AUTOMATYKA • 2008 • Tom 12 • Zeszyt 3

Lidia Dutkiewicz*, Edyta Kucharska*

Model algebraiczno-logiczny problemu planowania tras dostaw dla *m* komiwojażerów

1. Wprowadzenie

Celem artykułu jest przedstawienie idei ogólnego schematu modelu algebraiczno-logicznego na przykładzie problemu planowania tras dostaw do firm wielooddziałowych, będącego modyfikacją powszechnie znanego problemu *m*-komiwojażerów. Model algebraiczno-logiczny jest modelem w przestrzeni stanów i przeznaczony jest do optymalizacji procesów decyzyjnych. Równocześnie model ten odpowiada pewnej formalnej postaci wieloetapowego procesu decyzyjnego połączonego z symulacją dyskretnego procesu.

Formalny opis problemu w postaci modelu algebraiczno-logicznego umożliwia nie tylko analizę jego matematycznych własności. Stanowi także postawę algorytmu symulacji, pozostając jednak niezależny od konkretnego języka programowania i struktury danych. Daje więc możliwość porównania efektywności różnych algorytmów danego problemu oraz weryfikacji programów stworzonych na bazie modelu.

Ogólny schemat modelu algebraiczno-logicznego stanowi równocześnie pewien sposób reprezentacji wiedzy o problemie. W ramach tego schematu możliwe jest stworzenie wielu różnych, ale równoważnych modeli algebraiczno-logicznych problemu. Dlatego też, tworzenie modelu musi poprzedzić szczegółowa analiza rozpatrywanego problemu, a ostateczna postać modelu algebraiczno-logicznego, jak każdego modelu matematycznego, zależy od celu optymalizacji.

Ogólny schemat modelu algebraiczno-logicznego zaproponowano w [2, 3]. Schemat ten powstał na podstawie metody logiczno-algebraicznej, wprowadzonej przez Z. Bubnickiego [1]. Istotą klasy modeli algebraiczno-logicznych jest fakt, że zarówno współrzędne stanu, jak i decyzje (sterowania) mogą być zmiennymi indywiduowymi lub zmiennymi wyższego rzędu. Funkcja przejścia i ograniczenia mogą natomiast być zdefiniowane zarówno za pomocą zależności algebraicznych, jak i logicznych.

* Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Jeśli przyjmiemy oznaczenia: X – zbiór stanów właściwych, $T \subset \boldsymbol{R}^{+}$ – podzbiór nieujemnych liczb rzeczywistych reprezentujących chwile czasowe, $S = X \times T$ – zbiór stanów uogólnionych, U – zbiór decyzji, to model można zdefiniować jako czwórkę:

$$P = (s_0,\ f,\ S_N, S_G\ ) \tag{1}$$

gdzie:

$s_0 = (x_0, t_0\ ),\ s_0 \in S$ – uogólniony stan początkowy

$f\colon U \times S \to S$ – funkcja częściowa (określona tylko dla pewnych par $(u, s) \in U \times S$), zwana funkcją przejścia

$S_N \subset S$ – zbiór uogólnionych stanów niedopuszczalnych,

$S_G \subset S$ – niepusty zbiór uogólnionych stanów docelowych.

Funkcja przejścia jest zdefiniowana za pomocą dwóch funkcji:

$$f = (f_x, f_t),$$

gdzie:

$f_x\colon U \times X \times T \to X$ – określa następny stan właściwy,

$f_t\colon U \times X \times T \to T$ – określa następny moment czasu i spełnia następujący warunek: $\Delta t = f_t(u, x, t) - t$ ma wartość dodatnią i skończoną.

Zdefiniowanie funkcji przejścia jako funkcji częściowej pozwala na uwzględnienie wszystkich ograniczeń dotyczących decyzji sterujących za pomocą tzw. zbiorów sterowań możliwych w stanie s, oznaczonych $U_p(s)$. Jeśli decyzja u jest możliwa (sensowna) w stanie s, to funkcja przejścia jest określona dla tej pary (u, s). W przeciwnym wypadku nie jest określona. Ograniczenia dotyczące stanów uogólnionych definiujące S_N, można również uwzględnić za pomocą zbiorów sterowań dopuszczalnych w stanie s, oznaczonych $U_d(s)$.

