszystkie składniki wielomianu  $G_{N-2k-2}$  z wyjątkiem występujących w sumie

$$\sum_{l=0}^{k+1} c_{(-2d_1k-3d_1+2d_1l,0,\dots,0,l,2k+2-2l)}^{(N-2k-2)} F_{s-1}^l \tilde{F}_{s,d_1-1}^{2k+2-2l} h^{-d_1} \quad (4.29)$$

zawierają  $h^u$  z  $u > -d_1$ . Korzystając z lematu 4.19, sumę z (4.29) możemy zapisać następująco

$$\begin{aligned} & c_{(-2d_1k-3d_1,0,\dots,0,2k+2)}^{(N-2k-2)} h^{-d_1} \sum_{l=0}^{k+1} \binom{k+1}{l} (-4)^l F_{s-1}^l \tilde{F}_{s,d_1-1}^{2k+2-2l} \\ &= c_{(-2d_1k-3d_1,0,\dots,0,2k+2)}^{(N-2k-2)} h^{-d_1} (\tilde{F}_{s,d_1-1}^2 - 4F_{s-1})^{k+1}. \end{aligned}$$

Wróćmy do równości (4.28) i przemnożmy ją obustronnie przez  $h^{d_1}$ . Z powstałej równości wynika, że  $h$  musi dzielić  $c_{(-2d_1k-3d_1,0,\dots,0,2k+2)}^{(N-2k-2)} (\tilde{F}_{s,d_1-1}^2 - 4F_{s-1})^{k+1}$ . Ponieważ  $c_{(-2d_1k-3d_1,0,\dots,0,2k+2)}^{(N-2k-2)} = \frac{\prod_{i=1}^{2k+2} (-2d_1k-3d_1+2d_1i)}{\prod_{i=1}^{2k+2} 2d_1i} a_{2d_1k+d_1} \neq 0$ , bo  $2d_1k + d_1 = N$ , więc  $h \mid (\tilde{F}_{s,d_1-1}^2 - 4F_{s-1})^{k+1}$ . Korzystając z faktu, że  $h$  jako wielomian jednorodny stopnia 1 jest nierozkładalny, dostajemy, że  $h \mid (\tilde{F}_{s,d_1-1}^2 - 4F_{s-1})$ . Z tej podzielności wnioskujemy istnienie takiego wielomianu jednorodnego  $\hat{F}_{s-2}$  stopnia  $s - 2$ , że  $-h\hat{F}_{s-2} = \tilde{F}_{s,d_1-1}^2 - 4F_{s-1}$ . Wyliczając  $F_{s-1}$  uzyskujemy tezę.  $\square$

Teraz zajmiemy się przypadkiem, gdy  $\deg h > 1$ . W tej sytuacji  $F = F_1 + \dots + F_s + h^{\frac{d}{t}}$  oraz  $G = G_1 + \dots + G_{N-1} + a_N h^{\frac{N}{t}}$ , gdzie  $t = \deg h$  i  $a_N \in \mathbb{C}^*$ . Jak poprzednio, zakładamy, że  $d = 2d_1$ ,  $d_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  oraz  $N = d_1(2k + 1)$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ . Ponieważ  $t$  dzieli zarówno  $d$  jak i  $N$ , więc  $t$  dzieli  $d_1 = \text{nwd}(d, N)$ .

**Lemat 4.21.** *Niech  $d, N$  i  $\deg[F, G]$  spełniają założenia lematu 4.19. Ponadto założymy, że  $F_d = h^{\frac{d}{t}}$  i  $G_N = a_N h^{\frac{N}{t}}$  dla pewnego bezkwadratowego jednorodnego wielomianu  $h$  stopnia  $t \geq 1$  oraz  $a_N \in \mathbb{C}^*$ . Wtedy dla każdego  $l \in \{0, 1, \dots, k+1\}$  zachodzi równość*

$$c_{((-2k-3+2l)\tilde{r}, 0, \dots, 0, l, 2k+2-2l)}^{(N-2k-2)} = (-4)^l \binom{k+1}{l} c_{((-2k-3)\tilde{r}, 0, \dots, 0, 0, 2k+2)}^{(N-2k-2)},$$

gdzie  $\tilde{r} = \frac{d_1}{t}$ .

*Dowód.* Analogicznie jak w dowodzie lematu 4.19 dla  $j = N - 2k - 2$ ,  $N = 2d_1k + d_1$ ,  $d = 2d_1$  i  $s = 2d_1 - 1$  oraz  $r = \frac{2d_1}{t}$ , mamy (porównaj z (4.14) oraz (4.15))

$$G_{N-2k-2} = \sum_{\substack{\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s \\ t\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = N - 2k - 2 \\ t\alpha_0 + 2d_1(\alpha_1 + \dots + \alpha_s) \leq N}} c_{\alpha}^{(N-2k-2)} F_1^{\alpha_1} \dots F_s^{\alpha_s} h^{\alpha_0},$$

gdzie

$$c_{\alpha}^{(N-2k-2)} = \frac{\prod_{i=1}^{\alpha_1 + \dots + \alpha_s} (\alpha_0 + ri)}{\left(\prod_{i=1}^{\alpha_1} ri\right) \dots \left(\prod_{i_s=1}^{\alpha_s} ri_s\right)} a_{t\alpha_0 + 2d_1(\alpha_1 + \dots + \alpha_s)}.$$

W szczególności

$$\begin{aligned} c_{((-2k-3+2(l+1))\tilde{r}, 0, \dots, 0, l+1, 2k+2-2(l+1))}^{(N-2k-2)} &= c_{\left(\frac{-2d_1k-3d_1+2d_1(l+1)}{t}, 0, \dots, 0, l+1, 2k+2-2(l+1)\right)}^{(N-2k-2)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{2k+2-(l+1)} \frac{-2d_1k-3d_1+2d_1(l+1)+2d_1i}{t}}{\prod_{i_{s-1}=1}^{l+1} \frac{2d_1i_{s-1}}{t} \cdot \prod_{i_s=1}^{2k+2-2(l+1)} \frac{2d_1i_s}{t}} a_N \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{2k+2-(l+1)} (-2d_1k - 3d_1 + 2d_1(l+1) + 2d_1i)}{\prod_{i_{s-1}=1}^{l+1} 2d_1i_{s-1} \cdot \prod_{i_s=1}^{2k+2-2(l+1)} 2d_1i_s} a_N \end{aligned}$$

oraz

$$c_{((-2k-3+2l)\tilde{r}, 0, \dots, 0, l, 2k+2-2l)}^{(N-2k-2)} = \frac{\prod_{i=1}^{2k+2-l} (-2d_1k - 3d_1 + 2d_1l + 2d_1i)}{\prod_{i_{s-1}=1}^l 2d_1i_{s-1} \cdot \prod_{i_s=1}^{2k+2-2l} 2d_1i_s} a_N$$

dla  $l = 0, 1, \dots, k$ . Dalsza część dowodu jest powtórzeniem rozumowania przedstawionego w dowodzie lematu 4.19.  $\square$

**Twierdzenie 4.22.** *Założymy, że  $d = 2d_1$ ,  $N = 2d_1k + d_1$  dla pewnego  $d_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  oraz  $k \in \mathbb{N}_+$ . Niech  $\deg[F, G] < d + N - 2k - 2$ ,  $F_d = h^{\frac{d}{t}}$  i  $G_N = a_N h^{\frac{N}{t}}$  dla pewnego bezkwadratowego wielomianu jednorodnego stopnia  $t \geq 1$  oraz  $a_N \in \mathbb{C}^*$ . Ponadto przyjmijmy, że  $\tilde{r} = \frac{d_1}{t}$ . Wtedy istnieje taki wielomian jednorodny  $\hat{F}_{s-t-1}$  stopnia  $s - t - 1$ , że*

$$F_{s-1} = \frac{1}{4} (\tilde{F}_{s, d_1-1}^2 + h \hat{F}_{s-t-1}),$$

gdzie  $\tilde{F}_{s, d_1-1}$  spełnia równość  $F_s = h^{\tilde{r}} \tilde{F}_{s, d_1-1}$ .

