



143380

10

N ZV

IP 1987

15948

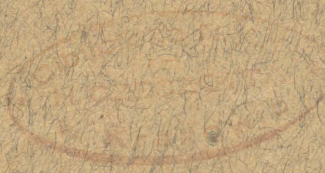
426/11

300i

Dr. ANTONI PLAMITZER
Profesor Politechniki Lwowskiej

ELEMENTY GEOMETRII RZUTOWEJ

*



[22]



ELEMENTY GEOMETRII RZUTOWEJ



Dr. ANTONI PLAMITZER
Profesor Politechniki Lwowskiej

ELEMENTY GEOMETRIJ RZUTOWEJ

*



1927
NAKŁAD I WŁASNOŚĆ
K. S. JAKUBOWSKIEGO WE LWOWIE

BIBLIOTEKA GŁÓWNA AGH



1000168712

WSZYSTKIE PRAWA ZASTRZEŻONE

~~1665~~



II 15948

NzB 4629

ODBITO W DRUKARNI JAKUBOWSKIEGO i Sp. WE LWOWIE

Akc. Nr 205/54

Przedmowa.

Książka niniejsza zawiera część moich wykładów z zakresu geometrii rzutowej. Omawiany materiał podzieliłem na trzy rozdziały, których dokładną treść podaję w poniżej zamieszczonym spisie. W rozdziale pierwszym zestawilem wiadomości wstępne, w rozdziale drugim zająłem się pewnemi zależnościami geometrycznemi, t. zw. rzutowościami, zachodzącymi pomiędzy zasadniczymi utworami gatunku pierwszego. Wreszcie w ostatnim rozdziale omówilem szczegółowo teorię stożkowych.

Dalsze wykłady, odnoszące się do rzutowości utworów zasadniczych gatunku drugiego i trzeciego, oraz do teorii powierzchni 2-go stopnia, obejmować będzie część druga „Elementów geometrii rzutowej“.

Za pomoc w czytaniu żmudnej korekty dziękuję serdecznie Panu Koledze *Józefowi Wróblewskiemu*, profesorowi XI. gimn. Panu *Mieczysławowi Telickowi*, asystentowi Politechniki Lwowskiej, dziękuję uprzejmie za techniczne wykonanie rysunków.

Spełnię wreszcie miły obowiązek, jeżeli *Nakładcy* wyrażę na tem miejscu serdeczne podziękowanie za bardzo staranne wydanie niniejszego podręcznika.

We Lwowie, w styczniu 1927 r.

Autor.

Treść.

Wstęp	Str. 1
-----------------	-----------

ROZDZIAŁ I.

Wiadomości wstępne.

1. Elementy właściwe i niewłaściwe. Oznaczenia	4
2. Utwory zasadnicze	8
3. Rzuty i przecięcia	11
4. Pewnik ciągłości	17
5. Zasady biegunowej dwoistości	18

ROZDZIAŁ II.

Rzutowości pomiędzy utworami zasadniczymi gatunku pierwszego.

6. Perspektywiczność utworów zasadniczych gatunku 1-go	22
7. Rzutowość utworów zasadniczych gatunku 1-go	27
8. O ruchu homologicznych elementów w rzutowych utworach zasadniczych gatunku 1-go	31
9. Stosunek podziału i dwustosunek elementów szeregu punktów	36
10. Stosunek podziału i dwustosunek elementów pęku prostych i pęku płaszczyzn	42
11. Charakter rzutowy dwustosunku czterech elementów utworu zasadniczego gatunku 1-go	50
12. Stosunek harmoniczny	57
13. Czworokąt i czworobok zupełny	62
14. Potęga szeregów rzutowych. Szeregi i pęki podobne	65
15. Szeregi rzutowe o wspólnej podstawie	69
16. Pęki rzutowe o wspólnym wierzchołku (wzgl. o wspólnej osi)	75
17. Twierdzenie podstawowe Staudt'a. Wyznaczenie rzutowości pomiędzy utworami zasadniczymi gatunku 1-go.	77
18. Kryterjum perspektywiczności utworów rzutowych	80
19. Konstrukcyjne uzupełnienie rzutowych utworów zasadniczych gatunku 1-go	83
20. Rzutowość utworów przystających	89
21. Potęga pęków rzutowych	95
22. Elementy zjednoczone pęków rzutowych o wspólnym wierzchołku (wzgl. wspólnej osi)	98

	Str.
23. Rzutowość inwolucyjna utworów zasadniczych gatunku 1-go . . .	103
24. Własności szeregów inwolucyjnych	106
25. Własności pęków inwolucyjnych	111

ROZDZIAŁ III.

Stożkowe.

26. Utwory rzutowych pęków prostych i szeregów punktów . . .	118
27. Twierdzenia Steinera	120
28. Twierdzenia Pascala i Brianchona	125
29. Szczególne przypadki twierdzeń Pascala i Brianchona. Konfiguracja Mac-Laurina	128
30. Fundamentalna własność stożkowych. Stożkowe jako krzywe stopnia drugiego	132
31. Proste sieczne i zewnętrzne. Punkty zewnętrzne i wewnętrzne . .	140
32. Podział stożkowych	143
33. Stożkowe zniekształcone	146
34. Warunki, określające stożkową	148
35. Zadania konstrukcyjne i ćwiczenia	150
36. Konstrukcje Steinera	156
37. Badanie utworu pęków rzutowych	160
38. Biegunowa punktu i biegun prostej względem stożkowej . . .	163
39. Twierdzenia Desargues'a	168
40. Dalsze własności biegunów i biegunowych	170
41. Zasada biegunowej dwoistości	172
42. Punkty sprzężone i proste sprzężone względem stożkowej . .	174
43. Trójkąt wpisany w stożkową	178
44. Konstrukcyjne wyznaczenie elementów podwójnych pęków inwolucyjnych i szeregów inwolucyjnych	182
45. Wspólna para homologicznych elementów dwóch szeregów (wzgl. pęków) inwolucyjnych	186
46. Własności punktów zewnętrznych i wewnętrznych, oraz prostych siecznych i zewnętrznych	189
47. Proste normalne pęku inwolucyjnego. Pęk cykliczny	191
48. Średnica i środek stożkowej	193
49. Średnice sprzężone, asymptoty, osie i wierzchołki stożkowej . .	197
50. Koło. Inwolucja bezwzględna. Punkty kołowe i proste izotropowe	202
51. Konstrukcje stożkowych	205
52. Dalsze warunki, określające stożkową	212
53. Twierdzenia Desargues'a	224
54. Pęki i pasma stożkowych	231
55. O stożkowych, określonych trzema punktami i dwiema stycznymi	236
56. Ogniska stożkowej	239
57. Kierownice stożkowej	243
58. Zadania konstrukcyjne.	249
Ważniejsze omyłki	253
Skorowidz alfabetyczny	254

Wstęp.

Zależności geometryczne, zachodzące pomiędzy punktami, prostymi, płaszczyznami, wielościanami, linjami krzywymi, powierzchniami, ... nazywamy własnościami geometrycznymi. Własności te podzielić możemy na dwie kategorie: na własności opisowe i na własności miarowe. — Do pierwszej kategorii należą własności, odnoszące się do pojęć punktu, prostej, płaszczyzny i t. d. (np. kilka punktów leży na jednej prostej lub płaszczyźnie, kilka prostych leży na jednej płaszczyźnie lub przechodzi przez jeden punkt, kilka płaszczyzn przechodzi przez jeden punkt albo przez jedną prostą, i t. p). Natomiast do drugiej kategorii należą własności, odnoszące się do pojęć: odległości (np. odległość dwóch punktów, dwóch prostych równoległych, dwóch płaszczyzn równoległych, odległość punktu od prostej, wzgl. od płaszczyzny), wielkości kąta (np. kąt dwóch prostych, dwóch płaszczyzn, kąt prostej i płaszczyzny), powierzchni (np. powierzchnia wielokąta, wielościanu) i objętości (np. objętość wielościanu).

Przedmiotem badań geometrii rzutowej — zwanej także wyższą, nowszą, położenia lub syntetyczną — są własności opisowe utworów geometrycznych. Ponieważ jednak własności miarowe posiadają bardzo ciekawe związki z geometrią rzutową, tworząc jej przedmiot zastosowań, przeto w rozważaniach naszych omawiać będziemy tak własności opisowe, jak i własności miarowe utworów geometrycznych.

Jakkolwiek właściwy rozwój geometrii rzutowej przypada dopiero na wiek XIX, to jednak początków tej nauki doszukiwać się można w praktycznych konstrukcjach perspektywy. Badanie utworów geometrycznych z punktu widzenia perspektywy umożliwia w sposób nader łatwy wyznaczenie własności opisowych tych utworów, oraz zawiera dwa podstawowe działania geometrii rzutowej, a mianowicie: rzucanie i przecinanie. Pierwsze z tych działań odpowiada procesowi widzenia, drugie natomiast procesowi wyobrażania na płaszczyźnie przecięcia. Badanie tą drogą własności stożkowych, jako perspektywy koła,

zawdzięczamy Desargues'owi (1593—1662) i Pascal'owi (1623—1662). Właściwymi twórcami geometrii rzutowej są: J. V. Poncelet¹⁾, Möbius²⁾, J. Steiner³⁾, M. Chasles⁴⁾ i K. G. Ch. von Staudt⁵⁾.

Wymienić należy jeszcze dzieła następujących autorów: T. Reye⁶⁾, H. Schröter⁷⁾, W. Fiedler⁸⁾, L. Cremona⁹⁾, J. Thomae¹⁰⁾, E. Weyr¹¹⁾, F. Aschieri¹²⁾, Chr. Wiener¹³⁾, R. Sturm¹⁴⁾, K. Rohn u. E. Papperitz¹⁵⁾, K. Doehlemann¹⁶⁾, F. Enriques¹⁷⁾, R. Böger¹⁸⁾, F. Severi¹⁹⁾,

¹⁾ *Traité des Propriétés projectives des Figures*, Paris 1822 (II wyd. 1865—66).

²⁾ *Der baryzentrische Calcul*, Leipzig 1827; *Gesammelte Werke*, 4 Bde, Leipzig 1885—87.

³⁾ *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, Berlin 1832; *Gesammelte Werke*, 2 Bde, Berlin 1881—82.

⁴⁾ *Aperçu historique sur l'Origine et le Développement des Méthodes en Géométrie*, Bruxelles 1837 (III wyd. Paris 1889); *Traité de Géométrie supérieure*, Paris 1852 (II wyd. 1880); *Traité des Sections coniques*, Paris 1865.

⁵⁾ *Geometrie der Lage*, Nürnberg 1847; *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Nürnberg 1856—1860; *Geometria di Posizione* (przekład Segre), Torino 1889.

⁶⁾ *Die Geometrie der Lage*, Leipzig 1866 (VI wyd. Tom I 1923, V wyd. Tom II i III 1923).

⁷⁾ *Die Theorie d. Kegelschnitte*, gestützt auf projectivische Eigenschaften (Teil II von J. Steiners Vorlesungen über synthetische Geometrie), Leipzig 1866 (III wyd. 1898); *Theorie d. Oberflächen zweiter Ordnung u. d. Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde*, Leipzig 1880.

⁸⁾ *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit d. Geometrie der Lage*, 3 Bde, Leipzig 1871—1883.

⁹⁾ *Elementi di geometria proiettiva*, Milano 1872 (przekład franc. De-wulf'a i niem. Trautvettera).

¹⁰⁾ *Ebene geometrische Gebilde vom Standpunkte d. Geometrie d. Lage betrachtet*, Halle 1873; *Die Kegelschnitte in rein projektiver Behandlung*, Halle 1894.

¹¹⁾ *Elemente d. projektiv. Geometrie*, 2 Bd, Wien 1883—87.

¹²⁾ *Geometria proiettiva*, Milano 1884 (II wyd. 1888).

¹³⁾ *Lehrbuch d. darstellenden Geometrie*, 2 Bde, Leipzig 1884—87.

¹⁴⁾ *Die Gebilde ersten u. zweiten Grades d. Liniengeometrie in synthetischer Behandlung*, 3 Bde, Leipzig 1892—97; *Die Lehre von d. geometrischen Verwandtschaften*, 4 Bde, Leipzig u. Berlin 1908.

¹⁵⁾ *Lehrbuch d. darstellenden Geometrie*, 2 Bde, Leipzig 1893—96.

¹⁶⁾ *Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung* 1898, Sammlung Götschen (V wyd. Tom I i II 1924).

¹⁷⁾ *Lezioni di geometria proiettiva*, Bologna 1898 (przekład niem. Fleischer'a i polski Włodarskiego z III-go wyd. włoskiego, Warszawa 1917).

¹⁸⁾ *Ebene Geometrie d. Lage*, Leipzig 1900.

¹⁹⁾ *Complementi di geometria proiettiva*, Bologna 1906.

E. Duporcq¹⁾, M. Grossmann²⁾, E. Bally³⁾, G. Scheffers⁴⁾ i M. D'Ocagne⁵⁾.

Również i w naszej literaturze naukowej, poza specjalnemi rozprawami polskich autorów, posiadamy kilka podręczników z zakresu geometrii rzutowej. Należą tu prace: G. H. Niewęglowskiego⁶⁾, Juliana Bayera⁷⁾, Stanisława Ziemińskiego⁸⁾, Dr. Marjana A. Baranieckiego⁹⁾, Alfreda Lewenberga¹⁰⁾, Dr. M. Feldbluma¹¹⁾, prof. Dr. Mieczysława Łazarskiego¹²⁾, prof. Dr. Kazimierza Bartla¹³⁾, F. Enriques'a (przekład Dr. Franciszka Włodarskiego)¹⁴⁾, prof. Stanisława Garlickiego¹⁵⁾, Dr. A. Plamitzera¹⁶⁾ i Dr. Stefana Kwietniewskiego¹⁷⁾.

¹⁾ Premiers principes de géométrie moderne (Deuxième édition revue et augmentée par R. Bricard), Paris 1912.

²⁾ Darstellende Geometrie, Leipzig u. Berlin 1915 (II wyd. 1921).

³⁾ Principes et premiers développements de géométrie générale synthétique moderne, Paris 1922.

⁴⁾ Lehrbuch d. darstellenden Geometrie, 2 Bde, Berlin 1919—1920 (II wyd. 1922).

⁵⁾ Notions sommaires de géométrie projective, Paris 1924.

⁶⁾ Geometria, Paryż 1854 (II wyd. Paryż—Lwów, Tom I 1868, Tom II 1869).

⁷⁾ Pierwsze początki geometrii wyższej (kurs litografowany), Warszawa 1867 (wedle pracy Michała Rembacz: „Krótko zebrana historia geometrii wykreslnej“ Część I i II. Stanisławów 1890—91).

⁸⁾ Składnia wykreslna (geometria położenia) podług T. Reye'go, Lwów 1877.

⁹⁾ Początkowy wykład syntetyczny własności przecię stożkowych, Warszawa 1885.

¹⁰⁾ Geometria rzutowa tworów pierwiastkowych, Warszawa 1902.

¹¹⁾ Geometria wykreslna, Warszawa 1902.

¹²⁾ Zasady geometrii wykreslnej, Tom I i II, Lwów 1903—6.

¹³⁾ Geometria wykreslna (kurs litografowany), Lwów 1913—14; Geometria wykreslna, Lwów 1919 (II wyd. 1922).

¹⁴⁾ Wykłady geometrii rzutowej, Warszawa 1917.

¹⁵⁾ Kurs geometrii wykreslnej (litografowany), Warszawa 1921.

¹⁶⁾ Elementy płaskiej geometrii rzutowej (litografowane), Lwów 1921 (II wyd. 1922).

¹⁷⁾ Geometria rzutowa (kurs litografowany), Warszawa 1923.

ROZDZIAŁ I.

Wiadomości wstępne.

1. Elementy właściwe i niewłaściwe¹⁾. Oznaczenia. Punkty, proste i płaszczyzny nazywamy elementami zasadniczymi. Wiadomo nam, że dwie proste, leżące na jednej płaszczyźnie i nie mające punktu wspólnego, są prostymi równoległymi. Skoro przyjmiemy²⁾ dowolną prostą a i punkt B , nie leżący na owej prostej, to wówczas przez punkt B przechodzi jedna i tylko jedna prosta c , równoległa do danej prostej a (postulat *Euclidesa*). Zamiast mówić, że „dwie proste są równoległe“, powiemy, że owe proste „posiadają jeden i ten sam *kierunek*“ lub też, że one „posiadają wspólny kierunek“. Będziemy też mówili, że „prosta należy do swego kierunku“.

Powiadamy, że: prosta i płaszczyzna są do siebie równoległe, jeżeli owe elementy nie mają ani jednego punktu wspólnego.

Dwie płaszczyzny, nie mające żadnych punktów wspólnych, nazywamy płaszczyznami równoległymi. Zamiast mówić, że „dwie płaszczyzny są równoległe“, powiemy, że owe płaszczyzny „posiadają jedno i to samo *ustawienie*“, albo też, że „posiadają wspólne ustawienie“. Będziemy też mówili, że „płaszczyzna należy do swego ustawienia“.

Korzystając z nowo wprowadzonych wyrażeń „kierunek“ i „ustawienie“, możemy ustalić pomiędzy elementami zasadniczymi następujące zależności :

¹⁾ Porównaj *Federigo Enriques*: Wykłady geometrii rzutowej. Warszawa 1917 (przekład *Fr. Włodarskiego*), str. 8.

Dr. Emil Müller: Lehrbuch d. darstellenden Geometrie f. techn. Hochschulen. Leipzig u. Berlin 1908. Bd. I. S. 8.

²⁾ Umówmy się, że punkty oznaczać będziemy dużymi literami alfabetu łacińskiego lub cyframi arabskimi, proste oznaczać będziemy małymi literami alfabetu łacińskiego lub cyframi rzymskimi, płaszczyzny zaś małymi literami alfabetu greckiego.

a) Dwa punkty (różne od siebie) określają (wyznaczają) jedną i tylko jedną prostą, należącą do nich (i do której one należą).

b) Dwie (różne od siebie) płaszczyzny określają (wyznaczają) jedną i tylko jedną prostą, należącą do nich (t. zw. krawędź przecięcia się), lub też jedno i tylko jedno ustawienie, należące do nich (gdy płaszczyzny są równoległe).

c) Punkt i kierunek określają jedną i tylko jedną prostą, do której należą (t. zn. prostą, przechodzącą przez dany punkt i równoległą do danej prostej).

d) Dwa różne kierunki określają jedno i tylko jedno ustawienie, do którego należą (t. zn. istnieje nieograniczona ilość płaszczyzn, równoległych do dwóch danych prostych o różnych kierunkach, i wszystkie te płaszczyzny są względem siebie równoległe).

e) Trzy (różne) punkty, nie należące do jednej prostej, określają jedną i tylko jedną płaszczyznę, należącą do nich (i do której one należą).

f) Trzy (różne) płaszczyzny, nie przechodzące przez jedną i tę samą prostą, oraz nie posiadające wspólnego ustawienia, określają jeden i tylko jeden punkt albo też jeden i tylko jeden kierunek (gdy są równoległe do tej samej prostej).

g) Dwa punkty i dowolny kierunek (różny od kierunku prostej, wyznaczonej dwoma danymi punktami), określają jedną i tylko jedną płaszczyznę (która przechodzi przez owe dwa punkty i jest równoległa do danej prostej).

h) Punkt i dwa kierunki określają jedną i tylko jedną płaszczyznę, do której należą (t. zn. przez punkt przechodzi jedna tylko płaszczyzna, równoległa do dwóch danych prostych o dwóch różnych kierunkach).

Z łatwością zauważymy, że w powyższych związkach a) ... h) wyraz „kierunek“ zastępuje w wielu przypadkach wyraz „punkt“ i wyraz „ustawienie“ zastępuje wyraz „prosta“. Nasuwa się myśl, aby zdefiniować kierunek prostej jako „punkt“, a ustawienie płaszczyzny jako „prostą“. Celem odróżnienia „punktu“ w znaczeniu zwykłym (dotychczasowym) od nowo wprowadzonego „punktu“ (zamiast „kierunku“) nazywać będziemy: pierwszy z tych elementów punktem *właściwym*, a drugi element punktem *niewłaściwym* (punktem nieskończenie dalekim albo punktem w nieskończoności). Podobnie „prostą“ w znaczeniu zwykłym nazwiemy prostą *właściwą*, a nowo wprowadzony element „prostą“ w znaczeniu zastępującem „usta-

wienie“, nazwiemy prostą *niewłaściwą* (prostą nieskończenie daleką albo prostą w nieskończoności). Elementy niewłaściwe oznaczać będziemy symbolem ∞ , pisząc np. A^∞ (czytaj: punkt niewłaściwy A), b^∞ (czytaj: prosta niewłaściwa b). — Stosując wprowadzone wyrażenia, powiemy:

Każda prosta właściwa posiada nieograniczoną ilość punktów właściwych, oraz jeden i tylko jeden punkt niewłaściwy (swoją kierunek).

Każda płaszczyzna właściwa posiada nieograniczoną ilość prostych właściwych, oraz jedną i tylko jedną prostą niewłaściwą (swoje ustawienie).

Na danej płaszczyźnie ε niechaj leżą proste właściwe $a, b, c, \dots$ oraz prosta niewłaściwa e^∞ . Każdy punkt prostej a , a zatem i punkt niewłaściwy A^∞ (kierunek prostej a), leży na płaszczyźnie ε . Podobnie punkty niewłaściwe $B^\infty, C^\infty, \dots$ prostych $b, c, \dots$, przynależą też do płaszczyzny ε . Pary prostych: a i b , a i $c, \dots$, b i $c, \dots$, wyznaczają (określają) jedną i tę samą płaszczyznę ε . Natomiast „kierunki“ uważanych par prostych, t. zn. pary punktów niewłaściwych: A^∞ i B^∞ , A^∞ i $C^\infty, \dots$, B^∞ i $C^\infty, \dots$ określają „ustawienie“ płaszczyzny ε czyli prostą niewłaściwą e^∞ tejże płaszczyzny. Jeżeli punkty A^∞ i B^∞ określają prostą e^∞ , to owe punkty należą (przynależą) do prostej e^∞ lub leżą na owej prostej; prosta e^∞ należy (przynależy) do punktów A^∞ i B^∞ lub przechodzi przez owe punkty. Wnosimy stąd, że:

Prosta niewłaściwa e^∞ dowolnej płaszczyzny właściwej ε jest miejscem geometrycznym wszystkich punktów niewłaściwych, które leżą na owej płaszczyźnie ε .

O prostych równoległych możemy powiedzieć, że: „dwie proste równoległe nie przecinają się w punkcie właściwym“ albo też, że: „dwie proste równoległe przecinają się w jednym i tylko jednym punkcie niewłaściwym“. Zamiast mówić, że „dwie płaszczyzny równoległe nie przecinają się w prostej właściwej“, powiemy: „dwie płaszczyzny równoległe przecinają się w jednej i tylko jednej prostej niewłaściwej“.

Zajmiemy się teraz zbadaniem zależności, jaka zachodzi pomiędzy dwiema dowolnymi prostymi niewłaściwymi. W tym celu weźmy pod uwagę dwie dowolne płaszczyzny α i β , które

nie są do siebie równoległe i przecinają się w prostej właściwej (krawędzi) c . Oznaczmy przez C^∞ punkt niewłaściwy prostej c (jej kierunku), przez a^∞ prostą niewłaściwą płaszczyzny α (jej ustawienie) i przez b^∞ prostą niewłaściwą płaszczyzny β . Każdy punkt (a zatem również i punkt niewłaściwy C^∞) krawędzi c przynależy równocześnie do płaszczyzny α i do płaszczyzny β . Element C^∞ , jako punkt płaszczyzny α , leży na prostej niewłaściwej a^∞ , a nadto, jako punkt płaszczyzny β , leży też i na prostej niewłaściwej b^∞ . Wnosimy stąd, że:

Dwie dowolne (różne od siebie) proste niewłaściwe posiadają (przechodzą przez, przecinają się) jeden i tylko jeden wspólny punkt niewłaściwy.

Wiadomo ¹⁾, że: ogół prostych właściwych $a, b, c, \dots$, z których każde dwie przecinają się, lecz nie wszystkie przechodzą przez jeden i ten sam punkt, przynależy do jednej i tylko jednej płaszczyzny. Ponieważ każde dwie proste niewłaściwe przecinają się, ale wszystkie nie muszą równocześnie przechodzić przez jeden i ten sam punkt niewłaściwy C^∞ , (bo ogół płaszczyzn $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ nie musi być równoległy do jednej i tej samej prostej właściwej c) — przeto nasuwa się myśl *zdefiniowania ogółu prostych niewłaściwych* (a tem samem i ogółu punktów niewłaściwych) *jako „płaszczyzny“*. Celem odróżnienia „płaszczyzny“ w znaczeniu dotychczasowem (zwykłym) od nowo zdefiniowanej „płaszczyzny“, nazywać będziemy: pierwszą z nich płaszczyzną *właściwą*, a drugą płaszczyzną *niewłaściwą* (płaszczyzną nieskończenie daleką, płaszczyzną w nieskończoności).

Korzystając z dotychczasowych rozważań, ująć możemy podane poprzednio zależności *a) ... h)* w następującą formę:

Dwa (różne od siebie) punkty określają jedną i tylko jedną prostą, do której należą.

Dwie (różne) płaszczyzny określają jedną i tylko jedną prostą, do której należą.

¹⁾ Przynajmniej jedna z prostych danych, np. prosta c , nie przechodzi przez punkt P przecięcia się prostych a i b . Oznaczmy przez A i B punkty przecięcia się prostej c z prostymi a i b , a przez ε płaszczyznę, określoną punktami A, B i P . Na płaszczyźnie ε leżą proste a, b i c , gdyż każda z nich ma dwa punkty wspólne z płaszczyzną ε . Każda inna prosta d , należąca do przyjętego ogółu prostych, przecinać musi proste a, b i c , ale nie może przechodzić równocześnie przez punkty A, B i P . Jeżeli d nie przechodzi np. przez punkt A , to musi leżeć na płaszczyźnie ε , gdyż punkty, w których d przecina proste a i c , leżą na ε . A zatem wszystkie proste $a, b, c, \dots$ leżą na jednej i tylko jednej płaszczyźnie ε .

Trzy (różne) punkty, nie należące do jednej prostej, określają jedną i tylko jedną płaszczyznę, do której należą.

Trzy (różne) płaszczyzny, nie należące do jednej prostej, określają jeden i tylko jeden punkt, do którego należą.

W powyższych twierdzeniach nie czynimy żadnej różnicy pomiędzy elementami właściwymi a elementami niewłaściwymi. Z łatwością stwierdzimy też prawdziwość twierdzeń następujących:

Punkt i prosta, nie należące do siebie, określają jedną i tylko jedną płaszczyznę, do której należą.

Płaszczyzna i prosta, nie należące do siebie, określają jeden i tylko jeden punkt, do którego należą.

Dwie (różne) proste, przecinające się w punkcie, określają jedną i tylko jedną płaszczyznę, do której należą.

Dwie (różne) proste, leżące na płaszczyźnie, określają jeden i tylko jeden punkt, do którego należą.

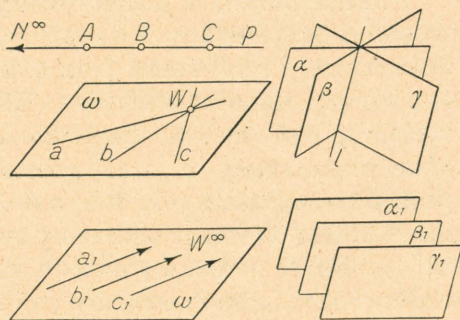
Aby oznaczyć, że prosta l określona jest punktami A i B , posługiwaliśmy się będziemy symbolem: $l = AB$. Podobnie symbol $l = \alpha\beta$ oznacza prostą (krawędź) l , określoną płaszczyznami α i β . Symbol $\varepsilon = ABC$ oznacza płaszczyznę ε , określoną punktami A , B i C . Analogicznie zapomocą symbolu $P = \alpha\beta\gamma$ oznaczamy punkt P , określony trzema płaszczyznami α , β i γ . Punkt A i dowolna prosta b określają płaszczyznę $\gamma = Ab$, a płaszczyzna α i dowolna prosta b określają punkt (przebiecia się) $C = ab$. Symbole $\varepsilon = ab$ i $E = ab$ oznaczają płaszczyznę ε określoną (względnie punkt E określony) przez dwie proste a i b . Chcąc zaznaczyć, że element omawiany jest niewłaściwym, używamy symbolu: ∞ , pisząc: A^∞ lub A_∞ , b^∞ , b_∞ , ε^∞ , wzgl. ε_∞ .

2. Utwory zasadnicze. W geometrii rzutowej występują pewne utwory zasadnicze, a mianowicie:

Szereg punktów, t. j. ogół (zbiór) wszystkich punktów, należących do pewnej prostej p . Poszczególne punkty $A, B, C, \dots$ tej prostej nazywamy elementami szeregu, a prostą p podstawą uważanego szeregu. Szereg punktów o podstawie p i o elementach $A, B, C, \dots$ oznaczamy symbolem: $p(A, B, C, \dots)$ albo symbolem (p) . Jeżeli podstawą szeregu jest prosta właściwa p (ryc. 1), to szereg (p) posiada nieograniczoną ilość punktów właściwych, oraz jeden i tylko jeden punkt niewłaściwy N^∞ . W przypadku, gdy podstawą szeregu jest prosta

niewłaściwa p^∞ , to elementami owego szeregu $p^\infty(A^\infty, B^\infty, \dots)$ są wyłącznie tylko punkty niewłaściwe $A^\infty, B^\infty, \dots$. Szereg (p^∞) nazywać będziemy: „niewłaściwym szeregiem punktów“ albo „szeregiem punktów niewłaściwych“ lub „szeregiem punktów o podstawie niewłaściwej“.

Pęk prostych, t. j. zbiór wszystkich prostych $a, b, c, \dots$, przechodzących przez dowolny punkt W i leżących na dowolnej płaszczyźnie ω . Proste $a, b, \dots$ są elementami uważanego pęku, punkt W jest jego wierzchołkiem lub



Ryc. 1.

środkiem, a płaszczyzna ω jest jego płaszczyzną podstawową. Symbolami $W(a, b, c, \dots)_\omega$ i $(W)_\omega$ albo $W(a, b, c, \dots)$ i (W) oznaczać będziemy pęk prostych. Jeżeli wierzchołek W pęku jest punktem właściwym, to (ryc. 1) elementami tego pęku są proste właściwe. W przypadku, gdy płaszczyzna podstawowa ω pęku prostych jest elementem właściwym, a wierzchołek punktem niewłaściwym W^∞ , to (ryc. 1) elementami tego pęku są proste właściwe $a_1 // b_1 // c_1 // \dots$ o wspólnym kierunku, oraz jedna i tylko jedna prosta niewłaściwa n_1^∞ , przynależna do podstawy ω . Pęk prostych $(W^\infty)_\omega$ nazywać będziemy: „pękiem prostych równoległych“ lub „pękiem prostych o wierzchołku niewłaściwym“. — Wreszcie pęk prostych $W^\infty(a^\infty, b^\infty, \dots)$, którego wierzchołkiem jest punkt niewłaściwy W^∞ , płaszczyzną podstawową jest płaszczyzna niewłaściwa ω^∞ , a elementami wyłącznie tylko proste niewłaściwe $a^\infty, b^\infty, \dots$, nazywać będziemy: „niewłaściwym pękiem prostych“ lub „pękiem prostych niewłaściwych“.

Pęk płaszczyzn, t. j. zbiór wszystkich płaszczyzn $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, przechodzących przez dowolną prostą l . Prosta l jest osią, a płaszczyzny $\alpha, \beta, \dots$ są elementami pęku płaszczyzn; ten pęk oznaczać będziemy symbolami $l(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ lub (l) . Na ryc. 1 podany jest pęk płaszczyzn, którego osią jest prosta właściwa l , a elementami wyłącznie tylko płaszczyzny właściwe $\alpha, \beta, \dots$. Przyjmując płaszczyzny równoległe (o wspólnym ustawieniu): $\alpha_1 // \beta_1 // \gamma_1 // \dots$, otrzymamy (ryc. 1) pęk o osi niewłaściwej l^∞ . Taki pęk (l^∞) , którego elementem jest również i pla-

szczyzna niewłaściwa ω^∞ , nazywać będziemy: „niewłaściwym pękiem płaszczyzn“, „pękiem płaszczyzn o osi niewłaściwej“ lub „pękiem płaszczyzn równoległych“.

Układ płaski, t. j. zbiór wszystkich punktów i wszystkich prostych, przynależnych do (leżących na) dowolnej płaszczyzny ε . Płaszczyznę ε nazywamy podstawą lub płaszczyzną podstawową układu płaskiego. Elementami układu o podstawie właściwej ε są (ryc. 4) wszystkie punkty właściwe i proste właściwe płaszczyzny ε , oraz prosta niewłaściwa e^∞ i zbiór jej punktów niewłaściwych, przynależnych do płaszczyzny ε . Ten układ płaski oznaczać będziemy symbolami $\varepsilon(A, B, C, \dots, l, m, n, \dots)$ lub (ε) . Jeżeli podstawą układu płaskiego jest płaszczyzna niewłaściwa ω^∞ , to otrzymujemy „niewłaściwy układ płaski“, którego elementami jest zbiór wszystkich prostych niewłaściwych i wszystkich punktów niewłaściwych. — Skoro za elementy układu płaskiego (ε) uważać będziemy wyłącznie tylko zbiór wszystkich punktów, leżących na płaszczyźnie ε , to uważany utwór podstawowy nazywamy „płaskim układem punktów“. Podobnie, przyjmując za elementy układu (ε) wyłącznie tylko proste, (leżące oczywiście na płaszczyźnie ε), otrzymujemy t. zw. „płaski układ prostych“.

Wiązka (wzgl. wiązka środkowa), t. j. zbiór wszystkich prostych i wszystkich płaszczyzn, przechodzących przez dowolny punkt W . Element W nazywamy wierzchołkiem albo środkiem wiązki. Wiazkę tę oznaczać będziemy symbolem $W(a, b, c, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots)$ lub (W) . Jeżeli środek wiązki (W) jest punktem właściwym (ryc. 4) to elementami tej wiązki są wyłącznie tylko proste właściwe i płaszczyzny właściwe. Przyjmując punkt niewłaściwy S^∞ za środek wiązki (S^∞) , to elementami jej są: proste równoległe $a // b // c // \dots$ (o wspólnym kierunku S^∞), płaszczyzny właściwe $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, przechodzące przez punkt S^∞ , płaszczyzna niewłaściwa ω^∞ i pęk prostych niewłaściwych $S^\infty(a^\infty, b^\infty, \dots)$, o podstawie ω^∞ . Utwór zasadniczy (S^∞) nazywać będziemy wiązką niewłaściwą lub „wiązką o wierzchołku niewłaściwym“. — Skoro za elementy wiązki (W) uważać będziemy wyłącznie tylko proste, wzgl. tylko płaszczyzny, przechodzące przez punkt W , to wówczas otrzymamy: wiązkę prostych, wzgl. wiązkę płaszczyzn. Niewłaściwą wiązkę prostych (S^∞) nazywać możemy też „wiązką prostych równoległych“.

Przestrzeń, t. j. zbiór (ogół) wszystkich punktów, płaszczyzn i prostych. Przyjmując za elementy przestrzeni tylko

punkty, otrzymujemy przestrzeń punktów. Podobnie nazywamy przestrzenią płaszczyzn, wzgl. przestrzenią prostych taką przestrzeń, której elementami są wyłącznie tylko płaszczyzny, wzgl. wyłącznie tylko proste.

Szereg punktów, pęk prostych i pęk płaszczyzn nazywamy utworami zasadniczymi gatunku pierwszego. Układ płaski i wiązka są utworami zasadniczymi gatunku drugiego, a przestrzeń jest utworem zasadniczym gatunku trzeciego.

Układ płaski i wiązka zawierają w sobie nieskończenie wiele utworów zasadniczych gatunku 1-go. Każdy bowiem punkt układu płaskiego (α) jest wierzchołkiem pęku prostych, leżących na płaszczyźnie α ; podobnie każda prosta układu (α) jest podstawą szeregu punktów. Każda prosta wiązki (W) jest osią pęku płaszczyzn, przyczem elementy (t. zn. płaszczyzny) tego pęku są zarazem elementami wiązki (W). Analogicznie każda płaszczyzna ε wiązki (W) jest podstawą pęku prostych (W) $_{\varepsilon}$ o wierzchołku W , przyczem elementy (t. zn. proste) owego pęku są też elementami i wiązki (W).

Wkońcu przestrzeń zawiera w sobie nieskończenie wiele utworów zasadniczych gatunku 1-go i 2-go. Każdy punkt przestrzeni może być uważany za wierzchołek wiązki, wzgl. pęku prostych, każda płaszczyzna przestrzeni za podstawę układu płaskiego, a każda prosta przestrzeni za oś pęku płaszczyzn, wzgl. za podstawę szeregu punktów. Elementy wymienionych utworów zasadniczych gatunku 1-go i 2-go są zarazem elementami przestrzeni.

3. Rzuty i przecięcia. W geometrii rzutowej występują dwa podstawowe działania¹⁾, a mianowicie rzucanie i przecięcie.

Dany szereg punktów $p(A, B, C, \dots)$ rzucić z dowolnego punktu E , nie leżącego (ryc. 2) na podstawie p tego szeregu, znaczy: skonstruować proste $a = EA, b = EB, c = EC, \dots, n = EN^{\infty}, \dots$, łączące dany punkt E z po-

Dany pęk płaszczyzn $p(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ przeciąć dowolną płaszczyzną ε , nie przechodzącą (ryc. 3) przez oś p tego pęku, znaczy: skonstruować proste $a = \varepsilon\alpha, b = \varepsilon\beta, c = \varepsilon\gamma, \dots$, przecięcia się danej płaszczyzny ε z poszcze-

¹⁾ Porównaj *F. Enriques*, l. c. str. 14.

szczególne punkty $A, B, C, \dots, N^\infty, \dots$, szeregu (p) .

Rzucając dany szereg punktów $p(A, B, C, \dots)$ z punktu E , otrzymujemy na płaszczyźnie $\pi = Ep$ pęk prostych $E(a, b, c, \dots)_\pi$,

gólnymi płaszczyznami $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ pęku (p) .

Przecinając dany pęk płaszczyzn $p(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ płaszczyzną ε , otrzymujemy pęk prostych $P(a, b, c, \dots)_\varepsilon$ o wierzchołku $P = \varepsilon p$,

przyczem pomiędzy elementami tych dwóch utworów zasadniczych gatunku 1-go zachodzi następująca zależność:

Każda prosta $a = EA$ pęku $(E)_\pi$ jest podporządkowana jednemu i tylko jednemu punktowi A szeregu (p) i naodwrot, każdy punkt A tego szeregu podporządkowany jest jednej i tylko jednej prostej $a = EA$ pęku $(E)_\pi$.

Każda prosta $a = \varepsilon a$ pęku $(P)_\varepsilon$ jest podporządkowana jednej i tylko jednej płaszczyźnie α pęku (p) , i naodwrot, każda płaszczyzna α tego pęku (p) podporządkowana jest jednej i tylko jednej prostej $a = \varepsilon a$ pęku $(P)_\varepsilon$.

Do tej samej zależności dojdziemy, skoro pęki prostych $(E)_\pi$ i $(P)_\varepsilon$ uważać będziemy za utwory dane. W istocie bowiem

dany pęk prostych $E(a, b, c, \dots)_\pi$ przeciąć prostą p , leżącą na płaszczyźnie podstawowej π i nie przechodzącą (ryc. 2) przez wierzchołek E danego pęku $(E)_\pi$, znaczy: konstruować punkty $A = pa, B = pb, C = pc, \dots$ przecięcia się prostej p z poszczególnymi prostymi $a, b, c, \dots$ pęku $(E)_\pi$.

Podobnie dany pęk prostych $E(a, b, c, \dots)_\pi$ przeciąć dowolną płaszczyznę ε , nie przechodzącą (ryc. 2) przez wierzchołek E , znaczy: konstruować punkty $A = \varepsilon a, B = \varepsilon b, C = \varepsilon c, \dots$ przebicia się płaszczyzny ε z poszczególnymi prostymi $a, b, c, \dots$ pęku $(E)_\pi$.

dany pęk prostych $P(a, b, c, \dots)_\varepsilon$ rzucić z prostej p , przechodzącej przez wierzchołek P , a nie leżącej na płaszczyźnie podstawowej ε (ryc. 3) danego pęku $(P)_\varepsilon$, znaczy: konstruować płaszczyzny $\alpha = pa, \beta = pb, \gamma = pc, \dots$, przechodzące przez prostą p i przez poszczególne proste $a, b, c, \dots$ pęku $(P)_\varepsilon$.

Podobnie dany pęk prostych $P(a, b, c, \dots)_\varepsilon$ rzucić z dowolnego punktu E , nie leżącego (ryc. 3) na płaszczyźnie podstawowej ε , znaczy: konstruować płaszczyzny $\alpha = Ea, \beta = Eb, \gamma = Ec, \dots$, łączące dany punkt E z poszczególnymi prostymi $a, b, c, \dots$ pęku $(P)_\varepsilon$.

Przecinając dany pęk prostych $E(a, b, c, \dots)_\pi$ prostą p (wzgl. płaszczyzną ϵ), otrzymujemy na prostej p (wzgl. na prostej $p = \epsilon\pi$) szereg punktów $p(A, B, C, \dots)$,

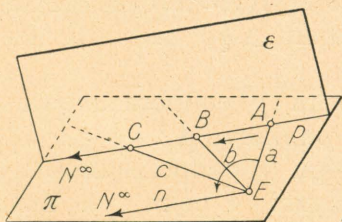
przyczem pomiędzy elementami tych dwóch różnoimiennych utworów zadniczych gatunku 1-go zachodzi znowu wypisana powyżej zależność:

Każdy punkt $A = pa$ (wzgl. $A = \epsilon a$) szeregu (p) podporządkowany jest jednej i tylko jednej prostej a pęku $(E)_\pi$, i naodwrot, każdej prostej a pęku $(E)_\pi$ podporządkowany jest jeden i tylko jeden punkt $A = pa$ (wzgl. $A = \epsilon a$) szeregu (p) . Elementy podporządkowane A i a przynależą do siebie,

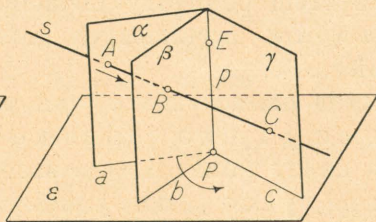
gdyż punkt A leży na prostej a , prosta a przechodzi przez punkt A , oraz płaszczyzna α przechodzi przez prostą a , prosta a leży na płaszczyźnie α .

Rzucając dany pęk prostych $P(a, b, c, \dots)_\epsilon$ z prostej p (wzgl. z punktu E), otrzymamy o osi p (wzgl. o osi $p = EP$) pęk płaszczyzn $p(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$,

Każda płaszczyzna $\alpha = pa$ (wzgl. $\alpha = Ea$) pęku (p) podporządkowana jest jednej i tylko jednej prostej a pęku $(P)_\epsilon$, i naodwrot, każdej prostej a pęku $(P)_\epsilon$ podporządkowana jest jedna i tylko jedna płaszczyzna $\alpha = pa$ (wzgl. $\alpha = Ea$) pęku (p) . Elementy podporządkowane α i a przynależą do siebie,



Ryc. 2.



Ryc. 3.

Taką zależność geometryczną, zachodzącą pomiędzy podporządkowanymi sobie elementami: *a*) szeregu punktów (p) i pęku prostych $(E)_\pi$, *b*) pęku płaszczyzn (p) i pęku prostych $(P)_\epsilon$, nazywamy „zależnością perspektywiczną” lub wprost *perspektywicznością*.

W powyższych przypadkach mówimy, że:

szereg punktów (p) i pęk prostych $(E)_\pi$ są odniesione do siebie perspektywicznie albo też, że są perspektywiczne. Mówimy też, że pęk prostych $(E)_\pi$ jest rzutem szeregu punktów (p) albo też, że szereg punktów (p) jest przecięciem pęku prostych $(E)_\pi$.

Dany szereg punktów $s(A, B, C, \dots)$ rzucić z dowolnej prostej p , nie przecinającej (ryc. 3) podstawy s tego szeregu, znaczy: skonstruować płaszczyzny $\alpha = pA$, $\beta = pB$, $\gamma = pC, \dots$, przechodzące przez prostą p i przez poszczególne punkty $A, B, C, \dots$ szeregu (s) . Rzucając dany szereg punktów $s(A, B, C, \dots)$ z prostej p , otrzymujemy pęk płaszczyzn $p(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ o osi p ,

pęk płaszczyzn (p) i pęk prostych $(P)_\epsilon$ są odniesione do siebie perspektywicznie, albo też, że są perspektywiczne. Mówimy też, że pęk prostych $(P)_\epsilon$ jest przecięciem pęku płaszczyzn (p) albo też, że pęk płaszczyzn (p) jest rzutem pęku prostych $(P)_\epsilon$.

Dany pęk płaszczyzn $p(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ przeciąć dowolną prostą s , nie przecinającą (ryc. 3) osi p tego pęku, znaczy: skonstruować punkty $A = s\alpha$, $B = s\beta$, $C = s\gamma, \dots$, przecięcia się prostej s z poszczególnymi płaszczyznami $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ pęku (p) . Przecinając dany pęk płaszczyzn $p(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ prostą s , otrzymujemy szereg punktów $s(A, B, C, \dots)$ o podstawie s ,

przyczem pomiędzy elementami tych dwóch różnoimiennych utworów zasadniczych gatunku 1-go zachodzi następująca zależność:

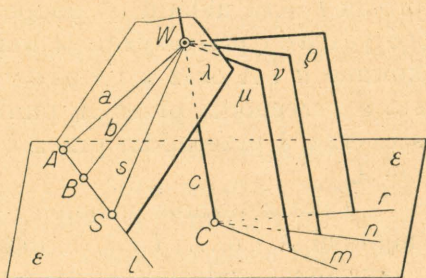
Każda płaszczyzna $\alpha = pA$ pęku (p) podporządkowana jest jednemu i tylko jednemu punktowi A szeregu (s) , i naodwrot, każdy punkt $A = s\alpha$ szeregu (s) podporządkowany jest jednej i tylko jednej płaszczyźnie α pęku (p) . Elementy podporządkowane α i A przynależą do siebie, gdyż α przechodzi przez punkt A , punkt A leży na płaszczyźnie α .

Taką zależność geometryczną, zachodzącą pomiędzy podporządkowanymi sobie elementami: A i α , B i β , C i $\gamma, \dots$ szeregu punktów (s) i pęku płaszczyzn (p) , nazywamy „zależnością perspektywiczną” lub perspektywicznością. W danym przypadku mówimy, że: szereg punktów (s) i pęk płaszczyzn (p) są odniesione do siebie perspektywicznie, albo też, że są perspektywiczne. Mówimy też, że pęk płaszczyzn (p)

jest rzutem szeregu punktów (s) albo też, że szereg punktów (s) jest przecięciem pęku płaszczyzn (p).

Z dotychczasowych rozważań naszych wynika, że zapomocą rzucania i przecinania przejść można od każdego utworu zasadniczego gatunku 1-go do dwu pozostałych utworów zasadniczych gatunku 1-go.

Dwa podstawowe działania geometrii rzutowej, t. j. rzucanie i przecinanie, zastosujemy teraz do utworów zasadniczych gatunku 2-go, t. zn. do układu płaskiego i wiązki.



Ryc. 4.

Dany układ płaski ε ($A, B, C, \dots, l, m, n, \dots$) rzucić z dowolnego punktu W , nie leżącego (ryc. 4) na płaszczyźnie podstawowej ε uważanego układu płaskiego (ε), znaczy: skonstruować proste $a = WA$, $b = WB$, $c = WC, \dots$, oraz płaszczyzny $\lambda = Wl$, $\mu = Wm$, $\nu = Wn, \dots$, przechodzące przez dany punkt W i przez poszczególne punkty $A, B, C, \dots$, oraz przez poszczególne proste $l, m, n, \dots$ układu płaskiego (ε).

Rzucając dany układ płaski ε ($A, B, C, \dots, l, m, n, \dots$) z punktu W , otrzymujemy wiązkę $W(a, b, c, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots)$ o wierzchołku W ,

Daną wiązkę środkową $W(a, b, c, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots)$ przeciąć dowolną płaszczyzną (ε), nie przechodzącą (ryc. 4) przez wierzchołek (środek) W uważanej wiązki (W), znaczy: skonstruować punkty $A = \varepsilon a$, $B = \varepsilon b$, $C = \varepsilon c, \dots$, oraz proste $l = \varepsilon \lambda$, $m = \varepsilon \mu$, $n = \varepsilon \nu, \dots$, przecięcia się danej płaszczyzny ε z poszczególnymi prostymi $a, b, c, \dots$, oraz z poszczególnymi płaszczyznami $\lambda, \mu, \nu, \dots$ wiązki (W).

Przecinając daną wiązkę $W(a, b, c, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots)$ płaszczyzną ε , otrzymujemy układ płaski ε ($A, B, C, \dots, l, m, n, \dots$) o płaszczyźnie podstawowej ε ,

przyczem pomiędzy elementami A i a , B i b , C i $c, \dots$, l i λ , m i μ , n i $\nu, \dots$ tych dwóch różnoimiennych utworów zasadniczych gatunku 2-go zachodzi następująca zależność:

Każda prosta $a = WA$ wiązki (W) podporządkowana jest jednemu i tylko jednemu punktowi A układu (ε), i na-

odwrot każdy punkt $A = \varepsilon a$ układu (ε) podporządkowany jest jednej i tylko jednej prostej a wiązki (W). Podobnie każda płaszczyzna $\lambda = Wl$ wiązki (W) podporządkowana jest jednej i tylko jednej prostej l układu (ε), i naodwrot, każda prosta $l = \varepsilon \lambda$ układu (ε) podporządkowana jest jednej i tylko jednej płaszczyźnie λ wiązki (W). Elementy podporządkowane a i A oraz λ i l przynależą do siebie, gdyż prosta a przechodzi przez A , punkt A leży na prostej l , oraz płaszczyzna λ przechodzi przez l , prosta zaś l leży na płaszczyźnie λ .

Taką zależność geometryczną, zachodzącą pomiędzy elementami A i $a, \dots, l$ i $\lambda, \dots$ układu płaskiego (ε) i wiązki (W), nazywamy „zależnością perspektywiczną” lub wprost perspektywicznością. W danym przypadku mówimy, że układ płaski (ε) i wiązka (W) są odniesione do siebie perspektywicznie albo też, że są perspektywiczne. Mówimy też, że wiązka (W) jest rzutem układu płaskiego (ε) albo też, że układ płaski (ε) jest przecięciem wiązki (W).

Skoro układ płaski (ε) i wiązka (W) są perspektywiczne, to z łatwością stwierdzimy, że:

każdemu szeregowi punktów $l(A, B, \dots)_\varepsilon$, należącemu (ryc. 4) do układu płaskiego (ε), podporządkowany jest w wiązce (W) perspektywiczny do niego pęk prostych $W(a, b, \dots)_\lambda$, o wierzchołku W i płaszczyźnie podstawowej $\lambda = Wl$, i naodwrot, każdemu pękowi prostych $W(a, b, \dots)_\lambda$, należącemu do wiązki (W), podporządkowany jest w układzie płaskim (ε) perspektywiczny do niego szereg punktów $l(A, B, \dots)_\varepsilon$ o podstawie $l = \varepsilon \lambda$, leżącej na płaszczyźnie ε .

każdemu pękowi płaszczyzn $c(\alpha, \beta, \dots)_W$, należącemu (ryc. 4) do wiązki (W), podporządkowany jest w układzie płaskim (ε) perspektywiczny do niego pęk prostych $C(\alpha, \beta, \dots)_\varepsilon$, o wierzchołku $C = \varepsilon c$ i płaszczyźnie podstawowej ε , i naodwrot, każdemu pękowi prostych $C(\alpha, \beta, \dots)_\varepsilon$, należącemu do układu płaskiego (ε), podporządkowany jest w wiązce (W) perspektywiczny do niego pęk płaszczyzn $c(\alpha, \beta, \dots)_W$ o osi $c = WC$, przechodzącej przez wierzchołek W .

Z rozważań naszych wynika tedy, że zapomocą rzucania i przecinania przejść można od jednego utworu zasadniczego gatunku 2-go do drugiego utworu zasadniczego gatunku 2-go.

Wkońcu zauważyć musimy, że w rozważaniach ust. 3-go nie czyniliśmy żadnej różnicy pomiędzy elementami właściwymi i niewłaściwymi. Utwory zasadnicze gatunku 1-go i 2-go — które mogą być (ust. 2) utworami „właściwymi” lub „niewłaściwymi” — rzucać możemy z punktu właściwego lub

niewłaściwego, wzgl. z prostej właściwej lub niewłaściwej, oraz przecinać możemy prostą (wzgl. płaszczyzną) właściwą lub niewłaściwą.

4. Pewnik ciągłości. Na prostej p (ryc. 1) uważajmy odcinek $\overline{ABC}$, przyczem uwzględniać będziemy zbiór punktów tego odcinka, a nie jego długość. Punkt ruchomy opisać może ów odcinek w dwojaki sposób: 1) Wychodząc z położenia początkowego A i poruszając się w stałym kierunku ABC , albo też 2) wychodząc z położenia początkowego C i poruszając się w stałym, ale wprost przeciwnym do poprzedniego, kierunku CBA . Uważany odcinek $\overline{ABC}$ podzielić możemy punktem B na dwie części, które posiadają następujące własności: *a)* Każdy punkt odcinka $\overline{ABC}$ należy do jednej z tych części; *b)* Element B należy może (wedle założenia) do jednej lub do drugiej części; *c)* Każdy punkt pierwszej części wyprzedza każdy punkt części drugiej, a każdy element części drugiej następuje po każdym punkcie części pierwszej.

Teraz wprowadzimy pewnik ciągłości *Dedekinda*:

Jeżeli odcinek $\overline{AC}$ prostej p podzielony jest na dwie części w ten sposób, że: 1) każdy punkt odcinka $\overline{AC}$ należy do jednej z tych części; 2) punkt A należy do pierwszej części, a punkt C do drugiej części; 3) każdy punkt części pierwszej wyprzedza każdy punkt części drugiej, — to wówczas istnieje jeden i tylko jeden punkt B odcinka $\overline{AC}$ (który może należeć do części pierwszej albo też do części drugiej) tego rodzaju, że każdy punkt odcinka $\overline{AC}$, wyprzedzający B , należy do części pierwszej, każdy zaś punkt odcinka $\overline{AC}$, następujący po elemencie B , należy do części drugiej w ustanowionym podziale.

Punkt B nazywamy wówczas przekrojem uważanego odcinka $\overline{AC}$. Stosując powyższy pewnik do każdego odcinka prostej podstawowej p , ustalamy tem samem ciągłość szeregu punktów $p(A, B, C, \dots)$. Ponieważ każdy pęk prostych i każdy pęk płaszczyzn odnieść możemy perspektywicznie (ust. 3) do pomocniczego szeregu punktów (p), przeto z ciągłości szeregu (p) wynika bezpośrednio ciągłość pęku prostych i pęku płaszczyzn.



Układ płaski jest ciągły ze względu na swoje punkty i proste, gdyż wszystkie jego szeregi punktów i wszystkie jego pęki prostych są ciągle. Ponieważ każdą wiązkę odnieść możemy perspektywicznie do pomocniczego układu płaskiego (π), przeto z ciągłości układu płaskiego (π) wynika ciągłość wiązki. Przestrzeń jest również ciągła, gdyż zawarte w niej wszystkie utwory zasadnicze gatunku 1-go i 2-go są utworami ciągłymi.

5. Zasady biegunowej dwoistości. W ustępie 1-szym wypisaliśmy obok siebie cztery pary twierdzeń, odnoszących się do zasadniczych elementów (właściwych i niewłaściwych). Skoro w twierdzeniach, wypisanych po lewej stronie (linji pionowej), zastąpimy wyraz „punkt“ wyrazem „płaszczyzna“ i odwrotnie wyraz „płaszczyzna“ wyrazem „punkt“, a nadto pozostawimy bez zmiany wyraz „prosta“, — to otrzymamy wówczas twierdzenia, wypisane po stronie prawej. Przez przemianę elementów „punkt“ i „płaszczyzna“ na elementy „płaszczyzna“ i „punkt“ podporządkowaliśmy każdemu twierdzeniu z lewej strony inne twierdzenie, wypisane po stronie prawej. Dwa w ten sposób podporządkowane sobie twierdzenia nazywać będziemy twierdzeniami dwoistemi lub wzajemnemi.

Podamy teraz kilka przykładów, w których występują utwory geometryczne podporządkowane sobie „wzajemnie“, a mianowicie:

Szereg punktów p ($A, B, C, \dots$).	Pęk płaszczyzn p ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$).
Pęk płaszczyzn l ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$).	Szereg punktów l ($A, B, C, \dots$).
Układ płaski punktów.	Wiązka płaszczyzn.
Układ płaski prostych.	Wiązka prostych.
Układ płaski (ω).	Wiązka (W).
Wiązka (S).	Układ płaski (σ).
Przestrzeń punktów $A, B, C, \dots$ i płaszczyzn $\delta, \epsilon, \varphi, \dots$	Przestrzeń płaszczyzn $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ i punktów $D, E, F, \dots$

Z rozważań ust. 3. wynika, że dwa zasadnicze działania geometryczne: rzucanie i przecinanie również podporządkowane są sobie dwoście.

Powyższe przykłady pouczają nas, że skoro „punkt“ i „płaszczyznę“ uważać będziemy za elementy odpowiadające sobie dwoście (wzajemnie), — to wówczas każdemu utworowi geo-

metrycznemu Φ_1 podporządkować możemy inny utwór geometryczny Φ_2 . Każda własność opisowa utworu Φ_2 wyprowadza się z własności opisowej utworu Φ_1 przez przemianę elementów: punkt i płaszczyzna, na elementy: płaszczyzna i punkt. Wystarczy dowieść prawdziwości pewnego twierdzenia, odnoszącego się do własności opisowych¹⁾ utworu geometrycznego Φ_1 , a następnie, stosując poznaną przemianę elementów: punkt i płaszczyzna, wypowiedzieć wprost twierdzenie dwoiste (wzajemne) dla utworu geometrycznego Φ_2 . Uzyskane w ten sposób twierdzenia geometrii rzutowej połączone są w pary według pewnej zasady, zwanej zasadą biegunowej dwoistości. Stosowanie tej zasady ułatwia w znacznej mierze studjum geometrii rzutowej, gdyż dzieli odnośny materiał naukowy na dwie części.

W rozważaniach naszych posługiwać się będziemy stale zasadą biegunowej dwoistości, ale często — dla tem silniejszego uwypuklenia — przeprowadzać będziemy równocześnie obydwa dowody dla twierdzeń, podporządkowanych sobie wzajemnie. Prawdziwości tej zasady dowiódł *Poncelet*, a odnośne dowody przeprowadzimy w części II-ej niniejszego podręcznika.

Niechaj dany będzie pewien płaski utwór geometryczny Φ_1 , leżący na dowolnej płaszczyźnie ω . Stosując poznaną zasadę biegunowej dwoistości, podporządkujemy płaszczyźnie podstawowej ω układu płaskiego (ω) wierzchołek W wiązki (W). Ponieważ utwór geometryczny Φ_1 przynależy do układu płaskiego (ω), przeto dwoiście (wzajemnie) odpowiadający mu utwór geometryczny Φ_2 należeć będzie do wiązki (W). Każdej własności opisowej utworu płaskiego Φ_1 podporządkowana będzie — na mocy zasady biegunowej dwoistości — inna własność opisowa utworu Φ_2 , należącego do wiązki (W).

Oprócz tej zasady biegunowej dwoistości istnieją jeszcze dwie inne zasady biegunowej dwoistości, które pozwalają: *a/* każdemu utworowi geometrycznemu Φ_1 , należącemu do układu płaskiego (ω), podporządkować inny utwór płaski Φ_2 , należący również do tego samego układu (ω); *b/* każdemu utworowi geometrycznemu Φ_1 , przynależnemu do wiązki (W), podporządkować inny utwór geometryczny Φ_2 , należący również do tej samej wiązki (W). Celem odróżnienia tych zasad, nazywać bę-

¹⁾ Własności miarowe (z wyjątkiem t. zw. miarowo-rzutowych, p. ust. 41) nie podlegają prawu biegunowej dwoistości.

dziemy zasadę omówioną poprzednio „zasadą biegunowej dwoistości w przestrzeni“, a dwie dalsze „zasadą biegunowej dwoistości na płaszczyźnie“ i „zasadą biegunowej dwoistości w wiązce“.

W myśl zasady biegunowej dwoistości na płaszczyźnie — elementy: „punkt“ i „prosta“ uważać będziemy za elementy podporządkowane sobie wzajemnie. Oto kilka przykładów:

Punkt A .

Prosta $l = AB$, określona punktami A i B .

Szereg punktów $p(A, B, C, \dots)_\omega$.

Pęk prostych $W(a, b, c, \dots)_\omega$.

Trzy punkty A, B i C , układu płaskiego ω , wyznaczają trójkąt (ABC) .

Cztery punkty A, B, C i D układu płaskiego (ω) , z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, wyznaczają czworokąt zupełny. Wielokąt ten (ryc. 17) posiada cztery wierzchołki: A, B, C i D , oraz sześć boków (proste): AB i CD , AC i BD , AD i BC .

Płaski n -kąt zupełny posiada n wierzchołków (z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej) i $\frac{1}{2}n(n-1)$ boków, określonych przez każde dwa z pośród n danych wierzchołków.

Prosta a .

Punkt $L = ab$, określony prostymi a i b .

Pęk prostych $P(a, b, c, \dots)_\omega$.

Szereg punktów $w(A, B, C, \dots)_\omega$.

Trzy proste a, b i c , układu płaskiego ω , wyznaczają trójbok (abc) .

Cztery proste a, b, c i d układu płaskiego (ω) , z których żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, wyznaczają czworobok zupełny. Wielobok ten (ryc. 18) posiada cztery boki: a, b, c i d , oraz sześć wierzchołków (punktów): ab i cd , ac i bd , ad i bc .

Płaski n -bok zupełny posiada n boków (z których żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt) i $\frac{1}{2}n(n-1)$ wierzchołków, określonych przez każde dwa z pośród n danych boków.

W myśl zasady biegunowej dwoistości w wiązce — elementy: „prosta“ i „płaszczyzna“ uważać będziemy za elementy podporządkowane sobie dwoicie. Podamy kilka przykładów:

Prosta α .

Płaszczyzna $\varepsilon = ab$, określona dwiema prostymi a i b .

Płaszczyzna α .

Prosta $e = \alpha\beta$, określona dwiema płaszczyznami α i β .

Pęk prostych $W(a, b, c, \dots)_\varepsilon$ o płaszczyźnie podstawowej ε , przechodzącej przez wierzchołek W wiązki.

Pęk płaszczyzn $p(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots)_W$ przynależnych do wiązki (W) .

Trzy proste a, b i c wiązki (W) , nie leżące w jednej płaszczyźnie, określają trójkrawędź. Proste a, b, c są krawędziami, a płaszczyzny ab, bc i ca są ścianami trójkrawędzi.

Cztery proste a, b, c i d wiązki (W) , z których żadne trzy nie leżą na jednej płaszczyźnie, określają czworokrawędź zupełną. Posiada ona cztery krawędzie: a, b, c i d , oraz sześć ścian: ab i cd, ac i bd, ad i bc . N prostych wiązki (W) , z których żadne trzy nie leżą na jednej płaszczyźnie, określają n -krawędź zupełną. Posiada ona $\frac{1}{2}n(n-1)$ ścian, określonych przez każde dwie z pośród n danych krawędzi.

Pęk płaszczyzn $e(\alpha, \beta, \gamma, \dots)_W$ o osi e , przechodzącej przez wierzchołek W wiązki.

Pęk prostych $W(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots)_\pi$ przynależnych do wiązki (W) .

Trzy płaszczyzny α, β i γ wiązki (W) , nie przechodzące przez jedną prostą, określają kąt trójsięcienny. Płaszczyzny α, β i γ są ścianami, a proste $\alpha\beta, \beta\gamma$ i $\gamma\alpha$ są krawędziami kąta trójsięciennego.

Cztery płaszczyzny α, β, γ i δ wiązki (W) , z których żadne trzy nie przechodzą przez jedną prostą, określają kąt czworosięcienny zupełny. Posiada on cztery ściany: α, β, γ i δ , oraz sześć krawędzi: $\alpha\beta$ i $\gamma\delta, \alpha\gamma$ i $\beta\delta, \alpha\delta$ i $\beta\gamma$. N płaszczyzn wiązki (W) , z których żadne trzy nie przechodzą przez jedną prostą, określają kąt n -sięcienny zupełny. Posiada on $\frac{1}{2}n(n-1)$ krawędzi, określonych przez każde dwie z pośród n danych ścian.

W rozważaniach naszych stosować będziemy zasady biegunowej dwoistości na płaszczyźnie i w wiązce, gdyż uzyskamy wówczas ogromną przejrzystość w układzie materiału. Wystarczy bowiem udowodnić pewne twierdzenia dla utworów geometrycznych, przynależnych do układu płaskiego (ω) , wzgl. do wiązki (W) , a następnie, stosując przemianę elementów: punkt i prosta, lub prosta i płaszczyzna, wypowiedzieć wprost twierdzenia dwoiste (wzajemne) dla innych utworów geometrycznych, należących do tego samego układu płaskiego (ω) , wzgl. do tej samej wiązki (W) . Prawdziwości tych zasad biegunowej dwoistości (na płaszczyźnie i w wiązce) dowiódł *Poncelet*, a odnośniami dowodami zajmujemy się w ust. 41-ym i w części II-iej niniejszego podręcznika.

ROZDZIAŁ II.

Rzutowości pomiędzy utworami zasadniczymi gatunku pierwszego.

6. Perspektywiczność utworów zasadniczych gatunku 1-go.

Dwa zasadnicze działania geometrii rzutowej, t. j. rzucanie i przecinanie, pozwoliły nam (ust. 3) ustanowić perspektywiczność pomiędzy dwoma „różnoimiennymi“ utworami zasadniczymi gatunku 1-go, a mianowicie pomiędzy: *a)* szeregiem punktów (p) i pękiem prostych $(E)_\pi$, *b)* szeregiem punktów (s) i pękiem płaszczyzn (p), *c)* pękiem prostych $(P)_\varepsilon$ i pękiem płaszczyzn (p).

Dwa takie *różnoimiennie* utwory zasadnicze gatunku 1-go zdefiniowaliśmy jako perspektywiczne wówczas, skoro:

1) każdemu elementowi jednego utworu podporządkowany był jeden i tylko jeden element utworu drugiego, i naodwrot, każdemu elementowi utworu drugiego podporządkowany był jeden i tylko jeden element w utworze pierwszym;

2) każde dwa podporządkowane sobie elementy przynależały do siebie.

Celem oznaczenia, że dwa utwory geometryczne są perspektywiczne, używać będziemy symbolu $\overline{\wedge}$. W rozważanych trzech przypadkach napiszemy:

a) $p(A, B, C, \dots) \overline{\wedge} E(a, b, c, \dots)_\pi$ lub w formie skróconej $(p) \overline{\wedge} (E)_\pi$,

[czytaj: szereg punktów (p) perspektywiczny do pęku prostych $(E)_\pi$].

b) $s(A, B, C, \dots) \overline{\wedge} p(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ lub: $(s) \overline{\wedge} (p)$,

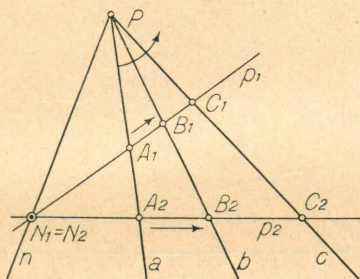
[czytaj: szereg punktów (s) perspektywiczny do pęku płaszczyzn (p)].

c) $P(a, b, c, \dots)_\varepsilon \overline{\wedge} p(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ lub: $(P)_\varepsilon \overline{\wedge} (p)$,

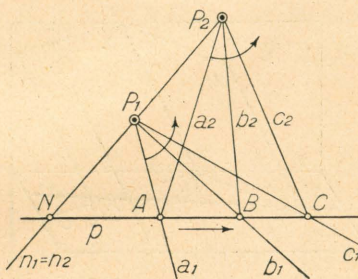
[czytaj: pęk prostych $(P)_\varepsilon$ perspektywiczny do pęku płaszczyzn (p)].

W tych trzech przypadkach elementami podporządkowanymi są: a) punkt A i prosta a , b) punkt A i płaszczyzna α , c) prosta a i płaszczyzna α . Takie elementy podporządkowane sobie w owych utworach perspektywicznych nazywać też będziemy „elementami odpowiadającymi sobie” lub „elementami homologicznymi”.

Skoro szereg punktów (p) jest perspektywiczny do pęku prostych $(E)_\pi$, to mówimy też (ust. 3), że: szereg (p) jest przecięciem pęku $(E)_\pi$, a pęk $(E)_\pi$ jest rzutem szeregu (p) . Podobnie gdy $s(A, \dots) \overline{\wedge} p(\alpha, \dots)$, to mówimy, że: szereg punktów (s) jest przecięciem pęku płaszczyzn (p) , a pęk płaszczyzn (p) jest rzutem szeregu (s) . Wreszcie celem oznaczenia utworów $P(a, \dots) \overline{\wedge} p(\alpha, \dots)$ używać będziemy też zwrotów: pęk prostych (P) jest przecięciem pęku płaszczyzn (p) , oraz pęk płaszczyzn (p) jest rzutem pęku prostych (P) .



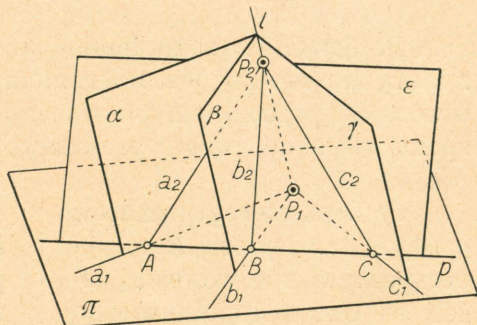
Ryc. 5.



Ryc. 6.

Dotychczas omawialiśmy perspektywiczność dwóch „różniamiennych” utworów zasadniczych gatunku 1-go. Obecnie zdefiniujemy perspektywiczność dwóch „jednoimiennych” utworów zasadniczych gatunku 1-go, a mianowicie: a) dwóch szeregów punktów, b) dwóch pęków prostych, oraz c) dwóch pęków płaszczyzn.

Dwa jednoimienne utwory zasadnicze gatunku 1-go nazywamy perspekty-



Ryc. 7.

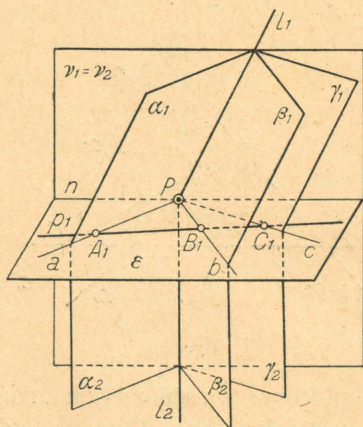
wiecznymi wówczas, jeżeli owe utwory są równocześnie albo rzutami, albo też równocześnie obydwie są przecięciami jednego i tego samego utworu zasadniczego gatunku 1-go.

Perspektywicznymi są zatem takie :

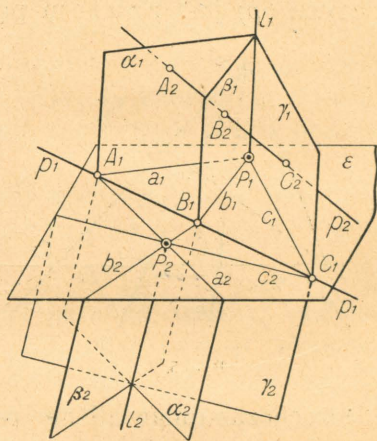
a) dwa szeregi punktów $p_1(A_1, B_1, \dots)$ i $p_2(A_2, B_2, \dots)$, które są przecięciami pęku prostych (ryc. 5) $P(a, b, \dots)$ lub pęku płaszczyzn (ryc. 9) $l_1(\alpha_1, \beta_1, \dots)$.

b) dwa pęki płaszczyzn $l_1(\alpha_1, \beta_1, \dots)$ i $l_2(\alpha_2, \beta_2, \dots)$, które są (ryc. 8) rzutami pęku prostych $P(a, b, \dots)_\varepsilon$ lub szeregu punktów $p_1(A_1, B_1, \dots)$.

c) dwa pęki prostych $P_1(a_1, b_1, \dots)$ i $P_2(a_2, b_2, \dots)$, które są (ryc. 6 i ryc. 7) rzutami szeregu punktów $p(A, B, \dots)$ lub też (ryc. 7) przecięciami pęku płaszczyzn $l(\alpha, \beta, \dots)$.



Ryc. 8.



Ryc. 9.