Zadanie poszukiwania rozwiązania dopuszczalnego polega na znalezieniu ciągu decyzji wyznaczającego trajektorię dopuszczalną. Zadanie optymalizacji sterowania procesem polega na znalezieniu takiego ciągu sterowań dopuszczalnych, który ekstremalizuje pewien funkcjonał Q. Zadanie optymalizacji określone jest zatem przez model procesu oraz funkcjonał Q i zapisywane jest jako para (P, Q).

2. Opis problemu

W artykule rozważany jest problem zaplanowania tras dostaw dla firmy dostawczej, która współpracuje z wieloma odbiorcami, w tym z firmami wielooddziałowymi. Oddziały firm rozproszone są po całym obsługiwanym obszarze. W firmie dostawczej zatrudniona jest pewna liczba dostawców (komiwojażerów), którzy mają dostarczyć towar. W przypadku firm wielooddziałowych najpierw należy odwiedzić główną siedzibę (w celu negocjacji, ustalenia warunków sprzedaży dotyczących wszystkich oddziałów tej firmy itp.). Tak postawiony problem można potraktować jako zmodyfikowany problem m-komiwojażerów i w związku z tym sformułować następująco:

Dany jest zespół m komiwojażerów oraz zbiór $n+1$ miast, przy czym każde miasto reprezentuje siedzibę firmy lub jej oddział. Zadaniem komiwojażerów jest odwiedzenie tych miast. Znane są odległości między poszczególnymi miastami. Każde miasto (oprócz wyróżnionego miasta początkowego – nasza firma dostawcza) musi zostać odwiedzone dokładnie jeden raz, przy czym odwiedzającym może być dowolny komiwojażer z zespołu. Każdy komiwojażer ma wyjechać z miasta początkowego, odwiedzić pewną liczbę miast, a następnie powrócić do miasta początkowego. W rezultacie wszystkie miasta powinny zostać odwiedzone i każdy z komiwojażerów powinien odwiedzić przynajmniej jedno miasto. Dodatkowo żaden komiwojażer nie może wyruszyć do oddziału firmy, zanim nie zostanie odwiedzona siedziba tej firmy. Natomiast po odwiedzeniu siedziby firmy, każdy z komiwojażerów z zespołu może odwiedzić dowolny jej oddział. W rezultacie wszystkie miasta powinny zostać odwiedzone i każdy z komiwojażerów powinien odwiedzić przynajmniej jedno miasto.

Celem optymalizacji jest takie zaplanowanie tras komiwojażerów, aby suma długości wszystkich tras była minimalna.

W pracy przyjęto następujące oznaczenia: zbiór komiwojażerów oznaczony został poprzez $M = \{1, 2, ..., m\}$, zbiór miast poprzez $N = \{0,1,2, ..., n\}$, miasto początkowe jako 0.

Ponadto zdefiniowany został ciąg $E = (e_1, e_2, ..., e_y)$, którego poszczególne wyrazy reprezentują siedziby firm i firmy jednooddziałowe. Każdemu wyrazowi tego ciągu e_j (dla $j = 1, ..., y$) odpowiada jeden zbiór F_j miast reprezentujących oddziały danej firmy, przy czym dla firm jednooddziałowych zbiór ten jest pusty.

Odległości między miastami przedstawione są w postaci macierzy odległości A, której poszczególne elementy a_{ij} określają odległość pomiędzy miastem i oraz miastem j, gdzie $i, j = 0, 1, 2, ..., n$ oraz $i \neq j$. Przyjmuje się, że elementy a_{ii} wynoszą nieskończoność. Najdłuższa z odległości pomiędzy miastami została oznaczona jako D.

Ponadto zakłada się, że wszyscy komiwojażerowie podróżują z tą samą, jednostkową prędkością, zatem wartości czasu przejazdu i pokonywanej w tym czasie drogi są takie same.

3. Model algebraiczno-logiczny rozważanego problemu

W niniejszym rozdziale zaproponowany został pełny model algebraiczno-logiczny rozważanego problemu. Najpierw przedstawiona została postać stanu systemu, zbiory stanów docelowych oraz stanów niedopuszczalnych. Dla danego stanu zostały też wyodrębnione pewne zbiory elementów systemu o wspólnych cechach, przydatne dla definiowania pozostałych składników modelu. Następnie określona została postać decyzji, zbiór decyzji możliwych do podjęcia w poszczególnych stanach oraz zbiór decyzji dopuszczalnych. Na koniec przedstawione zostały elementy składające się na funkcję przejścia, czyli pokazany został sposób wyznaczenia momentu wystąpienia kolejnego stanu oraz podany szczegółowy wzór na określenie wartości współrzędnych stanu właściwego.