*Dowód.* Podzielność  $F_s$  przez wielomian  $h^{\tilde{r}}$  uzyskujemy na podstawie twierdzenia 4.15. Mianowicie  $\deg[F, G] < d + N - 2k - 2$  natomiast dla  $i = N - 2k - 2$  oraz  $k = \tilde{r} - 1$  zachodzi  $\frac{s - (\tilde{r} - 1)t}{d - (\tilde{r} - 1)t} = \frac{s - (\frac{d_1}{t} - 1)t}{d - (\frac{d_1}{t} - 1)t} = \frac{2d_1 - 1 - (d_1 - t)}{2d_1 - (d_1 - t)} = \frac{d_1 - 1 + t}{d_1 + t} > \frac{d_1 - 1}{d_1}$ , a więc  $\frac{s - (\frac{d_1}{t} - 1)t}{d - (\frac{d_1}{t} - 1)t}N > \frac{d_1 - 1}{d_1}N = N - 2k - 1$ . Ze względu na uzyskaną podzielność istnieje taki wielomian jednorodny  $\tilde{F}_{s, d_1 - 1}$  stopnia  $d_1 - 1$ , że  $F_s = h^{\tilde{r}} \tilde{F}_{s, d_1 - 1}$ . Z powyższych rozważań oraz wniosku 4.16 (dla  $d = 2d_1, s = 2d_1 - 1$  oraz  $j = N - 2k - 2$  i  $\tilde{r} = \frac{d_1}{t}$ ), wielomian  $G_{N - 2k - 2}$  możemy zapisać

$$G_{N - 2k - 2} = \sum_{\substack{\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s \\ t\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + s\alpha_s = j \\ t\alpha_0 + d(\alpha_1 + \dots + \alpha_s) \leq N}} c_{\alpha}^{(N - 2k - 2)} F_1^{\alpha_1} \dots F_{s-1}^{\alpha_{s-1}} \tilde{F}_{s, d_1 - 1}^{\alpha_s} h^{\alpha_0 + \tilde{r}\alpha_s}. \quad (4.30)$$

Zgodnie z lematem 4.18 (b) wartość minimalna wyrażenia  $\alpha_0 + \tilde{r}\alpha_s$  rozważanego na zbiorze  $Z_{j, N, d}^{(t)}$  wynosi  $\tilde{r}j - (d_1 - 1)\tilde{r}(2k + 1) = \tilde{r}(N - 2k - 2) - (d_1 - 1)\tilde{r}(2k + 1) = \tilde{r}(N - 2k - 2) - \tilde{r}(N - 2k - 1) = -\tilde{r}$  i jest osiągnięta na zbiorze  $\{((-2k - 3 + 2l)\tilde{r}, 0, \dots, 0, l, 2k + 2 - 2l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s \mid l = 0, 1, \dots, k + 1\}$ . Zatem wszystkie składniki wielomianu  $G_{N - 2k - 2}$  poza występującymi w sumie

$$\sum_{l=0}^{k+1} c_{((-2k-3+2l)\tilde{r}, 0, \dots, 0, l, 2k+2-2l)}^{(N-2k-2)} F_{s-1}^l \tilde{F}_{s, d_1 - 1}^{2k+2-2l} h^{-\tilde{r}} \quad (4.31)$$

zawierają  $h^u$  z  $u > -\tilde{r}$ . Stosując lemat 4.21, sumę (4.31) możemy przedstawić w następujący sposób:

$$\begin{aligned} & c_{((-2k-3)\tilde{r}, 0, \dots, 0, 2k+2)}^{(N-2k-2)} h^{-\tilde{r}} \sum_{l=0}^{k+1} \binom{k+1}{l} (-4)^l F_{s-1}^l \tilde{F}_{s, d_1 - 1}^{2k+2-2l} \\ &= c_{((-2k-3)\tilde{r}, 0, \dots, 0, 2k+2)}^{(N-2k-2)} h^{-\tilde{r}} (\tilde{F}_{s, d_1 - 1}^2 - 4F_{s-1})^{k+1}. \end{aligned}$$

Dalsza część dowodu przebiega analogicznie do dowodu twierdzenia 4.20, z wykorzystaniem faktu, że  $h$  jest bezkwadratowym wielomianem jednorodnym.  $\square$

# Zastosowanie nawiasu Poissona w badaniu automorfizmów wielomianowych

Celem niniejszego rozdziału jest zaprezentowanie zastosowania nawiasu Poissona pary wielomianów w badaniu automorfizmów wielomianowych. Kluczem do tych zastosowań okazuje się teoria Shestakova-Umirbaeva, w której zasadniczym narzędziem jest właśnie nawias Poissona i jego stopień. Inspiracją do powstania tej teorii był klasyczny problem związany z grupą automorfizmów wielomianowych przestrzeni  $k^n$ . Jeszcze w latach 40-tych i 50-tych ubiegłego wieku najpierw Jung w charakterystyce zero [11], a następnie van der Kulk dla ciał dowolnej charakterystyki [17] udowodnili, że każdy automorfizm  $k^2$  jest tzw. automorfizmem typu tame. Pytanie, czy podobnie jest w wyższych wymiarach, nie uzyskało do dzisiaj pełnej odpowiedzi. Nawet w wymiarze  $n = 3$  potrzeba było, licząc od pracy Junga, kolejnych 60 lat, pomimo tego, że przykłady potencjalnych kontrprzykładów pojawiały się na przestrzeni lat 50-tych (przykład Anicka [32]) i 70-tych. Najbardziej znanym jest przykład Nagaty [26] pochodzący z 1972 roku. Niemniej jednak dopiero w latach 2003 - 2004 Shestakov i Umirbaev [29, 30, 31] pokazali, że słynny przykład Nagaty istotnie jest tzw. automorfizmem typu wild (nie jest typu tame). W wymiarze  $n \geq 4$  ciągle nic na ten temat nie wiadomo.

Dwa główne wyniki teorii Shestakova i Umirbaeva dotyczą charakteryzacji automorfizmów typu tame (twierdzenie 5.7) oraz oszacowania od dołu stopnia wielomianów należących do podalgebry pierścienia  $k[x_1, \dots, x_n]$  generowanej przez dwa wielomiany (twierdzenie 5.11). W obu przypadkach nawias Poissona pary wielomianów odgrywa ważną rolę. Mianowicie, w przypadku charakteryzacji automorfizmów typu tame ingeruje już na poziomie definicji tzw. redukcji typu I – IV (definicje 5.4 - 5.6). Natomiast w przypadku oszacowania występuje wprost w tzw. nierówności Shestakova-Umirbaeva (twierdzenie 5.11).

Teoria Shestakova i Umirbaeva, a zatem również i nawias Poissona pary wielomianów, okazały się też użytecznymi narzędziami w badaniu wielostopni automorfizmów typu tame przestrzeni  $k^3$ , gdzie  $k$  jest ciałem charakterystyki zero. Zagadnieniu temu poświęcimy podrozdział 5.2.

## 5.1. Teoria Shestakova i Umirbaeva

Niniejszy podrozdział został opracowany na podstawie pozycji [31, 30, 29, 21, 15]. Przedstawimy w nim pokrótce teorię Shestakova-Umirbaeva. Ograniczymy się tutaj do zaprezentowania dwóch wspomnianych powyżej wyników (twierdzenia 5.7 i twierdzenia 5.11) oraz niektórych wniosków z twierdzenia 5.7. W celu przedstawienia twierdzenia charakteryzującego automorfizmy typu tame (twierdzenie 5.7) potrzebujemy definicji redukcji elementarnej oraz czterech typów redukcji wprowadzonych przez Shestakova i Umirbaeva. Przypomnijmy również, że automorfizmy wielomianowe przestrzeni  $k^n$  odpowiadają  $k$ -automorfizmom pierścienia wielomianów  $k[x_1, \dots, x_n]$  (patrz str. 10). W związku z tym, będziemy się nimi wymiennie posługiwać.

**Definicja 5.1 (zredukowana (\*-zredukowana) para wielomianów).** Parę wielomianów  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ , która spełnia następujące warunki:

- (1)  $\bar{f}, \bar{g}$  są algebraicznie zależne, gdzie  $\bar{f}$  oznacza składową jednorodną najwyższego stopnia wielomianu  $f$ ,
- (2)  $f, g$  są algebraicznie niezależne,
- (3)  $\bar{f} \notin k[\bar{g}]$  oraz  $\bar{g} \notin k[\bar{f}]$ ,

nazywamy *parą \*-zredukowaną*. Natomiast parę wielomianów  $f, g$  spełniających warunek (3) nazywamy *zredukowaną parą wielomianów*.

Jeżeli w powyższej definicji dodamy założenie dotyczące stopni wielomianów  $f$  i  $g$  oraz wprowadzimy pewną stałą, to otrzymamy pojęcie *p-zredukowanej pary wielomianów*.

**Definicja 5.2 (p-zredukowana para wielomianów).** Niech  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$  będzie taką \*-zredukowaną parą wielomianów, że  $\deg f < \deg g$  oraz niech  $p = \frac{\deg f}{\text{nwd}(\deg f, \deg g)}$ . Parę  $f, g$ , dla której zachodzą powyższe zależności, nazywamy *p-zredukowaną parą wielomianów*.

Teraz przedstawimy pojęcie redukcji elementarnej automorfizmu oraz redukcji typu I – IV wprowadzonych przez Shestakova i Umirbaeva [31].