Ponieważ dwa różnoimienne utwory zasadnicze gatunku 1-go, z których pierwszy jest np. rzutem drugiego, a tem samem drugi utwór jest przecięciem pierwszego, nazwaliśmy poprzednio perspektywicznymi, przeto prawdziwe są związki następujące :

a) Dwa szeregi punktów $p_1(A_1, B_1, \dots)$ i $p_2(A_2, B_2, \dots)$ są perspektywiczne wówczas, jeżeli są one perspektywiczne albo do jednego i tego samego

b) Dwa pęki płaszczyzn $l_1(\alpha_1, \beta_1, \dots)$ i $l_2(\alpha_2, \beta_2, \dots)$ są perspektywiczne wówczas, jeżeli są one perspektywiczne albo do jednego i tego samego

pęku prostych $P(a, b, \dots)$, albo też do pęku płaszczyzn $l_1(\alpha_1, \beta_1, \dots)$.

pęku prostych $P(a, b, \dots)$, albo też do szeregu punktów $p_1(A_1, B_1, \dots)$.

c) Dwa pęki prostych $P_1(a_1, b_1, \dots)$ i $P_2(a_2, b_2, \dots)$ są perspektywiczne wówczas, jeśli są one perspektywiczne albo do jednego i tego samego szeregu punktów $p(A, B, \dots)$, albo też do pęku płaszczyzn $l(\alpha, \beta, \dots)$.

Uwaga: Skoro dwa jednoimiennie utwory zasadnicze gatunku 1-go są perspektywiczne do jednoimiennego z nimi trzeciego utworu zasadniczego gatunku 1-go, to owe dwa utwory (patrz ust. 7) mogą być, ale nie muszą koniecznie być, utworami perspektywicznymi!

Ustalone powyżej zależności wypisać możemy w następującej formie symbolicznej:

Skoro spełnione są związki

$p_1(A_1, B_1, \dots) \overline{\wedge} P(a, b, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, \dots)$ lub $p_1(A_1, B_1, \dots) \overline{\wedge} l_1(\alpha, \beta, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, \dots)$ to wówczas jest $p_1(A_1, B_1, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, \dots)$.

$l_1(\alpha_1, \beta_1, \dots) \overline{\wedge} P(a, b, \dots) \overline{\wedge} l_2(\alpha_2, \beta_2, \dots)$ lub $l_1(\alpha_1, \beta_1, \dots) \overline{\wedge} p_1(A_1, B_1, \dots) \overline{\wedge} l_2(\alpha_2, \beta_2, \dots)$ to wówczas jest $l_1(\alpha_1, \beta_1, \dots) \overline{\wedge} l_2(\alpha_2, \beta_2, \dots)$.

Podobnie ze związków

$P_1(a_1, b_1, \dots) \overline{\wedge} p(A, B, \dots) \overline{\wedge} P_2(a_2, b_2, \dots)$ lub $P_1(a_1, b_1, \dots) \overline{\wedge} l(\alpha, \beta, \dots) \overline{\wedge} P_2(a_2, b_2, \dots)$ wynika zależność: $P_1(a_1, b_1, \dots) \overline{\wedge} P_2(a_2, b_2, \dots)$.

Skoro pęki prostych

$P_1(a_1, b_1, \dots) \overline{\wedge} P_2(a_2, b_2, \dots)$ są (ryc. 6 i 7) rzutami szeregu punktów $p(A, B, \dots)$, to: 1) każdej prostej $a_1 = P_1A$ pęku (P_1) podporządkowana jest jedna i tylko jedna prosta $a_2 = P_2A$ w pęku (P_2) , i naodwrot, każdej prostej a_2 pęku (P_2) podporządkowana jest jedna i tylko jedna prosta a_1 w pęku (P_1) ; 2) każde dwie homologiczne proste $a_1 = P_1A$ i $a_2 = P_2A$ tych pęków przechodzą przez punkt A pomocniczego szeregu (p) .

Skoro pęki prostych

$P_1(a_1, b_1, \dots)_\pi \overline{\wedge} P_2(a_2, b_2, \dots)_\varepsilon$ są (ryc. 7) przecięciami pęku płaszczyzn $l(\alpha, \beta, \dots)$, to: 1) każdej prostej $a_1 = \pi\alpha$ pęku $(P_1)_\pi$ podporządkowana jest jedna i tylko jedna prosta $a_2 = \varepsilon\alpha$ w pęku $(P_2)_\varepsilon$, i naodwrot, każdej prostej a_2 pęku $(P_2)_\varepsilon$ podporządkowana jest jedna i tylko jedna prosta a_1 w pęku $(P_1)_\pi$; 2) każde dwie homologiczne proste $a_1 = \pi\alpha$ i $a_2 = \varepsilon\alpha$ tych pęków leżą na płaszczyźnie α pomocniczego pęku (l) .

Analogiczne zależności zachodzą pomiędzy homologicznymi punktami A_1 i A_2 dwóch perspektywicznych szeregów punktów (p_1) i (p_2) , oraz pomiędzy homologicznymi płaszczyznami α_1 i α_2 dwóch perspektywicznych pęków płaszczyzn (l_1) i (l_2) . A zatem:

Skoro dwa *jednoimienne* utwory zasadnicze gatunku 1-go — będące rzutami, wzgl. przecięciami jednego i tego samego pomocniczego trzeciego utworu zasadniczego gatunku 1-go — są perspektywiczne, to wówczas:

1) każdemu elementowi jednego utworu podporządkowany jest jeden i tylko jeden element utworu drugiego, i naodwrot, każdemu elementowi utworu drugiego podporządkowany jest jeden i tylko jeden element w utworze pierwszym;

2) każde dwa podporządkowane sobie elementy tych dwóch utworów przynależą do elementu utworu trzeciego.

Taką zależność geometryczną, zachodzącą pomiędzy podporządkowanymi sobie (homologicznymi) elementami uważanych dwóch jednoimiennych utworów zasadniczych gatunku 1-go, nazywamy „zależnością perspektywiczną“ lub *perspektywiznością*.

Niechaj dane będą dwa perspektywiczne szeregi punktów (p_1) i (p_2) , które leżą (ryc. 5) na płaszczyźnie i są przekrojami pęku prostych $P(a, b, \dots)$. Wiadomo nam, że każda prosta a pęku (P) wyznacza dwa homologiczne punkty $A_1 = p_1a$ i $A_2 = p_2a$ szeregów $(p_1) \overline{\wedge} (p_2)$. Również i prosta n , łącząca punkt p_1p_2 z wierzchołkiem P , wyznaczy dwa homologiczne punkty $N_1 = p_1n$ i $N_2 = p_2n$ tych szeregów. Punkt $N_1 = N_2 = p_1p_2$, w którym schodzą (nakrywają) się dwa podporządkowane sobie punkty szeregów $(p_1) \overline{\wedge} (p_2)$, nazywamy ich elementem „odpowiednio wspólnym“ lub *zjednoczonym*.

Prawdziwe są zatem twierdzenia, odpowiadające sobie (ust. 5) w myśl zasady biegunowej dwoistości na płaszczyźnie:

Dwa perspektywiczne szeregi punktów, leżące na jednej płaszczyźnie, posiadają tę własność, że punkt przecięcia się ich podstaw jest elementem zjednoczonym.

Dwa perspektywiczne pęki prostych, leżące na jednej płaszczyźnie, posiadają tę własność, że prosta łącząca ich wierzchołki jest elementem zjednoczonym.

Stosując do powyższych twierdzeń zasadę biegunowej dwoistości w przestrzeni (ust. 5), otrzymamy (ryc. 8) dwa nowe twierdzenia:

Dwa perspektywiczne pęki płaszczyzn, których osie przecinają się, posiadają tę własność, że płaszczyzna łącząca ich osie jest elementem zjednoczonym.

Dwa perspektywiczne pęki prostych, których wierzchołki schodzą się w jednym punkcie, posiadają tę własność, że prosta przecięcia się ich płaszczyzn podstawowych jest elementem zjednoczonym.

Z łatwością zauważymy, że te dwa ostatnie twierdzenia podporządkowane są sobie w myśl zasady biegunowej dwoistości w wiązce.

7. Rzutowość utworów zasadniczych gatunku 1-go. Dwa zasadnicze działania geometrii rzutowej, t. j. rzucanie i przecinanie, pozwoliły nam (ust. 6) ustanowić perspektywiczność pomiędzy utworami zasadniczymi gatunku 1-go. Wykażemy teraz, że te dwa działania, wykonywane kolejno, umożliwią ustalenie ogólniejszych zależności geometrycznych.

W tym celu dany np. pęk prostych $P_1(a_1, b_1, \dots)$ przetnijmy dowolną prostą p_1 w szeregu punktów $p_1(A_1, B_1, \dots) \overline{\wedge} (P_1)$, a szereg (p_1) rzućmy następnie z dowolnego punktu P_2 , otrzymując pęk prostych $P_2(a_2, b_2, \dots) \overline{\wedge} (p_1)$. W ten sam sposób na dowolnej prostej p_2 skonstruować możemy (ryc. 10) szereg punktów $p_2(A_2, B_2, \dots) \overline{\wedge} (P_2)$, następnie pęk prostych $P_3(a_3, b_3, \dots) \overline{\wedge} (p_2)$, wreszcie szereg punktów $p_3(A_3, B_3, \dots) \overline{\wedge} (P_3)$. Zauważyć musimy, że elementy: P_1 i p_1 , p_1 i P_2 , P_2 i p_3 nie mogą przynależeć do siebie.

Poszczególne pęki prostych (P_i) i szeregi punktów (p_i) ($i = 1, 2, 3$) uważać możemy za „ogniwa“ łańcucha

$$P_1(a_1, b_1, \dots) \overline{\wedge} p_1(A_1, B_1, \dots) \overline{\wedge} P_2(a_2, b_2, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, \dots) \overline{\wedge} \\ \overline{\wedge} P_3(a_3, b_3, \dots) \overline{\wedge} p_3(A_3, B_3, \dots)$$

lub w formie skróconej

$$(P_1) \overline{\wedge} (p_1) \overline{\wedge} (P_2) \overline{\wedge} (p_2) \overline{\wedge} (P_3) \overline{\wedge} (p_3),$$

którego każde dwa bezpośrednio po sobie następujące („sąsiednie“) ogniwa są utworami perspektywicznymi. Z łatwością jednak zauważymy, że perspektywicznymi są nie tylko każde

dwa sąsiednie ogniwa, ale również (ust. 6) pęki prostych $(P_1) \overline{\wedge} (P_2)$ i $(P_2) \overline{\wedge} (P_3)$, oraz szeregi punktów $(p_1) \overline{\wedge} (p_2)$ i $(p_2) \overline{\wedge} (p_3)$. Natomiast ogniwa np. (P_1) i (p_2) , (p_1) i (P_3) , (P_2) i (p_3) , (P_1) i (p_3) tego łańcucha nie są utworami perspektywicznymi. Pęk prostych (P_1) i szereg punktów (p_3) , t. zn. „końcowe” ogniwa wypisanego łańcucha, zdefiniujemy jako: utwory odniesione do siebie rzutowo (lub „zapomocą skończonej liczby rzutów i przecięć”), utwory *rzutowe* lub *jednokreślne*.

Wprowadzimy obecnie następującą definicję *Cremony*:

Dwa utwory zasadnicze gatunku 1-go nazywamy rzutowymi (albo jednokreślnymi) wówczas, jeśli są one końcowymi ogniwami łańcucha utwo-

rów zasadniczych gatunku 1-go, którego każde dwa sąsiednie ogniwa są perspektywiczne.

Z perspektywiczności sąsiednich ogniw wypisanego powyżej łańcucha wynika, że: Każdej prostej a_1 pęku (P_1) podporządkowany jest jeden i tylko jeden punkt $A_1 = a_1 p_1$ szeregu (p_1) , punktowi A_1 podporządkowana jest jedna i tylko jedna prosta $a_2 = A_1 P_2$ w pęku (P_2) , prostej zaś a_2 odpowiada jeden tylko punkt $A_2 = a_2 p_2$ w szeregu (p_2) , punktowi A_2 odpowiada jedna tylko prosta $a_3 = A_2 P_3$ w pęku (P_3) , wreszcie prostej a_3 podporządkowany jest jeden i tylko jeden punkt $A_3 = a_3 p_3$ w szeregu (p_3) .

Jeżeli wykonamy teraz wymienione działania w porządku odwrotnym, to wychodząc od szeregu punktów (p_3) i konstruując kolejno pęk prostych (P_3) , następnie szereg (p_2) , pęk (P_2) , szereg (p_1) , dojdziemy wkońcu do pęku prostych (P_1) , t. zn. do pierwszego ogniwa uważanego łańcucha utworów perspektywicznych. Za pośrednictwem tych działań podporządkujemy: punktowi A_3 szeregu (p_3) jedną i tylko jedną prostą $a_3 = A_3 P_3$ w pęku (P_3) , prostej a_3 tylko jeden punkt $A_2 = a_3 p_2$ w szeregu (p_2) , punktowi zaś A_2 tylko jedną prostą $a_2 = A_2 P_2$ w pęku (P_2) ,

Ryc. 10.

prostej a_2 jeden tylko punkt $A_1 = a_2 p_1$ w szeregu (p_1) i wkońcu punktowi A_1 jedną i tylko jedną prostą $a_1 = A_1 P_1$ w pęku (P_1) .

Skoro weźmiemy pod uwagę końcowe ogniwa uważanego łańcucha, t. zn. pęk prostych $P_1(a_1, b_1, \dots)$ i szereg punktów $p_3(A_3, B_3, \dots)$, to wówczas: *każdej prostej a_1 pęku (P_1) podporządkowany jest* — za pośrednictwem elementów A_1, a_2, A_2 i a_3 kolejno po sobie następujących ogniw (p_1) , (P_2) , (p_2) i (P_3) omawianego łańcucha — *jeden i tylko jeden punkt A_3 szeregu (p_3) , i naodwrot, każdemu punktowi A_3 szeregu (p_3) podporządkowana jest jedna i tylko jedna prosta a_1 w pęku (P_1) .*

W łańcuchu, skonstruowanym na ryc. 10, występowały takie pęki prostych i szeregi punktów, które leżały na wspólnej płaszczyźnie. Uogólnimy nasze rozważania, jeżeli za pośrednictwem dwóch zasadniczych działań, wykonywanych kolejno, skonstruujemy np. łańcuch (ryc. 9) utworów perspektywicznych:

$$p_2(A_2, B_2, \dots) \overline{\wedge} l_1(a_1, \beta_1, \dots) \overline{\wedge} P_1(a_1, b_1, \dots)_\varepsilon \overline{\wedge} p_1(A_1, B_1, \dots) \overline{\wedge} \overline{\wedge} P_2(a_2, b_2, \dots)_\varepsilon \overline{\wedge} l_2(a_2, \beta_2, \dots),$$

którego ogniwami są szeregi punktów (p_2) i (p_1) , pęki prostych $(P_1)_\varepsilon$ i $(P_2)_\varepsilon$, oraz pęki płaszczyzn (l_1) i (l_2) . Szereg punktów (p_2) i pęk płaszczyzn (l_2) , t. zn. końcowe ogniwa tego łańcucha, zdefiniowaliśmy jako utwory odniesione do siebie rzutowo, utwory rzutowe lub jednokreślne. Wówczas: każdemu punktowi A_2 szeregu (p_2) podporządkowana jest — za pośrednictwem elementów a_1, A_1, a_1 i A_2 poszczególnych ogniw (l_1) , (P_1) , (p_1) i (P_2) wypisanego łańcucha — jedna i tylko jedna płaszczyzna a_2 w pęku (l_2) i naodwrot, każdej płaszczyźnie a_2 pęku (l_2) podporządkowany jest jeden i tylko jeden punkt A_2 w szeregu (p_2) . A zatem:

Skoro dwa utwory zasadnicze gatunku 1-go — będące końcowymi ogniwami łańcucha perspektywicznych utworów zasadniczych gatunku 1-go — są rzutowe, to wówczas za pośrednictwem sąsiednich ogniw tego łańcucha:

każdemu elementowi jednego utworu podporządkowany jest jeden i tylko jeden element utworu drugiego, i naodwrot, każdemu elementowi utworu drugiego podporządkowany jest jeden i tylko jeden element w utworze pierwszym.

Taką zależność geometryczną nazywamy *rzutowością* lub *jednokreślnością*. Elementy podporządkowane sobie w utworach

rzutowych nazywamy elementami „odpowiadającymi sobie“ lub homologicznymi. Celem oznaczenia, że dwa utwory są rzutowe (lub jednokreślne), używać będziemy symbolu $\overline{\wedge}$. W rozważanym ostatnio przykładzie napiszemy :

$$p_2(A_2, B_2, \dots) \overline{\wedge} l_2(\alpha_2, \beta_2, \dots)$$

co oznacza, że: szereg punktów (p_2) jest rzutowy (wzgl. jednokreślny) do pęku płaszczyzn (l_2) .

Weźmy teraz pod uwagę taki łańcuch perspektywicznych utworów zasadniczych gatunku 1-go, który posiada tylko dwa ogniwa. Z wprowadzonej definicji wynika bezpośrednio :

Każde dwa perspektywiczne utwory zasadnicze gatunku 1-go są zawsze utworami rzutowymi.

Uwaga: Natomiast dwa rzutowe utwory zasadnicze gatunku 1-go mogą być, ale nie muszą koniecznie być, utworami perspektywicznymi.

Z łatwością dowiedzimy prawdziwości następującego twierdzenia :

Dwa utwory zasadnicze gatunku 1-go, jednokreślne do trzeciego utworu zasadniczego gatunku 1-go, są względem siebie rzutowe. Elementami homologicznymi tych dwóch utworów są takie elementy, które podporządkowane są jednemu i temu samemu elementowi utworu trzeciego.

W tym celu weźmy pod uwagę np. dwa rzutowe szeregi punktów $(p_1) \overline{\wedge} (p_2)$, będące końcowymi ogniwami łańcucha $(p_1) \overline{\wedge} (P_1) \overline{\wedge} (s_1) \overline{\wedge} (P_2) \overline{\wedge} (p_2)$. Wychodząc z szeregu punktów (p_2) , skonstruować możemy nowy łańcuch utworów perspektywicznych : $(p_2) \overline{\wedge} (P_3) \overline{\wedge} (s_2) \overline{\wedge} (P_4) \overline{\wedge} (p_3)$, dla którego ogniwami końcowymi są jednokreślne szeregi (p_2) i (p_3) . Wówczas szeregi (p_1) i (p_3) , jako ogniwa końcowe łańcucha :

$$(p_1) \overline{\wedge} (P_1) \overline{\wedge} (s_1) \overline{\wedge} (P_2) \overline{\wedge} (p_2) \overline{\wedge} (P_3) \overline{\wedge} (s_2) \overline{\wedge} (P_4) \overline{\wedge} (p_3),$$

złożonego ze wszystkich ogniw dwóch poprzednich łańcuchów, są utworami jednokreślnymi, c. b. d. o.

Powyższy związek możemy napisać w formie następującej : Jeżeli spełnione są warunki $(p_1) \overline{\wedge} (p_2)$ i $(p_2) \overline{\wedge} (p_3)$, to wówczas zachodzi zależność : $(p_1) \overline{\wedge} (p_3)$. Lub też w innej formie : Jeżeli $(p_1) \overline{\wedge} (p_2) \overline{\wedge} (p_3)$, to zachodzi związek $(p_1) \overline{\wedge} (p_3)$.

Obok trzech dotychczasowych szeregów $(p_1) \overline{\wedge} (p_2) \overline{\wedge} (p_3)$, weźmy pod uwagę czwarty szereg punktów (p_4) , który jest rzu-

towy do szeregu (p_3) . Ponieważ spełnione są warunki: $(p_1) \overline{\wedge} (p_3)$ i $(p_3) \overline{\wedge} (p_4)$, przeto — w myśl dowiedzionego twierdzenia — szeregi (p_1) i (p_4) są jednokreślne: $(p_1) \overline{\wedge} (p_4)$. Nasze związki napisać możemy w sposób następujący: Jeżeli spełnione są warunki $(p_1) \overline{\wedge} (p_2) \overline{\wedge} (p_3) \overline{\wedge} (p_4)$, to wówczas zachodzi też relacja: $(p_1) \overline{\wedge} (p_4)$. Przyjmując dalsze szeregi (p_5) , (p_6) i (p_7) , które spełniają warunki: $(p_4) \overline{\wedge} (p_5)$, $(p_5) \overline{\wedge} (p_6)$ i $(p_6) \overline{\wedge} (p_7)$ wykazać możemy w sposób analogiczny, że: Skoro dany jest łańcuch jednokreślnych szeregów punktów:

$$(p_1) \overline{\wedge} (p_2) \overline{\wedge} (p_3) \overline{\wedge} (p_4) \overline{\wedge} (p_5) \overline{\wedge} (p_6) \overline{\wedge} (p_7)$$

to ogniwa (p_1) i (p_7) są rzutowe: $(p_1) \overline{\wedge} (p_7)$.

Wykazaliśmy tedy prawdziwość następującego twierdzenia:

Końcowe ogniwa łańcucha utworów zasadniczych gatunku 1-go, którego każde dwa sąsiednie ogniwa są jednokreślne, są utworami rzutowymi.

8. O ruchu homologicznych elementów w rzutowych utworach zasadniczych gatunku 1-go. Uważajmy dowolny pęk prostych $P(a, b, c, d, n, \dots)$, którego wierzchołkiem (ryc. 10 a) jest punkt właściwy P , a płaszczyzną podstawową element π . Dowolną prostą np. a tego pęku poddać możemy ruchowi obrotowemu (w płaszczyźnie π) około stałego punktu P . Uważana prosta a niechaj obraca się około punktu P w stałym kierunku od położenia a bezpośrednio do położenia b (nie przekroczywszy przytem położenia c !) i od b bezpośrednio do położenia c , i t. d. Wówczas prosta a zajmować będzie kolejno położenia: $b, c, d, n, \dots$ i wkońcu zjednoczy się z pierwotnym swoim położeniem a . Prosta a obracać się może jednak około punktu P w stałym ale wprost przeciwnym kierunku, a mianowicie: od położenia np. c bezpośrednio do położenia b i od b bezpośrednio do położenia a , i t. d. Wówczas owa prosta (ryc. 10 a) zajmować będzie kolejno położenia: $c, b, a, n, d, \dots$ i wkońcu zjednoczy się ze swoim pierwotnym położeniem c .

Dowolna prosta pęku $P(a, b, c, d, n, \dots)\pi$ wykonywać może zatem w płaszczyźnie π ruch obrotowy około punktu P w dwóch stałych ale wprost przeciwnych kierunkach: 1) w kierunku abc i 2) w kierunku cba .

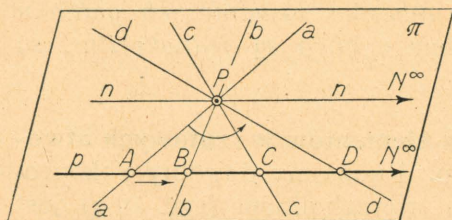
Zauważyć należy, że zgodne są między sobą kierunki: abc , bca i cab ruchu obrotowego około punktu P . Podobnie zgodne są między sobą kierunki: cba , bac i acb drugiego ruchu obrotowego.

W analogiczny sposób dowolną płaszczyznę pęku płaszczyzn $p(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$, którego osią (ryc. 3) jest prosta właściwa p , poddać możemy ruchowi obrotowemu około osi p . Uważana płaszczyzna wykonać może ruch obrotowy w dwóch stałych ale wprost przeciwnych kierunkach: 1) w kierunku $\alpha\beta\gamma$ i 2) w kierunku $\gamma\beta\alpha$.

Niechaj dane będą (ryc. 3) dwa perspektywiczne pęki

$$P(a, b, c, \dots)_\varepsilon \overline{\wedge} p(\alpha, \beta, \gamma, \dots).$$

Skoro prosta a pęku (P) obracać się będzie (w płaszczyźnie ε) około punktu P w stałym kierunku abc i nakrywać się będzie kolejno z każdą prostą $b, c, \dots$ pęku (P), to równocześnie homo-



Ryc. 10 a.

logiczna płaszczyzna $\alpha = pa$ pęku (p) nakrywać się będzie kolejno z każdą płaszczyzną $\beta = pb, \gamma = pc, \dots$ tego pęku (p), a tem samem płaszczyzna α obracać się będzie około osi p też w stałym kierunku $\alpha\beta\gamma$.

Pęk prostych $(P)_\pi$ przetnijmy (ryc. 10 a) prostą p , leżącą na płaszczyźnie π i równoległą do dowolnej prostej n tego pęku. Uzyskamy wówczas dwa perspektywiczne utwory

$$P(a, b, c, d, n, \dots)_\pi \overline{\wedge} p(A, B, C, D, N^\infty, \dots).$$

Niechaj prosta a , obracając się około punktu P w stałym kierunku abc , zajmuje kolejno położenia: $a, b, c, d, n, \dots$ i wkońcu zjednoczy się ze swoim początkowym położeniem a . Równocześnie homologiczny punkt $A = pa$ szeregu (p) porusza się będzie po prostej p i zajmować będzie kolejno położenia: $A = pa, B = pb, C = pc, D = pd, N^\infty = pn, \dots$ i wkońcu zjednoczy się z początkowym swem położeniem A . Uważany punkt A poddany został ruchowi postępowemu na prostej p w stałym kierunku ABC od położenia A bezpośrednio do położenia B (nie przekroczwszy przytem położenia C !) i od B bezpośrednio do C , i t. d.

Prosta c pęku $(P)_\pi$, zamiast w kierunku abc , obracać się może około punktu P w stałym ale wprost przeciwnym kierunku cba . Skoro prosta c zajmować będzie (ryc. 10 a) kolejno położenia: $c, b, a, n, d, \dots$ i wreszcie powróci do pierwotnego po-

łożenia c , to równocześnie homologiczny punkt $C = pc$ szeregu (p) zajmować będzie kolejno położenia: $C = pc$, $B = pb$, $A = pa$, $N^\infty = pn$, $D = pd, \dots$ i wkońcu zjednoczy się z początkowym położeniem C . Uważany punkt C wykonuje ruch postępowy na prostej p w stałym kierunku CBA , a mianowicie od położenia C bezpośrednio do położenia B (nie przekroczywszy przytem położenia A !) i od B bezpośrednio do położenia A , i t. d.

Za pośrednictwem ruchów obrotowych o stałych i wprost przeciwnych kierunkach abc i cba w pęku prostych $(P)_\pi \overline{\wedge} (p)$, ustaliliśmy dwa stałe ale wprost przeciwne kierunki ruchu postępowego na prostej p , a mianowicie: 1) kierunek ABC i 2) kierunek CBA . Ponieważ zgodne są między sobą kierunki: abc , bca i cab ruchu obrotowego około punktu P , przeto zgodne są między sobą również i kierunki: ABC , BCA i CAB ruchu postępowego na prostej p . Podobnie zgodne są też kierunki: CBA , BAC i ACB drugiego ruchu postępowego.

Uważajmy wreszcie szereg punktów s ($A, B, C, \dots$) i perspektywiczny do niego (ryc. 3) pęk płaszczyzn p ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$). Jeżeli punkt A poruszać się będzie w stałym kierunku ABC po prostej s i nakrywać się będzie kolejno z każdym punktem $B, C, \dots$ prostej s , to homologiczna płaszczyzna $\alpha = pA$ pęku (p) obracać się będzie około osi p też w stałym kierunku $\alpha\beta\gamma$ i nakrywać się będzie kolejno z każdą płaszczyzną $\beta, \gamma, \dots$ tego pęku (p) .

Omówiliśmy własności dwóch perspektywicznych i różniamiennych utworów zadniczych gatunku 1-go. Przejdźmy teraz do jednoimiennych utworów. Z definicji (ust. 6) perspektywności

dwóch szeregów punktów $p_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$, które są przecięciami (ryc. 5) pomocniczego pęku prostych $P(a, b, c, \dots)$, i z ruchu obrotowego prostej a około punktu P wynika następująca zależność:

Jeżeli punkt A_1 poruszać się będzie w stałym kierunku $A_1B_1C_1$ po prostej p_1 i nakrywać się będzie kolejno z każdym punktem $B_1, C_1, \dots$ szeregu (p_1) , — to równocze-

dwóch pęków prostych $P_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \overline{\wedge} P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$, które są rzutami (ryc. 6) pomocniczego szeregu punktów $p(A, B, C, \dots)$, i z ruchu postępowego punktu A po prostej p wynika następująca zależność:

Jeżeli prosta a_1 obracać się będzie w stałym kierunku $a_1b_1c_1$ około punktu P_1 i nakrywać się będzie kolejno z każdą prostą $b_1, c_1, \dots$ pęku (P_1) , — to równocześnie ho-

śnie homologiczny punkt A_2 szeregu (p_2) poruszać się będzie po prostej p_2 też w stałym kierunku $A_2B_2C_2$, nakrywając się kolejno z każdym punktem $B_2, C_2, \dots$ szeregu (p_2) .

mologiczna prosta a_2 pęku (P_2) obracać się będzie też w stałym kierunku $a_2b_2c_2$, nakrywając się kolejno z każdą prostą $b_2, c_2, \dots$ pęku (P_2) .

Stosując zasadę biegunowej dwoistości w przestrzeni (ust.5) do zależności, wypisanej po lewej stronie, otrzymujemy wprost związek dla dwóch perspektywicznych pęków płaszczyzn

$$p_1(a_1, \beta_1, \gamma_1, \dots) \overline{\wedge} p_2(a_2, \beta_2, \gamma_2, \dots)$$

w następującej formie:

Jeżeli płaszczyznę α_1 pęku (p_1) poddamy ruchowi obrotowemu około osi p_1 w stałym kierunku $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, to równocześnie homologiczna płaszczyzna α_2 pęku (p_2) obracać się będzie też w stałym kierunku $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ około osi p_2 .

Uwzględniając łańcuch perspektywicznych utworów zasadniczych gatunku 1-go i stosując omówione powyżej zależności do każdego dwóch sąsiednich ogniw tego łańcucha, otrzymamy np. dla pęku prostych (P_1) i rzutowego względem niego (ryc.10) szeregu punktów (p_3) ,

$$P_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \overline{\wedge} p_3(A_3, B_3, C_3, \dots)$$

następujący związek:

Jeżeli prosta a_1 obracać się będzie w stałym kierunku $a_1b_1c_1$ około punktu P_1 i nakrywać się będzie kolejno z każdą prostą $b_1, c_1, \dots$ pęku (P_1) , — to równocześnie homologiczny punkt A_3 szeregu (p_3) poruszać się będzie po prostej p_3 też w stałym kierunku $A_3B_3C_3$, nakrywając się kolejno z każdym punktem $B_3, C_3, \dots$ szeregu (p_3) .

Zupełnie analogiczne zależności spełnione będą dla dwóch jednokreślnych a) szeregów punktów, b) pęków prostych, c) pęków płaszczyzn, d) szeregu punktów i pęku płaszczyzn, e) pęku prostych i pęku płaszczyzn.

Teraz zwróćmy uwagę na pewną własność rzutowych utworów zasadniczych gatunku 1-go. W tym celu niechaj prosta a (ryc. 10 a) obraca się w stałym kierunku abc około punktu P od pierwotnego położenia a bezpośrednio do położenia b , następnie od b bezpośrednio do c i wreszcie od położenia c bez-

pośrednio do położenia d . Skoro prostą d poddamy teraz ruchowi obrotowemu około punktu P w stałym kierunku, ale wprost przeciwnym do poprzedniego, t. zn. w kierunku cba , to wówczas ów element d obracać się będzie od położenia d bezpośrednio do c , od położenia c bezpośrednio do b i wreszcie od b bezpośrednio do położenia a .

Uważane cztery proste pęku (P) połączyć możemy w następujące pary: ab i cd ; ac i bd ; ad i bc . Pary prostych ab i cd posiadają tę własność, że: każda prosta jednej pary np. a , podczas obrotu około P w stałym kierunku abc od położenia a do położenia b , nie przekroczy wcale położenia prostych c i d , należących do drugiej pary. Podobnie prosta b pierwszej pary, podczas obrotu w stałym kierunku cba od położenia b do położenia a , nie przekroczy wcale położenia c ani d . To samo stosuje się oczywiście do elementów c i d drugiej pary. Mówimy wówczas, że para prostych ab nie rozdziela pary cd . Skoro weźmiemy pary prostych: ad i bc , to z łatwością stwierdzimy takie same własności tych par, t. zn. że są to dwie *nie rozdzielające się* pary prostych.

Pozostają nam jeszcze do zbadania pary prostych: ac i bd . Każda prosta jednej pary, np. a podczas obrotu około P w stałym kierunku abc (lub w kierunku przeciwnym cba) od położenia a do położenia c , koniecznie przejść musi przez położenie b (wzgl. d), należące do drugiej pary. W tym przypadku mówimy, że pary prostych ac i bd tworzą dwie *rozdzielające się* pary.

Proste a , b , c i d pęku (P) przetnijmy (ryc. 10 a) dowolną prostą p , nie przechodzącą przez wierzchołek P . Otrzymane punkty $A = ap$, $B = bp$, $C = cp$ i $D = dp$ połączyć możemy w następujące pary: AB i CD ; AC i BD ; AD i BC . Korzystając z ruchów o stałych kierunkach elementów homologicznych szeregu punktów $(p) \overline{\cap} (P)$ stwierdzimy, że: pary punktów AB i CD , oraz AD i BC są parami nie rozdzielającymi się; natomiast pary AC i BD tworzą dwie rozdzielające się pary punktów.

Uwzględniając łańcuch perspektywicznych utworów zasadniczych gatunku 1-go i stosując powyższe zależności do każdego dwóch sąsiednich ogniw tego łańcucha, otrzymamy następujący związek:

Dwa rzutowe utwory zasadnicze gatunku 1-go posiadają tę własność, że dwom rozdzielającym się (wzgl. nie rozdzielającym

się) *parom elementów jednego utworu podporządkowane są w drugim utworze również dwie rozdziłające się* (wzgl. nie rozdziłające się) *pary elementów*.

9. Stosunek podziału i dwustosunek elementów szeregu punktów. Na dowolnej prostej p niechaj dane będą (ryc. 11) trzy punkty właściwe A , B i C , za pośrednictwem których ustalamy (ust. 8) dwa wprost przeciwne kierunki ruchu postępowego na prostej p , a mianowicie: 1) kierunek ABC i 2) kierunek CBA . Owe dwa kierunki ruchu postępowego na prostej p nazywać będziemy zwrotami tej prostej. Uważanej prostej p przypisaliśmy tedy dwa wprost przeciwne zwroty, a mianowicie: 1) zwrot ABC i 2) zwrot CBA .

Zauważyć należy (ust. 8), że zgodne są między sobą zwroty ABC , BCA i CAB prostej p ; podobnie zgodne są też zwroty (przeciwne do poprzednich), a mianowicie CBA , BAC i ACB .

Zamiast punktu właściwego C , weźmy teraz pod uwagę punkt niewłaściwy N^∞ (ryc. 11) prostej p . Za pośrednictwem punktów A , B i N^∞ ustalić możemy na prostej p dwa wprost przeciwne zwroty, a mianowicie: 1) zwrot ABN^∞ i 2) zwrot BAN^∞ . Jeżeli jeden z nich uważać będziemy za zwrot dodatni i przypiszemy mu znak $+$, to drugi zwrot uważać musimy wówczas za ujemny i przypisać mu znak $-$.

Niechaj A i B są punktami właściwymi prostej p , to symbol $\overline{AB}$ oznaczać będzie odcinek tylko o długości skończonej, ograniczony punktem początkowym A i punktem końcowym B . Podobnie symbol $\overline{BA}$ oznaczać będzie odcinek o skończonej długości, dla którego B jest punktem początkowym, a element A punktem końcowym. Umówmy się, że: *dowólnemu odcinkowi (o długości skończonej) $\overline{AB}$ prostej p przypiszemy ten sam znak $+$ albo $-$, jaki posiada zwrot ABN^∞ tej prostej* (przyczem N^∞ oznacza punkt niewłaściwy prostej p).

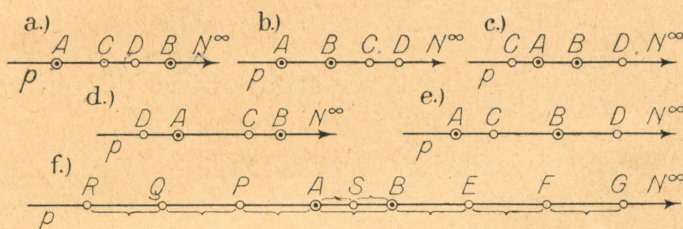
Przypuśćmy, że zwrot ABN^∞ prostej p jest dodatni ($+$), a tem samem zwrot BAN^∞ jest ujemny ($-$), to wówczas odcinkowi $\overline{AB}$ przypisać musimy znak $+$, natomiast odcinkowi $\overline{BA}$ znak $-$. Gdybyśmy jednak przeciwnie zwrot ABN^∞ uważali za ujemny ($-$), a więc zwrot BAN^∞ za dodatni ($+$), to wówczas odcinkowi $\overline{AB}$ przypisać musielibyśmy znak $-$, a odcinkowi $\overline{BA}$ znak $+$. Stwierdzamy tedy, że niezależnie od tego, czy zwrot ABN^∞ prostej p uważać będziemy za dodatni ($+$), czy też za ujemny ($-$), to zawsze: *dwom odcinkom (o długości skończonej) $\overline{AB}$ i $\overline{BA}$ tej prostej przypisać musimy znaki przeciwne*.

Skoro przyjmiemy pewną jednostkę długości, to wówczas odcinki $\overline{AB}$ i $\overline{BA}$ co do bezwzględnej długości są sobie równe, a ponieważ owe odcinki różnią się znakiem, przeto mamy następującą zależność:

$$\overline{AB} = -\overline{BA} \text{ lub też } \overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

Na prostej właściwej p (ryc. 11) obierzmy odcinek (o długości skończonej) $\overline{AB}$ i dowolny punkt właściwy C . Ów punkt C leżeć może „wewnątrz“ odcinka $\overline{AB}$, albo też „zewnątrz“ odcinka $\overline{AB}$. W pierwszym przypadku (ryc. 11 a) odcinki (o długości skończonej) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$ posiadają ten sam znak, co zwrot ABN^∞ prostej p , a odcinek $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$. Ponieważ jednak $\overline{CB} = -\overline{BC}$, przeto: $\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC}$ lub ostatecznie:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$



Ryc. 11.

W przypadku drugim, gdy punkt C leży „zewnątrz“ odcinka $\overline{AB}$, to wówczas: albo punkt B (ryc. 11 b) leży „wewnątrz“ odcinka (o długości skończonej) $\overline{AC}$ i suma odcinków

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

albo też punkt A (ryc. 11 c) leży „wewnątrz“ odcinka (o długości skończonej) $\overline{CB}$ i suma odcinków $\overline{CA} + \overline{AB} = \overline{CB}$. Uwzględniając relacje $\overline{CA} = -\overline{AC}$ i $\overline{CB} = -\overline{BC}$, wyrazić możemy ostatnią sumę odcinków za pośrednictwem wzoru:

$$-\overline{AC} + \overline{AB} = -\overline{BC} \text{ lub też: } \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Wykazaliśmy tedy, że bez względu na położenie punktów właściwych A , B i C na uważanej prostej p , zachodzi zawsze równość: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ czyli $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$.

Obierzmy na prostej p czwarty punkt właściwy D , to dla elementów A , C i D mamy: $\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD}$, a że $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, więc ostatecznie

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD} \text{ lub } \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 0.$$

Przyjmując dalsze punkty właściwe $E, \dots, P, R$ na prostej p , z łatwością wykazać możemy prawdziwość związków:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \dots + \overline{PR} = \overline{AR}$$

lub też

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \dots + \overline{PR} + \overline{RA} = 0.$$

Dwa stałe punkty właściwe A i B prostej p , oraz dowolny punkt właściwy C tej prostej, wyznaczają (ryc. 11) dwa odcinki (o skończonej długości) $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Skoro pewien dowolny odcinek $\overline{XZ}$ przyjmiemy za jednostkę długości, to stosunek $\overline{AC} : \overline{XZ} = \varepsilon$ nazywać będziemy¹⁾ *miarą* odcinka $\overline{AC}$ w odniesieniu do jednostki $\overline{XZ}$. Miara ε jest liczbą wymierną lub niewymierną, zależnie od tego, czy odcinek $\overline{AC}$ jest czy też nie jest współmierny z obraną jednostką $\overline{XZ}$. Niechaj liczby ε i φ będą miarami odcinków $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, to mamy równości:

$$\overline{AC} = \varepsilon \cdot \overline{XZ} \quad \overline{BC} = \varphi \cdot \overline{XZ}$$

a stosunek $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\varepsilon}{\varphi}$ t. zn. stosunek dwóch dowolnych odcinków równa się ilorazowi ich miar (liczb), wziętych w odniesieniu do dowolnej jednostki długości $\overline{XZ}$. — W rozważaniach naszych uwzględnić musimy też i znaki odcinków $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Jeżeli zwroty ACN^∞ i BCN^∞ prostej p (gdzie N^∞ oznacza punkt niewłaściwy prostej p) są zgodne, to obydwa odcinki $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ posiadają równocześnie ten sam znak $+$, albo też równocześnie ten sam znak $-$; wówczas liczbie $\frac{\varepsilon}{\varphi} = \lambda$ przypiszemy znak $+$. Jeżeli zaś zwroty ACN^∞ i BCN^∞ prostej p są wprost przeciwne, to uważane odcinki $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ posiadają znaki przeciwne, a liczbie $\lambda = \frac{\varepsilon}{\varphi}$ przypisać musimy znak $-$.

Skoro trzy dowolne punkty właściwe A, B i C , leżące na prostej p , wyznaczają odcinki (o długości skończonej) $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, to wówczas: liczbę $\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ nazywamy „*stosunkiem podziału*“ owych trzech punktów A, B i C . Liczbie λ przypiszemy znak $+$ albo $-$ zależnie od tego, czy zwroty ACN^∞ i BCN^∞ prostej p są zgodne, czy też wprost przeciwne.

Dla punktu C , leżącego „wewnątrz“ odcinka (o długości skończonej) $\overline{AB}$, stosunek podziału λ jest liczbą ujemną, gdyż

¹⁾ *F. Enriques i U. Amaldi*, Zasady geometrii elementarnej (tłumacz. Wł. Wojtowicza) Warszawa—Lwów, str. 238.

zwroty ACN^∞ i BCN^∞ są przeciwne, a odcinkom (o długości skończonej) $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ przypisać musimy znaki przeciwne. W szczególności dla punktu S (ryc. 11 f), połowiącego odcinek $\overline{AB}$, mamy:

$$\overline{AS} = \overline{SB} = -\overline{BS}, \text{ więc } \lambda_s = \frac{\overline{AS}}{\overline{BS}} = \frac{-\overline{BS}}{\overline{BS}} = -1.$$

Natomiast dla punktu C , leżącego „zewnątrz” odcinka (o długości skończonej) $\overline{AB}$, stosunek podziału $\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ jest liczbą dodatnią, gdyż zwroty ACN^∞ i BCN^∞ są zgodne, a obydwa odcinki $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ posiadają równocześnie ten sam znak $+$, albo też równocześnie ten sam znak $-$.

Skoro na prostej p (ryc. 11 f) odłożymy odcinki $\overline{AB} = \overline{BE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \dots$, to otrzymamy wówczas następujący ciąg liczb $\lambda > 0$:

$$\lambda_E = \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{2\overline{BE}}{\overline{BE}} = +2, \lambda_F = \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = +\frac{3}{2}, \lambda_G = \frac{\overline{AG}}{\overline{BG}} = +\frac{4}{3}, \dots$$

Skoro zaś na prostej p odłożymy odcinki $\overline{BA} = \overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QR} = \dots$, to otrzymamy nowy ciąg liczb $\lambda > 0$, a mianowicie:

$$\lambda_P = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AP}}{2\overline{AP}} = +\frac{1}{2}, \lambda_Q = \frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}} = +\frac{2}{3}, \lambda_R = \frac{\overline{AR}}{\overline{BR}} = +\frac{3}{4}, \dots$$

Wartości wyrazów pierwszego ciągu liczb $\lambda > 0$ coraz bardziej maleją, wartości zaś wyrazów drugiego ciągu liczb $\lambda > 0$ coraz bardziej wzrastają; żaden jednak wyraz tych ciągów — dla jakiegokolwiek bądź punktu właściwego prostej p — nie osiągnie wartości $\lambda = +1$. Nasuwa się myśl podporządkowania punktowi niewłaściwemu N^∞ prostej $p = AB$ wartości $\lambda = +1$. Stosunek podziału dwóch punktów właściwych A, B i punktu niewłaściwego N^∞ dowolnej prostej $p = AB$ zdefiniujemy jako liczbę

$$\lambda = \frac{\overline{AN}^\infty}{\overline{BN}^\infty} = +1.$$

Z dotychczasowych rozważań wynika tedy następująca zależność:

Każdemu punktowi C prostej p podporządkowana jest — w odniesieniu do dwóch stałych punktów właściwych A i B prostej p — jedna i tylko jedna liczba $\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

Dowodziemy teraz prawdziwości twierdzenia:

Każdej liczbie $\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ podporządkowany jest — w odniesieniu do dwóch stałych punktów właściwych A i B prostej p — jeden i tylko jeden punkt C na owej prostej p .

W istocie bowiem mamy $\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$, a ponieważ $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, przeto

$$\lambda = \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{\overline{BC}} = 1 + \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad \text{czyli} \quad \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \frac{1}{\lambda - 1}.$$

Dla odcinka $\overline{AC}$ otrzymamy wówczas

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \frac{1}{\lambda - 1} = \overline{AB} \cdot \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Ponieważ w uzyskanych równaniach

$$\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \frac{\lambda}{\lambda - 1} \quad \text{i} \quad \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \frac{1}{\lambda - 1}$$

spółczynnik $\overline{AB}$ jest wielkością stałą, więc dla każdej liczby λ otrzymujemy jeden odcinek $\overline{AC}$ i jeden odcinek $\overline{BC}$, a tem samem jeden i tylko jeden punkt C (w odniesieniu do stałych punktów A i B), c. b. d. o.

Na prostej właściwej p (ryc. 11) obierzmy cztery dowolne punkty właściwe A, B, C i D , a następnie utwórzmy stosunki podziału

$$\lambda_1 = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}, \quad \lambda_2 = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}.$$

Liczbom λ_1 i λ_2 przypiszemy znaki $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy zwroty ACN^∞ i BCN^∞ , oraz ADN^∞ i BDN^∞ prostej p (gdzie N^∞ jest punktem niewłaściwym prostej p) są zgodne, czy też wprost przeciwne. *Liczbę*

$$\mu = \lambda_1 : \lambda_2 = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$$

nazywamy dwustosunkiem (stosunkiem podwójnego podziału lub stosunkiem anharmonicznym) *czterech punktów właściwych A, B, C i D prostej p . Liczbie μ przypiszemy znak $+$ albo $-$ zależnie od tego, czy znaki liczb λ_1 i λ_2 są zgodne, czy też przeciwne. Powyższy dwustosunek oznaczamy symbolem $(ABCD)$, a zatem liczba*

$$\mu = (ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}.$$

Celem uzyskania prawej strony tej równości, łączymy poszczególne punkty symbolu $(ABCD)$ w następującym porządku: pierwszy A z trzecim C i drugi B z trzecim C , a następnie pierwszy A z czwartym D i drugi B z czwartym D .

Uważane punkty A, B, C i D połączyć możemy w dwie pary: AB i CD . Pożornie wydaje się, że para punktów A i B dla dwustosunku $(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$ posiada inny charakter, aniżeli pozostała para C i D . Faktycznie ¹⁾ tak nie jest, gdyż wykonać możemy następujące przekształcenia:

$$\begin{aligned}(ABCD) &= \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{-\overline{CA}}{-\overline{CB}} : \frac{-\overline{DA}}{-\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \\ &= \frac{\overline{CA}}{\overline{DA}} : \frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} = (CDAB).\end{aligned}$$

Ponieważ $(ABCD) = (CDAB)$, przeto pary punktów AB i CD posiadają ten sam charakter.

Wykonajmy teraz drugie przekształcenie dwustosunku $(ABCD)$, a mianowicie:

$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = (BADC).$$

Na mocy pierwszego przekształcenia mamy: $(BADC) = (DCBA)$, więc ostatecznie dochodzimy do relacji

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

Dowiedliśmy tedy prawdziwości twierdzenia:

Dwustosunek $(ABCD)$ czterech (różnych od siebie) punktów właściwych A, B, C i D dowolnej prostej, nie zmienia się wcale, jeżeli przestawimy dwa dowolne jego punkty i równocześnie dwa punkty pozostałe.

Zauważyć należy, że w powyżej podanej relacji obok siebie wypisane są punkty A i B , oraz obok siebie punkty C i D . Zbadajmy bliżej wpływ własności pary punktów A i B , oraz drugiej pary C i D omawianego dwustosunku $\mu = (ABCD)$ na znak

¹⁾ Porównaj Dr. K. Doehlemann, Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. IV-e Aufl. 1918.

tego dwustosunku. Liczba $\mu = \lambda_1 : \lambda_2$, gdzie $\lambda_1 = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ i $\lambda_2 = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$.

Stosunki podziału λ_1 i λ_2 posiadają równocześnie znaki + wówczas, gdy punkty C i D leżą „zewnątrz“ odcinka (o długości skończonej) $\overline{AB}$. Obie liczby λ_1 i λ_2 posiadają równocześnie znaki —, gdy punkty C i D leżą „wewnątrz“ odcinka $\overline{AB}$. W obydwu wypadkach liczbie $\mu = \lambda_1 : \lambda_2$ przypisać musimy znak +. Natomiast, gdy jeden z punktów C i D leży „zewnątrz“, a drugi „wewnątrz“ odcinka $\overline{AB}$, to wówczas liczbom λ_1 i λ_2 przypisać musimy znaki przeciwne, a tem samem dwustosunkowi μ znak —. Na podstawie końcowych rozważań ust. 8-go stwierdzimy, że: dwie omawiane pary punktów AB i CD w dwóch pierwszych przypadkach tworzą dwie „nie rozdzielające się“ pary, natomiast w przypadku trzecim tworzą dwie „rozdzielające się“ pary. A zatem:

Liczbie $\mu = (ABCD)$ przypiszemy znak — albo + zależnie od tego, czy pary punktów AB i CD stanowią dwie rozdzielające się, czy też dwie nie rozdzielające się pary.

Skoro punkty A, B i C prostej p uważać będziemy za elementy stałe, to stosunek podziału $\lambda_1 = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ też jest liczbą stałą, a dwustosunek

$$\mu = (ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \lambda_1 : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$$

gdzie $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$ jest stosunkiem podziału dla trzech punktów A, B i D . Z poprzednich rozważań naszych wynika, że: *Każdemu punktowi D prostej właściwej p , w odniesieniu do trzech stałych punktów A, B i C tej prostej, podporządkowana jest jedna i tylko jedna liczba $\mu = (ABCD)$; i wzajemnie: każdej liczbie $\mu = (ABCD)$, przyczem A, B i C są stałymi punktami prostej p , podporządkowany jest jeden i tylko jeden punkt D na owej prostej.*

10. Stosunek podziału i dwustosunek elementów pęku prostych (wzgl. pęku płaszczyzn). W pęku prostych o wierzchołku właściwym P (ryc. 12) niechaj dane będą trzy proste a, b i s , za pośrednictwem których ustalamy (ust. 8) dwa wprost przeciwne kierunki ruchu obrotowego około punktu P , a mianowicie: 1) kierunek abs i 2) kierunek sba . Owe dwa kierunki ruchu obrotowego nazywać będziemy zwrotami tego pęku. Uważanemu pękowi prostych $P(a, b, s, \dots)$ przypisaliśmy tedy dwa wprost przeciwne zwroty, a mianowicie: 1) zwrot abs i 2) zwrot sba .

Zgodne między sobą są (ust. 8) zwroty abs , bsa i sab ; podobnie zgodne są też zwroty (przeciwnie do poprzednich) następujące: sba , bas i asb . Jeżeli jeden ze zwrotów abs i sba uważać będziemy za dodatni i przypiszemy mu znak $+$, to drugi zwrot uważać musimy wówczas za ujemny i przypisać mu znak $-$.

Wiadomo nam, że dwie proste a i b pęku $(P)_\pi$ dzielą płaszczyznę podstawową π tego pęku na cztery części, które nazywamy kątami. Owe cztery kąty tworzą dwie pary „kątów wierzchołkowych”. Niechaj prosta a , obracając się około punktu P w stałym kierunku abs , wykona obrót od położenia a bezpośrednio do położenia b , nie przekroczywszy przytem położenia s . Prosta a opisze wówczas dwa kąty wierzchołkowe, a każdy z tych kątów oznaczać będziemy symbolem $\overline{ab}$. Skoro prosta b , obracając się około punktu P w stałym (ale wprost przeciwnym do poprzedniego) kierunku bas , wykona obrót od położenia b bezpośrednio do położenia a — nie przekroczywszy przytem położenia s ! — to element b opisze znowu owe dwa kąty wierzchołkowe. Każdy z tych kątów oznaczać będziemy symbolem $\overline{ba}$.

Wprowadzony zatem symbol $\overline{ab}$ (wzgl. $\overline{ba}$) oznacza jeden z dwóch kątów wierzchołkowych w pęku (P) , opisanych przez prostą a (wzgl. b) obracającą się w stałym kierunku abs (wzgl. bas) około wierzchołka P . Umówmy się, że: *dowolnemu kątowi $\overline{ab}$ w pęku (P) przypiszemy ten sam znak $+$ albo $-$, jaki posiada zwrot abs , gdzie s oznacza dowolną prostą „nieruchomą” tego pęku.*

Przypuśćmy, że zwrot abs jest dodatni ($+$), a tem samem zwrot bas jest ujemny ($-$), to wówczas kątowi $\overline{ab}$ przypisać musimy znak $+$, natomiast kątowi $\overline{ba}$ przypisać musimy znak $-$. Gdybyśmy jednak przeciwnie zwrot abs uważali za ujemny ($-$), a więc zwrot bas za dodatni ($+$), to wówczas kątowi $\overline{ab}$ przypisać musimy znak $-$, a kątowi $\overline{ba}$ znak $+$. Stwierdzamy tedy, że niezależnie od tego, czy zwrot abs w pęku (P) uważać będziemy za dodatni ($+$), czy też za ujemny ($-$), to zawsze: *dwom kątom $\overline{ab}$ i $\overline{ba}$ przypisać musimy koniecznie znaki przeciwne.*

Skoro przyjmiemy pewien kąt $\overline{xz}$ za jednostkę miary, a miarą kąta $\overline{ab}$ nazwiemy stosunek $\overline{ab} : \overline{xz} = \varepsilon$, to wówczas kąty $\overline{ab}$ i $\overline{ba}$ co do bezwzględnej miary (wielkości) są sobie równe, a ponieważ owe kąty różnią się znakiem, przeto mamy następującą zależność:

$$\overline{ab} = -\overline{ba} \quad \text{lub też} \quad \overline{ab} + \overline{ba} = 0$$

Dowolna prosta c (ryc. 12) uważanego pęku (P) leżeć może „wewnątrz“ kątów wierzchołkowych, z których każdy oznaczony jest symbolem $\overline{ab}$, lub też „zewnątrz“ tych kątów. W pierwszym przypadku (ryc. 12 c) każdy z kątów $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ i $\overline{cb}$ posiada ten sam znak, co zwrot abs pęku (P), a kąt $\overline{ab} = \overline{ac} + \overline{cb}$. Ponieważ jednak $\overline{cb} = -\overline{bc}$, przeto $\overline{ab} = \overline{ac} - \overline{bc}$ lub ostatecznie:

$$\overline{ab} + \overline{bc} = \overline{ac}.$$

W przypadku drugim, gdy c leży „zewnątrz“ kątów wierzchołkowych $\overline{ab}$, to: albo prosta b (ryc. 12 b) leży „wewnątrz“ kątów wierzchołkowych, z których każdy oznaczony jest symbolem $\overline{ac}$, a suma kątów

$$\overline{ab} + \overline{bc} = \overline{ac}$$

albo też prosta a (ryc. 12 d) leży „wewnątrz“ kątów wierzchołkowych $\overline{cb}$ i suma kątów $\overline{ca} + \overline{ab} = \overline{cb}$. Uwzględniając relacje $\overline{ca} = -\overline{ac}$ i $\overline{cb} = -\overline{bc}$, wyrazić możemy ostatnią sumę kątów za pośrednictwem wzoru:

$$-\overline{ac} + \overline{ab} = -\overline{bc} \quad \text{lub też:} \quad \overline{ab} + \overline{bc} = \overline{ac}.$$

Wykazaliśmy tedy, że bez względu na położenie prostych a , b i c w pęku (P), zachodzi zawsze równość:

$$\overline{ab} + \overline{bc} = \overline{ac} \quad \text{czyli} \quad \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = 0.$$

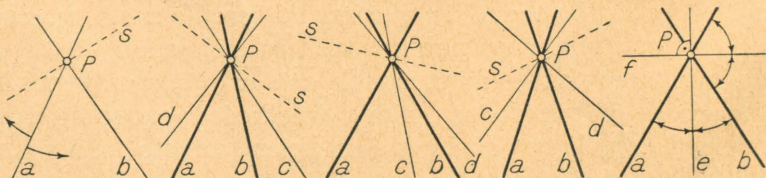
Obierzmy w pęku (P) czwartą prostą d (ryc. 12), to dla elementów a , c i d mamy: $\overline{ac} + \overline{cd} = \overline{ad}$, a że $\overline{ac} = \overline{ab} + \overline{bc}$, więc ostatecznie

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} = \overline{ad} \quad \text{lub} \quad \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{da} = 0.$$

Przyjmując dalsze proste $e, \dots, p, r$ w pęku (P), z łatwością wykazać możemy prawdziwość związków:

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de} + \dots + \overline{pr} = \overline{ar} \quad \text{lub też} \\ \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de} + \dots + \overline{pr} + \overline{ra} = 0.$$

W pęku o wierzchołku właściwym P niechaj dane będą: „nieruchoma“ prosta s , dwie stałe proste a i b , oraz dowolna prosta c . Jeżeli zwroty acs i bcs pęku (P) są zgodne, to kąty



Ryc. 12.

$\overline{ac}$ i $\overline{bc}$ posiadają równocześnie ten sam znak $+$, albo też równocześnie ten sam znak $-$. Jeżeli zaś zwroty acs i bcs są wprost przeciwne, to uważane kąty $\overline{ac}$ i $\overline{bc}$ posiadają znaki przeciwne. Utwórzmy stosunek wstaw kątów $\overline{ac}$ i $\overline{bc}$, to wówczas: liczbę $\lambda = \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}}$ nazywamy „stosunkiem podziału“ trzech prostych a, b i c pęku (P). Liczbie λ przypiszemy znak $+$ albo $-$ zależnie od tego, czy zwroty acs i bcs pęku (P) są zgodne, czy też wprost przeciwne.

Dla prostej c , leżącej „wewnątrz“ kąta $\overline{ab}$, zwroty acs i bcs są przeciwne, więc stosunek podziału $\lambda = \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}}$ jest liczbą ujemną. Natomiast dla prostej c , leżącej „zewnątrz“ kąta $\overline{ab}$, stosunek podziału λ jest liczbą dodatnią, gdyż zwroty acs i bcs są zgodne.

Niechaj prosta e (ryc. 12) jest symetralną (dwusieczną) kąta $\overline{ab}$, to z relacji: $\overline{ae} = \overline{eb} = -\overline{be}$ wynika, że liczba

$$\lambda_e = \frac{\sin \overline{ae}}{\sin \overline{be}} = \frac{-\sin \overline{be}}{\sin \overline{be}} = -1.$$

Przez wierzchołek P uważanego pęku wykreślmy prostą $f \perp e$, czyli symetralną f kąta „przyległego“ do kąta $\overline{ab}$. Dla kątów $\overline{af}$ i $\overline{bf}$ otrzymamy:

$$\begin{aligned}\overline{af} &= \overline{ae} + \overline{ef} = \overline{ae} + 90^\circ = 90^\circ + \overline{ae} \\ \overline{bf} &= \overline{be} + \overline{ef} = \overline{ea} + 90^\circ = 90^\circ - \overline{ae}\end{aligned}$$

a ponieważ $\sin(90^\circ + \overline{ae}) = \sin(90^\circ - \overline{ae})$, przeto stosunek podziału $\lambda_f = \frac{\sin \overline{af}}{\sin \overline{bf}} = \frac{\sin(90^\circ + \overline{ae})}{\sin(90^\circ - \overline{ae})} = +1$. A zatem:

Skoro proste e i f są symetralnemi kąta $\overline{ab}$ i jego kąta przyległego, to wówczas stosunki podziału $\frac{\sin \overline{ae}}{\sin \overline{be}}$ i $\frac{\sin \overline{af}}{\sin \overline{bf}}$ są liczbami $\lambda_e = -1$ i $\lambda_f = +1$.

W pęku prostych o wierzchołku właściwym P dane są: „nieruchoma“ prosta s , stałe proste a, b i dowolna prosta c . Ponieważ kąt $\overline{ac} = \overline{ab} + \overline{bc}$, przeto stosunek podziału

$$\lambda = \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}} = \frac{\sin(\overline{ab} + \overline{bc})}{\sin \overline{bc}}.$$

Uwzględniając relację:

$$\sin(\overline{ab} + \overline{bc}) = \sin \overline{ab} \cdot \cos \overline{bc} + \cos \overline{ab} \cdot \sin \overline{bc},$$

możemy, dla stałego kąta $\overline{ab}$ i danej liczby λ , obliczyć najpierw kąt $\overline{bc}$, a następnie również i kąt $\overline{ac}$. Z dotychczasowych rozważań wynikają tedy zależności:

Każdej prostej c pęku (P) podporządkowana jest — w odniesieniu do stałych prostych a , b i s tego pęku — jedna i tylko jedna liczba $\lambda = \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}}$. I wzajemnie: każdej liczbie $\lambda = \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}}$ podporządkowana jest — w odniesieniu do trzech stałych prostych a , b i s pęku (P) — jedna i tylko jedna prosta c tego pęku.

W pęku prostych o wierzchołku właściwym P obierzmy cztery dowolne proste a , b , c i d , oraz prostą „nieruchomą“ s (ryc. 12), a następnie utwórzmy stosunki podziału

$$\lambda_1 = \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}} \quad \text{ i } \quad \lambda_2 = \frac{\sin \overline{ad}}{\sin \overline{bd}}.$$

Liczbom λ_1 i λ_2 przypiszemy znaki $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy zwroty acs i bcs , oraz ads i bds pęku (P) są zgodne, czy też wprost przeciwne. Liczbę

$$\mu = \lambda_1 : \lambda_2 = \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}} : \frac{\sin \overline{ad}}{\sin \overline{bd}}$$

nazywamy *dwustosunkiem* (stosunkiem podwójnego podziału lub stosunkiem anharmonicznym) *czterech prostych właściwych a , b , c i d pęku (P)* . Liczbie μ przypiszemy znak $+$ albo $-$ zależnie od tego, czy znaki liczb λ_1 i λ_2 są zgodne, czy też przeciwne.

Powyższy dwustosunek oznaczamy symbolem $(abcd)$, a zatem liczba

$$\mu = (abcd) = \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}} : \frac{\sin \overline{ad}}{\sin \overline{bd}}.$$

Celem uzyskania kątów po prawej stronie tej równości, wypisujemy poszczególne proste, występujące w symbolu $(abcd)$ w następującym porządku: pierwsza a z trzecią c i druga b z trzecią c , a następnie pierwsza a z czwartą d i druga b z czwartą d .

Uważane cztery proste a , b , c i d połączyć możemy w dwie pary: ab i cd . Pozornie wydaje się, że pierwsza para prostych dla dwustosunku $(abcd)$ posiada inny charakter, aniżeli pozostała para c i d . Faktycznie tak nie jest, gdyż wykonać możemy następujące przekształcenia:

$$\begin{aligned}
 (abcd) &= \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}} : \frac{\sin \overline{ad}}{\sin \overline{bd}} = \frac{-\sin \overline{ca}}{-\sin \overline{cb}} : \frac{-\sin \overline{da}}{-\sin \overline{db}} = \frac{\sin \overline{ca}}{\sin \overline{cb}} : \frac{\sin \overline{da}}{\sin \overline{db}} = \\
 &= \frac{\sin \overline{ca}}{\sin \overline{da}} : \frac{\sin \overline{cb}}{\sin \overline{db}} = (cdab).
 \end{aligned}$$

Ponieważ $(abcd) = (cdab)$, przeto pary prostych ab i cd posiadają ten sam charakter.

Wykonajmy teraz inne przekształcenie dwustosunku $(abcd)$, a mianowicie:

$$(abcd) = \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}} : \frac{\sin \overline{ad}}{\sin \overline{bd}} = \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}} \cdot \frac{\sin \overline{bd}}{\sin \overline{ad}} = \frac{\sin \overline{bd}}{\sin \overline{ad}} : \frac{\sin \overline{bc}}{\sin \overline{ac}} = (badc).$$

Na mocy pierwszego przekształcenia mamy: $(badc) = (dcba)$, więc ostatecznie dochodzimy do relacji

$$(abcd) = (badc) = (cdab) = (dcba).$$

Dowiedliśmy zatem prawdziwości twierdzenia:

Dwustosunek $(abcd)$, czterech (różnych od siebie) prostych właściwych a, b, c i d dowolnego pęku, nie zmienia się wcale, jeżeli przestawimy dwie dowolne jego proste i równocześnie dwie proste pozostałe.

Zauważyć należy, że w wypisanej powyżej relacji obok siebie występują zawsze proste a i b , oraz obok siebie proste c i d . Zbadajmy wpływ własności dwóch par prostych ab i cd na znak dwustosunku $\mu = (abcd)$. Liczba $\mu = \lambda_1 : \lambda_2$, gdzie $\lambda_1 = \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}}$ i $\lambda_2 = \frac{\sin \overline{ad}}{\sin \overline{bd}}$. Stosunki podziału λ_1 i λ_2 posiadają równocześnie znaki $+$ wówczas, gdy proste c i d leżą „zewnątrz“ kąta $\overline{ab}$. Obie liczby λ_1 i λ_2 posiadają równocześnie znaki $-$, gdy proste c i d leżą „wewnątrz“ kąta $\overline{ab}$. W obydwu wypadkach liczbie $\mu = \lambda_1 : \lambda_2$ przypisać musimy znak $+$. Natomiast wówczas, gdy jedna z prostych c i d leży „zewnątrz“, a druga „wewnątrz“ omawianego kąta $\overline{ab}$, to liczbom λ_1 i λ_2 przypisać musimy znaki przeciwne, a temsamem dwustosunkowi $\mu = \lambda_1 : \lambda_2$ znak $-$.

Na podstawie rozważań ust. 8-go stwierdzimy, że dwie omawiane pary prostych ab i cd w dwóch pierwszych przypadkach tworzą dwie „nie rozdzielające się“ pary, natomiast w przypadku trzecim tworzą dwie „rozdzielające się“ pary prostych. A zatem:

Liczbie $\mu = (abcd)$ przypiszemy znak — albo + zależnie od tego, czy pary prostych ab i cd stanowią dwie rozdzielające się, czy też dwie nie rozdzielające się pary.

Dla dwustosunku

$$\mu = (abcd) = \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}} : \frac{\sin \overline{ad}}{\sin \overline{bd}}$$

możemy tedy — skoro dana jest „nieruchoma“ prosta s pęku $P(a, b, c, d, \dots)$ — nie zważać na znaki poszczególnych kątów $\overline{ac}$, $\overline{bc}$, $\overline{ad}$ i $\overline{bd}$, ale wziąć pod uwagę tylko wartości bezwzględne $\sin \overline{ac}$, $\sin \overline{bc}$, $\sin \overline{ad}$ i $\sin \overline{bd}$, a tem samem obliczyć wartość bezwzględną liczby μ . Natomiast znak + albo — liczby μ ustalimy na podstawie powyżej wypisanego twierdzenia.

O ile dana jest w pęku (P) prosta „nieruchoma“ s , to symbol np. $\overline{ac}$ oznacza jeden z dwóch kątów wierzchołkowych, opisanych przez prostą a , która wykonała ruch obrotowy około punktu P w kierunku abs . Skoro usuniemy ową prostą s , to symbol $\overline{ac}$ oznacza nam jeden z czterech kątów, jakie tworzą proste a i c . Dwa z pośród nich są to właśnie kąty wierzchołkowe, poprzednio wymienione; dwa dalsze kąty są również kątami wierzchołkowymi. Każde dwa kąty $\overline{ac}$, które nie stanowią pary kątów wierzchołkowych, są „kątami przyległymi“ i suma ich bezwzględnych miar (wartości) wynosi 180° . Wnosimy stąd, że: dla wszystkich czterech kątów, określonych symbolem $\overline{ac}$, bezwzględne wartości $\sin \overline{ac}$ są sobie równe. Te same uwagi stosują się oczywiście do trzech dalszych symbolów $\overline{bc}$, $\overline{ad}$ i $\overline{bd}$.

Przy wyznaczaniu liczby $\mu = (abcd)$ uniezależniliśmy się tedy ¹⁾ od „nieruchomej“ prostej s . Skoro obliczymy bezwzględne wartości $\sin \overline{ac}$, $\sin \overline{bc}$, $\sin \overline{ad}$ i $\sin \overline{bd}$ (gdzie symbol $\overline{xz}$ oznacza którykolwiek z czterech kątów, określonych prostymi x i z), to uzyskamy wartość bezwzględną liczby $\mu = (abcd)$. Znak — albo + liczby μ zależy od tego, czy pary prostych ab i cd tworzą dwie rozdzielające się, czy też dwie nie rozdzielające się pary.

Skoro proste a , b i c pęku (P) uważać będziemy za elementy stałe, to stosunek podziału $\lambda_1 = \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}}$ jest liczbą stałą, a dwustosunek

$$\mu = (abcd) = \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}} : \frac{\sin \overline{ad}}{\sin \overline{bd}} = \lambda_1 : \frac{\sin \overline{ad}}{\sin \overline{bd}},$$

gdzie liczba $\frac{\sin \overline{ad}}{\sin \overline{bd}}$ jest stosunkiem podziału trzech prostych a , b i d . Z po-

¹⁾ Doehlemann, l. c. str. 35.

przednich rozważań wynika, że: każdej prostej d pęku (P) , w odniesieniu do trzech stałych prostych a, b i c tego pęku, podporządkowana jest jedna i tylko jedna liczba $\mu = (abcd)$; i wzajemnie: każdej liczbie $\mu = (abcd)$, przyczem a, b i c są stałymi prostymi pęku (P) , podporządkowana jest jedna i tylko jedna prosta d tego pęku.

Przejdźmy teraz do pęku płaszczyzn. W tym celu poprowadźmy przez wierzchołek P pęku prostych $P(a, b, c, d, \dots, s, \dots)_\pi$ prostą p prostopadłą do płaszczyzny podstawowej π tego pęku. Płaszczyzny $\alpha = pa, \beta = pb, \dots, \sigma = ps, \dots$ tworzą pęk płaszczyzn

$$p(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \sigma, \dots) \overline{\wedge} P(a, b, c, d, \dots, s, \dots).$$

Zwroty $\alpha\beta\sigma$ i abs tych pęków są (ust. 8) zgodne. Skoro prosta a wykona obrót w stałym kierunku abs i opisz dwa wierzchołkowe kąty $\overline{ab}$, to równocześnie homologiczna płaszczyzna α pęku (p) wykona też obrót w stałym kierunku $\alpha\beta\sigma$ od położenia α bezpośrednio do położenia β , nie przekroczywszy przytem położenia σ . Płaszczyzna α opisz wówczas też dwa kąty, zwane kątami nachylenia płaszczyzn α i β , z których każdy oznaczać będziemy symbolem $\overline{\alpha\beta}$. Miarę (wielkość) kąta $\overline{ab}$, leżącego na płaszczyźnie $\pi \perp p$, zdefiniujemy jako miarę (wielkość) kąta $\overline{\alpha\beta}$.