3.1. Stan systemu

Dla rozważanego problemu stan systemu $s = (x, t)$ w danej chwili czasu t można opisać poprzez aktualny stan wszystkich komiwojażerów oraz zbiór odwiedzonych miast. Stan właściwy systemu x jest określany następująco:

$$x = (x^0, x^1, x^2, ..., x^m) \tag{2}$$

gdzie:

x^0 – zbiór miast, które zostały odwiedzone do chwili t,
x^k – stan k-tego komiwojażera, dla $k = 1, 2, ..., m$.

W danej chwili stan komiwojażera może być następujący: może on albo jechać do następnego miasta, albo stać w ostatnio odwiedzonym mieście. Zatem w pierwszym przypadku konieczne jest podanie informacji, do którego miasta komiwojażer się przemieszcza oraz kiedy tam dotrze, oraz jaki odcinek drogi pozostał mu do przebycia. Natomiast jeżeli komiwojażer aktualnie stoi, to istotna jest informacja, w którym jest to mieście. Uwzględniając dodatkowy warunek, że każdy komiwojażer musi odwiedzić przynajmniej jedno miasto, kodowanie stanu poszczególnych komiwojażerów jest następujące:

$$x^k = (i, d, B) \tag{3}$$

gdzie poszczególne zmienne przyjmują następujące wartości:

$i \in N$ – numer miasta, do którego komiwojażer jedzie, lub miasto, w którym komiwojażer stoi,
$d \in [0, D)$ – długość odcinka drogi, jaka pozostała komiwojażerowi do dotarcia do miasta i; w przypadku postoju komiwojażera przyjmowana jest wartość 0.
$B \in \{0,1\}$ – informacja o tym, czy komiwojażer odwiedził przynajmniej jedno miasto, gdzie: 1 oznacza, że komiwojażerowi wyznaczono dotychczas co najmniej jedno miasto do odwiedzenia; 0 oznacza, że komiwojażer jeszcze nie wyjechał z miasta początkowego.

Stan początkowy $s_0 = (x_0, t_0)$ systemu jest następujący:

$$x_0 = (x_0^0, x_0^1, x_0^2, ..., x_0^m), \quad t_0 = 0 \tag{4}$$

W stanie początkowym $t_0 = 0$ wszyscy komiwojażerowie stoją w wyróżnionym mieście początkowym 0, zatem:

$$x_0^k = (0, 0, 0), \quad k = 1, 2, ..., m \tag{5}$$

Ponadto w chwili t_0 żadne miasto nie zostało odwiedzone, a więc zbiór x^0 jest zbiorem pustym:

$$x_0^0 = \varnothing \tag{6}$$

Zbiór stanów niedopuszczalnych S_N

W zbiorze stanów niedopuszczalnych znajdują się stany związane z przekroczeniem warunków ograniczających dla danego zadania. W rozważanym problemie stanem niedopuszczalnym jest:

- stan, w którym wszystkie miasta zostały odwiedzone, a jednocześnie przynajmniej jeden komiwojażer nie odwiedził żadnego z miast;
- stan, w którym wszyscy komiwojażerowie powrócili do miasta początkowego, a nie wszystkie miasta zostały odwiedzone.

$$S_N = \left\{ \begin{array}{l} s=(x,t): \quad \left(x^0(s) = N \setminus \{0\} \wedge \exists_{k\in M} \left(x^k(s) = (0,0,0) \right) \right) \vee \\ \qquad\qquad \vee \left(x^0(s) \neq N \setminus \{0\} \wedge \forall_{k\in M} \left(x^k(s) = (0,0,1) \right) \right) \end{array} \right\} \tag{7}$$

Zbiór stanów docelowych S_G

Celem komiwojażerów jest odwiedzenie wszystkich miast i powrót do miasta początkowego 0. Zbiór stanów docelowych S_G jest zatem następujący:

$$S_G = \left\{ s=(x,t): \ s \notin S_N \ \wedge \ x^0(s) = N \setminus \{0\} \ \wedge \ \forall_{k\in M} \left(x^k = (0,0,1) \right) \right\} \tag{8}$$

Charakterystyczne klasy stanów komiwojażerów

Poniżej zdefiniowane zostały charakterystyczne klasy stanów komiwojażera *k*, charakterystyczne zbiory komiwojażerów oraz charakterystyczne podzbiory miast. Elementy te ułatwiają analizę problemu i są przydatne do definiowania pozostałych składników modelu.