**Definicja 5.3 (redukcja elementarna).** Mówimy, że automorfizm  $\varphi = (f_1, \dots, f_n)$   $k$ -algebry  $k[x_1, \dots, x_n]$  dopuszcza *redukcję elementarną*, gdy istnieje taki automorfizm elementarny  $\tau : k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n]$ , że dla automorfizmu  $\psi = (g_1, \dots, g_n) = \tau \circ \varphi$  zachodzi

$$\text{mdeg } \psi < \text{mdeg } \varphi.$$

Innymi słowy, dla każdego  $i = 1, \dots, n$  zachodzi  $\deg g_i \leq \deg f_i$  oraz dla pewnego  $i$  mamy  $\deg g_i < \deg f_i$ . Czasami zamiast mówić, że  $\varphi$  dopuszcza redukcję elementarną, mówimy, że  $\psi$  jest redukcją elementarną  $\varphi$ .

**Definicja 5.4 (redukcja typu I).** Niech  $\varphi = (f_1, f_2, f_3)$  będzie takim automorfizmem  $k[x, y, z]$ , że  $\deg f_1 = 2d$  dla pewnego  $d \in \mathbb{N}_+$ ,  $\deg f_2 = ds$ , gdzie  $s \geq 3$  jest liczbą nieparzystą, oraz  $2d < \deg f_3 \leq ds$ ,  $\bar{f}_3 \notin k[\bar{f}_1, \bar{f}_2]$ . Załóżmy, że istnieje takie  $0 \neq \alpha \in k$ , że wielomiany  $g_1 = f_1$ ,  $g_2 = f_2 - \alpha f_3$  spełniają następujące warunki:

- (1)  $g_1, g_2$  jest 2-zredukowaną parą wielomianów oraz  $\deg g_1 = \deg f_1$ ,  $\deg g_2 = \deg f_2$ ,

- (2) automorfizm  $(g_1, g_2, f_3)$  dopuszcza redukcję elementarną  $(g_1, g_2, g_3)$ , dla której  $\deg[g_1, g_3] < \deg g_2 + \deg[g_1, g_2]$ .

Wtedy mówimy, że  $\varphi$  dopuszcza redukcję  $(g_1, g_2, g_3)$  typu *I* albo że automorfizm  $(g_1, g_2, g_3)$  jest redukcją typu *I* automorfizmu  $\varphi$ .

**Definicja 5.5 (redukcja typu *II*).** Niech  $\varphi = (f_1, f_2, f_3)$  będzie takim automorfizmem  $k[x, y, z]$ , że  $\deg f_1 = 2d$  dla pewnego  $d \in \mathbb{N}_+$ ,  $\deg f_2 = 3d$ ,  $\frac{3d}{2} < \deg f_3 \leq 2d$  oraz  $\bar{f}_1, \bar{f}_3$  są liniowo niezależne. Ponadto założymy, że istnieją takie  $\alpha, \beta \in k$ , gdzie  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ , że wielomiany  $g_1 = f_1 - \alpha f_3$  oraz  $g_2 = f_2 - \beta f_3$  spełniają warunki (1) i (2) definicji 5.4. Wtedy mówimy, że  $\varphi$  dopuszcza redukcję  $(g_1, g_2, g_3)$  typu *II*.

**Definicja 5.6 (redukcje typu *III* i *IV*).** Niech  $\varphi = (f_1, f_2, f_3)$  będzie takim automorfizmem  $k[x, y, z]$ , że  $\deg f_1 = 2d$  dla pewnego  $d \in \mathbb{N}_+$  oraz  $\deg f_2 = 3d$  i  $d < \deg f_3 \leq \frac{3d}{2}$  albo  $\frac{5d}{2} < \deg f_2 \leq 3d$  i  $\deg f_3 = \frac{3d}{2}$ . Ponadto założymy, że istnieją takie  $\alpha, \beta, \gamma \in k$ , że wielomiany  $g_1 = f_1 - \beta f_3$ ,  $g_2 = f_2 - \gamma f_3 - \alpha f_3^2$  spełniają następujące warunki:

- (1)  $g_1, g_2$  jest parą 2-zredukowaną oraz  $\deg g_1 = 2d$ ,  $\deg g_2 = 3d$ ,
- (2) istnieje wielomian  $g_3$  postaci  $g_3 = \sigma f_3 + g$ , gdzie  $0 \neq \sigma \in k$ ,  $g \in k[g_1, g_2]$  taki, że  $\deg g_3 \leq \frac{3d}{2}$ ,  $\deg[g_1, g_3] < 3d + \deg[g_1, g_2]$ .

Jeżeli ponadto  $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$  oraz  $\deg g_3 < d + \deg[g_1, g_2]$ , to będziemy mówić, że automorfizm  $\varphi$  dopuszcza redukcję  $(g_1, g_2, g_3)$  typu *III*.

Natomiast jeśli istnieje takie  $0 \neq \mu \in k$ , że  $\deg(g_2 - \mu g_3^2) \leq 2d$ , to będziemy mówić, że  $\varphi$  dopuszcza redukcję  $(g_1, g_2 - \mu g_3^2, g_3)$  typu *IV*.

Będziemy również mówić, że automorfizm  $(f_1, f_2, f_3)$  dopuszcza redukcję jednego z typów *I* – *IV*, gdy dla pewnej permutacji  $\sigma$  zbioru  $\{1, 2, 3\}$  automorfizm  $(f_{\sigma(1)}, f_{\sigma(2)}, f_{\sigma(3)})$  dopuszcza redukcję odpowiedniego typu.

Teraz możemy podać wypowiedź twierdzenia dającego charakteryzację automorfizmów typu tame.

**Twierdzenie 5.7** ([29], tw. 3). *Założmy, że  $\varphi = (f_1, f_2, f_3)$  jest automorfizmem typu tame  $k$ -algebry  $k[x, y, z]$  nad ciałem  $k$  charakterystyki zero. Jeśli  $\deg \varphi > 3$ , gdzie  $\deg \varphi = \deg f_1 + \deg f_2 + \deg f_3$ , to  $\varphi$  dopuszcza redukcję elementarną lub redukcję typu *I* – *IV*.*

Przedstawmy wnioski z powyższego twierdzenia.

**Wniosek 5.8** ([29], wn. 3). *Niech  $\varphi$  spełnia założenia twierdzenia 5.7. Jeśli  $\varphi = (f_1, f_2, f_3)$ , gdzie  $f_3 = z$ , to  $\varphi$  dopuszcza redukcję elementarną.*

Zanim podamy wypowiedź kolejnego wniosku, przypomnijmy postać automorfizmu Nagaty, który jest automorfizmem  $k[x, y, z]$ :

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= x + 2y(y^2 + zx) - z(y^2 + zx)^2, \\ \sigma(y) &= y - z(y^2 + zx), \\ \sigma(z) &= z.\end{aligned}$$

**Wniosek 5.9** ([29], wn. 4). *Automorfizm Nagaty pierścienia wielomianów trzech zmiennych nad ciałem  $k$  charakterystyki zero jest typu wild, czyli nie jest typu tame.*

**Wniosek 5.10** ([29], wn. 5). *Niech  $k$  będzie ciałem charakterystyki zero. Automorfizm  $(f, g)$   $k[z]$ -algebry  $k[z][x, y]$  jest typu tame wtedy i tylko wtedy, gdy automorfizm  $(f, g, z)$   $k$ -algebry  $k[x, y, z]$  jest typu tame.*

Poniższe twierdzenie, które przedstawia dolne ograniczenie stopni elementów podalgebry  $k[f, g] \subset k[x_1, \dots, x_n]$  generowanej przez \*-zredukowaną parę wielomianów  $f, g$ , jest jednym z ważniejszych twierdzeń Shestakova i Umirbaeva. W szacowaniu tym istotną rolę odgrywa stopień nawiasu Poissona pary wielomianów  $f, g$ .

**Twierdzenie 5.11** ([30], tw. 3). *Załóżmy, że  $G(x, y) \in k[x, y]$  oraz, że  $f, g$  jest dowolną \*-zredukowaną parą wielomianów  $n$  zmiennych nad ciałem  $k$  charakterystyki zero. Ponadto niech  $\deg f < \deg g$  oraz*

$$p = \frac{\deg f}{\text{nwd}(\deg f, \deg g)} \quad i \quad s = \frac{\deg g}{\text{nwd}(\deg f, \deg g)}.$$

*Jeśli  $\deg_y(G(x, y)) = pq + r$ , gdzie  $q \in \mathbb{N}$  oraz  $0 \leq r < p$ , to*

$$\deg(G(f, g)) \geq q(p \deg g - \deg g - \deg f + \deg[f, g]) + r \deg g.$$

*Natomiast jeśli  $\deg_x(G(x, y)) = s\tilde{q} + \tilde{r}$ , gdzie  $\tilde{q} \in \mathbb{N}$  oraz  $0 \leq \tilde{r} < s$ , to*

$$\deg(G(f, g)) \geq \tilde{q}(s \deg f - \deg g - \deg f + \deg[f, g]) + \tilde{r} \deg f.$$

Warto zwrócić uwagę, że nierówności z powyższego twierdzenia są prawdziwe również w sytuacji, gdy  $\bar{f}, \bar{g}$  są algebraicznie niezależne.