W myśl powyższej definicji wszelkie rozważania, jakie przeprowadziliśmy poprzednio dla pęku prostych $P(a, b, \dots)_\pi$, dadzą się bezpośrednio zastosować do pęku płaszczyzn $p(\alpha, \beta, \dots)$. Utwory $(P)_\pi$ i (p) są perspektywiczne a oś p jest prostopadła do płaszczyzny podstawowej π . W szczególności: Liczbę $\lambda = \frac{\sin \overline{\alpha\gamma}}{\sin \overline{\beta\gamma}}$ nazywamy „stosunkiem podziału” trzech płaszczyzn α, β i γ pęku (p) . Podobnie liczbę

$$\mu = (\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\sin \overline{\alpha\gamma}}{\sin \overline{\beta\gamma}} : \frac{\sin \overline{\alpha\delta}}{\sin \overline{\beta\delta}}$$

nazywamy „dwustosunkiem” (stosunkiem anharmonicznym lub stosunkiem podwójnego podziału) czterech płaszczyzn α, β, γ i δ uważanego pęku (p) . W myśl naszej definicji zachodzą równości:

$$\lambda = \frac{\sin \overline{\alpha\gamma}}{\sin \overline{\beta\gamma}} = \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}} \text{ oraz}$$

$$\mu = \frac{\sin \overline{\alpha\gamma}}{\sin \overline{\beta\gamma}} : \frac{\sin \overline{\alpha\delta}}{\sin \overline{\beta\delta}} = \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}} : \frac{\sin \overline{ad}}{\sin \overline{bd}} \text{ lub } (\alpha\beta\gamma\delta) = (abcd).$$

Skoro usuniemy „nieruchomą” płaszczyznę $\sigma = ps$, to symbol np. $\overline{\alpha\gamma}$ oznaczać będzie jeden z czterech kątów, jakie

tworzą płaszczyzny α i γ pęku (p), podobnie jak symbol $\overline{ac}$ oznaczał jeden z czterech kątów, jakie tworzą proste a i c pęku (P) $\overline{\wedge}$ (p). Ponieważ dla wszystkich czterech kątów $\overline{ac}$ bezwzględne wartości $\sin \overline{ac}$ są sobie równe, przeto i bezwzględne wartości $\sin \overline{a\gamma}$ też są sobie równe. Celem obliczenia bezwzględnej wartości liczby $\mu = (\alpha\beta\gamma\delta)$ wystarczy wyznaczyć bezwzględne wartości $\sin \overline{a\gamma}$, $\sin \overline{\beta\gamma}$, $\sin \overline{a\delta}$ i $\sin \overline{\beta\delta}$. Znak $+$ lub $-$ liczby μ zależy od tego, czy pary płaszczyzn $\alpha\beta$ i $\gamma\delta$ tworzą dwie nie rozdzielające się, czy też dwie rozdzielające się pary.

11. Charakter rzutowy dwustosunku czterech elementów utworu zasadniczego 1-go gatunku. Niechaj dany będzie pęk prostych właściwych $P(a, b, \dots)$ perspektywiczny (ryc. 13) do szeregu punktów właściwych $p(A, B, \dots)$. Podwójne powierzchnie trójkątów: ACP , BCP , ADP i BDP wyrazić można wzorami:

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{PQ} &= \overline{AP} \cdot \overline{CP} \cdot \sin \overline{ac} & \overline{AD} \cdot \overline{PQ} &= \overline{AP} \cdot \overline{DP} \cdot \sin \overline{ad} \\ \overline{BC} \cdot \overline{PQ} &= \overline{BP} \cdot \overline{CP} \cdot \sin \overline{bc} & \overline{BD} \cdot \overline{PQ} &= \overline{BP} \cdot \overline{DP} \cdot \sin \overline{bd} \end{aligned}$$

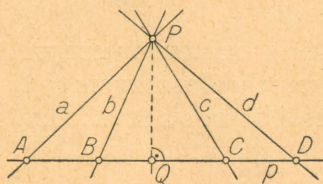
gdzie należy brać pod uwagę tylko wartości bezwzględne. Z obustronnego podzielenia uzyskamy:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}} \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\sin \overline{ad}}{\sin \overline{bd}}$$

a następnie z dalszego dzielenia

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}} : \frac{\sin \overline{ad}}{\sin \overline{bd}} \quad \text{czyli: } (ABCD) = (abcd).$$

Wykazaliśmy tedy równość bezwzględnych wartości liczb $(ABCD)$ i $(abcd)$. Z perspektywności szeregu punktów (p)



Ryc. 13.

i pęku prostych (P) wynika jednak (ust. 8), że dwom rozdzielającym się (wzgl. nie rozdzielającym się) parom punktów AB i CD szeregu (p) podporządkowane są również dwie rozdzielające się (wzgl. nie rozdzielające się) pary prostych ab i cd . A zatem (ust. 9 i 10) liczby $(ABCD)$ i $(abcd)$ posiadają znaki zgodne. Wykazali-

śmy tedy, że dla pęku prostych (P) i perspektywicznego z nim szeregu punktów (p) dwustosunek $(abcd)$ czterech dowolnych prostych pęku (P) równa się dwustosunkowi $(ABCD)$ czterech homologicznych punktów szeregu (p).

Uważajmy (ryc. 10) łańcuch perspektywicznych pęków prostych i szeregów punktów:

$$P_1(a_1, b_1, c_1, d_1, \dots) \overline{\wedge} p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \dots) \overline{\wedge} P_2(a_2, b_2, c_2, d_2, \dots) \overline{\wedge} \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \dots).$$

Stosując poznane twierdzenie do każdego z dwóch sąsiednich ogniw tego łańcucha, otrzymamy następujące zależności:

$$\begin{aligned} (a_1 b_1 c_1 d_1) &= (A_1 B_1 C_1 D_1), \\ (A_1 B_1 C_1 D_1) &= (a_2 b_2 c_2 d_2), \\ (a_2 b_2 c_2 d_2) &= (A_2 B_2 C_2 D_2) \end{aligned}$$

lub też:

$$(a_1 b_1 c_1 d_1) = (a_2 b_2 c_2 d_2), \quad (A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2).$$

Wykazaliśmy tedy, że skoro dwa

pęki prostych właściwych (P_1) i (P_2) są perspektywiczne, to wówczas dwustosunek $(a_1 b_1 c_1 d_1)$ czterech dowolnych prostych pęku (P_1) równa się dwustosunkowi $(a_2 b_2 c_2 d_2)$ czterech homologicznych prostych pęku (P_2).

szeregi punktów właściwych (p_1) i (p_2) są perspektywiczne, to dwustosunek $(A_1 B_1 C_1 D_1)$ czterech dowolnych punktów szeregu (p_1) równa się dwustosunkowi $(A_2 B_2 C_2 D_2)$ czterech homologicznych punktów szeregu (p_2).

Przetnijmy pęk płaszczyzn $p(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots)$ płaszczyzną ε prostopadłą do osi p w pęku prostych $P(a, b, c, d, \dots)_\varepsilon$. Dla perspektywicznych utworów

$$p(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots) \overline{\wedge} P(a, b, c, d, \dots)_\varepsilon$$

zachodzą — w myśl definicji przyjętej w ust. 10 — równości dwustosunków:

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (abcd).$$

Przetnijmy pęk płaszczyzn (p) dowolną płaszczyzną właściwą ω w pęku prostych $P_1(a_1, b_1, \dots)_\omega$, to zachodzą (ust. 3) zależności

$$\begin{aligned} p(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots) &\overline{\wedge} P_1(a_1, b_1, c_1, d_1, \dots)_\omega; \\ P(a, b, c, d, \dots)_\varepsilon &\overline{\wedge} P_1(a_1, b_1, c_1, d_1, \dots)_\omega. \end{aligned}$$

Dla perspektywicznych pęków (P) $_\varepsilon$ i (P_1) $_\omega$ otrzymamy równość dwustosunków: $(abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1)$, a ponieważ $(\alpha\beta\gamma\delta) = (abcd)$, przeto uzyskaliśmy równość dwustosunków

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (a_1 b_1 c_1 d_1)$$

czterech par homologicznych elementów pęku płaszczyzn (p)

i perspektywicznego z nim pęku prostych $(P_1)_\omega$, przyczem płaszczyzna podstawowa ω nie jest prostopadłą do osi p .

Skoro na płaszczyźnie ω obierzemy szereg punktów

$$p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \dots) \overline{\wedge} P_1(a_1, b_1, c_1, d_1, \dots)_\omega,$$

to dwustosunek $(A_2B_2C_2D_2) = (a_1b_1c_1d_1)$, a tem samem relacja

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (A_2B_2C_2D_2)$$

jest spełniona dla pęku płaszczyzn (p) i perspektywicznego z nim szeregu punktów (p_2) . Możemy tedy wypowiedzieć twierdzenie *Pappusa* (około 300 r. po Chr.):

Dla dwóch perspektywicznych utworów zasadniczych gatunku 1-go: dwustosunek czterech dowolnych elementów właściwych pierwszego utworu równy jest dwustosunkowi czterech homologicznych elementów właściwych utworu drugiego.

W ust. 7 zdefiniowaliśmy końcowe ogniwa łańcucha perspektywicznych utworów zasadniczych gatunku 1-go jako utwory rzutowe (jednokreślne). Stosując twierdzenie *Pappusa* kolejno do każdej pary sąsiednich ogniw owego łańcucha, uzyskamy równość dwustosunków czterech elementów właściwych ogniwa pierwszego i czterech homologicznych elementów właściwych ogniwa ostatniego. A zatem:

Dla dwóch rzutowych utworów zasadniczych gatunku 1-go: dwustosunek czterech dowolnych elementów właściwych pierwszego utworu równy jest dwustosunkowi czterech homologicznych elementów właściwych utworu drugiego.

W ust. 9 wykazaliśmy, że dwustosunek $(ABCD)$ czterech punktów właściwych szeregu (p) nie zmienia się wcale, gdy wykonamy następujące przestawienia jego elementów:

$$(ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA).$$

Niechaj pęk prostych (P) i pęk płaszczyzn (p_1) są utworami perspektywicznymi do szeregu (p)

$$p(A, B, C, D, \dots) \overline{\wedge} P(a, b, c, d, \dots) \overline{\wedge} p_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots)$$

to z relacji $(ABCD) = (abcd) = (\alpha\beta\gamma\delta)$ wynikają bezpośrednio związki:

$$(abcd) = (cdab) = (badc) = (dcba)$$

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (\gamma\delta\alpha\beta) = (\beta\alpha\delta\gamma) = (\delta\gamma\beta\alpha).$$

Prawdziwość pierwszego związku dowiedliśmy bezpośrednio w ust. 10. Zależności te ująć możemy w następujące twierdzenie:

Dwustosunek czterech dowolnych elementów właściwych utworu zasadniczego gatunku 1-go nie zmienia się wcale, jeżeli przestawimy dwa którekolwiek jego elementy i równocześnie dwa pozostałe jego elementy.

Prawdziwość powyższego twierdzenia wykazać też możemy w następujący sposób. Pęk prostych $S(a, b, c, d, \dots)$ przetnijmy dwiema dowolnymi prostymi p i r , przechodzącymi (ryc. 14) przez jakikolwiek punkt A prostej a . Punkty $D = dp$, $E = br$ i $F = cr$ niechaj wyznaczają dwie proste $m = DE$ i $n = DF$, które przecinają się z elementami c i b w punktach $M = mc$ i $N = nb$. Z łańcucha utworów perspektywicznych

$$\left\{ \begin{array}{l} p(A, B, C, D, \dots) \overline{\wedge} S(a, b, c, d, \dots) \overline{\wedge} \\ \overline{\wedge} r(A, E, F, L, \dots) \overline{\wedge} D(p, m, n, d, \dots) \end{array} \right.$$

wnosimy o jednokreślności

$$p(A, B, C, D, \dots) \overline{\wedge} D(p, m, n, d, \dots).$$

Pęk prostych (D) przetnijmy prostą b , a otrzymany w ten sposób szereg punktów (b) rzuńmy z punktu F na prostą p , to wówczas:

$$p(A, B, C, D, \dots) \overline{\wedge} D(p, m, n, d, \dots) \overline{\wedge} b(B, E, N, S, \dots) \overline{\wedge} \\ \overline{\wedge} F(FB, r, n, c, \dots) \overline{\wedge} p(B, A, D, C, \dots).$$

Dla rzutowych szeregów punktów

$$p(A, B, C, D, \dots) \overline{\wedge} p(B, A, D, C, \dots)$$

o wspólnej podstawie p zachodzi równość dwustosunków:

$$(ABCD) = (BADC).$$

Pęk prostych (D) przetnijmy teraz prostą c , a otrzymany szereg punktów (c) rzuńmy z punktu E na podstawę p . Z łańcucha utworów

$$p(A, B, C, D, \dots) \overline{\wedge} D(p, m, n, d, \dots) \overline{\wedge} c(C, M, F, S, \dots) \overline{\wedge} \\ \overline{\wedge} E(EC, m, r, b, \dots) \overline{\wedge} p(C, D, A, B, \dots)$$

wynika rzutowość szeregów punktów

$$p(A, B, C, D, \dots) \overline{\wedge} p(C, D, A, B, \dots)$$

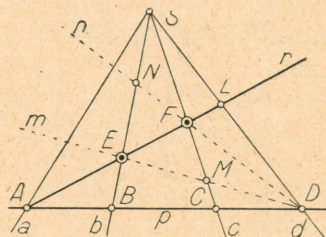
a tem samym równość dwustosunków

$$(ABCD) = (CDAB).$$

Na mocy pierwszego przestawienia dwustosunek $(CDAB) = (DCBA)$, przeto wykazaliśmy prawdziwość związku:

$$(ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA).$$

W dotychczasowych rozważaniach naszych badaliśmy własności tylko takich dwustosunków czterech elementów utworu zasadniczego gatunku 1-go, w których elementy uważane były wyłącznie tylko elementami właściwymi. Przejdziemy teraz



Ryc. 14.

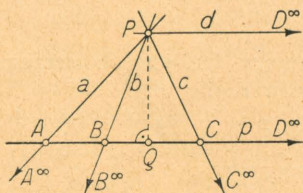
do definicji dwustosunków w przypadkach dotychczas wykluczonych¹⁾.

Na prostej właściwej p niechaj dane będą (ryc. 15) trzy punkty A, B i C , oraz punkt niewłaściwy D^∞ . Ponieważ stosunek podziału dwóch punktów właściwych A, B i punktu niewłaściwego D^∞ zdefiniowaliśmy w ust. 9 jako liczbę $\lambda = \frac{\overline{AD}^\infty}{\overline{BD}^\infty} = +1$,

przeto dwustosunkiem $\mu = (ABCD^\infty)$ owych czterech punktów nazwiemy liczbę

$$\mu = (ABCD^\infty) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}^\infty}{\overline{BD}^\infty} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

Dwustosunek μ jest liczbą dodatnią, gdy punkt C leży „zewnątrz” odcinka (o długości skończonej) $\overline{AB}$; natomiast μ jest liczbą ujemną, gdy C leży „wewnątrz” odcinka $\overline{AB}$. Możemy też po-



Ryc. 15.

wiedzieć (ust. 9), że liczba μ posiada znak $-$, wzgl. $+$ zależnie od tego, czy para punktów AB rozdziela parę CD^∞ , czy też nie rozdziela pary CD^∞ .

Szereg punktów $p(A, B, C, D^\infty, \dots)$ rzucmy z dowolnego punktu właściwego P , który nie leży na podstawie p . Dla perspektywicznych utworów

$$p(A, B, C, D^\infty, \dots) \overline{\wedge} P(a, b, c, d, \dots)$$

zbadajmy związki, zachodzące pomiędzy dwustosunkami $(ABCD^\infty)$ i $(abcd)$, gdzie d oznacza prostą $d = PD^\infty$ równoległą do podstawy p . Podwójne powierzchnie trójkątów ACP i BCP wyrazić można wzorami:

$$\overline{AC} \cdot \overline{PQ} = \overline{AP} \cdot \overline{PC} \cdot \sin \overline{ac}, \quad \overline{BC} \cdot \overline{PQ} = \overline{BP} \cdot \overline{CP} \cdot \sin \overline{bc}$$

przyczem uwzględniamy wyłącznie tylko wartości bezwzględne. Przez podzielenie uzyskamy

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}} = \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}} : \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}}.$$

W trójkącie ABP boki $\overline{BP}$ i $\overline{AP}$ są proporcjonalne do wstaw kątów przeciwnych, a owe kąty są równe kątom $\overline{ad}$ (lub $180^\circ - \overline{ad}$) i $\overline{bd}$ (lub $180^\circ - \overline{bd}$). Co do wartości bezwzględnej mamy zatem $\overline{BP} : \overline{AP} = \sin \overline{ad} : \sin \overline{bd}$. Podstawiając tę wartość w ostatnie równanie, otrzymamy zależność:

¹⁾ por. *F. Enriques*: Wykłady geometrii rzutowej, Warszawa 1917, str. 113.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}} : \frac{\sin \overline{ad}}{\sin \overline{bd}},$$

a ponieważ $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = (ABCD^\infty)$, przeto dla szeregu punktów (p) i perspektywicznego z nim pęku prostych (P) zachodzi relacja:

$$(ABCD^\infty) = (abcd).$$

Udowodniliśmy zatem, że i do tego wypadku stosuje się też twierdzenie Pappusa.

W podobny sposób dowieść możemy równości dwustosunków: $(BAD^\infty C) = (badc)$, $(CD^\infty AB) = (cdab)$, $(D^\infty CBA) = (dcba)$, a ponieważ $(abcd) = (badc) = (cdab) = (dcba)$, przeto otrzymujemy związek:

$$(ABCD^\infty) = (BAD^\infty C) = (CD^\infty AB) = (D^\infty CBA).$$

Wnosimy stąd, że: dwustosunek $(ABCD^\infty)$ posiada te same własności, co dwustosunek $(ABCD)$ czterech punktów właściwych.

Pęk prostych właściwych $P(a, b, c, d, \dots)$ przetnijmy (ryc. 15) prostą niewłaściwą s^∞ w szeregu punktów niewłaściwych

$$s^\infty(A^\infty, B^\infty, C^\infty, D^\infty, \dots).$$

Szereg (s^∞) i pęk prostych (P) są utworami perspektywicznymi. Z dowolnych punktów właściwych $P_1, P_2, \dots$ rzućmy szereg punktów (s^∞), to otrzymamy pęki prostych

$$P_1(a_1, b_1, \dots), P_2(a_2, b_2, \dots), \dots$$

perspektywiczne do pęku $P(a, b, \dots)$. Dla owych pęków prostych spełnione są zatem równości dwustosunków

$$(abcd) = (a_1b_1c_1d_1) = (a_2b_2c_2d_2) = \dots$$

zupełnie niezależnie od położenia wierzchołków $P, P_1, P_2, \dots$ pęków. Dwustosunek $(abcd)$ czterech dowolnych prostych właściwych pęku (P) zdefiniujemy jako dwustosunek $(A^\infty B^\infty C^\infty D^\infty)$ czterech punktów niewłaściwych owych prostych a, b, c i d .

Weźmy teraz pod uwagę pęk płaszczyzn $p(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots)$, o osi właściwej p , i przetnijmy go płaszczyzną niewłaściwą σ^∞ w pęku prostych niewłaściwych

$$P^\infty(a^\infty, b^\infty, c^\infty, d^\infty, \dots)_{\sigma^\infty}$$

Przyjmując proste właściwe $p_1 // p_2 // p_3 // \dots // p$ i rzucając z nich ów pęk prostych $(P^\infty)_{\sigma^\infty}$, otrzymamy pęki płaszczyzn

$$p_1(\alpha_1, \beta_1, \dots), p_2(\alpha_2, \beta_2, \dots), p_3(\alpha_3, \beta_3, \dots), \dots$$

perspektywiczne do pęku $p(\alpha, \beta, \dots)$. Dwustosunki

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1) = (\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2) = \dots$$

są sobie równe, więc: dwustosunek $(\alpha\beta\gamma\delta)$ zdefiniować możemy jako dwustosunek $(a^\infty b^\infty c^\infty d^\infty)$ czterech prostych niewłaściwych.

Pęk prostych równoległych $P^\infty(a // b // c \dots)$ przetnijmy dwiema prostymi właściwymi p_1 i p_2 , nie należącymi do pęku (P^∞). Otrzymamy wówczas:

$$P^\infty(a, b, c, d, \dots) \overline{\wedge} p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \dots).$$

Odcinki homologiczne: $\overline{A_1C_1}$ i $\overline{A_2C_2}$, $\overline{B_1C_1}$ i $\overline{B_2C_2}$, $\overline{A_1D_1}$ i $\overline{A_2D_2}$, $\overline{B_1D_1}$ i $\overline{B_2D_2}, \dots$ (o długościach skończonych) dwóch szeregów perspektywicznych (p_1) i (p_2) są zawarte pomiędzy prostymi równoległymi $a // b // c // d // \dots$ pęku (P^∞), a tem samem są też i proporcjonalne. Mamy zatem zależność

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{B_1C_1}} : \frac{\overline{A_1D_1}}{\overline{B_1D_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{B_2C_2}} : \frac{\overline{A_2D_2}}{\overline{B_2D_2}} \text{ czyli } (A_1B_1C_1D_1) = (A_2B_2C_2D_2).$$

Ten stały dwustosunek $(A_1B_1C_1D_1)$ czterech punktów prostej p_1 zdefiniujemy jako dwustosunek $(abcd)$ czterech prostych równoległych $a // b // c // d$, przechodzących odpowiednio przez owe punkty.

Podobnie zupełnie, gdy pęk płaszczyzn równoległych $p^\infty(a // \beta // \gamma // \delta // \dots)$ przetniemy dowolną prostą właściwą l w szeregu punktów $l(A, B, C, D, \dots)$, to: stały dwustosunek $(ABCD)$ zdefiniujemy jako dwustosunek $(\alpha\beta\gamma\delta)$ czterech płaszczyzn pęku (p^∞).

Skoro rozszerzyliśmy w ten sposób definicję dwustosunku, to wysłowić teraz możemy następujące uogólnione twierdzenia:

Dla dwóch rzutowych utworów zasadniczych gatunku 1-go: dwustosunek czterech dowolnych elementów pierwszego utworu równy jest dwustosunkowi czterech homologicznych elementów utworu drugiego.

Dwustosunek czterech dowolnych elementów utworu zasadniczego gatunku 1-go nie zmienia się wcale, jeżeli przedstawimy dwa którekolwiek jego elementy i równocześnie dwa pozostałe jego elementy.

Twierdzenia powyższe są zawsze prawdziwe, bez względu na to, czy występują elementy właściwe lub niewłaściwe, czy utwory zasadnicze gatunku 1-go są utworami właściwymi lub niewłaściwymi.

12. Stosunek harmoniczny. Dwustosunek $\mu = (\alpha\beta\gamma\delta)$ czterech elementów α, β, γ i δ dowolnego utworu zasadniczego gatunku 1-go nazywamy „stosunkiem harmonicznym“ wówczas, jeżeli liczba $\mu = -1$. O takich czterech elementach α, β, γ i δ mówimy, że tworzą one „grupę harmoniczną“ o stosunku $(\alpha\beta\gamma\delta) = -1$.

Z rozważań ust. 9 wiadomo nam, że skoro dane są (ryc. 11) na prostej p dwa punkty właściwe A, B , punkt niewłaściwy N^∞ i punkt S , połowiący odcinek (o długości skończonej) $\overline{AB}$, to zachodzą następujące relacje dla stosunków podziału:

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{BS}} = -1, \quad \frac{\overline{AN}^\infty}{\overline{BN}^\infty} = +1,$$

$$\mu = (ABSN^\infty) = \frac{\overline{AS}}{\overline{BS}} : \frac{\overline{AN}^\infty}{\overline{BN}^\infty} = -1 : +1 = -1.$$

Z ust. 10-go wiadomo nam, że dla prostych e i f , które są (ryc. 12) symetralnemi kąta $\overline{ab}$, spełnione są relacje:

$$\frac{\sin \overline{ae}}{\sin \overline{be}} = -1, \quad \frac{\sin \overline{af}}{\sin \overline{bf}} = +1,$$

$$\mu = (abef) = \frac{\sin \overline{ae}}{\sin \overline{be}} : \frac{\sin \overline{af}}{\sin \overline{bf}} = -1 : +1 = -1.$$

A zatem:

Dwa punkty właściwe A, B i punkt niewłaściwy N^∞ prostej p , oraz punkt S , połowiący odcinek (o długości skończonej) $\overline{AB}$, tworzą grupę harmoniczną o stosunku $(ABSN^\infty) = -1$.

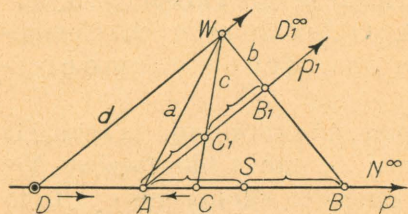
Dwie przecinające się proste właściwe a i b , oraz symetralne e i f kątów $\overline{ab}$, tworzą grupę harmoniczną o stosunku $(abef) = -1$.

Podobnie (ust. 10) grupę harmoniczną o stosunku $(\alpha\beta\epsilon\varphi) = -1$ tworzą też dwie przecinające się płaszczyzny właściwe α i β , oraz płaszczyzny symetralne ϵ i φ kątów $\overline{a\beta}$.

Powyższe trzy przykłady odnoszą się do grup harmonicznych, specjalnie skonstruowanych. Teraz zajmiemy się grupami harmonicznymi, które nie są zależne od specjalnego położenia poszczególnych elementów.

Zadanie: Na danej prostej właściwej p wyznaczyć taki punkt D , któryby z trzema danymi punktami A, B i C owej prostej tworzył grupę harmoniczną o stosunku $(ABCD) = -1$.

Rozwiązanie: Skoro na prostej p dane są stałe punkty A, B i C , to (ust. 9) każdej liczbie $\mu = (ABCD)$ podporządkowany jest jeden i tylko jeden punkt D , leżący na p . Dla



Ryc. 16.

liczby $\mu = -1$ uzyskany punkt D rozwiązuje zadanie. Celem skonstruowania tego punktu D , poprowadźmy (ryc. 16) przez punkt np. A dowolną prostą p_1 i odłóżmy na niej odcinki

$$\overline{AC_1} = \overline{C_1B_1}.$$

Wykreślmy następnie proste $b = BB_1$ i $c = CC_1$, przecinające się w punkcie W , oraz prostą $a = WA$ i $d = WD_1^\infty$, równoległą do prostej p_1 . Punkt $D = dp$ (przecięcia się prostych d i p) rozwiązuje zadanie, gdyż zachodzą następujące związki:

$$p(A, B, C, D, \dots) \overline{\wedge} W(a, b, c, d, \dots) \overline{\wedge} p_1(A, B_1, C_1, D_1^\infty, \dots)$$

Stosując twierdzenie *Pappusa* do szeregów perspektywicznych (p) i (p_1) , otrzymamy równość dwustosunków:

$$(ABCD) = (AB_1C_1D_1^\infty),$$

a że punkty A, B_1, C_1 i D_1^∞ szeregu (p_1) tworzą grupę harmoniczną o stosunku $(AB_1C_1D_1^\infty) = -1$, przeto dwustosunek $(ABCD) = -1$ jest również stosunkiem harmonicznym.

Na prostej p otrzymaliśmy grupę harmoniczną punktów, złożoną z czterech punktów właściwych. Z perspektywności szeregu (p) i pęku (W) wynika, że cztery proste a, b, c i d tworzą (ryc. 16) też grupę harmoniczną o stosunku $(abcd) = -1$. Ponieważ liczba $\mu = (ABCD) = (abcd) = -1$ posiada znak $-$, przeto — por. ust. 9 i 10 — para punktów AB rozdziela parę punktów CD , oraz para prostych ab rozdziela parę prostych cd . O takich parach AB i CD (wzgl. ab i cd) mówimy, że one „rozdzielają się harmonicznie“. Mówimy też, że punkty A i B są ze sobą „harmonicznie sprzężone“ względem punktów C i D , i wzajemnie. Podobnie, proste a i b są „harmonicznie sprzężone“ ze sobą względem prostych c i d , i naodwrot. Te same uwagi stosujemy również i do grupy harmonicznego czterech płaszczyzn α, β, γ i δ dowolnego pęku płaszczyzn.

Z rozważań ust. 11 wynika bezpośrednio, że stosunek harmoniczny $(ABCD) = -1$ czterech punktów prostej p nie zmie-

nia się wcale, gdy wykonamy następujące przestawienia jego punktów :

$$-1 = (ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

Skoro przestawimy ze sobą tylko dwa pierwsze punkty A i B , to dwustosunek $(BACD)$ jest również stosunkiem harmonicznym, gdyż :

$$\begin{aligned} (BACD) &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{1}{\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{1}{\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \\ &= \frac{1}{(ABCD)} = \frac{1}{-1} = -1. \end{aligned}$$

Ponieważ $(BACD) = (ABDC)$, przeto stosunek harmoniczny $(ABCD)$ nie zmienia się, gdy przestawimy ze sobą tylko dwa ostatnie jego punkty C i D . Dwustosunek $(BACD) = (ABDC) = (DCAB) = (CDBA)$, więc ostatecznie wykazaliśmy, że: stosunek harmoniczny $(ABCD) = -1$ podlega następującym przekształceniom

$$\begin{aligned} (ABCD) &= (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = \\ &= (BACD) = (ABDC) = (CDBA) = (DCAB) = -1. \end{aligned}$$

W powyższych relacjach stale są wypisane obok siebie dwa punkty „harmonicznie sprzężone“ A i B , oraz obok siebie dwa pozostałe punkty „harmonicznie sprzężone“ C i D . Porządek A, B czy też B, A w jakim występują punkty harmonicznie sprzężone — jest zupełnie obojętny. Na mocy uogólnionego twierdzenia Pappusa (ust. 11), wypowiedzieć możemy następujące twierdzenie:

Stosunek harmoniczny czterech elementów dowolnego utworu zasadniczego gatunku 1-go nie zmienia się wcale, jeżeli w dowolnym porządku wypiszemy obok siebie dwa jego elementy harmonicznie sprzężone, oraz obok siebie dwa pozostałe jego elementy harmonicznie sprzężone.

Z łatwością dowiedziemy prawdziwości następującego twierdzenia:

Jeżeli dla czterech elementów α, β, γ i δ , dowolnego utworu zasadniczego gatunku 1-go, dwustosunek $(\alpha\beta\gamma\delta)$ nie zmienia się wcale, skoro przestawimy ze sobą tylko dwa pierwsze jego elementy α i β (wzgl. przestawimy tylko dwa ostatnie elementy γ i δ) —

to wówczas owe elementy tworzą grupę harmoniczną o stosunku $(\alpha\beta\gamma\delta) = -1$.

W tym celu obierzmy na dowolnej prostej p cztery takie punkty α, β, γ i δ , dla których zachodzi równość dwustosunków:

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (\beta\alpha\gamma\delta).$$

Skoro dla dwustosunku $(\alpha\beta\gamma\delta)$ dopuszczamy możność przestawienia dwóch pierwszych punktów α i β , to natychmiast wykazemy, że ów dwustosunek nie zmieni się wcale, jeżeli w nim przestawimy dwa ostatnie jego punkty γ i δ . W istocie bowiem (ust. 11) dwustosunek $(\beta\alpha\gamma\delta) = (\alpha\beta\delta\gamma)$, więc na mocy poprzedniej relacji, zachodzi faktycznie równość:

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (\alpha\beta\delta\gamma).$$

Po rozwinięciu tych symboli otrzymamy:

$$\frac{\overline{\alpha\gamma}}{\overline{\beta\gamma}} : \frac{\overline{\alpha\delta}}{\overline{\beta\delta}} = \frac{\overline{\alpha\delta}}{\overline{\beta\delta}} : \frac{\overline{\alpha\gamma}}{\overline{\beta\gamma}} = \frac{\overline{\alpha\delta}}{\frac{\overline{\alpha\gamma}}{\overline{\beta\gamma}}} = \frac{1}{\frac{\overline{\alpha\gamma}}{\overline{\beta\gamma}} : \frac{\overline{\alpha\delta}}{\overline{\beta\delta}}}$$

czyli $\left[\frac{\overline{\alpha\gamma}}{\overline{\beta\gamma}} : \frac{\overline{\alpha\delta}}{\overline{\beta\delta}} \right]^2 = +1$ lub $\frac{\overline{\alpha\gamma}}{\overline{\beta\gamma}} : \frac{\overline{\alpha\delta}}{\overline{\beta\delta}} = \pm 1$.

W przypadku $\frac{\overline{\alpha\gamma}}{\overline{\beta\gamma}} : \frac{\overline{\alpha\delta}}{\overline{\beta\delta}} = +1$ mamy równość stosunków po-

działu $\frac{\overline{\alpha\gamma}}{\overline{\beta\gamma}} = \frac{\overline{\alpha\delta}}{\overline{\beta\delta}}$, z której wynika (ust. 9) bezpośrednio, że punkty γ i δ zjednoczyły (nakryły) się w jednym punkcie. Ponieważ wedle założenia obraliśmy na prostej p cztery różne od siebie punkty α, β, γ i δ , przeto wykluczyć musimy liczbę $+1$, a przyjąć tylko liczbę $\frac{\overline{\alpha\gamma}}{\overline{\beta\gamma}} : \frac{\overline{\alpha\delta}}{\overline{\beta\delta}} = -1$. Wykazaliśmy tedy, że elementy α, β, γ i δ tworzą grupę harmoniczną o stosunku $(\alpha\beta\gamma\delta) = (\beta\alpha\gamma\delta) = (\alpha\beta\delta\gamma) = -1$.

Na ryc. 16 dana jest grupa harmoniczna punktów A, B, C i D , oraz punkt S , który jest środkiem odcinka (o długości skończonej) AB . Dla stosunku harmonicznego $(ABCD) = -1$ mamy:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = -1 \text{ lub } \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = - \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \text{ czyli:}$$

$$\frac{\overline{AS} + \overline{SC}}{\overline{BS} + \overline{SC}} = - \frac{\overline{AS} + \overline{SD}}{\overline{BS} + \overline{SD}} \text{ albo } - \frac{\overline{SA} + \overline{SC}}{\overline{SA} + \overline{SC}} = \frac{\overline{SA} - \overline{SD}}{\overline{SA} + \overline{SD}}.$$

Po wymnożeniu dochodzimy do bardzo ważnej relacji:

$$\overline{SC} \cdot \overline{SD} = \overline{SA}^2 = \overline{SB}^2,$$

którą ująć możemy w następujące twierdzenie:

Grupa harmoniczna punktów właściwych, leżących na dowolnej prostej, posiada tę własność, że: iloczyn odległości dwóch punktów harmonicznie sprzężonych od środka odcinka, ograniczonego dwoma pozostałymi punktami harmonicznie sprzężeniami, równy jest kwadratowi połowy owego odcinka.

Punkt S leży zewnątrz odcinka (o długości skończonej!) $\overline{CD}$, gdyż iloczyn $\overline{SC} \cdot \overline{SD}$ posiada znak $+$. Niechaj A, B , a tem samem i punkt S , będą elementami stałymi na prostej p (ryc. 16), a punkt C elementem ruchomym. Skoro C zbliża się ku punktowi A , to odcinek $\overline{SC}$ zwiększa się, a odcinek $\overline{SD}$ musi zmniejszać się tak, aby iloczyn $\overline{SC} \cdot \overline{SD}$ był wielkością stałą $= \overline{SA}^2$. Wnosimy stąd, że punkt D również zbliża się ku punktowi A . W położeniu granicznym, gdy punkt C zjednoczy się z elementem A , to wówczas z relacji: $\overline{SC} \cdot \overline{SD} = \overline{SA}^2$ i $\overline{SC} = \overline{SA}$ wynika bezpośrednio, że: odcinek $\overline{SD} = \overline{SA}$, czyli innemi słowy: punkt D zjednoczył się też z elementem A .

Poddajmy teraz punkt C ruchowi o zwrocie wprost przeciwnym, t. zn. o zwrocie CSB . Gdy C zjednoczy się z punktem S , to punkt D zjednoczy się z punktem niewłaściwym N^∞ prostej p , gdyż $(ABSN^\infty) = -1$. Gdy punkt C zbliża się ku punktowi B , to zwiększa się odcinek $\overline{SC}$; ponieważ jednak iloczyn $\overline{SC} \cdot \overline{SD} = \overline{SB}^2$, przeto musi się zmniejszać coraz bardziej odcinek $\overline{SD}$, a tem samem punkt D musi się zbliżać coraz bardziej ku punktowi B . W granicy, skoro C zjednoczy się z punktem B , to równocześnie i punkt D musi zjednoczyć się też z punktem B , gdyż $\overline{SC} \cdot \overline{SD} = \overline{SB}^2$ i $\overline{SC} = \overline{SB}$. A zatem:

Jeżeli w grupie harmonicznej punktów właściwych dowolnego szeregu o podstawie p zjednoczą się dwa którekolwiek z tych punktów, to z nimi zjednoczyć się musi jeszcze jeden z dwóch pozostałych punktów owej grupy.

Poznaliśmy bardzo ważną własność grupy harmonicznej punktów właściwych szeregu (p) . Z rozważań ust. 8 i ust. 12 wynika bezpośrednio, że — skoro symbol (W) oznacza pęk prostych (właściwych) perspektywiczny do szeregu (p) , a symbol (w) pęk płaszczyzn (właściwych) perspektywiczny do szeregu (p) —

powyższa własność spełniona również będzie dla grupy harmonicznej prostych właściwych pęku (W), oraz dla grupy harmonicznej płaszczyzn właściwych pęku (w). Dochodzimy zatem do twierdzenia:

Jeżeli w grupie harmonicznej elementów właściwych — dowolnego utworu zasadniczego gatunku 1-go — zjednoczą się dwa którekolwiek z tych elementów, to z niemi zjednoczyć się musi jeszcze jeden z dwóch pozostałych elementów owej grupy.

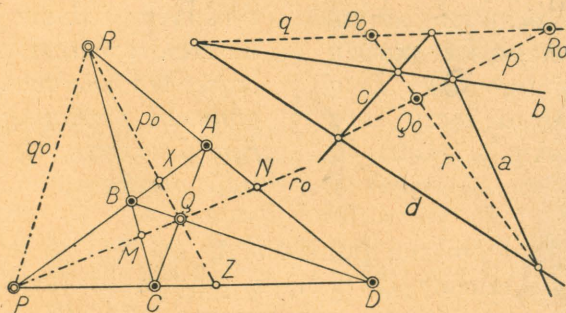
13. Czworokąt i czworobok zupełny.

Cztery punkty A, B, C i D dowolnej płaszczyzny, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej (ryc. 17), wyznaczają płaski czworokąt zupełny. Dane punkty są wierzchołkami tego wielokąta, a proste, przechodzące przez dwa wierzchołki, są jego bokami. Czworokąt zupełny posiada zatem cztery wierzchołki: A, B, C, D i sześć boków: AB, AC, AD, BC, BD, CD . Przez każdy wierzchołek czworokąta przechodzą trzy jego boki. Każde dwa boki czworokąta zupełnego, które nie przechodzą przez jeden i ten sam jego wierzchołek, nazywamy bokami przeciwległymi. Każde dwa boki przeciwległe przecinają się w punkcie przekątnym, a każde dwa takie punkty wyznaczają prostą przekątną. Czworokąt zupełny posiada zatem: trzy pary boków przeciwległych AB i CD , AC i BD , AD i BC , trzy punkty przekątne P, Q i R , trzy proste

Cztery proste a, b, c i d dowolnej płaszczyzny, z których żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt (ryc. 18), wyznaczają płaski czworobok zupełny. Dane proste są bokami tego wieloboku, a punkty, przecięcia się dwóch boków, są jego wierzchołkami. Czworobok zupełny posiada zatem cztery boki: a, b, c, d i sześć wierzchołków: ab, ac, ad, bc, bd, cd . Na każdym boku czworoboku leżą trzy jego wierzchołki. Każde dwa wierzchołki czworoboku zupełnego, które nie leżą na jednym i tym samym jego boku, nazywamy wierzchołkami przeciwległymi. Każde dwa wierzchołki przeciwległe wyznaczają prostą przekątną, a każde dwie takie proste przecinają się w punkcie przekątnym. Czworobok zupełny posiada zatem: trzy pary wierzchołków przeciwległych ab i cd , ac i bd , ad i bc , trzy proste przekątne p, q i r , trzy punkty

przekątne $r_0 = PQ$, $p_0 = QR$
i $q_0 = RP$, oraz trójkąt prze-
kątny (PQR) .

przekątne $R_0 = pq$, $P_0 = qr$
i $Q_0 = rp$, oraz trójbok prze-
kątny (pqr) .



Ryc. 17.

Ryc. 18.

Pęk prostych $P(PA, PD, r_0, q_0, \dots)$, którego wierzchołkiem jest punkt przekątny P (ryc. 17), przetnijmy bokami przeciwnymi AD i BC w dwóch perspektywicznych szeregach punktów

$$(A, D, N, R, \dots) \overline{\wedge} (B, C, M, R, \dots).$$

Uzyskany w ten sposób szereg punktów na boku CB rzucmy następnie z punktu przekątnego Q na bok AB , to otrzymamy:

$$(B, C, M, R, \dots) \overline{\wedge} Q(QB, QC, r_0, p_0, \dots) \overline{\wedge} (D, A, N, R, \dots).$$

Z powyższych relacji wynika (por. ust. 7), że na boku AD czworokąta zupełnego otrzymaliśmy dwa rzutowe szeregi punktów

$$(A, D, N, R, \dots) \overline{\wedge} (D, A, N, R, \dots).$$

Na mocy uogólnionego twierdzenia *Pappusa* (ust. 11) zachodzi równość dwustosunków $(ADNR) = (DANR)$, a ponieważ liczba $(ADNR)$ nie zmienia się wcale, skoro przestawimy ze sobą tylko dwa pierwsze elementy A i D , przeto z rozważań ust. 12 wynika, że: liczba $(ADNR) = (DANR) = -1$. Wykazaliśmy tedy, że punkty A, D i N, R tworzą grupę harmoniczną, przyczem A i D są harmonicznie sprzężone (ust. 12) względem punktów N i R .

W sposób zupełnie analogiczny dowieść możemy — stosując zasadę biegunowej dwoistości (ust. 5) — że dwa boki a i d czworoboku zupełnego (ryc. 18) są ze sobą harmonicznie sprzężone względem przekątnej r i prostej, łączącej wierzchołek ab z punktem przekątnym R_0 . A zatem:

Każde dwa wierzchołki czworokąta zupełnego są ze sobą harmonicznie sprzężone względem punktu przekątnego, który leży z nimi na jednym boku czworokąta, i punktu przecięcia się tego boku z tą przekątną, która łączy dwa pozostałe punkty przekątne.

Każde dwa boki czworoboku zupełnego są ze sobą harmonicznie sprzężone względem przekątnej, która przecina się z nimi w jednym wierzchołku czworoboku, i prostej, łączącej ten wierzchołek z tym punktem przekątnym, w którym przecinają się dwie pozostałe przekątne.

Grupę harmoniczną punktów A , D , N i R o stosunku $(ADNR) = -1$ rzućmy (ryc. 17) z punktu przekątnego P , to otrzymamy grupę harmoniczną prostych PA , PD , r_0 i q_0 . Tę ostatnią grupę przetnijmy wreszcie przekątną p_0 w grupie harmoniczej punktów X , Z , Q i R . Dowiedliśmy zatem prawdziwości następujących twierdzeń, odpowiadających sobie dwoiście:

Każde dwa boki przeciwległe czworokąta zupełnego są ze sobą harmonicznie sprzężone względem tych dwóch przekątnych, które przecinają się z owymi bokami w jednym i tym samym punkcie przekątnym czworokąta.

Każde dwa punkty przekątne czworokąta zupełnego, leżące na jednej przekątnej, są ze sobą harmonicznie sprzężone względem dwóch punktów przecięcia się owej przekątnej z temi bokami przeciwległymi czworokąta, które przechodzą przez trzeci punkt przekątny.

Każde dwa wierzchołki przeciwległe czworoboku zupełnego są ze sobą harmonicznie sprzężone względem tych dwóch punktów przekątnych, które leżą z owymi wierzchołkami na jednej i tej samej przekątnej czworoboku.

Każde dwie przekątne czworoboku zupełnego, przechodzące przez jeden punkt przekątny, są ze sobą harmonicznie sprzężone względem dwóch prostych, łączących ów punkt przekątny z temi wierzchołkami przeciwległymi czworoboku, które leżą na trzeciej przekątnej.

Zadanie: Na danej prostej wyznaczyć taki punkt N , któryby z trzema danymi punktami A , D i R owej prostej tworzył grupę harmoniczną o stosunku $(ADNR) = -1$.

Rozwiązanie: Punkty A i D uważajmy za wierzchołki a punkt R za punkt przekątny (ryc. 17) czworokąta zupełnego.

Przez A i D poprowadzimy dwie dowolne proste AP i DP , przecinające się w drugim punkcie przekątnym P . Proste AP i DP przetnijmy odpow. w punktach B i C prostą, wykreśloną dowolnie z punktu R . Dla uzyskanego w ten sposób czworokąta zupełnego $ABCD$ wyznaczmy trzeci punkt przekątny Q , to wówczas prosta przekątna PQ przetnie się z daną prostą w szukanym punkcie N .

Ćwiczenie 1: Na prostej p_0 wyznaczyć taki punkt Q , któryby z trzema danymi punktami X, Z i R (ryc. 17) tworzył grupę harmoniczną o stosunku $(XZRQ) = -1$. (Do konstrukcji należy użyć czworokąta zupełnego, którego jeden bok przechodzi przez X , drugi przez Z , a dwa dalsze przez R .)

Ćwiczenie 2: Rozwiązać poprzednie ćwiczenie przy pomocy czworoboku zupełnego, dla którego punkty X i Z byłyby dwoma przeciwległymi wierzchołkami, a punkt $R = R_0$ (por. ryc. 18) punktem przekątnym.

Czworokąt zupełny $ABCD$ i czworobok zupełny $abcd$, leżące na płaszczyźnie ω , rzućmy z dowolnego punktu W , który nie przynależy do ω . Otrzymamy wówczas (ust. 5) czworokrawędź zupełną i kąt czworościenny zupełny, które są utworami geometrycznymi, przynależnymi do wiązki (W).

Z rozważań ust. 11 i 12 wiadomo nam, że rzut grupy harmoniczej jest zawsze grupą harmoniczną, przeto rozwiązać możemy następujące ćwiczenia.

Ćwiczenie 3: Należy ustalić (wysławić) trzy twierdzenia dla czworokrawędzi zupełnej, odpowiadające trzem dowiedzionym powyżej twierdzeniom dla czworokąta zupełnego.

Ćwiczenie 4: Należy ustalić trzy twierdzenia dla kąta czworościennego zupełnego, odpowiadające trzem poprzednio dowiedzionym twierdzeniom dla czworoboku zupełnego.

Ćwiczenie 5: Jaki związek zachodzi pomiędzy twierdzeniami, odnoszącymi się do: a) czworokrawędzi zupełnej i kąta czworościennego zupełnego; b) czworokrawędzi zupełnej i płaskiego czworoboku zupełnego; c) kąta czworościennego zupełnego i płaskiego czworokąta zupełnego.

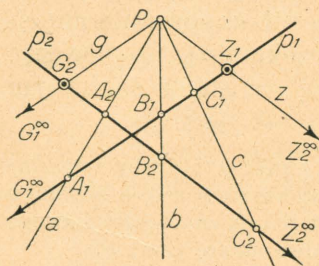
14. Potęga szeregów rzutowych. Szeregi i pęki podobne.

Pęk prostych właściwych $P(a, b, c, g, z, \dots)$ przetnijmy (ryc. 19) dwiema prostymi p_1 i p_2 , równoległymi odpow. do elementów g i z . Otrzymamy wówczas łańcuch ogniów perspektywicznych:

$$p_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \overline{\wedge} P(a, b, c, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, \dots),$$

którego końcowe ogniwa (p_1) i (p_2) są (ust. 6) szeregami perspektywnymi. Każda prosta c pęku (P) przecina się z podstawami p_1 i p_2 w dwóch homologicznych punktach $C_1 = cp_1$ i $C_2 = cp_2$ owych szeregów. Z warunków równoległości $p_1 \parallel g$

i $p_2 // z$ wynika, że punkty $G_1^\infty = gp_1$ i $G_2 = gp_2$, oraz $Z_1 = zp_1$ i $Z_2^\infty = zp_2$ stanowią dwie pary homologicznych elementów szeregów



Ryc. 19.

$$p_1(A_1, B_1, C_1, G_1^\infty, Z_1, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, G_2, Z_2^\infty, \dots).$$

Punktowi niewłaściwemu G_1^∞ szeregu (p_1) podporządkowany jest punkt właściwy G_2 w szeregu (p_2). Punktowi niewłaściwemu Z_2^∞ szeregu (p_2) odpowiada punkt właściwy Z_1 w szeregu (p_1). Punkty właściwe G_2 i Z_1 perspektywicznych szeregów (p_1) i (p_2), którym podporządkowane są punkty niewłaściwe G_1^∞ i Z_2^∞ w owych szeregach, nazywamy punktami *granicznymi*, punktami *zbiegu* lub *wzajemnymi*.

Uważajmy teraz (ryc. 10) łańcuch utworów perspektywicznych

$$p_1(A_1, B_1, \dots) \overline{\wedge} P_2(a_2, b_2, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, \dots) \overline{\wedge} P_3(a_3, b_3, \dots) \overline{\wedge} p_3(A_3, B_3, \dots),$$

którego ogniwa końcowe są szeregami rzutowymi. Za pośrednictwem poszczególnych ogniw tego łańcucha, podporządkować możemy (ust. 7): punktowi niewłaściwemu G_1^∞ szeregu (p_1) jeden i tylko jeden punkt G_3 w szeregu (p_3), oraz punktowi niewłaściwemu Z_3^∞ szeregu (p_3) jeden i tylko jeden punkt Z_1 w szeregu (p_1). Uzyskane w ten sposób punkty właściwe G_3 i Z_1 nazywamy punktami *granicznymi* (zbiegu lub wzajemnymi) szeregów jednokreślnych:

$$p_1(A_1, B_1, C_1, G_1^\infty, Z_1, \dots) \overline{\wedge} p_3(A_3, B_3, C_3, G_3, Z_3^\infty, \dots).$$

Dla czterech par homologicznych elementów: A_1 i A_3 , B_1 i B_3 , G_1^∞ i G_3 , Z_1 i Z_3^∞ tych szeregów zachodzi — na mocy uogólnionego twierdzenia Pappusa — równość dwustosunków:

$$(A_1 B_1 G_1^\infty Z_1) = (A_3 B_3 G_3 Z_3^\infty) \text{ czyli } \frac{\overline{A_1 G_1^\infty}}{\overline{B_1 G_1^\infty}} : \frac{\overline{A_1 Z_1}}{\overline{B_1 Z_1}} = \frac{\overline{A_3 G_3}}{\overline{B_3 G_3}} : \frac{\overline{A_3 Z_3^\infty}}{\overline{B_3 Z_3^\infty}}.$$

W myśl definicji (ust. 9) jednak $\frac{\overline{A_1 G_1^\infty}}{\overline{B_1 G_1^\infty}} = +1$ i $\frac{\overline{A_3 Z_3^\infty}}{\overline{B_3 Z_3^\infty}} = +1$, przeto otrzymujemy zależność:

$$1 : \frac{\overline{A_1 Z_1}}{\overline{B_1 Z_1}} = \frac{\overline{A_3 G_3}}{\overline{B_3 G_3}} : 1 \quad \text{lub} \quad \frac{\overline{B_1 Z_1}}{\overline{A_1 Z_1}} = \frac{\overline{A_3 G_3}}{\overline{B_3 G_3}}$$

więc ostatecznie w formie iloczynu odcinków równość

$$\overline{A_1 Z_1} \cdot \overline{A_3 G_3} = \overline{B_1 Z_1} \cdot \overline{B_3 G_3}.$$

Gdybyśmy, zamiast punktów B_1 i B_3 , przyjęli punkty homologiczne C_1 i C_3 , to z równości dwustosunków $(A_1 C_1 G_1^\infty Z_1) = (A_3 C_3 G_3 Z_3^\infty)$ otrzymalibyśmy iloczyn $\overline{A_1 Z_1} \cdot \overline{A_3 G_3} = \overline{C_1 Z_1} \cdot \overline{C_3 G_3}$. Wnosimy stąd, że iloczyn owych odcinków jest liczbą stałą:

$$\overline{A_1 Z_1} \cdot \overline{A_3 G_3} = \overline{B_1 Z_1} \cdot \overline{B_3 G_3} = \overline{C_1 Z_1} \cdot \overline{C_3 G_3} = \dots$$

Dowiedliśmy tedy, że:

Iloczyn odcinków (o długościach skończonych), które leżą na podstawach dwóch rzutowych szeregów punktów i są ograniczone odpow. dwoma punktami homologicznymi oraz dwoma (właściwymi) punktami granicznymi owych szeregów, jest liczbą stałą.

Powyższy iloczyn nazywamy¹⁾ *potęgą* (lub *cechą*) uważanych szeregów jednokreślnych (p_1) i (p_3) . Powyższe twierdzenie stosuje się również i do perspektywicznych szeregów (p_1) i (p_2) , podanych np. na ryc. 19.

W rozważaniach naszych uwzględnić musimy też i ten przypadek, w którym: punktowi niewłaściwemu G_1^∞ szeregu (p_1) podporządkowany jest w szeregu (p_3) również punkt niewłaściwy G_3^∞ . O możliwości takiego podporządkowania przekonamy się, skoro weźmiemy pod uwagę łańcuch utworów perspektywicznych

$$W_1(a_1, b_1, g_1, \dots) \overline{\overline{p_2(A_2, B_2, G_2, \dots)}} \overline{\overline{W_3(a_3, b_3, g_3, \dots)}},$$

którego ogniwami są pęki prostych (W_1) i (W_3) , oraz szereg punktów (p_2) . Skoro pęk (W_1) przetniemy prostą $p_1 // g_1$, a pęk (W_3) prostą $p_3 // g_3$, to otrzymamy nowy łańcuch utworów perspektywicznych:

$$p_1(A_1, B_1, G_1^\infty, \dots) \overline{\overline{W_1(a_1, b_1, g_1, \dots)}} \overline{\overline{p_2(A_2, B_2, G_2, \dots)}} \overline{\overline{W_3(a_3, b_3, g_3, \dots)}} \overline{\overline{p_3(A_3, B_3, G_3^\infty, \dots)}},$$

którego ogniwa końcowe (p_1) i (p_3) są jednokreślnymi szeregami punktów. Punktowi niewłaściwemu $G_1^\infty = p_1 g_1$ szeregu (p_1) podporządkowany jest w szeregu (p_3) punkt niewłaściwy $G_3^\infty = p_3 g_3$. Dwa rzutowe szeregi punktów nazywamy „*podobnymi*“ wówczas, jeżeli punkty niewłaściwe owych szeregów są elementami homologicznymi. Z uogólnionego twierdzenia Pappusa wynika dla szeregów podobnych równość dwustosunków:

¹⁾ Porównaj R. Sturm, l. c. I. str. 66.

$$(A_1 B_1 C_1 G_1^\infty) = (A_3 B_3 C_3 G_3^\infty) \text{ lub } \frac{\overline{A_1 C_1}}{\overline{B_1 C_1}} : \frac{\overline{A_1 G_1^\infty}}{\overline{B_1 G_1^\infty}} = \frac{\overline{A_3 C_3}}{\overline{B_3 C_3}} : \frac{\overline{A_3 G_3^\infty}}{\overline{B_3 G_3^\infty}}$$

$$\text{czyli } \frac{\overline{A_1 C_1}}{\overline{B_1 C_1}} = \frac{\overline{A_3 C_3}}{\overline{B_3 C_3}} \text{ albo też } \frac{\overline{A_1 C_1}}{\overline{A_3 C_3}} = \frac{\overline{B_1 C_1}}{\overline{B_3 C_3}}.$$

Związek ten wypowiedzieć możemy w następującej formie:

Iloraz (stosunek) odcinków (o długościach skończonych), które leżą na podstawach dwóch podobnych szeregów punktów i są ograniczone dwoma parami punktów homologicznych owych szeregów, jest liczbą stałą.

W szczególności, gdy stosunek $\frac{\overline{A_1 C_1}}{\overline{A_3 C_3}} = 1$ czyli odcinki homologiczne $\overline{A_1 C_1} = \overline{A_3 C_3}$ są sobie równe, to szeregi podobne (p_1) i (p_3) nazywamy wówczas szeregami przystającymi.

Dane niechaj będą dwa punkty niewłaściwe W_1^∞ i W_2^∞ , oraz dwa szeregi podobne

$$p_1(A_1, B_1, C_1^\infty, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2^\infty, \dots)$$

o podstawach właściwych p_1 i p_2 . Skoro z punktu W_1^∞ rzucimy (ust. 3) szereg punktów (p_1) , a z wierzchołka W_2^∞ szereg (p_2) , to otrzymamy wówczas dwa jednokreślne „pęki prostych równoległych“

$$W_1^\infty(a_1, b_1, c_1^\infty, \dots) \overline{\wedge} W_2^\infty(a_2, b_2, c_2^\infty, \dots).$$

Proste niewłaściwe $c_1^\infty = W_1^\infty C_1^\infty$ i $c_2^\infty = W_2^\infty C_2^\infty$ są elementami homologicznymi tych pęków.

Zamiast punktów W_1^∞ i W_2^∞ , weźmy pod uwagę dwie proste niewłaściwe w_1^∞, w_2^∞ . Skoro z prostej w_1^∞ rzucimy szereg (p_1) , a z prostej w_2^∞ szereg (p_2) , to otrzymamy dwa jednokreślne „pęki płaszczyzn równoległych“

$$w_1^\infty(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1^\infty, \dots) \overline{\wedge} w_2^\infty(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2^\infty, \dots),$$

dla których płaszczyzny niewłaściwe $\gamma_1^\infty = w_1^\infty C_1^\infty$ i $\gamma_2^\infty = w_2^\infty C_2^\infty$ są elementami homologicznymi.

Dwa rzutowe pęki prostych równoległych (o wierzchołkach niewłaściwych) nazywamy¹⁾ podobnymi wówczas

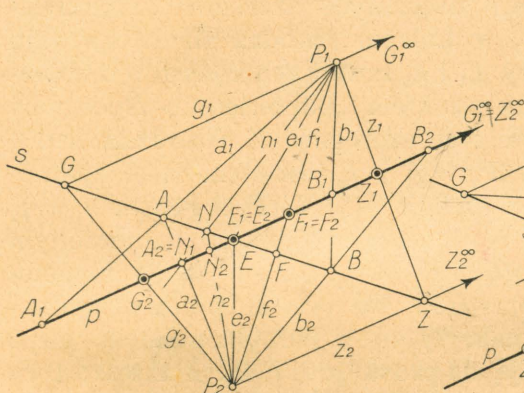
Dwa rzutowe pęki płaszczyzn równoległych (o ośiach niewłaściwych) nazywamy podobnymi wówczas,

¹⁾ Porównaj *F. Enriques* l. c. str. 94.

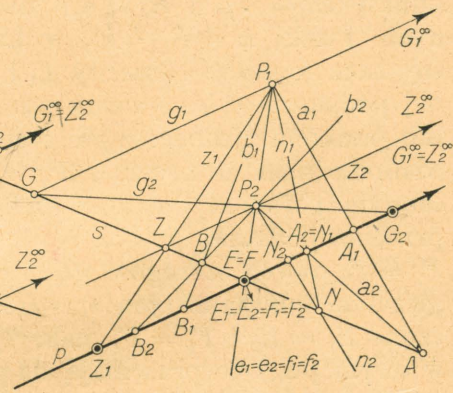
czas, jeżeli proste niewłaściwe owych pęków są elementami homologicznymi.

jeżeli płaszczyzny niewłaściwe owych pęków są elementami homologicznymi.

15. Szeregi rzutowe o wspólnej podstawie. Z takimi szeregami zapoznaliśmy się już w ust. 11 i 13. Chcąc zbadać własności tych szeregów, weźmy pod uwagę (ryc. 20 i 21) dwa perspektywiczne pęki prostych (P_1) i (P_2) , oraz dowolną prostą p , nie przechodzącą przez wierzchołki P_1 i P_2 owych pęków. Prosta p przetnie dane pęki $(P_1) \overline{\cap} (P_2)$ w dwóch szeregach rzutowych „o wspólnej podstawie p “, gdyż zachodzi (ust. 7) relacja: $p(A_1, B_1, \dots) \overline{\cap} P_1(a_1, b_1, \dots) \overline{\cap} s(A, B, \dots) \overline{\cap} P_2(a_2, b_2, \dots) \overline{\cap} p(A_2, B_2, \dots)$.



Ryc. 20.



Ryc. 21.

Za pośrednictwem poszczególnych ogniw tego łańcucha, każdemu punktowi A_1 pierwszego szeregu podporządkowany jest jeden i tylko jeden punkt A_2 w szeregu drugim, i naodwrot. Skoro dany jest punkt A_1 na podstawie p , to wyznaczamy kolejno: prostą $a_1 = A_1P_1$ w pęku (P_1) , punkt $A = a_1s$ w szeregu (s) , prostą $a_2 = AP_2$ w pęku (P_2) i ostatecznie punkt $A_2 = a_2p$ na podstawie p . Uzyskany w ten sposób punkt A_2 szeregu $p(A_2, B_2, \dots)$ uważajmy teraz za element N_1 , przynależny do pierwszego szeregu $p(A_1, B_1, \dots)$. Aby wyznaczyć homologiczny punkt N_2 w szeregu drugim $p(A_2, B_2, \dots)$, zastosujemy poprzednią konstrukcję. Wykreślimy mianowicie (ryc. 20) prostą $n_1 = N_1P_1$ w pęku (P_1) , potem punkt $N = n_1s$ w szeregu (s) , następnie prostą $n_2 = NP_2$ w pęku (P_2) i ostatecznie żądany punkt $N_2 = n_2p$.

Z przeprowadzonej konstrukcji dla szeregów

$$p(A_1, B_1, N_1, \dots) \overline{\wedge} p(A_2, B_2, N_2, \dots)$$

o wspólnej podstawie p wynika, że: *dowolnemu punktowi* $N_1 = A_2$ *podstawy* p , *uważanemu za element* N_1 *pierwszego, wzgl. za element* A_2 *drugiego szeregu, podporządkowane są w ogólności w owych szeregach rzutowych* *dwa różne od siebie*¹⁾ *punkty* N_2 *i* A_1 . Na ryc. 20 i 21 skonstruowaliśmy dwa różne od siebie punkty *graniczne* G_2 i Z_1 jednokreślnych szeregów o wspólnej podstawie p , które (ust. 14) podporządkowane są punktowi niewłaściwemu $G_1^\infty = Z_2^\infty$ prostej p .

Oznaczmy przez E punkt przecięcia się podstawy p z prostą s (ryc. 20), to homologiczne proste $e_1 = EP_1$ i $e_2 = EP_2$ pęków $(P_1) \overline{\wedge} (P_2)$ wyznaczają na podstawie p dwa homologiczne punkty $E_1 = e_1 p$ i $E_2 = e_2 p$ uważanych szeregów jednokreślnych. Punkt $E = E_1 = E_2$, w którym schodzą się (nakrywają się) homologiczne elementy E_1 i E_2 rzutowych szeregów o wspólnej podstawie p , nazywamy punktem „odpowiednio-wspólnym“ lub punktem *zjednoczonym* tych szeregów. Z rozważań ust. 6 wiadomo nam, że prosta $P_1 P_2 = f_1 = f_2$ jest elementem zjednoczonym perspektywicznych pęków (P_1) i (P_2) . Prosta $f_1 = f_2$ przecina podstawę p (ryc. 20) w drugim punkcie zjednoczonym $F_1 = F_2$ owych szeregów, gdyż $F_1 = f_1 p$ i $F_2 = f_2 p$ są homologicznymi punktami tych szeregów. Na ryc. 21 punkty zjednoczone $E_1 = E_2$ i $F_1 = F_2$ nakryły się w jednym punkcie, gdyż w owym punkcie przecinają się proste p, s i $P_1 P_2$. A zatem: Dwa rzutowe szeregi punktów o wspólnej podstawie p , które są przekrojami dwóch perspektywicznych pęków prostych, posiadają zawsze dwa (różne od siebie lub nakrywające się) punkty zjednoczone $E_1 = E_2$ i $F_1 = F_2$.

Niechaj dany będzie teraz (ryc. 22) łańcuch perspektywicznych utworów gatunku 1-go: $(P_1) \overline{\wedge} (s_3) \overline{\wedge} (S) \overline{\wedge} (s_4) \overline{\wedge} (P_2)$, złożony z trzech pęków prostych i dwóch szeregów punktów. Jednokreślne pęki (P_1) i (P_2) przetnijmy prostą p , nie przechodzącą przez wierzchołki P_1 i P_2 , to otrzymamy dwa rzutowe szeregi punktów o wspólnej podstawie p

$$p(A_1, B_1, C_1, \dots) \overline{\wedge} p(A_2, B_2, C_2, \dots),$$

które są ogniwami końcowymi łańcucha:

$$p(A_1, B_1, \dots) \overline{\wedge} P_1(a_1, b_1, \dots) \overline{\wedge} s_3(A_3, B_3, \dots) \overline{\wedge} S(a, b, \dots) \overline{\wedge} \\ \overline{\wedge} s_4(A_4, B_4, \dots) \overline{\wedge} P_2(a_2, b_2, \dots) \overline{\wedge} p(A_2, B_2, \dots).$$

¹⁾ W ust. 23 rozważymy przypadek takiej rzutowości, w którym dowolnemu punktowi $N_1 = A_2$ podporządkowany będzie punkt $N_2 = A_1$.

Każdemu punktowi A_1 pierwszego szeregu $p(A_1, B_1, \dots)$ — za pośrednictwem elementów: a_1, A_3, a, A_1 i a_2 poszczególnych ogniów uważanego łańcucha — podporządkowany jest jeden i tylko jeden punkt A_2 w ostatnim szeregu $p(A_2, B_2, \dots)$, i naodwrót. Skoro uzyskany w ten sposób punkt A_2 uważać będziemy za element N_1 pierwszego szeregu, to — wyznaczając kolejno (ryc. 22) elementy: n_1, N_3, n, N_4 i n_2 — otrzymamy ostatecznie punkt N_2 , przynależny do szeregu $p(A_2, B_2, \dots)$. Z przepro-

wadzonej konstrukcji wynika, że: *dowolnemu punktowi $N_1 = A_2$, uważanemu za element N_1 pierwszego, wzgl. za element A_2 drugiego szeregu, podporządkowane są w ogólności dwa różne od siebie punkty N_2 i A_1 w rzutowych szeregach o wspólnej podstawie p . Również i punktowi niewłaściwemu $G_1^\infty = Z_2^\infty$ prostej p podporządkowane są dwa różne od siebie punkty graniczne G_2 i Z_1 owych szeregów.*

Należy wkońcu zbadać, czy szeregi rzutowe o wspólnej podstawie p posiadają punkty zjednoczone. Skoro przez E oznaczmy punkt zjednoczony $E_1 = E_2$ tych szeregów, to dla ich potęgi otrzymamy (ust. 14) relacje:

$$\overline{E_1 Z_1} \cdot \overline{E_2 G_2} = \overline{EZ_1} \cdot \overline{EG_2} = c_0$$

gdzie c_0 jest liczbą stałą. Ponieważ $\overline{EG_2} = \overline{EZ_1} + \overline{Z_1G_2}$, a $\overline{Z_1G_2}$ oznacza stały odcinek (o długości skończonej), ograniczony (ryc. 22) punktami zbiegu Z_1 i G_2 , przeto otrzymujemy równanie drugiego stopnia

$$\overline{EZ_1}^2 + \overline{Z_1 G_2} \cdot \overline{EZ_1} = c_0$$

o jednej zmiennej $\overline{EZ_1}$. Dla odcinka $\overline{EZ_1}$, wyrażającego odległość szukanego (nieznanego) punktu zjednoczonego E od danego (stałego) punktu granicznego Z_1 , mamy tedy:

$$\overline{EZ_1} = \frac{-\overline{Z_1 G_2} \pm \sqrt{\overline{Z_1 G_2}^2 + 4 c_0}}{2}.$$

Zależnie od tego, czy: $\overline{Z_1 G_2}^2 + 4 c_0$ jest większe od zera, równe zeru, czy też mniejsze od zera, — powyższe równanie drugiego stopnia posiada: a) dwa pierwiastki rzeczywiste i różne od siebie; b) dwa pierwiastki rzeczywiste i równe sobie; c) dwa pierwiastki zespolone sprzężone¹⁾. Każdemu pierwiastkowi podporządkowany jest jeden ściśle określony odcinek $\overline{EZ_1}$ na podstawie p , a zatem jeden i tylko jeden punkt E na owej prostej. Dla pierwiastka „rzeczywistego“ podporządkowany mu punkt E na prostej p nazywać będziemy *punktem rzeczywistym*; natomiast dla pierwiastka „zespolonego“ podporządkowany mu punkt E nazwiemy *punktem urojonym*. Dwom pierwiastkom „zespolonym sprzężonym“ podporządkowane są dwa punkty na prostej p , które nazywać będziemy *punktami urojonymi sprzężonymi*.

Uwaga: Punkty właściwe i niewłaściwe, które występowały w dotychczasowych naszych rozważaniach, były zawsze punktami rzeczywistymi. Obecnie wprowadziliśmy nową kategorię punktów, które zdefiniowaliśmy jako punkty urojone.

Powyżej wypisane równanie drugiego stopnia odnosiło się do punktów zjednoczonych dwóch jednokreślnych szeregów punktów o wspólnej podstawie p . Uważane szeregi posiadają zatem w przypadku: a) dwa rzeczywiste i różne od siebie punkty zjednoczone $E = E_1 = E_2$ i $F = F_1 = F_2$; b) dwa punkty zjednoczone rzeczywiste i schodzące się w jednym punkcie $E = F$; c) dwa zjednoczone punkty urojone sprzężone. Możemy tedy wypowiedzieć następujące twierdzenie:

Dwa rzutowe szeregi punktów o wspólnej podstawie posiadają zawsze dwa punkty zjednoczone. Owe punkty są albo rzeczywiste (i różne od siebie, wzgl. nakrywające się w jednym punkcie), albo też urojone sprzężone.

Uważane szeregi rzutowe o wspólnej podstawie nazywamy szeregami: hiperbolicznymi, parabolicznymi, wzgl. eliptycznymi zależnie od tego, czy owe szeregi posiadają: a) dwa rzeczywiste i różne od siebie (ryc. 20) punkty zjednoczone, b) dwa rzeczywiste i nakrywające się ze sobą (ryc. 21) punkty zjednoczone, c) dwa urojone sprzężone punkty zjednoczone.

Uwaga: Dla szeregów parabolicznych ich punkty zjednoczone $E_1 = E_2$ i $F_1 = F_2$ schodzą się w punkcie $E = F$, który połowi odcinek (o długo-

¹⁾ Porównaj Dr. W. Sierpiński, Analiza. Tom I. Część pierwsza: Liczby rzeczywiste i zespolone. Warszawa 1923. Wydanie 2-gie, str. 184.

ści skończonej $\overline{Z_1 G_2}$. Dla punktów granicznych Z_1 i G_2 tych szeregów mamy bowiem relacje:

$$\overline{EZ_1} = \frac{-\overline{Z_1 G_2} \pm \sqrt{\overline{Z_1 G_2}^2 + 4c_0}}{2} = -\frac{1}{2} \overline{Z_1 G_2}$$

$$\overline{EG_2} = \overline{EZ_1} + \overline{Z_1 G_2} = -\frac{1}{2} \overline{Z_1 G_2} + \overline{Z_1 G_2} = +\frac{1}{2} \overline{Z_1 G_2}.$$

Na prostej właściwej p niechaj dane będą (ryc. 20) dwa hiperboliczne szeregi punktów. Pomiedzy punktami zjednoczonymi $E = E_1 = E_2$ i $F = F_1 = F_2$, a punktami homologicznymi A_1, A_2 i B_1, B_2 tych szeregów zachodzi — na mocy uogólnionego twierdzenia Pappusa (ust. 11) — równość dwustosunków:

$$(E_1 F_1 A_1 B_1) = (E_2 F_2 A_2 B_2) \text{ lub } (E F A_1 B_1) = (E F A_2 B_2),$$

$$\text{czyli } \frac{\overline{EA_1}}{\overline{FA_1}} : \frac{\overline{EB_1}}{\overline{FB_1}} = \frac{\overline{EA_2}}{\overline{FA_2}} : \frac{\overline{EB_2}}{\overline{FB_2}}.$$

Przestawiając wyrazy środkowe w powyższej proporcji, otrzymamy

$$\frac{\overline{EA_1}}{\overline{FA_1}} : \frac{\overline{EA_2}}{\overline{FA_2}} = \frac{\overline{EB_1}}{\overline{FB_1}} : \frac{\overline{EB_2}}{\overline{FB_2}} \text{ lub } (E F A_1 A_2) = (E F B_1 B_2).$$

Gdybyśmy zamiast pary homologicznych punktów B_1 i B_2 przyjęli (w owych szeregach rzutowych o wspólnej podstawie p) inną parę punktów homologicznych np. C_1 i C_2 , to w analogiczny sposób dowiedlibyśmy równości dwustosunków: $(E F A_1 A_2) = (E F C_1 C_2)$. Wnosimy stąd, że dwustosunek $(E F A_1 A_2)$ jest liczbą stałą.