Analizując postać stanu systemu, można wyróżnić następujące charakterystyczne klasy stanów komiwojażera *k*:

- komiwojażer *k* nie wyruszył z miasta początkowego 0:

$$X_I^k = \{(i,d,B): i=0,\ d=0,\ B=0\} \tag{9}$$

- komiwojażer *k* jedzie do wybranego miasta *i* (w tym powraca do miasta początkowego 0):

$$X_{II}^k = \{(i,d,B): i \in N, d>0, B=1\} \tag{10}$$

– komiwojażer k stoi w odwiedzonym mieście i:

$$X_{III}^{k}=\{(i,d,B):i\in N\setminus\{0\},d=0,B=1\} \tag{11}$$

– komiwojażer k powrócił do miasta początkowego 0:

$$X_{IV}^{k}=\{(i,d,B):i\in 0,\ d=0,\ B=1\} \tag{12}$$

Pozostałe kombinacje wartości składników definiujących stan komiwojażera nie mają interpretacji w rzeczywistości.

Na podstawie powyższych klas stanów komiwojażerów można wyróżnić w danym stanie s dwa zbiory:

1) komiwojażerów wolnych $M_W(s)$,
2) komiwojażerów zajętych $M_Z(s)$.

Komiwojażer wolny w stanie s to komiwojażer, który stoi w mieście (ostatnio odwiedzonym lub początkowym) i może mu zostać przydzielone kolejne miasto do odwiedzenia.

$$M_W(s)=\left\{k\in M: x^k(s)\in X_I^k\cup X_{III}^k\right\} \tag{13}$$

Komiwojażer zajęty w stanie s to komiwojażer, który jedzie do wyznaczonego miasta lub zakończył swoją podróż i powrócił do miasta początkowego 0.

$$M_Z(s)=\left\{k\in M: x^k(s)\in X_{II}^k\cup X_{IV}^k\right\} \tag{14}$$

Charakterystyczne zbiory miast

W stanie s można wyróżnić:

– zbiór miast odwiedzonych $N_O(s)$,
– zbiór miast wyznaczonych do odwiedzenia $N_{DO}(s)$,
– zbiór miast nieudostępnionych do odwiedzenia $N_{NO}(s)$,
– zbiór miast możliwych do wyznaczenia $N_W(s)$.

Zbiór miast odwiedzonych $N_O(s)$ jest tożsamy z pierwszą współrzędną systemu $x^0(s)$:

$$N_O(s)=x^0(s) \tag{15}$$

Zbiór miast wyznaczonych do odwiedzenia $N_{DO}(s)$ to zbiór miast, do których w danym stanie zmierza jeden z komiwojażerów, z pominięciem miasta początkowego:

$$N_{DO}(s)=\left\{j\in N\setminus\{0\}:\ \exists_{k\in M}\left(x^k=(i,d,B)\ \wedge\ i=j\ \wedge\ d>0\right)\right\} \tag{16}$$

Zbiór miast-oddziałów nieudostępnionych do odwiedzenia $N_{NO}(s)$ to zbiór miast reprezentujących oddziały tych firm, których siedziby nie zostały jeszcze odwiedzone.

$$N_{NO}(s) = \left\{ i \in : \neg\exists_{j=1,2,\ldots,y} \left(i \in F_j \ \wedge \ e_j \in N_0(s) \right) \right\} \tag{17}$$

Zbiór miast możliwych do przydzielenia $N_W(s)$ to zbiór miast, które można wskazać do komiwojażerowi jako następny cel podróży. Komiwojażerowi można wskazać do odwiedzenia tylko takie miasto, które nie zostało do tej pory odwiedzone przez żadnego z komiwojażerów oraz żaden z komiwojażerów aktualnie do niego nie zmierza. Dodatkowo w przypadku firm wielooddziałowych miasto reprezentujące oddział firmy można odwiedzić tylko wtedy, jeśli siedziba została już odwiedzona. Komiwojażerowi można również wyznaczyć powrót do miasta początkowego, czyli przydzielić miasto 0.

$$N_W(s) = N \setminus \left(N_O(s) \cup N_{DO}(s) \cup N_{NO}(s) \right) \tag{18}$$

3.2. Decyzje

W danym stanie $s = (x, t)$ podejmowana jest decyzja, na podstawie której system przeprowadzany jest do następnego stanu. Wyznaczona decyzja $u(s)$ musi należeć do zbioru $U_p(s)$ decyzji możliwych (sensownych) w danym stanie.