W 2008 roku ukazała się praca, w której Makar-Limanov oraz Yu dokonali poprawy szacowania stopnia z pracy Shestakova i Umirbaeva. Mówi o tym następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 5.12** ([21], prop. 1.2). *Załóżmy, że  $G \in k[x, y]$  oraz że elementy  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$  są algebraicznie niezależne. Wtedy*

$$\deg(G(f, g)) \geq D(f, g) \deg_{\mathbf{w}}(G),$$

gdzie

$$D(f, g) = 1 - \frac{\text{nwd}(\deg f, \deg g)(\deg fg - \deg[f, g])}{\deg f \deg g}$$

oraz  $\mathbf{w} = (\deg f, \deg g)$ .

Uogólnienie na wyższy wymiar twierdzenia 5.11 można znaleźć w pracy [18].

## 5.2. Zastosowanie nawiasu Poissona w badaniu automorfizmów typu tame

Przypomnijmy, że z klasycznego twierdzenia Junga-van der Kulka wynika między innymi, że dla dowolnego automorfizmu wielomianowego  $F = (F_1, F_2) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  mamy  $\deg F_1 \mid \deg F_2$  lub  $\deg F_2 \mid \deg F_1$ . Na odwrót, mając dane dwie liczby całkowite dodatnie  $d_1, d_2$  takie, że  $d_1 \mid d_2$ , to  $\Phi = \Phi_2 \circ \Phi_1$ , gdzie

$$\Phi_1 : \mathbb{C}^2 \ni (x, y) \mapsto (x + y^{d_1}, y) \in \mathbb{C}^2,$$

$$\Phi_2 : \mathbb{C}^2 \ni (u, v) \mapsto (u, v + u \frac{d_2}{d_1}) \in \mathbb{C}^2$$

jest automorfizmem przestrzeni  $\mathbb{C}^2$  o wielostopniu  $\text{mdeg } \Phi = (d_1, d_2)$ , gdzie dla odwzorowania wielomianowego  $F = (F_1, \dots, F_m) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  wielostopień  $\text{mdeg } F$  odwzorowania  $F$  definiujemy jako ciąg  $(\deg F_1, \dots, \deg F_m)$ . W kontekście wspomnianego twierdzenia Junga-van der Kulka oraz powyższego wniosku naturalne jest badanie, dla jakich ciągów liczb całkowitych dodatnich  $(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}_+^n$  istnieje automorfizm (automorfizm typu tame)  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  taki, że  $\text{mdeg } F = (d_1, \dots, d_n)$ . Oczywiście wystarczy rozpatrywać uporządkowane ciągi liczb  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ . Poniżej przedstawimy kilka wyników dotyczących tego zagadnienia w przypadku  $n = 3$ . Wykorzystują one jako główne narzędzie teorię Shestakova-Umirbaeva, a w związku z tym również nawias Poissona pary wielomianów.

Historycznie pierwszym wynikiem w tym kierunku było następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 5.13** ([13], tw. 4.1). *Nie istnieje automorfizm  $F = (F_1, F_2, F_3)$  typu tame przestrzeni  $\mathbb{C}^3$  o wielostopniu  $\text{mdeg } F = (3, 4, 5)$ .*

Idea dowodu powyższego twierdzenia (zgodnie z twierdzeniem 5.7) polega na pokazaniu, że hipotetyczny automorfizm typu tame o wielostopniu  $(3, 4, 5)$  nie dopuszcza żadnej z redukcji typu  $I - IV$  ani redukcji elementarnej. W przypadku redukcji typu  $I - IV$  wynika to wprost z definicji tych redukcji. Fakt, że hipotetyczny automorfizm typu tame  $F = (F_1, F_2, F_3)$  o wielostopniu  $(3, 4, 5)$  nie dopuszcza redukcji elementarnej, wynika z nierówności Shestakova-Umirbaeva (patrz twierdzenie 5.11) oraz z tego, że dla dowolnych  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \neq j$ ,  $\deg[F_i, F_j] \geq 2$ . Szczegółowe informacje znajdują się w pracy [13]. We wspomnianym artykule udowodniono również, że nie istnieją automorfizmy typu tame o wielostopniach  $(3, 5, 7)$ ,  $(4, 5, 7)$  oraz  $(4, 5, 11)$ . Została tam także postawiona następująca hipoteza.

**Hipoteza 5.14** ( $p$  - hipoteza, [13], hip. 5.1). *Jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą,  $d_3 \geq d_2 \geq p$ , to  $(p, d_2, d_3)$  jest wielostopniem automorfizmu typu tame wtedy i tylko wtedy, gdy  $p \mid d_2$  lub  $d_3 \in p\mathbb{N} + d_2\mathbb{N}$ .*

Główny wynik pracy [14] można potraktować jako krok w kierunku odpowiedzi na pytanie o prawdziwość powyższej hipotezy.

**Twierdzenie 5.15** ([14], tw. 1.1). *Załóżmy, że  $p_1, p_2$  są liczbami pierwszymi, natomiast  $d_3$  dowolną liczbą całkowitą oraz niech  $d_3 \geq p_2 > p_1 \geq 3$ . Wtedy zachodzi następująca równoważność:*

$$(p_1, p_2, d_3) \in \text{mdeg}(\text{Tame}(\mathbb{C}^3))^1 \iff d_3 \in p_1\mathbb{N} + p_2\mathbb{N}.$$

Podobnie jak w przypadku twierdzenia 5.13, dowód wykorzystuje głównie nierówność Shestakova-Umirbaeva i fakt, że stopień nawiasu Poissona pary wielomianów będących składowymi automorfizmu wielomianowego wynosi co najmniej dwa.

Częściowej odpowiedzi dotyczącej hipotezy 5.14 dostarczyła praca [12]. Udowodniono w niej, że trójka liczb  $(3, d_2, d_3)$ , gdzie  $d_3 \geq d_2 \geq 3$ , jest wielostopniem automorfizmu typu tame wtedy i tylko wtedy, gdy  $3 \mid d_2$  lub  $d_3 \in 3\mathbb{N} + d_2\mathbb{N}$ . Również

1. Możemy używać takiego zapisu, ponieważ  $\text{mdeg}$  jest odwzorowaniem ze zbioru wszystkich endomorfizmów wielomianowych przestrzeni  $\mathbb{C}^n$  w zbiór  $\mathbb{N}^n$ .

w tym przypadku, w celu udowodnienia, że nie istnieją automorfizmy typu tame o wielostpniu  $(3, d_2, d_3)$ , gdy  $3 \nmid d_2$  oraz  $d_3 \notin 3\mathbb{N} + d_2\mathbb{N}$  wykorzystano nierówność Shestakova-Umirbaeva i nawias Poissona pary wielomianów.

Uogólnienia twierdzenia 5.15 dostarczyła praca [16], gdzie założenie dotyczące tego, że  $p_1, p_2$  są liczbami pierwszymi zostało zastąpione przez założenie, że  $d_1, d_2$  są nieparzystymi liczbami względnie pierwszymi.

**Twierdzenie 5.16** ([16], tw. 2.1). *Założmy, że  $d_1, d_2$  są takimi liczbami nieparzystymi, że  $\text{nwd}(d_1, d_2) = 1$  oraz  $d_3 \geq d_2 > d_1 \geq 3$ . Przy tych założeniach zachodzi następująca równoważność:*

$$(d_1, d_2, d_3) \in \text{mdeg}(\text{Tame}(\mathbb{C}^3)) \iff d_3 \in d_1\mathbb{N} + d_2\mathbb{N}.$$

Wnioskiem z powyższego twierdzenia jest fakt, że dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}_+$  automorfizm  $N^n = N \circ \dots \circ N$  ( $n$ -krotne złożenie automorfizmu  $N$  z samym sobą) nie jest typu tame, gdzie  $N$  jest następującą nieznaczną modyfikacją automorfizmu Nagaty:

$$N : \mathbb{C}^3 \ni (x, y, z) \mapsto (z, y - z(y^2 + zx), x + 2y(y^2 + zx) - z(y^2 + zx)^2) \in \mathbb{C}^3.$$

Dla  $n = 1$  jest to wynik Shestakova-Umirbaeva (patrz wniosek 5.9). Dla  $n \geq 2$  wystarczy zauważyć, że  $\text{mdeg } N^n = (4n - 3, 4n - 1, 4n + 1)$ ,  $\text{nwd}(4n - 3, 4n - 1) = \text{nwd}(4n - 3, 2) = 1$  oraz, że  $4n + 1 \notin (4n - 3)\mathbb{N} + (4n - 1)\mathbb{N}$  i skorzystać z twierdzenia 5.16.