Celem wyznaczenia owej stałej liczby, zauważmy, że dwustosunek

$$\begin{aligned} (E F A_1 A_2) &= \frac{\overline{EA_1}}{\overline{FA_1}} : \frac{\overline{EA_2}}{\overline{FA_2}} = \frac{\overline{EZ_1} + \overline{Z_1 A_1}}{\overline{FZ_1} + \overline{Z_1 A_1}} : \frac{\overline{EZ_1} + \overline{Z_1 A_2}}{\overline{FZ_1} + \overline{Z_1 A_2}} = \\ &= \frac{(\overline{EZ_1} + \overline{Z_1 A_1})(\overline{FZ_1} + \overline{Z_1 A_2})}{(\overline{FZ_1} + \overline{Z_1 A_1})(\overline{EZ_1} + \overline{Z_1 A_2})}. \end{aligned}$$

Pomiedzy punktami zjednoczonymi E, F i punktami granicznymi Z_1, G_2 uważanych szeregów zachodzą związki (otrzymane z równania stopnia 2-go)

$$\overline{EZ_1} = \frac{-\overline{Z_1 G_2} + R_0}{2}, \quad \overline{FZ_1} = \frac{-\overline{Z_1 G_2} - R_0}{2},$$

$$\text{gdzie } R_0 = \sqrt{\overline{Z_1 G_2}^2 + 4c_0}$$

przyczem potęgę c_0 tych szeregów wyrazić możemy przez

$$c_0 = \overline{A_1 Z_1} \cdot \overline{A_2 G_2} = \overline{A_1 Z_1} (\overline{A_2 Z_1} + \overline{Z_1 G_2}) = \overline{A_1 Z_1} (\overline{Z_1 G_2} - \overline{Z_1 A_2}).$$

Uwzględniając wartości odcinków $\overline{EZ_1}$ i $\overline{FZ_1}$, oraz oznaczając przez

$$a = 2 \overline{Z_1 A_1} - \overline{Z_1 G_2}, \quad b = 2 \overline{Z_1 A_2} - \overline{Z_1 G_2}$$

otrzymamy dla naszego dwustosunku równość

$$(EFA_1 A_2) = \frac{(a + R_0)(b - R_0)}{(a - R_0)(b + R_0)} = \frac{ab - R_0^2 - R_0(a - b)}{ab - R_0^2 + R_0(a - b)}.$$

Podstawiając wartości za a, b, R_0 i c_0 , otrzymamy związki:

$$ab - R_0^2 = 2 \cdot \overline{Z_1 G_2} (\overline{Z_1 A_1} - \overline{Z_1 A_2}), \quad a - b = 2(\overline{Z_1 A_1} - \overline{Z_1 A_2})$$

czyli ostatecznie dla badanego dwustosunku liczbę

$$(EFA_1 A_2) = \frac{\overline{Z_1 G_2} - R_0}{\overline{Z_1 G_2} + R_0} = \frac{\overline{Z_1 G_2} - \sqrt{\overline{Z_1 G_2}^2 + 4c_0}}{\overline{Z_1 G_2} + \sqrt{\overline{Z_1 G_2}^2 + 4c_0}}.$$

Dla szeregów hiperbolicznych powyższa liczba jest „rzeczywistą“, gdyż $\overline{Z_1 G_2}^2 + 4c_0$ jest większe od zera.

Załóżmy teraz, że: $\overline{Z_1 G_2}^2 + 4c_0 = 0$, to dla szeregów parabolicznych dwustosunek dwóch punktów zjednoczonych $E = F$ (nakrywających się) i pary punktów homologicznych A_1, A_2 wyraża się liczbą $(EEA_1 A_2) = +1$.

Jeżeli wreszcie $\overline{Z_1 G_2}^2 + 4c_0$ jest mniejsze od zera, to dla szeregów eliptycznych dwustosunek

$$(EFA_1 A_2) = \frac{\overline{Z_1 G_2} - R_0}{\overline{Z_1 G_2} + R_0}$$

jest liczbą „zespoloną“, gdyż $R_0 = \sqrt{\overline{Z_1 G_2}^2 + 4c_0}$ jest liczbą urojoną.

Z rozważań naszych wynika, że bez względu na to, czy mamy szeregi hiperboliczne, paraboliczne, czy też eliptyczne — to dwustosunek $(EFA_1 A_2)$ jest zawsze liczbą stałą. Dowiedliśmy zatem prawdziwości następującego twierdzenia:

Dwa rzutowe szeregi punktów o wspólnej podstawie posiadają tę własność, że: dwustosunek ich punktów zjednoczonych i dwóch punktów homologicznych jest liczbą stałą.

Uwaga: Sposoby konstrukcyjnego wyznaczenia punktów zjednoczonych poznamy w ust. 36.

16. Pęki rzutowe o wspólnym wierzchołku (wzgl. o wspólnej osi). Niechaj dane będą (p. ryc. 20, 21 i 22) dwa jednokreślne szeregi punktów o wspólnej podstawie p

$$p(A_1, B_1, C_1, \dots) \bar{\wedge} p(A_2, B_2, C_2, \dots)$$

oraz dowolny punkt (rzeczywisty) W , nie leżący na prostej p . Skoro szeregi te rzucimy z punktu W , to (ust. 3) otrzymamy wówczas na płaszczyźnie podstawowej $\omega = Wp$ pęk prostych $W(a_1, b_1, c_1, \dots)_\omega$ perspektywiczny do szeregu $p(A_1, \dots)$, oraz drugi pęk prostych $W(a_2, b_2, c_2, \dots)_\omega$ perspektywiczny do szeregu punktów $p(A_2, \dots)$. Z relacji

$$W(a_1, b_1, \dots)_\omega \bar{\wedge} p(A_1, B_1, \dots) \bar{\wedge} p(A_2, B_2, \dots) \bar{\wedge} W(a_2, b_2, \dots)_\omega$$

wynika bezpośrednio (ust. 7), że skonstruowane w powyższy sposób dwa pęki prostych „o wspólnym wierzchołku W i o wspólnej płaszczyźnie podstawowej $\omega = Wp$ ” są pękami rzutowymi

$$W(a_1, b_1, c_1, \dots)_\omega \bar{\wedge} W(a_2, b_2, c_2, \dots)_\omega.$$

Uwaga: Zamiast jednokreślnych szeregów o wspólnej podstawie p , niechaj dane będą dwa rzutowe szeregi punktów $p_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \bar{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$, których podstawami są dwie proste skośne p_1 i p_2 . Skoro owe szeregi rzucimy z dowolnego punktu W , nie leżącego na podstawach p_1 i p_2 , to otrzymamy wprawdzie dwa rzutowe pęki prostych „o wspólnym wierzchołku W ”

$$W(a_1, b_1, c_1, \dots)_\omega \bar{\wedge} W(a_2, b_2, c_2, \dots)_\pi,$$

ale pęki te nie będą posiadać wcale wspólnej płaszczyzny podstawowej! Pierwszy z tych pęków przynależy do płaszczyzny podstawowej $\omega = Wp_1$, a drugi do płaszczyzny $\pi = Wp_2$.

Zamiast punktu W , obierzmy teraz taką prostą (rzeczywistą) w , która nie przecina wspólnej podstawy p uważanych szeregów punktów. Skoro szeregi te rzucimy z prostej w , to otrzymamy dwa rzutowe pęki płaszczyzn „o wspólnej osi w ”

$$w(a_1, \beta_1, \gamma_1, \dots) \bar{\wedge} w(a_2, \beta_2, \gamma_2, \dots),$$

które są końcowymi ogniwami łańcucha utworów jednokreślnych

$$w(a_1, \beta_1, \dots) \bar{\wedge} p(A_1, B_1, \dots) \bar{\wedge} p(A_2, B_2, \dots) \bar{\wedge} w(a_2, \beta_2, \dots).$$

Proste homologiczne $a_1 = WA_1$ i $a_2 = WA_2$, $b_1 = WB_1$ i $b_2 = WB_2, \dots$, pęków rzutowych o wspólnym wierzchołku W i wspólnej płaszczyźnie podstawowej $\bar{\omega} = Wp$, prze-

Płaszczyzny homologiczne $a_1 = wA_1$ i $a_2 = wA_2$, $\beta_1 = wB_1$ i $\beta_2 = wB_2, \dots$, pęków rzutowych o wspólnej osi w , przechodzą odpowiednio przez homologiczne punkty A_1 i A_2 ,

chodzą odpowiednio przez homologiczne punkty A_1 i A_2 , B_1 i $B_2, \dots$ rzutowych szeregów o wspólnej podstawie p .

B_1 i $B_2, \dots$ rzutowych szeregów o wspólnej podstawie p .

Z rozważań poprzedniego ustępu wynika bezpośrednio, że :

dowolnej prostej $n_1 = a_2$, uważanej za element n_1 pierwszego, wzgl. za element a_2 drugiego pęku, *podporządkowane są w ogólności dwie różne od siebie proste n_2 i a_1 w owych pękach rzutowych.*

dowolnej płaszczyźnie $v_1 = a_2$, uważanej za element v_1 pierwszego, wzgl. za element a_2 drugiego pęku, *podporządkowane są w ogólności dwie różne od siebie płaszczyzny v_2 i a_1 w owych pękach rzutowych.*

Prosta $e = e_1 = e_2$, łącząca wierzchołek W z punktem zjednoczonym $E = E_1 = E_2$ szeregów o podstawie p , jest prostą *zjednoczoną* rzutowych pęków o wspólnym wierzchołku W i wspólnej płaszczyźnie podstawowej ω .

Płaszczyzna $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$, łącząca oś w z punktem zjednoczonym $E = E_1 = E_2$ szeregów o podstawie p , jest płaszczyzną *zjednoczoną* rzutowych pęków o wspólnej osi w .

Skoro punkt zjednoczony E tych szeregów jest punktem rzeczywistym, to wówczas prosta zjednoczona $e = WE$ i płaszczyzna zjednoczona $\varepsilon = wE$ są elementami „rzeczywistymi“. Jeżeli punkt zjednoczony E jest punktem urojonym, to wówczas prostą $e = WE$ zdefiniujemy jako prostą *urojoną*, a płaszczyznę $\varepsilon = wE$ zdefiniujemy jako płaszczyznę *urojoną*. A zatem z ust. 15 wynika, że:

Dwa rzutowe pęki prostych o wspólnym wierzchołku i wspólnej płaszczyźnie podstawowej posiadają zawsze dwie proste zjednoczone. Owe proste są albo rzeczywiste (i różne od siebie, wzgl. nakrywające się na jednej prostej), albo też urojone sprzężone.

Dwa rzutowe pęki płaszczyzn o wspólnej osi posiadają zawsze dwie płaszczyzny zjednoczone. Owe płaszczyzny są albo rzeczywiste (i różne od siebie, wzgl. nakrywające się na jednej płaszczyźnie), albo też urojone sprzężone.

Badane pęki prostych (wzgl. płaszczyzn) nazywamy pękami: a) hiperbolicznymi, b) parabolicznymi, wzgl.

c) eliptycznymi wówczas, jeżeli owe pęki posiadają: a) dwie rzeczywiste i różne od siebie proste (wzgl. płaszczyzny) zjednoczone, b) dwie rzeczywiste i nakrywające się ze sobą proste (płaszczyzny) zjednoczone, c) dwie urojone sprzężone proste (płaszczyzny) zjednoczone.

Uwaga: W ust. 22 dowiedziemy sposobem bezpośrednim, że istnieją proste zjednoczone i płaszczyzny zjednoczone (rzeczywiste lub urojone) w badanych pękach. W ust. 36 poznamy sposoby konstrukcyjnego wyznaczenia prostych zjednoczonych.

17. Twierdzenie podstawowe Staudt'a. Wyznaczenie rzutowości pomiędzy utworami zasadniczymi gatunku I-go. W ust. 15 wykazaliśmy, że dwa jednokreślne szeregi punktów o wspólnej podstawie p_1 posiadają zawsze dwa punkty zjednoczone. Teraz skonstruujemy na podstawie p_1 dwa rzutowe szeregi punktów o trzech punktach zjednoczonych i zbadamy własności takich szeregów.

W tym celu weźmy pod uwagę (ryc. 8) pęk prostych $P(a, b, c, \dots)_\varepsilon$ i dwie proste l_1, l_2 , które przechodzą przez wierzchołek P , ale nie leżą na płaszczyźnie podstawowej ε . Rzucając dany pęk prostych z osi l_1 i l_2 , otrzymamy łańcuch utworów perspektywicznych

$$l_1(a_1, \beta_1, \gamma_1, \dots) \overline{\wedge} P(a, b, c, \dots)_\varepsilon \overline{\wedge} l_2(a_2, \beta_2, \gamma_2, \dots).$$

Obierzmy nadto dwie dalsze proste skośne p_1 i p_2 , z których żadna nie leży na płaszczyźnie ε , ani też nie przecina osi l_1 i l_2 . Pęk płaszczyzn o osi l_1 przetnijmy prostą p_1 w szeregu punktów $p_1(A_1, B_1, C_1, \dots)$, a pęk płaszczyzn o osi l_2 przetnijmy prostą p_2 w szeregu $p_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$. Ponieważ zachodzi relacja

$p_1(A_1, B_1, \dots) \overline{\wedge} l_1(a_1, \beta_1, \dots) \overline{\wedge} P(a, b, \dots)_\varepsilon \overline{\wedge} l_2(a_2, \beta_2, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, \dots)$, przeto (ust. 7) uzyskane szeregi punktów na prostych skośnych p_1 i p_2 są jednokreślne

$$p_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, \dots).$$

Homologiczne punkty tych szeregów wyznaczają proste: $a_0 = A_1A_2$, $b_0 = B_1B_2$, $c_0 = C_1C_2$, $d_0 = D_1D_2, \dots$, które oczywiście nie mogą leżeć na jednej i tej samej płaszczyźnie. Na prostej $a_0 = A_1A_2$ obierzmy dowolny punkt A_0 , różny od punktów A_1, A_2 i poprowadźmy przezeń prostą p_0 , przecinającą w punkcie B_0 prostą b_0 , a w punkcie C_0 prostą c_0 . Prosta p_0 jest krawędzią przecięcia się płaszczyzn $\beta_0 = A_0b_0$ i $\gamma_0 = A_0c_0$. Z owej prostej p_0 rzućmy szereg punktów $p_2(A_2, B_2, \dots)$, a otrzymany pęk płaszczyzn $p_0(A_2p_0, \beta_0, \gamma_0, D_2p_0, E_2p_0, \dots)$ przetnijmy prostą p_1 w sze-

regu punktów $p_1(A_3, B_3, C_3, D_3, E_3, \dots)$. Ponieważ płaszczyzny $A_2p_0 = a_0p_0 = \alpha_0$, $\beta_0 = b_0p_0$ i $\gamma_0 = c_0p_0$ (pęku o osi p_0) przechodzą odpow. przez proste $a_0 = A_1A_2$, $b_0 = B_1B_2$ i $c_0 = C_1C_2$, przeto: punkt A_3 zjednoczył się z elementem A_1 , punkt B_3 z punktem B_1 i punkt C_3 z elementem C_1 . Szereg $p_1(A_3, B_3, C_3, D_3, E_3, \dots)$ wypisać możemy zatem w postaci $p_1(A_1, B_1, C_1, D_3, E_3, \dots)$. Z łańcucha utworów

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, \dots) \bar{\cap} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, \dots) \bar{\cap} \bar{\cap} p_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, D_2p_0, E_2p_0, \dots) \bar{\cap} p_1(A_1, B_1, C_1, D_3, E_3, \dots)$$

wynika (ust. 7) jednokreślność szeregów

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, \dots) \bar{\cap} p_1(A_1, B_1, C_1, D_3, E_3, \dots)$$

o wspólnej podstawie p_1 , które posiadają trzy punkty zjednoczone A_1, B_1 i C_1 .

Z rzutowości tych szeregów uzyskujemy (ust. 11) równość dwustosunków

$$(A_1B_1C_1X_1) = (A_1B_1C_1X_3) \text{ lub } \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{B_1C_1}} : \frac{\overline{A_1X_1}}{\overline{B_1X_1}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{B_1C_1}} : \frac{\overline{A_1X_3}}{\overline{B_1X_3}},$$

gdzie przez X_1 i X_3 oznaczona jest dowolna para homologicznych punktów uważanych szeregów na podstawie p_1 . Z otrzymanych stosunków podziału $\frac{\overline{A_1X_1}}{\overline{B_1X_1}} = \frac{\overline{A_1X_3}}{\overline{B_1X_3}}$ wnosimy (ust. 9), że

każde dwa punkty homologiczne X_1 i X_3 tych szeregów nakrywają się, tworząc dalszy punkt zjednoczony. Możemy tedy napisać twierdzenie podstawowe *Staudl'a* w następującej formie:

Jeżeli dwa rzutowe szeregi punktów o wspólnej podstawie posiadają trzy punkty zjednoczone, to wówczas każda para punktów homologicznych tych szeregów jest punktem zjednoczonym.

Skoro jednokreślne szeregi o wspólnej podstawie p_1 rzucimy z punktu W , względnie z prostej w , to otrzymamy dwa rzutowe pęki prostych o wspólnym wierzchołku W , wzgl. pęki płaszczyzn o wspólnej osi w . A zatem:

Jeżeli dwa rzutowe pęki prostych o wspólnym wierzchołku posiadają trzy proste zjednoczone, to wówczas każda para homologicznych prostych tych pęków jest prostą zjednoczoną.

Jeżeli dwa rzutowe pęki płaszczyzn o wspólnej osi posiadają trzy płaszczyzny zjednoczone, to wówczas każda para homologicznych płaszczyzn tych pęków jest płaszczyzną zjednoczoną.

Posługując się twierdzeniem Staudt'a, dowiedzimy prawdziwości następującego twierdzenia:

Pomiędzy dwoma zasadniczymi utworami gatunku 1-go istnieje zawsze jedna i tylko jedna rzutowość, w której trzem danym elementom jednego utworu podporządkowane są trzy dane elementy utworu drugiego.

Niechaj dane będą proste skośne p_1 i p_2 , oraz trzy dowolne punkty A_1, B_1, C_1 leżące na p_1 i trzy dowolne punkty A_2, B_2, C_2 , przynależne do prostej p_2 . Skoro punkty A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 uważać będziemy za trzy pary homologicznych punktów dwóch szeregów jednokreślnych o podstawach p_1 i p_2 , to wykazać musimy teraz, że owe trzy pary punktów *wyznaczają* rzutowość tych szeregów. W tym celu weźmy pod uwagę trzy proste skośne $a_0 = A_1A_2$, $b_0 = B_1B_2$ i $c_0 = C_1C_2$, oraz prostą p_0 , która przecina się z elementami a_0, b_0 i c_0 w punktach $A_0 = p_0a_0$, $B_0 = p_0b_0$, $C_0 = p_0c_0$. Płaszczyzna $\alpha_0 = p_0a_0$ przechodzi przez punkty A_1 i A_2 , więc da się wyrazić symbolem $\alpha_0 = p_0A_1$ lub $\alpha_0 = p_0A_2$. Podobnie dla płaszczyzn $\beta_0 = p_0b_0$ i $\gamma_0 = p_0c_0$ otrzymamy symbole $\beta_0 = p_0B_1 = p_0B_2$ i $\gamma_0 = p_0C_1 = p_0C_2$. Skoro pęk płaszczyzn

$$p_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0, \dots) = (p_0)$$

przetniemy dwiema danymi prostymi p_1 i p_2 , to otrzymamy łańcuch utworów perspektywicznych

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \dots) \overline{\wedge} p_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \dots),$$

który dowodzi (ust. 7), że pomiędzy skonstruowanymi w ten sposób szeregami jednokreślnymi

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \dots)$$

istnieje przynajmniej jedna rzutowość, w której trzem danym punktom A_1, B_1, C_1 prostej p_1 podporządkowane są odpow. trzy dane punkty A_2, B_2, C_2 prostej p_2 .

Z uwagi jednak na to, że przez każdy punkt A_0 prostej $a_0 = A_1A_2$ przeprowadzić można jedną prostą p_0 , przecinającą dwie dalsze proste skośne b_0 i c_0 (t. zn. krawędź płaszczyzn A_0b_0 i A_0c_0), przeto istnieje nieograniczona ilość takich prostych p_0 . Dla prostej np. p_0^* otrzymamy nowy pęk płaszczyzn

$$p_0^*(\alpha_0^*, \beta_0^*, \gamma_0^*, \delta_0^*, \dots) = (p_0^*)$$

oraz nowy łańcuch utworów perspektywicznych

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \dots) \overline{\wedge} p_0^*(\alpha_0^*, \beta_0^*, \gamma_0^*, \delta_0^*, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2^*, \dots)$$

a tem samem zależność $p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2^*, \dots)$.

Ponieważ pęki płaszczyzn (p_0) i (p_0^*) mają dwie różne od siebie osie p_0 i p_0^* , przeto moglibyśmy przypuszczać, że dowolnemu punktowi D_1 prostej p_1 podporządkowany będzie teraz na prostej p_2 nowy punkt D_2^* , różny od poprzednio otrzymanego punktu D_2 . Ponieważ szereg (p_1) jest jednokreślny względem obydwóch szeregów o podstawie p_2 , przeto (ust. 7) na prostej p_2 otrzymaliśmy dwa szeregi rzutowe

$$p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2^*, \dots)$$

z trzema punktami zjednoczonymi A_2, B_2 i C_2 . Na mocy twierdzenia Staudta punkt D_2 zjednoczył się z punktem D_2^* czyli na prostej p_2 występuje jeden tylko szereg $p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \dots)$. Wykazaliśmy w ten sposób, że: *niezależnie od położenia prostej pomocniczej p_0 istnieje jedna i tylko jedna rzutowość, w której trzem danym punktom A_1, B_1, C_1 prostej p_1 podporządkowane są odpow. trzy dane punkty A_2, B_2, C_2 na prostej p_2 .*

Dowiedliśmy zatem prawdziwości powyżej wypisanego twierdzenia w przypadku dwóch rzutowych szeregów punktów o podstawach skośnych p_1 i p_2 . Za pośrednictwem rzutów i przecięć (ust. 3) przejść możemy do pęków prostych i pęków płaszczyzn, perspektywicznie odniesionych do danych szeregów (p_1) i (p_2) . Wnosimy (ust. 7) stąd, że rzutowość: a) dwóch pęków prostych, b) dwóch pęków płaszczyzn, c) szeregu punktów i pęku prostych, d) szeregu punktów i pęku płaszczyzn, e) pęku prostych i pęku płaszczyzn, f) dwóch szeregów punktów o wspólnej podstawie, g) dwóch pęków prostych o wspólnym wierzchołku, h) dwóch pęków płaszczyzn o wspólnej osi — ustalona będzie wówczas, skoro dane są trzy dowolne pary elementów homologicznych uważanych utworów.

18. Kryterjum perspektywiczności utworów rzutowych.

Niechaj trzy dane pary A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 punktów homologicznych wyznaczają rzutowość dwóch szeregów (p_1) i (p_2) o podstawach skośnych p_1 i p_2 . Jeżeli przez p_0 oznaczymy proste, które przecinają trzy proste skośne $a_0 = A_1A_2$, $b_0 = B_1B_2$, $c_0 = C_1C_2$ i są różne od podstaw p_1, p_2 — to wówczas (ust. 17) istnieje nieograniczona liczba pęków płaszczyzn $p_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots)$ perspektywicznych równocześnie do obydwóch szeregów (p_1) i (p_2) . Dla jednej z tych prostych p_0 otrzymamy łańcuch utworów perspektywicznych

$$p_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \overline{\wedge} p_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, \dots),$$

z którego wynika, w myśl definicji ust. 6, że: uważane szeregi (p_1) i (p_2) są perspektywiczne

$$p_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, \dots).$$

Z powyższych i dwoiście z nimi związanych rozważań wnosiśmy o prawdziwości twierdzeń:

Dwa rzutowe szeregi punktów, o podstawach skośnych, są szeregami perspektywicznymi.

Dane niechaj będą dwie proste $l_1 = A_1 B_1$ i $l_2 = A_2 B_2$, przecinające się w punkcie $C_1 = C_2$. Skoro punkty A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 uważać będziemy za trzy pary elementów homologicznych, to one wyznaczają nam dwa szeregi jednokreślne

$$l_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \overline{\wedge} l_2(A_2, B_2, C_2, \dots).$$

Szeregi terzujemy z punktu W , w którym przecinają się proste $a_0 = A_1 A_2$ i $b_0 = B_1 B_2$. Otrzymamy wówczas (ust. 7) dwa rzutowe pęki prostych

$$W(a_0, b_0, c_0, d_1, \dots) \overline{\wedge} \\ \overline{\wedge} W(a_0, b_0, c_0, d_2, \dots),$$

leżące na wspólnej płaszczyźnie $\lambda = l_1 l_2$ i posiadające trzy proste zjednoczone a_0, b_0 i $c_0 = WC_1 = WC_2$. Ponieważ każde dwie homologiczne proste $d_1 = WD_1$ i $d_2 = WD_2$ tych pęków nakrywają się (ust. 17), przeto: pęk prostych

$$W(a_0, b_0, c_0, \dots)$$

jest równocześnie perspektywiczny do szeregów (l_1) i (l_2) .

Dwa rzutowe pęki płaszczyzn, o osiach skośnych, są pękami perspektywicznymi.

Dane niechaj będą dwie proste $l_1 = \alpha_1 \beta_1$ i $l_2 = \alpha_2 \beta_2$, leżące na płaszczyźnie $\gamma_1 = \gamma_2$. Skoro płaszczyzny α_1 i α_2 , β_1 i β_2 , γ_1 i γ_2 uważać będziemy za trzy pary elementów homologicznych, to one wyznaczają nam dwa pęki jednokreślne

$$l_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots) \overline{\wedge} l_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots).$$

Pęki te przetnijmy płaszczyzną ω , która przechodzi przez proste $a_0 = \alpha_1 \alpha_2$ i $b_0 = \beta_1 \beta_2$. Otrzymamy wówczas (ust. 7) dwa rzutowe pęki prostych $L(a_0, b_0, c_0, d_1, \dots) \overline{\wedge}$

$$\overline{\wedge} L(a_0, b_0, c_0, d_2, \dots)$$

o wspólnym wierzchołku $L = l_1 l_2$ i o trzech prostych zjednoczonych a_0, b_0 i $c_0 = \omega \gamma_1 = \omega \gamma_2$. Ponieważ każde dwie homologiczne proste $d_1 = \omega \delta_1$ i $d_2 = \omega \delta_2$ tych pęków nakrywają się (ust. 17), przeto pęk prostych

$$L(a_0, b_0, c_0, \dots)$$

jest równocześnie perspektywiczny do pęków płaszczyzn (l_1) i (l_2) .

A zatem prawdziwe są następujące twierdzenia:

Dwa rzutowe szeregi punktów, dla których punkt przecięcia się ich podstaw jest elementem zjednoczonym, są szeregiem perspektywicznymi.

Badane szeregi punktów (l_1) i (l_2) rzućmy z dowolnego punktu S , nie leżącego na płaszczyźnie $\lambda = l_1 l_2$. Otrzymamy wówczas pęk prostych $S(a_1, b_1, c_1, \dots)_{\lambda_1}$, leżący na płaszczyźnie $\lambda_1 = S l_1$ i perspektywiczny do szeregu punktów (l_1) , oraz pęk prostych $S(a_2, b_2, c_2, \dots)_{\lambda_2}$ na płaszczyźnie podstawowej $\lambda_2 = S l_2$ i perspektywiczny do szeregu (l_2) .

Skoro pomocniczy pęk prostych $W(a_0, b_0, c_0, \dots)$ rzućmy z owego punktu S , to otrzymany w ten sposób pęk płaszczyzn $s(a, \beta_0, \gamma_0, \dots)$ o osi $s = SW$, będzie oczywiście spełniał warunki:

$$S(a_1, b_1, c_1, \dots)_{\lambda_1} \overline{\wedge} s(a_0, \beta_0, \gamma_0, \dots) \overline{\wedge} S(a_2, b_2, c_2, \dots)_{\lambda_2}.$$

Ponieważ prosta $c_1 = SC_1 = SC_2 = c_2$ jest elementem zjednoczonym pęków o wspólnym wierzchołku S , przeto wypisać możemy twierdzenie:

Dwa rzutowe pęki prostych o wspólnym wierzchołku, dla których krawędź ich płaszczyzn podstawowych jest elementem zjednoczonym, są pękami perspektywicznymi. *

Dwa rzutowe pęki płaszczyzn, dla których płaszczyzna przechodząca przez ich osie jest elementem zjednoczonym, są pękami perspektywicznymi.

Badane pęki płaszczyzn (l_1) i (l_2) przetnijmy dowolną płaszczyzną σ , nie przechodzącą przez punkt $L = l_1 l_2$. Otrzymamy wówczas pęk prostych $L_1(a_1, b_1, c_1, \dots)_{\sigma}$ o wierzchołku $L_1 = \sigma l_1$ i perspektywiczny do pędu płaszczyzn (l_1) , oraz pęk prostych $L_2(a_2, b_2, c_2, \dots)_{\sigma}$ o wierzchołku $L_2 = \sigma l_2$ i perspektywiczny do pędu płaszczyzn (l_2) .

Skoro pomocniczy pęk prostych $L(a_0, b_0, c_0, \dots)_{\omega}$ przetniemy ową płaszczyzną σ , to otrzymany w ten sposób szereg punktów $s(A_0, B_0, C_0, \dots)$ o podstawie $s = \sigma \omega$ będzie spełniał oczywiście warunki:

$$L_1(a_1, b_1, c_1, \dots)_{\sigma} \overline{\wedge} s(A_0, B_0, C_0, \dots) \overline{\wedge} L_2(a_2, b_2, c_2, \dots)_{\sigma}.$$

Ponieważ prosta $c_1 = \sigma \gamma_1 = \sigma \gamma_2 = c_2$ jest elementem zjednoczonym pęków (L_1) i (L_2) o wspólnej płaszczyźnie podstawowej σ , przeto wypisać możemy twierdzenie:

Dwa rzutowe pęki prostych o wspólnej płaszczyźnie podstawowej, dla których prosta łącząca ich wierzchołki jest elementem zjednoczonym, są pękami perspektywicznymi.

Uwaga: Cztery ostatnie twierdzenia tego ustępu należy porównać z czterema ostatnimi twierdzeniami ust. 6.

19. Konstrukcyjne uzupełnienie rzutowych utworów zasadniczych gatunku 1-go. Niechaj dane będą trzy pary homologicznych elementów α_1 i α_2 , β_1 i β_2 , γ_1 i γ_2 , dwóch utworów zasadniczych gatunku 1-go (U_1) i (U_2), które (ust. 17) ustalają rzutowość tych utworów. Konstrukcyjne wyznaczenie dalszych par homologicznych elementów: δ_1 i δ_2 , ε_1 i ε_2 ,... w utworach (U_1) i (U_2) nazywamy *uzupełnieniem* tychże utworów.

W przypadku dwóch perspektywicznych utworów (U_1) $\overline{\overline{}}$ (U_2) — jak to wynika z rozważań ustępów 6, 17 i 18 — uzupełnienie ich nie następuje żadnych trudności. Przejdźmy teraz do uzupełnienia dwóch rzutowych

szeregów punktów

$$p_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \overline{\overline{}} p_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$$

leżących (ryc. 23) na płaszczyźnie rysunkowej. W tym celu wykreślimy prostą, łączącą dwa homologiczne punkty np. A_1 i A_2 szeregów (p_1) i (p_2), oraz obierzmy na owej prostej A_1A_2 dwa dowolne punkty W_1 i W_2 . (Punkt W_1 nie może się zjednoczyć z punktem A_1 , a punkt W_2 musi być różny od punktu A_2). Wyznamy następnie proste $W_1A_1 = a_1$, $W_1B_1 = b_1$ i $W_1C_1 = c_1$, oraz proste

$W_2A_2 = a_2$, $W_2B_2 = b_2$ i $W_2C_2 = c_2$, to otrzymamy dwa pęki prostych

$$W_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \overline{\overline{}} (p_1) \\ \text{i } W_2(a_2, b_2, c_2, \dots) \overline{\overline{}} (p_2).$$

Pęki te są (ust. 7) jednokreślne, a ponieważ prosta $W_1W_2 = a_1 = a_2$ jest elementem zjednoczonym, przeto (ust. 18) są one perspektywiczne. Homologiczne proste b_1 i b_2 , c_1 i c_2

pęków prostych

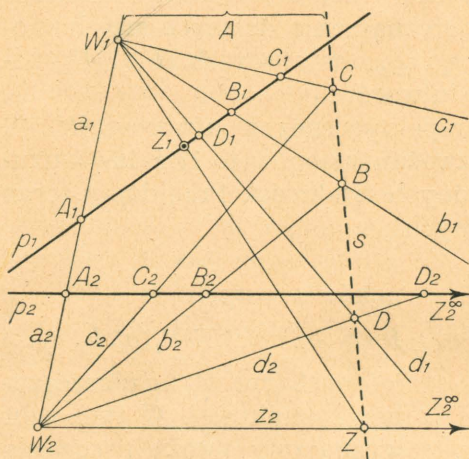
$$P_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \overline{\overline{}} P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$$

leżących (ryc. 24) na płaszczyźnie rysunkowej. W tym celu wyznaczmy punkt przecięcia się dwóch homologicznych prostych np. a_1 i a_2 pęków (P_1) i (P_2), oraz poprowadźmy przez ów punkt a_1a_2 dwie dowolne proste w_1 i w_2 . (Prosta w_1 nie może się zjednoczyć z prostą a_1 , a prosta w_2 musi być różna od prostej a_2). Wyznamy następnie punkty $w_1a_1 = A_1$, $w_1b_1 = B_1$ i $w_1c_1 = C_1$, oraz punkty $w_2a_2 = A_2$, $w_2b_2 = B_2$ i $w_2c_2 = C_2$, to otrzymamy dwa szeregi punktów

$$w_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \overline{\overline{}} (P_1) \\ \text{i } w_2(A_2, B_2, C_2, \dots) \overline{\overline{}} (P_2).$$

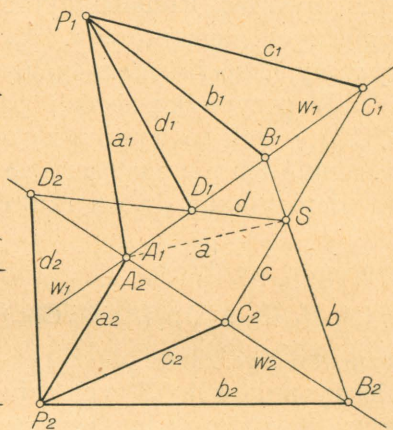
Szeregi te są (ust. 7) jednokreślne, a ponieważ punkt $w_1w_2 = A_1 = A_2$ jest elementem zjednoczonym, przeto (ust. 18) są one perspektywiczne. Homologiczne punkty B_1 i B_2 ,

tych pęków przecinają się w punktach $B = b_1b_2$ i $C = c_1c_2$ pomocniczego szeregu $s(A, B, C, \dots)$, przy czym A oznacza punkt wspólny prostych $s = BC$ i W_1W_2 .



Ryc. 23.

C_1 i C_2 tych szeregów wyznaczają proste $b = B_1B_2$ i $c = C_1C_2$ pomocniczego pęku $S(a, b, c, \dots)$, przy czym a oznacza prostą, łączącą punkty $S = bc$ i w_1w_2 .



Ryc. 24.

Uzyskaliśmy w ten sposób łańcuch utworów perspektywicznych:

$(p_1) \overline{\wedge} (W_1) \overline{\wedge} (s) \overline{\wedge} (W_2) \overline{\wedge} (p_2)$,
który pozwoli nam uzupełnić szeregi rzutowe o podstawach p_1 i p_2 . Dowolnemu punktowi D_1 szeregu (p_1) podporządkowana jest w pęku (W_1) prosta $d_1 = W_1D_1$, tej odpowiada w szeregu (s) punkt $D = d_1s$, któremu znowu podporządkowana jest prosta $d_2 = W_2D$ w pęku (W_2) . Proste d_2 i p_2 przecinają się w takim punkcie D_2 , który wraz z danym punktem D_1 tworzy parę elementów homologicznych rzutowych szeregów (p_2) i (p_1) .

$(P_1) \overline{\wedge} (w_1) \overline{\wedge} (S) \overline{\wedge} (w_2) \overline{\wedge} (P_2)$
który pozwoli nam uzupełnić pęki rzutowe o wierzchołkach P_1 i P_2 . Dowolnej prostej d_1 pęku (P_1) podporządkowany jest w szeregu (w_1) punkt $D_1 = w_1d_1$, któremu odpowiada w pęku (S) prosta $d = D_1S$, tej znowu podporządkowany jest punkt $D_2 = w_2d$ w szeregu (w_2) . Punkty D_2 i P_2 wyznaczają taką prostą d_2 , która wraz z daną prostą d_1 tworzy parę elementów homologicznych rzutowych pęków (P_2) i (P_1) .

W podobny sposób wyznaczono na ryc. 23 dla punktu niewłaściwego Z^∞_2 szeregu (p_2) homologiczny punkt Z_1 szeregu (p_1) . Element Z_1 jest (ust. 14) punktem granicznym (zbiegu) szeregu (p_1) .

Na ryc. 23 użyliśmy do konstrukcji uzupełnienia szeregów $(p_1) \overline{\wedge} (p_2)$ dwóch punktów W_1 i W_2 , dowolnie obranych na prostej A_1A_2 . Przypuśćmy teraz, że na prostej A_1A_2 (wzgl. na B_1B_2 lub na C_1C_2) obierzemy inne punkty W_1^0 i W_2^0 . W podany poprzednio sposób ustalimy nowy łańcuch utworów perspektywicznych:

$$(p_1) \overline{\wedge} (W_1^0) \overline{\wedge} (s^0) \overline{\wedge} (W_2^0) \overline{\wedge} (p_2)$$

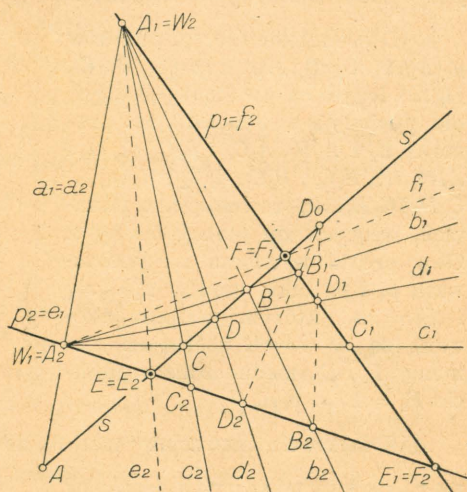
a tem samem dla danego punktu D_1 szeregu (p_1) wyznaczymy — za pośrednictwem poszczególnych ogniw powyższego łańcucha — w szeregu (p_2) podporządkowany mu punkt D_2^0 . Mogłoby się zdawać, że otrzymany teraz punkt D_2^0 jest różny od poprzednio skonstruowanego punktu D_2 . Otóż tak nie jest! Szereg punktów (p_1) jest rzutowy (por. ryc. 23) do szeregu p_2 ($A_2, B_2, C_2, D_2, \dots$) oraz szereg (p_1) — jak to wynika z ostatniego łańcucha — jest jednokreślny do szeregu punktów p_2 ($A_2, B_2, C_2, D_2^0, \dots$). Na prostej p_2 skonstruowaliśmy zatem (ust. 7) dwa szeregi rzutowe

$$p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2^0, \dots),$$

a ponieważ punkty A_2, B_2 i C_2 są trzema punktami zjednoczonymi, przeto (ust. 17) każde dwa homologiczne punkty D_2 i $D_2^0, \dots$ tych szeregów tworzą punkt zjednoczony $D_2 = D_2^0, \dots$. Wykazaliśmy tedy, że konstrukcje podane na ryc. 23 i 24 nie są wcale zależne od szczególnego położenia punktów W_1 i W_2 na prostej A_1A_2 (wzgl. prostych w_1 i w_2 przeprowadzonych przez punkt a_1a_2). — Zauważyć należy wkońcu, że prawdziwość omówionych konstrukcyj (a tem samem i niezależność od położenia punktów W_1 i W_2 na prostej A_1A_2) wynika też wprost z rozważań ust. 17.

Do konstrukcyjnego uzupełnienia dwóch rzutowych szeregów punktów

$p_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$ leżących na płaszczyźnie rysunkowej, użyliśmy na ryc. 25 takich



Ryc. 25.

punktów W_1 i W_2 , z których pierwszy zjednoczył się z elementem A_2 , a drugi z punktem A_1 . Proste $b_1 = A_2 B_1$ i $b_2 = A_1 B_2$, oraz $c_1 = A_2 C_1$ i $c_2 = A_1 C_2$ przecinają się w punktach $B = b_1 b_2$ i $C = c_1 c_2$, leżących na prostej s . Za pośrednictwem łańcucha utworów perspektywicznych: $p_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \overline{\wedge} W_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \overline{\wedge} s(A, B, C, \dots) \overline{\wedge} W_2(a_2, b_2, c_2, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$ każdemu punktowi D_1 szeregu (p_1) podporządkować możemy w szeregu (p_2) jeden i tylko jeden punkt D_2 . Oczywiście proste $d_1 = A_2 D_1$ i $d_2 = A_1 D_2$ przecinają się z podstawą s w jednym punkcie $D = d_1 d_2$, gdyż d_1 jest elementem pęku (W_1) , a prosta d_2 elementem pęku (W_2) . Celem wyznaczenia dwóch homologicznych punktów D_1 i D_2 w szeregach $(p_1) \overline{\wedge} (p_2)$, wystarczy zatem obrać na pomocniczej prostej $s = BC$ dowolny punkt D , wykreślić proste $d_1 = A_2 D$ i $d_2 = A_1 D$, a następnie punkty $D_1 = d_1 p_1$ i $D_2 = d_2 p_2$. Zamiast punktu D weźmy pod uwagę punkt $F = sp_1$. Otrzymamy wówczas proste $f_1 = A_2 F$ i $f_2 = A_1 F = p_1$, oraz punkty $F_1 = f_1 p_1 = F$ i $F_2 = f_2 p_2 = p_1 p_2$. Podobnie dla punktu $E = sp_2$ otrzymamy proste $e_1 = A_2 E = p_2$, $e_2 = A_1 E$, oraz punkty $E_1 = e_1 p_1 = p_2 p_1$ i $E_2 = e_2 p_2 = E$. Z powyższej konstrukcji wynika zatem, że punktowi $p_1 p_2$ (przecięcia się podstaw p_1 i p_2) uważanemu za element $E_1 = p_1 p_2$ szeregu (p_1) , wzgl. za punkt $F_2 = p_1 p_2$ szeregu (p_2) , podporządkowane są w owych szeregach rzutowych odpow. punkty $E_2 = sp_2$ i $F_1 = sp_1$.

Na ryc. 25 przeprowadziliśmy uzupełnienie szeregów

$$p_1(A_1, B_1, C_1, \dots, E_1 = p_1 p_2, F_1, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, \dots, E_2, F_2 = p_1 p_2, \dots),$$

przyczem do konstrukcji użyliśmy pomocniczych pęków perspektywicznych o wierzchołkach $W_1 = A_2$ i $W_2 = A_1$, oraz szeregu punktów o podstawie $s = E_2 F_1$. Ponieważ punktowi $E_1 = F_2 = p_1 p_2$ podporządkowane są w owych szeregach stałe punkty E_2 i F_1 , przeto prosta $s = E_2 F_1$ nie jest wcale zależna od wybranej pary wierzchołków $W_1 = A_2$ i $W_2 = A_1$. Gdybyśmy zatem dwa homologiczne punkty np. B_1 i B_2 tych szeregów uważali za wierzchołki $W_1^* = B_2$ i $W_2^* = B_1$ nowych pomocniczych pęków perspektywicznych, to wówczas ich homologiczne proste: $B_2 A_1$ i $B_1 A_2$, $B_2 D_1$ i $B_1 D_2, \dots$ przecinają się muszą kolejno w punktach $B, D_0, \dots$ stałej prostej $s = E_2 F_1$. Otrzymujemy zatem następujące zależności:

Dwa rzutowe szeregi punktów $p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \dots)$ i $p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \dots)$, leżące na wspólnej płaszczyźnie, posiadają tę własność, że: proste $A_1 B_2$ i $A_2 B_1$, $A_1 C_2$ i $A_2 C_1$, $A_1 D_2$ i $A_2 D_1, \dots$, $B_1 C_2$ i $B_2 C_1$, $B_1 D_2$ i $B_2 D_1, \dots$, $C_1 D_2$ i $C_2 D_1, \dots$ przecinają się w punktach, leżących na jednej prostej s . Owa prosta wyznacza na podstawach p_1 i p_2 takie punkty $F_1 = sp_1$ i $E_2 = sp_2$, którym podporządkowane są w owych szeregach elementy F_2 i E_1 , zjednoczone w punkcie $F_2 = E_1 = p_1 p_2$.

Dwa rzutowe pęki prostych $P_1(a_1, b_1, c_1, d_1, \dots)$ i $P_2(a_2, b_2, c_2, d_2, \dots)$, leżące na wspólnej płaszczyźnie, posiadają tę własność, że: punkty $a_1 b_2$ i $a_2 b_1$, $a_1 c_2$ i $a_2 c_1$, $a_1 d_2$ i $a_2 d_1, \dots$, $b_1 c_2$ i $b_2 c_1$, $b_1 d_2$ i $b_2 d_1, \dots$, $c_1 d_2$ i $c_2 d_1, \dots$ wyznaczają proste, przechodzące przez jeden punkt S . Ów punkt S wraz z wierzchołkami P_1 i P_2 wyznacza takie proste $f_1 = SP_1$ i $e_2 = SP_2$, którym podporządkowane są w owych pękach elementy f_2 i e_1 , zjednoczone na prostej $f_2 = e_1 = P_1 P_2$.

Z łatwością zauważymy (ust. 6), że dla dwóch

perspektywicznych szeregów punktów wymieniona powyżej pro-

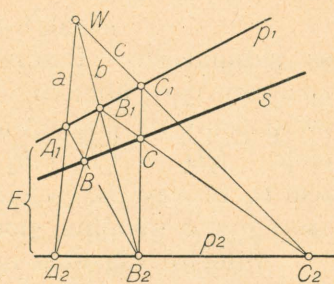
perspektywicznych pęków prostych wymieniony powyżej punkt

sta s przechodzi przez punkt $p_1 p_2$, przecięcia się podstaw owych szeregów.

S leży na prostej $P_1 P_2$, łączącej wierzchołki owych pęków.

Zadanie: Dane są na ryc. 26 punkt B , oraz takie dwie proste p_1 i p_2 , których punkt przecięcia się $E = p_1 p_2$ nie leży w obrębie płaszczyzny rysunkowej. Należy wykreślić prostą $s = BE$, przechodzącą przez owe punkty B i E .

Rozwiązanie 1: Przez punkt B poprowadźmy dwie dowolne proste $A_1 B_2$ i $A_2 B_1$, wyznaczmy następnie proste $a = A_1 A_2$, $b = B_1 B_2$ i punkt $W = ab$. Prosta c , wykreślona z punktu W , przecina się z elementami p_1 i p_2 w punktach $C_1 = cp_1$ i $C_2 = cp_2$. Jeżeli przez C oznaczmy punkt przecięcia się prostych $B_1 C_2$ i $B_2 C_1$, to wówczas prosta $s = BC$ rozwiązuje zadanie. Uważając bowiem punkty: A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 ,... za elementy homologiczne dwóch perspektywicznych szeregów punktów o podstawach p_1 i p_2 , skonstruować możemy punkty B , C ,...; owe punkty leżeć muszą na prostej s , przechodzącej przez punkt $E = p_1 p_2$.



Ryc. 26.

Rozwiązanie 2: Inne uzasadnienie konstrukcji przeprowadzonej na ryc. 26 otrzymamy, jeśli weźmiemy pod uwagę dwa czworokąty zupełne (ust. 13) o wierzchołkach A_1, A_2, B_1 i B_2 , względnie B_1, B_2, C_1 i C_2 . Wiadomo nam, że dwa boki przeciwległe $p_1 = A_1 B_1$, $p_2 = A_2 B_2$ i dwie przekątne $s = EB$ i $EW = e$ pierwszego czworokąta tworzą grupę harmoniczną o stosunku $(p_1 p_2 es) = -1$. Podobnie boki $p_1 = B_1 C_1$, $p_2 = B_2 C_2$ i przekątne EC , $e = EW$ drugiego czworokąta tworzą również grupę harmoniczną o stosunku $(p_1 p_2 eC) = -1$. Wnosimy stąd, że proste $s = EB$ i EC zjednoczyły się na wspólnej prostej, czyli innymi słowy: punkty E, B i C leżą na jednej prostej s .

Zadanie 1: Uzupełnić dwa jednokreślne szeregi punktów o wspólnej podstawie p , których rzutowość wyznaczają trzy pary homologicznych punktów A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 .

Rozwiązanie 1: Na płaszczyźnie rysunkowej oberzmy dwa dowolne punkty P_1 i P_2 , które nie przynależą do podstawy p . Skoro z wierzchołka P_1 rzucimy szereg $p(A_1, B_1, C_1, \dots)$, a z wierzchołka P_2 szereg $p(A_2, B_2, C_2, \dots)$, to otrzymamy dwa rzutowe pęki prostych

$$P_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \overline{\wedge} P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$$

o elementach: $a_1 = P_1 A_1$, $b_1 = P_1 B_1, \dots$, $a_2 = P_2 A_2$, $b_2 = P_2 B_2, \dots$. W poznany poprzednio sposób (patrz ryc. 24) uzupełnimy pęki (P_1) i (P_2) , konstruując pary homologicznych prostych: d_1 i $d_2, \dots$. Podstawa p przecina się z elementami d_1 i d_2 w takich punktach $D_1 = d_1 p$ i $D_2 = d_2 p$, które są punktami podporządkowanymi sobie w uważanych szeregach jednokreślnych o wspólnej podstawie p .

Rozwiązanie 2: Uważając dany szereg punktów $p(A_2, B_2, C_2, \dots)$ za „układ sztywny“, przesunąć go w nowe położenie $p_3(A_3, B_3, C_3, \dots)$. Z ust. 20 wnosimy, że szeregi punktów

$$p(A_1, B_1, C_1, \dots) \overline{\wedge} p_3(A_3, B_3, C_3, \dots)$$

są jednokreślne. Uzupełniając te szeregi (patrz ryc. 23), wyznaczmy parę homologicznych punktów np. D_1 i D_3 , a następnie wyznaczmy na podstawie p taki punkt D_2 , któryby spełniał relacje: $A_2 D_2 = A_3 D_3$ i $B_2 D_2 = B_3 D_3$. Ów punkt D_2 wraz z punktem D_1 tworzy parę elementów homologicznych jednokreślnych szeregów o wspólnej podstawie p .

Inne rozwiązanie omówimy w ust. 33.

Ćwiczenie 1: Uzupełnić dwa rzutowe pęki prostych o wspólnym wierzchołku W i wspólnej płaszczyźnie podstawowej, których jednokreślność ustalona jest przez trzy pary homologicznych prostych a_1 i a_2 , b_1 i b_2 , c_1 i c_2 .

Zadanie 2: Na płaszczyźnie rysunkowej dane są trzy proste a_1, b_1 i c_1 pęku (W_1), oraz trzy punkty A_2, B_2 i C_2 szeregu (p_2). Uważając elementy a_1 i A_2 , b_1 i B_2 , c_1 i C_2 za trzy pary elementów homologicznych, należy uzupełnić rzutowe utwory (W_1) i (p_2).

Rozwiązanie 1: Z dowolnego punktu W_2 płaszczyzny rysunkowej, nie leżącego na podstawie p_2 , rzuciemy szereg (p_2). Otrzymany w ten sposób pęk prostych

$$W_2(a_2, b_2, c_2, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$$

jest jednokreślny do pęku prostych (W_1). Dla pęków (W_1) $\overline{\wedge}$ (W_2) skonstruujemy parę prostych homologicznych d_1 i d_2 , a następnie wyznaczmy punkt $D_2 = d_2 p$. Prosta d_1 i punkt D_2 są wówczas homologicznymi elementami danych utworów (W_1) $\overline{\wedge}$ (p_2).

Rozwiązanie 2: Pęk prostych (W_1) przetnijmy prostą p_1 w szeregu $p_1(A_1, B_1, C_1, \dots)$, to wówczas zadanie nasze sprowadzimy do uzupełnienia jednokreślnych szeregów punktów

$$p_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, \dots).$$

Zadanie 3: Dane są trzy pary płaszczyzn homologicznych α_1 i α_2 , β_1 i β_2 , γ_1 i γ_2 dwóch rzutowych pęków płaszczyzn (l_1) i (l_2), których osie się przecinają. Należy uzupełnić owe pęki.

Rozwiązanie: Przetnijmy pęki (l_1) $\overline{\wedge}$ (l_2) dowolną płaszczyzną ε w pękach prostych

$$L_1(a_1, b_1, c_1, \dots)_\varepsilon \overline{\wedge} L_2(a_2, b_2, c_2, \dots)_\varepsilon.$$

Wyznamy następnie w pękach (L_1) i (L_2) parę prostych podporządkowanych sobie d_1 i d_2 , to wówczas płaszczyzny: $\delta_1 = l_1 d_1$ i $\delta_2 = l_2 d_2$ są elementami homologicznymi danych pęków płaszczyzn (l_1) $\overline{\wedge}$ (l_2).

20. Rzutowość utworów przystających. Na prostej p_1 niechaj dane będą cztery punkty A_1, B_1, C_1 i D_1 , a na prostej p_2 cztery takie punkty A_2, B_2, C_2 i D_2 , że są sobie równe dwustosunki

$$(A_1B_1C_1D_1) = (A_2B_2C_2D_2).$$

Zbadajmy teraz, czy można ustanowić taką rzutowość pomiędzy szeregami punktów o podstawach p_1 i p_2 , w której elementami homologicznymi byłyby pary punktów A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 , oraz D_1 i D_2 .

Ponieważ trzy pary homologicznych punktów A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 wyznaczają (ust. 17) rzutowość szeregów (p_1) i (p_2) , przeto dowolnemu punktowi D_1 szeregu (p_1) podporządkowany jest w szeregu (p_2) jeden ściśle określony punkt. Oznaczmy go symbolem D_2^* . Z jednokreślności szeregów

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \dots) \bar{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2^*, \dots)$$

wynika (ust. 11) równość dwustosunków: $(A_1B_1C_1D_1) = (A_2B_2C_2D_2^*)$, a ponieważ wedle założenia $(A_1B_1C_1D_1) = (A_2B_2C_2D_2)$, przeto:

$$(A_2B_2C_2D_2^*) = (A_2B_2C_2D_2) \text{ lub } \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{B_2C_2}} : \frac{\overline{A_2D_2^*}}{\overline{B_2D_2^*}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{B_2C_2}} : \frac{\overline{A_2D_2}}{\overline{B_2D_2}}.$$

Z uzyskanej równości stosunków podziału $\frac{\overline{A_2D_2^*}}{\overline{B_2D_2^*}} = \frac{\overline{A_2D_2}}{\overline{B_2D_2}}$ wnosiśmy (ust. 9), że punkt D_2^* zjednoczył się z danym punktem D_2 . Wykazaliśmy tedy prawdziwość twierdzenia:

Jeżeli dwustosunek czterech punktów szeregu (p_1) równy jest dwustosunkowi czterech punktów szeregu (p_2) , to wówczas uważane dwie czwórki punktów homologicznych wyznaczają rzutowość tych szeregów.

Za pośrednictwem rzutów i przecięć przejść możemy do grup czterech prostych pęku prostych, wzgl. do grup czterech płaszczyzn pęku płaszczyzn.

A zatem:

Jeżeli dwustosunek czterech elementów jednego utworu zasadniczego gatunku 1-go równy jest dwustosunkowi czterech elementów drugiego utworu zasadniczego gatunku 1-go, to wówczas uważane dwie czwórki elementów homologicznych wyznaczają rzutowość tych utworów.

Dany szereg punktów $p(A, B, C, \dots)$, o podstawie właściwej p , uważajmy za układ sztywny i przesunijmy go w nowe poło-

żenie $p'(A', B', C', \dots)$. Szeregi (p) i (p') , dla których zachodzą równości odcinków (o długościach skończonych): $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, ..., $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, ..., nazywać będziemy (ust. 14) szeregami *przystającymi* lub *równymi*.

Ponieważ dla tych szeregów zachodzą relacje:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} : \frac{\overline{A'D'}}{\overline{B'D'}} \text{ czyli } (ABCD) = (A'B'C'D'),$$

przeto są one szeregami rzutowymi o elementach homologicznych A i A' , B i B' , C i C' , ... Symbolicznie napisać możemy te związki w następującej formie: Jeżeli zachodzi relacja

$$p(A, B, C, \dots) \cong p'(A', B', C', \dots)$$

gdzie $\cong$ jest znakiem przystawania, to wówczas koniecznie spełniona musi być zależność

$$p(A, B, C, \dots) \overline{\wedge} p'(A', B', C', \dots).$$

Zauważyć należy, że dla prostych skośnych p i p' owe szeregi muszą być (ust. 18) zawsze perspektywiczne.

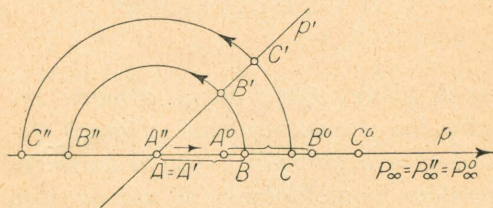
Szeregi (p) i (p') są tylko szczególnym przypadkiem „szeregów podobnych“, gdyż punktowi niewłaściwemu P_∞ podstawy p podporządkowany jest (po dokonaniu przesunięcia) również punkt niewłaściwy P'_∞ na podstawie p' .

Szeregi $p(A, B, C, \dots)$ uważajmy za układ „sztywny“, a element np. A tego szeregu za punkt stały (nieruchomy). Obróćmy prostą p około punktu A jako środka tak, aby po dokonanych obrotach (ryc. 27) zajęła nowe położenie p' . Równocześnie poszczególne punkty $B, C, \dots$ „sztywnego“ szeregu (p) zajmą na podstawie p' nowe położenia $B', C', \dots$, przyczem zachowane będą równości odcinków: $\overline{AB} = \overline{AB'}$, $\overline{AC} = \overline{AC'}$, ..., $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, ... Wnosimy stąd, że szeregi (p) i (p') są przystające i jednokreślne.

Ponieważ jednak punkt $A = pp'$ przecięcia się ich podstaw jest elementem zjednoczonym $A = A'$, przeto (ust. 18) są one szeregami perspektywicznymi.

W szczególnym przypadku wykonać możemy

obróć szeregu $p(A, B, C, \dots)$ dookoła punktu A o kąt 180° , otrzymując (ryc. 27) na podstawie p nowy szereg punktów $p(A'' = A, B''$



Ryc. 27.

$C'', \dots$). Uzyskaliśmy tedy dwa przystające i rzutowe szeregi punktów o wspólnej podstawie p . Szeregi te są „hiperboliczne“, gdyż (ust. 15) posiadają dwa (rzeczywiste i różne od siebie) punkty zjednoczone $A = A''$ i $P_\infty = P''_\infty$. Punkty homologiczne B i B'' , C i C'' , ... tych szeregów są symetrycznie ułożone względem właściwego punktu zjednoczonego $A = A''$.

Przesuńmy teraz prostą p po niej samej tak, aby punkt A zajął (ryc. 27) nowe położenie A^0 . Równocześnie punkty B , C , ... „sztywnego“ szeregu (p) zjednoczą się odpow. z punktami B^0 , C^0 , ..., przyczem $\overline{AB} = \overline{A^0B^0}$, $\overline{AC} = \overline{A^0C^0}$, ..., $\overline{BC} = \overline{B^0C^0}$, ... Na wspólnej podstawie p otrzymamy dwa przystające i rzutowe szeregi punktów $p(A, B, C, \dots)$ i $p(A^0, B^0, C^0, \dots)$, które posiadają dwa punkty zjednoczone, schodzące się w punkcie niewłaściwym $P_\infty = P^0_\infty$; szeregi te są zatem (ust. 15) szeregami „parabolicznymi“.

Szeregi $p(A, \dots) \cong p(A^0, \dots)$ o wspólnej podstawie właściwej p nazywać będziemy szeregami *wprost przystającemi* lub „wprost równymi“. Natomiast szeregi $p(A, \dots) \cong p(A'', \dots)$ o wspólnej podstawie właściwej p nazywać będziemy szeregami *odwrotnie przystającemi* lub „odwrotnie równymi“. Te dwa przypadki przystających szeregów odróżniać też można¹⁾ jako „równość prostą“ i „równość odwrotną“.

Zanim zdefiniujemy przystawanie dwóch szeregów punktów o podstawach „niewłaściwych“, zajmiemy się najpierw przystawaniem pęków prostych i pęków płaszczyzn.

Dany pęk prostych $P(a, b, c, \dots)_\omega$, o wierzchołku właściwym P i płaszczyźnie podstawowej ω , uważajmy za układ „sztywny“ i przesunijmy go (wzgl. obróćmy go) w nowe położenie $P'(a', b', c', \dots)_{\omega'}$. Pęki prostych (P) i (P'), dla których zachodzą równości kątów: $\overline{ab} = \overline{a'b'}$, $\overline{ac} = \overline{a'c'}$, ..., $\overline{bc} = \overline{b'c'}$, ..., nazywać będziemy pękami przystającemi lub równymi.

Dany pęk płaszczyzn $p(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$, o osi właściwej p , uważajmy za układ „sztywny“ i przesunijmy (wzgl. obróćmy) go w nowe położenie $p'(\alpha', \beta', \gamma', \dots)$. Pęki płaszczyzn (p) i (p'), dla których zachodzą równości kątów: $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha'\beta'}$, $\overline{\alpha\gamma} = \overline{\alpha'\gamma'}$, ..., $\overline{\beta\gamma} = \overline{\beta'\gamma'}$, ..., nazywać będziemy pękami przystającemi lub równymi.

¹⁾ Porównaj *F. Enriques*: Wykłady geometrii rzutowej, Warszawa 1917, str. 100.

Ponieważ dla pęków prostych $(P) \cong (P')$ zachodzą relacje:

$$\frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}} : \frac{\sin \overline{ad}}{\sin \overline{bd}} = \frac{\sin \overline{a'c'}}{\sin \overline{b'c'}} : \frac{\sin \overline{a'd'}}{\sin \overline{b'd'}} \quad \text{czyli } (abcd) = (a'b'c'd'),$$

przeto z poprzednio dowiedzionego twierdzenia wynika, że owe pęki prostych są rzutowe. Te same uwagi stosują się oczywiście do przystających pęków płaszczyzn (p) i (p') . Z zależności przystawiania pęków prostych (wzgl. płaszczyzn)

$P(a, b, c, \dots)_\omega \cong P'(a', b', c', \dots)_{\omega'}$,
wynika zatem zawsze jedno-
kreślność

$P(a, b, c, \dots)_\omega \frown P'(a', b', c', \dots)_{\omega'}$.

$p(\alpha, \beta, \gamma, \dots) \cong p'(\alpha', \beta', \gamma', \dots)$
wynika zatem zawsze jedno-
kreślność

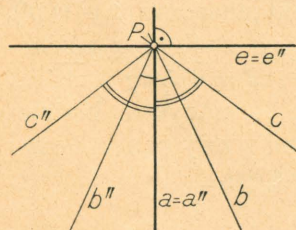
$p(\alpha, \beta, \gamma, \dots) \frown p'(\alpha', \beta', \gamma', \dots)$.

Pęki płaszczyzn $(p) \cong (p')$ mogą być (ust. 18) perspektywiczne, gdy: 1) osie p i p' tych pęków są prostymi skośnymi; 2) osie p i p' wyznaczają płaszczyznę zjednoczoną $pp' = \varepsilon = \varepsilon'$ owych pęków. — Natomiast pęki prostych $(P) \cong (P')$ mogą być perspektywiczne, gdy: 1) pęk (P) przesuniemy w płaszczyźnie podstawowej ω tak, że wierzchołek P przesunie się po prostej np. a , a pozostałe elementy $b, c, \dots$ zajmą nowe położenia $b' \parallel b, c' \parallel c, \dots$; 2) pęk $(P)_\omega$ jako układ „sztywny“ obrócimy dookoła prostej nieruchomej np. a tego pęku tak, że płaszczyzna podstawowa ω zajmie nowe położenie ω' .

Skoro dokonamy obrotu pęku $(P)_\omega$ dookoła prostej a (będącej elementem tego pęku) o kąt 180° , to wówczas (ryc. 28), otrzymamy dwa przystające i rzutowe pęki prostych

$$P(a, b, c, \dots)_\omega \cong P(a'' = a, b'', c'', \dots)_\omega$$

o wspólnym wierzchołku właściwym P i o wspólnej płaszczyźnie podstawowej ω . Proste homologiczne b i b'', c i $c'', \dots$ tych pęków są symetrycznie ułożone względem osi obrotu a . Ponieważ prosta $a = a''$ jest jednym elementem zjednoczonym a prosta $e \perp a$ jest drugim elementem zjednoczonym $e = e''$ tych pęków, przeto (ust. 16) owe pęki są „hiperboliczne“.



Ryc. 28.

We wspólnym wierzchołku P uważanych pęków prostych (ryc. 28) poprowadźmy prostą w prostopadłą do płaszczyzny podstawowej ω . Z owej prostej w rzućmy te pęki prostych (ust. 3), to — jak z łatwością stwierdzimy — otrzymamy dwa przystające i rzutowe pęki płaszczyzn o wspólnej osi w

$$w(\alpha, \beta, \gamma, \dots) \cong w(\alpha'' = \alpha, \beta'', \gamma'', \dots).$$

Płaszczyzny homologiczne β i β'', γ i $\gamma'', \dots$ tych pęków są symetrycznie ułożone względem płaszczyzny $\alpha = \alpha''$. Ponieważ

płaszczyzna $\alpha = \alpha''$ i płaszczyzna do niej prostopadła $\varepsilon = \varepsilon''$ są elementami zjednoczonymi, przeto (ust. 16) uważane pęki płaszczyzn są „hiperboliczne“.

Pęk prostych $P(a, b, c, \dots)_\omega$, o wierzchołku właściwym P , obróćmy (jako układ sztywny) w płaszczyźnie podstawowej ω dokoła wierzchołka P tak, aby element a zajął nowe położenie a^0 , różne od prostej a . Otrzymany po tym obrocie pęk $P(a^0, b^0, c^0, \dots)_\omega$ jest przystający i rzutowy względem pędu $P(a, b, \dots)_\omega$. Pęki prostych

$$P(a, b, c, \dots)_\omega \cong P(a^0, b^0, c^0, \dots)_\omega$$

o wspólnym wierzchołku właściwym P i wspólnej płaszczyźnie podstawowej ω , nie posiadają wcale rzeczywistych prostych zjednoczonych i są (ust. 16) zatem pękami „eliptycznymi“.

Skoro owe pęki prostych rzucimy z prostej w , poprowadzonej w wierzchołku P prostopadle do płaszczyzny ω , to otrzymamy wówczas dwa przystające i rzutowe pęki płaszczyzn o wspólnej osi w

$$w(a, \beta, \gamma, \dots) \cong w(a^0, \beta^0, \gamma^0, \dots),$$

które nie posiadają wcale rzeczywistych płaszczyzn zjednoczonych i są pękami „eliptycznymi“. Do tego samego wyniku dojdziemy, gdy dany pęk $w(a, \beta, \gamma, \dots)$ uważać będziemy za układ „sztywny“ i obrócimy go dokoła osi właściwej w w nowe położenie $w(a^0, \beta^0, \gamma^0, \dots)$.

Pęki prostych

$$P(a, \dots)_\omega \cong P(a'', \dots)_\omega$$

o wspólnym wierzchołku właściwym i wspólnej płaszczyźnie podstawowej, nazywać będziemy pękami odwrotnie przystającymi lub „odwrotnie równymi“.

Pęki prostych

$$P(a, \dots)_\omega \cong P(a^0, \dots)_\omega$$

o wspólnym wierzchołku właściwym i wspólnej płaszczyźnie podstawowej, nazywać będziemy pękami wprost przystającymi lub „wprost równymi“.

Pęki płaszczyzn

$$w(a, \dots) \cong w(a'', \dots)$$

o wspólnej osi właściwej w nazywać będziemy pękami odwrotnie przystającymi lub „odwrotnie równymi“.

Pęki płaszczyzn

$$w(a, \dots) \cong w(a^0, \dots)$$

o wspólnej osi właściwej w nazywać będziemy pękami wprost przystającymi lub „wprost równymi“.

Dany pęk prostych $P(a, b, c, \dots)_\omega$ o wierzchołku właściwym P uważamy za układ sztywny. W płaszczyźnie ω wykonajmy taki ruch pęku (P), aby wierzchołek jego zajął nowe położenie P_1 , a poszczególne elementy jego zajęły nowe położenia $a_1 // a, b_1 // b, \dots$. Następnie otrzymany w ten sposób pęk prostych $P_1(a_1, b_1, c_1, \dots)_\omega$ obróćmy (jako układ sztywny) w płaszczyźnie ω dokoła wierzchołka P_1 w nowe położenie $P_1(a_2, b_2, c_2, \dots)_\omega$. Dwa przystające i rzutowe pęki prostych

$$P(a, b, c, \dots)_\omega \cong P_1(a_2, b_2, c_2, \dots)_\omega$$

o różnych wierzchołkach P, P_1 i o wspólnej płaszczyźnie podstawowej ω , nazywać będziemy *pękami wprost przystającymi* lub „wprost równymi“.

Otrzymany poprzednio pęk $P_1(a_1, b_1, c_1, \dots)_\omega$ obróćmy teraz dokoła prostej a_1 o kąt 180° , to uzyskamy nowy pęk $P_1(a_3 = a_1, b_3, c_3, \dots)_\omega$. Pęki prostych przystające i rzutowe

$$P(a, b, c, \dots)_\omega \cong P_1(a_3, b_3, c_3, \dots)_\omega$$

o różnych wierzchołkach P, P_1 i o wspólnej płaszczyźnie podstawowej ω , nazywać będziemy *pękami odwrotnie przystającymi* lub „odwrotnie równymi“.

Skoro dane pęki prostych

$$P(a, b, \dots)_\omega \cong P'(a', b', \dots)_{\omega'}$$

przetniemy płaszczyzną niewłaściwą σ_∞ , to (ust. 3 i 11) otrzymane rzutowe szeregi punktów

$$s_\infty(A_\infty, B_\infty, \dots) \bar{\wedge} s'_\infty(A'_\infty, B'_\infty, \dots)$$

o podstawach niewłaściwych $s_\infty = \omega\sigma_\infty$ i $s'_\infty = \omega'\sigma_\infty$, nazywać będziemy szeregami przystającymi lub równymi.

Skoro dwa dane przystające pęki prostych, o wspólnym wierzchołku P i wspólnej płaszczyźnie podstawowej ω , które są: a) wprost przystające, b) odwrotnie przystające — przetniemy prostą nie-

Skoro dane pęki płaszczyzn

$$p(a, \beta, \dots) \cong p'(a', \beta', \dots)$$

przetniemy płaszczyzną niewłaściwą σ_∞ , to otrzymane rzutowe pęki prostych niewłaściwych

$$S_\infty(a_\infty, b_\infty, \dots) \bar{\wedge} S'_\infty(a'_\infty, b'_\infty, \dots)$$

o wierzchołkach $S_\infty = p\sigma_\infty$ i $S'_\infty = p'\sigma_\infty$ nazywać będziemy pękami przystającymi lub równymi.

Skoro dwa dane przystające pęki płaszczyzn o wspólnej osi p , które są: a) wprost przystające, b) odwrotnie przystające — przetniemy płaszczyzną niewłaściwą σ_∞ , to otrzymamy: dwa pęki pro-

właściwą s_∞ (płaszczyzny ω), to ¹⁾ otrzymamy: dwa szeregi punktów niewłaściwych

- a) wprost przystające,
b) odwrotnie przystające.

stych niewłaściwych o wspólnym wierzchołku

- a) wprost przystające,
b) odwrotnie przystające.

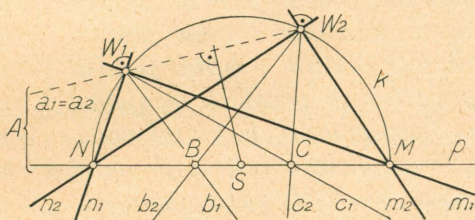
Z rozważań niniejszego ustępu wynika prawdziwość twierdzenia, odnoszącego się tak do utworów właściwych, jak również i do utworów niewłaściwych, a mianowicie:

Dwa przystające utwory zasadnicze gatunku 1-go są zawsze utworami rzutowymi.

21. Potęga pęków rzutowych. Weźmy pod uwagę dwa perspektywiczne pęki prostych $W_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$ i $W_2(a_2 = a_1, b_2, c_2, \dots)$, które są (ryc. 29) rzutami szeregu punktów $p(A, B, C, \dots)$. Na cięciu $\overline{W_1 W_2}$ zakresłmy koło k , którego środek S leży na podstawie p , oraz wyznaczmy punkty N i M przecięcia się tego koła z prostą p . Proste $n_1 = W_1 N$ i $n_2 = W_2 N$, jak również $m_1 = W_1 M$ i $m_2 = W_2 M$ są oczywiście elementami homologicznymi perspektywicznych pęków (W_1) i (W_2) . Ponieważ nadto spełnione są warunki prostopadłości:

$n_1 \perp m_1$ i $n_2 \perp m_2$, przeto:

Dwa perspektywiczne pęki prostych (o wierzchołkach właściwych) posiadają tę własność, że w każdym z tych pęków istnieje jedna i tylko jedna para takich prostych wzajemnie prostopadłych, której podporządkowaną jest w drugim pęku również para prostych prostopadłych.



Ryc. 29.