W rozważanym problemie przyjęto dwa założenia związane z podejmowaniem decyzji:

1) Decyzja o przydzieleniu komiwojażerowi następnego miasta do odwiedzenia może być podjęta dopiero po dotarciu komiwojażera do poprzednio wyznaczonego.
2) Podjęta decyzja nie ulega zmianie.

W konsekwencji powyższych założeń, komiwojażer, który jeszcze nie dotarł do wskazanego mu wcześniej miasta (czyli komiwojażera zajętego), dozwolona jest tylko decyzja o kontynuacji przemieszczania się w kierunku tego miasta. Natomiast dla komiwojażera, który w danej chwili stoi (jest wolny w danym stanie), może zostać podjęta decyzja o odwiedzeniu kolejnego miasta, powrocie do miasta początkowego lub pozostaniu w danym mieście. Kolejnym miastem wskazanym do odwiedzenia może być tylko miasto nieodwiedzone, do którego nie zmierza aktualnie żaden z komiwojażerów. Jednocześnie miasto takie musi reprezentować siedzibę firmy albo oddział firmy, której siedziba została już odwiedzona.

Uwzględniając powyższe rozważania definiuje się strukturę decyzji u jako m-elementowy wektor:

$$u = (u^1, u^2, \ldots, u^m) \tag{19}$$

gdzie kolejne współrzędne oznaczają odrębne decyzje dla poszczególnych komiwojażerów.

Wartością każdej współrzędnej u^k jest numer miasta, do którego komiwojażer ma jechać lub w którym ma nadal stać:

$$u^k \in N \tag{20}$$

Zbiór możliwych decyzji $U_p^k(s)$ dla poszczególnych komiwojażerów k w stanie s można zatem zdefiniować następująco:

$$U_p^k(s) = \begin{cases} N_W(s) \cup \left\{ j \in N : x^k(s) = (i,d,B) \wedge i = j \right\} & \text{dla} \quad k \in M_W(s) \\ \left\{ j \in N_{DO}(s) : x^k(s) = (i,d,B) \wedge i = j \right\} & \text{dla} \quad k \in M_Z(s) \end{cases} \tag{21}$$

Cały zbiór decyzji możliwych w stanie $s = (x, t)$ jest następujący:

$$U_p(s) = U_p^1(s) \times U_p^2(s) \times \ldots \times U_p^m(s) \setminus H \tag{22}$$

gdzie H – zbiór decyzji przydzielających jednocześnie to samo miasto do odwiedzenia więcej niż jednemu komiwojażerowi i decyzji niewyznaczających żadnego nowego miasta do odwiedzenia w sytuacji, kiedy wszyscy komiwojażerowie w danym stanie są wolni.

$$H = \left\{ \begin{array}{l} u = \left(u^1, u^2, \ldots, u^m\right) : \ \left(\exists_{k,l \in M} \left(u^k(s) = u^l(s) \neq 0 \ \wedge \ k \neq l \right) \right) \ \wedge \\ \wedge \ \left(\forall_{k=1,2,\ldots,m} \left(u^k(s) = j \ \wedge \ j \in N : \ x^k(s) = (i,d,B) \ \wedge i = j \right) \right) \end{array} \right\} \tag{23}$$

Definicja zbioru $U_p(s)$ jest konieczna do generowania i sprawdzania poprawności zbioru decyzji, z których może być wybrana decyzja najlepsza.

Jeżeli natomiast decyzja możliwa przeprowadza stan $s = (x, t)$ do zbioru S_N, to jest to decyzja niedopuszczalna. Zatem zbiór decyzji dopuszczalnych $U_d(s)$ w stanie s jest następujący:

$$U_d(s) = \left\{ u \in U_p(s) : \quad s' = f(u,s) \notin S_N \right\} \tag{24}$$

Kolejno podjęte decyzje tworzą ciąg decyzyjny $\tilde{u} = (u_1, u_2, ..., u_c)$, gdzie c jest liczbą podjętych decyzji. Ciąg decyzyjny wyznacza jednoznacznie jedną z trajektorii systemu.