Kolejnym krokiem w kierunku rozwiązania hipotezy 5.14 jest następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 5.17** ([15], tw. 7.1). *Założmy, że  $p$  jest liczbą pierwszą oraz  $d_2, d_3$  są takimi liczbami całkowitymi, że  $2 \leq p \leq d_2 \leq d_3$ . Ponadto założmy, że spełniony jest przynajmniej jeden z dwóch poniższych warunków:*

- (1)  $\frac{d_3}{d_2} \neq \frac{3}{2}$ ,
- (2)  $\frac{d_3}{d_2} = \frac{3}{2}$  oraz  $\frac{d_2}{2} > p - 2$ .

Wtedy zachodzi równoważność:

$$(p, d_2, d_3) \in \text{mdeg}(\text{Tame}(\mathbb{C}^3)) \iff p \mid d_2 \text{ lub } d_3 \in p\mathbb{N} + d_2\mathbb{N}.$$

Gdy w powyższym twierdzeniu przyjmiemy  $p = 5, 7, 11$  lub  $13$  dostajemy następujący wynik.

**Wniosek 5.18** ([15], wn. 7.2).

- (1) *Założmy, że  $(5, d_2, d_3) \neq (5, 6, 9)$  oraz  $5 \leq d_2 \leq d_3$ . Wtedy*

$$(5, d_2, d_3) \in \text{mdeg } \text{Tame}(\mathbb{C}^3) \iff 5 \mid d_2 \text{ lub } d_3 \in 5\mathbb{N} + d_2\mathbb{N}.$$

- (2) *Założmy, że  $(7, d_2, d_3) \notin \{(7, 8, 12), (7, 10, 15)\}$  oraz  $7 \leq d_2 \leq d_3$ . Wtedy*

$$(7, d_2, d_3) \in \text{mdeg}(\text{Tame}(\mathbb{C}^3)) \iff 7 \mid d_2 \text{ lub } d_3 \in 7\mathbb{N} + d_2\mathbb{N}.$$

(3) Załóżmy, że  $(11, d_2, d_3) \notin \{(11, 12, 18), (11, 14, 21), (11, 16, 24), (11, 18, 27)\}$  oraz  $11 \leq d_2 \leq d_3$ . Wtedy

$$(11, d_2, d_3) \in \text{mdeg}(\text{Tame}(\mathbb{C}^3)) \iff 11 \mid d_2 \text{ lub } d_3 \in 11\mathbb{N} + d_2\mathbb{N}.$$

(4) Załóżmy, że

$$(13, d_2, d_3) \notin \{(13, 14, 21), (13, 16, 24), (13, 18, 27), (13, 20, 30), (13, 22, 33)\}$$

oraz  $13 \leq d_2 \leq d_3$ . Wtedy

$$(13, d_2, d_3) \in \text{mdeg}(\text{Tame}(\mathbb{C}^3)) \iff 13 \mid d_2 \text{ lub } d_3 \in 13\mathbb{N} + d_2\mathbb{N}.$$

W szczególności z punktu (1) powyższego wniosku wynika, że w celu udowodnienia hipotezy 5.14 dla  $p = 5$  wystarczy pokazać, że nie istnieje automorfizm typu tame o wielostopniu  $(5, 6, 9)$ . Fakt ten został udowodniony w pracy [15].

**Twierdzenie 5.19** ([15], tw. 7.3). *Nie istnieje automorfizm typu tame przestrzeni  $\mathbb{C}^3$  o wielostopniu  $(5, 6, 9)$ .*

Dowód powyższego twierdzenia opiera się na następującym twierdzeniu.

**Twierdzenie 5.20** ([15], tw. 3.15). *Niech  $(d_1, d_2, d_3) \neq (1, 1, 1)$ ,  $d_1 \leq d_2 \leq d_3$  będzie ciągiem dodatnich liczb całkowitych oraz  $d_3/d_2 = 3/2$  lub  $3 \nmid d_1$ . Wtedy, aby udowodnić, że nie istnieje automorfizm  $F$  typu tame przestrzeni  $\mathbb{C}^3$  o  $\text{mdeg } F = (d_1, d_2, d_3)$ , wystarczy pokazać, że nie istnieje taki (hipotetyczny) automorfizm dopuszczający redukcję elementarną.*

Zgodnie z powyższym twierdzeniem wystarczy pokazać, że hipotetyczny automorfizm  $F = (F_1, F_2, F_3)$  typu tame o wielostopniu  $(5, 6, 9)$  nie dopuszcza redukcji elementarnej. Dość szybko, wykorzystując nierówność Shestakova-Umirbaeva, można pokazać, że taki automorfizm nie dopuszcza redukcji postaci  $(F_1, F_2 - G(F_1, F_3), F_3)$ , ani redukcji elementarnej postaci  $(F_1, F_2, F_3 - G(F_1, F_2))$ . Dowód faktu, że taki automorfizm nie dopuszczałby również redukcji elementarnej postaci  $(F_1 - G(F_2, F_3), F_2, F_3)$  przebiega następująco. Najpierw należy zauważyć, że można założyć, że automorfizm  $F$  jest taki, że  $F(0) = 0$  oraz że formy liniowe wielomianów  $F_1, F_2, F_3$  są równe odpowiednio  $x_1, x_2, x_3$  (patrz twierdzenie 5.23 poniżej). Następnie korzystając z nierówności Shestakova-Umirbaeva dla  $\deg F_1 = \deg G(F_2, F_3)$  dostajemy, że  $\deg[F_2, F_3] = 2$ . Fakt ten, w połączeniu z tym, że  $F_i = x_i + \text{składniki wyższych stopni}$ , na mocy lematu 3.15 oznacza, że  $F_2, F_3$  są wielomianami dwóch zmiennych  $x_2, x_3$ . Zatem  $(F_2, F_3)$  zadaje odwzorowanie wielomianowe przestrzeni  $\mathbb{C}^2$ , które na mocy twierdzenia Moha [24] jest automorfizmem wielomianowym. Ponieważ  $6 \nmid 9$  oraz  $9 \nmid 6$ , więc dostajemy w ten sposób sprzeczność z twierdzeniem Junga-van der Kulka.

Podobnie przebiega dowód następującego twierdzenia.

**Twierdzenie 5.21** ([15], tw. 7.9). *Niech  $p$  będzie taką liczbą pierwszą, że  $5 \leq p \leq 35$ . Wtedy  $(p, 2(p-2), 3(p-2)) \notin \text{mdeg}(\text{Tame}(\mathbb{C}^3))$ .*

Na zakończenie tego podrozdziału odnotujmy, że hipoteza 5.14 została udowodniona dla  $p = 2$  [13],  $p = 3$  [12] oraz dla  $p = 5$  [15]. W sytuacji, gdy  $p = 7$ , jedynym

niewiadomym przypadkiem jest (7, 8, 12). Jeżeli  $p = 11$ , to pozostały trzy trójki do rozstrzygnięcia (11, 12, 18), (11, 14, 21) oraz (11, 16, 24).

Istnieje nadzieja, że wyniki rozdziału 4 będzie można użyć do rozstrzygnięcia wspomnianych wyżej przypadków. Nadzieja ta związana jest z faktem, że istnienie takiego automorfizmu typu tame implikowałoby istnienie pary wielomianów szczególnej postaci, dla których stopień nawiasu Poissona jest bardzo niski. Daje to możliwość, że taka para wielomianów nie istnieje. W następnym podrozdziale ideę tę zobrazujemy na przykładzie hipotetycznego automorfizmu typu tame o wielostopniu (7, 8, 12).

### 5.3. Przypadek (7, 8, 12) i $p$ -hipoteza

Podrozdział ten oparty jest na wynikach zawartych w pracy [8].

**Twierdzenie 5.22.** *Jeżeli istnieje automorfizm typu tame  $F = (F_1, F_2, F_3)$  przestrzeni  $\mathbb{C}^3$  o wielostopniu  $\text{mdeg } F = (7, 8, 12)$ , to istnieje taka para wielomianów  $P, Q \in \mathbb{C}[x, y, z]$ , że  $\deg[P, Q] = 3$  oraz*

$$P = y + P_2 + \cdots + P_8, \quad Q = z + Q_2 + \cdots + Q_{12}, \quad P_8, Q_{12} \neq 0, \quad (5.1)$$

gdzie  $P_i, Q_i$  są składowymi jednorodnymi stopnia  $i$ .

W dowodzie powyższego twierdzenia wykorzystywać będziemy następujący fakt.