Uwaga: Gdyby prosta p (ryc. 29) była symetralną odcinka $\overline{W_1 W_2}$, to każdej parze prostych prostopadłych pęku (W_1) odpowiadałaby zawsze para prostych prostopadłych w pęku (W_2) . Owe pęki perspektywiczne byłyby wówczas (ust. 20) pękami przystającymi.

Pęk prostych (W_2) uważajmy za układ sztywny i przesunijmy go w nowe położenie $W'_2(a'_2, b'_2, c'_2, \dots)$. Z łańcucha pęków $(W_1) \overline{\wedge} (W_2) \cong (W'_2)$ i rozważań ust. 20 wynika jednokreślność pęków prostych

$$W_1(a_1, b_1, c_1, \dots, n_1, m_1, \dots) \overline{\wedge} W'_2(a'_2, b'_2, c'_2, \dots, n'_2, m'_2, \dots),$$

¹⁾ F. Enriques, l. c.

przyczem parze prostych $n_1 \perp m_1$ pierwszego pęku podporządkowana jest para prostych $n'_2 \perp m'_2$ w pęku drugim¹⁾.

W wierzchołku W_1 wykreślimy prostą s_1 prostopadłą do płaszczyzny podstawowej pęku (W_1), a w wierzchołku W'_2 prostą s'_2 prostopadłą do płaszczyzny podstawowej pęku (W'_2). Skoro rzucimy z prostej s_1 pęk prostych (W_1), a z prostej s'_2 pęk (W'_2), to otrzymane w ten sposób pęki płaszczyzn o osiach s_1 i s'_2 są jednokreślne:

$$s_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \nu_1, \mu_1, \dots) \bar{\wedge} s'_2(\alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2, \dots, \nu'_2, \mu'_2, \dots).$$

Płaszczyznom wzajemnie prostopadłym $\nu_1 = s_1 n_1$ i $\mu_1 = s_1 m_1$ pęku (s_1) odpowiadają w pęku (s'_2) dwie płaszczyzny prostopadłe $\nu'_2 = s'_2 n'_2$ i $\mu'_2 = s'_2 m'_2$.

Nie uwzględniając pęków „rzutowych i przystających“, w których każdej parze elementów do siebie prostopadłych w jednym pęku podporządkowane są w pęku drugim też elementy wzajemnie prostopadłe — wypowiedzieć możemy następujące twierdzenia:

Dwa rzutowe pęki prostych (o wierzchołkach właściwych) posiadają tę własność, że w każdym z tych pęków istnieje jedna i tylko jedna para takich prostych wzajemnie prostopadłych, której podporządkowana jest w drugim pęku również para prostych do siebie prostopadłych.

Dwa rzutowe pęki płaszczyzn (o osiach właściwych) posiadają tę własność, że w każdym z tych pęków istnieje jedna i tylko jedna para takich płaszczyzn wzajemnie prostopadłych, której podporządkowana jest w drugim pęku również para płaszczyzn do siebie prostopadłych.

Dla jednokreślnych pęków prostych (W_1) i (W'_2) zachodzą (ust. 11) równości dwustosunków $(a_1 b_1 n_1 m_1) = (a'_2 b'_2 n'_2 m'_2)$ lub

$$\frac{\sin \overline{a_1 n_1}}{\sin \overline{b_1 n_1}} : \frac{\sin \overline{a_1 m_1}}{\sin \overline{b_1 m_1}} = \frac{\sin \overline{a'_2 n'_2}}{\sin \overline{b'_2 n'_2}} : \frac{\sin \overline{a'_2 m'_2}}{\sin \overline{b'_2 m'_2}}.$$

Ponieważ proste n_1 i m_1 pęku (W_1), oraz proste n'_2 i m'_2 pęku (W'_2) tworzą dwie pary prostych wzajemnie prostopadłych: $n_1 \perp m_1$ i $n'_2 \perp m'_2$, przeto zachodzą relacje (ust. 10) następujące:

$$\begin{aligned} \cos \overline{n_1 m_1} &= 0, & \sin \overline{n_1 m_1} &= \pm 1 \\ \cos \overline{n'_2 m'_2} &= 0, & \sin \overline{n'_2 m'_2} &= \pm 1 \end{aligned}$$

¹⁾ Porównaj Dr. M. Łazarski, l. c. Tom I, str. 8.

$$\sin \overline{a_1 m_1} = \sin (\overline{a_1 n_1} + \overline{n_1 m_1}) = \sin \overline{a_1 n_1} \cdot \cos \overline{n_1 m_1} + \\ + \cos \overline{a_1 n_1} \cdot \sin \overline{n_1 m_1} = \cos \overline{a_1 n_1} \cdot \sin \overline{n_1 m_1}.$$

Mamy tedy:

$$\sin \overline{a_1 m_1} = \cos \overline{a_1 n_1} \cdot \sin \overline{n_1 m_1}, \text{ oraz dalsze związki}$$

$$\sin \overline{b_1 m_1} = \cos \overline{b_1 n_1} \cdot \sin \overline{n_1 m_1}$$

$$\sin \overline{a'_2 n'_2} = \cos \overline{a'_2 m'_2} \cdot \sin \overline{n'_2 m'_2}$$

$$\sin \overline{b'_2 n'_2} = \cos \overline{b'_2 m'_2} \cdot \sin \overline{n'_2 m'_2}.$$

Podstawiając powyższe wartości w dwustosunkach $(a_1 b_1 n_1 m_1) = (a'_2 b'_2 n'_2 m'_2)$, otrzymamy:

$$\frac{\sin \overline{a_1 n_1}}{\sin \overline{b_1 n_1}} \cdot \frac{\cos \overline{a_1 n_1} \cdot \sin \overline{n_1 m_1}}{\cos \overline{b_1 n_1} \cdot \sin \overline{n_1 m_1}} = \frac{\cos \overline{a'_2 m'_2} \cdot \sin \overline{n'_2 m'_2}}{\cos \overline{b'_2 m'_2} \cdot \sin \overline{n'_2 m'_2}} \cdot \frac{\sin \overline{a'_2 m'_2}}{\sin \overline{b'_2 m'_2}}$$

$$\text{lub } \frac{\sin \overline{a_1 n_1}}{\cos \overline{a_1 n_1}} \cdot \frac{\sin \overline{b_1 n_1}}{\cos \overline{b_1 n_1}} = \frac{\sin \overline{b'_2 m'_2}}{\cos \overline{b'_2 m'_2}} \cdot \frac{\sin \overline{a'_2 m'_2}}{\cos \overline{a'_2 m'_2}}$$

$$\text{czyli } \overline{tg a_1 n_1} : \overline{tg b_1 n_1} = \overline{tg b'_2 m'_2} : \overline{tg a'_2 m'_2}$$

więc ostatecznie:

$$\overline{tg a_1 n_1} \cdot \overline{tg a'_2 m'_2} = \overline{tg b_1 n_1} \cdot \overline{tg b'_2 m'_2}.$$

Zauważyć musimy, że symbol $\overline{a_1 n_1}$ oznacza (ust. 10) jeden z czterech kątów, określonych przez proste a_1 i n_1 pęku (W_1). Jeżeli jeden z tych kątów oznaczmy przez ε , to kąt przyległy jest równy $\varepsilon - 180^\circ$; dwa pozostałe kąty są kątami wierzchołkowymi względem kątów ε i $(\varepsilon - 180^\circ)$. Dla tych kątów zachodzi oczywiście równość: $\overline{tg \varepsilon} = \overline{tg (\varepsilon - 180^\circ)}$. Powyższe uwagi stosują się też do pozostałych kątów $\overline{a'_2 m'_2}$, $\overline{b_1 n_1}$ i $\overline{b'_2 m'_2}$.

Gdybyśmy w miejsce prostych homologicznych b_1 i b'_2 przyjęli w pękach $(W_1) \overline{\cap} (W'_2)$ proste odpowiadające sobie c_1 i c'_2 , to wówczas z równości dwustosunków $(a_1 c_1 n_1 m_1) = (a'_2 c'_2 n'_2 m'_2)$ otrzymalibyśmy iloczyn: $\overline{tg a_1 n_1} \cdot \overline{tg a'_2 m'_2} = \overline{tg c_1 n_1} \cdot \overline{tg c'_2 m'_2}$. Wnosimy stąd, że iloczyn tangensów (stycznych trygonometrycznych)

$$\overline{tg a_1 n_1} \cdot \overline{tg a'_2 m'_2} = \overline{tg b_1 n_1} \cdot \overline{tg b'_2 m'_2} = \overline{tg c_1 n_1} \cdot \overline{tg c'_2 m'_2} = \dots$$

jest liczbą stałą dla jednokreślnych pęków¹⁾ prostych (W_1) i (W'_2) .

Przejdźmy teraz do rzutowych pęków płaszczyzn (s_1) i (s'_2) . Ponieważ między pękami $(s_1) \overline{\cap} (W_1)$ i $(s'_2) \overline{\cap} (W'_2)$ zachodzą równości kątów:

$$\overline{a_1 v_1} = \overline{a_1 n_1} \quad \overline{\beta_1 v_1} = \overline{b_1 n_1} \quad \overline{\gamma_1 v_1} = \overline{c_1 n_1} \\ \overline{a'_2 \mu'_2} = \overline{a'_2 m'_2} \quad \overline{\beta'_2 \mu'_2} = \overline{b'_2 m'_2} \quad \overline{\gamma'_2 \mu'_2} = \overline{c'_2 m'_2}$$

¹⁾ Dr. M. Łazarski: l. c. I, str. 10.

przeto iloczyn tangensów

$$\operatorname{tg} \overline{a_1 v_1} \cdot \operatorname{tg} \overline{a'_2 \mu'_2} = \operatorname{tg} \overline{\beta_1 v_1} \cdot \operatorname{tg} \overline{\beta'_2 \mu'_2} = \operatorname{tg} \overline{\gamma_1 v_1} \cdot \operatorname{tg} \overline{\gamma'_2 \mu'_2} = \dots$$

jest liczbą stałą.

Skoro w dwóch rzutowych pękach prostych (W_1) i (W'_2) elementom $n_1 \perp m_1$ pęku (W_1) podporządkowane są w pęku (W'_2) proste $n'_2 \perp m'_2$, to dla dowolnej pary homologicznych prostych a_1 i a'_2 tych pęków iloczyn:

$$\operatorname{tg} \overline{a_1 n_1} \cdot \operatorname{tg} \overline{a'_2 m'_2}$$

jest liczbą stałą.

Skoro w dwóch rzutowych pękach płaszczyzn (s_1) i (s'_2) elementom $v_1 \perp \mu_1$ pęku (s_1) podporządkowane są w pęku (s'_2) płaszczyzny $v'_2 \perp \mu'_2$, to dla dowolnej pary homologicznych płaszczyzn a_1 i a'_2 tych pęków iloczyn:

$$\operatorname{tg} \overline{a_1 v_1} \cdot \operatorname{tg} \overline{a'_2 \mu'_2}$$

jest liczbą stałą.

Powyższy iloczyn nazywamy¹⁾ potęgą uważanych jednokreślnych pęków prostych (wzgl. płaszczyzn).

22. Elementy zjednoczone pęków rzutowych o wspólnym wierchołku (wzgl. o wspólnej osi). Niechaj dane będą dwa jednokreślne pęki prostych

$$W(a_1, b_1, c_1, \dots, n_1, m_1, \dots)_\omega \wedge W(a_2, b_2, c_2, \dots, n_2, m_2, \dots)_\omega$$

o wspólnym wierchołku właściwym W i o wspólnej płaszczyźnie podstawowej ω . Niechaj prostym wzajemnie prostopadłym $n_1 \perp m_1$ pierwszego pęku podporządkowane będą (ust. 21) proste $n_2 \perp m_2$ w pęku drugim. Potęga tych pęków rzutowych wyrazi się wówczas iloczynem

$$\operatorname{tg} \overline{a_1 n_1} \cdot \operatorname{tg} \overline{a_2 m_2} = c_0$$

gdzie c_0 jest liczbą stałą.

Zbadamy teraz (ust. 16, uwaga), czy omawiane pęki prostych posiadają proste zjednoczone. Skoro przez e oznaczymy prostą zjednoczoną $e_1 = e_2$ tych pęków o wspólnym wierchołku W , to dla ich potęgi otrzymamy relację:

$$\operatorname{tg} \overline{e_1 n_1} \cdot \operatorname{tg} \overline{e_2 m_2} = \operatorname{tg} \overline{e n_1} \cdot \operatorname{tg} \overline{e m_2} = c_0.$$

Ponieważ kąt $\overline{e m_2} = \overline{e n_1} + \overline{n_1 m_2}$, gdzie $\overline{n_1 m_2}$ oznacza stały kąt, określony prostymi n_1 i m_2 przyjętych pęków rzutowych, przeto po uwzględnieniu równości

¹⁾ Porównaj *R. Sturm*, l. c. I. str. 70.

$$\operatorname{tg} \overline{em_2} = \operatorname{tg} (\overline{en_1} + \overline{n_1 m_2}) = \frac{\operatorname{tg} \overline{en_1} + \operatorname{tg} \overline{n_1 m_2}}{1 - \operatorname{tg} \overline{en_1} \cdot \operatorname{tg} \overline{n_1 m_2}}$$

dochodzimy do związku

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \overline{en_1} \cdot (\operatorname{tg} \overline{en_1} + \operatorname{tg} \overline{n_1 m_2}) &= c_0 (1 - \operatorname{tg} \overline{en_1} \cdot \operatorname{tg} \overline{n_1 m_2}) \\ \text{lub } \operatorname{tg}^2 \overline{en_1} + (1 + c_0) \cdot \operatorname{tg} \overline{n_1 m_2} \cdot \operatorname{tg} \overline{en_1} &= c_0. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy tedy ¹⁾ równanie drugiego stopnia o jednej zmiennej $\operatorname{tg} \overline{en_1}$, gdzie $\overline{en_1}$ oznacza jeden z czterech kątów określonych szukaną (niezaną) prostą zjednoczoną e i danym elementem n_1 . Jeżeli jeden z tych kątów oznaczymy przez ε , to kąt przyległy jest równy kątowi ($\varepsilon - 180^\circ$); dwa pozostałe kąty są kątami wierzchołkowymi względem kątów ε i ($\varepsilon - 180^\circ$). Ponieważ $\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg}(\varepsilon - 180^\circ)$, przeto funkcji $\operatorname{tg} \overline{en_1}$ podporządkowana jest jedna i tylko jedna prosta e . Z powyższego równania wynika, że

$$\operatorname{tg} \overline{en_1} = \frac{-(1 + c_0) \cdot \operatorname{tg} \overline{n_1 m_2} \pm \sqrt{(1 + c_0)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \overline{n_1 m_2} + 4 c_0}}{2}.$$

Zależnie od tego, czy wyrażenie: $(1 + c_0)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \overline{n_1 m_2} + 4 c_0$ jest większe od zera, równe zeru, czy też mniejsze od zera — omawiane równanie 2-go stopnia posiada: a) dwa pierwiastki rzeczywiste i różne od siebie; b) dwa pierwiastki rzeczywiste i równe sobie; c) dwa pierwiastki zespolone sprzężone. Każdemu pierwiastkowi podporządkowana jest jedna i tylko jedna prosta e w pękach o wspólnym wierzchołku W . Dla pierwiastka „rzeczywistego“ podporządkowaną mu prostą e nazywać będziemy *prostą rzeczywistą*; natomiast dla pierwiastka „zespolonego“ podporządkowany mu element e nazwiemy *prostą urojoną*. Dwom pierwiastkom „zespolonym sprzężonym“ podporządkowane są dwie proste w pękach o wierzchołku (W), które nazywać będziemy *prostami urojonymi sprzężonymi*.

Uważane pęki prostych posiadają zatem w przypadku: a) dwie rzeczywiste i różne od siebie proste zjednoczone $e = e_1 = e_2$ i $f = f_1 = f_2$; b) dwie proste zjednoczone i nakrywające się na jednej prostej $e = f$; c) dwie zjednoczone proste urojone sprzężone.

W sposób zupełnie analogiczny, korzystając z potęgi jednokreślnych pęków płaszczyzn o wspólnej osi, wykazać możemy, że te pęki posiadają: a) dwie rzeczywiste i różne od siebie płaszczyzny zjednoczone $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ i $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$; b) dwie płaszczyzny zjednoczone $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ i $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$; c) dwie płaszczyzny zjednoczone $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ i $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$.

¹⁾ Porównaj rozważania w ust. 15.

szczyzny zjednoczone i nakrywające się na jednej płaszczyźnie $\varepsilon = \varphi$; c) dwie zjednoczone płaszczyzny urojone sprzężone. — Powyższe zależności w formie twierdzeń wypisane są już w ust. 16.

Niechaj dane będą dwa jednokreślne i hiperboliczne pęki prostych

$$W(a_1, b_1, c_1, \dots, n_1, m_1, \dots)_\omega \bar{\wedge} W(a_2, b_2, c_2, \dots, n_2, m_2, \dots)_\omega$$

o wspólnym wierzchołku W i wspólnej płaszczyźnie podstawowej ω . Dla prostych zjednoczonych (rzeczywistych) $e_1 = e_2 = e$ i $f_1 = f_2 = f$, oraz dwóch par prostych homologicznych a_1 i a_2 , b_1 i b_2 , tych pęków zachodzi (ust. 11) równość dwustosunków:

$$(e_1 f_1 a_1 b_1) = (e_2 f_2 a_2 b_2) \text{ lub } (e f a_1 b_1) = (e f a_2 b_2) \text{ czyli}$$

$$\frac{\sin \overline{ea_1}}{\sin \overline{fa_1}} : \frac{\sin \overline{eb_1}}{\sin \overline{fb_1}} = \frac{\sin \overline{ea_2}}{\sin \overline{fa_2}} : \frac{\sin \overline{eb_2}}{\sin \overline{fb_2}}; \frac{\sin \overline{ea_1}}{\sin \overline{fa_1}} : \frac{\sin \overline{ea_2}}{\sin \overline{fa_2}} = \frac{\sin \overline{eb_1}}{\sin \overline{fb_1}} : \frac{\sin \overline{eb_2}}{\sin \overline{fb_2}}.$$

Dochodzimy tedy do równości: $(e f a_1 a_2) = (e f b_1 b_2)$. Zamiast elementów b_1 i b_2 , weźmy pod uwagę proste homologiczne c_1 i c_2 ; wykażemy wówczas, że dwustosunek $(e f a_1 a_2) = (e f c_1 c_2)$, czyli innymi słowy: *dwustosunek $(e f a_1 a_2)$ jest liczbą stałą*.

Celem wyznaczenia owej stałej liczby, weźmy pod uwagę tę parę prostych prostopadłych $n_1 \perp m_1$ pęku pierwszego, której w drugim pęku podporządkowana jest (ust. 21) również para prostych prostopadłych $n_2 \perp m_2$. Wprowadzając oznaczenia dla kątów:

$$\begin{aligned} \overline{a_1 n_1} &= \alpha & \overline{en_1} &= \gamma & \overline{n_1 m_2} &= \varepsilon \\ \overline{a_2 n_1} &= \beta & \overline{fn_1} &= \delta \end{aligned} \quad \dots (1)$$

otrzymamy dla kąta $\overline{ea_1} = \overline{en_1} + \overline{n_1 a_1} = \overline{en_1} - \overline{a_1 n_1} = \gamma - \alpha$ i dalszych kątów związku:

$$\overline{ea_1} = \gamma - \alpha, \quad \overline{ea_2} = \gamma - \beta, \quad \overline{fa_1} = \delta - \alpha, \quad \overline{fa_2} = \delta - \beta$$

a dla dwustosunku $(e f a_1 a_2)$ wartość

$$\begin{aligned} (e f a_1 a_2) &= \frac{\sin \overline{ea_1}}{\sin \overline{fa_1}} : \frac{\sin \overline{ea_2}}{\sin \overline{fa_2}} = \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin(\delta - \alpha)} : \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\sin(\delta - \beta)} = \\ &= \frac{\sin(\gamma - \alpha) \cdot \sin(\delta - \beta)}{\sin(\delta - \alpha) \cdot \sin(\gamma - \beta)} = \\ &= \frac{(\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \alpha) (\sin \delta \cdot \cos \beta - \cos \delta \cdot \sin \beta)}{(\sin \delta \cdot \cos \alpha - \cos \delta \cdot \sin \alpha) (\sin \gamma \cdot \cos \beta - \cos \gamma \cdot \sin \beta)}. \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu równości:

$$\sin \psi = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}}, \quad \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}}$$

otrzymamy ostatecznie zależność następującą

$$(efa_1a_2) = \frac{(\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha) (\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \beta)}{(\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \alpha) (\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \beta)} \dots (2).$$

Na początku tego ustępu wykazaliśmy, że dla prostych zjednoczonych e i f uważanych pęków mamy związki:

$$\operatorname{tg} \overline{en_1} = \frac{1}{2} \left[-(1 + c_0) \cdot \operatorname{tg} \overline{n_1 m_2} + \sqrt{(1 + c_0)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \overline{n_1 m_2} + 4 c_0} \right]$$

$$\operatorname{tg} \overline{fn_1} = \frac{1}{2} \left[-(1 + c_0) \cdot \operatorname{tg} \overline{n_1 m_2} - \sqrt{(1 + c_0)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \overline{n_1 m_2} + 4 c_0} \right].$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$-(1 + c_0) \cdot \operatorname{tg} \overline{n_1 m_2} = -(1 + c_0) \cdot \operatorname{tg} \varepsilon = s_0$$

$$\sqrt{(1 + c_0)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \overline{n_1 m_2} + 4 c_0} = \sqrt{s_0^2 + 4 c_0} = R_0 \dots (3)$$

oraz uwzględniając równości pod (1), otrzymamy dla $\operatorname{tg} \overline{en_1}$ i $\operatorname{tg} \overline{fn_1}$ wartości:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{2} (s_0 + R_0), \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{2} (s_0 - R_0).$$

Równanie (2) przedstawimy zatem w postaci

$$(efa_1a_2) = \frac{(\frac{1}{2} s_0 + \frac{1}{2} R_0 - \operatorname{tg} \alpha) (\frac{1}{2} s_0 - \frac{1}{2} R_0 - \operatorname{tg} \beta)}{(\frac{1}{2} s_0 - \frac{1}{2} R_0 - \operatorname{tg} \alpha) (\frac{1}{2} s_0 + \frac{1}{2} R_0 - \operatorname{tg} \beta)}.$$

Mnożąc licznik i mianownik przez 2, oraz podstawiając wartość za $s_0^2 - R_0^2 = -4 c_0$, dochodzimy (po wykonaniu zaznaczonych działań) do równości:

$$(efa_1a_2) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - s_0 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) - 2 c_0 + R_0 (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}{2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - s_0 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) - 2 c_0 - R_0 (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}.$$

Skoro za potęgę c_0 (ust. 21) badanych pęków prostych podstawimy wartość

$$c_0 = \operatorname{tg} \overline{a_1 n_1} \cdot \operatorname{tg} \overline{a_2 m_2} = \operatorname{tg} \overline{a_1 n_1} \cdot \operatorname{tg} (\overline{a_2 n_1} + \overline{n_1 m_2}) =$$

$$= \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} (\beta + \varepsilon) = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \varepsilon}{1 - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \varepsilon}$$

to wówczas wyrażenie

$$2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - s_0 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) - 2 c_0 =$$

$$= \frac{(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \operatorname{tg} \varepsilon}{1 - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \varepsilon} \cdot (\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \varepsilon + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \varepsilon - 1) =$$

$$= \frac{(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \operatorname{tg} \varepsilon}{1 - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \varepsilon} \cdot [\operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \varepsilon) - (1 - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \varepsilon)] =$$

$$= (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \cdot \operatorname{tg} \varepsilon [\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} (\beta + \varepsilon) - 1] =$$

$$= (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \cdot (c_0 - 1).$$

Dla badanego dwustosunku otrzymujemy ostatecznie liczbę

$$(efa_1a_2) = \frac{(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \cdot \operatorname{tg} \varepsilon (c_0 - 1) + R_0 (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}{(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \cdot \operatorname{tg} \varepsilon (c_0 - 1) - R_0 (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)} =$$

$$= \frac{(1 - c_0) \cdot \operatorname{tg} \varepsilon - R_0}{(1 - c_0) \cdot \operatorname{tg} \varepsilon + R_0} =$$

$$= \frac{(1 - c_0) \cdot \operatorname{tg} \overline{n_1 m_2} - \sqrt{(1 + c_0)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \overline{n_1 m_2} + 4 c_0}}{(1 - c_0) \cdot \operatorname{tg} \overline{n_1 m_2} + \sqrt{(1 + c_0)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \overline{n_1 m_2} + 4 c_0}}.$$

Powyższa liczba jest „rzeczywistą“ dla pęków hiperbolicznych, gdyż $(1 + c_0)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \overline{n_1 m_2} + 4 c_0$ jest większe od zera.

Skoro założymy, że: $(1 + c_0)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \overline{n_1 m_2} + 4 c_0 = 0$, to wówczas dla parabolicznych pęków prostych dwustosunek dwóch prostych zjednoczonych $e = f$ (nakrywających się) i pary prostych homologicznych a_1, a_2 wyraża się liczbą $(eea_1a_2) = +1$.

Jeżeli wreszcie $(1 + c_0)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \overline{n_1 m_2} + 4 c_0$ jest mniejsze od zera, to dla eliptycznych pęków prostych dwustosunek (efa_1a_2) jest „liczbą zespoloną“, gdyż $\sqrt{(1 + c_0)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \overline{n_1 m_2} + 4 c_0}$ jest liczbą urojoną.

Z dotychczasowych rozważań naszych wynika, że bez względu na to, czy mamy pęki prostych hiperboliczne, paraboliczne, czy też eliptyczne — to dwustosunek (efa_1a_2) jest zawsze liczbą stałą.

W sposób zupełnie analogiczny dowiedzimy, że: dla dwóch jednokreślnych pęków płaszczyzn o wspólnej osi — dwustosunek $(\varepsilon\varphi a_1a_2)$ dla dwóch płaszczyzn zjednoczonych ε, φ i pary płaszczyzn homologicznych a_1, a_2 tych pęków jest również zawsze liczbą stałą. A zatem ¹⁾:

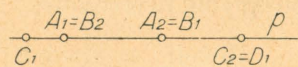
Dwa rzutowe pęki prostych, o wspólnym wierzchołku i o wspólnej płaszczyźnie podstawowej, posiadają tę własność, że: dwustosunek ich prostych zjednoczonych i dwóch prostych homologicznych jest liczbą stałą.

Dwa rzutowe pęki płaszczyzn o wspólnej osi posiadają tę własność, że: dwustosunek ich płaszczyzn zjednoczonych i dwóch płaszczyzn homologicznych jest liczbą stałą.

¹⁾ Należy porównać z analogicznym twierdzeniem ust. 15.

23. Rzutowość inwolucyjna utworów zasadniczych gatunku 1-go. Dwa jednokreślne szeregi punktów $p(A_1, B_1, C_1, \dots)$ i $p(A_2, B_2, C_2, \dots)$ o wspólnej podstawie p posiadają (ust. 15) tę własność, że: dowolnemu punktowi $N_1 = A_2$ podstawy p , uważanemu za element N_1 pierwszego, wzgl. za element A_2 drugiego szeregu, podporządkowane są w ogólności w owych szeregach dwa *różne* od siebie punkty N_2 i A_1 . Zbadajmy teraz własności takich szeregów rzutowych o wspólnej podstawie p , w którychby pewnemu punktowi $N_1 = A_2$ podporządkowany był jeden i ten sam punkt $N_2 = A_1$.

Ponieważ rzutowość dwóch szeregów wyznaczają (ust. 17) trzy pary homologicznych punktów A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 , przeto na wspólnej podstawie p obierzmy (ryc. 30) trzy dowolne punkty A_1 , B_1 i C_1 pierwszego szeregu, oraz takie trzy punkty A_2 , B_2 i C_2 w szeregu drugim, że element $A_2 = B_1$ i punkt $B_2 = A_1$. Dla jednokreślnych szeregów



Ryc. 30.

$$p(A_1, B_1, C_1, \dots) \wedge p(A_2, B_2, C_2, \dots)$$

o wspólnej podstawie p homologiczne punkty: $A_1 = B_2$ i $A_2 = B_1$ odpowiadają sobie w sposób *podwójny* (zamienny) i tworzą *parę zamienną*, t. zn. punktowi $A_1 = B_2$, uważanemu za element pierwszego lub drugiego szeregu, podporządkowany jest w drugim, wzgl. w pierwszym szeregu *jeden i ten sam* punkt $A_2 = B_1$.

Celem zbadania własności tych szeregów, obierzmy w pierwszym szeregu punkt D_1 tak, aby się zjednoczył z elementem C_2 . Dla uważanych szeregów zachodzi (ust. 11) równość dwustosunków:

$$(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2) \text{ czyli } (A_1 B_1 C_1 D_1) = (B_1 A_1 D_1 D_2),$$

a ponieważ (ust. 11) dla każdego dwustosunku zachodzi relacja $(B_1 A_1 D_1 D_2) = (A_1 B_1 D_2 D_1)$, przeto:

$$(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_1 B_1 D_2 D_1) \text{ lub } \frac{\overline{A_1 C_1}}{\overline{B_1 C_1}} : \frac{\overline{A_1 D_1}}{\overline{B_1 D_1}} = \frac{\overline{A_1 D_2}}{\overline{B_1 D_2}} : \frac{\overline{A_1 D_1}}{\overline{B_1 D_1}},$$

$$\text{czyli ostatecznie: } \frac{\overline{A_1 C_1}}{\overline{B_1 C_1}} = \frac{\overline{A_1 D_2}}{\overline{B_1 D_2}}.$$

Z rozważań ust. 9 o równości stosunków podziału wynika jednak, że punkty C_1 i D_2 muszą się zjednoczyć. Wykazaliśmy tedy, że: przyjęcie jednej „pary zamiennnej“ elementów homologicznych $A_1 = B_2$ i $A_2 = B_1$ w dwóch szeregach rzutowych

o wspólnej podstawie p , pociąga za sobą wystąpienie i drugiej „pary zamienniej” punktów homologicznych $C_1 = D_2$ i $C_2 = D_1$ w owych szeregach. Ponieważ jednak punkty C_1 i C_2 stanowią dowolną parę elementów homologicznych, przeto każda para punktów podporządkowanych sobie w owych szeregach rzutowych odpowiada sobie w sposób podwójny, tworząc parę zamienną $X_1 = Y_2$ i $X_2 = Y_1$. A zatem:

Jeżeli w dwóch rzutowych szeregach punktów o wspólnej podstawie jedna para elementów homologicznych jest zamienna, to wówczas każda para homologicznych punktów tych szeregów jest parą zamienną.

W podobny sposób wykazać możemy prawdziwość następujących twierdzeń:

Jeżeli w dwóch rzutowych pękach prostych, o wspólnym wierzchołku i wspólnej płaszczyźnie podstawowej, jedna para elementów homologicznych jest zamienna, to wówczas każda para homologicznych prostych tych pęków jest parą zamienną.

Jeżeli w dwóch rzutowych pękach płaszczyzn o wspólnej osi jedna para elementów homologicznych jest zamienna, to wówczas każda para homologicznych płaszczyzn tych pęków jest parą zamienną.

Poznaliśmy zatem (ust. 7) szczególny przypadek rzutowości, która występuje pomiędzy homologicznymi elementami dwóch jednokreślnych: a) szeregów punktów o wspólnej podstawie p ; b) pęków prostych o wspólnym wierzchołku W i wspólnej płaszczyźnie podstawowej ω ; c) pęków płaszczyzn o wspólnej osi l . Każda para homologicznych: a) punktów A_1 i A_2 , b) prostych a_1 i a_2 , c) płaszczyzn α_1 i α_2 tych utworów rzutowych odpowiada sobie w sposób podwójny (zamienny), tworząc pary zamienne: a) $A_1 = B_2$ i $A_2 = B_1$, b) $a_1 = b_2$ i $a_2 = b_1$, c) $\alpha_1 = \beta_2$ i $\alpha_2 = \beta_1$. Ten szczególny przypadek rzutowości zdefiniujemy jako *rzutowość inwolucyjną*, wzgl. *jednokreślność inwolucyjną* lub wprost jako *inwolucję*.

Powróćmy teraz do szeregów rzutowych

$$p(A_1, B_1, C_1, D_1, \dots) \bar{\wedge} p(A_2, B_2, C_2, D_2, \dots)$$

o wspólnej podstawie p i o zamiennych parach punktów: $A_1 = B_2$ i $A_2 = B_1$, $C_1 = D_2$ i $C_2 = D_1, \dots$, odpowiadających sobie w sposób podwójny. Dla punktów homologicznych $A_1 = B_2$ i $A_2 = B_1$

zbyteczne jest odróżnianie (za pośrednictwem znaczków 1 i 2) punktów, przynależnych do szeregu pierwszego lub do szeregu drugiego; dlatego też wprowadzamy dla tych punktów nowe oznaczenia: A i A' . Na oznaczenie badanych szeregów otrzymamy wówczas symbol

$$p(A, A', C, C', \dots) \overline{\wedge} p(A', A, C', C, \dots),$$

w którym elementy homologiczne A i A' , C i C' , ... oznaczają pary zamienne punktów, odpowiadających sobie w sposób podwójny. Te dwa szeregi rzutowe uważać możemy wprost za jeden szereg, złożony z nieskończenie wielu par punktów A i A' , C i C' , ... tego rodzaju, że każdy punkt podstawy p należy do jednej i tylko jednej pary. Taki szereg punktów o podstawie p nazywać będziemy szeregiem inwolucyjnym i oznaczać będziemy symbolem:

$$p(AA', CC', \dots, XX', \dots).$$

Omawiane szeregi punktów $p(A, A', C, C', \dots) \overline{\wedge} p(A', A, C', C, \dots)$ rzucimy z dowolnego punktu W , który nie przynależy do podstawy p , to (ust. 3 i 7) z łańcucha utworów:

$$W(a, a', c, c', \dots) \overline{\wedge} p(A, A', C, C', \dots) \overline{\wedge} p(A', A, C', C, \dots) \overline{\wedge} W(a', a, c', c, \dots)$$

wynika rzutowość pęków prostych

$$W(a, a', c, c', \dots) \overline{\wedge} W(a', a, c', c, \dots)$$

o wspólnym wierzchołku W i wspólnej płaszczyźnie podstawowej $\omega = Wp$. Proste homologiczne $a = WA$ i $a' = WA'$, $c = WC$ i $c' = WC'$, ... tych pęków odpowiadają sobie w sposób podwójny (zamienny). Te dwa pęki rzutowe uważać możemy wprost za jeden pęk, złożony z nieskończenie wielu par prostych a i a' , c i c' , ... tego rodzaju, że każda prosta pędu (W) należy do jednej i tylko jednej pary. Taki pęk prostych o wierzchołku W nazywamy inwolucyjnym pękiem prostych i oznaczamy symbolem:

$$W(aa', cc', \dots, xx', \dots).$$

Powyższą zależność ująć możemy krótko w sposób następujący: Skoro szereg inwolucyjny $p(AA', CC', \dots)$ rzucimy z punktu W (nie leżącego na podstawie p), to otrzymamy wówczas pęk inwolucyjny $W(aa', cc', \dots)$. Utwory takie nazywać będziemy (por. ust. 6) perspektywicznymi, a związek ten wyrazimy za pomocą symbolu:

$$p(AA', CC', \dots) \overline{\wedge} W(aa', cc', \dots).$$

Jeżeli zamiast punktu W , weźmiemy pod uwagę prostą w , skośną względem podstawy p , i z owej prostej rzucimy szereg inwolucyjny, to otrzymamy inwolucyjny pęk płaszczyzn o osi w

$$w(aa', \gamma\gamma', \dots) \overline{\wedge} p(AA', CC', \dots).$$

Jeżeli prosta w przechodzi przez wierzchołek W , to ów inwolucyjny pęk płaszczyzn spełnia też warunek perspektywiczności względem pęku prostych, a mianowicie:

$$w(aa', \gamma\gamma', \dots) \overline{\wedge} W(aa', cc', \dots).$$

Z dotychczasowych rozważań naszych wynikają następujące twierdzenia:

Dwa rzutowe szeregi punktów o wspólnej podstawie, które posiadają jedną parę zamienną punktów homologicznych, tworzą szereg inwolucyjny.

Dwa rzutowe pęki prostych, o wspólnym wierzchołku i wspólnej płaszczyźnie podstawowej, które posiadają jedną parę zamienną prostych homologicznych, tworzą inwolucyjny pęk prostych.

Dwa rzutowe pęki płaszczyzn o wspólnej osi, które posiadają jedną parę zamienną płaszczyzn homologicznych, tworzą inwolucyjny pęk płaszczyzn.

Ponieważ dwa szeregi punktów

$$p(A, A', B, B', \dots) \overline{\wedge} p(A', A, B', B, \dots)$$

tworzą szereg inwolucyjny, a rzutowość tych dwóch szeregów o wspólnej podstawie p wyznaczona jest (ust. 17) przez trzy pary homologicznych punktów: A i A' , A' i A , B i B' , — przeto: dwie różne od siebie pary zamienne A i A' , oraz B i B' określają szereg inwolucyjny. To samo odnosi się oczywiście do inwolucyjnego pęku prostych (wzgl. płaszczyzn). Dochodzimy zatem do podstawowego twierdzenia:

W utworze zasadniczym gatunku 1-go istnieje jedna i tylko jedna rzutowość inwolucyjna, do której należą dwie dane (i różne od siebie) pary elementów homologicznych.

24. Własności szeregów inwolucyjnych. Z uwagi na to, że szereg inwolucyjny punktów jest tylko szczególnym przypadkiem dwóch jednokreślonych szeregów o wspólnej podstawie,

przeto z rozważań ust. 15 wynika bezpośrednio, że: szereg inwolucyjny posiada dwa „punkty zjednoczone“ $E = E'$ i $F = F'$. Owe punkty nazywać będziemy punktami *podwójnymi* szeregu inwolucyjnego.

Szereg inwolucyjny punktów posiada zawsze dwa (rzeczywiste lub urojone sprzężone) punkty podwójne.

Inwolucyjne szeregi punktów nazywamy: hiperbolicznymi, parabolicznymi lub eliptycznymi zależnie od tego, czy (ust. 15) one posiadają: a) dwa rzeczywiste i różne od siebie punkty podwójne $E = E'$ i $F = F'$; b) dwa rzeczywiste i nakrywające się ze sobą punkty podwójne; c) dwa urojone sprzężone punkty podwójne. Szereg inwolucyjny punktów

$$p(AA', BB', \dots, SS_\infty, \dots)$$

o podstawie właściwej p posiada nieskończenie wiele par homologicznych punktów: A i A' , B i B' , ..., S i S_∞ , ... tego rodzaju, że każdy punkt podstawy p należy (ust. 23) do jednej i tylko jednej pary. Punkt S , który wraz z punktem niewłaściwym S_∞ prostej p tworzy parę elementów homologicznych, nazywamy *środkiem* szeregu inwolucyjnego.

Ponieważ uważany szereg inwolucyjny jest szczególnym przypadkiem dwóch rzutowych szeregów

$$p(A, A', B, B', \dots, S, S_\infty, \dots) \bar{\wedge} p(A', A, B', B, \dots, S_\infty, S, \dots)$$

o wspólnej podstawie p , przeto w *środku* S (ust. 14) *zjednoczyły się obydwie punkty graniczne* tych szeregów, a ich „potęga“ wyraża się iloczynem odcinków:

$$\overline{AS} \cdot \overline{A'S} = \overline{BS} \cdot \overline{B'S} = \dots = c_0.$$

Odcinki (o długościach skończonych) $\overline{AS}$ i $\overline{A'S}$ wyznaczają odległości punktów homologicznych A i A' od właściwego środka S szeregu inwolucyjnego. A zatem:

Jeżeli środek szeregu inwolucyjnego jest punktem właściwym, to wówczas iloczyn odległości dwóch punktów homologicznych tego szeregu od jego środka jest liczbą stałą.

Powyższy iloczyn nazywamy *potęgą* (lub *cechą*) uważanego szeregu inwolucyjnego.

Skoro punkty podwójne $E = E'$ i $F = F'$ szeregu inwolucyjnego oznaczymy przez E_0 i F_0 , to dla potęgi otrzymamy relację następującą:

$$\overline{E_0S}^2 = \overline{F_0S}^2 = c_0$$

Zależnie od tego, czy potęga c_0 jest liczbą: *a)* dodatnią, *b)* równą zeru, *c)* ujemną, to uzyskane równanie stopnia drugiego posiada: *a)* dwa pierwiastki rzeczywiste i różne od siebie, *b)* dwa pierwiastki równe zeru, *c)* dwa pierwiastki urojone sprzężone. W pierwszym przypadku: szereg inwolucyjny hiperboliczny posiada dwa rzeczywiste punkty podwójne E_0 i F_0 symetrycznie ułożone względem środka S , gdyż

$$\overline{E_0S} = +\sqrt{c_0} \text{ i } \overline{F_0S} = -\sqrt{c_0}.$$

W przypadku *b)* szereg inwolucyjny paraboliczny posiada dwa rzeczywiste punkty podwójne E_0 i F_0 , nakrywające się ze środkiem S . Wreszcie w przypadku *c)* szereg inwolucyjny eliptyczny posiada dwa punkty podwójne urojone sprzężone.

Dla szeregu inwolucyjnego parabolicznego potęga c_0 wyraża się wzorem

$$c_0 = \overline{AS} \cdot \overline{A'S} = \overline{BS} \cdot \overline{B'S} = \dots = \overline{E_0S}^2 = \overline{F_0S}^2 = 0.$$

Dla punktów $A, B, \dots$ szeregu parabolicznego, różnych od środka S , ich homologiczne punkty $A', B', \dots$ — jak to wynika z powyższego równania — muszą się zjednoczyć ze środkiem S .

Dla szeregu inwolucyjnego hiperbolicznego potęga $c_0 = \overline{AS} \cdot \overline{A'S}$ jest liczbą dodatnią, przeto odcinki (o długościach skończonych) $\overline{AS}$ i $\overline{A'S}$ posiadać muszą (ust. 9) zgodne znaki (+ lub —); wnosimy stąd, że punkt S leży „zewnątrz“ odcinka (o długości skończonej) $\overline{AA'}$.

Dla szeregu inwolucyjnego eliptycznego potęga $c_0 = \overline{AS} \cdot \overline{A'S}$ jest liczbą ujemną, przeto odcinki $\overline{AS}$ i $\overline{A'S}$ posiadać muszą znaki przeciwne; wnosimy stąd, że punkt S leży „wewnątrz“ odcinka $\overline{AA'}$.

Z relacji $c_0 = \overline{AS} \cdot \overline{A'S} = \overline{BS} \cdot \overline{B'S}$ wynika, że:

środek szeregu inwolucyjnego hiperbolicznego leży *zewnątrz* każdego odcinka (o długości skończonej), którego punktami końcowymi są dwa homologiczne punkty tego szeregu.

środek szeregu inwolucyjnego eliptycznego leży *wewnątrz* każdego odcinka (o długości skończonej), którego punktami końcowymi są dwa homologiczne punkty tego szeregu.

Powróćmy do ogólnego szeregu inwolucyjnego

$$p(AA', BB', \dots, SS_\infty, \dots)$$

o (rzeczywistych lub urojonych sprzężonych) punktach podwój-

nych $E_0 = E = E'$ i $F_0 = F = F'$. Ponieważ szereg inwolucyjny jest szczególnym przypadkiem dwóch jednokreślnych szeregów punktów o wspólnej podstawie p , przeto do niego stosuje się twierdzenie, podane na końcu ust. 15. Dwustosunek $(E_0 F_0 A A')$ jest mianowicie liczbą stałą, a ponieważ punkty graniczne Z_1 i G_2 schodzą się ze środkiem S , więc odcinek $\overline{Z_1 G_2} = 0$, a wartość owego dwustosunku (ust. 15) równa się:

$$(E_0 F_0 A A') = \frac{\overline{Z_1 G_2} - \sqrt{\overline{Z_1 G_2}^2 + 4c_0}}{\overline{Z_1 G_2} + \sqrt{\overline{Z_1 G_2}^2 + 4c_0}} = \frac{-2\sqrt{c_0}}{+2\sqrt{c_0}} = \frac{-\sqrt{c_0}}{+\sqrt{c_0}}.$$

Dla szeregu inwolucyjnego hiperbolicznego lub eliptycznego jego potęgą jest liczbą $c_0 > 0$ lub $c_0 < 0$, a dwustosunek $(E_0 F_0 A A') = -1$. Dla szeregu inwolucyjnego parabolicznego potęgą $c_0 = 0$, a (na mocy ostatniego twierdzenia ust. 12) dwustosunek $(E_0 F_0 A A') = -1$ również i w położeniu granicznym, gdy punkty podwójne E_0 i F_0 zjednoczyły się z punktem A (wzgl. A'). A zatem:

Dwa (rzeczywiste lub urojone sprzężone) punkty podwójne E_0 i F_0 , oraz dowolna para punktów homologicznych A i A' szeregu inwolucyjnego tworzą grupę harmoniczną o stosunku $(E_0 F_0 A A') = -1$.

Środek S szeregu inwolucyjnego hiperbolicznego i jego punkt niewłaściwy S_∞ , oraz punkty podwójne E_0 i F_0 tworzą grupę harmoniczną o stosunku $(E_0 F_0 S S_\infty) = -1$. Z ust. 12-go wynika, że: punkty E_0 i F_0 są symetrycznie ułożone względem środka S .

Korzystając z powyższego twierdzenia, rozwiązać możemy następujące

Zadanie 1: Dane są dwa rzeczywiste punkty podwójne E_0 i F_0 szeregu inwolucyjnego; należy uzupełnić ów szereg hiperboliczny.

Rozwiązanie: Celem uzupełnienia szeregu inwolucyjnego, musimy skonstruować pary homologicznych punktów: A i A' , B i B' , ... tego szeregu. Ponieważ dwustosunek

$$(E_0 F_0 A A') = -1,$$

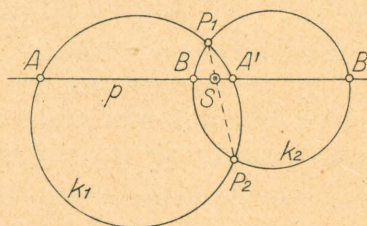
przeto dla danego dowolnego punktu A skonstruujemy punkt A' z nim harmonicznie sprzężony w sposób, omówiony w ust. 12 i ust. 13.

Zadanie 2: Dane są punkt podwójny E_0 , oraz para punktów homologicznych A i A' szeregu inwolucyjnego hiperbolicznego. Skonstruować należy środek S tego szeregu.

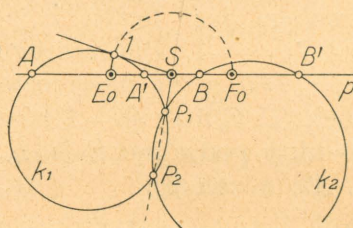
Rozwiązanie: Z warunku $(E_0 F_0 A A') = -1$ wyznaczmy drugi punkt podwójny F_0 szeregu, a następnie środek S odcinka (o długości skończonej) $\overline{E_0 F_0}$. Punkt S rozwiązuje zadanie.

Zadanie 3: Dane są dwie pary punktów homologicznych AA' i BB' szeregu inwolucyjnego. Należy skonstruować środek S oraz dalsze pary homologicznych punktów tego szeregu.

Rozwiązanie: Na cięciwach AA' i BB' zakreślamy koła k_1 i k_2 , przecinające się (ryc. 31 i 32) w dwóch punktach rzeczywistych P_1 i P_2 . Wiadomo nam z geometrii elementarnej, że „oś pierwiastna“ (potęgowa) $P_1 P_2$ jest miejscem geometrycznym



Ryc. 31.



Ryc. 32.

punktów, posiadających równe „potęgi“ względem obydwu kół. Dla punktu S , przecięcia się prostej $P_1 P_2$ z podstawą p szeregu inwolucyjnego, owe potęgi wyrażą się zapomocą wzoru:

$$\overline{SA} \cdot \overline{SA'} = \overline{SB} \cdot \overline{SB'}.$$

Ponieważ wzór ten jest identyczny z poprzednio wypisanym wzorem dla „potęgi“ szeregu inwolucyjnego, przeto punkt S jest szukany środkiem szeregu inwolucyjnego.

Z punktu S wykreślmy (ryc. 32) styczną $S1$ do koła k_1 (lub k_2) i odłóżmy na podstawie p odcinki $\overline{SE_0} = \overline{F_0 S} = \overline{S1}$. Użyte punkty E_0 i F_0 są punktami podwójnymi szeregu hiperbolicznego, gdyż spełniona jest relacja:

$$\overline{SE_0}^2 = \overline{F_0 S}^2 = \overline{S1}^2 = \overline{SA} \cdot \overline{SA'} = \overline{SB} \cdot \overline{SB'} = c_0.$$

Skoro na cięciwie $\overline{P_1 P_2}$ zakreślmy dowolne koło k , to punkty przecięcia się tego koła z podstawą p tworzą parę elementów homologicznych X i X' uważanego szeregu inwolucyjnego.

Na prostej właściwej p niechaj dany będzie taki inwolucyjny szereg punktów, dla którego punkt niewłaściwy P_∞ podstawy p jest „środkiem“ tego szeregu. Z definicji środka szeregu inwolucyjnego wynika bezpośrednio, że w punkcie P_∞ zjed-

noczyły się dwa homologiczne punkty P_∞ i P''_∞ szeregu inwolucyjnego

$$p(BB'', CC'', \dots)$$

czyli innemi słowy: punkt P_∞ jest jednym punktem podwójnym uważanego szeregu. Ponieważ drugi punkt podwójny $A = A''$ wraz z dowolną parą elementów homologicznych B i B'' tego szeregu tworzy grupę harmoniczną o stosunku

$$(P_\infty A B B'') = -1,$$

przeto (ust. 12) ów punkt $A = A''$ połowi odcinek (o długości skończonej) $\overline{BB''}$. Wnosimy stąd, że: Punkty homologiczne B i B'' , C i C'' , ... szeregu inwolucyjnego hiperbolicznego, dla którego środek i jeden punkt podwójny zjednoczyły się z punktem niewłaściwym P_∞ , — są symetrycznie ułożone względem drugiego punktu podwójnego $A = A''$. Z rozważań ust. 20 wiadomo nam, że powyższe własności posiadają (ryc. 25) dwa „odwrotnie przystające” szeregi punktów

$$p(A, B, C, \dots, P_\infty, \dots) \cong p(A'' = A, B'', C'', \dots, P''_\infty = P_\infty, \dots)$$

o podstawie właściwej p . A zatem:

Inwolucyjny szereg hiperboliczny, o podstawie właściwej, którego jeden punkt podwójny i środek zjednoczyły się z punktem niewłaściwym, uważać można za dwa odwrotnie przystające szeregi punktów.

25. Własności pęków inwolucyjnych. Pęk inwolucyjny prostych $W(aa', bb', \dots)$ jest przykładem dwóch rzutowych pęków prostych

$$W(a, a', b, \dots) \bar{\wedge} W(a', a, b', \dots)$$

o wspólnym wierzchołku W i wspólnej płaszczyźnie podstawowej. Owe pęki prostych uważajmy za układy sztywne. Pierwszy z tych pęków (ryc. 33) przesuniemy w nowe położenie $W_1(a_1 = a, a'_1, b_1, \dots)$ tak, że wierzchołek W zajmie nowe położenie W_1 na prostej $a = a_1$, a pozostałe proste $a', b, \dots$ zajmą odpow. położenia $a'_1 // a', b_1 // b, \dots$. Następnie drugi pęk obróćmy około wierzchołka W o taki kąt ε , aż prosta a' zjednoczy się z prostą $a'_0 = a = a_1$; pozostałe proste $a, b', \dots$ pęku (W) zajmą wówczas odpow. nowe położenia $a_0, b'_0, \dots$. Z łańcucha utworów:

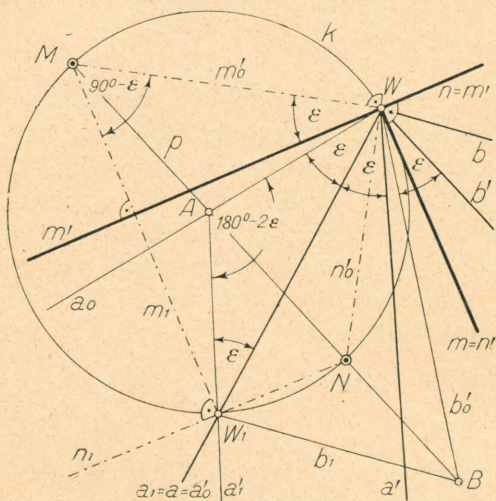
$$W_1(a_1, a'_1, b_1, \dots) \cong W(a, a', b, \dots) \bar{\wedge} W(a', a, b', \dots) \cong W(a'_0, a_0, b'_0, \dots)$$

oraz z rozważań ust. 20 wynika rzutowość końcowych ogniw tego łańcucha. Ponieważ nadto prosta $W_1 W = a_1 = a'_0$ jest ele-

mentem zjednoczonym tych pęków, przeto (ust. 18) owe pęki są perspektywiczne :

$$W_1(a_1, a'_1, b_1, \dots) \overline{\wedge} W(a'_0, a_0, b'_0, \dots)$$

a homologiczne proste przecinają się w punktach $A = a'_1 a_0$, $B = b_1 b'_0, \dots$ prostej p . Ponieważ proste $a'_1 // a'$ i a_0 nachylone



Ryc. 33.

są do elementu a pod kątem ϵ , przeto punkt $A = a'_1 a_0$ leży na symetralnej odcinka WW_1 . Z punktu A jako środka zakreślmy koło k o promieniu $AW = AW_1$ i wyznaczmy punkty N i M przecięcia się tego koła z prostą $p = AB$. Prostym wzajemnie prostopadłym $n_1 = W_1N$ i $m_1 = W_1M$ pęku (W_1) podporządkowane są w pęku $W(a'_0, a_0, \dots)$ również dwie proste do siebie prostopadłe $n'_0 = WN$ i $m'_0 = WM$. Z trójkątą równoramienną (W_1WA) o kątach $AW_1W = W_1WA = \sphericalangle \epsilon$ wynika jednak, że kąt $W_1AW = \sphericalangle (180^\circ - 2\epsilon)$. Ponieważ ten ostatni kąt jest dla koła k „kątem środkowym“, wspierającym się na cięciwie W_1W , przeto „kątem obwodowym“ $W_1MW = \sphericalangle (90^\circ - \epsilon)$. Skoro pęk prostych $W(a'_0, a_0, b'_0, \dots)$ — zapomocą wstecznego obrotu o kąt ϵ — sprowadzimy w początkowe położenie $W(a', a, b', \dots)$, to wówczas element $m'_0 = WM$ zajmie nowe położenie $m' \perp m_1$, a prosta $n'_0 = WN$ położenie $n' // m_1$. Przesuńmy wreszcie pęk $W_1(a_1, a'_1, b_1, \dots)$ w początkowe położenie $W(a, a', b, \dots)$, to proste $m_1 \perp n_1$ zajmą nowe położenia: $m // m_1$ i $n // n_1$ czyli zjednoczą się proste $m = n'$ i $n = m'$. Jednokreślne pęki prostych

$$W(a, a', b, \dots, m \perp n, \dots) \overline{\wedge} W(a', a, b', \dots, m' \perp n', \dots)$$

posiadają zatem (ust. 21) takie dwie homologiczne pary prostych prostopadłych $m \perp n$ i $m' \perp n'$, że elementy m i n' nakrywają się na prostej $m = n'$, a pozostałe dwa elementy n i m' na prostej $n = m'$. Z rozważań naszych wynika, że inwolucyjny pęk prostych

$$W(aa', bb', \dots, n \perp n', \dots)$$

posiada jedną i tylko jedną parę homologicznych prostych wzajemnie prostopadłych $n \perp n'$.

W wierzchołku W wykreślimy prostą w , prostopadłą do płaszczyzny podstawowej inwolucyjnego pęku prostych. Rzucając ów pęk z prostej w , otrzymamy (ust. 23) inwolucyjny pęk płaszczyzn

$$w(\alpha\alpha', \beta\beta', \dots, v \perp v', \dots)$$

o elementach: $\alpha = wa$, $\alpha' = wa'$, $\beta = wb$, ..., przyczem homologiczne płaszczyzny $v = wn$ i $v' = wn'$ są wzajemnie prostopadłe.

Proste homologiczne $n \perp n'$ i płaszczyzny homologiczne $v \perp v'$ nazywać będziemy elementami *normalnemi* uważanych pęków inwolucyjnych. Dochodzimy zatem do twierdzeń:

Każdy inwolucyjny pęk prostych (wzgl. pęk płaszczyzn) posiada zawsze przynajmniej jedną rzeczywistą parę homologicznych prostych normalnych (wzgl. płaszczyzn normalnych).

Uwaga: W ust. 47 podamy inny dowód powyższego twierdzenia, oraz zapoznamy się tam z takimi pękami inwolucyjnymi, które posiadać będą dwie pary homologicznych elementów normalnych.

Dla (wypisanych powyżej) jednokreślnych pęków prostych o wspólnym wierzchołku W ich „potęga“ wyraża się (ust. 21) iloczynem: $\operatorname{tg} \overline{an} \cdot \operatorname{tg} \overline{a'n'}$. Ponieważ owe pęki tworzą inwolucyjny pęk prostych $W(aa', bb', \dots, n \perp n', \dots)$ o parze prostych normalnych $n = m'$ i $n' = m$, przeto iloczyn tangensów (stycznych trygonometrycznych)

$$\operatorname{tg} \overline{an} \cdot \operatorname{tg} \overline{a'n} = \operatorname{tg} \overline{bn} \cdot \operatorname{tg} \overline{b'n} = \dots$$

jest liczbą stałą i zwie się¹⁾ *potęgą* inwolucyjnego pęku prostych. Podobnie dla inwolucyjnego pęku płaszczyzn $w(\alpha\alpha', \beta\beta', \dots, v \perp v', \dots)$ jego „potęga“ wyraża się iloczynem tangensów

$$\operatorname{tg} \overline{av} \cdot \operatorname{tg} \overline{a'v} = \operatorname{tg} \overline{\beta v} \cdot \operatorname{tg} \overline{\beta'v} = \dots$$

gdzie $\overline{av}$, $\overline{\beta v}$, ... są kątami nachylenia płaszczyzn: α i v , β i v , ...

Teraz wykazać możemy (w sposób omówiony w ust. 22), że: inwolucyjny pęk prostych (wzgl. płaszczyzn) posiada dwie proste zjednoczone $e = e'$ i $f = f'$ (wzgl. płaszczyzny zjednoczone $\varepsilon = \varepsilon'$ i $\varphi = \varphi'$). Owe elementy nazywać będziemy prostemi *podwójnemi* i płaszczyznami *podwójnemi* pęku inwolucyjnego.

¹⁾ Porównaj *R. Sturm*, l. c. I. str. 24.

Skoro przez e_0 oznaczymy prostą podwójną $e = e'$ pęku inwolucyjnego, to dla jego potęgi c_0 otrzymamy relację

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \overline{an} \cdot \operatorname{tg} \overline{a'n} &= \operatorname{tg} \overline{bn} \cdot \operatorname{tg} \overline{b'n} = \dots = \operatorname{tg} \overline{en} \cdot \operatorname{tg} \overline{e'n} = \\ &= \operatorname{tg} \overline{e_0n} \cdot \operatorname{tg} \overline{e_0n} = \operatorname{tg}^2 \overline{e_0n} = c_0. \end{aligned}$$

Z równania drugiego stopnia:

$$\operatorname{tg}^2 \overline{e_0n} = c_0$$

o jednej zmiennej $\operatorname{tg} \overline{e_0n}$, gdzie $\overline{e_0n}$ oznacza jeden z czterech kątów pomiędzy nieznaną prostą podwójną e_0 a daną prostą n , wynika relacja

$$\operatorname{tg} \overline{e_0n} = \pm \sqrt{c_0}.$$

Zależnie od tego, czy potęga c_0 jest liczbą: a) większą od zera, b) równą zeru, c) czy też mniejszą od zera — omawiane równanie drugiego stopnia posiada: a) dwa pierwiastki rzeczywiste i różne od siebie; b) dwa pierwiastki rzeczywiste i równe sobie; c) dwa pierwiastki zespolone sprzężone. Każdemu pierwiastkowi podporządkowana jest (porównaj ust. 22) jedna i tylko jedna prosta podwójna e_0 w pęku inwolucyjnym.

Zupełnie analogiczne rozważania przeprowadzić możemy dla inwolucyjnego pęku płaszczyzn. A zatem:

Inwolucyjny pęk prostych posiada zawsze dwie (rzeczywiste lub urojone sprzężone) proste podwójne.

Inwolucyjny pęk płaszczyzn posiada zawsze dwie (rzeczywiste lub urojone sprzężone) płaszczyzny podwójne.

Pęki inwolucyjne nazywamy: *hiperbolicznymi*, *parabolicznymi*, wzgl. *eliptycznymi* zależnie od tego, czy owe pęki posiadają: a) dwa rzeczywiste i różne od siebie elementy podwójne; b) dwa rzeczywiste i nakrywające się ze sobą elementy podwójne; c) dwa elementy podwójne urojone sprzężone.

Ponieważ inwolucyjny pęk prostych jest szczególnym przypadkiem dwóch jednokreślnych pęków o wspólnym wierzchołku, przeto do niego stosuje się twierdzenie, podane na końcu ust. 22. Dwustosunek $(e_0 f_0 a a')$ — dwóch prostych podwójnych e_0 , f_0 i dowolnej pary homologicznych prostych a , a' owego pęku inwolucyjnego — jest mianowicie liczbą stałą. Korzystając z potęgi $c_0 = \operatorname{tg} \overline{an} \cdot \operatorname{tg} \overline{a'n}$ uważanego pęku inwolucyjnego, oraz z wartości: $\operatorname{tg} \overline{e_0n} = +\sqrt{c_0}$ i $\operatorname{tg} \overline{f_0n} = -\sqrt{c_0}$, otrzymamy dla dwustosunku:

$$\begin{aligned}
 (e_0 f_0 a a') &= \frac{\sin \overline{e_0 a}}{\sin \overline{f_0 a}} : \frac{\sin \overline{e_0 a'}}{\sin \overline{f_0 a'}} = \frac{\sin (\overline{e_0 n} - \overline{a n})}{\sin (\overline{f_0 n} - \overline{a n})} \cdot \frac{\sin (\overline{f_0 n} - \overline{a' n})}{\sin (\overline{e_0 n} - \overline{a' n})} = \\
 &= \frac{(\sin \overline{e_0 n} \cdot \cos \overline{a n} - \cos \overline{e_0 n} \cdot \sin \overline{a n}) \cdot (\sin \overline{f_0 n} \cdot \cos \overline{a' n} - \cos \overline{f_0 n} \cdot \sin \overline{a' n})}{(\sin \overline{f_0 n} \cdot \cos \overline{a n} - \cos \overline{f_0 n} \cdot \sin \overline{a n}) \cdot (\sin \overline{e_0 n} \cdot \cos \overline{a' n} - \cos \overline{e_0 n} \cdot \sin \overline{a' n})}.
 \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu równości:

$$\sin \psi = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}}, \quad \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}}$$

otrzymamy ostatecznie zależność

$$\begin{aligned}
 (e_0 f_0 a a') &= \frac{(\operatorname{tg} \overline{e_0 n} - \operatorname{tg} \overline{a n}) \cdot (\operatorname{tg} \overline{f_0 n} - \operatorname{tg} \overline{a' n})}{(\operatorname{tg} \overline{f_0 n} - \operatorname{tg} \overline{a n}) \cdot (\operatorname{tg} \overline{e_0 n} - \operatorname{tg} \overline{a' n})} = \\
 &= \frac{(\sqrt{c_0} - \operatorname{tg} \overline{a n}) \cdot (-\sqrt{c_0} - \operatorname{tg} \overline{a' n})}{(-\sqrt{c_0} - \operatorname{tg} \overline{a n}) \cdot (\sqrt{c_0} - \operatorname{tg} \overline{a' n})} = \\
 &= \frac{-c_0 + \sqrt{c_0}(\operatorname{tg} \overline{a n} - \operatorname{tg} \overline{a' n}) + \operatorname{tg} \overline{a n} \cdot \operatorname{tg} \overline{a' n}}{-c_0 - \sqrt{c_0}(\operatorname{tg} \overline{a n} - \operatorname{tg} \overline{a' n}) + \operatorname{tg} \overline{a n} \cdot \operatorname{tg} \overline{a' n}} = \\
 &= \frac{-c_0 + \sqrt{c_0}(\operatorname{tg} \overline{a n} - \operatorname{tg} \overline{a' n}) + c_0}{-c_0 - \sqrt{c_0}(\operatorname{tg} \overline{a n} - \operatorname{tg} \overline{a' n}) + c_0} = \frac{+\sqrt{c_0}}{-\sqrt{c_0}}.
 \end{aligned}$$

Dla pęku inwolucyjnego hiperbolicznego lub eliptycznego, t. zn. dla potęgi $c_0 > 0$ lub $c_0 < 0$, dwustosunek $(e_0 f_0 a a') = -1$. Dla pęku inwolucyjnego parabolicznego potęgą $c_0 = 0$, a (na mocy ostatniego twierdzenia ust. 12) dwustosunek $(e_0 f_0 a a') = -1$ również i w położeniu granicznym, gdy proste podwójne e_0 i f_0 zjednoczyły się z elementem a (wzgl. a'). Korzystając z tych rozważań i analogicznych dla inwolucyjnego pęku płaszczyzn, wypowiedzieć możemy twierdzenia:

Dwie (rzeczywiste lub urojone sprzężone) proste podwójne e_0 i f_0 , oraz dowolna para prostych homologicznych a i a' pęku inwolucyjnego tworzą grupę harmoniczną o stosunku

$$(e_0 f_0 a a') = -1.$$

Dwie (rzeczywiste lub urojone sprzężone) płaszczyzny podwójne ε_0 i φ_0 , oraz dowolna para płaszczyzn homologicznych α i α' pęku inwolucyjnego tworzą grupę harmoniczną o stosunku

$$(\varepsilon_0 \varphi_0 \alpha \alpha') = -1.$$

Zadanie 1: Dane są dwie rzeczywiste proste podwójne e_0 i f_0 pęku inwolucyjnego hiperbolicznego; należy uzupełnić ów pęk.

Rozwiązanie 1: Celem uzupełnienia pęku inwolucyjnego, musimy skonstruować pary homologicznych prostych: $a i a', b i b', \dots$ tego pęku. Ponieważ dwustosunek $(e_0 f_0 a a') = -1$, przeto w uważanym pęku przyjmiemy dowolną prostą a i wyznaczymy — korzystając (ust. 13) z własności czworokąta zupełnego lub czworoboku zupełnego — taką prostą a' , któraby była harmonicznie sprzężona z elementem a .

Rozwiązanie 2: Dany pęk inwolucyjny przetnijmy dowolną prostą p , nie przechodzącą przez jego wierzchołek W , to otrzymamy na owej prostej $\bar{p}$ (ust. 23) szereg inwolucyjny o punktach podwójnych $E_0 = e_0 p$ i $F_0 = f_0 p$. Skoro uzupełnimy ten szereg (ust. 24 zad. 1) i jego homologiczne punkty A i A' połączymy z wierzchołkiem W , to otrzymamy parę homologicznych prostych $a = WA$ i $a' = WA'$ pęku inwolucyjnego.

Zadanie 2: Należy uzupełnić pęk inwolucyjny prostych, skoro dane są dwie pary homologicznych elementów a, a' i b, b' tego pęku.

Rozwiązanie: Prosta p , nie przechodząca przez wierzchołek W , przetnie pęk inwolucyjny $W(aa', bb', \dots)$ w szeregu inwolucyjnym $p(AA', BB', \dots)$. W omówiony w ust. 24 sposób (zad. 3) uzupełnimy ów szereg, a przez jego homologiczne punkty X i X' poprowadzimy proste $x = WX$ i $x' = WX'$. Elementy x i x' są oczywiście homologicznymi prostymi pęku inwolucyjnego (W).

Uwaga: Inne sposoby uzupełniania szeregów i pęków inwolucyjnych poznamy w ust. 44.

Dwie proste prostopadłe e_0 i f_0 , leżące na płaszczyźnie ω i przecinające się w punkcie W , uważajmy za elementy podwójne inwolucyjnego pęku prostych

$$W(aa', bb', \dots, e_0, f_0, \dots)_\omega.$$

Ponieważ dwustosunek $(e_0 f_0 a a') = -1$, a nadto $e_0 \perp f_0$, przeto (ust. 10 i 12) każde dwie proste homologiczne a i a' są symetrycznie ułożone względem prostych podwójnych e_0 i f_0 .

W wierzchołku W poprowadźmy prostą w prostopadłą do płaszczyzny ω i skonstruujmy inwolucyjny pęk płaszczyzn

$$w(\alpha\alpha', \beta\beta', \dots, \varepsilon_0, \varphi_0, \dots) \overline{\wedge} W(aa', bb', \dots, e_0, f_0, \dots).$$

Płaszczyzny podwójne ε_0 i φ_0 tego pęku są wzajemnie prostopadłe, a każda jego para płaszczyzn homologicznych α i α' jest symetrycznie ułożona względem ε_0 i φ_0 . — Z rozważań

ust. 20 wiadomo nam, że powyższą własność posiadają dwa „odwrotnie przystające“ pęki płaszczyzn, wzgl. prostych. A zatem:

Inwolucyjny pęk hiperboliczny, o wierzchołku właściwym, którego proste podwójne są wzajemnie prostopadłe, uważać można za dwa odwrotnie przystające pęki prostych.

Inwolucyjny pęk hiperboliczny, o osi właściwej, którego płaszczyzny podwójne są wzajemnie prostopadłe, uważać można za dwa odwrotnie przystające pęki płaszczyzn.

ROZDZIAŁ III.

Stożkowe.

26. Utwory rzutowych pęków prostych i szeregów punktów. Na dowolnej płaszczyźnie właściwej ω obierzmy dwa rzutowe

pęki prostych

$$P_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \omega \bar{\wedge} P_2(a_2, b_2, c_2, \dots) \omega$$

których rzutowość wyznacza ją (ryc. 34) trzy pary homologicznych prostych: a_1 i a_2 , b_1 i b_2 , c_1 i c_2 . Uzupełniając owe pęki, skonstruować możemy (ust. 19) dalsze pary podporządkowanych sobie prostych: d_1 i $d_2, \dots$. Jeżeli prosta a_1 pędu (P_1) obracać się będzie w stałym kierunku około wierzchołka P_1 i nakrywać się będzie kolejno z każdą prostą $b_1, c_1, d_1, \dots$ pędu (P_1), to wówczas (ust. 8) homologiczna prosta a_2 pędu (P_2) obracać się będzie też w stałym kierunku około wierzchołka P_2 , nakrywając się kolejno z każdą prostą $b_2, c_2, d_2, \dots$ pędu (P_2). Równocześnie punkt $A = a_1 a_2$ — przecięcia się homologicznych prostych a_1 i a_2 uważanych pęków rzutowych — poruszać się będzie w płaszczyźnie ω

szeregi punktów

$$p_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \omega \bar{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, \dots) \omega$$

których rzutowość wyznacza ją (ryc. 35) trzy pary homologicznych punktów: A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 . Uzupełniając owe szeregi, skonstruować możemy (ust. 19) dalsze pary podporządkowanych sobie punktów: D_1 i $D_2, \dots$. Jeżeli punkt A_1 szeregu (p_1) poruszać się będzie w stałym kierunku po podstawie p_1 i nakrywać się będzie kolejno z każdym punktem $B_1, C_1, D_1, \dots$ szeregu (p_1), to wówczas (ust. 8) homologiczny punkt A_2 szeregu (p_2) poruszać się będzie też w stałym kierunku po podstawie p_2 , nakrywając się kolejno z każdym punktem $B_2, C_2, D_2, \dots$ szeregu (p_2). Równocześnie prosta $a = A_1 A_2$ — łącząca homologiczne punkty A_1 i A_2 uważanych szeregów rzutowych — poruszać się będzie w płaszczyźnie ω i nakry-

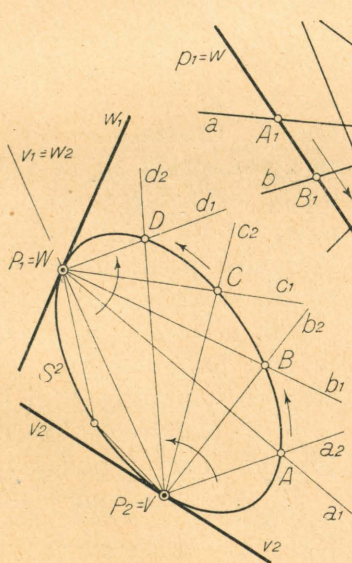
i nakrywać się będzie kolejno z każdym punktem: $B = b_1 b_2$, $C = c_1 c_2$, $D = d_1 d_2, \dots$ przecięcia się poszczególnych par homologicznych prostych pęków $(P_1) \wedge (P_2)$.