3.3. Funkcja przejścia

Na podstawie aktualnego stanu $s = (x, t)$ i decyzji u podjętej w tym stanie, generowany jest za pomocą funkcji przejścia f następny stan $s' = (x', t')$.

$$(x', t') = f(u, x, t) \tag{25}$$

Wyznaczanie funkcji przejścia jest zadaniem kombinatorycznym. Należy rozważyć różne możliwe podzbiory stanów i przejścia pomiędzy nimi. Konieczne jest określenie, jakie stany możemy otrzymać w wyniku realizacji konkretnej decyzji oraz w jaki sposób należy obliczać wartości poszczególnych składników następnego stanu.

Jak już wcześniej podano, funkcja przejścia jest zdefiniowana za pomocą dwóch funkcji $f = (f_x, f_t)$, gdzie f_x określa następny stan właściwy, a f_t – następny moment czasu.

W pierwszej kolejności należy wyznaczyć moment t' wystąpienia następnego stanu, czyli najbliższy moment, w którym co najmniej jeden komiwojażer dotrze do wyznaczonego miasta. W tym celu dla każdego komiwojażera obliczany jest czas t_k niezbędny na zrealizowanie podjętej dla niego decyzji. Najmniejszy z tych czasu posłuży do wyznaczenia czasu t':

$$t' = t + \Delta t, \quad \text{gdzie } \Delta t = \min_{k \in M} t_k \tag{26}$$

Poniżej przedstawione zostało wyznaczanie czasu t_k dla poszczególnych klas komiwojażerów oraz różnych typów decyzji.

1) Jeżeli dla komiwojażera k wolnego w danym stanie s przebywającego aktualnie w mieście i podjęta zostanie decyzja o odwiedzeniu miasta j (w tym o powrocie do miasta początkowego, gdy $j = 0$), to czas t_k potrzebny na zrealizowanie tej decyzji jest równy odległości między miastem, w którym komiwojażer aktualnie przebywa, a wyznaczonym miastem:

$$t_k = a_{ij} \quad \text{dla } k \in M_W(s) \wedge u^k(s) = j \in N_W(s) \wedge x^k = (i, d, B) \tag{27}$$

2) Dla komiwojażera k wolnego w danym stanie s, dla którego podjęto decyzję o pozostaniu w aktualnym mieście przyjmuje się, że czas ukończenia t_k wynosi nieskończoność:

$$t_k = \infty \quad \text{dla } k \in M_W(s) \wedge u^k(s) = j \in N \wedge x^k = (i, d, B) \wedge i = j \tag{28}$$

Pozostałe przypadki dotyczą komiwojażerów $k \in M_Z(s)$, czyli „zajętych” w danym stanie s. Możemy podjąć dla nich tylko decyzję o kontynuacji przemieszczania się w kierunku wskazanego wcześniej miasta lub decyzję o pozostaniu w mieście początkowym dla komiwojażerów, którzy powrócili już do tego miasta.

3) Jeżeli komiwojażer k aktualnie przemieszcza się w kierunku przydzielonego mu miasta i, to czas t_k potrzebny na zrealizowanie decyzji o kontynuacji podróży będzie równy czasowi, w jakim komiwojażer ten pokona pozostałą drogę do tego miasta – czyli równa się to długości pozostałej drogi (przy przyjętym założeniu prędkości jednostkowej):

$$t_k = d \quad \text{dla } k \in M_Z \wedge u^k(s) = i \neq 0 \tag{29}$$

4) Dla komiwojażera k, który powrócił do miasta początkowego, przyjmuje się, że czas ukończenia t_k wynosi nieskończoność:

$$t_k = \infty \quad \text{dla} \quad k \in M_Z \wedge u^k(s) = 0 \tag{30}$$

Najmniejszy z wyznaczonych czasów t_k stanowi czas Δt. Odległość jaką pokonuje komiwojażer w czasie Δt, oznaczona została jako λ.

Po wyznaczeniu chwili $t' = t + \Delta t$ wystąpienia następnego stanu, obliczane są nowe wartości współrzędnych stanu właściwego.