**Twierdzenie 5.23** ([15], tw. 3.18). *Założmy, że  $(d_1, \dots, d_n) \neq (1, \dots, 1)$  będzie dowolnym ciągiem dodatnich liczb całkowitych. Jeżeli istnieje automorfizm typu tame  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , taki, że  $F$  dopuszcza redukcję elementarną oraz  $F(0, \dots, 0) = (0, \dots, 0)$  i  $\text{mdeg } F = (d_1, \dots, d_n)$ , to także istnieje automorfizm typu tame  $\tilde{F} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  taki, że  $\tilde{F}$  dopuszcza redukcję elementarną oraz  $\tilde{F}(0, \dots, 0) = (0, \dots, 0)$  i  $\text{mdeg } \tilde{F} = (d_1, \dots, d_n)$ , a jego część liniowa jest równa  $\text{id}_{\mathbb{C}^n}$ .*

*Dowód.* (twierdzenia 5.22) Dla dowodu nie wprost założmy, że istnieje hipotetyczny automorfizm typu tame  $F = (F_1, F_2, F_3)$  przestrzeni  $\mathbb{C}^3$  o wielostopniu  $\text{mdeg } F = (7, 8, 12)$ . Bez straty ogólności możemy zakładać, że  $F(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ . Na postawie twierdzenia 5.20 wiemy, że dopuszcza on redukcję elementarną, a korzystając z twierdzenia 5.23 możemy składowe tego hipotetycznego automorfizmu zapisać w następujący sposób

$$F_1 = x + F_{1,2} + \cdots + F_{1,7}, \quad F_{1,7} \neq 0, \quad (5.2)$$

$$F_2 = y + F_{2,2} + \cdots + F_{2,8}, \quad F_{2,8} \neq 0, \quad (5.3)$$

$$F_3 = z + F_{3,2} + \cdots + F_{3,12}, \quad F_{3,12} \neq 0, \quad (5.4)$$

gdzie  $F_{i,j}$  oznacza składową jednorodną stopnia  $j$  wielomianu  $F_i$ .

Założmy, że nasz hipotetyczny automorfizm  $F = (F_1, F_2, F_3)$  dopuszcza redukcję elementarną postaci  $(F_1, F_2 - G(F_1, F_3), F_3)$ , czyli gdzie przy pomocy pierwszej i trzeciej składowej zredukowany jest stopień drugiej składowej, zatem  $\deg(F_2 - G(F_1, F_3)) < \deg F_2$ . W takim razie formy wiodące  $F_2$  oraz  $G(F_1, F_3)$  muszą być sobie równe, a z tego wynika, że

$$\deg G(F_1, F_3) = \deg F_2 = 8. \quad (5.5)$$

Ponieważ  $F_1, F_3$  są algebraicznie niezależne,  $\bar{F}_1 \notin k[\bar{F}_3]$ ,  $\bar{F}_3 \notin k[\bar{F}_1]$  oraz

$$p = \frac{\deg F_1}{\text{nwd}(\deg F_1, \deg F_3)} = \frac{7}{\text{nwd}(7, 12)} = 7,$$

więc z twierdzenia 5.11 (i uwagi pod tym twierdzeniem) mamy

$$\begin{aligned} \deg G(F_1, F_3) &\geq q(p \deg F_3 - \deg F_3 - \deg F_1 + \deg[F_1, F_3]) + r \deg F_3 \quad (5.6) \\ &= q(7 \cdot 12 - 12 - 7 + \deg[F_1, F_3]) + 12r, \end{aligned}$$

gdzie  $\deg_y G(x, y) = 7q + r$  oraz  $0 \leq r < 7$ . Ponieważ  $65 + \deg[F_1, F_3] > 8$  oraz  $12 > 8$ , więc na podstawie (5.5) i (5.6) dostajemy, że  $q = r = 0$ . Wtedy  $\deg_y G(x, y) = 0$ , a stąd otrzymujemy, że  $G(F_1, F_3) = G(F_1)$ . To prowadzi do sprzeczności, ponieważ  $\deg G(F_1) = \deg G(F_1, F_3) = 8$  oraz  $\deg G(F_1) \in 7\mathbb{N}$ . Zatem nasz hipotetyczny automorfizm nie dopuszcza redukcji elementarnej ze względu na drugą składową.

Założmy, że nasz hipotetyczny automorfizm dopuszcza redukcję elementarną ze względu na trzecią składową, czyli redukcję postaci  $(F_1, F_2, F_3 - G(F_1, F_2))$ . Rozumowanie przebiega w podobny sposób jak w powyżej omówionym przypadku. Ponieważ  $\deg(F_3 - G(F_1, F_2)) < \deg F_3$ , więc  $\deg G(F_1, F_2) = \deg F_3 = 12$ . Analogicznie jak powyżej, dla pary  $F_1, F_2$  mamy  $p = \frac{7}{\text{nwd}(7, 8)} = 7$  oraz

$$\deg G(F_1, F_2) \geq q(7 \cdot 8 - 8 - 7 + \deg[F_1, F_2]) + 8r,$$

gdzie  $\deg_y G(x, y) = 7q + r$  oraz  $0 \leq r < 7$ . Ponieważ  $41 + \deg[F_1, F_2] > 12$ , a  $2 \cdot 8 > 12$ , więc  $q = 0$  i  $r \leq 1$ . Oznacza to, że  $\deg_y G(x, y) \leq 1$ , a stąd  $G(F_1, F_2) = g_0(F_1) + F_2 g_1(F_1)$ , gdzie  $g_0, g_1$  są wielomianami zależnymi od jednej zmiennej. Wynika z tego, że  $\deg G(F_1, F_2) \in 7\mathbb{N} \cup (8 + 7\mathbb{N})$ , co prowadzi do sprzeczności, ponieważ  $\deg G(F_1, F_2) = \deg F_3 = 12 \notin 7\mathbb{N} \cup (8 + 7\mathbb{N})$ .

Teraz możemy stwierdzić, że jeżeli istnieje taki hipotetyczny automorfizm typu tame przestrzeni  $\mathbb{C}^3$  o wielostopniu  $\text{mdeg } F = (7, 8, 12)$  spełniający równości (5.2) - (5.4), to dopuszcza on redukcję elementarną ze względu na pierwszą składową, czyli redukcję postaci  $(F_1 - G(F_2, F_3), F_2, F_3)$ . Zatem  $\deg G(F_2, F_3) = \deg F_1 = 7$ . Podobnie jak w dwóch poprzednich przypadkach, dla pary  $F_2, F_3$ , mamy  $p = \frac{8}{\text{nwd}(8, 12)} = \frac{8}{4} = 2$  oraz

$$\begin{aligned} \deg G(F_2, F_3) &\geq q(p \deg F_3 - \deg F_3 - \deg F_2 + \deg[F_2, F_3]) + r \deg F_3 \quad (5.7) \\ &= q(2 \cdot 12 - 12 - 8 + \deg[F_2, F_3]) + 12r \\ &= q(4 + \deg[F_2, F_3]) + 12r, \end{aligned}$$

gdzie  $\deg_y G(x, y) = 2q + r$  oraz  $0 \leq r < 2$ . Ponieważ  $12 > 7$ , więc dostajemy  $r = 0$ . Jeżeli założymy, że  $\deg[F_2, F_3] \geq 4$ , to  $4 + \deg[F_2, F_3] > 7$ , a to prowadzi do wniosku, że  $q = 0$ . Wtedy  $\deg_y G(x, y) = 0$ , a stąd otrzymujemy, że  $G(F_2, F_3) = G(F_2)$ . Prowadzi to do sprzeczności, ponieważ  $\deg G(F_2) \in 8\mathbb{N}$ , a  $7 \notin 8\mathbb{N}$ .

Tak więc, jeżeli istniałby taki hipotetyczny automorfizm, to musiałby dodatkowo spełniać warunek  $\deg[F_2, F_3] \leq 3$ . Składowe  $F_2$  i  $F_3$  są algebraicznie niezależne, zatem mamy do rozważenia dwa przypadki:  $\deg[F_2, F_3] = 2$  lub  $\deg[F_2, F_3] = 3$ . Teraz zajmijmy się przypadkiem, gdy  $\deg[F_2, F_3] = 2$ . W takim razie ze względu na postać  $F_2, F_3$  oraz fakt, że  $\deg[F_2, F_3] = 2$  mielibyśmy spełnione założenia lematu 3.15,

z którego wnioskujemy, że  $F_2, F_3$  są wielomianami zależnymi od dwóch zmiennych  $y, z$ . Zatem para wielomianów  $F_2, F_3$  zadawałaby automorfizm przestrzeni  $\mathbb{C}^2$  o wielostopniu (8, 12). To z kolei prowadziłoby do sprzeczności z twierdzeniem Junga i van der Kulka, ponieważ  $8 \nmid 12$ , a także  $12 \nmid 8$ . Wykluczaliśmy możliwość, że  $\deg[F_2, F_3] = 2$ , co kończy dowód twierdzenia.  $\square$

Na podstawie powyższego twierdzenia jedynym krokiem, który pozostał do udowodnienia tego, że nie istnieje automorfizm typu tame o wielostopniu (7, 8, 12), a w konsekwencji, że  $p$ -hipoteza jest prawdziwa także dla  $p = 7$ , jest udowodnienie, że para wielomianów  $P$  i  $Q$ , o której mowa w tym twierdzeniu nie istnieje.

Na zakończenie zaprezentujemy następujące dwa twierdzenia pokazujące, że hipoteza 5.14 nie jest prawdziwa w sytuacji gdy  $d_1$  jest liczbą złożoną.