Za pośrednictwem dwóch jednokreślnych pęków prostych, wzgl. szeregów punktów, otrzymujemy nowe utwory geometryczne. Dla tych utworów, których badaniem własności zajmujemy się obecnie, wprowadzimy następujące definicje:

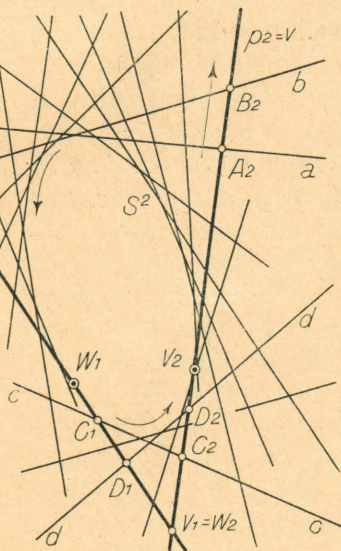
Ogół punktów, w których przecinają się homologiczne proste dwóch rzutowych (ale nie perspektywicznych) pęków, leżących na wspólnej płaszczyźnie i nie posiadających wspólnego wierzchołka, nazywamy stożkową.

wać się będzie kolejno z każdą prostą: $b = B_1 B_2$, $c = C_1 C_2$, $d = D_1 D_2, \dots$, łączącą poszczególne pary homologicznych punktów szeregów $(p_1) \wedge (p_2)$

Ogół prostych, które łączą homologiczne punkty dwóch rzutowych (ale nie perspektywicznych) szeregów, leżących na wspólnej płaszczyźnie i nie posiadających wspólnej podstawy, nazywamy stożkową.



Ryc. 34.



Ryc. 35.

Mówimy, że punkty $A = a_1 a_2$, $B = b_1 b_2, \dots$ przynależą do stożkowej, „należą” do

Mówimy, że proste $a = A_1 A_2$, $b = B_1 B_2, \dots$ przynależą do stożkowej, „należą” do

do niej lub *leżą na* stożkowej, wzgl. że owe elementy $A, B, \dots$ są *punktami* stożkowej. O owej stożkowej, którą oznaczać będziemy symbolem S^2 , mówimy, że ona przynależy (należy) do punktów $A, B, \dots$ lub przechodzi przez punkty $A, B, \dots$

niej, *powłóczą* (obwodzą) stożkową, wzgl. owe elementy $a, b, \dots$ są *prostemi* stożkowej. O owej stożkowej, którą oznaczać będziemy symbolem S^2 , mówimy, że ona przynależy (należy) do prostych $a, b, \dots$ lub jest *obwiednią* prostych $a, b, \dots$

27. Twierdzenia Steinera. Niechaj dane będą dwa rzutowe

Na płaszczyźnie właściwej ω

pęki prostych (P_1) i (P_2) , których utworem jest (ryc. 34) stożkowa S^2 .

szeregi punktów (p_1) i (p_2) , których utworem jest (ryc. 35) stożkowa S^2 .

Prostej $v_1 = P_1 P_2$, łączącej wierzchołki tych pęków i uważanej za element pierwszego pęku (P_1) , podporządkowana jest w pęku (P_2) jedna i tylko jedna prosta v_2 , która nie może zjednoczyć się (ust. 18) z elementem v_1 . Punkt $V = v_1 v_2$, który zjednoczył się z wierzchołkiem P_2 , jest zatem punktem „przynależnym“ do stożkowej S^2 . — Podobnie wierzchołek P_1 leży na tej stożkowej S^2 , gdyż jest punktem $P_1 = W = w_1 w_2$ przecięcia się dwóch homologicznych (różnych od siebie) prostych w_1 i $w_2 = P_2 P_1$ badanych pęków. Innymi słowy: wierzchołki P_1 i P_2 „są punktami“ stożkowej S^2 .

Punktowi $V_1 = p_1 p_2$, przecięcia się podstaw tych szeregów i uważanemu za element pierwszego szeregu (p_1) , podporządkowany jest w szeregu (p_2) jeden i tylko jeden punkt V_2 , który nie może zjednoczyć się (ust. 18) z elementem V_1 . Prosta $v = V_1 V_2$, która zjednoczyła się z podstawą p_2 , jest zatem prostą „przynależną“ do stożkowej S^2 . — Podobnie podstawa p_1 należy do stożkowej S^2 , gdyż jest prostą $p_1 = w = W_1 W_2$, łączącą dwa homologiczne (różne od siebie) punkty W_1 i $W_2 = p_1 p_2$ badanych szeregów. Innymi słowy: podstawy p_1 i p_2 „są prostemi“ stożkowej S^2 .

Z dotychczasowych rozważań wynika, że

na każdej prostej a_1 pęku (P_1) leżą dwa punkty stożkowej S^2 , a mianowicie: wierzchołek P_1

przez każdy punkt A_1 szeregu (p_1) przechodzą dwie proste stożkowej S^2 , a mianowicie:

i element $A_1 = a_1a_2$. Również i na każdej prostej a_2 pęku (P_2) leżą też dwa punkty stożkowej S^2 , a mianowicie: wierzchołek P_2 i punkt $A = a_1a_2$.

Niechaj prosta a_2 obraca się w stałym kierunku (wskazany np. strzałką na ryc. 34) około wierzchołka P_2 i nakrywa się kolejno z każdą prostą $b_2, c_2, d_2, \dots$ pęku (P_2). Równocześnie homologiczna prosta a_1 pęku (P_1) obracać się będzie (ust. 26) w stałym kierunku około wierzchołka P_1 i nakrywać się będzie kolejno z każdą prostą $b_1, c_1, d_1, \dots$ pęku (P_1), — a punkt $A = a_1a_2$ poruszać się będzie „po stożkowej“ S^2 i nakrywać się będzie kolejno z każdym punktem $B = b_1b_2, C = c_1c_2, D = d_1d_2, \dots$. Jeżeli ruchoma prosta a_2 pęku (P_2) „zjednoczy się“ z elementem $w_2 = P_1P_2$, to równocześnie prosta a_1 pęku (P_1) zjednoczyć się musi z prostą w_1 , a punkt $A = a_1a_2$ nakryć się musi z punktem $W = w_1w_2 = P_1$. — Owa prosta w_1 pęku (P_1) posiada tę charakterystyczną własność, że na niej leżą takie dwa punkty P_1 i $W = w_1w_2$ stożkowej S^2 , które **zjednoczyły się** z wierzchołkiem P_1 tego pęku. Prosta w_1 nazywa się „styczną“ w punkcie P_1 do stożkowej S^2 .

podstawa p_1 i element $a = A_1A_2$. Również i przez każdy punkt A_2 szeregu (p_2) przechodzą dwie proste stożkowej S^2 , a mianowicie: podstawa p_2 i prosta $a = A_1A_2$.

Niechaj punkt A_2 porusza się w stałym kierunku (wskazany np. strzałką na ryc. 35) po podstawie p_2 i nakrywa się kolejno z każdym punktem $B_2, C_2, D_2, \dots$ szeregu (p_2). Równocześnie homologiczny punkt A_1 szeregu (p_1) poruszać się będzie (ust. 26) w stałym kierunku po podstawie p_1 i nakrywać się będzie kolejno z każdym punktem $B_1, C_1, D_1, \dots$ szeregu (p_1), a prosta $a = A_1A_2$ „powłóczyć“ (obwodzić) będzie stożkową S^2 i nakrywać się będzie kolejno z każdą prostą $b = B_1B_2, c = C_1C_2, d = D_1D_2, \dots$. Jeżeli ruchomy punkt A_2 szeregu (p_2) „zjednoczy się“ z elementem $W_2 = p_1p_2$, to równocześnie punkt A_1 szeregu (p_1) zjednoczyć się musi z punktem W_1 , a prosta $a = A_1A_2$ nakryć się musi z prostą $w = W_1W_2 = p_1$. — Ów punkt W_1 szeregu (p_1) posiada tę charakterystyczną własność, że przezeń przechodzą takie dwie proste p_1 i $w = W_1W_2$ stożkowej S^2 , które **zjednoczyły się** z podstawą p_1 tego szeregu. Punkt W_1 nazywa się „punktem styczności“ prostej p_1 ze stożkową S^2 .

Ponieważ prostej $w_2 = P_1P_2$ — łączącej wierzchołki rzutowych pęków (P_1) , (P_2) i uważanej za element pęku (P_2) — podporządkowana jest w pęku (P_1) jedna ściśle określona (ust. 7 i 19) prosta w_1 , przeto:

badana stożkowa S^2 posiada w wierzchołku P_1 jedną i tylko jedną styczną w_1 .

badana stożkowa S^2 posiada na podstawie p_1 jeden i tylko jeden punkt styczności W_1 .

W analogiczny sposób wykazać możemy, że w wierzchołku P_2 istnieje jedna i tylko jedna styczna v_2 do stożkowej S^2 . Stycznej v_2 , uważanej za element pęku (P_2) , podporządkowana jest w pęku (P_1) prosta $v_1 = P_1P_2$.

Dochodzimy zatem do dwóch twierdzeń *Steinera*, odpowiadających sobie (ust. 5) w myśl zasady biegunowej dwoistości na płaszczyźnie, a mianowicie:

Stożkowa, będąca utworem dwóch rzutowych (ale nie perspektywicznych) pęków prostych, przechodzi przez ich wierzchołki i posiada w każdym wierzchołku jedną i tylko jedną styczną. Owym stycznym podporządkowane są w uważanych pękach takie proste, które zjednoczyły się z prostą, łączącą wierzchołki tych pęków.

Stożkowa, będąca utworem dwóch rzutowych (ale nie perspektywicznych) szeregów punktów, przynależy do ich podstaw i posiada na każdej podstawie jeden i tylko jeden punkt styczności. Owym punktom styczności podporządkowane są w uważanych szeregach takie punkty, które zjednoczyły się z punktem przecięcia się podstaw tych szeregów.

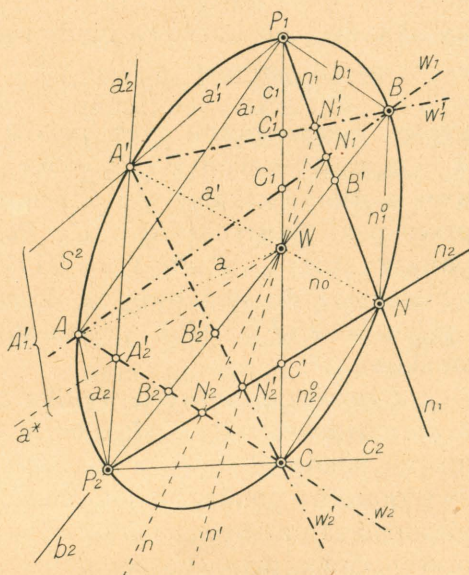
Na ryc. 36 dane są trzy pary prostych homologicznych: a_1 i a_2 , b_1 i b_2 , c_1 i c_2 dwóch jednokreślnych pęków (P_1) i (P_2) . Celem uzupełnienia (ust. 19) tych pęków, wyznaczono punkty $A = a_1a_2$, $B = b_1b_2$, $C = c_1c_2$ i $W = c_1b_2$, oraz proste $w_1 = AB$ i $w_2 = AC$, a następnie za pośrednictwem łańcucha utworów perspektywicznych

$$\begin{array}{c} P_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \overline{\wedge} w_1(A, B, C_1 = c_1w_1, \dots) \overline{\wedge} W(a, b_2, c_1, \dots) \overline{\wedge} \\ \overline{\wedge} w_2(A, B_2 = b_2w_2, C, \dots) \overline{\wedge} P_2(a_2, b_2, c_2, \dots) \dots\dots\dots (1) \end{array}$$

skonstruowano dalsze pary homologicznych prostych: n_1 i n_2 , a'_1 i $a'_2, \dots$ pęków $(P_1) \overline{\wedge} (P_2)$. Oczywiście na poszczególnych pro-

stych: $n, a^*, \dots$ pomocniczego pęku (W) leżą parami punkty: $N_1 = n_1 w_1$ i $N_2 = n_2 w_2$, $A'_1 = a'_1 w_1$ i $A'_2 = a'_2 w_2, \dots$

Z rozważań ust. 17 wiadomo nam, że rzutowość badanych pęków (P_1) i (P_2) ustalić możemy przez trzy dowolne pary homologicznych prostych tych pęków. Na ryc. 36 przyjęliśmy poprzednio proste: a_1 i a_2 , b_1 i b_2 , c_1 i c_2 . Teraz weźmy pod uwagę inne trzy pary homologicznych prostych, a mianowicie: a'_1 i a'_2 , b_1 i b_2 , c_1 i c_2 . Stosując powyżej omówioną konstrukcję zauważymy, że zamiast elementów A, w_1 i w_2 , wystąpią teraz punkt $A' = a'_1 a'_2$ i proste $w'_1 = A'B$, $w'_2 = A'C$; natomiast wierzchołek $W = c_1 b_2$ pomocniczego pęku pozostanie niezmienny. Łańcuch utworów perspektywicznych



Ryc. 36.

$$\begin{aligned} & P_1(a'_1, b_1, c_1, \dots) \overline{\wedge} \\ & \overline{\wedge} w'_1(A', B, C'_1 = c_1 w'_1, \dots) \overline{\wedge} \\ & \overline{\wedge} W(a', b_2, c_1, \dots) \overline{\wedge} w'_2(A', B'_2 = b_2 w'_2, C, \dots) \overline{\wedge} P_2(a'_2, b_2, c_2, \dots) \dots (2) \end{aligned}$$

pozwoли nam skonstruować dalsze pary homologicznych prostych: n_1 i $n_2, \dots$ pęków (P_1) $\overline{\wedge}$ (P_2). Na prostych: $n', \dots$ pęku (W) leżeć muszą oczywiście pary punktów: $N'_1 = n_1 w'_1$ i $N'_2 = n_2 w'_2, \dots$

Utworem jednokreślnych pęków prostych (P_1) i (P_2) — które są końcowymi ogniwami łańcucha (1), wzgl. (2) — jest stożkowa S^2 , która przechodzi przez wierzchołki P_1 i P_2 tych pęków, oraz przez punkty: $A = a_1 a_2$, $B = b_1 b_2$, $C = c_1 c_2, \dots$, $N = n_1 n_2$, $A' = a'_1 a'_2, \dots$. W celu wykazania, że wierzchołki P_1 i P_2 uważanych pęków nie są wcale punktami charakterystycznymi stożkowej S^2 , weźmy (ryc. 36) pod uwagę pęk prostych $W(n, n', \dots, b_2, c_1, n^0 = WN)$. Przetnijmy ten pęk prostymi $n_1 = NP_1$ i $n_2 = NP_2$, a otrzymane w ten sposób dwa perspektywiczne szeregi punktów

$$n_1(N_1, N'_1, \dots, B', P_1, N, \dots) \overline{\wedge} n_2(N_2, N'_2, \dots, P_2, C', N, \dots)$$

rzućmy odpowiednio z wierzchołków B i C . Z łańcucha utworów perspektywicznych

$$\begin{aligned} B(w_1, w'_1, \dots, b_2, b_1, n_1^0, \dots) \overline{\wedge} n_1(N_1, N'_1, \dots, B', P_1, N, \dots) \overline{\wedge} \\ \overline{\wedge} W(n, n', \dots, b_2, c_1, n^0, \dots) \overline{\wedge} n_2(N_2, N'_2, \dots, P_2, C', N, \dots) \overline{\wedge} \\ \overline{\wedge} C(w_2, w'_2, \dots, c_2, c_1, n_2^0, \dots) \end{aligned}$$

wynika, że jego końcowe ogniwa są (ust. 7) pękami rzutowymi:

$$B(w_1, w'_1, \dots, b_2, b_1, n_1^0, \dots) \overline{\wedge} C(w_2, w'_2, \dots, c_2, c_1, n_2^0, \dots).$$

Proste homologiczne tych pęków przecinają się w punktach: $A = w_1 w_2$, $A' = w'_1 w'_2$, $P_2 = b_2 c_2$, $P_1 = b_1 c_1$, $N = n_1^0 n_2^0$, ..., które wraz z wierzchołkami B i C leżą na stożkowej S_1^2 utworzonej przez pęki prostych $(B) \overline{\wedge} (C)$. Ponieważ jednak poszczególne punkty: $A, A', \dots, P_2, P_1, N, \dots, B$ i C stożkowej S_1^2 przynależą równocześnie i do stożkowej S^2 , która była utworem jednokreślnych pęków (P_1) i (P_2) , przeto stożkowa S_1^2 jest *identyczna* ze stożkową S^2 .

Z rozważań naszych wynika tedy, że: stożkowa S^2 , będąca utworem pęków $(P_1) \overline{\wedge} (P_2)$, może być uważana za utwór dwóch innych pęków $(B) \overline{\wedge} (C)$; wierzchołkami tych nowych pęków są dwa dowolne punkty B i C stożkowej S^2 , a prostymi homologicznymi są proste $w_1 = BA$ i $w_2 = CA$, $w'_1 = BA'$ i $w'_2 = CA'$, ..., przechodzące przez poszczególne punkty $A, A', \dots$ stożkowej S^2 .

Dowiedliśmy zatem prawdziwości dwóch, odpowiadających sobie dwoiście (ust. 5), twierdzeń *Steinera*:

Rzucając poszczególne punkty stożkowej — będącej utworem dwóch rzutowych (ale nie perspektywicznych) pęków prostych — z dwóch dowolnych punktów tej stożkowej, otrzymujemy dwa jednokreślne pęki prostych.

Przecinając poszczególne proste stożkowej — będącej utworem dwóch rzutowych (ale nie perspektywicznych) szeregów punktów — dwiema dowolnymi prostymi tej stożkowej, otrzymujemy dwa jednokreślne szeregi punktów.

Z tych i z dwóch pierwszych twierdzeń *Steinera* wynikają bezpośrednio następujące twierdzenia:

Stożkowa, będąca utworem dwóch rzutowych (ale nie perspektywicznych) pęków prostych, posiada w każ-

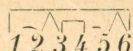
Stożkowa, będąca utworem dwóch rzutowych (ale nie perspektywicznych) szeregów punktów, posiada na każdej

dym swoim punkcie *jedną i tylko jedną styczną*.

swej prostej *jeden i tylko jeden punkt styczności*.

28. Twierdzenia Pascala i Brianchona.

Sześć dowolnych punktów 1, 2, 3, 4, 5 i 6 stożkowej S^2 — będącej utworem dwóch rzutowych pęków prostych — uważajmy (ryc. 37) za wierzchołki sześciokąta płaskiego (123456), *wpisanego* w stożkową S^2 . Proste: $a = 12$, $b = 23$, $c = 34$, $a' = 45$, $b' = 56$ i $c' = 61$, łączące kolejno pary wierzchołków w wypisanym porządku, są bokami owego wielokąta. Boki $a = 12$ i $a' = 45$, $b = 23$ i $b' = 56$, oraz $c = 34$ i $c' = 61$ nazywać będziemy „bokami przeciwległymi“ owego sześciokąta. Na schemacie



Sześć dowolnych prostych I, II, III, IV, V i VI stożkowej S^2 — będącej utworem dwóch rzutowych szeregów punktów — uważajmy (ryc. 38) za boki sześcioboku płaskiego (I II III IV V VI), *opisanego* na stożkowej S^2 . Punkty: $A = I II$, $B = II III$, $C = III IV$, $A' = IV V$, $B' = V VI$ i $C' = VI I$, w których przecinają się kolejno pary boków w wypisanym porządku, są wierzchołkami owego wieloboku. Wierzchołki $A = I II$ i $A' = IV V$, $B = II III$ i $B' = V VI$, oraz $C = III IV$ i $C' = VI I$ nazywać będziemy „wierzchołkami przeciwległymi“ owego sześcioboku. Na schemacie



uwidocznione są (za pośrednictwem tych samych znaczków) trzy pary boków przeciwległych sześciokąta (123456), oraz trzy pary wierzchołków przeciwległych sześcioboku (I II III IV V VI).

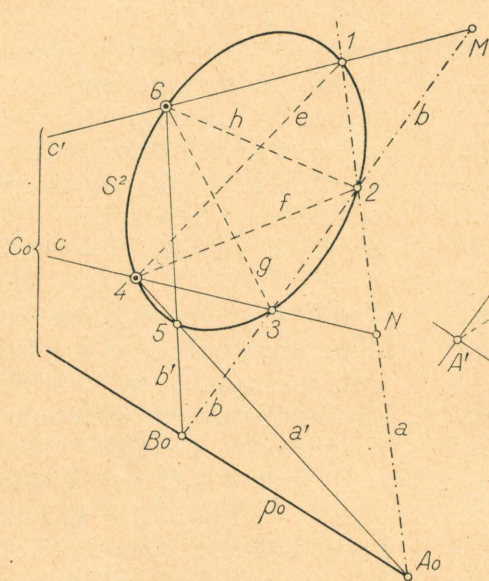
Celem zbadania własności sześciokąta (123456), wpisanego w stożkową S^2 , weźmy pod uwagę dwa jednokreślne (ust. 27) pęki prostych np.

$$4(e, f, c, a', \dots) \overline{\wedge} 6(c', h, g, b', \dots)$$

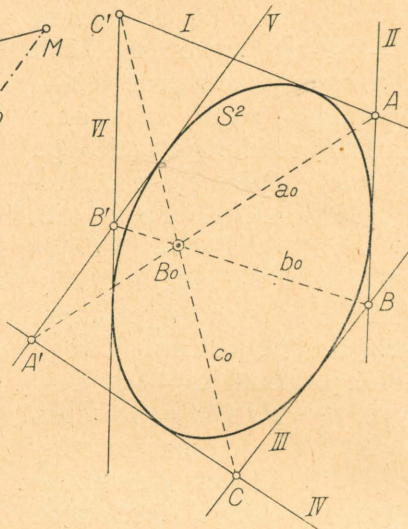
o wierzchołkach 4 i 6, których homologiczne proste przecinają się (ryc. 37) w punktach: $1 = ec'$, $2 = fh$, $3 = cg$, $5 = a'b'$, ... stożkowej S^2 . Skoro pęk o wierzchołku 4 przetniemy prostą $a = 12$, a pęk o wierzchołku 6 prostą $b = 23$, to otrzymamy dwa rzutowe szeregi punktów:

$$a(1, 2, N = ca, A_0 = a'a, \dots) \overline{\wedge} b(M = c'b, 2, 3, B_0 = b'b, \dots).$$

Ponieważ jednak punkt $2 = ab$, przecięcia się podstaw a i b , jest elementem zjednoczonym, przeto (ust. 18) szeregi (a) i (b) są perspektywiczne. Wnosimy stąd, że punkty homologiczne tych szeregów leżą na prostych: $c' = 1M$, $c = N3$, $p_0 = A_0B_0, \dots$, przecinających się w wierzchołku C_0 pomocniczego pęku.



Ryc. 37.



Ryc. 38.

Z rozważań naszych wynika, że prosta $p_0 = A_0B_0$ przechodzi przez punkt C_0 . Zauważyć jednak musimy, że punkty A_0 , B_0 i C_0 , przynależne do prostej p_0 , są punktami przecięcia się trzech par przeciwległych boków: aia' , bib' , cic' sześciokąta (123456) . W ten sposób dowiedliśmy prawdziwości słynnego twierdzenia, odkrytego w r. 1639 przez 16-letniego młodzieńca *Pascala*.

Stosując zasadę biegunowej dwoistości (ust. 5), otrzymujemy twierdzenie *Brianchona* (ogłoszone dopiero w r. 1806), odnoszące się do sześcioboku $(III \dots VI)$, opisanego na stożkowej S^2 . Twierdzenia te wypiszemy w postaci następującej:

Sześciokąt wpisany w stożkową — będącą utworem dwóch rzutowych pęków prostych — posiada tę własność, że trzy pary jego boków przeciwle-

Sześciobok opisany na stożkowej — będącej utworem dwóch rzutowych szeregów punktów — posiada tę własność, że trzy pary jego wierz-

głych przecinają się w takich trzech punktach, które leżą na jednej prostej (prostej Pascala).

chołków przeciwległych wyznaczają takie trzy proste, które przecinają się w jednym punkcie (punkcie Brianchona).

Na ryc. 37 punkty $A_0 = aa'$, $B_0 = bb'$ i $C_0 = cc'$ leżą na prostej Pascala p_0 . Na ryc. 38 proste $a_0 = AA'$, $b_0 = BB'$ i $c_0 = CC'$ przecinają się w punkcie Brianchona B_0 . Celem skonstruowania elementów p_0 i B_0 , posługiwać się będziemy następującymi schematami:

$$\overline{12} \wedge \overline{34} \wedge \overline{56}$$

$$\left. \begin{array}{l} 12 \mid 45 \dots A_0 \\ 23 \mid 56 \dots B_0 \\ 34 \mid 61 \dots C_0 \end{array} \right\} p_0$$

$$\overline{I II} \wedge \overline{III IV} \wedge \overline{V VI}$$

$$\left. \begin{array}{l} I II \mid IV V \dots a_0 \\ II III \mid V VI \dots b_0 \\ III IV \mid VI I \dots c_0 \end{array} \right\} B_0$$

gdzie za pośrednictwem tych samych znaczków: $\frown$, $\wedge$ i $\sqcap$ uwidocznione są trzy pary boków przeciwległych sześciokąta (123456) i trzy pary wierzchołków przeciwległych sześcioboku (I II III IV V VI).

Z łatwością możemy dowieść prawdziwości twierdzeń odwrotnych:

Sześciokąt płaski, którego żadne trzy wierzchołki nie leżą na jednej prostej i którego boki przeciwległe przecinają się w trzech punktach, leżących na jednej prostej, — jest wielokątem wpisanym w stożkową.

Sześciobok płaski, którego żadne trzy boki nie przecinają się w jednym punkcie i którego wierzchołki przeciwległe wyznaczają trzy proste, przecinające się w jednym punkcie, — jest wielobokiem opisanym na stożkowej.

Na ryc. 37 przyjęliśmy taki sześciokąt (123456), którego boki przeciwległe: $a = 12$ i $a' = 45$, $b = 23$ i $b' = 56$, $c = 34$ i $c' = 61$ przecinają się w trzech punktach $A_0 = aa'$, $B_0 = bb'$ i $C_0 = cc'$, przynależnych do prostej p_0 . Oznaczmy przez N i M punkty przecięcia się prostych $ca = N$ i $c'b = M$, a następnie wykreślmy proste $e = 41$, $f = 42$, $g = 63$ i $h = 62$. Skoro pęk prostych $C_0(c', C_02, c, p_0, \dots)$ przetniemy prostymi a i b , to otrzymamy dwa perspektywiczne szeregi punktów:

$$a(1, 2, N, A_0, \dots) \overline{\wedge} b(M, 2, 3, B_0, \dots).$$

Pierwszy z tych szeregów rzućmy z wierzchołka 4, a drugi z wierzchołka 6, to uzyskane w ten sposób dwa rzutowe pęki prostych:

$$4(e, f, c, a', \dots) \overline{\wedge} 6(c', h, g, b', \dots)$$

utworzą stożkową C^2 , przechodzącą przez wierzchołki $1 = ec'$, $2 = fh$, $3 = cg$ i $5 = a'b'$, oraz przez wierzchołki 4 i 6 przyjętego na ryc. 37 sześciokąta płaskiego (1...6).

Dla sześciokąta (123456), wpisanego w stożkową S^2 , skonstruowaliśmy (ryc. 37) prostą Pascala p_0 . Uwzględniając porządek, w jakim następują kolejno po sobie poszczególne wierzchołki tego wielokąta, i rozpoczynając wypisywanie tych wierzchołków od punktu np. 3, otrzymamy dla tego sześciokąta dwie formy: (345612) i (321654). Podobnie, wychodząc np. z wierzchołka 4, otrzymamy znowu dwie formy: (456123) i (432165). Wnosimy stąd, że dla jednego i tego samego sześciokąta (123456) wypisać możemy 12 takich form.

Uważając owe punkty 1, 2, ... 6 stożkowej S^2 za elementy stałe (nieruchome), możemy teraz wziąć pod uwagę inny sześciokąt np. (134562), którego wierzchołkami kolejno po sobie następującymi są punkty: 1, 3, 4, 5, 6 i 2. Wielokąt ten — dla którego w omówiony powyżej sposób wypisać możemy znowu 12 różnych form — posiada na mocy twierdzenia Pascala tę własność, że trzy pary jego boków przeciwległych: 13 i 56, 34 i 62, 45 i 21 przecinają się w trzech punktach, leżących na prostej Pascala, różnej od prostej p_0 . — Dla uważanych sześciu stałych wierzchołków otrzymamy tedy (uwzględniając wszystkie permutacje bez powtarzania) $\frac{6!}{12} = \frac{1.2.3.4.5.6}{12} = 60$ różnych sześciokątów, oraz 60 różnych od siebie prostych Pascala¹⁾. A zatem:

Skoro sześć dowolnych punktów stożkowej — będącej utworem dwóch jednokreślnych pęków prostych — uważać będziemy za elementy stałe, to one wyznaczą 60 sześciokątów wpisanych w ową stożkową, oraz 60 im podporządkowanych prostych Pascala.

Skoro sześć dowolnych prostych stożkowej — będącej utworem dwóch jednokreślnych szeregów punktów — uważać będziemy za elementy stałe, to one wyznaczą 60 sześcioboków opisanych na owej stożkowej, oraz 60 im podporządkowanych punktów Brianchona.

29. Szczególne przypadki twierdzeń Pascala i Brianchona. Konfiguracja Mac Laurina. W przeprowadzonych powyżej dowodach, służących do wykazania prawdziwości twierdzenia Pascala i twierdzenia odwrotnego, występowały pomocnicze pęki prostych (4), (6) i (C_0) , oraz szeregi punktów (a) i (b). Związki, zachodzące pomiędzy temi utworami, ująć możemy (p. ryc. 37) w następujący schemat:

¹⁾ W dziele J. Steinera Vorlesungen ü. synthetische Geometrie Bd. II (bearbeitet von Dr. H. Schroeter), Leipzig 1876 (II Aufl.) S. 126 rozważona jest konfiguracja tych 60 prostych Pascala.

$$\begin{array}{c}
 4(e, f, c, a', \dots) \overline{\wedge} 6(c', h, g, b', \dots) \\
 \overline{\wedge} \quad \overline{\wedge} \\
 a(1, 2, N, A_0, \dots) \quad b(M, 2, 3, B_0, \dots) \\
 \overline{\wedge} \quad \overline{\wedge} \\
 C_0(c', C_0 2, c, p_0, \dots) \overline{\wedge}
 \end{array}$$

Jeżeli założymy, że punkt 6 stożkowej S^2 zjednoczył się z punktem 1, to wówczas (ryc. 37 i 39) prostej $e = 41 = 46$, łączącej wierzchołki 4 i 6 pęków i uważanej za element pęku (4), podporządkowana będzie w pęku (6) prosta $c' = 61$. Ponieważ na elemencie c' leżą dwa takie punkty 6 i 1 stożkowej S^2 , które zjednoczyły się w punkcie $6 = 1$, przeto c' jest (ust. 27) styczną do stożkowej S^2 w punkcie $6 = 1$. Powyżej wypisany schemat nie ulega zmianie, więc wypowiedzieć możemy, jako szczególne przypadki twierdzeń *Pascala* i *Brianchona*, następujące twierdzenia:

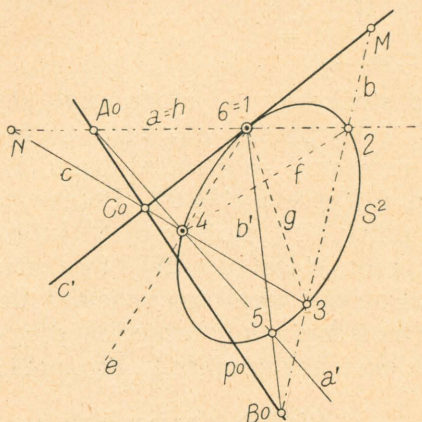
Pięciokąt wpisany w stożkową — będącą utworem dwóch rzutowych pęków prostych — posiada tę własność, że punkt, przecięcia się stycznej do stożkowej w jednym z wierzchołków z przeciwległym bokiem tego pięciokąta, leży na jednej prostej z dwoma punktami przecięcia się takich dwóch pozostałych par boków, z których żadna para nie przechodzi przez ten sam wierzchołek uważanego pięciokąta.

Pięciobok opisany na stożkowej — będącej utworem dwóch rzutowych szeregów punktów — posiada tę własność, że prosta, łącząca punkt styczności ze stożkową jednego z boków z przeciwległym wierzchołkiem tego pięcioboku, przechodzi przez punkt przecięcia się dwóch prostych, łączących takie dwie pozostałe pary wierzchołków, z których żadna para nie leży na tym samym boku uważanego pięcioboku.

Pięciokąt (12345) wpisany w stożkową S^2 uważać możemy (ryc. 39) za przypadek graniczny sześciokąta ($6 = 12345$) wpisanego w tę stożkową, którego dwa wierzchołki 6 i 1 zjednoczyły się w jednym punkcie $6 = 1$, a bok $61 = c'$ sześciokąta jest styczną stożkowej S^2 . Dowiedliśmy, że punkty $A_0 = aa'$, $B_0 = bb'$, $C_0 = cc'$ (ryc. 39) leżą na jednej prostej p_0 . Celem wyznaczenia elementów A_0 , B_0 , C_0 i prostej Pascala p_0 , posłużyć się możemy znowu schematem, jakiego używaliśmy poprzednio (ust. 28) dla sześciokąta (123456). Analogiczne uwagi stosować się będą do pięcioboku (IIIIIIIVV) opisanego na stożkowej S^2 .

$$\begin{array}{cc|cc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 1 & 2 & & 4 & 5 & \\
 2 & 3 & & 5 & 6 & \\
 3 & 4 & & 6 & 1 = c' &
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \dots A_0 \\ \dots B_0 \\ \dots C_0 \end{array} \right\} p_0.$$

Załóżmy teraz, że punkt 6 zjednoczył się (p. ryc. 37 i 40) z wierzchołkiem 1, a punkt 3 z wierzchołkiem 4. Prostej $41 =$



Ryc. 39.

$e = 63 = g$, uważanej za element e pęku (4), podporządkowana będzie w pęku (6) prosta $c' = 61$; natomiast prostą $g = 63$ pęku (6) podporządkowaną będzie w pęku (4) prosta $c = 43$. Ponieważ wypisany poprzednio schemat nie ulega zmianie, a nadto proste $c' = 61$ i $c = 43$ są stycznymi do stożkowej S^2 w wierzchołkach (ust. 13) 1 i 4 „czworokąta zupełnego“ (1245), a prosta $p_0 = A_0B_0$ jest jego prostą przekątną, przeto wy-

powiedzieć możemy — jako szczególne przypadki twierdzeń *Pascala* i *Brianchona* — następujące twierdzenia:

Czworokąt zupełny wpisany w stożkową — będącą utworem dwóch rzutowych pęków prostych — posiada tę własność, że na każdej jego prostej przekątnej przecinają się dwie styczne, poprowadzone do stożkowej w takich wierzchołkach czworokąta, które leżą na jednym boku z pozostałym trzecim punktem przekątnym.

Czworobok zupełny opisany na stożkowej — będącej utworem dwóch rzutowych szeregów punktów — posiada tę własność, że przez każdy jego punkt przekątny przechodzi prosta, łącząca punkty styczności ze stożkową takich boków czworoboku, które przecinają się w jednym wierzchołku z pozostałą trzecią prostą przekątną.

Czworokąt zupełny (1245) wpisany w stożkową S^2 uważać możemy (ryc. 40) za przypadek graniczny sześciokąta ($6 = 123 = 45$) wpisanego w tę stożkową, którego wierzchołki 6 i 1 zjednoczyły się w punkcie $6 = 1$, a wierzchołki 3 i 4 zjednoczyły się w punkcie $3 = 4$. Boki $61 = c'$ i $34 = c$ tego sześciokąta są stycznymi do stożkowej S^2 . — Poprzednio wykazaliśmy, że punkty $A_0 = aa'$, $B_0 = bb'$ i $C_0 = cc'$ (ryc. 40) leżą na jednej prostej p_0 . Celem wyznaczenia elementów A_0 , B_0 , C_0

1 2 3	4 5 6	
1 2	4 5	... A_0
2 3	5 6	... B_0
$c = 3 4$	$6 1 = c'$	... C_0

$\left. \vphantom{\begin{matrix} 1 2 3 \\ 4 5 6 \\ 2 3 \\ c = 3 4 \end{matrix}} \right\} p_0$

i prostej Pascala p_0 posłużyć się możemy znowu schematem, jakiego używaliśmy poprzednio (ust. 28) dla sześciokąta (1 2 3 4 5 6).

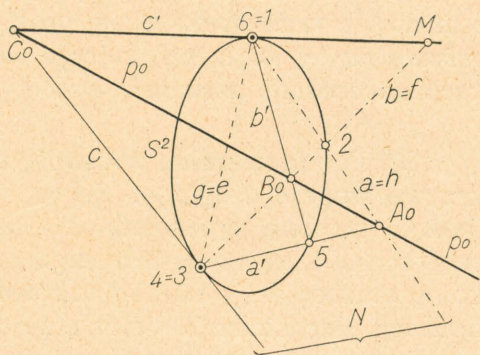
Analogicznie uwagi stosować się

będą do czworoboku zupełnego (I II IV V), opisanego na stożkowej S^2 .

Uwaga: W ust. 42 poznamy własności trójkąta wpisanego w stożkową S^2 , oraz trójboku opisanego na tej stożkowej, którego bokami są styczne do S^2 w wierzchołkach owego trójkąta. Również i do nich stosować się będą twierdzenia Pascala i Brianchona.

Na ryc. 41 obierzmy dwa jednokreślne pęki prostych $(A) \overline{\wedge} (B)$, których utworem niechaj będzie stożkowa S^2 . Prostej AB , która przechodzi przez wierzchołki A, B tych pęków i jest elementem pęku (B) , podporządkowana jest w pęku (A) jedna i tylko jedna prosta a . Wiadomo nam (ust. 27), że prosta a jest styczną w punkcie A do stożkowej S^2 . — Cztery dowolne punkty A, B, C i D stożkowej S^2 obierzmy za wierzchołki czworokąta zupełnego $(ABCD)$, a następnie skonstruujemy punkty przekątne P, Q, R i proste przekątne $p_0 = QR, q_0 = RP$ i $r_0 = PQ$ owego czworokąta. Chcąc wyznaczyć styczne b, c i d do stożkowej w trzech pozostałych wierzchołkach czworokąta, skorzystamy z poprzedniego twierdzenia. Styczna a niechaj przecina się z bokami trójkąta przekątnego $(p_0 q_0 r_0)$ w punktach $1 = ap_0, 2 = aq_0$ i $3 = ar_0$. Prosta $b = 1B$ jest (na mocy ostatniego twierdzenia) styczną w wierzchołku B do stożkowej S^2 . Podobnie proste $c = 2C$ i $d = 3D$ są żądanymi stycznymi do stożkowej w wierzchołkach C i D . Z łatwością stwierdzimy też, że styczne b i d przecinają się w punkcie $4 = bd$ na przekątnej $q_0 = PR$, styczne b i c przecinają się w punkcie $5 = bc$ na prostej przekątnej $r_0 = QP$, a styczne c i d przecinają się wreszcie w punkcie $6 = cd$, leżącym na przekątnej $p_0 = QR$.

Skonstruowane w powyższy sposób styczne a, b, c i d (ryc. 41) wyznaczają „czworobok zupełny“, opisany na stożkowej S^2 .



Ryc. 40.

Trzy pary wierzchołków przeciwległych (ust. 13), a mianowicie: 1 i 6, 2 i 4, 3 i 5, wyznaczają trzy proste przekątne $p_0 = 16$, $q_0 = 24$ i $r_0 = 35$, oraz trójbok przekątny ($p_0 q_0 r_0$). Z rozważań naszych wynika t. zw. *konfiguracja Mac Laurin'a*, którą ująć możemy w następującą formę:

Czworokąt zupełny wpisany w stożkową — będącą utworem dwóch rzutowych pęków prostych — i czworobok zupełny opisany na tej stożkowej, którego bokami są styczne w wierzchołkach czworokąta, posiadają wspólny trójkąt przekątny.

30. Fundamentalna własność stożkowych. Stożkowe jako krzywe stopnia drugiego. Na ryc. 41 dana jest stożkowa S^2 , (będąca utworem dwóch jednokreślnych pęków prostych o wierzchołkach A i B), czworokąt zupełny ($ABCD$) wpisany w tę stożkową, oraz opisany na niej czworobok zupełny ($abcd$). Z konfiguracji *Mac Laurin'a* wynika, że na prostej:

p_0	leżą punkty	1, 6, Q i R
q_0	„	2, 4, R i P
r_0	„	5, 3, P i Q .

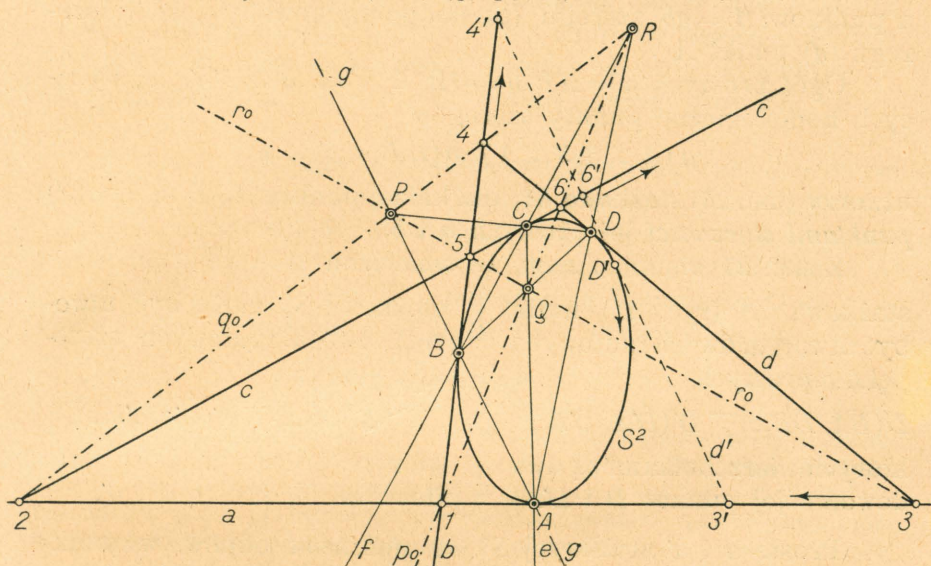
Punkty A , B i C stożkowej S^2 uważajmy za punkty stałe (nieruchome). Wówczas styczne a , b i c w owych punktach do stożkowej S^2 są prostymi stałymi, jak również stałymi są też punkty: $1 = ab$, $2 = ac$ i $5 = bc$. Uważajmy punkt D za element ruchomy, poruszający się „po stożkowej“ S^2 i zajmujący (ryc. 41) kolejno położenia D , D' ,... Ponieważ stożkowa S^2 posiada (ust. 27) w każdym swoim punkcie D jedną i tylko jedną styczną d , przeto dla ruchomego punktu D jego styczna zajmować będzie kolejno położenia d , d' ,... Równocześnie punkt $3 = da$ poruszać się będzie po stałej stycznej a , punkt $4 = db$ po stałej stycznej b , punkt zaś $6 = dc$ po stałej stycznej c .

Dla czworokąta zupełnego ($ABCD$), którego wierzchołek D porusza się po stożkowej S^2 , jego punkty przekątne P , Q i R również będą zmieniać swoje położenia, a mianowicie: punkt Q poruszać się będzie po stałej prostej $e = AC$, punkt R po stałej prostej $f = BC$, a wreszcie punkt P po stałej prostej $g = AB$. Z uwagi na to, że dla czworokątów zupełnych ($ABCD$), ($ABCD'$),... wpisanych w stożkową S^2 , oraz dla czworoboków zupełnych ($abcd$), ($abcd'$),... opisanych na tej stożkowej S^2 — zachowana musi być każdorazowo konfiguracja *Mac Laurin'a*, przeto:

przekątna $p_0 = QR$ obracać się będzie dokoła stałego punktu 1,
 " $q_0 = RP$ " " " " " " 2,
 " $r_0 = PQ$ " " " " " " 5.

Pomiędzy szeregami punktów o podstawach $a, b, e = AC$ i $f = BC$, a pękami prostych o wierzchołkach 1, 2 i 5 zachodzą (ryc. 41) następujące związki:

$$\begin{aligned} a(3, 3', \dots) \bar{\cap} 5(r_0, r'_0, \dots) \bar{\cap} e(Q, Q', \dots) \bar{\cap} 1(p_0, p'_0, \dots) \bar{\cap} \\ \bar{\cap} f(R, R', \dots) \bar{\cap} 2(q_0, q'_0, \dots) \bar{\cap} b(4, 4', \dots). \end{aligned}$$



Ryc. 41.

Z powyższego łańcucha utworów perspektywicznych wynika rzutowość szeregów punktów:

$$a(3, 3', \dots) \bar{\cap} b(4, 4', \dots),$$

których podstawami są dwie dowolne styczne stożkowej S^2 , a elementami homologicznymi 3 i 3', 4 i 4', ... są punkty przecięcia się podstaw a i b z poszczególnymi stycznymi $d, d', \dots$ stożkowej S^2 .

Dowiedliśmy zatem prawdziwości dwóch twierdzeń, odpowiadających sobie dwoiście:

Styczne w poszczególnych punktach stożkowej — będącej utworem dwóch rzutowych (ale nie perspektywicznych)

Punkty styczności poszczególnych prostych stożkowej — będącej utworem dwóch rzutowych (ale nie perspektywicznych)

pęków prostych — *przecięte dwiema dowolnymi stycznymi tej stożkowej, wyznaczają dwa rzutowe szeregi punktów.*

nych) szeregów punktów — *rzucone z dwóch dowolnych punktów styczności tej stożkowej, wyznaczają dwa rzutowe pęki prostych.*

Za pośrednictwem poszczególnych ogniw wypisanego poprzednio łańcucha z łatwością stwierdzimy, że: Punktowi $1 = ab$ szeregu (a) podporządkowany jest w szeregu (b) punkt B , a punktowi $1 = ab$ szeregu (b) podporządkowany jest w szeregu (a) punkt A .

Ogół prostych $a = A1$, $b = 1B$, $d = 34$, $d' = 3'4', \dots$, łączących homologiczne punkty szeregów

$$a(A, 1, 3, 3', \dots) \overline{\wedge} b(1, B, 4, 4', \dots)$$

utworzy (ust. 26) stożkową S_1^2 , dla której punkty A i B są (ust. 27) *punktami styczności* jej prostych a i b .

Z ust. 27 wiadomo nam, że omawiana

stożkowa S^2 (ryc. 41) może być utworem dwóch rzutowych pęków prostych

$$D(DA, DB, \dots) \overline{\wedge} D'(D'A, D'B, \dots),$$

których wierzchołkami są dwa dowolne jej punkty D i D' .

stożkowa S_1^2 może być utworem dwóch rzutowych szeregów punktów

$$d(da, db, \dots) \overline{\wedge} d'(d'a, d'b, \dots),$$

których podstawami są dwie dowolne jej proste d i d' .

Proste d i d' stożkowej S_1^2 są *stycznymi* odpow. w punktach D i D' do stożkowej S^2 . W sposób analogiczny — jak poprzednio dla prostych a , b , oraz punktów A , B i $1 = ab$ — wykazać możemy, że: Punktowi dd' (przecięcia się prostych d i d'), uważanemu za element szeregu (d), podporządkowany jest w szeregu (d') punkt D' , a punktowi dd' szeregu (d') podporządkowany jest w szeregu (d) punkt D . Owe punkty D i D' stożkowej S^2 są oczywiście (ust. 27) *punktami styczności* prostych d i d' ze stożkową S_1^2 .

Z rozważań naszych wynika tedy, że pomiędzy omawianymi stożkowymi S^2 i S_1^2 zachodzą następujące zależności:

Każda styczna d w punkcie D do stożkowej S^2 jest prostą stożkowej S_1^2 , a każdy punkt D stożkowej S^2 jest punktem styczności prostej d ze stożkową S_1^2 .

Każdy punkt styczności D prostej d , przynależnej do stożkowej S_1^2 , jest punktem stożkowej S^2 , a każda prosta d stożkowej S_1^2 jest styczną stożkowej S^2 .

Wnosimy stąd, że stożkowa S^2 jest *identyczna* ze stożkową S_1^2 .

Z powyższych i dwoście z nimi związanych rozważań wynika prawdziwość następujących twierdzeń podstawowych:

Stożkowa, będąca utworem dwóch rzutowych (ale nie perspektywicznych) pęków prostych, może być uważana też za utwór dwóch jednokreślnych (ale nie perspektywicznych) szeregów punktów.

Stożkowa, będąca utworem dwóch rzutowych (ale nie perspektywicznych) szeregów punktów, może być uważana też za utwór dwóch jednokreślnych (ale nie perspektywicznych) pęków prostych.

O dowolnym punkcie D stożkowej S^2 i o stycznej d w owym punkcie do tej stożkowej mówimy, że elementy D i d „przynależą” do stożkowej S^2 . Mówimy też, że stożkowa S^2 „przynależy” do punktu D i do prostej (stycznej) d , że stożkowa S^2 *przechodzi* przez punkt D i *jest styczną* w punkcie D do prostej d , wzgl. że stożkowa S^2 *styka się* z prostą d w punkcie D .

Wiadomo nam¹⁾, że skoro na płaszczyźnie przyjmimy dwie stałe proste prostopadłe za osie układu odniesienia, to odległości x i y dowolnego punktu P tej płaszczyzny od owych osi (wzięte z odpowiednimi znakami) są współrzędnymi (prostokątnymi) kartezjuszowskimi tego punktu. Wiadomo nam również, że równanie pierwszego stopnia $Ax + By + C = 0$ ze względu na zmienne x i y przedstawia zbiór punktów uważanej płaszczyzny, które leżą na pewnej linii prostej. Równanie to nazywamy wprost równaniem owej prostej. Z powyższego równania linii prostej otrzymać możemy inne równanie, kształtu: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, gdzie $a = -\frac{C}{A}$ i $b = -\frac{C}{B}$ są odcinkami, jakie dana prosta wyznacza na osiach układu. W istocie bowiem dla $x = 0$ otrzymamy współrzędną $y = b$, a natomiast dla $y = 0$ współrzędną $x = a$. Kładąc wreszcie: $u = -\frac{1}{a}$ i $v = -\frac{1}{b}$ otrzymamy równanie

$$ux + vy + 1 = 0$$

zwane równaniem plückerowskimi linii prostej.

Jak dwie współrzędne Kartezjusza x i y określają położenie punktu $P(x, y)$, tak dwie współrzędne Plückera

$$u = -\frac{1}{a}, v = -\frac{1}{b}$$

określają położenie prostej, w odniesieniu do układu dwóch osi wzajemnie prostopadłych. Skoro w równaniu

$$ux + vy + 1 = 0$$

¹⁾ Porównaj Dr. Placyd Dziwiński, Wykłady matematyki, Tom I, Łwów 1902.

uważać będziemy współrzędne x i y za stałe, a natomiast współczynniki u i v (przedstawiające współrzędne linii prostej) jako zmienne, to wówczas owe równanie przedstawia pęk prostych, przechodzących przez stały punkt $P(x, y)$.

Skoro mamy jakąś prostą, której współrzędne u i v czynią zadość równaniu

$$Au + Bv + C = 0$$

to równanie tej prostej w współrzędnych x i y będzie: $ux + vy + 1 = 0$. Z równań tych otrzymujemy nowe równanie kształtu: $u(A - Cx) + v(B - Cy) = 0$, któremu stanie się zadość wówczas, gdy $x = \frac{A}{C}$, $y = \frac{B}{C}$. Wnosimy stąd, że: Wszystkie proste, których współrzędne Plückera u i v czynią zadość równaniu pierwszego stopnia

$$Au + Bv + C = 0$$

przechodzą przez jeden stały punkt o współrzędnych $x = \frac{A}{C}$ i $y = \frac{B}{C}$. Równanie powyższe możemy tedy uważać za równanie punktu w współrzędnych u i v linii prostej.

Niechaj dane są równania

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ \text{i } A'x + B'y + C' &= 0 \end{aligned}$$

lub w formie symbolicznej
 $p = 0$ i $p' = 0$ dwóch prostych

w odniesieniu do układu dwóch wzajemnie prostopadłych osi, które leżą na dowolnej płaszczyźnie.

Równanie kształtu

$$p + \lambda p' = 0$$

gdzie λ jest dowolnym współczynnikiem (parametrem),

przedstawia prostą, która przechodzi przez punkt S przecięcia się danych dwóch prostych $p = 0$ i $p' = 0$, (oraz leży na uważanej płaszczyźnie).

$$\begin{aligned} Au + Bv + C &= 0 \\ \text{i } A'u + B'v + C' &= 0 \end{aligned}$$

lub w formie symbolicznej
 $P = 0$ i $P' = 0$ dwóch punktów

Równanie kształtu

$$P + \lambda P' = 0$$

przedstawia punkt, który leży na prostej s , przechodzącej przez dane dwa punkty $P = 0$ i $P' = 0$.

Jeżeli parametr λ przybiera wszystkie rzeczywiste wartości między $+\infty$ a $-\infty$, natenczas:

$p + \lambda p' = 0$ jest równaniem *pęku prostych*. Dla czterech prostych $p = 0$, $p' = 0$, $p + \lambda_1 p' = 0$ i $p + \lambda_2 p' = 0$ tego pęku dwustosunek jest liczbą $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

$P + \lambda P' = 0$ jest równaniem *szeregu punktów*. Dla czterech punktów $P = 0$, $P' = 0$, $P + \lambda_1 P' = 0$ i $P + \lambda_2 P' = 0$ tego szeregu dwustosunek jest liczbą $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

W istocie bowiem, skoro na prostej $p + \lambda_1 p' = 0$ obierzemy dowolny punkt $T_1(x, y)$ o współrzędnych x i y , a przez $\overline{T_1 W}$ i $\overline{T_1 W'}$ oznaczmy odległości punktu T_1 od prostych $p = Ax + By + C = 0$ i $p' = A'x + B'y + C' = 0$, to wówczas otrzymamy znane zależności:

$$\overline{T_1 W} = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{p}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$\overline{T_1 W'} = \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} = \frac{p'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}.$$

Z trójkątów prostokątnych $(ST_1 W)$ i $(ST_1 W')$ wynikają relacje $\overline{T_1 W} = \overline{T_1 S} \cdot \sin T_1 S W$, $\overline{T_1 W'} = \overline{T_1 S} \cdot \sin T_1 S W'$, więc dla stosunku podziału (ust. 10) trzech prostych $p = 0$, $p' = 0$ i $p + \lambda_1 p' = 0$ otrzymamy:

$$\frac{\sin T_1 S W}{\sin T_1 S W'} = \frac{\overline{T_1 W}}{\overline{T_1 W'}} = \frac{p \sqrt{A'^2 + B'^2}}{p' \sqrt{A^2 + B^2}} = -\lambda_1 \frac{\sqrt{A'^2 + B'^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Podobnie dla stosunku podziału trzech prostych $p = 0$, $p' = 0$ i $p + \lambda_2 p' = 0$ otrzymamy liczbę $-\lambda_2 \frac{\sqrt{A'^2 + B'^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, więc ostatecznie dla dwustosunku uważanych czterech prostych $p = 0$, $p' = 0$, $p + \lambda_1 p' = 0$ i $p + \lambda_2 p' = 0$ liczbę $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, c. b. d. w.

Celem wyznaczenia dwustosunku czterech punktów szeregu $P + \lambda P' = 0$ o podstawie s , obliczymy najpierw stosunek podziału dla trzech punktów: $P = Au + Bv + C = 0$, $P' = A'u + B'v + C' = 0$ i $P + \lambda_1 P' = (A + \lambda_1 A')u + (B + \lambda_1 B')v + (C + \lambda_1 C') = 0$. Wiadomo nam, że dla owych punktów współrzędnymi Kartezjusza są

$$x = \frac{A}{C} \quad \text{i} \quad y = \frac{B}{C}, \quad x' = \frac{A'}{C'} \quad \text{i} \quad y' = \frac{B'}{C'},$$

$$x_1 = \frac{A + \lambda_1 A'}{C + \lambda_1 C'} \quad \text{i} \quad y_1 = \frac{B + \lambda_1 B'}{C + \lambda_1 C'}.$$

Ponieważ stosunek podziału trzech punktów $P = 0$, $P' = 0$ i $P + \lambda_1 P' = 0$ prostej s równy jest stosunkowi podziału trzech rzutów prostokątnych owych punktów na oś x , przeto otrzymamy liczbę

$$\frac{x_1 - x}{x_1 - x'} = \left(\frac{A + \lambda_1 A'}{C + \lambda_1 C'} - \frac{A}{C} \right) : \left(\frac{A + \lambda_1 A'}{C + \lambda_1 C'} - \frac{A'}{C'} \right) = -\lambda_1 \frac{C}{C'}.$$

Podobnie dla stosunku podziału trzech punktów $P = 0$, $P' = 0$

i $P + \lambda_2 P' = 0$ prostej s otrzymamy liczbę $\frac{x_2 - x}{x_2 - x'} = -\lambda_2 \frac{C'}{C}$,
 więc ostatecznie dla dwustosunku uważanych czterech punktów
 $P = 0, P' = 0, P + \lambda_1 P' = 0$ i $P + \lambda_2 P' = 0$ liczbę $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, c. b. d. w.

Na uważanej płaszczyźnie obierzmy teraz

dwie dalsze proste

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 &= 0 \\ \text{i } A'_1 x + B'_1 y + C'_1 &= 0, \end{aligned}$$

których równania w formie symbolicznej są $r = 0$ i $r' = 0$,
 to wówczas $r + \lambda r' = 0$ jest równaniem drugiego pęku prostych.

dwa dalsze punkty

$$\begin{aligned} A_1 u + B_1 v + C_1 &= 0 \\ \text{i } A'_1 u + B'_1 v + C'_1 &= 0, \end{aligned}$$

których równania w formie symbolicznej są $R = 0$ i $R' = 0$,
 to wówczas $R + \lambda R' = 0$ jest równaniem drugiego szeregu punktów.

Dla każdej wartości λ parametru λ otrzymujemy

równanie $p + \lambda p' = 0$ jednej ściśle określonej prostej pierwszego pęku, oraz równanie $r + \lambda r' = 0$ jednej i tylko jednej prostej, należącej do pęku drugiego.

równanie $P + \lambda P' = 0$ jednego ściśle określonego punktu pierwszego szeregu, oraz równanie $R + \lambda R' = 0$ jednego i tylko jednego punktu, należącego do szeregu drugiego.

Uważając każde dwie takie proste (wzgl. dwa takie punkty), skonstruowane za pośrednictwem tej samej wartości parametru λ , za *elementy homologiczne* owych dwóch pęków prostych (wzgl. szeregów punktów), to stwierdzimy z łatwością, że

dwustosunki czterech prostych: $p = 0, p' = 0, p + \lambda_1 p' = 0$ i $p + \lambda_2 p' = 0$ pierwszego pęku, oraz czterech prostych: $r = 0, r' = 0, r + \lambda_1 r' = 0$ i $r + \lambda_2 r' = 0$ drugiego pęku są równe liczbie $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Z równości dwustosunków wynika (ust. 20), że równania kształtu:

$p + \lambda p' = 0, r + \lambda r' = 0$
 są równaniami dwóch *rzutowych* pęków prostych.

dwustosunki czterech punktów: $P = 0, P' = 0, P + \lambda_1 P' = 0$ i $P + \lambda_2 P' = 0$ pierwszego szeregu, oraz czterech punktów: $R = 0, R' = 0, R + \lambda_1 R' = 0$ i $R + \lambda_2 R' = 0$ drugiego szeregu są równe liczbie $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Z równości dwustosunków wynika (ust. 20), że równania kształtu:

$P + \lambda P' = 0, R + \lambda R' = 0$
 są równaniami dwóch *rzutowych* szeregów punktów.

Każde dwie homologiczne proste tych pęków jedno-kreślnych przecinają się w jednym punkcie, którego współrzędne x i y czynią zadość równaniom:

$$p + \lambda p' = 0 \text{ i } r + \lambda r' = 0$$

czyli równaniom

$$(Ax + By + C) + \lambda(A'x + B'y + C') = 0 \text{ i } (A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A'_1x + B'_1y + C'_1) = 0.$$

Wyrugowawszy z tych równań parametr λ , otrzymujemy równanie:

$$pr' - p'r = 0 \text{ czyli:}$$

$$(Ax + By + C)(A'_1x + B'_1y + C'_1) - (A'x + B'y + C')(A_1x + B_1y + C_1) = 0,$$

które zawiera współrzędne x i y punktów przecięcia się homologicznych prostych dwóch danych pęków rzutowych. Ogół punktów, których współrzędne x i y czynią zadość powyższemu równaniu, tworzy pewną linię krzywą. Wypisane powyżej równanie, które nazywamy wprost równaniem tej krzywej, jest stopnia drugiego w współrzędnych x i y . Stopień równania linii krzywej w współrzędnych x i y określa (w geometrii analitycznej) rzęd tej krzywej.

Każde dwa homologiczne punkty tych szeregów jedno-kreślnych wyznaczają jedną prostą, której współrzędne u i v czynią zadość równaniom:

$$P + \lambda P' = 0 \text{ i } R + \lambda R' = 0$$

czyli równaniom

$$(Au + Bv + C) + \lambda(A'u + B'v + C') = 0 \text{ i } (A_1u + B_1v + C_1) + \lambda(A'_1u + B'_1v + C'_1) = 0.$$

Wyrugowawszy z tych równań parametr λ , otrzymujemy równanie:

$$PR' - P'R = 0 \text{ czyli:}$$

$$(Au + Bv + C)(A'_1u + B'_1v + C'_1) - (A'u + B'v + C')(A_1u + B_1v + C_1) = 0,$$

które zawiera współrzędne u i v prostych, łączących homologiczne punkty dwóch danych szeregów rzutowych. Ogół prostych, których współrzędne u i v czynią zadość powyższemu równaniu, tworzy pewną linię krzywą. Wypisane powyżej równanie, które nazywamy wprost równaniem tej krzywej, jest stopnia drugiego w współrzędnych u i v . Stopień równania linii krzywej w współrzędnych u i v określa (w geometrii analitycznej) klasę tej krzywej.

Dowiedliśmy zatem prawdziwości następujących twierdzeń:

Stożkowa, będąca utworzonym dwóch rzutowych (ale nie perspektywicznych) pęków pro-

stożkowa, będąca utworzonym dwóch rzutowych (ale nie perspektywicznych) szeregów

stych, jest linią krzywą rzędu drugiego.

punktów, jest linią krzywą klasy drugiej.

Jeżeli pewna krzywa jest rzędu n -go i klasy n -tej, to wówczas mówimy, że owa krzywa jest *stopnia n -go*. Ponieważ stożkowa, która jest utworem dwóch rzutowych pęków prostych, może być — na mocy twierdzenia podstawowego tego ustępu — uważana też za utwór dwóch rzutowych szeregów punktów, przeto: *owa stożkowa jako krzywa rzędu 2-go i klasy 2-ej, jest krzywą stopnia drugiego.*

31. Proste sieczne i zewnętrzne. Punkty zewnętrzne i wewnętrzne. Stożkowa S^2 na ryc. 42-ej niechaj będzie utworem dwóch jednokreślnych pęków prostych

$$P_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \overline{\wedge} P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$$

o wierzchołkach P_1 i P_2 , a stożkowa S^2 na ryc. 43-ej niechaj będzie utworem dwóch rzutowych szeregów punktów

$$p_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, \dots) \text{ o podstawach } p_1 \text{ i } p_2.$$

Pęki prostych $(P_1) \overline{\wedge} (P_2)$ przetnijmy dowolną prostą w , która leży na ich wspólnej płaszczyźnie podstawowej i nie przechodzi przez wierzchołki P_1 i P_2 . Otrzymane w ten sposób (ust. 7 i 15) rzutowe szeregi punktów

$$w(A_1 = wa_1, \dots) \overline{\wedge} w(A_2 = wa_2, \dots)$$

o wspólnej podstawie w posiadają dwa punkty zjednoczone: $E_1 = E_2$ i $F_1 = F_2$. Przez punkty E_1 i F_1 szeregu pierwszego przechodzą oczywiście proste $e_1 = P_1E_1$ i $f_1 = P_1F_1$ pęku (P_1) , a przez punkty E_2 i F_2 drugiego szeregu przechodzą proste $e_2 = P_2E_2$ i $f_2 = P_2F_2$ pęku (P_2) .

Dla pęków $(P_1) \overline{\wedge} (P_2)$ uzyskaliśmy dwie pary homo-

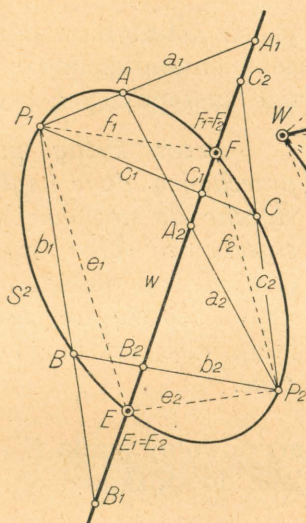
Szeregi punktów $(p_1) \overline{\wedge} (p_2)$ rzućmy z dowolnego punktu W , który leży na ich wspólnej płaszczyźnie podstawowej i nie przynależy do podstaw p_1 i p_2 . Otrzymane w ten sposób (ust. 7 i 22) rzutowe pęki prostych

$$W(a_1 = WA_1, \dots) \overline{\wedge} W(a_2 = WA_2, \dots)$$

o wspólnym wierzchołku W posiadają dwie proste zjednoczone: $e_1 = e_2$ i $f_1 = f_2$. Proste e_1 i f_1 pęku pierwszego przecinają oczywiście podstawę szeregu (p_1) w punktach $E_1 = p_1e_1$ i $F_1 = p_1f_1$, a proste e_2 i f_2 pęku drugiego przecinają podstawę szeregu (p_2) w punktach $E_2 = p_2e_2$ i $F_2 = p_2f_2$.

Dla szeregów $(p_1) \overline{\wedge} (p_2)$ uzyskaliśmy dwie pary homo-

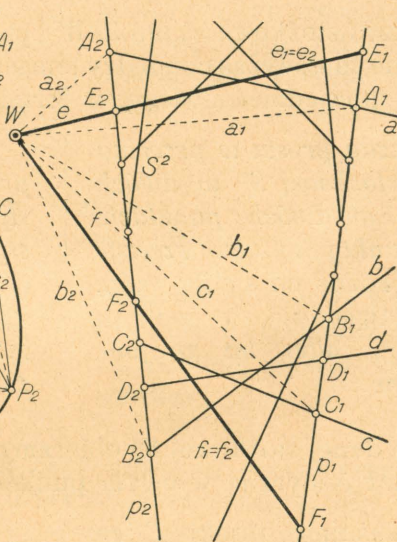
logicznych prostych: e_1 i e_2 , oraz f_1 i f_2 , które (ust. 26) przecinają się w punktach $E = e_1 e_2 = E_1 = E_2$ i $F = f_1 f_2 = F_1 = F_2$ stożkowej S^2 . Punkty E i F , które przynależą równocześnie do prostej w i do stożkowej S^2 , nazywać będziemy *punktami przecięcia się* prostej w ze stożkową S^2 .



Ryc. 42.

Punkty zjednoczone $E_1 = E_2 = E$ i $F_1 = F_2 = F$ pomocniczych szeregów rzutowych o wspólnej podstawie w są (ust. 15) punktami: a) rzeczywistymi i różnymi od siebie, b) rzeczywistymi i nakrywającymi się w jednym punkcie, albo też c) urojonemi sprzężonemi. Uważana prosta w przecina stożkową S^2 w przypadku: a) w dwóch rzeczywistych

logicznych punktów: E_1 i E_2 , oraz F_1 i F_2 , które (ust. 26) wyznaczają dwie proste $e = E_1 E_2 = e_1 = e_2$ i $f = F_1 F_2 = f_1 = f_2$ stożkowej S^2 . Proste e i f , które przynależą równocześnie do punktu W i do stożkowej S^2 , nazywać będziemy (ust. 30) *stycznymi*, poprowadzonymi z punktu W do stożkowej S^2 .



Ryc. 43.

Proste zjednoczone $e_1 = e_2 = e$ i $f_1 = f_2 = f$ pomocniczych pęków rzutowych o wspólnym wierzchołku W są (ust. 16 i ust. 22) prostymi: a) rzeczywistymi i różnymi od siebie, b) rzeczywistymi i nakrywającymi się na jednej prostej, albo też c) urojonemi sprzężonemi. Przez uważany punkt W przechodzą do stożkowej S^2 w przypadku: a) dwie

stych i różnych od siebie punktach, *b)* w dwóch rzeczywistych punktach i zjednoczonych ze sobą w jednym punkcie, *c)* w dwóch punktach „urojonych sprzężonych“. Owa prosta *w* nazywa się w przypadku: *a)* prostą *sieczną*, *b)* *styczną* (ust. 27), *c)* *prostą zewnętrzną* stożkowej S^2 .

rzeczywiste i różne od siebie styczne, *b)* dwie rzeczywiste styczne i zjednoczone ze sobą na jednej prostej, *c)* dwie styczne „urojone sprzężone“. Ów punkt *W* nazywa się w przypadku: *a)* *punktem zewnętrznym*, *b)* *punktem styczności* (ust. 27) lub punktem leżącym na S^2 , *c)* *punktem wewnętrznym* stożkowej S^2 .

Skoro stożkowa S^2 , punkt *W* i prosta *w* leżą na wspólnej płaszczyźnie, to wówczas pomiędzy temi elementami zachodzą związki, które wypowiedzieć możemy w formie następujących twierdzeń:

Każda prosta w przecina się ze stożkową S^2 w dwóch i tylko w dwóch punktach. Owe punkty są albo rzeczywiste (i różne od siebie, wzgl. nakrywające się w jednym punkcie), albo też urojone sprzężone.

*Przez każdy punkt *W* przechodzą dwie i tylko dwie styczne do stożkowej S^2 . Owe styczne są albo rzeczywiste (i różne od siebie, wzgl. nakrywające się na jednej prostej), albo też urojone sprzężone.*

Na danej stożkowej S^2 obierzmy dowolny punkt *E* i oznaczmy przez *e* styczną w owym punkcie do stożkowej S^2 .

Uważajmy punkt *E* za wierzchołek pęku prostych $E(a, b, \dots, e, \dots)$. Prosta *e* jest „styczną“, a każda prosta *a*, *b*, ..., różna od stycznej *e*, jest „sieczną“ stożkowej S^2 . W istocie bowiem prosta np. *a*, która przecina stożkową w punkcie *E* i jest różna od stycznej *e*, musi — na mocy ostatniego twierdzenia — przeciąć stożkową S^2 jeszcze w drugim punkcie rzeczywistym.

Uważajmy prostą *e* za podstawę szeregu punktów $e(A, B, \dots, E, \dots)$. Punkt styczności *E* jest „punktem leżącym na“ stożkowej S^2 , a każdy punkt *A*, *B*, ..., różny od punktu *E*, jest „punktem zewnętrznym“ stożkowej S^2 . W istocie bowiem przez punkt np. *A*, który leży na stycznej *e* i jest różny od punktu styczności *E*, musi — na mocy ostatniego twierdzenia — przejść jeszcze druga styczna rzeczywista do stożkowej S^2 .

Na płaszczyźnie stożkowej S^2 obierzmy dowolny punkt zewnętrzny X , oraz dowolny punkt wewnętrzny Y . Proste EX i EY przechodzą przez punkt E stożkowej S^2 i są różne od stycznej e , przeto muszą być „siecznami“ tej stożkowej. A zatem:

Przez każdy punkt, bez względu na to, czy on jest punktem zewnętrznym, wewnętrznym, wzgl. leżącym na stożkowej S^2 , można zawsze wykreślić „proste sieczne“ tej stożkowej.

Na płaszczyźnie stożkowej S^2 obierzmy dowolną prostą zewnętrzną x , oraz dowolną prostą sieczną y . Punkty ex i ey leżą na stycznej e i są różne od punktu styczności E owej stycznej ze stożkową S^2 , przeto muszą być „punktami zewnętrznymi“ tej stożkowej.

Na każdej prostej, bez względu na to, czy ona jest prostą sieczną, prostą zewnętrzną, wzgl. styczną stożkowej S^2 , można zawsze obracać „punkty zewnętrzne“ tej stożkowej.

32. Podział stożkowych. Stożkowa jest utworem (ust. 30) dwóch jednokreślnych (ale nie perspektywicznych)

pęków prostych $(P_1) \overline{\wedge} (P_2)$, o różnych wierzchołkach P_1, P_2 i o wspólnej płaszczyźnie podstawowej ω .

szeregów punktów $(p_1) \overline{\wedge} (p_2)$ o różnych podstawach p_1, p_2 i o wspólnej płaszczyźnie podstawowej ω .