Zbiór $x^{0\prime}$ czyli pierwsza współrzędna stanu s', która reprezentuje zbiór odwiedzonych miast, zawiera dodatkowo te miasta, do których dojechał któryś z komiwojażerów w momencie t':

$$x^{0\prime} = x^0 \cup \left\{ i \in N \setminus \{0\} : \exists_{k \in M} \left(u^k(s) = i \wedge t_k = \Delta t \right) \right\} \tag{31}$$

Kolejne współrzędne, reprezentujące stany poszczególnych komiwojażerów, również są przeprowadzane do nowego stanu:

$$x^{k\prime} = f_x\left(u, x^k, t\right) \quad \text{dla } k = 1, 2 \ldots m \tag{32}$$

Jeśli przyjmie się, że $x^k = (i, d, B)$ przechodzi w $x^{k'} = (i', d', B')$, to w zależności od realizowanej decyzji, wartości poszczególnych elementów stanu komiwojażera $x^{k'}$ w chwili $t' = t + \Delta t$ wynoszą:

1) Dla komiwojażera k wolnego w danym stanie s, stojącego w mieście i, dla którego została podjęta decyzja $u^k(s) = j$ o odwiedzeniu miasta j (w tym o powrocie do miasta początkowego, gdy $j = 0$):

$$\begin{aligned} & i' = j \\ & d' = \begin{cases} 0, & \text{gdy } t_k = \Delta t \\ a_{ij} - \lambda, & \text{gdy } t_k > \Delta t \end{cases} \\ & B' = 1 \end{aligned} \tag{33}$$

2) Dla komiwojażera k wolnego w danym stanie s, stojącego w mieście i, dla którego została podjęta decyzja $u^k(s) = i$ o pozostaniu w tym mieście:

$$\begin{aligned} & i' = i \\ & d' = 0 \\ & B' = B \end{aligned} \tag{34}$$

3) Dla komiwojażera k zajętego zmierzającego do wskazanego wcześniej miasta i, w tym do miasta początkowego 0:

$$
\begin{aligned}
& i' = i \\
& d' = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \; t_k = \Delta t \\ d - \lambda, & \text{gdy } \; t_k > \Delta t \end{cases} \\
& B' = 1
\end{aligned}
\tag{35}
$$

4. Wnioski

W artykule przedstawiono ogólny schemat modelu algebraiczno-logicznego na przykładzie problemu planowania tras dostaw do firm wielooddziałowych. Należy jednak podkreślić, że przedstawiona metodologia jest bardzo uniwersalna i znajduje szerokie zastosowanie, przede wszystkim w optymalizacji trudnych problemów decyzyjnych.

Model algebraiczno-logiczny umożliwia formalne ujęcie problemu, co z kolei pozwala na jego łatwe rozszerzenie w przypadku zmiany przyjętych założeń. W rozważanym problemie można przykładowo uwzględnić różną prędkość podróżowania dla poszczególnych komiwojażerów. Taka zmiana nie wymaga tworzenia nowego modelu, a jedynie niewielkiej modyfikacji istniejącego. W szczególności w tym przypadku wystarczy zmodyfikować niektóre elementy funkcji przejścia.

Na bazie modelu algebraiczno-logicznego danego problemu można zdefiniować algorytmy oparte na różnych metodach optymalizacji. W szczególności do znalezienia rozwiązania można z powodzeniem wykorzystać znane metody oparte na przeszukiwaniu grafu stanów procesu. Ponadto, bazując na modelu algebraiczno-logicznym, w prosty sposób można dla danego problemu dokonać przeglądu zupełnego.

Literatura

[1] Bubnicki Z., *Wstęp do systemów ekspertowych*. Warszawa, PWN 1990.

[2] Dudek-Dyduch E., *Formalizacja i analiza problematyki dyskretnych procesów produkcyjnych*. Zeszyty Naukowe AGH Automatyka, z. 54, 1990 (praca habilitacyjna).

[3] Dudek-Dyduch E., *Systemy informacyjne zarządzania produkcją.* Kraków, Wydawnictwo Poldex 2002.

[4] Dudek-Dyduch E., *Learning based algorithm in scheduling.* Cluver Academic Publishers, Journal of Intelligent Manufacturing (JIM), vol. 11, no 2, 2000, 135–143.