**Twierdzenie 5.24.** *Dla dowolnej liczby złożonej  $d_1 = ab$ , gdzie  $a, b > 1$ , istnieje nieskończenie wiele takich par liczb całkowitych  $(d_2, d_3) \in \mathbb{N}_+^2$ , że  $d_3 > d_2 > d_1$ ,  $d_1 \nmid d_2$ ,  $\text{nwd}(d_1, d_2) = a$ ,  $d_3 \notin d_1\mathbb{N} + d_2\mathbb{N}$  oraz  $(d_1, d_2, d_3) \in \text{mdeg}(\text{Tame}(\mathbb{C}^3))$ .*

*Dowód.* Niech  $m$  będzie dodatnią liczbą całkowitą oraz niech  $d_2 = (mb + 1)a$ . Zatem  $d_1 \nmid d_2$  oraz  $\text{nwd}(d_1, d_2) = \text{nwd}(ab, (mb + 1)a) = \text{nwd}(ab, mab + a) = \text{nwd}(ab, a) = a$ . Zauważmy, że  $d_1(mb + 1) = \text{nww}(d_1, d_2) = d_2b$  i rozważmy następujący wielomian

$$\begin{aligned} & (x + z^r + z^{d_1})^{mb+1} - (y + z^{d_2})^b \\ &= \sum_{l=0}^{mb+1} \binom{mb+1}{l} (x + z^r)^l z^{\text{nww}(d_1, d_2) - ld_1} - \sum_{l=0}^b \binom{b}{l} y^l z^{\text{nww}(d_1, d_2) - ld_2}. \end{aligned}$$

Ponieważ dla  $l = 0$  w obydwóch powyższych sumach uzyskujemy ten sam składnik  $z^{\text{nww}(d_1, d_2)}$ , więc możemy napisać

$$\begin{aligned} & (x + z^r + z^{d_1})^{mb+1} - (y + z^{d_2})^b \\ &= \sum_{l=1}^{mb+1} \binom{mb+1}{l} (x + z^r)^l z^{\text{nww}(d_1, d_2) - ld_1} - \sum_{l=1}^b \binom{b}{l} y^l z^{\text{nww}(d_1, d_2) - ld_2}. \end{aligned}$$

Z założeń twierdzenia mamy, że  $d_1, d_2 > 1$ , a zatem

$$\deg \left( \sum_{l=1}^b \binom{b}{l} y^l z^{\text{nww}(d_1, d_2) - ld_2} \right) \leq \text{nww}(d_1, d_2) - d_2 + 1.$$

Natomiast jeśli weźmiemy  $r \in \{1, \dots, d_1 - 1\}$ , to zachodzi następująca nierówność

$$\begin{aligned} \deg \left( \sum_{l=2}^{mb+1} \binom{mb+1}{l} (x + z^r)^l z^{\text{nww}(d_1, d_2) - ld_1} \right) &\leq \text{nww}(d_1, d_2) - 2d_1 + 2r \\ &< \text{nww}(d_1, d_2) - d_1 + r \end{aligned}$$

oraz

$$\deg \left( \binom{mb+1}{1} (x + z^r) z^{\text{nww}(d_1, d_2) - d_1} \right) = \text{nww}(d_1, d_2) - d_1 + r.$$

Ponieważ  $d_1 < d_2$ , a  $r \geq 1$ , więc  $\text{nww}(d_1, d_2) - d_1 + r > \text{nww}(d_1, d_2) - d_2 + 1$ . Ostatecznie dostajemy następującą równość

$$\deg \left( (x + z^r + z^{d_1})^{mb+1} - (y + z^{d_2})^b \right) = \text{nww}(d_1, d_2) - d_1 + r.$$

Teraz przyjmijmy, że

$$F_1(x, y, z) = (x + z^r + z^{d_1}, y + z^{d_2}, z)$$

oraz

$$F_2(u, v, w) = \left( u, v, w + (u^{kb+1} - v^b) u^n \right).$$

Wtedy

$$\text{mdeg}(F_2 \circ F_1) = (d_1, d_2, d_3),$$

gdzie

$$d_3 = \text{nww}(d_1, d_2) - d_1 + r + nd_1.$$

Wiemy, że  $a \mid \text{nww}(d_1, d_2) - d_1 + nd_1$ . Zatem  $a \nmid d_3$ , wtedy i tylko wtedy, gdy  $a \nmid r$ . Przykładowo, gdy  $r \in \{1, \dots, d_1 - 1\} \setminus \{a, 2a, \dots, (b-1)a\}$  dostajemy  $a \nmid d_3$ . Wtedy  $d_3 \notin d_1\mathbb{N} + d_2\mathbb{N}$ , bo  $a = \text{nwd}(d_1, d_2)$  dzieli każdy element zbioru  $d_1\mathbb{N} + d_2\mathbb{N}$ . Zauważmy, że dla różnych par liczb całkowitych  $m, n$  otrzymujemy różne pary  $(d_2, d_3)$ .  $\square$

**Twierdzenie 5.25.** *Niech  $d_1, d_2$  będą dodatnimi liczbami całkowitymi, które nie są względnie pierwsze, oraz niech  $d_2 > d_1 > 1$  i  $d_1 \nmid d_2$ . Wtedy zbiór*

$$\text{mdeg}(\text{Tame}(\mathbb{C}^3)) \cap \{(d_1, d_2, d_3) \mid d_3 \notin d_1\mathbb{N} + d_2\mathbb{N}\}$$

*ma nieskończenie wiele elementów.*

*Dowód.* Niech  $d = \text{nwd}(d_1, d_2)$  oraz niech  $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2$  będą takimi liczbami, że  $d_1 = \tilde{d}_1 d$  a  $d_2 = \tilde{d}_2 d$ . Rozważmy następujący wielomian

$$\begin{aligned} & (x + z^r + z^{d_1})^{\tilde{d}_2} - (y + z^{d_2})^{\tilde{d}_1} \\ &= \sum_{l=1}^{\tilde{d}_2} \binom{\tilde{d}_2}{l} (x + z^r)^l z^{\text{nww}(d_1, d_2) - ld_1} - \sum_{l=1}^{\tilde{d}_1} \binom{\tilde{d}_1}{l} y^l z^{\text{nww}(d_1, d_2) - ld_2} \end{aligned}$$

oraz automorfizm wielomianowy  $F_2 \circ F_1$ , gdzie

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= (x + z^r + z^{d_1}, y + z^{d_2}, z), \\ F_2(u, v, w) &= \left( u, v, w + (u^{\tilde{d}_2} - v^{\tilde{d}_1}) u^n \right). \end{aligned}$$

Z założeń twierdzenia wiemy, że  $d_2 > d_1 > 1$ . Zatem analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 5.24 uzyskujemy, że jeśli  $r \in \{1, \dots, d_1 - 1\} \setminus \{d, 2d, d_1 - d\}$ , to

$$\text{mdeg}(F_2 \circ F_1) = (d_1, d_2, \text{nww}(d_1, d_2) - d_1 + r + nd_1)$$

oraz  $\text{nww}(d_1, d_2) - d_1 + r + nd_1 \notin d_1\mathbb{N} + d_2\mathbb{N}$ . Tak więc, otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \{(d_1, d_2, \text{nww}(d_1, d_2) - d_1 + r + nd_1) \mid n \in \mathbb{N}\} \\ & \subset \text{mdeg}(\text{Tame}(\mathbb{C}^3)) \cap \{(d_1, d_2, d_3) \mid d_3 \notin d_1\mathbb{N} + d_2\mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

$\square$

## Zakończenie

W rozprawie badaliśmy nawias Poissona pary wielomianów głównie pod kątem jego zastosowań. W kontekście rozważań dotyczących tak zwanej  $p$ -hipotezy, której wypowiedź pozwolimy sobie poniżej jeszcze raz przywołać (patrz hipoteza 5.14):

**Hipoteza.** *Jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą,  $d_3 \geq d_2 \geq p$ , to  $(p, d_2, d_3)$  jest wielostopniem automorfizmu typu tame wtedy i tylko wtedy, gdy  $p \mid d_2$  lub  $d_3 \in p\mathbb{N} + d_2\mathbb{N}$ ,*

warto zwrócić uwagę na wyniki dotyczące przedstawienia składowych jednorodnych jednego wielomianu przy pomocy składowych jednorodnych drugiego z wielomianów, gdy stopień nawiasu Poissona tej pary jest odpowiednio niski (patrz rozdział 4). Jak wiadomo (patrz wniosek 5.18, twierdzenie 5.21 i akapit poniżej), w przypadku, gdy  $p = 7$ , pozostał do rozważenia wielostopień  $(7, 8, 12)$ . Ponadto, na podstawie twierdzenia 5.22 od udowodnienia  $p$ -hipotezy dla  $p = 7$  dzieli nas jeden krok. Mianowicie, wystarczy pokazać, że nie istnieje para wielomianów postaci  $F_2 = y + F_{2,2} + \dots + F_{2,8}$  oraz  $F_3 = z + F_{3,2} + \dots + F_{3,12}$ , gdzie  $F_{2,8}, F_{3,12} \neq 0$ , dla której  $\deg[F_2, F_3] = 3$ . Jak już wspomnieliśmy, przydatne wydają się być wyniki z rozdziału 4. Dzięki nim możemy przedstawić wszystkie składowe jednorodne wielomianu  $F_3$  przy pomocy składowych jednorodnych wielomianu  $F_2$ . To może okazać się pomocne przy rozstrzygnięciu istnienia hipotetycznej pary  $F_2, F_3$ , o której mowa wyżej. Wydaje się, że podobne postępowanie będzie można zastosować w przypadku  $p$ -hipotezy dla  $p = 11$ , gdzie jak wiemy zostały do rozpatrzenia następujące wielostopnie  $(11, 12, 18)$ ,  $(11, 14, 21)$  oraz  $(11, 16, 24)$ .