Rozważyć możemy dwa przypadki: *a)* płaszczyzna ω jest elementem niewłaściwym lub też *b)* płaszczyzna ω jest elementem właściwym. Dla płaszczyzny podstawowej niewłaściwej ω^∞ uważane pęki prostych i szeregi punktów są (ust. 2) „niewłaściwymi pękami“ i „niewłaściwymi szeregami“. Na mocy definicji, podanej w ust. 26, otrzymany:

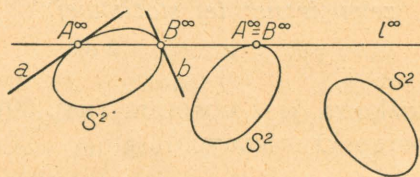
ogół punktów niewłaściwych, w których przecinają się homologiczne proste niewłaściwe dwóch rzutowych pęków prostych, leżących na płaszczyźnie niewłaściwej i nie posiadających wspólnego wierzchołka, nazywać będziemy stożkową niewłaściwą.

ogół prostych niewłaściwych, które łączą homologiczne punkty niewłaściwe dwóch rzutowych szeregów punktów, leżących na płaszczyźnie niewłaściwej i nie posiadających wspólnej podstawy, nazywać będziemy stożkową niewłaściwą.

W przypadku drugim, skoro płaszczyzna podstawowa ω jest elementem właściwym, uważane pęki prostych i przynajmniej jeden z szeregów punktów muszą być utworami „właściwymi”. Drugi szereg punktów może być albo właściwy, albo też niewłaściwy. Wierzchołki zaś jednokreślnych pęków prostych mogą być: obydwa właściwe, obydwa niewłaściwe, wreszcie jeden właściwy a drugi niewłaściwy. *Stożkową*, uzyskaną w powyższych przypadkach, *nazywać będziemy stożkową właściwą*.

Uwaga: Rozważania, przeprowadzone w ust. 26—31, stosują się do stożkowych właściwych, jak również i do stożkowych niewłaściwych.

Wiadomo nam z ust. 31, że każda prosta płaszczyzny podstawowej ω przecina stożkową S^2 w dwóch punktach. Prosta niewłaściwa l^∞ płaszczyzny właściwej ω przetnie się ze stożkową właściwą S^2 również



Ryc. 44.

Ryc. 45.

Ryc. 46.

w dwóch punktach, które oczywiście muszą być punktami niewłaściwymi A^∞ i B^∞ . Owe punkty niewłaściwe (ust. 31) mogą być: a) rzeczywiste i różne od siebie A^∞ , B^∞ , b) rzeczywiste i, zjednoczone (nakrywające się) w jednym punkcie $A^\infty = B^\infty$, c) urojone sprzężone. Na symbolicznych rysunkach 44—46 podane jest zachowanie się stożkowej właściwej S^2 względem prostej niewłaściwej l^∞ . Stożkową właściwą S^2 nazywamy w przypadku: a) *hiperbolą*, b) *parabolą*, c) *elipsą*. Prosta niewłaściwa l^∞ jest (ust. 31): a) dla hiperboli „sieczną“, b) dla paraboli „styczną“ w punkcie niewłaściwym $A^\infty = B^\infty$, c) dla elipsy „prostą zewnętrzną“. Możemy tedy wprowadzić następujące definicje:

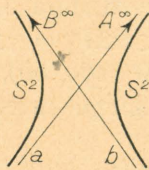
a) Stożkowa właściwa, która posiada dwa różne od siebie punkty niewłaściwe, nazywa się *hiperbolą*.

b) Stożkowa właściwa, styczna do prostej niewłaściwej, nazywa się *parabolą*.

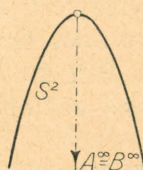
c) Stożkowa właściwa, która posiada dwa niewłaściwe punkty urojone sprzężone, nazywa się *elipsą*.

Z rozważań ust. 27 wiadomo nam, że stożkowa S^2 posiada w każdym swoim punkcie jedną i tylko jedną styczną. Również i w punkcie niewłaściwym A^∞ posiada stożkowa właściwa S^2 (ryc. 44) jedną i tylko jedną styczną a , którą nazywać będzie-

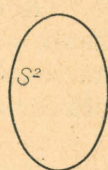
my *asymptotą*. Hiperbola (por. ryc. 44 i 47) posiada zatem dwie rzeczywiste i różne od siebie asymptoty a i b , które są prostymi właściwymi. Dla paraboli (ryc. 45 i 48) jej obydwie asymptoty zjednoczyły się z jej styczną niewłaściwą l^∞ . Natomiast elipsa (ryc. 46 i 49) posiada dwie asymptoty „urojone sprzężone”; prawdziwości tego dowiedzimy w ust. 49.



Ryc. 47.



Ryc. 48.



Ryc. 49.

Wykażemy teraz, że koło jest szczególnym przypadkiem elipsy. W tym celu weźmy pod uwagę dwa „wprost przystające” pęki prostych o wspólnym wierzchołku P i wspólnej płaszczyźnie podstawowej ω

$$P(a, b, c, \dots)_\omega \cong P(a^0, b^0, c^0, \dots)_\omega,$$

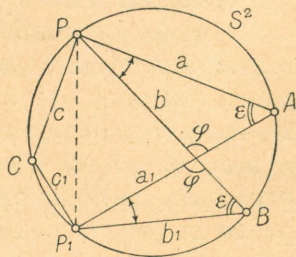
które są (ust. 20) pękami „eliptycznymi”. Prosta niewłaściwa l^∞ płaszczyzny ω przecina się z temi pękami w dwóch „wprost przystających” szeregach punktów niewłaściwych

$$l^\infty(A^\infty, B^\infty, C^\infty, \dots) \cong l^\infty(A_0^\infty, B_0^\infty, C_0^\infty, \dots),$$

które posiadają dwa urojone sprzężone punkty zjednoczone. W płaszczyźnie ω wykonajmy taki ruch „sztywnego” pędu $P(a^0, \dots)$, aby wierzchołek jego zajął nowe położenie P_1 , a poszczególne proste położenia $a_1 \parallel a^0$, $b_1 \parallel b^0$, $c_1 \parallel c^0, \dots$, czyli innymi słowy, aby nowo skonstruowany pęk prostych $P_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$ był perspektywiczny do szeregu $l^\infty(A_0^\infty, B_0^\infty, C_0^\infty, \dots)$. Pęki prostych $P(a, b, c, \dots)$ i $P_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$ są również (ust. 20) pękami „wprost przystającymi”, a zatem i rzutowymi. Ich utworem jest elipsa, gdyż owa stożkowa S^2 przecina się z prostą niewłaściwą l^∞ w dwóch punktach urojonych sprzężonych, które są elementami zjednoczonymi wypisanych powyżej szeregów przystających o wspólnej podstawie l^∞ . Z równości kątów $\angle ab = \angle a_1 b_1$ (o ile punkty $A = aa_1$ i $B = bb_1$ leżą po jednej i tej samej „stronie” odcinka PP_1) oraz kątów wierzchołkowych φ (ryc. 50) wynika równość kątów obwodowych:

$$\angle PAP_1 = \angle PBP_1 = \angle \varepsilon$$

wspierających się na cięciwie PP_1 . Stożkowa S^2 jest zatem kołem. Wykazaliśmy tedy, że:



Ryc. 50.

Utworem dwóch wprost przystających pęków prostych o różnych wierzchołkach, które nie są perspektywiczne i leżą na wspólnej płaszczyźnie, jest koło.

Korzystając z twierdzenia *Steinera* (ust. 27) oraz równości kątów obwodowych: $\sphericalangle PAP_1 = \sphericalangle PBP_1 = \sphericalangle \varepsilon$, wspierających się na cięciwie $\overline{PP_1}$ koła S^2 (ryc. 50), dowieść możemy z łatwością prawdziwości następującego twierdzenia:

Rzucając poszczególne punkty koła z dwóch jego dowolnych punktów, otrzymujemy dwa wprost przystające pęki prostych.

33. Stożkowe zniekształcone. W dotychczasowych naszych rozważaniach, odnoszących się do stożkowych, przyjmowaliśmy dwa rzutowe pęki prostych o dwóch różnych wierzchołkach, oraz dwa jednokreślne szeregi punktów o dwóch różnych podstawach.

Weźmy teraz pod uwagę dwa rzutowe (ale nie perspektywiczne)

pęki prostych

$$P(a_1, b_1, c_1, \dots) \overline{\wedge} P(a_2, b_2, c_2, \dots)$$

o wspólnym wierzchołku P i o wspólnej płaszczyźnie podstawowej ω .

Ogół punktów, w których przecinają się homologiczne proste dwóch rzutowych (ale nie perspektywicznych) pęków, posiadających wspólny wierzchołek i wspólną płaszczyznę podstawową, zdefiniujemy jako *stożkową zniekształconą*.

Wierzchołek P uważanych pęków jest punktem charakterystycznym stożkowej zniekształconej, gdyż w nim zjednoczyły się punkty: $A = a_1a_2$, $B = b_1b_2$, $C = c_1c_2, \dots$, przecięcia się homologicznych prostych owych pęków. Pęki te posiadają jednak (ust. 16 i 22) dwie proste zjednoczone

szeregi punktów

$$p(A_1, B_1, C_1, \dots) \overline{\wedge} p(A_2, B_2, C_2, \dots)$$

o wspólnej podstawie p .

Ogół prostych, które łączą homologiczne punkty dwóch rzutowych (ale nie perspektywicznych) szeregów, posiadających wspólną podstawę, zdefiniujemy jako *stożkową zniekształconą*.

Podstawa p uważanych szeregów jest prostą charakterystyczną stożkowej zniekształconej, gdyż z nią zjednoczyły się proste: $a = A_1A_2$, $b = B_1B_2$, $c = C_1C_2, \dots$, łączące homologiczne punkty owych szeregów. Szeregi te posiadają jednak (ust. 15) dwa punkty zjednoczone $E_1 = E_2$

$e_1 = e_2$ i $f_1 = f_2$. Ponieważ każdy punkt, leżący na prostej $e_1 = e_2$ (wzgl. $f_1 = f_2$), uważać można za punkt przecięcia się homologicznych prostych e_1 i e_2 (wzgl. f_1 i f_2), przeto: badana stożkowa zniekształcona rozpada się na dwie proste zjednoczone $e_1 = e_2$ i $f_1 = f_2$,

które (ust. 22 i ust. 15) mogą być: a) rzeczywiste i różne od siebie, b) rzeczywiste i nakrywające się na jednej prostej, wzgl. w jednym punkcie, c) urojone sprzężone. Natomiast wierzchołek P i podstawa p są zawsze elementami rzeczywistymi.

Pozostaje nam wkońcu do omówienia przypadek dwóch perspektywicznych

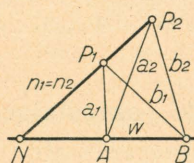
pęków prostych

$P_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \overline{\wedge} P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$,
leżących na wspólnej płaszczyźnie podstawowej i nie posiadających wspólnego wierzchołka. Pęki te niechaj będą rzutami szeregu punktów $w(A, B, C, \dots)$.

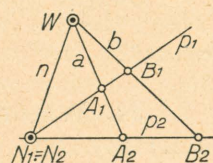
Ogół punktów, w których przecinają się homologiczne proste owych dwóch perspektywicznych pęków prostych, zdefiniujemy jako stożkową zniekształconą.

Stożkowa ta rozpada się na prostą P_1P_2 , łączącą wierzchołki pęków, oraz na prostą w , będącą podstawą pomocniczego szeregu punktów.

i $F_1 = F_2$. Ponieważ każda prosta, przechodząca przez punkt $E_1 = E_2$ (wzgl. punkt $F_1 = F_2$), uważać możemy za prostą, łączącą dwa homologiczne punkty E_1 i E_2 (wzgl. F_1 i F_2), przeto: badana stożkowa zniekształcona rozpada się na dwa punkty zjednoczone $E_1 = E_2$ i $F_1 = F_2$,



Ryc. 51.



Ryc. 52.

szeręgów punktów

$p_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$,
leżących na wspólnej płaszczyźnie podstawowej i nie posiadających wspólnej podstawy. Szeregi te niechaj będą przekrojami pęku prostych $W(a, b, c, \dots)$.

Ogół prostych, które łączą homologiczne punkty owych dwóch perspektywicznych szeregów punktów, zdefiniujemy jako stożkową zniekształconą.

Stożkowa ta rozpada się na punkt p_1p_2 , przecięcia się podstaw szeregów, oraz na punkt W , będący wierzchołkiem pomocniczego pęku prostych.

Proste P_1P_2 i w , oraz punkty p_1p_2 i W są zawsze (w naszych rozważaniach) elementami rzeczywistymi.

Płaszczyzna podstawowa ω dwóch rzutowych pęków prostych o wspólnym wierzchołku P , wzgl. dwóch rzutowych szeregów punktów o wspólnej podstawie p , dwóch perspektywicznych pęków prostych lub dwóch perspektywicznych szeregów punktów może być: 1) płaszczyzną właściwą, 2) płaszczyzną niewłaściwą. W przypadku pierwszym uzyskamy *stożkowe zniekształcone „właściwe“*, a w drugim *stożkowe zniekształcone „niewłaściwe“*.

Uwaga: W odróżnieniu od nich nazwać moglibyśmy te stożkowe (właściwe i niewłaściwe), które badaliśmy w ust. 26—31, „*stożkowymi nieznieskształconymi*“.

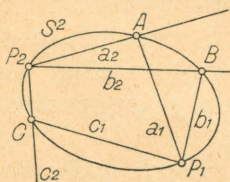
34. Warunki, określające stożkową. Na płaszczyźnie ε obierzmy (ryc. 53) pięć dowolnych punktów A, B, C, P_1 i P_2 , z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Z dwóch danych punktów, np. P_1 i P_2 , rzućmy trzy pozostałe punkty, a skonstruowane w ten sposób trzy pary prostych: $P_1A = a_1$ i $P_2A = a_2$, $P_1B = b_1$ i $P_2B = b_2$, $P_1C = c_1$ i $P_2C = c_2$ uważajmy za elementy homologiczne dwóch rzutowych pęków prostych

$$P_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \overline{\wedge} P_2(a_2, b_2, c_2, \dots).$$

Utworem tych pęków jest (ust. 27) stożkowa S^2 , przechodząca przez dane punkty A, B, C, P_1 i P_2 . Ta stożkowa jest *jedyną* stożkową, która przechodzi przez owe punkty. Przypuśćmy bowiem, że jest dana inna stożkowa S_1^2 , przechodząca przez punkty A, B, C, P_1 i P_2 . Rzucając poszczególne punkty stożkowej S_1^2 z dwóch jej punktów P_1 i P_2 , otrzymamy (ust. 27) dwa rzutowe pęki prostych $(P_1) \overline{\wedge} (P_2)$, dla których proste a_1 i a_2 , b_1 i b_2 , c_1 i c_2 są oczywiście elementami homologicznymi. Rzutowość ta jest zatem identyczna (ust. 17) z rzutowością, poprzednio skonstruowaną, czyli innymi słowy stożkowa S_1^2 jest identyczna ze stożkową S^2 . A zatem:

Pięć punktów dowolnej płaszczyzny, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, określa jedną i tylko jedną stożkową, przechodzącą przez te punkty.

Pięć prostych dowolnej płaszczyzny, z których żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, określa jedną i tylko jedną stożkową, dla której te proste są stycznymi.



Ryc. 53.

Obierzmy na płaszczyźnie ε cztery punkty A , B , P_1 i P_2 , z których żadna trójka nie leży na jednej prostej, oraz prostą s_1 , przechodzącą tylko przez punkt np. P_1 . Punkty P_1 i P_2 uważamy za wierzchołki dwóch rzutowych pęków prostych, których elementami homologicznymi są proste: $P_1A = a_1$ i $P_2A = a_2$, $P_1B = b_1$ i $P_2B = b_2$, oraz s_1 i $P_2P_1 = s_2$. Stożkowa S^2 , będąca utworem tych pęków, przechodzi przez dane punkty A , B , P_1 , P_2 i posiada (ust. 27) w wierzchołku P_1 pierwszego pęku styczną s_1 . W sposób podany poprzednio wykazać możemy, że istnieje jedna i tylko jedna stożkowa S^2 , spełniająca powyższe warunki. A zatem:

Stożkowa (nieznieskształcona) jest określona, skoro dane są cztery dowolne jej punkty, (z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej), oraz styczna w jednym z nich, nie przechodząca przez żaden z pozostałych punktów danych.

Stożkowa (nieznieskształcona) jest określona, skoro dane są cztery dowolne jej styczne, (z których żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie), oraz punkt styczności jednej z nich, nie leżący na żadnej z pozostałych stycznych danych.

Na płaszczyźnie ε niechaj dane będą trzy punkty A , P_1 i P_2 , nie leżące na jednej prostej, oraz prosta s_1 , przechodząca tylko przez punkt P_1 , i prosta t_2 , przechodząca tylko przez punkt P_2 . Skoro trzy pary prostych: $P_1A = a_1$ i $P_2A = a_2$, s_1 i $P_2P_1 = s_2$, $P_1P_2 = t_1$ i t_2 uważać będziemy za homologiczne elementy pęków rzutowych

$$P_1(a_1, s_1, t_1, \dots) \bar{\wedge} P_2(a_2, s_2, t_2, \dots),$$

to utworem tych pęków będzie jedna i tylko jedna stożkowa S^2 , przechodząca przez dane punkty A , P_1 i P_2 , oraz posiadająca styczną s_1 w punkcie P_1 i styczną t_2 w punkcie P_2 . A zatem:

Stożkowa (nieznieskształcona) jest wyznaczona, skoro dane są trzy dowolne jej punkty (nie leżące na jednej prostej), oraz styczne w dwu z nich, nie przechodzące przez żaden z pozostałych punktów danych.

Stożkowa (nieznieskształcona) jest wyznaczona, skoro dane są trzy dowolne jej styczne (nie przecinające się w jednym punkcie), oraz punkty styczności dwu z nich, nie leżące na żadnej z pozostałych stycznych danych.

Uwaga: W ust. 54-ym wykazemy, że albo nie istnieje ani jedna stożkowa, albo też istnieją dwie takie stożkowe, które: *a)* przechodzą przez cztery dane punkty (z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej) i są styczne do danej prostej, (nie przechodzącej przez żaden z danych punktów); *b)* są styczne do czterech danych prostych (z których żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie) i przechodzą przez dany punkt (nie leżący na żadnej z danych prostych).

W ust. 55-ym wykazemy, że albo nie istnieje ani jedna stożkowa, albo też istnieją cztery stożkowe, które: *a)* przechodzą przez trzy dane punkty (nie leżące na jednej prostej) i są styczne do dwóch danych prostych (nie przechodzących przez żaden z danych punktów); *b)* są styczne do trzech danych prostych (nie przecinających się w jednym punkcie) i przechodzą przez dwa dane punkty (nie leżące na żadnej z danych prostych).

Inne sposoby wyznaczenia stożkowej omówimy w ust. 52.

35. Zadania konstrukcyjne i ćwiczenia. Korzystając z dotychczasowych rozważań, rozwiązać możemy zadania konstrukcyjne, odnoszące się do stożkowych.

Zadanie 1: Danych jest na płaszczyźnie pięć punktów 1, 2, 3, 4 i 5, które określają stożkową S^2 , oraz prosta l , przechodząca przez punkt 5. Skonstruować należy drugi punkt przecięcia się prostej l ze stożkową S^2 .

Rozwiązanie 1: Punkty 5 i np. 1 uważajmy za wierzchołki dwóch rzutowych pęków prostych, których elementami homologicznymi są proste: $52 = a$ i $12 = a_1$, $53 = b$ i $13 = b_1$, $54 = c$ i $14 = c_1$. Skoro — w sposób poznany w ust. 19. — uzupełnimy dwa pęki jednokreślne

$$5(a, b, c, \dots) \bar{\wedge} 1(a_1, b_1, c_1, \dots)$$

i prostej l , uważanej za element pęku (5), podporządkujemy w pęku (1) jedną ściśle określoną prostą l_1 , to wów-

Zadanie 2: Danych jest na płaszczyźnie pięć prostych I, II, III, IV i V , które określają stożkową S^2 , oraz punkt L , leżący na stycznej V . Skonstruować należy drugą styczną stożkowej S^2 , przechodzącą przez punkt L .

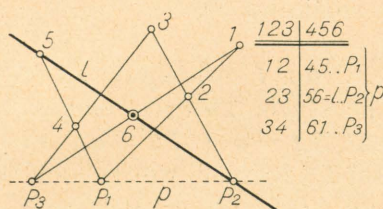
Rozwiązanie 1: Styczne VI i np. I uważajmy za podstawy dwóch rzutowych szeregów punktów, których elementami homologicznymi są punkty: $VI = A$ i $II = A_1$, $III = B$ i $III = B_1$, $IV = C$ i $IV = C_1$. Skoro — w sposób poznany w ust. 19 — uzupełnimy dwa szeregi jednokreślne

$$V(A, B, C, \dots) \bar{\wedge} I(A_1, B_1, C_1, \dots)$$

i punktowi L , uważanemu za element szeregu (V), podporządkujemy w szeregu (I) jeden ściśle oznaczony punkt

czas punkt $ll_1 = 6$ rozwiązuje zadanie. W istocie bowiem pęki $(5) \wedge (1)$ utworzą stożkową S^2 , a punkt $ll_1 = 6$ tej stożkowej leży na danej prostej l .

Rozwiązanie 2: Dane punkty i szukany punkt 6 uważamy za wierzchołki sześciokąta $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$, wpisanego w daną stożkową S^2 .

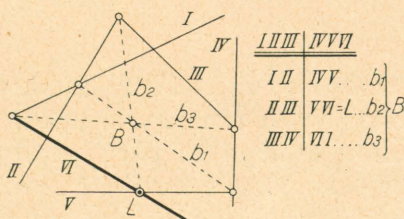


Ryc. 54.

Korzystając z twierdzenia Pascala (ust. 28), konstruujemy z łatwością żądany punkt 6. Ze schematu, podanego na ryc. 54, wynika, że prosta Pascala $p = P_1P_2$ przechodzi przez punkty P_1 i P_2 , w których przecinają się pary prostych: $1\ 2$ i $4\ 5$, wzgl. $2\ 3$ i $5\ 6 = l$. Prosta $3\ 4$ i prosta $6\ 1$, (łącznie nieznany wierzchołek 6 z punktem 1), przeciąć się muszą w punkcie P_3 na prostej Pascala p . Ponieważ punkt P_3 przynależy do prostych p i $3\ 4$, przeto prosta $P_31 = 6\ 1$ przechodzi przez szukany punkt 6. Proste $l = 5P_2 = 56$ i $P_31 = 6\ 1$ przecinają się w punkcie 6, który spełnia warunki zadania.

L_1 , to wówczas prosta $LL_1 = VI$ rozwiązuje zadanie. W istocie bowiem szeregi $(V) \wedge (I)$ utworzą stożkową S^2 , a styczna $LL_1 = VI$ tej stożkowej przechodzi przez dany punkt L .

Rozwiązanie 2: Dane proste i szukaną prostą VI uważamy za boki sześcioboku $(I\ II\ III\ IV\ V\ VI)$, opisanego na danej stożkowej S^2 .



Ryc. 55.

Korzystając z twierdzenia Brianchona (ust. 28), konstruujemy z łatwością żądaną styczną VI . Ze schematu, podanego na ryc. 55, wynika, że punkt Brianchona $B = b_1b_2$ leży na prostych b_1 i b_2 , które łączą pary punktów $I\ II$ i $IV\ V$, wzgl. $II\ III$ i $V\ VI = L$. Punkt $III\ IV$ i punkt VII (przecięcia się nieznanego boku VI z prostą I), wyznaczają prostą b_3 , przechodzącą przez punkt Brianchona B . Ponieważ prosta b_3 przynależy do punktów B i $III\ IV$, przeto punkt $b_3I = VII$ leży na szukanej prostej VI . Punkty $L = Vb_2 = VVI$ i $b_3I = VII$ wyznaczają prostą VI , która spełnia warunki zadania.

Uwaga: Zadania 1 i 2, jak konstrukcje, wypisane obok siebie i służące do rozwiązania tych zadań, podporządkowane są sobie (ust. 5) w myśl zasady biegunowej dwoistości na płaszczyźnie. Z tego też powodu w dalszym ciągu podawać będziemy rozwiązania zadań wypisanych po jednej (np. lewej) stronie.

Zadanie 3: Stożkowa S^2 określona jest pięcioma punktami 1, 2, 3, 4 i 5, z których żadna trójka nie leży na jednej prostej. Skonstruować należy styczną e w punkcie 3 do stożkowej S^2 .

Zadanie 4: Stożkowa S^2 określona jest pięcioma stycznymi I, II, III, IV i V, z których żadna trójka nie przechodzi przez jeden punkt. Skonstruować należy punkt styczności E stycznej III ze stożkową S^2 .

Rozwiązanie 1: Punkty 3 i np. 1 uważajmy za wierzchołki dwóch rzutowych pęków prostych, których elementami homologicznymi są pary prostych: $32 = a$ i $12 = a_1$, $34 = b$ i $14 = b_1$, $35 = c$ i $15 = c_1$. Prostej 13, łączącej wierzchołki tych pęków i uważanej za element pęku (1), podporządkowana będzie w pęku (3) prosta e ; owa prosta (ust. 27) jest styczną w wierzchołku 3 do stożkowej S^2 i rozwiązuje zadanie.

Rozwiązanie 2: Skoro dane punkty uważać będziemy za wierzchołki pięciokąta wpisanego w stożkową S^2 , to korzystając (ust. 29) z twierdzenia Pascala, skonstruować możemy szukaną styczną e . Pięciokąt (1 2 3 4 5) jest szczególnym przypadkiem sześciokąta (1 2 3 = 6 4 5), którego dwa wierzchołki 3 i 6 zjednoczyły się w jednym punkcie $3 = 6$, a którego bok $36 = e$ jest styczną stożkowej S^2 . Z wypisanego schematu wynika, że

$$\begin{array}{c|c} 1\ 2\ 3 & 6\ 4\ 5 \\ \hline 1\ 2 & 6\ 4 \dots P_1 \\ 2\ 3 & 4\ 5 \dots P_2 \\ e = 3\ 6 & 5\ 1 \dots P_3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} 1\ 2\ 3 & 6\ 4\ 5 \\ \hline 1\ 2 & 6\ 4 \dots P_1 \\ 2\ 3 & 4\ 5 \dots P_2 \\ e = 3\ 6 & 5\ 1 \dots P_3 \end{array}} \right\} p$$

prosta Pascala $p = P_1 P_2$ przechodzi przez punkty P_1 i P_2 , w których przecinają się pary prostych 12 i 64, wzgl. 23 i 45. Prosta 51 i nieznana styczna $e = 36$ przeciąć się muszą w punkcie P_3 na prostej Pascala p .

Proste $p = P_1 P_2$ i 51 przecinają się punkcie P_3 , a prosta $P_3 3 = 36 = e$ jest szukaną styczną.

Ćwiczenie 1: Rozwiązać zadanie 3 wówczas, jeżeli punkt 3 stożkowej S^2 jest punktem niewłaściwym 3^∞ , przynależnym do danej prostej a . (Wynikowa styczna $e = 3^\infty 6^\infty$, równoległa do prostej a , jest asymptotą stożkowej S^2).

Ćwiczenie 2: Parabola S^2 określona jest (p. zad. 4) czterema stycznymi właściwymi I, II, III i IV, oraz styczną niewłaściwą V^∞ . Skonstruować należy

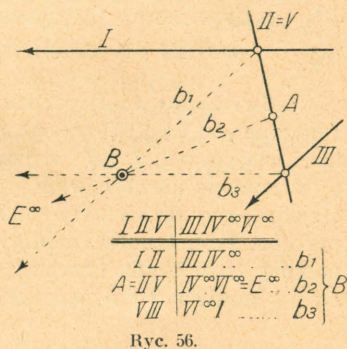
punkt styczności E stycznej III z tą parabolą: a) przy pomocy dwóch rzutowych szeregów punktów o podstawach III i np. I ; b) przy pomocy twierdzenia Brianchona.

Zadanie 5: Parabola S^2 określona jest trzema stycznymi właściwymi I, II, III , styczną niewłaściwą IV^∞ i punktem styczności A stycznej II . Skonstruować należy punkt styczności E^∞ stycznej IV^∞ z parabolą.

Rozwiązanie: Skoro dane styczne uważać będziemy (ryc. 56) za boki czworoboku $(I II III IV^\infty)$, opisanego na paraboli S^2 , to korzystając (ust. 29) z twierdzenia Brianchona'sa skonstruować możemy żądany punkt styczności E^∞ . Uważany czworobok jest szczególnym przypadkiem sześcioboku $(I II = V III IV^\infty = VI^\infty)$, opisanego na tej paraboli, przyczem boki II i V zjednoczyły się na jednej prostej, a punkt styczności $A = II V$ jest punktem przecięcia się stycznych II i V , oraz dwa boki niewłaściwe IV^∞ i VI^∞ zjednoczyły się na prostej niewłaściwej, a szukany punkt styczności $E^\infty = IV^\infty VI^\infty$ jest punktem przecięcia się stycznych IV^∞ i VI^∞ . Z wypisanego (na ryc. 56) schematu wynika, że prosta $b_1 // III$ i prosta $b_3 // I$ przecinają się w punkcie Brianchona, $B = b_1 b_3$. Punkt styczności $A = II V$ i nieznany punkt styczności $E^\infty = IV^\infty VI^\infty$ wyznaczają prostą $b_2 = AE^\infty$, która koniecznie przejść musi przez punkt Brianchona $B = b_1 b_3$. Wnosimy stąd, że punkt niewłaściwy E^∞ prostej $b_2 = AB$ rozwiązuje zadanie.

Zadanie 7: Dane są asymptoty a, b i dowolna styczna s hiperboli. Wyznaczyć punkt styczności S prostej s z hiperbolą.

Zadanie 6: Hiperbola S^2 określona jest trzema punktami właściwymi $1, 2, 3$, punktem niewłaściwym 4^∞ (przynależnym do danej prostej l) i styczną a w punkcie 2. Skonstruować należy asymptotę (styczną) w punkcie 4^∞ hiperboli.

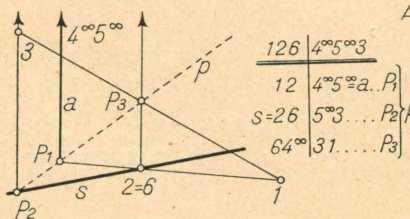


Ryc. 56.

Zadanie 8: Dane są asymptoty a, b i dowolny punkt S hiperboli. Wyznaczyć punkt styczności S styczną s do tej hiperboli.

Rozwiązanie: Uważamy asymptotę a za prostą, na której zjednoczyły się dwie styczne I i II hiperboli. Punkt styczności A^∞ asymptoty a z hiperbolą jest wówczas punktem $A^\infty = I II$, przecięcia się stycznych I i II . Podobnie z asymptotą b zjednoczyły się dwie styczne III i IV , a punkt $B^\infty = III IV$ jest drugim punktem niewłaściwym hiperboli. Skoro założymy, że na stycznej s zjednoczyły się dwie dalsze styczne V i VI hiperboli, to ich punkt przecięcia się $S = V VI$ spełnia warunki zadania. Korzystając z sześcioboku ($I = II$ $III = IV$ $V = VI$), opisanego na hiperboli (ust. 43), z łatwością skonstruujemy ów punkt styczności S .

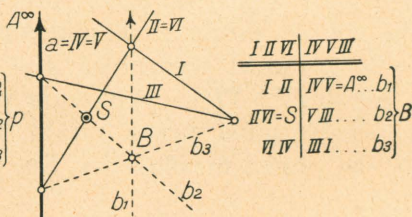
Ćwiczenie 3: Hiperbola wyznaczona jest (ryc. 57) trzema punktami właściwymi $1, 2, 3$ i asymptotą a (w punkcie niewłaściwym prostej a zjednoczyły się punkty 4^∞ i 5^∞ hiperboli). Skonstruować należy (przy pomocy twierdzenia Pascala) styczną s w punkcie 2 do hiperboli.



Ryc. 57.

Rozwiązanie: W punkcie styczności asymptoty a z hiperbolą zjednoczyły się dwa niewłaściwe punkty 1^∞ i 2^∞ hiperboli. Asymptota a jest wówczas prostą właściwą $a = 1^\infty 2^\infty$, łączącą punkty 1^∞ i 2^∞ . Podobnie w punkcie niewłaściwym asymptoty b zjednoczyły się dwa punkty 3^∞ i 4^∞ , a prosta $b = 3^\infty 4^\infty$ jest drugą asymptotą hiperboli. Skoro założymy, że w punkcie S zjednoczyły się dwa dalsze punkty 5 i 6 hiperboli, to prosta łącząca owe punkty $56 = s$ spełnia warunki zadania. Korzystając z sześciokąta ($1 = 2$ $3 = 4$ $5 = 6$), wpisanego w hiperbolę (ust. 43), z łatwością skonstruujemy ową styczną s .

Ćwiczenie 4: Hiperbola wyznaczona jest (ryc. 58) trzema stycznymi właściwymi I, II, III i asymptotą a (na której zjednoczyły się dwie styczne IV i V hiperboli). Skonstruować należy (przy pomocy tw. Brianchona) punkt styczności S stycznej II do hiperboli.



Ryc. 58.

Ćwiczenie 5: Hiperbola określona jest dwoma punktami właściwymi 1 i 2 , punktem niewłaściwym 3^∞ , przynależnym do danej prostej l , oraz asymptotą $a = 4^\infty 5^\infty$. Skonstruować (przy pomocy tw. Pascala) drugą asymptotę $b = 3^\infty 6^\infty$ tej hiperboli.

Ćwiczenie 6: Hiperbola określona jest asymptotą a (zawierającą punkty $1^\infty = 2^\infty$), punktami 3 i 4^∞ , oraz styczną s w punkcie właściwym 3 . Skonstruować należy drugą asymptotę $b = 4^\infty 5^\infty$ tej hiperboli. — Do konstrukcji użyć należy sześciokąta ($1^\infty = 2^\infty$ $3 = 6$ $4^\infty = 5^\infty$).

Zadanie 9: Dane są asymptoty a, b i dowolna styczna V hiperboli. Z punktu T , leżącego na prostej V , poprowadzić styczną VI do hiperboli.

Zadanie 10: Dane są asymptoty a, b i dowolny punkt 5 hiperboli. Przez punkt 5 poprowadzmy prostą l i wyznaczmy punkt 6 przecięcia się prostej l z hiperbolą.

Rozwiązanie: Niechaj styczne I i II hiperboli zjednoczą się z asymptotą a , oraz styczne III i IV z asymptotą b . Korzystając z sześcioboku ($I = II$ $III = IV$ V VI), opisanego na hiperboli, z łatwością skonstruujemy wynikową styczną VI .

Ćwiczenie 7: Parabola określona jest czterema stycznymi właściwymi I, II, III i IV . Z punktu T , leżącego na prostej II , wykreślić styczną VI do paraboli. (Skoro styczną niewłaściwą paraboli oznaczmy przez V^∞ , to przy pomocy sześcioboku (I II VI III IV V^∞) wykreślimy prostą VI).

Ćwiczenie 8: Rozwiązać ćwiczenie 7 wówczas, skoro parabola określona jest: a) trzema stycznymi I, II, III i punktem styczności C stycznej III ; b) dwiema stycznymi I i II , oraz ich punktami styczności A i B .

Ćwiczenie 9: Parabola określona jest czterema punktami $1, 2, 3, 4^\infty$, oraz styczną niewłaściwą a^∞ w punkcie 4^∞ . Przez punkt 2 wykreślić dowolną prostą l (nie zawierającą żadnego z pozostałych punktów danych) i wyznaczyć punkt 6 , przecięcia się prostej l z parabolą. (— Do konstrukcji użyć należy sześciokąta (1 2 6 3 $4^\infty 5^\infty$), przychem $a^\infty = 4^\infty 5^\infty$).

Zadanie 11: Dane są trzy punkty właściwe $1, 2, 3$ i asymptota a hiperboli. Skonstruować należy drugą asymptotę b tej hiperboli.

Rozwiązanie: Przez punkt niewłaściwy asymptoty a , w którym zjednoczyły się dwa punkty 4^∞ i 5^∞ hiperboli, poprowadzmy prostą niewłaściwą l^∞ . Drugi punkt 6^∞ , przecięcia się prostej l^∞ z hiperbolą, otrzymamy przy pomocy wypisanego schematu.

$$\left. \begin{array}{l|l} 1 & 4^\infty = 5^\infty 6^\infty \\ 2 & 4^\infty 5^\infty = a \dots P_1 \\ 3 & 5^\infty 6^\infty = l^\infty \dots P_2 \\ 6 & 6^\infty 1 \dots \dots \dots P_3 \end{array} \right\} p$$

Skoro założymy, że z punktem 6^∞ zjednoczył się punkt niewłaściwy 7^∞ , to prosta właściwa

$b = 6^\infty 7^\infty$ będzie szukaną asymptotą hiperboli. Prostą b wyznaczmy za pośrednictwem sześciokąta np. (1 2 $4^\infty = 5^\infty 6^\infty = 7^\infty$), wpisanego w hiperbolę.

Zadanie 12: Dane są trzy styczne właściwe I, II i III , oraz asymptota a hiperboli. Skonstruować drugą asymptotę b tej hiperboli.

Rozwiązanie: Stosując dwukrotnie twierdzenie Brianchona wyznaczmy punkty styczności A i B stycznych I i II z hiperbolą. Następnie weźmy pod uwagę sześciokąt $(1 = 2\ 3 = 4\ 5^\infty 6^\infty)$, wpisany w hiperbolę, którego dwa wierzchołki 1 i 2 zjednoczyły się w punkcie styczności A , dwa dalsze wierzchołki 3 i 4 zjednoczyły się w punkcie styczności B , wierzchołek 5^∞ jest punktem niewłaściwym asymptoty a , wreszcie wierzchołek 6^∞ jest drugim punktem przecięcia się prostej niewłaściwej $l^\infty = 5^\infty 6^\infty$ z hiperbolą. Stosując twierdzenia Pascala do sześciokątów $(1 = 2\ 3 = 4\ 5^\infty 6^\infty)$ i $(1 = 2\ 3\ 5^\infty 6^\infty = 7^\infty)$ skonstruujemy najpierw punkt 6^∞ , a następnie asymptotę $b = 6^\infty 7^\infty$.

Uwaga: Skoro porównamy sześciokąty wpisane w stożkową S^2 i sześcioboki opisane na stożkowej S^2 , jakimi posługiwaliśmy się w tym ustępie przy stosowaniu twierdzeń Pascala i Brianchona, to zauważymy, że nie wypisywaliśmy w dowolnym porządku wierzchołków owych sześciokątów, wzgl. boków owych sześcioboków. Zawsze „obok siebie“ wypisane były te wierzchołki (wzgl. boki), które zjednoczone były w jednym punkcie (wzgl. na jednej prostej). — W zadaniu np. 3 obok siebie wypisaliśmy wierzchołki 3 i 6 przynależne do stycznej e ; podobnie w zadaniu np. 5 obok siebie wypisaliśmy boki II i V , oraz IV^∞ i VI^∞ . Porządek dalszych wierzchołków, wzgl. boków tych wielokątów był już dowolny. W zadaniu np. 5 mogliśmy użyć do konstrukcji sześcioboków: $(II = V\ I\ III\ IV^\infty = VI^\infty)$, $(I\ III\ II^\infty = V\ IV^\infty = VI^\infty)$, $(III\ IV^\infty = VI^\infty\ I\ II = V)$ i t. p.

W zadaniu np. 1 na danej prostej l leżą wierzchołki 5 i 6 . Otóż do konstrukcji użyć możemy takich sześciokątów, w którychby wierzchołki 5 i 6 wypisane były „obok siebie“. A zatem: $(1\ 3\ 5\ 6\ 2\ 4)$, $(1\ 5\ 6\ 3\ 2\ 4)$, $(1\ 6\ 5\ 2\ 4\ 3)$, i t. p.

W zadaniu np. 2 styczne V i VI przecinają się w danym punkcie L . Do konstrukcji posługiwać się możemy sześciobokami np. $(V = VI\ I\ IV\ III\ II)$ $(II\ V = VI\ III\ I\ IV)$, $(III\ I\ IV\ II\ VI = V)$,... przyczem boki V i VI muszą być wypisane zawsze obok siebie.

Przy wypisywaniu wierzchołków sześciokątów (wzgl. boków sześcioboków) należy baczyć na to, *aby w schematach uwzględnione były wszelkie warunki odnośnego zadania!* W zadaniu 1 użyć musimy do konstrukcji danej prostej $l = 56$; podobnie w zadaniu 2 użyć musimy danego punktu $L = V\ VI$. W zadaniu np. 5 uwzględnić musimy dany punkt styczności $A = II\ V$ i wynikowy punkt styczności $E^\infty = IV^\infty\ VI^\infty$. W wymienionych tu zadaniach prosta l , punkty L , A i E^∞ są ich „warunkami“.

36. Konstrukcje Steinera. W ust. 19 poznaliśmy sposoby konstrukcyjnego uzupełnienia dwóch rzutowych szeregów punktów o wspólnej podstawie, oraz dwóch jednokreślnych pęków prostych o wspólnym wierzchołku i wspólnej płaszczyźnie podstawowej. Jednak dopiero teraz omówić możemy konstrukcje,

służące do wyznaczenia *punktów zjednoczonych* (ust. 15) i *prostych zjednoczonych* (ust. 16 i 22) tych utworów.

Na płaszczyźnie rysunkowej dane są (ryc. 59) trzy pary homologicznych prostych a_1 i a_2 , b_1 i b_2 , c_1 i c_2 dwóch rzutowych pęków prostych o wspólnym wierzchołku P . Przez ów punkt P poprowadźmy dowolną stożkową S^2 ; na ryc. 59 użyto koła celem uproszczenia konstrukcji. Ponieważ wierzchołek P przynależy do stożkowej S^2 , przeto każda prosta, przechodząca przez punkt P , przetnie się (ust. 31) ze stożkową S^2 jeszcze w jednym i tylko jednym punkcie. Punkty, w których proste $a_1, b_1, c_1, \dots$ i $a_2, b_2, c_2, \dots$ przecinają się z kołem S^2 , oznaczmy odpow. przez $A_1, B_1, C_1, \dots$ i $A_2, B_2, C_2, \dots$. Skoro elementy $A_1, B_1, C_1, \dots$ rzucimy z punktów P i A_2 stożkowej S^2 , to otrzymamy (ust. 27) dwa jednokreślne ¹⁾ pęki prostych $P(a_1, b_1, \dots) \bar{\wedge} A_2(a'_1, b'_1, \dots)$. Podobnie za pośrednictwem punktów $A_2, B_2, C_2, \dots$ stożkowej S^2 , uzyskamy dwa inne pęki rzutowe $P(a_2, b_2, \dots) \bar{\wedge} A_1(a'_2, b'_2, \dots)$. Z łańcucha utworów jednokreślnych

$A_2(a'_1, b'_1, c'_1, \dots) \bar{\wedge} P(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} P(a_2, b_2, c_2, \dots) \bar{\wedge} A_1(a'_2, b'_2, c'_2, \dots)$ wynika (ust. 7) rzutowość pęków (A_2) i (A_1). Ponieważ nadto pęki (A_2) $\bar{\wedge}$ (A_1) posiadają prostą zjednoczoną $A_1A_2 = a'_1 = a'_2$, więc są one (ust. 18) utworami perspektywicznymi. Punkty $B = b'_1b'_2$, $C = c'_1c'_2, \dots$, przecięcia się homologicznych prostych owych pęków, leżeć muszą tedy na pomocniczej prostej w . Wykazaliśmy w ten sposób, że pomiędzy pękami prostych o wierzchołkach P, A_2, A_1 i szeregiem punktów o podstawie w zachodzą zależności, które wyrazić możemy symbolicznie zapomocą ogniwa następującego łańcucha:

$$P(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} A_2(a'_1, b'_1, c'_1, \dots) \bar{\wedge} w(A, B, C, \dots) \bar{\wedge} \bar{\wedge} A_1(a'_2, b'_2, c'_2, \dots) \bar{\wedge} P(a_2, b_2, c_2, \dots).$$

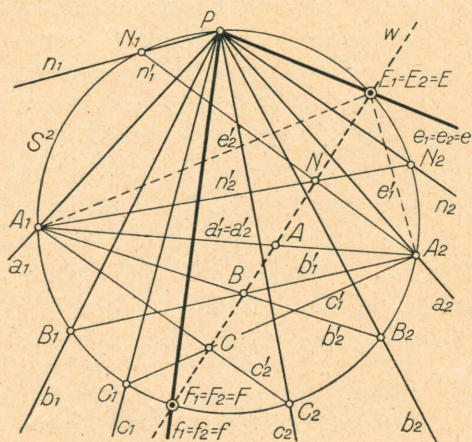
Zadanie 1: Dane są trzy pary homologicznych prostych dwóch jednokreślnych pęków prostych o wspólnym wierzchołku P . Należy uzupełnić te pęki, oraz skonstruować ich proste zjednoczone.

Rozwiązanie: Chcąc uzupełnić pęki $P(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} \bar{\wedge} P(a_2, b_2, c_2, \dots)$, skorzystamy z wypisanego powyżej łańcucha utworów rzutowych. Dowolna prosta n_1 (ryc. 59) pędu $P(a_1, \dots)$ przetnie się z kołem S^2 w punkcie N_1 . Element $n'_1 = A_2N_1$ pędu (A_2) wyznaczy na podstawie szeregu (w) punkt $N = n'_1w$, przez

¹⁾ Ponieważ S^2 jest kołem, przeto owe pęki prostych są (ust. 32) dwoma pękami wprost przystającymi.

który przejdzie prosta $n'_2 = A_1N$ pęku (A_1). Przez punkt N_2 , przecięcia się prostej n'_2 z kołem S^2 , przechodzi element wynikowy $n_2 = PN_2$ pęku (P), gdyż spełnione są oczywiście warunki:

$$P(a_1, \dots, n_1) \bar{\wedge} A_2(a'_1, \dots, n'_1) \bar{\wedge} w(A, \dots, N) \bar{\wedge} A_1(a'_2, \dots, n'_2) \bar{\wedge} P(a_2, \dots, n_2).$$



Ryc. 59.

Proste n_1 i n_2 tworzą zatem parę homologicznych elementów uważanych pęków rzutowych o wspólnym wierzchołku P .

Oznaczmy przez E i F punkty przecięcia się podstawy w pomocniczego szeregu z kołem S^2 . Jeżeli zamiast prostej $n_1 = PN_1$ weźmiemy pod uwagę prostą $e_1 = PE_1 = PE$ i zastosujemy powyżej przeprowadzoną konstrukcję, to z łatwością stwierdzimy, że homologiczny element $e_2 = PE_2$

nakryje się z prostą e_1 . Prosta $PE = e_1 = e_2$, jak również prosta $PF = f_1 = f_2$ są zatem (ust. 22) prostymi zjednoczonymi pęków jednokreślnych o wspólnym wierzchołku P .

Ponieważ prosta w jest (ryc. 59) „sieczną“ koła S^2 (ust. 31), przeto proste zjednoczone PE i PF są rzeczywiste i różne od siebie. Gdyby prosta w była styczną koła S^2 , to wówczas proste zjednoczone nakryłyby się na jednej prostej $PE = PF$. Gdyby wreszcie pomocnicza prosta w była „prostą zewnętrzną“ koła S^2 , to proste zjednoczone byłyby elementami urojonymi sprzężonymi.

Zadanie 2: Dane są trzy pary homologicznych punktów A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 dwóch rzutowych szeregów o wspólnej podstawie p . Należy uzupełnić te szeregi punktów i skonstruować ich punkty zjednoczone.

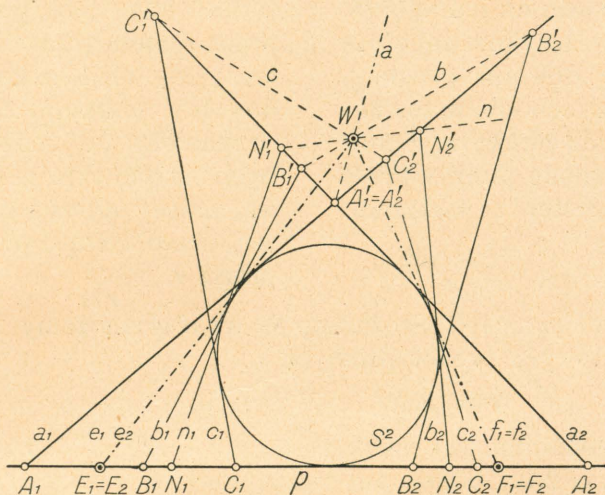
Rozwiązanie 1: Z dowolnego punktu właściwego P , nie leżącego na podstawie p , rzućmy dane szeregi punktów, to otrzymamy (ust. 16) dwa rzutowe pęki prostych

$$P(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} P(a_2, b_2, c_2, \dots)$$

o wspólnym wierzchołku P . Skonstruujmy następnie (p. zad. 1) parę homologicznych prostych n_1 i n_2 , oraz proste zjednoczone $e_1 = e_2$ i $f_1 = f_2$ pomocniczych pęków. Prosta p przetnie się

z owymi elementami w punktach: $N_1 = n_1p$ i $N_2 = n_2p$, oraz $E_1 = E_2 = e_1p = e_2p$ i $F_1 = F_2 = f_1p = f_2p$, które rozwiązują zadanie.

Rozwiązanie 2: Konstrukcję przeprowadzić możemy też bezpośrednio, stosując zasadę biegunowej dwoistości (ust. 5) do konstrukcji Steinera, podanej na ryc. 59. W tym celu uwa-



Ryc. 60.

żajmy podstawę p danych szeregów punktów za styczną stożkowej S^2 ; na ryc. 60 przyjęto koło, aby uprościć konstrukcję. Wykreślmy następnie z poszczególnych punktów $A_1, B_1, C_1, \dots$ i $A_2, B_2, C_2, \dots$ podstawy p styczne: $a_1, b_1, c_1, \dots$ i $a_2, b_2, c_2, \dots$ do koła S^2 . Przetnijmy owe styczne prostymi a_2 i a_1 , to uzyskamy wówczas dwa jednokreślne szeregi punktów $a_2 (A'_1, B'_1, C'_1, \dots)$ i $a_1 (A'_2, B'_2, C'_2, \dots)$, gdyż (ust. 27) zachodzą relacje:

$$a_2 (A'_1, B'_1, \dots) \overline{\wedge} p (A_1, B_1, \dots) \overline{\wedge} p (A_2, B_2, \dots) \overline{\wedge} a_1 (A'_2, B'_2, \dots).$$

Ponieważ nadto punkt $A'_1 = A'_2 = a_1a_2$ jest elementem zjednoczonym szeregów $(a_2) \overline{\wedge} (a_1)$, przeto one są (ust. 18) szeregami perspektywicznymi.

Korzystając z łańcucha utworów rzutowych:

$$p (A_1, B_1, C_1, \dots) \overline{\wedge} a_2 (A'_1, B'_1, C'_1, \dots) \overline{\wedge} W (a, b, c, \dots) \overline{\wedge} \overline{\wedge} a_1 (A'_2, B'_2, C'_2, \dots) \overline{\wedge} p (A_2, B_2, C_2, \dots)$$

— przyczem W jest punktem przecięcia się prostych $b = B'_1B'_2$ i $c = C'_1C'_2$ — z łatwością skonstruujemy (ryc. 60) dowolną parę

homologicznych punktów N_1 i N_2 , oraz punkty zjednoczone $E_1 = E_2$ i $F_1 = F_2$ uważanych szeregów rzutowych o wspólnej podstawie p .

Zadanie 3: Stożkowa S^2 określona jest pięcioma punktami 1, 2, 3, 4 i 5, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Na płaszczyźnie tej stożkowej leży dowolna prosta l , która nie przechodzi przez żaden z danych punktów. Skonstruować należy punkty przecięcia się prostej l ze stożkową.

Zadanie 4: Stożkowa S^2 określona jest pięcioma stycznymi I, II, III, IV i V, z których żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt. Na płaszczyźnie tej stożkowej leży dowolny punkt L , który nie przynależy do żadnej z danych stycznych. Skonstruować należy styczne do stożkowej, przechodzące przez dany punkt L .

Rozwiązanie: Stożkową S^2 uważać możemy za utwór dwóch rzutowych pęków prostych

$$1(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} 2(a_2, b_2, c_2, \dots),$$

których elementami są proste: $a_1 = 13$, $a_2 = 23$, $b_1 = 14$, $b_2 = 24$, $c_1 = 15$, $c_2 = 25, \dots$. Skoro owe pęki przetniemy prostą l , to otrzymamy dwa rzutowe szeregi punktów

$$l(A_1, B_1, C_1, \dots) \bar{\wedge} l(A_2, B_2, C_2, \dots),$$

które posiadają (ust. 15) dwa (rzeczywiste lub urojone sprzężone) punkty zjednoczone $E_1 = E_2$ i $F_1 = F_2$. Z rozważań ust. 31 wiadomo nam, że owe punkty zjednoczone są szukanymi punktami przecięcia się prostej l ze stożkową S^2 .

Ćwiczenie 1: Zadanie 3 rozwiązać wówczas, jeżeli stożkowa S^2 określona jest: a) czterema punktami 1, 2, 3, 4 i styczną c_1 w punkcie 1; b) trzema punktami 1, 2 i 3 oraz dwiema stycznymi c_1 i b_2 w punktach 1 i 2.

Ćwiczenie 2: Zadanie 4 rozwiązać wówczas, gdy stożkowa S^2 określona jest: a) czterema stycznymi I, II, III, IV i punktem styczności C_1 stycznej I; b) trzema stycznymi I, II i III, oraz dwoma punktami styczności C_1 i B_2 stycznych I i II.

Uwaga: Jeżeli dana prosta l przechodzi przez jeden z danych punktów stożkowej S^2 , to

Uwaga: Jeżeli dany punkt L leży na jednej z danych stycznych stożkowej S^2 , to

stosujemy wówczas konstrukcje, podane w ust. 35.

37. Badanie utworu pęków rzutowych. Dane są (ryc. 61) trzy pary homologicznych prostych: a_1 i a_2 , b_1 i b_2 , c_1 i c_2 dwóch

rzutowych pęków (P_1) i (P_2) , których wierzchołkami są punkty właściwe. Zbadajmy, czy utworem tych pęków jest elipsa, parabola, wzgl. hiperbola?

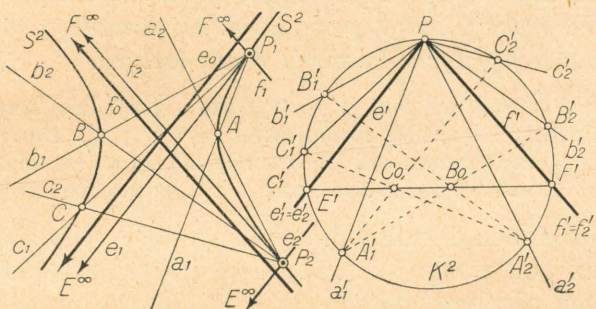
W tym celu przez dowolny punkt właściwy P wykreślimy proste: $a'_1 // a_1$, $b'_1 // b_1$, $c'_1 // c_1$, oraz $a'_2 // a_2$, $b'_2 // b_2$, $c'_2 // c_2$. Użytkamy wówczas (ust. 20) dwie pary przystających pęków:

$$P(a'_1, b'_1, c'_1, \dots) \cong P_1(a_1, b_1, c_1, \dots), \quad P(a'_2, b'_2, c'_2, \dots) \cong P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$$

a zarazem dwa jednokreślne pęki prostych

$$P(a'_1, b'_1, c'_1, \dots) \overline{\wedge} P(a'_2, b'_2, c'_2, \dots)$$

o wspólnym wierzchołku P . Za pośrednictwem konstrukcji *Steinera* (ust. 36) wyznaczmy proste zjednoczone $e'_1 = e'_2$ i $f'_1 = f'_2$



Ryc. 61.

tych ostatnich pęków, a następnie wykreślimy przez punkt P_1 proste $e_1 // e'_1$ i $f_1 // f'_1$, a przez punkt P_2 proste $e_2 // e'_2$ i $f_2 // f'_2$. Ponieważ uzyskane w ten sposób dwie pary prostych homologicznych e_1 i e_2 , oraz f_1 i f_2 jednokreślnych pęków $(P_1) \overline{\wedge} (P_2)$ są do siebie równoległe, przeto punkty niewłaściwe: $E^\infty = e_1 e_2$, $F^\infty = f_1 f_2$ przynależą do badanej stożkowej. Utworem pęków $(P_1) \overline{\wedge} (P_2)$ jest w tym przypadku hiperbola, której asymptotami e_0 i f_0 są oczywiście (ust. 32) proste¹⁾, równoległe odpow. do elementów $e_1 // e_2$, wzgl. $f_1 // f_2$, a tem samem równoległe odpow. do prostych zjednoczonych $e'_1 = e'_2$ i $f'_1 = f'_2$.

Pomoeniczne pęki rzutowe o wspólnym wierzchołku P na ryc. 61 są (ust. 16) pękami „hiperbolicznymi“. Załóżmy teraz, że owe pęki są „paraboliczne“, t. zn., że posiadają dwie rzeczywiste i nakrywające się ze sobą proste zjednoczone $e'_1 = e'_2 = f'_1 = f'_2$. Wówczas nakrywają się ze sobą proste $e_1 = f_1$ w pęku (P_1) , oraz proste $e_2 = f_2$ w pęku (P_2) . Pęki rzutowe $(P_1) \overline{\wedge} (P_2)$

¹⁾ Sposoby konstrukcyjnego wyznaczenia asymptot podane są w ust. 35.

posiadać będą jedną i tylko jedną parę homologicznych prostych równoległych $e_1 // e_2$, a ich utworem będzie parabola, styczna w punkcie niewłaściwym $E^\infty = e_1 e_2 = f_1 f_2 = F^\infty$ do prostej niewłaściwej.

Jeżeli wkońcu pomocnicze pęki o wspólnym wierzchołku P są „eliptyczne“, t. zn. posiadają dwie proste zjednoczone urojone sprzężone — to pęki $(P_1) \overline{\wedge} (P_2)$ nie posiadają żadnej pary homologicznych prostych do siebie równoległych. Utworem tych pęków jest elipsa. A zatem:

Dwa rzutowe (ale nie perspektywiczne) pęki prostych — które leżą na wspólnej płaszczyźnie podstawowej i mają za wierzchołki dwa różne od siebie punkty właściwe — utworzą hiperbole, parabolę wzgl. elipsę zależnie od tego, czy owe pęki posiadają dwie pary, jedną parę, wzgl. nie posiadają żadnej pary homologicznych prostych do siebie równoległych.

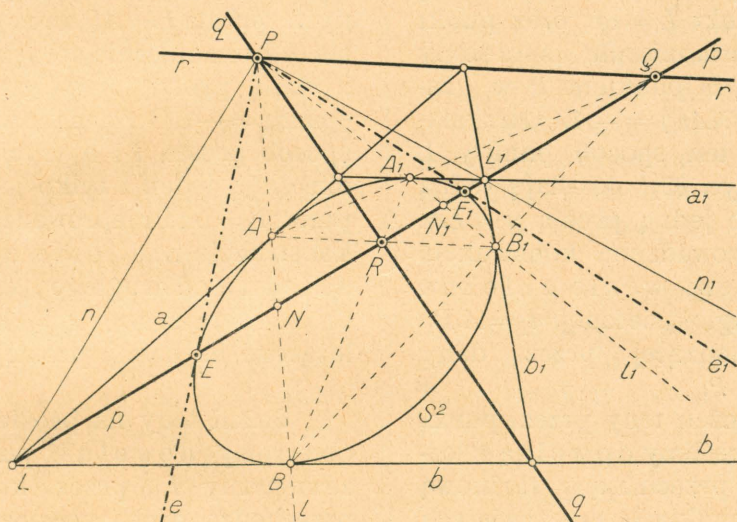
Uwaga: Dwa rzutowe pęki (P_1) i (P_2) , które posiadają trzy pary homologicznych prostych do siebie równoległych: $e_1 // e_2$, $f_1 // f_2$ i $g_1 // g_2$, są oczywiście pękami perspektywicznymi. Utworem tych pęków jest *stożkowa zniekształcona*, która (ust. 33) rozpada się na prostą niewłaściwą i na prostą $P_1 P_2$.

Zamiast dwóch dowolnych pęków jednokreślnych (P_1) i (P_2) , weźmy teraz pod uwagę (ust. 20) dwa „odwrotnie przystające“ pęki prostych o wierzchołkach P_1 i P_2 . Skoro przez dowolny punkt P wykreślimy (podobnie, jak na ryc. 61) proste odpow. równoległe do poszczególnych prostych danych pęków, — to uzyskamy (ust. 20) dwa nowe „odwrotnie przystające“ pęki prostych o wspólnym wierzchołku P . Z rozważań ust. 20 wiadomo nam, że te ostatnie pęki są pękami hiperbolicznymi; ich proste podwójne $e'_1 = e'_2$ i $f'_1 = f'_2$ są wzajemnie prostopadłe. Utworem pęków $(P_1) \overline{\wedge} (P_2)$ jest zatem hiperbola, której asymptoty e_0 i f_0 , jako proste $e_0 // e'_1$ i $f_0 // f'_1$, są wzajemnie prostopadłe. Hiperbole, której asymptoty są do siebie prostopadłe, nazywamy *hiperbolą równoboczną*. Dowiedliśmy zatem prawdziwości następującego twierdzenia:

Utworem dwóch odwrotnie przystających pęków prostych o różnych wierzchołkach, — które nie są perspektywiczne i leżą na wspólnej płaszczyźnie — jest hiperbola równoboczna.

Na płaszczyźnie właściwej ω niechaj dane będą dwa rzutowe (ale nie perspektywiczne) pęki prostych o wierzchołkach niewłaściwych P_1^∞ i P_2^∞ . Utworem tych pęków jest hiperbola, gdyż wierzchołki P_1^∞ i P_2^∞ przynależą do tej stożkowej.

Rozważyć możemy wreszcie przypadek, w którym wierzchołek P_1 jest punktem właściwym, a wierzchołek P_2^∞ elementem niewłaściwym. Prostej $v_1 = P_1P_2^\infty$, łączącej wierzchołki danych pęków i uważanej za element pęku (P_1) , podporządkujemy w pęku (P_2^∞) jedną ściśle określoną prostą v_2 . Owa prosta v_2 jest oczywiście (ust. 27) styczną w wierzchołku P_2^∞ do stożkowej S^2 będącej utworem rzutowych pęków $(P_1) \overline{\wedge} (P_2^\infty)$. Jeżeli element v_2 jest prostą „właściwą“, to stożkowa S^2 jest hiperbolą, a prosta v_2 jest jedną z jej asymptot. Jeżeli zaś element v_2 jest prostą „niewłaściwą“, to stożkowa S^2 (jako styczna do v_2^∞) jest wówczas parabola.



Ryc. 62

38. Biegunowa punktu i biegun prostej względem stożkowej. Na ryc. 62 uwidocznioma jest konfiguracja *Mac Laurina* (ust. 29). Bok $p = QR$ wspólnego trójkąta przekątnego (PQR) przecina się z prostymi $l = AB$ i $l_1 = A_1B_1$ w punktach $N = pl$ i $N_1 = pl_1$. Przez wierzchołek P i przez punkty $L = ab$ i $L_1 = a_1b_1$, leżące oczywiście na boku $p = QR$ trójkąta przekątnego $(PQR) = (pqr)$, poprowadźmy proste $n = PL$ i $n_1 = PL_1$. Z rozważań ust. 13 wiadomo nam, że

punkty N i N_1 są harmonicznie sprzężone z punktem P w grupach

$$(NPAB) = -1, (N_1PA_1B_1) = -1.$$

proste n i n_1 są harmonicznie sprzężone z prostą p w grupach

$$(npab) = -1, (n_1pa_1b_1) = -1.$$

Przeprowadzimy teraz inną interpretację rysunku 62-go. W tym celu uważamy

stożkową S^2 i dowolny punkt P za elementy dane. Przez punkt P poprowadźmy¹⁾ dowolną „sieczną“ l stożkowej S^2 , która (ust. 31) przecina stożkową S^2 w dwóch rzeczywistych punktach A i B . Następnie wyznaczmy styczne a i b w owych punktach do stożkowej S^2 , punkt $L = ab$, oraz punkt N harmonicznie sprzężony z danym punktem P w grupie $(PNAB) = -1$. Otrzymane w ten sposób punkty L i N (ryc. 62) określają jedną i tylko jedną prostą $p = LN$. Przeprowadzona konstrukcja nie jest wcale zależna od drugiej „siecznej“ $l_1 = A_1B_1$, przechodzącej przez dany punkt P .

Jeżeli tedy przez punkt P wykreślimy dowolną sieczną l_1 , przecinającą stożkową S^2 w punktach rzeczywistych A_1 i B_1 , oraz na l_1 wyznaczymy punkt N_1 harmonicznie sprzężony z punktem P w grupie $(PN_1A_1B_1) = -1$, to ów punkt N_1 koniecznie musi leżeć na prostej $p = LN$.

Punkt P na ryc. 62 jest „punktem zewnętrznym“ stożkowej S^2 , przez który przechodzą dwie rzeczywiste styczne e i e_1 . Niechaj sieczna $l_1 = A_1B_1$, obracając się koło

stożkową S^2 i dowolną prostą p za elementy dane. Na prostej p obierzmy¹⁾ dowolny „punkt zewnętrzny“ L stożkowej S^2 , przez który (ust. 31) przechodzą dwie rzeczywiste styczne a i b stożkowej S^2 . Następnie wyznaczmy punkty styczności A i B owych stycznych, prostą $l = AB$, oraz prostą n harmonicznie sprzężoną z daną prostą p w grupie $(pnab) = -1$. Otrzymane w ten sposób proste l i n (ryc. 62) określają jeden i tylko jeden punkt $P = ln$. Przeprowadzona konstrukcja nie jest wcale zależna od drugiego „punktu zewnętrznego“ $L_1 = a_1b_1$, leżącego na danej prostej p .

Jeżeli tedy na prostej p obierzmy dowolny punkt zewnętrzny L_1 , przez który przechodzą dwie rzeczywiste styczne a_1 i b_1 stożkowej S^2 , oraz przez L_1 wykreślimy prostą n_1 harmonicznie sprzężoną z prostą p w grupie $(pn_1a_1b_1) = -1$, to owa prosta n_1 koniecznie przejść musi przez punkt $P = ln$.

Prosta p na ryc. 62 jest „sieczną“ stożkowej S^2 , która przecina ją w dwóch rzeczywistych punktach E i E_1 . Niechaj punkt zewnętrzny $L_1 = a_1b_1$, poruszając się po sta-

¹⁾ Możliwe do uskutecznienia na mocy rozważań ust. 31.

stałego punktu P , zdąża do położenia granicznego e_1 , to wówczas punkty A_1 i B_1 zdążać będą do położenia granicznego E_1 , przyczem E_1 jest punktem styczności stycznej e_1 ze stożkową S^2 . Równocześnie punkt N_1 , harmonicznie sprzężony z punktem P w grupie $(PN_1A_1B_1) = -1$, poruszać się będzie po prostej $p = LN$, — a ponieważ A_1 i B_1 zjednoczyły się w punkcie E_1 , przeto (ust. 12) również i punkt N_1 zjednoczyć się musi z punktem styczności E_1 . Na prostej $p = LN$ leżą tedy punkty styczności E i E_1 stycznych e i e_1 , wykreślonych z punktu zewnętrznego P do stożkowej S^2 .

Jeżeli w punktach A_1 i B_1 stożkowej S^2 , leżących na siecznej l_1 , wykreślimy styczne a_1 i b_1 , to ich punkt przecięcia się $L_1 = a_1b_1$ leżeć musi na prostej $p = LN$.

Skoro przez dany punkt P wykreślimy dwie dowolne sieczne $l = AB$ i $l_1 = A_1B_1$, a następnie dla czworokąta zupełnego (ABA_1B_1) , wpisanego w stożkową S^2 , skonstruujemy dwa jego dalsze punkty przekątne Q i R , to one przynależą do prostej $p = LN$.

Wykazaliśmy tedy, że

Skoro przez dowolny punkt P , leżący na płaszczyźnie stożkowej S^2 i nie przynależny do niej, wykreślimy sieczne $l, l_1, \dots$,

łej prostej p , zdąża do położenia granicznego E_1 , to wówczas styczne a_1 i b_1 zdążać będą do położenia granicznego e_1 , przyczem e_1 jest styczną w punkcie E_1 do stożkowej S^2 . Równocześnie prosta n_1 , harmonicznie sprzężona z prostą p w grupie $(pn_1a_1b_1) = -1$, obracać się będzie około punktu $P = ln$, — a ponieważ a_1 i b_1 zjednoczyły się z prostą e_1 , przeto (ust. 12) również i prosta n_1 zjednoczyć się musi ze styczną e_1 . Przez punkt $P = ln$ przechodzą tedy styczne e i e_1 , wykreślone w punktach E i E_1 przecięcia się siecznej p ze stożkową S^2 .

Jeżeli na stycznych a_1 i b_1 stożkowej S^2 , przechodzących przez punkt zewnętrzny L_1 , wykreślimy punkty styczności A_1 i B_1 , to łącząca je prosta $l_1 = A_1B_1$ przejść musi przez punkt $P = ln$.

Skoro na danej prostej p obierzemy dwa dowolne punkty zewnętrzne $L = ab$ i $L_1 = a_1b_1$, a następnie dla czworoboku zupełnego (aba_1b_1) , opisanego na stożkowej S^2 , skonstruujemy dwie jego dalsze proste przekątne q i r , to one przynależą do punktu $P = ln$.

Skoro na dowolnej prostej p , leżącej na płaszczyźnie stożkowej S^2 i nie przynależnej do niej, obierzemy punkty ze-

które przecinają tę stożkową w punktach rzeczywistych A i B , A_1 i $B_1, \dots$, a następnie skonstruujemy:

- 1) punkty $N, N_1, \dots$ harmonicznie sprzężone z punktem P w grupach

$$(PNAB) = -1,$$

$$(PN_1A_1B_1) = -1, \dots,$$

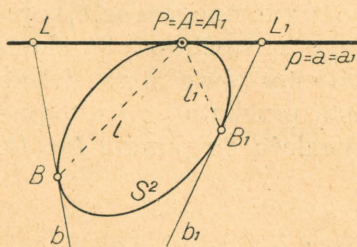
- 2) punkty $L, L_1, \dots$, przecięcia się stycznych a i b , a_1 i $b_1, \dots$ w punktach A i B , A_1 i $B_1, \dots$ do stożkowej S^2 ,

- 3) punkty przekątne Q i $R, \dots$ czworokątów zupełnych $(ABA_1B_1), \dots$, wpisanych w stożkową S^2 ,

- 4) punkty styczności E i E_1 stycznych e i e_1 , wykreślonych z punktu P^1) do stożkowej S^2 ,

to wówczas wszystkie owe punkty leżą na jednej i tylko jednej prostej p .

Prostą p nazywamy wówczas *biegunową* danego punktu P ze względu na stożkową S^2 .



Ryc. 63.

wewnętrzne $L, L_1, \dots$, przez które przechodzą styczne rzeczywiste a i b, a_1 i $b_1, \dots$ do tej stożkowej, a następnie skonstruujemy:

- 1) proste $n, n_1, \dots$ harmonicznie sprzężone z prostą p w grupach

$$(pnab) = -1,$$

$$(pn_1a_1b_1) = -1, \dots,$$

- 2) proste $l, l_1, \dots$, łączące punkty styczności A i B, A_1 i $B_1, \dots$ stycznych a i b, a_1 i $b_1, \dots$ stożkowej S^2 ,

- 3) proste przekątne q i $r, \dots$ czworoboków zupełnych $(aba_1b_1), \dots$, opisanych na stożkowej S^2 ,

- 4) styczne e i e_1 , wykreślone w punktach E i E_1 przecięcia się prostej p^1) ze stożkową S^2 ,

to wówczas wszystkie owe proste przechodzą przez jeden i tylko jeden punkt P .

Punkt P nazywamy wówczas *biegunem* danej prostej p ze względu na stożkową S^2 .

Dotychczas przyjmowaliśmy takie punkty P , które nie leżały na stożkowej S^2 , oraz takie proste p , które nie były stycznymi owej stożkowej.

Skoro na ryc. 63 obierzemy dowolny punkt P na stożkowej S^2 , | dowolną styczną p stożkowej S^2 ,

¹⁾ O ile punkt P jest „punktem zewnętrznym“, a prosta p jest „sieczną“ stożkowej S^2 .

a nadto zachowamy te same oznaczenia, co poprzednio na ryc. 62, to stwierdzimy z łatwością, że:

punkty $L, L_1, \dots$ leżą na prostej p , która jest styczną do stożkowej S^2 w przyjętym punkcie P .

proste $l, l_1, \dots$ przechodzą przez punkt P , który jest punktem styczności przyjętej stycznej p ze stożkową S^2 .

Ponieważ spełnione są własności, wypisane powyżej pod 2), przeto:

Biegunową względem stożkowej S^2 punktu P , leżącego na tej stożkowej, jest styczna w owym punkcie P do stożkowej S^2 .

Biegunem względem stożkowej S^2 stycznej p tej stożkowej, jest punkt styczności owej prostej p ze stożkową S^2 .

Z konfiguracji Mac Laurina (ryc. 62) i dotychczasowych rozważań wynika następująca zależność:

Jeżeli punkt P jest biegunem prostej p ze względu na (nie zniekształconą) stożkową S^2 , to i naodwrot, owa prosta p jest biegunową uważanego punktu P względem tej stożkowej.