Istnieje również nadzieja, że wyniki uzyskane w rozdziale 4 mogą się przydać w rozważaniach dotyczących istnienia hipotetycznych automorfizmów typu tame o wielostopniu  $(4, 4l + 1, 4l + 2)$ , gdzie  $l \in \mathbb{N}_+$ .

Interesujące wydaje się również uogólnienie rozważań dotyczących równania  $[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s]$  (patrz podrozdział 3.2). Ponieważ równanie takie równoważne jest równaniu  $d(L_1^r) \wedge dP_1 = d(P_2) \wedge d(L_2^s)$ , więc jednym z naturalnych kierunków uogólnienia jest rozważanie równania postaci

$$d(L_1^{r_1}) \wedge d(L_2^{r_2}) \wedge dP_1 = d(\tilde{L}_1^{s_1}) \wedge d(\tilde{L}_2^{s_2}) \wedge dP_2,$$

gdzie  $L_1, L_2, \tilde{L}_1, \tilde{L}_2 \in k[X]$  są danymi formami liniowymi,  $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{N}_+$  danymi stałymi, a  $(P_1, P_2) \in k[X]^2$  poszukiwaną parą wielomianów.

## Spis definicji

- algebra (nad ciałem) .....	str. 20
- algebra Liego, nawias Liego .....	str. 13
- algebra Poissona, nawias Poissona .....	str. 31
- algebra wolna o zbiorze wolnych generatorów .....	str. 21
- automorfizm afiniczny .....	str. 10
- automorfizm elementarny .....	str. 10
- automorfizm liniowy .....	str. 10
- automorfizm trójkątny .....	str. 11
- automorfizm typu de Jonquières .....	str. 11
- automorfizm typu tame .....	str. 11
- automorfizm typu wild .....	str. 11
- element bezkwadratowy .....	str. 12
- grupoid .....	str. 17
- grupoid wolny .....	str. 17
- homomorfizm algebr nad ciałem .....	str. 21
- homomorfizm algebr Poissona .....	str. 31
- homomorfizm grupoidów .....	str. 17
- ideał generowany lewostronny (prawostronny, dwustronny) .....	str. 24
- ideał lewostronny (prawostronny) .....	str. 23
- odwracalne odwzorowanie wielomianowe nad ciałem .....	str. 10
- odwzorowanie wielomianowe nad ciałem .....	str. 9
- podalgebra (Liego) algebry Liego .....	str. 15
- $p$ -zredukowana para wielomianów .....	str. 78
- redukcja elementarna .....	str. 78
- redukcja typu $I$ .....	str. 78
- redukcja typu $II$ .....	str. 79
- redukcje typu $III$ i $IV$ .....	str. 79
- $R$ -moduł (wolny) .....	str. 11
- różniczkowanie, $R$ -różniczkowanie .....	str. 11
- $r$ -wymiarowy system zmiennych .....	str. 52
- stopień (wielostopień) odwzorowania wielomianowego .....	str. 9
- układ współrzędnych $k[x_1, \dots, x_n]$ , współrzędna .....	str. 10
- wolna algebra Poissona .....	str. 32
- zredukowana ( $*$ -zredukowana) para wielomianów .....	str. 78

# Bibliografia

- [1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, California, 1969.
- [2] J.-E. Björk, *Rings of Differential Operators*, North-Holland Library, Vol.21, 1979.
- [3] A. van den Essen, *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture*, Birkhäuser, Basel, 2000.
- [4] A. van den Essen and H. H. Vui and H. Kraft and P. Russell and D. Wright, *Polynomial Automorphisms and Related Topics*, Lecture Notes of the International School and Workshop ICPA2006, Institute of Mathematics, Hanoi, Vietnam, October 2006.
- [5] G. Freudenburg, *Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations*, Springer, Berlin, 2006.
- [6] D. Holik and M. Karaś, *A note on the solution set of the equation  $[L_1^r, P_1] = [P_2, L_2^s]$  for given linear forms  $L_1, L_2$* , Bull. Polish Acad. Sci. Math. **69** (2021), no. 1, 11-20.
- [7] D. Holik and M. Karaś, *Dependence between homogeneous components of polynomials with small degree of Poisson bracket*, Ann. Pol. Math. **128** (2022), no. 2, 121-142.
- [8] D. Holik and M. Karaś,  *$p$ -Conjecture for tame automorphisms of  $\mathbb{C}^3$* , Algebra Discrete Math. **39** (2025), no. 1, 97–109.
- [9] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, New York, 1980.
- [10] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Dover Publications, Inc. New York, 1979.
- [11] H. W. E. Jung, *Über ganze birationale Transformationen der Ebene*, J.Reine Angew Math. **184** (1942), 161-174.
- [12] M. Karaś, *Tame automorphisms of  $\mathbb{C}^3$  with multidegree of the form  $(3, d_2, d_3)$* , J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), 2144–2147.
- [13] M. Karaś, *There is no tame automorphism of  $\mathbb{C}^3$  with multidegree  $(3, 4, 5)$* , Proc. Am. Math. Soc. **139** (2011), no. 3, 769-775.
- [14] M. Karaś, *Tame automorphisms of  $\mathbb{C}^3$  with multidegree of the form  $(p_1, p_2, d_3)$* , Bull. Polish Acad. Sci. Math. **59** (2011), 27–32.
- [15] M. Karaś, *Multidegrees of tame automorphisms of  $\mathbb{C}^n$* , Dissertationes Mathematicae **477** (2011), 1-55.
- [16] M. Karaś and J. Zygadło, *On multidegree of tame and wild automorphisms of  $\mathbb{C}^3$* , J. Pure Appl. Algebra **215** (2011), 2843–2846.
- [17] W. van der Kulk, *On polynomial rings in two variables*, Nieuw Archief voor Wiskunde **3** (1953), no. 1, 33-41.

- 
- [18] S. Kuroda, *A generalization of the Shestakov-Umirbaev inequality*, J. Math. Soc. Japan **60** (2008), no. 2, 495-510.
  - [19] C. Laurent-Gengoux and A. Pichereau and P. Vanhaecke, *Poisson Structures*, Springer, Berlin, 2013.
  - [20] L. Makar-Limanov, *Locally nilpotent derivations, a new ring invariant and applications*, Lecture notes.
  - [21] L. Makar-Limanov and J.-T. Yu, *Degree estimate for subalgebras generated by two elements*, J. Eur. Math. Soc. **10** (2008), 533–541.
  - [22] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, London, 1980.
  - [23] R. Mauldin (ed.), *The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Café*, Birkhäuser, Boston, 1979.
  - [24] T. Moh, *On the Jacobian Conjecture and the configurations of roots*, J. Reine Angew. Math. **340** (1983), 140-212.
  - [25] A. Mostowski and M. Stark, *Introduction to Higher Algebra*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
  - [26] M. Nagata, *On the automorphism group of  $k[x, y]$* , Lectures in Math., Kyoto Univ., Kinokuniya, Tokyo, 1972. MR 49:2731
  - [27] A. Nowicki, *On the Jacobian equation  $J(f, g) = 0$  for polynomials in  $k[x, y]$* , Nagoya Math. J. **109** (1988), 151–157.
  - [28] F. L. Pritchard, *Polynomial mappings with Jacobian determinant of bounded degree*. Arch. Math. **48** (1987), no. 6, 495-504.
  - [29] I. P. Shestakov and U. U. Umirbaev, *The Nagata automorphism is wild*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **100** (2003), no. 22, 12561-12563.
  - [30] I. P. Shestakov and U. U. Umirbaev, *Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials*, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), no. 1, 181-196.
  - [31] I. P. Shestakov and U. U. Umirbaev, *The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables*, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), no. 1, 197–227.
  - [32] M. K. Smith, *Stably tame automorphisms*, J. Pure Appl. Algebra **58** (1989), 209-212.
  - [33] U. U. Umirbaev and J-T. Yu *The strong Nagata conjecture*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **101** (2004), no. 13, 4352-4355.