Uwaga: Jeżeli stożkowa S^2 jest „stożkową zniekształconą“ i rozpada się na

dwie proste (przecinające się) p_1 i p_2 , to na mocy twierdzenia odnoszącego się do dwóch szeregów perspektywicznych (ust. 19), każdemu punktowi W (ryc. 26) podporządkowana jest prosta s , przechodząca przez punkt przecięcia się prostych p_1 i p_2 .

dwie punkty P_1 i P_2 , to na mocy twierdzenia, odnoszącego się do dwóch pęków perspektywicznych (ust. 19), każdej prostej w podporządkowany jest punkt S , leżący na prostej, łączącej punkty P_1 i P_2 .

Ponieważ dla prostej s i dla punktu S spełnione są własności, wypisane powyżej pod 1) i 3), przeto:

prosta s jest biegunową punktu W ze względu na stożkową zniekształconą $p_1 p_2$.

punkt S jest biegunem prostej w ze względu na stożkową zniekształconą $P_1 P_2$.

Zadanie 1: Dany jest punkt P oraz stożkowa (nie zniekształcona) S^2 , określona pięcioma punktami 1, 2, 3, 4 i 5. Skonstruować należy biegunową p danego punktu P ze względu na stożkową S^2 .

Zadanie 2: Dana jest prosta p oraz stożkowa (nie zniekształcona) S^2 , określona pięcioma stycznymi I, II, III, IV i V. Skonstruować należy biegun P danej prostej p ze względu na stożkową S^2 .

Rozwiązanie: Poprowadźmy proste sieczne $l_1 = P1'$, $l_2 = P2$ i wyznaczmy (stosując dwukrotnie twierdzenie Pascala) punkty A i B , przecięcia się prostych l_1 i l_2 ze stożkową S^2 . Dla uzyskanego w ten sposób czworokąta zupełnego ($1 A 2 B$), wpisanego w stożkową S^2 , skonstruujemy punkty przekątne $Q = 1B.2A$ i $R = 12.AB$, to prosta $p = QR$ jest biegunową punktu P .

Zadanie 3: Dany jest punkt P i stożkowa S^2 , określona pięcioma punktami $1, 2, 3, 4$ i 5 . Skonstruować styczne e i f z punktu P do stożkowej S^2 , oraz punkty styczności E i F owych stycznych.

Zadanie 4: Dana jest prosta p i stożkowa S^2 , określona pięcioma stycznymi I, II, III, IV i V . Skonstruować punkty przecięcia się E i F prostej p ze stożkową S^2 , oraz styczne e i f w owych punktach.

Rozwiązanie: Dla punktu P skonstruujemy najpierw jego biegunową p , a następnie punkty E i F przecięcia się prostej p ze stożkową S^2 (p. ust. 36, zad. 3). Proste $PE = e$ i $PF = f$ są szukanymi stycznymi, które stykają się ze stożkową S^2 w punktach E i F .

Ćwiczenie 1: Rozwiązać zadania 1 i 3, jeśli stożkowa S^2 określona jest: a) czterema punktami i styczną w jednym z nich; b) trzema punktami i stycznymi w dwóch z tych punktów.

Ćwiczenie 2: Rozwiązać zadania 2 i 4, jeśli stożkowa S^2 określona jest: a) czterema stycznymi i punktem styczności jednej z nich; b) trzema stycznymi i punktami styczności dwóch z tych stycznych.

39. Twierdzenia Desargues'a. Na rysunkach 64 i 65 dane są czworokąty zupełne (ABA_1B_1), wpisane w stożkowe S^2 , oraz ich trójkąty przekątne (PQR). Z rozważań ust. 38 wynika (p. własności wypisane pod 3), że: dla punktu przekątnego P jego biegunowa jest prostą $p = QR$, łączącą dwa pozostałe punkty przekątne. Podobnie dla punktu przekątnego Q jego biegunową jest prosta $q = PR$, a wreszcie dla punktu przekątnego R jego biegunową jest prosta $r = PQ$. Trójkąt, którego każdy wierzchołek jest biegunem (względem pewnej stożkowej) przeciwległego boku, a każdy bok jest biegunową przeciwległego wierzchołka, nazywamy *trójkątem biegunowym*.

Punkty Q i R leżą na prostej p , ich biegunowe q i r przechodzą przez biegun P owej prostej p . Zbadajmy, czy powyższa własność spełniona będzie dla każdego punktu, leżącego na prostej p .

R_1 , leżącego na prostej p , jego biegunowa r_1 przechodzi przez biegun P owej prostej p .

Stosując zasadę biegunowej dwoistości (ust. 5) wykazać możemy, że dla dowolnej prostej r_1 , która przechodzi przez dany punkt P , jej biegun R_1 leży na biegunowej p owego punktu P . Dowiedliśmy w ten sposób prawdziwości podstawowych twierdzeń *Desargues'a*:

Dla poszczególnych punktów dowolnej prostej p , która leży na płaszczyźnie stożkowej (nie zniekształconej) S^2 , ich biegunowe względem tej stożkowej przechodzą przez biegun owej prostej p .

Dla poszczególnych prostych, które przechodzą przez dowolny punkt P i leżą na płaszczyźnie stożkowej (nie zniekształconej) S^2 , ich bieguny względem tej stożkowej leżą na biegunowej owego punktu P .

40. Dalsze własności biegunów i biegunowych. Wyznaczone poprzednio punkty $A, B, A_2, B_2, \dots$ stożkowej S^2 (ryc. 64 i 65) rzućmy z dwóch stałych punktów A_1 i B_1 tej stożkowej, to wówczas (ust. 27) otrzymamy dwa jednokreślne pęki prostych

$$(1^0) \dots\dots A_1(A_1A, A_1B, A_1A_2, A_1B_2, \dots) \bar{\cap} B_1(B_1A, B_1B, B_1A_2, B_1B_2, \dots)$$

Skoro pęki te przetniemy prostą p , to uzyskamy dwa rzutowe szeregi punktów

$(2^0) \dots\dots p(Q, R, Q_1, R_1, \dots) \bar{\cap} p(R, Q, R_1, Q_1, \dots),$

a ponieważ szereg $p(R, Q, R_1, Q_1, \dots)$ jest perspektywiczny do pęku prostych $P(q, r, q_1, r_1, \dots)$, przeto dochodzimy do rzutowości

$(3^0) \dots\dots p(Q, R, Q_1, R_1, \dots) \bar{\cap} P(q, r, q_1, r_1, \dots).$

A zatem:

Szereg punktów i pęk prostych, którego elementami są biegunowe (względem nie zniekształconej stożkowej) poszczególnych punktów owego szeregu, są utworami rzutowymi.

Pęk prostych i szereg punktów, którego elementami są bieguny (względem nie zniekształconej stożkowej) poszczególnych prostych owego pęku, są utworami rzutowymi.

Na prostej p skonstruowaliśmy (p. relacja 2^0) dwa jednokreślne szeregi punktów, których elementy homologiczne Q i R podporządkowane są sobie w sposób zamienny. Wnosimy stąd (ust. 23), że na podstawie p uzyskaliśmy szereg inwolucyjny:

$$p(QR, Q_1R_1, \dots).$$

Skoro szereg inwolucyjny (p) rzucimy z punktu P , który (ryc. 64 i 65) jest biegunem prostej p , to otrzymamy (ust. 23) pęk inwolucyjny prostych (P) perspektywiczny do szeregu (p), a mianowicie:

$$(4^0) \dots\dots P(rq, r_1q_1, \dots) \overline{\wedge} p(QR, Q_1R_1, \dots).$$

Pomiędzy parą homologicznych prostych r i q , a parą homologicznych punktów Q i R tych utworów perspektywicznych zachodzi ten związek, że biegunowa r punktu R ze względu na stożkową S^2 przechodzi przez punkt Q , a biegunowa q punktu Q przechodzi przez punkt R . Jeżeliby proste homologiczne r i q pęku inwolucyjnego (P) zjednoczyły się na prostej e , to równocześnie punkty homologiczne Q i R szeregu inwolucyjnego (p) zjednoczyłyby się w punkcie E , przyczem prosta e i punkt E byłyby elementami przynależnymi do siebie, a nadto prosta e byłaby biegunową punktu E ze względu na stożkową S^2 . Wnosimy stąd (ust. 38), że: prosta e byłaby wówczas styczną w punkcie E do stożkowej S^2 . Omawiana prosta e byłaby (ust. 25) prostą podwójną pęku inwolucyjnego (P), a punkt E byłby (ust. 24) punktem podwójnym szeregu inwolucyjnego (p). Rozpatrzyć musimy trzy następujące przypadki:

a) Jeżeli pęk inwolucyjny (P) jest pękiem *hiperbolicznym*, to wówczas (ust. 25) posiada on dwie rzeczywiste i różne od siebie proste podwójne e i f (ryc. 64). Owe proste są *stycznymi*, wykreślonemi z punktu P do stożkowej S^2 , a wierzchołek P uważanego pęku inwolucyjnego jest (ust. 31) zatem *punktem zewnętrznym* stożkowej S^2 . Z relacji (4^0) wynika jednak, że szereg inwolucyjny (p) w rozważanym przypadku jest również szeregiem *hiperbolicznym* i posiada (ust. 24) dwa rzeczywiste i różne od siebie punkty podwójne E i F . Owe punkty są „punktami styczności“ omawianych stycznych e i f , oraz *punktami przecięcia się* prostej p ze stożkową S^2 , a podstawa p szeregu inwolucyjnego jest (ust. 31) *prostą sieczną* stożkowej S^2 .

b) Jeżeli pęk inwolucyjny (P) jest pękiem *eliptycznym*, to wówczas (ust. 25) posiada on dwie „urojone sprzężone“ proste podwójne e i f . Owe proste są „ stycznymi urojonemi sprzężonemi“, wykreślonemi z punktu P do stożkowej S^2 , a wierzchołek P uważanego pęku inwolucyjnego jest (ust. 31) *punktem wewnętrznym* stożkowej S^2 (ryc. 65). Z relacji (4^0) wynika jednak, że szereg inwolucyjny (p) w rozważanym przypadku jest również szeregiem *eliptycznym*, który posiada (ust. 24) dwa „urojone sprzężone“ punkty podwójne E i F . Owe punkty są

„punktami styczności urojonemi sprzężonemi“ omawianych stycznych urojonych sprzężonych e i f , oraz *urojonemi sprzężonemi punktami przecięcia się prostej p ze stożkową S^2* , a podstawa p szeregu inwolucyjnego jest (ust. 31) *prostą zewnętrzną stożkowej S^2* .

c) Jeżeli wreszcie pęk inwolucyjny (P) jest (ust. 25) pękiem *parabolicznym*, to na mocy relacji (4⁰) szereg inwolucyjny (p) jest też szeregiem parabolicznym. Z łatwością stwierdzimy wówczas, że punkt P *leży na stożkowej S^2* , a prosta p jest *styczną* w punkcie P do stożkowej S^2 . W istocie bowiem (ust. 24 i 25) proste podwójne e i f owego pęku inwolucyjnego, które są stycznymi wykreślonymi z punktu P do stożkowej S^2 , zjednoczyły się na jednej prostej, a punkty podwójne E i F szeregu inwolucyjnego, które są punktami przecięcia się prostej p ze stożkową S^2 , zjednoczyły się w jednym punkcie.

Z rozważań pod a) i b) wynika bezpośrednio twierdzenie następujące :

Biegunowa punktu względem (nie zniekształconej) stożkowej jest prostą sieczną albo prostą zewnętrzną zależnie od tego, czy ów punkt jest punktem zewnętrznym, czy też punktem wewnętrznym tej stożkowej.

41. Zasada biegunowej dwoistości. Korzystając z rozważań trzech ostatnich ustępów, możemy się teraz zająć uzasadnieniem (ust. 5) prawa biegunowej dwoistości na płaszczyźnie.

Na dowolnej płaszczyźnie ω niechaj dana będzie stała stożkowa (nie zniekształcona) K^2 , t. zw. *kierownica* biegunowej dwoistości. Każdemu punktowi A płaszczyzny ω podporządkować możemy jedną i tylko jedną prostą, mianowicie: biegunową a owego punktu A względem stożkowej K^2 . I naodwrot każdej prostej a , leżącej na płaszczyźnie ω , podporządkowany będzie jeden i tylko jeden punkt, a mianowicie: biegun A owej prostej a ze względu na stożkową K^2 .

Skoro na płaszczyźnie ω obierzemy jakiś utwór geometryczny (figurę) Φ_1 , to za pośrednictwem kierownicy K^2 skonstruować możemy na płaszczyźnie ω drugi utwór geometryczny Φ_2 , podporządkowany „dwoiście“ lub „wzajemnie“ utworowi Φ_1 w tem rozumieniu tego słowa, że :

Każdemu punktowi A_1 utworu Φ_1 podporządkowana jest w utworze Φ_2 jedna ściśle określona prosta a_2 , która jest biegunową punktu A_1 względem stożkowej K^2 . Każdej prostej b_1

utworu Φ_1 odpowiada w utworze Φ_2 jeden i tylko jeden punkt B_2 , który jest biegunem prostej b_1 ze względu na stożkową K^2 .

Podobnie każdemu szeregowi punktów $p_1(A_1, B_1, C_1, \dots)$, należącemu do utworu Φ_1 , podporządkujemy w utworze Φ_2 pęk prostych $P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$, którego elementami są (ust. 39) biegunowe punktów $A_1, B_1, C_1, \dots$ względem kierownicy K^2 . Również każdemu pękowi prostych $S_1(e_1, f_1, g_1, \dots)$ utworu Φ_1 odpowiadać będzie w utworze Φ_2 szereg punktów $s_2(E_2, F_2, G_2, \dots)$, przyczem elementy tego szeregu są biegunami prostych $e_1, f_1, g_1, \dots$ względem stożkowej K^2 . Nadto spełniony jest (ust. 40) warunek rzutowości, a mianowicie: szereg $(p_1) \frown (P_2)$, a pęk $(S_1) \frown (s_2)$.

Za dalszy przykład niechaj posłuży nam stożkowa S_1^2 , będąca utworem dwóch jednokreślnych pęków prostych

$$W_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \frown W'_1(a'_1, b'_1, c'_1, \dots).$$

Pękowi prostych (W_1) podporządkujemy — ze względu na kierownicę K^2 — szereg punktów $w_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$; podobnie pękowi (W'_1) drugi szereg $w'_2(a'_2, b'_2, c'_2, \dots)$. Ponieważ zachodzą relacje (wypisane obok w formie symbolicznej), przeto końcowe ogniwa tego łańcucha są (ust. 7) utworami rzutowymi, a mianowicie:

$$w_2(A_2, B_2, C_2, \dots) \frown w'_2(A'_2, B'_2, C'_2, \dots).$$

Homologiczne proste jednokreślnych pęków $(W_1) \frown (W'_1)$ przecinają się (ust. 27) w punktach: $A_1 = a_1 a'_1, B_1 = b_1 b'_1, C_1 = c_1 c'_1, \dots$ stożkowej S_1^2 .

Homologiczne punkty jednokreślnych szeregów $(w_2) \frown (w'_2)$ wyznaczają (ust. 27 i 30) styczne: $a_2 = A_2 A'_2, b_2 = B_2 B'_2, c_2 = C_2 C'_2, \dots$ stożkowej S_2^2 .

Wykazaliśmy tedy, że: dowolnej stożkowej S_1^2 , która wraz z kierownicą K^2 biegunowej dwoistości leży na płaszczyźnie ω , podporządkowana jest druga stożkowa S_2^2 . Punktom stożkowej S_1^2 odpowiadają styczne stożkowej S_2^2 . Korzystając zaś z podstawowego twierdzenia ust. 30-go, wykazać możemy z łatwością, że stycznymi stożkowej S_1^2 podporządkowane będą punkty na stożkowej S_2^2 .

Załóżmy teraz, że stożkowa S_1^2 jest kierownicą biegunowej dwoistości. Ponieważ wierzchołki W_1 i W'_1 jednokreślnych pęków (których utworem jest S_1^2) leżą na stożkowej S_1^2 , przeto ich biegunowe w_2 i w'_2 są (ust. 38) stycznymi w punktach W_1 , wzgl. W'_1 do kierownicy S_1^2 . Podobnie punktom $A_1 = a_1 a'_1, B_1 = b_1 b'_1, C_1 = c_1 c'_1, \dots$ stożkowej S_1^2 podporządkowane są styczne $a_2 = A_2 A'_2, b_2 = B_2 B'_2, c_2 = C_2 C'_2, \dots$ stykające się odpow. w punktach $A_1, B_1, C_1, \dots$ ze stożkową S_1^2 . A zatem:

Stożkowa S_1^2 , będąca utworem dwóch rzutowych pęków (W_1) i (W'_1) , jest zarazem też i utworem dwóch jednokreślnych szeregów punktów (w_2) i (w'_2) .

Za pośrednictwem prawa biegunowej dwoistości dowiedliśmy w sposób nader łatwy prawdziwości podstawowego twierdzenia (ust. 30) o stożkowych.

Własnościom opisowym (str. 1) i konstrukcjom, odnoszącym się do utworu geometrycznego Φ_1 , podporządkowane będą „dwoiście“ („wzajemnie“) własności opisowe i konstrukcje, od-

noszące się do utworu geometrycznego Φ_2 . Związki te dla utworu Φ_2 otrzymamy bezpośrednio, jeżeli w twierdzeniach (o własnościach opisowych) i konstrukcjach, odnoszących się do utworu Φ_1 , zamienimy elementy: punkt i prosta na: prosta i punkt. Wymienimy na tem miejscu przykłady np. o twierdzeniach *Pascala* i *Brianchona* (ust. 28), oraz o sposobach konstrukcyjnego uzupełnienia jednokreślnych pęków prostych i szeregów punktów (ust. 19), które podporządkowane są sobie dwoiście.

Zauważyć musimy, że *własności miarowe* (str. 1) wogóle nie podlegają prawu biegunowej dwoistości na płaszczyźnie. Jako przykłady niechaj posłużą nam: twierdzenie o potędze dwóch rzutowych szeregów punktów (ust. 14), oraz konstrukcja koła (ust. 32) lub hiperboli równobocznej (ust. 37), które są utworami dwóch przystających pęków prostych. Twierdzeń, ani konstrukcyj podporządkowanych im dwoiście podać nie możemy, gdyż własności, odnoszące się do punktów granicznych i do równości kątów, nie mają swego odpowiednika w układzie biegunowym.

Istnieje przecież pewna grupa własności miarowych, która podlega prawu biegunowej dwoistości na płaszczyźnie. Należą tu np. własności miarowe jednokreślnych utworów zasadniczych gatunku 1-go, objęte (ust. 11) twierdzeniem *Pappusa*, własności miarowe grup harmoniczných czworokąta zupełnego i czworoboku zupełnego (ust. 13) i twierdzenie podstawowe *Staudt'a* (ust. 17).

Własnościami rzutowymi utworów geometrycznych nazywać będziemy takie własności, które nie ulegają zmianom, przechodząc na analogiczne własności utworów, otrzymanych przez rzuty i przekroje z utworów zasadniczych. Wszystkie własności opisowe i wymienione powyżej własności miarowe utworów geometrycznych należą do jednej grupy: własności rzutowych. Możemy tedy powiedzieć, że:

Prawu biegunowej dwoistości na płaszczyźnie podlegają własności rzutowe (płaskich) utworów geometrycznych.

42. Punkty sprzężone i proste sprzężone względem stożkowej. Wiadomo nam (ust. 24 i 25), że:

dwa rzeczywiste lub urojone sprzężone punkty podwójne E i F , oraz dowolna para punktów homologicznych Q i R szeregu inwolucyjnego

dwie rzeczywiste lub urojone sprzężone proste podwójne e i f , oraz dowolna para prostych homologicznych r i q pęku inwolucyjnego $P(rq, r_1q_1, \dots)$

$p(QR, Q_1R_1, \dots)$ tworzą grupę harmoniczną o stosunku

$$(EFQR) = -1.$$

Dla szeregu inwolucyjnego (p) punkty podwójne E i F (ryc. 64 i 65) są (ust. 40) — rzeczywistymi lub urojonymi sprzężonymi — punktami przecięcia się podstawy p ze stożkową S^2 .

Wprowadzimy teraz następujące definicje:

Dwa punkty Q i R , leżące na dowolnej prostej p , które wraz z punktami przecięcia się E i F — rzeczywistymi lub urojonymi sprzężonymi — prostej p ze stożkową S^2 , tworzą grupę harmoniczną o stosunku $(EFQR) = -1$, nazywać będziemy: „punktami sprzężonymi“ względem stożkowej S^2 .

Jeżeli w grupie harmoniczej $(EFQR) = -1$ punkt Q zjednoczy się z punktem E , to wówczas (ust. 12) również i punkt R zjednoczyć się musi z owym punktem $E = Q$. Podobnie, jeżeli zjednoczą się punkty E i F , to jeden z punktów Q i R zjednoczyć się musi z punktem $E = F$; element E jest (ust. 31) punktem styczności prostej p ze stożkową S^2 . A zatem:

Każdy punkt stożkowej S^2 jest punktem sprzężonym z samym sobą ze względu na tę stożkową.

Dowolny punkt, leżący na stycznej do stożkowej S^2 , oraz jej punkt styczności są punktami sprzężonymi względem tej stożkowej.

tworzą grupę harmoniczną o stosunku

$$(efrq) = -1.$$

Dla pęku inwolucyjnego (P) proste podwójne e i f (ryc. 64 i 65) są (ust. 40) — rzeczywistymi lub urojonymi sprzężonymi — stycznymi, wykreślonymi z wierzchołka P do stożkowej S^2 .

Dwie proste r i q , przecinające się w dowolnym punkcie P , które wraz ze stycznymi e i f — rzeczywistymi lub urojonymi sprzężonymi — wykreślonymi z punktu P do stożkowej S^2 , tworzą grupę harmoniczną o stosunku $(efrq) = -1$, nazywać będziemy: „prostami sprzężonymi“ względem stożkowej S^2 .

Każda styczna stożkowej S^2 jest prostą sprzężoną z samą sobą ze względu na tę stożkową.

Dowolna prosta, przechodząca przez punkt stożkowej S^2 , oraz jego styczna są prostami sprzężonymi względem tej stożkowej.

Korzystając z relacji (4⁰) ustępu 40-go (p. ryc. 64 i 65), wypowiedzieć możemy następujące twierdzenia:

Dwa punkty sprzężone względem stożkowej S^2 posiadają tę własność, że biegunowa każdego z nich przechodzi przez drugi punkt.

Dwie proste sprzężone względem stożkowej S^2 posiadają tę własność, że biegun każdej z nich leży na drugiej prostej.

Prawdziwe są również twierdzenia następujące :

Jeżeli dwa punkty posiadają tę własność, że biegunowa — względem stożkowej S^2 — jednego z nich przechodzi przez punkt drugi, to wówczas owe punkty są sprzężone względem tej stożkowej.

Jeżeli dwie proste posiadają tę własność, że biegun — względem stożkowej S^2 — jednej z nich leży na prostej drugiej, to wówczas owe proste są sprzężone względem tej stożkowej.

Celem wykazania prawdziwości tych twierdzeń, weźmy pod uwagę (ryc. 64 i 65) punkt Q , jego biegunową q ze względu na stożkową S^2 , oraz dowolny punkt R , leżący na prostej q . Na mocy twierdzenia *Desargues'a* (ust. 39) biegunowa r punktu R musi koniecznie przejść przez punkt Q , a biegunową punktu $P = qr$ musi być prosta $p = QR$. Wiadomo nam, że szereg punktów $p(Q, R, \dots)$ jest (ust. 40) jednokreślny do pęku biegunowych $P(q, r, \dots)$, a ponieważ ten pęk jest perspektywiczny do szeregu $p(R, Q, \dots)$, przeto na prostej p otrzymaliśmy dwa rzutowe szeregi

$$p(Q, R, \dots) \overline{\wedge} p(R, Q, \dots).$$

Elementy Q i R podporządkowane są sobie w sposób zmienny, przeto (ust. 23) mamy szereg inwolucyjny $p(QR, \dots)$, a nadto pęk inwolucyjny

$$P(rq, \dots) \overline{\wedge} p(QR, \dots).$$

Rzeczywiste lub urojone sprzężone punkty podwójne E, F (wzgl. proste podwójne e, f) tych utworów i elementy Q, R, r, q tworzą grupy harmoniczne o stosunkach $(EFQR) = (efrq) = -1$. Wnosimy stąd, że uważane punkty Q i R są faktycznie *punktami sprzężonemi*, a proste r i q są *prostami sprzężonemi* ze względu na stożkową S^2 , c. b. d. w.

W ust. 38 wykazaliśmy, że

skoro przez dowolny punkt P poprowadzimy *sieczną* l (ryc. 62), przecinającą stożkową S^2 w dwóch rzeczywistych punktach A i B , to: punkt

skoro na dowolnej prostej p obierzemy *punkt zewnętrzny* L (ryc. 62), przez który przechodzą dwie styczne rzeczywiste a i b do stożkowej S^2 ,

N , harmonicznie sprzężony z punktem P w grupie

$$(PNAB) = -1,$$

leży na biegunowej p .

Punkty N i P , leżące na siecznej l , są zatem „punktami sprzężonymi“ względem stożkowej S^2 .

Obecnie stwierdzamy na podstawie dwóch ostatnich twierdzeń (str. 176) i twierdzeń *Desargues'a* (ust. 39), że i w tym przypadku,

gdy prosta $l = NP$ jest prostą zewnętrzną i przecina stożkową S^2 w dwóch punktach urojonych sprzężonych, to punkty N i P są również „punktami sprzężonymi“ względem stożkowej S^2 .

to: prosta n harmonicznie sprzężona z prostą p w grupie

$$(pnab) = -1,$$

przechodzi przez biegun P .

Proste n i p , przechodzące przez punkt zewnętrzny L , są zatem „prostami sprzężonymi“ względem stożkowej S^2 .

gdy punkt $L = np$ jest punktem wewnętrznym, przez który przechodzą dwie urojone sprzężone styczne stożkowej S^2 , to proste n i p są również „prostami sprzężonymi“ względem stożkowej S^2 .

Podkreślić musimy na tem miejscu ważność owych dwóch ostatnich twierdzeń, gdyż one umożliwiły znaczne rozszerzenie zakresu naszych rozważań!

Korzystając z relacji (4⁰), wypisanej na początku ustępu 40-go, wysłowić możemy następujące twierdzenia:

Punkty sprzężone względem (nieznieskształconej) stożkowej, które leżą na dowolnej prostej, tworzą szereg inwolucyjny.

Proste sprzężone względem (nieznieskształconej) stożkowej, które przechodzą przez dowolny punkt, tworzą pęk inwolucyjny.

W ust. 31-ym omawialiśmy sprawy, odnoszące się do punktów przecięcia prostej ze stożkową S^2 , oraz do stycznych z punktu do tej stożkowej. Obecnie ustalić możemy (ust. 40) zależności:

Punkty (rzeczywiste lub urojone sprzężone) przecięcia się dowolnej prostej p ze stożkową S^2 są punktami podwójnymi inwolucyjnego szeregu punktów sprzężonych względem stożkowej S^2 , którego podstawą jest owa prosta p .

Styczne (rzeczywiste lub urojone sprzężone), poprowadzone z dowolnego punktu P do stożkowej S^2 , są prostami podwójnymi inwolucyjnego pęku prostych sprzężonych względem stożkowej S^2 , którego wierzchołkiem jest ów punkt P .

43. Trójkąt wpisany w stożkową. Na płaszczyźnie stożkowej (niezniekształconej) S^2 niechaj dany będzie szereg punktów $l(A, B, C, \dots)$, którego podstawą jest dowolna prosta l . Oznaczmy przez L biegun prostej l względem stożkowej S^2 , a przez $a, b, c, \dots$ biegunowe poszczególnych punktów uważanego szeregu, to (ust. 40) zachodzi relacja:

$$l(A, B, C, \dots) \overline{\wedge} L(a, b, c, \dots).$$

Pęk prostych (l) przetnijmy dowolną prostą n , która nie przechodzi przez wierzchołek L , a zatem nie jest sprzężona z biegunową l względem S^2 , to wówczas

$$L(a, b, c, \dots) \overline{\wedge} n(A', B', C', \dots).$$

Zauważymy, że dla skonstruowanych w ten sposób szeregów

$$l(A, B, C, \dots) \overline{\wedge} n(A', B', C', \dots)$$

punkty homologiczne: $A i A', B i B', C i C', \dots$ są punktami sprzężonemi względem stożkowej S^2 , gdyż elementy $A', B', C', \dots$ leżą (ust. 42) odpow. na biegunowych poszczególnych punktów A, B, C .

Skonstruujmy teraz biegun N prostej n względem S^2 , oraz biegunową a' punktu A' . Ponieważ $A' = na$ leży na prostych n i a , przeto (ust. 39) jego biegunowa a' przejść musi przez bieguny N i A owych prostych. Podobnie dla punktów $B' = nb$, $C' = nc, \dots$ szeregu (n) ich biegunowe względem stożkowej S^2 są prostemi: $b' = NB$, $c' = NC, \dots$ Dochodzimy zatem do relacji:

$$n(A', B', C', \dots) \overline{\wedge} N(a', b', c', \dots) \overline{\wedge} l(A, B, C, \dots)$$

a zatem dla szeregów punktów

$$n(A', B', C', \dots) \overline{\wedge} l(A, B, C, \dots)$$

wykazaliśmy, że ich podstawy n i l posiadają analogiczne własności.

Załóżmy teraz, że podstawy l i n skonstruowanych szeregów przecinają się w punkcie P , leżącym na stożkowej S^2 . Punktowi P , uważanemu za element szeregu (l), podporządkowana będzie w pęku (L) biegunowa p , która jest styczną w punkcie P do stożkowej S^2 . Homologiczny punkt P' szeregu (n) jest elementem $P' = np$, który zjednoczył się z punktem P . Wnosimy stąd (ust. 18), że szeregi (l) i (n) są szeregami perspektywicznymi.

Dochodzimy zatem do dwóch, dwoiście odpowiadających sobie, twierdzeń:

Skoro na płaszczyźnie stożkowej (niezniekształconej) S^2 leżą dwie dowolne proste, które nie są sprzężone względem tej stożkowej, i każdemu punktowi jednej prostej podporządkujemy punkt z nią sprzężony względem stożkowej S^2 , a leżący na drugiej prostej — to uzyskane w ten sposób szeregi punktów są rzutowe.

Jeżeli zaś punkt przecięcia się tych dwóch dowolnych prostych jest sprzężony z samym sobą (t. zn. leży na stożkowej S^2), to uzyskane szeregi punktów są perspektywiczne.

Teraz dowieść możemy prawdziwości następujących twierdzeń Staudl'a :

Trójkąt wpisany w stożkową (niezniekształconą) S^2 posiada tę własność, że każda prosta sprzężona (względem S^2) z jednym z boków tego trójkąta, przecina obydwie pozostałe boki w punktach sprzężonych względem stożkowej S^2 .

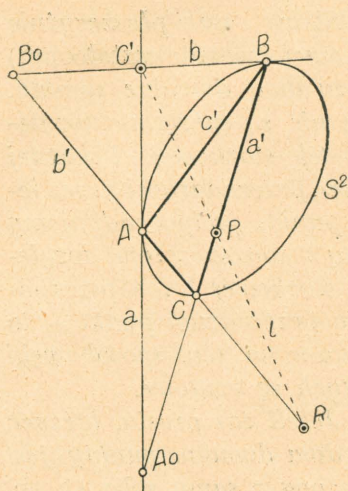
Skoro na płaszczyźnie stożkowej (niezniekształconej) S^2 leżą dwa dowolne punkty, które nie są sprzężone względem tej stożkowej, i każdej prostej, przechodzącej przez jeden punkt, podporządkujemy prostą z nią sprzężoną względem stożkowej S^2 , a przechodzącą przez drugi punkt — to uzyskane w ten sposób pęki prostych są rzutowe.

Jeżeli zaś prosta, łącząca owe dwa dowolne punkty, jest sprzężona z samą sobą (t. zn. jest styczną stożkowej S^2), to uzyskane pęki prostych są perspektywiczne.

Trójbok opisany na stożkowej (niezniekształconej) S^2 posiada tę własność, że każdy punkt sprzężony (względem S^2) z jednym z wierzchołków tego trójboku, rzucony z obydwu pozostałych wierzchołków, wyznacza proste sprzężone względem stożkowej S^2 .

Aby dowieść prawdziwości twierdzenia z lewej strony, weźmy pod uwagę (ryc. 66) boki $a' = BC$ i $b' = CA$ trójkąta ABC , wpisanego w stożkową S^2 , oraz styczne a, b w wierzchołkach A i B do stożkowej S^2 . Punkt $C' = ab$ jest biegunem boku $c' = AB$ względem stożkowej S^2 , a dowolna prosta l , przechodząca przez C' , jest „sprzężoną“ z bokiem $c' = AB$. Wykazać mamy, że punkty $P = la'$ i $R = lb'$ są sprzężone względem S^2 .

W tym celu boki a' i b' danego trójkąta ABC uważajmy za podstawy szeregów punktów, których elementami niechaj będą punkty sprzężone względem stożkowej S^2 . Punkty $A_0 = aa'$ i A , leżące na stycznej a , oraz B i $B_0 = b'b$, przynależne do stycznej



Ryc. 66.

Trójkąt wpisany w stożkową (niezniesztalconą) S^2 posiada tę własność, że każda prosta, która przecina dwa boki tego trójkąta w punktach sprzężonych względem tej stożkowej, jest prostą sprzężoną z trzecim bokiem owego trójkąta.

Trójbok opisany na stożkowej (niezniesztalconej) S^2 posiada tę własność, że każdy punkt, który rzucony z dwóch wierzchołków tego trójbok wyznacza dwie proste sprzężone względem stożkowej S^2 , jest punktem sprzężonym z trzecim wierzchołkiem owego trójboku.

W istocie bowiem, jeżeli punktom $C, A_0, B, P, \dots$ prostej a' (ryc. 66) podporządkujemy na prostej b' punkty z nimi sprzężone względem stożkowej S^2 , a mianowicie $C, A, B_0, R, \dots$, to otrzymamy dwa szeregi perspektywiczne $(a') \overline{\wedge} (b')$. Pary homologicznych punktów tych szeregów wyznaczają proste $a = A_0A$, $b = B_0B$, $l = PR, \dots$ pomocniczego pęku $C'(a, b, l, \dots)$, którego wierzchołkiem jest punkt $C' = ab$ przecięcia się prostych a i b . Z uwagi na to, że elementy a i b są stycznymi stożkowej S^2 w punktach A , wzgl. B , przeto punkt C' jest biegunem boku $AB = c'$ danego trójkąta a prosta $l = PR$ pęku (C') jest sprzężona z bokiem c' względem stożkowej S^2 , c. b. d. w.

Na ryc. 67 dany jest trójkąt 123 , wpisany w stożkową S^2 , którego bokami są proste $a = 23$, $b = 31$ i $c = 12$. Niechaj proste I, II i III będą stycznymi do stożkowej S^2 odpow. w punktach $1, 2, 3$, to wówczas uzyskamy trójbok $I II III$, opisany na

b , są (ust. 42) punktami sprzężonymi, a nadto punkt C stożkowej S^2 jest sprzężony z samym sobą. Na mocy poprzedniego twierdzenia użyliśmy na podstawach a' i b' dwa perspektywiczne szeregi punktów

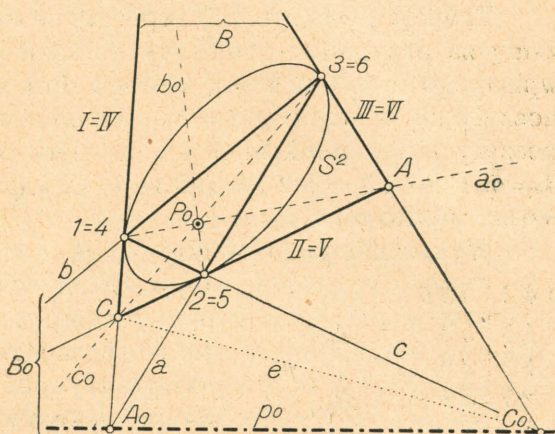
$$a'(C, A_0, B, \dots) \overline{\wedge} b'(C, A, B_0, \dots),$$

których elementy homologiczne wyznaczają proste $a = A_0A$, $b = BB_0, \dots$ pomocniczego pęku $C'(a, b, \dots)$. Wnosimy stąd, że dowolna prosta l tego pęku przecina podstawy a' i b' w dwóch punktach sprzężonych P i R , c. b. d. w.

Prawdziwemi są też, odwrotne do poprzednich, twierdzenia *Staudta*:

tej stożkowej, którego wierzchołkami są punkty $A = II\ III$, $B = III\ I$ i $C = I\ II$. Wyznamy następnie punkty $A_0 = Ia$, $B_0 = I Ib$ i $C_0 = IIIc$, oraz proste $a_0 = 1A$, $b_0 = 2B$ i $c_0 = 3C$.

Ponieważ punkt C_0 leży na prostych III i c , przeto jego biegunowa względem stożkowej S^2 przechodzi (ust. 39) przez bieguny 3 i C prostych III i c . Podobnie prosta $b_0 = 2B$ jest biegunową punktu $B_0 = I Ib$, a prosta $a_0 = 1A$ jest biegunową punktu $A_0 = Ia$.



Ryc. 67.

Jeżeli przez biegun C_0 prostej $c_0 = 3C$ poprowadzimy prostą $C_0C = e$, to elementy c_0 i e są prostymi sprzężonymi (ust. 42) względem stożkowej S^2 , a zatem dwustosunek $(c_0 e I II) = -1$. Dla czworokąta zupełnego $12AB$ punkty C_0 , C i $P_0 = a_0 b_0$ są wierzchołkami trójkąta przekątnego, a zatem (ust. 13) proste P_0C , e , I i II tworzą grupę harmoniczną o stosunku $(P_0C, e I II) = -1$. Ponieważ w dwóch otrzymanych grupach harmoniczych elementy e , I i II są wspólne, przeto proste $c_0 = C3$ i P_0C muszą się zjednoczyć. Dowiedliśmy tedy¹⁾, że trzy proste: $a_0 = 1A$, $b_0 = 2B$ i $c_0 = 3C$ przecinają się w punkcie P_0 . Z uwagi na to, że punkty A_0 , B_0 i C_0 są biegunami prostych a_0 , b_0 i c_0 względem stożkowej S^2 , przeto muszą owe punkty leżeć (ust. 39) na prostej p_0 , która jest biegunową punktu P_0 . A zatem:

Trójkąt wpisany w stożkową (niezniekształconą) S^2 posiada tę własność, że trzy punkty przecięcia się poszczególnych jego boków ze stycznymi, wykreślonymi do stożkowej S^2 w przeciwległych

Trójbok opisany na stożkowej (niezniekształconej) S^2 posiada tę własność, że trzy proste, łączące poszczególne jego wierzchołki z punktami styczności przeciwległych boków tego trójboku ze stożko-

¹⁾ Por. F. Enriques, l. c. str. 224.

wierzchołkach tego trójkąta,
leżą na jednej prostej.

wą S^2 , przecinają się w jed-
nym punkcie.

Trójkąt 1 2 3 (ryc. 67), wpisany w stożkową S^2 , uważać możemy za przypadek graniczny sześciokąta ($1 = 4$ $2 = 5$ $3 = 6$) wpisanego w tę stożkową, którego dwa wierzchołki 1 i 4 zjednoczyły się w punkcie $1 = 4$, podobnie wierzchołki 2 i 5 zjednoczyły się w punkcie $2 = 5$, a wierzchołki 3 i 6 w punkcie $3 = 6$. Boki $14 = I$, $25 = II$ i $36 = III$ tego sześciokąta są stycznymi stożkowej S^2 .

Wykazaliśmy, że punkty A_0 , B_0 i C_0 leżą na jednej prostej p_0 . Celem wyznaczenia owych punktów i prostej p_0 (prostej Pascala) posłużyć się możemy znowu schematem, jakiego używaliśmy poprzednio (ust. 28) dla sześciokąta wpisanego w stożkową S^2 .

Analogiczne uwagi stosować się będą do trójboku $I II III$, który uważać możemy (ryc. 67) za sześciobok ($I = IV$ $II = V$

$I IV II$	$V III VI$
$I IV$	$V III \dots a_0$
$IV II$	$III VI \dots c_0$
$II V$	$VI I \dots b_0$

$III = VI$), opisany na stożkowej S^2 . Wypisany obok schemat pozwoli skonstruować trzy proste a_0 , b_0 i c_0 , które przecinają się w jednym punkcie P_0 (punkcie Brianchona).

Uwaga: Z rozważań naszych wynika, że powyżej wypisane twierdzenia uważać możemy za szczególne przypadki (ust. 28 i 29) ogólnych twierdzeń Pascala i Brianchona.

44. Konstrukcyjne wyznaczenie elementów podwójnych pęków inwolucyjnych i szeregów inwolucyjnych. W ustępach 23—25 omówiliśmy własności szeregów i pęków inwolucyjnych. Poznaliśmy tam również pewne sposoby konstrukcyjnego uzupełnienia tych utworów. Teraz zajmiemy się takimi konstrukcjami, które pozwolą wyznaczyć punkty podwójne szeregów inwolucyjnych i proste podwójne pęków inwolucyjnych.

Wiadomo nam, że inwolucyjny pęk prostych

$$P(a_1 a_2, b_1 b_2, \dots)$$

wyznaczony jest przez dwie pary homologicznych prostych a_1 , a_2 i b_1 , b_2 . Skoro prostą b_1 oznaczmy (ryc. 68) przez c_2 , a prostą b_2 przez c_1 , to uważany pęk inwolucyjny jest (ust. 23) szczególnym przypadkiem dwóch jednokreślnych pęków prostych

$$P(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} P(a_2, b_2, c_2, \dots)$$

Skoro poszczególne pary homologicznych prostych danego pęku inwolucyjnego przecniemy stożkową (nieznieskształconą) S^2 , która leży na płaszczyźnie tego pęku i przechodzi przez jego wierzchołek, to pary owych punktów przecięcia wyznaczają proste, przechodzące przez jeden punkt.

Skoro przez poszczególne pary homologicznych punktów danego szeregu inwolucyjnego wykreślimy styczne do stożkowej (nieznieskształconej) S^2 , która jest styczną do podstawy tego szeregu, to pary owych stycznych przecinają się w punktach, leżących na jednej prostej.

Z łatwością dowiedzimy prawdziwości następujących twierdzeń:

Skoro wyznaczymy pary punktów przecięcia się poszczególnych prostych danego pęku ze stożkową (nieznieskształconą) S^2 , która leży na płaszczyźnie tego pęku i nie przechodzi przez jego wierzchołek, a następnie owe pary punktów rzucimy z dowolnego punktu stożkowej S^2 , to uzyskamy wówczas inwolucyjny pęk prostych.

Skoro z poszczególnych punktów danego szeregu wykreślimy pary stycznych do stożkowej (nieznieskształconej) S^2 , która wraz z podstawą tego szeregu leży na wspólnej płaszczyźnie i nie jest styczną do tej podstawy, a następnie owe pary stycznych przecniemy dowolną styczną stożkowej S^2 , to uzyskamy wówczas inwolucyjny szereg punktów.

Pęk prostych $W(a, b, z, \dots)$ i stożkowa S^2 , która nie przechodzi przez wierzchołek W , leżą (ryc. 68) na wspólnej płaszczyźnie. Poszczególne proste $a, b, z, \dots$ tego pęku przecinają stożkową S^2 w parach punktów: A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , Z_1 i $Z_2, \dots$ Dla czworokątów zupełnych $A_1 A_2 B_1 B_2$ i $A_1 A_2 Z_1 Z_2$ skonstruujemy punkty przekątne $B^* = b'_1 b'_2$ i $C = c'_1 c'_2$, oraz $Z = z'_1 z'_2$ i $X = x'_1 x'_2$, które leżą (ust. 38) na biegunowej w punkcie W względem stożkowej S^2 . Szereg punktów $w(A, B, C, Z, X, \dots)$, gdzie A jest punktem przecięcia się prostych w i a , rzućmy z punktów A_1 i A_2 stożkowej S^2 , to otrzymamy dwa perspektywiczne pęki prostych

$$A_1(a'_2, b'_2, c'_2, z'_2, x'_2, \dots) \overline{\wedge} A_2(a'_1, b'_1, c'_1, z'_1, x'_1, \dots).$$

Pęk prostych (A_1) jest rzutowy względem pęku $P(a_2, b_2, c_2, z_2, x_2, \dots)$, gdyż homologiczne proste tych pęków przechodzą (ust. 27) przez punkty $A_2, B_2, C_2, Z_2, X_2, \dots$ stożkowej S^2 . Pęki (A_2) i $P(a_1, b_1, c_1, z_1, x_1, \dots)$

są też jednokreślne, bo są rzutami punktów $A_1, B_1, C_1, Z_1, X_1, \dots$ stożkowej S^2 . Z relacji:

$$P(a_2, b_2, c_2, z_2, x_2, \dots) \bar{\wedge} A_1(a'_2, b'_2, c'_2, z'_2, x'_2, \dots) \bar{\wedge} w(A, B, C, Z, X, \dots) \bar{\wedge} A_2(a'_1, b'_1, c'_1, z'_1, x'_1, \dots) \bar{\wedge} P(a_1, b_1, c_1, z_1, x_1, \dots)$$

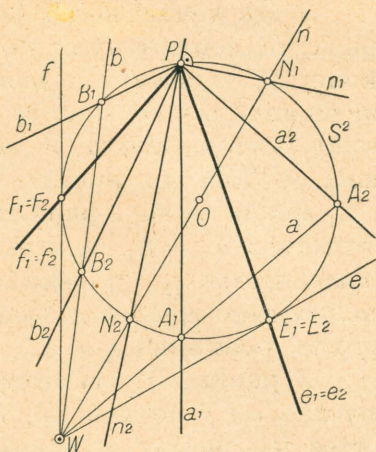
wynika (ust. 7) rzutowość pęków o wspólnym wierzchołku P , a ponieważ nadto proste: $b_2 = c_1$ i $b_1 = c_2$, $z_2 = x_1$ i $z_1 = x_2, \dots$ podporządkowane są sobie w sposób zamienny, przeto (ust. 23) dochodzimy do pęku inwolucyjnego

$$P(a_1 a_2, b_1 b_2, z_1 z_2, \dots).$$

W ten sposób wykazaliśmy prawdziwość twierdzenia, wypisanego po stronie lewej.

Zadanie 1: Dane są dwie pary prostych homologicznych $a_1 a_2$ i $b_1 b_2$ pęku inwolucyjnego. Należy skonstruować proste podwójne tego pęku.

Rozwiązanie: Przez wierzchołek P pęku inwolucyjnego poprowadźmy dowolne koło S^2 (ryc. 69) i wyznaczmy punkty A_1, A_2 i B_1, B_2 przecięcia się tego koła z danymi prostymi pęku (P). Proste $a = A_1 A_2$ i $b = B_1 B_2$ przecinają się w punkcie W , który jest wierzchołkiem pomocniczego pęku $W(a, b, \dots)$. Na mocy poprzednich twierdzeń dowolna prosta z pęku (W) przetnie koło S^2 w takich punktach Z_1 i Z_2 , że proste $z_1 = PZ_1$ i $z_2 = PZ_2$ są homologicznymi elementami pęku inwolucyjnego (P).



Ryc. 69.

Zadanie 2: Dane są dwie pary punktów homologicznych $A_1 A_2$ i $B_1 B_2$ szeregu inwolucyjnego. Należy skonstruować punkty podwójne tego szeregu.

Rozwiązanie: Narysujmy koło S^2 styczne do podstawy p szeregu inwolucyjnego i wyznaczmy styczne a_1, a_2 i b_1, b_2 tego koła, przechodzące przez dane punkty szeregu (p). Punkty $A = a_1 a_2$ i $B = b_1 b_2$ leżą na prostej w , która jest podstawą pomocniczego szeregu $w(A, B, \dots)$. Na mocy poprzednich twierdzeń styczne z_1 i z_2 , wykreślone z dowolnego punktu Z szeregu (w) do koła S^2 , przecinają prostą p w takich punktach $Z_1 = pz_1$ i $Z_2 = pz_2$, które są elementami homologicznymi szeregu inwolucyjnego (p).

Jeżeli wierzchołek W jest punktem „zewnątrznym“ stożkowej S^2 , to sieczna z może zjednoczyć się ze styczną e , wykreśloną z punktu W do koła S^2 . Wówczas punkty Z_1 i Z_2 zjednoczą się z punktem styczności $E_1 = E_2$, a proste homologiczne z_1 i z_2 pęku inwolucyjnego zjednoczą się na prostej podwójnej $e_1 = e_2$.

Z punktu W wykreślimy styczne e i f do koła S^2 , to przez ich punkty styczności przechodzą proste podwójne $e_1 = e_2$ i $f_1 = f_2$ pęku inwolucyjnego (P).

Uwaga: Zadanie 2 rozwiązać możemy również w ten sposób, że szereg inwolucyjny $p(A_1A_2, B_1B_2, \dots)$ rzucimy z dowolnego punktu P , a w otrzymanym pęku inwolucyjnym $P(a_1a_2, b_1b_2, \dots)$ wyznaczmy (por. zad. 1) proste podwójne $e_1 = e_2$ i $f_1 = f_2$. Owe proste przetną podstawę p w punktach $E_1 = E_2$ i $F_1 = F_2$, które są punktami podwójnymi szeregu inwolucyjnego (p).

Korzystając z rozwiązań powyższych zadań, ustalić możemy następujące zależności:

Jeżeli wierzchołek W pomocniczego pęku prostych $W(a, b, \dots)$ jest punktem zewnętrznym, wewnętrznym stożkowej S^2 , względnie leżącym na tej stożkowej, to wówczas pęk inwolucyjny $P(a_1a_2, b_1b_2, \dots)$ jest (ust. 25) pękiem hiperbolicznym, eliptycznym, wzgl. parabolicznym.

Jeżeli podstawa w jest prostą „sieczną“ stożkowej S^2 , to punkt Z zjednoczyć się może z punktem E przecięcia się prostej w z kołem S^2 . Wówczas proste z_1 i z_2 zjednoczą się ze styczną $e_1 = e_2$ (w punkcie E do koła S^2), a punkty homologiczne Z_1 i Z_2 szeregu inwolucyjnego zjednoczą się w punkcie podwójnym $E_1 = E_2$.

Wyznamy punkty E i F przecięcia się prostej w z kołem S^2 , to styczne w tych punktach przecinają się z podstawą p w punktach podwójnych $E_1 = E_2$ i $F_1 = F_2$ szeregu inwolucyjnego (p).

Jeżeli podstawa w pomocniczego szeregu $w(A, B, \dots)$ jest prostą sieczną, zewnętrzną stożkowej S^2 , wzgl. styczną tej stożkowej, to wówczas szereg inwolucyjny $p(A_1A_2, B_1B_2, \dots)$ jest (ust. 24) szeregiem hiperbolicznym, eliptycznym, wzgl. parabolicznym.

45. Wspólna para homologicznych elementów dwóch szeregów (wzgl. pęków) **inwolucyjnych.** Na dowolnej płaszczyźnie niechaj leżą dwa pęki inwolucyjne prostych $P(a_1a_2, b_1b_2, \dots)$ i $P(a'_1a'_2, b'_1b'_2, \dots)$ o wspólnym wierzchołku P . Dowolnemu promieniowi $x_1 = z'_1$, uważanemu za element x_1 pierwszego pęku

podporządkowana jest w tym pęku prosta x_2 ; natomiast prostej $x_1 = z'_1$, uważanej za element z'_1 drugiego pęku, niechaj podporządkowana będzie w owym pęku prosta z'_2 . W ogólności proste x_2 i z'_2 nie nakrywają się na jednej i tej samej prostej.

Zbadajmy, czy proste x_2 i z'_2 mogą się zjednoczyć na wspólnej prostej $x_2 = z'_2$? Innymi słowy: czy dwa uważane pęki inwolucyjne o wspólnym wierzchołku P posiadać mogą wspólną parę prostych homologicznych $x_1 = z'_1$ i $x_2 = z'_2$?

W tym celu przetnijmy dane pęki inwolucyjne dowolną stożkową (niezniekształconą) S^2 , która przechodzi przez ich wierzchołek P . Następnie, w sposób omówiony w ust. 44, skonstruujmy pomocniczy pęk prostych $W(a, b, \dots)$ związany ściśle z pękiem inwolucyjnym $P(a_1 a_2, b_1 b_2, \dots)$, oraz drugi pęk pomocniczy $W'(a', b', \dots)$, podporządkowany pękowi inwolucyjnemu $P(a'_1 a'_2, b'_1 b'_2, \dots)$. Gdyby wierzchołki W i W' tych pęków zjednoczyły się w punkcie W_0 , to — w myśl twierdzenia (z lewej strony) ust. 44 — pęki inwolucyjne o wspólnym wierzchołku P posiadałyby wszystkie wspólne pary prostych homologicznych, t. zn. istniałby tylko jeden pęk inwolucyjny. Wypadek ten, jako sprzeczny z założeniem, musimy wykluczyć. Wierzchołki W i W' są zatem dwoma różnymi punktami i określają wspólną prostą $WW' = x = z'$ pomocniczych pęków. Prosta WW' przecina się ze stożkową S^2 (ust. 31) w dwóch punktach (rzeczywistych lub urojonych sprzężonych) $X_1 = Z'_1$ i $X_2 = Z'_2$, a proste $x_1 = PX_1 = PZ'_1 = z'_1$ i $x_2 = PX_2 = PZ'_2 = z'_2$ stanowią wspólną parę prostych homologicznych uważanych pęków inwolucyjnych. A zatem dochodzimy do twierdzeń:

Dwa inwolucyjne pęki prostych o wspólnym wierzchołku (i leżące na wspólnej płaszczyźnie) posiadają zawsze jedną i tylko jedną wspólną parę homologicznych prostych (rzeczywistych, wzgl. urojonych sprzężonych).

Dwa inwolucyjne szeregi punktów o wspólnej podstawie posiadają zawsze jedną i tylko jedną wspólną parę homologicznych punktów (rzeczywistych, wzgl. urojonych sprzężonych).

Wykażemy poniżej prawdziwość twierdzeń uzupełniających, a mianowicie:

Jeżeli przynajmniej jeden z danych pęków inwolucyjnych jest pękiem eliptycznym,

Jeżeli przynajmniej jeden z danych szeregów inwolucyjnych jest szeregiem eliptycz-

to owa wspólna para prostych homologicznych jest rzeczywista.

nym, to owa wspólna para punktów homologicznych jest rzeczywista.

W tym celu weźmy pod uwagę dwa szeregi inwolucyjne o wspólnej podstawie p , których środki S i S_0 (ust. 24) są dowolnymi punktami prostej p . Niechaj $c < 0$ oznacza potęgę (ust. 24) pierwszego szeregu inwolucyjnego, który — wedle założenia — jest szeregiem eliptycznym, a symbol c_0 potęgą drugiego szeregu inwolucyjnego. Skoro punkty A_1 i A_2 prostej p tworzą wspólną parę elementów homologicznych tych szeregów inwolucyjnych, to dla ich potęg otrzymamy (ust. 24) zależności:

$$\overline{A_1 S} \cdot \overline{A_2 S} = c \quad \overline{A_1 S_0} \cdot \overline{A_2 S_0} = c_0.$$

Podstawiając (ust. 9) wartości:

$$\overline{A_1 S_0} = \overline{A_1 S} + \overline{SS_0} \quad \overline{A_2 S_0} = \overline{A_2 S} + \overline{SS_0}$$

otrzymujemy dla c_0 wartość

$$(\overline{A_1 S} + \overline{SS_0})(\overline{A_2 S} + \overline{SS_0}) = c_0 \text{ lub } \overline{A_1 S} + \overline{A_2 S} = \frac{c_0 - c - \overline{SS_0}^2}{\overline{SS_0}} = k_0.$$

Z dwóch związków:

$$\overline{A_1 S} \cdot \overline{A_2 S} = c \quad \overline{A_1 S} + \overline{A_2 S} = k_0$$

wynika, że pierwiastki $\overline{A_1 S}$ i $\overline{A_2 S}$ (wyrażające odległości nieznanymi punktów A_1 i A_2 od środka S pierwszego szeregu inwolucyjnego) spełniają równanie kwadratowe, typu:

$$x^2 - k_0 \cdot x + c = 0.$$

Otrzymujemy tedy następujące wartości pierwiastków powyższego równania kwadratowego:

$$\overline{A_1 S} = \frac{k_0 + \sqrt{k_0^2 - 4c}}{2} = \frac{c_0 - c - \overline{SS_0}^2 + \sqrt{(c_0 - c - \overline{SS_0}^2)^2 - 4c \cdot \overline{SS_0}^2}}{2 \cdot \overline{SS_0}}$$

$$\overline{A_2 S} = \frac{k_0 - \sqrt{k_0^2 - 4c}}{2} = \frac{c_0 - c - \overline{SS_0}^2 - \sqrt{(c_0 - c - \overline{SS_0}^2)^2 - 4c \cdot \overline{SS_0}^2}}{2 \cdot \overline{SS_0}}.$$

Ponieważ potęga $c < 0$, przeto jest wyrażenie $(c_0 - c - \overline{SS_0}^2)^2 - 4c \cdot \overline{SS_0}^2 > 0$, a para odcinków $\overline{A_1 S}$ i $\overline{A_2 S}$ jest „rzeczywista“. Wnosimy stąd, że uważane szeregi inwolucyjne posiadają jedną i tylko jedną *rzeczywistą* i wspólną parę homologicznych punktów A_1 i A_2 , c. b. d. w.

46. Własności punktów zewnętrznych i wewnętrznych, oraz prostych siecznych i zewnętrznych. Niechaj dana będzie dowolna stożkowa (nieznieskształcona) S^2 , oraz jakikolwiek bądź punkt „wewnętrzny“ W tej stożkowej. Z rozważań ust. 31 wiadomo nam, że przez W wykreślić możemy takie proste $a, b, c, \dots$, które są „siecznymi“ stożkowej S^2 i przecinają ją w parach rzeczywistych punktów: A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i $C_2, \dots$. Owe punkty rzucone z dowolnego punktu P stożkowej S^2 wyznaczają (ust. 44) inwolucyjny pęk prostych $P(a_1a_2, b_1b_2, \dots)$; ponieważ nadto przez punkt wewnętrzny W przechodzą dwie „urojone sprzężone“ styczne stożkowej S^2 , przeto (ust. 44) ów pęk inwolucyjny (P) jest pękiem eliptycznym.

Na płaszczyźnie stożkowej S^2 obierzmy teraz dowolny punkt „wewnętrzny“ lub „zewnątrzny“ W_0 i wykreślmy przezeń (ust. 31) proste „sieczne“ $a', b', c', \dots$ stożkowej S^2 . Punkty: A'_1 i A'_2, B'_1 i B'_2, C'_1 i $C'_2, \dots$, w których owe sieczne przecinają stożkową S^2 , rzućmy z wierzchołka P , to otrzymamy wówczas drugi pęk inwolucyjny $P(a'_1a'_2, b'_1b'_2, \dots)$.

Za pośrednictwem punktu „wewnętrznego“ W i dowolnego punktu W_0 skonstruowaliśmy dwa inwolucyjne pęki prostych

$$P(a_1a_2, b_1b_2, \dots) \text{ i } P(a'_1a'_2, b'_1b'_2, \dots)$$

o wspólnym wierzchołku P , z których pierwszy jest pękiem eliptycznym, a drugi może być albo eliptycznym, albo też hiperbolicznym. Pęki te posiadają (ust. 45) jedną rzeczywistą wspólną parę homologicznych prostych z_1 i z_2 . Wierzchołek P leży na stożkowej S^2 , przeto (ust. 31) z_1 i z_2 są „siecznymi“ tej stożkowej. Jeżeli tedy przez Z_1 i Z_2 oznaczymy rzeczywiste punkty przecięcia się prostych z_1 i z_2 ze stożkową S^2 , to one muszą leżeć (ust. 44) na prostej $Z_1Z_2 = z$ pomocniczego pęku W i równocześnie na prostej pomocniczego pęku W_0 . Prosta $z = Z_1Z_2$ przechodzi przez punkty W i W_0 . Ponieważ punkty W i W_0 są dowolnymi punktami, przeto¹⁾ dochodzimy do dwóch bardzo ważnych twierdzeń, podporządkowanych sobie w myśl zasady biegunowej dwoistości, a mianowicie:

Każda prosta, przechodząca przez punkt wewnętrzny stożkowej (nieznieskształconej) S^2 i leżąca na jej płaszczyźnie, jest sieczną tej stożkowej.

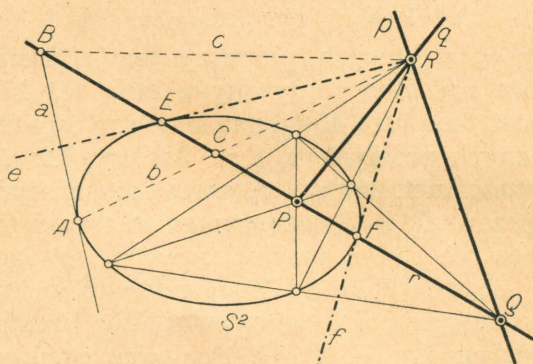
Każdy punkt, leżący na prostej zewnętrznej stożkowej (nieznieskształconej) S^2 , jest punktem zewnętrznym tej stożkowej.

¹⁾ Por. *F. Enriques*, l. c. str. 254.

Na ryc. 70 dane są stożkowa S^2 i punkt wewnętrzny P . Z ostatniego twierdzenia ust. 40-go wynika, że biegunowa p punktu wewnętrznego P względem stożkowej S^2 jest prostą „zewnątrzną“. Dowolny punkt Q , leżący na prostej zewnętrznej p , jest punktem zewnętrznym. Jego biegunowa q jest sieczną (ust. 40), przechodzi przez punkt wewnętrzny P (ust. 39) i przecina prostą zewnętrzną p w punkcie zewnętrznym $R = qp$. Biegunową punktu $R = qp$ jest oczywiście (ust. 39) prosta $r = QP$, która jest sieczną stożkowej S^2 . Trójkąt PQR , którego każdy wierzchołek jest biegunem przeciwległego boku względem pewnej stożkowej S^2 , nazwaliśmy w ust. 39-ym trójkątem biegunowym. A zatem:

W każdym trójkącie biegunowym względem stożkowej (nieznieskształconej) S^2 dwa jego boki są siecznami, a trzeci bok jest prostą zewnętrzną, oraz dwa jego wierzchołki są punktami zewnętrznymi, a trzeci wierzchołek jest punktem wewnętrznym owej stożkowej.

Oznaczmy (ryc. 70) przez E i F punkty przecięcia się siecznej $r = PQ$ ze stożkową S^2 . Punkty P, Q i E, F tworzą (ust. 38)



Ryc. 70.

grupę harmoniczną o stosunku $(PQEF) = -1$, przyczem punkty P i Q są (ust. 12) „harmonicznie sprzężone“ względem punktów E i F . Punkt P jest punktem wewnętrznym, a punkt Q jest zewnętrznym punktem dla stożkowej S^2 . Zbadajmy, czy powyższa własność spełniona jest dla każ-

dej pary punktów, leżących na stałej prostej siecznej $r = EF$ i harmonicznie sprzężonych względem punktów E, F ?

W tym celu obierzmy (ryc. 70) na stożkowej S^2 dowolny punkt A (różny od punktów E i F), wykreślmy styczną a w punkcie A do S^2 i wyznaczmy punkt $B = ra$, przecięcia się stałej prostej r z ową styczną a . Ponieważ B leży na stycznej a , przeto (ust. 31) jest punktem zewnętrznym stożkowej S^2 . Dla punktu $B = ra$ jego biegunowa b względem stożkowej S^2 przejść musi (ust. 39) przez bieguny R i A prostych r i a . Prosta $b = RA$ —

zawierająca punkt A stożkowej S^2 , lub też jako biegunowa (ust. 40) punktu zewnętrznego B — jest sieczną stożkowej S^2 i przecina prostą r w punkcie $C = br$. Zauważyć musimy, że: wierzchołki R i B trójkąta biegunowego RBC są punktami „zewnątrzniemi“, przeto trzeci wierzchołek C tego trójkąta — na mocy ostatniego twierdzenia — musi być punktem wewnętrznym stożkowej S^2 . Punkty B i C prostej $r = EF$ są harmonicznie sprzężone względem punktów E i F , a ponieważ punkt A i styczna a stożkowej S^2 były elementami dowolnie przyjętymi, więc: B i C stanowią dowolną parę punktów prostej r .

Jeżeli punkt A poruszać się będzie po stożkowej S^2 , to styczna a obwodzić będzie tę stożkową, a punkt zewnętrzny $B = ra$ przebiegać będzie odcinek $\overline{EQF}$ (zawierający punkt niewłaściwy prostej $r = EF$), a równocześnie punkt wewnętrzny C — harmonicznie sprzężony z punktem B względem pary E i F — przebiegać będzie odcinek (o długości skończonej) $\overline{EPF}$ owej prostej r .

Skoro punkty B, C, E i F rzucimy z bieguna R prostej r , to proste $c = RB$ i $b = RC$ są „harmonicznie sprzężone“ względem stycznych $e = RE$ i $f = RF$ stożkowej S^2 . Nadto prosta c jest prostą „zewnątrzną“, a element b prostą „sieczną“ stożkowej S^2 . A zatem:

Punkty przecięcia się danej prostej siecznej r ze stożkową (niezniekształconą) S^2 określają na r dwa dopełniające się odcinki o tej własności, że: punkty wewnętrzne jednego z tych odcinków są punktami wewnętrznymi stożkowej S^2 , a punkty wewnętrzne drugiego z tych odcinków są punktami zewnętrznymi stożkowej S^2 .

Styczne z danego punktu zewnętrznego R do stożkowej (niezniekształconej) S^2 określają dwa dopełniające się kąty o tej własności, że: proste wewnętrzne jednego z tych kątów są siecznymi stożkowej S^2 , a proste wewnętrzne drugiego z tych kątów są prostymi zewnętrznymi stożkowej S^2 .

47. Proste normalne pęku inwolucyjnego. Pęk cykliczny.

Na ryc. 69 dany jest pęk inwolucyjny $P(a_1a_2, b_1b_2, \dots)$, oraz koło S^2 , przechodzące przez wierzchołek P tego pęku. Punkty A_1, A_2 i B_1, B_2 , przecięcia się danych dwóch par prostych pęku inwolucyjnego z kołem S^2 , wyznaczają proste $a = A_1A_2$ i $b = B_1B_2$ pomocniczego pęku $W(a, b, \dots)$. Zapomocą poszczególnych prostych pęku (W) możemy dokonać uzupełnienia (ust. 44) pęku

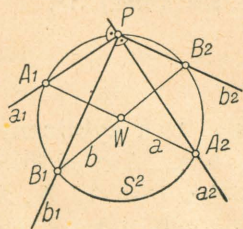
inwolucyjnego (P). Przez wierzchołek W i przez środek O koła S^2 wykreślimy prostą $n = WO$. Ponieważ punkt O — jak to wykazemy w ust. 48 — jest punktem „wewnętrznym“ koła, przeto prosta $n = WO$ jest (ust. 46) sieczną i przecina koło S^2 w dwóch punktach rzeczywistych N_1 i N_2 . Proste $PN_1 = n_1$ i $PN_2 = n_2$ tworzą (ust. 44) parę elementów homologicznych pęku inwolucyjnego (P), a ponieważ „kąt w półkołu“ $\sphericalangle N_1PN_2$ jest kątem prostym, przeto elementy n_1 i n_2 są wzajemnie prostopadłe i stanowią (ust. 25) parę *prostych normalnych* pęku inwolucyjnego.

Prosta $n = WO$, przechodząca przez środek O koła S^2 i przez wierzchołek W — który może być punktem „zewnętrznym“, „wewnętrznym“ lub wreszcie „leżącym na“ kole S^2 — przecina owe koło zawsze w dwóch punktach rzeczywistych N_1 i N_2 . Dochodzimy zatem do twierdzenia, którego prawdziwość wykazaliśmy już w ust. 25-ym, a mianowicie:

Każdy inwolucyjny pęk prostych — bez względu na to, czy on jest pękiem hiperbolicznym, parabolicznym, czy też eliptycznym — posiada zawsze przynajmniej jedną rzeczywistą parę homologicznych prostych normalnych.

Na ryc. 69 weźmy pod uwagę pęk inwolucyjny hiperboliczny (P), którego proste podwójne $e_1 = e_2$ i $f_1 = f_2$ przechodzą przez punkty styczności stycznych e i f , wykreślonych z wierzchołka W do koła S^2 . Ponieważ prosta $n = WO$ przechodzi przez środek koła, przeto występują równości łuków $\widehat{F_1N_2} = \widehat{E_1N_2}$ i $\widehat{F_1N_1} = \widehat{E_1N_1}$ koła S^2 . Z równości tych wynika równość kątów obwodowych: $\sphericalangle F_1PN_2 = \sphericalangle E_1PN_2$ lub $\sphericalangle F_1PN_1 = \sphericalangle E_1PN_1$. A zatem:

Proste normalne pęku inwolucyjnego hiperbolicznego są symetralnami kątów, jakie tworzą proste podwójne tego pęku.



Ryc. 71.

Wiadomo nam, że pęk inwolucyjny wyznaczony jest (ust. 23) przez dwie dowolne pary prostych homologicznych. Niechaj dane będą na ryc. 71 dwie wzajemnie prostopadłe proste homologiczne $a_1 \perp a_2$ i $b_1 \perp b_2$ pęku inwolucyjnego (P). Skoro ów pęk przetniemy kołem S^2 , przechodzącym przez wierzchołek P owego pęku inwolucyjnego, to wówczas proste $A_1A_2 = a$ i $B_1B_2 = b$ przechodzą przez środek W koła S^2 . Ponieważ wierzchołek pomocniczego pęku

prostych $W(a, b, \dots)$ jest punktem wewnętrznym koła S^2 , przeto (ust. 44) pęk inwolucyjny (P) jest pękiem eliptycznym. Ponieważ wierzchołek pęku pomocniczego $W(a, b, \dots)$ jest środkiem koła S^2 , przeto *wszystkie pary* homologicznych prostych pęku inwolucyjnego (P) są *wzajemnie prostopadłe*. Taki pęk inwolucyjny eliptyczny nazywamy *pękiem cyklicznym* lub *pękiem kołowym*.

48. Średnica i środek stożkowej. Skoro dana jest na płaszczyźnie ω dowolna stożkowa (nieznieskształcona) S^2 , to (ust. 41) każdemu punktowi A płaszczyzny ω podporządkowaną jest jedna i tylko jedna biegunowa a względem stożkowej S^2 , oraz każdej prostej b , przynależnej do ω , podporządkowany jest jeden i tylko jeden biegun B względem S^2 . Powyższa zależność zachowana będzie również i w tym przypadku, gdy punkt A i prosta b będą elementami niewłaściwymi.

Jeżeli przez o^∞ oznaczymy prostą niewłaściwą płaszczyzny ω , a przez P^∞ dowolny punkt prostej o^∞ , to wówczas:

Biegunową p punktu niewłaściwego P^∞ względem stożkowej (nieznieskształconej) S^2 nazywać będziemy *średnicą* uważanej stożkowej.

Biegun O prostej niewłaściwej o^∞ względem stożkowej S^2 nazywać będziemy *środkiem* owej stożkowej S^2 .

Ponieważ punkt P^∞ leży na prostej o^∞ , przeto z rozważań ust. 39 wynika bezpośrednio, że: średnica p przechodzi przez środek O . Podobnie dla dowolnych punktów P^∞ i T^∞ prostej o^∞ , ich średnice p i t przecinają się w środku $O = pt$. Wreszcie każda prosta r płaszczyzny ω , przechodząca przez środek O , jest średnicą, gdyż biegun R^∞ tej prostej leżeć musi (ust. 39) na biegunowej punktu O , t. zn. na prostej niewłaściwej o^∞ . A zatem prawdziwe są następujące twierdzenia:

Wszystkie średnice stożkowej (nieznieskształconej) S^2 tworzą pęk prostych, którego wierzchołkiem jest środek tej stożkowej.

Każda prosta, leżąca na płaszczyźnie stożkowej (nieznieskształconej) S^2 i przechodząca przez jej środek, jest średnicą tej stożkowej.

Wiadomo nam, że: stożkowa S^2 jest elipsą, parabola, względnie hiperbolą zależnie od tego (ust. 32), czy prosta niewłaściwa

o^∞ jest prostą zewnętrzną, styczną, wzgl. prostą sieczną owej stożkowej. Wiadomo nam również, że koło jest (ust. 32) szczególnym przypadkiem elipsy.

Środek elipsy (wzgl. koła), jako biegun prostej zewnętrznej o^∞ , jest (ust. 40) punktem „wewnętrznym“, a każda średnica elipsy (wzgl. koła) jest (ust. 46) prostą „sieczną“. Prosta niewłaściwa o^∞ jest styczną do paraboli, a jej punkt styczności O^∞ , jako biegun (ust. 38) prostej o^∞ , jest środkiem paraboli. Wnosimy stąd, że średnice paraboli są (ust. 31) siecznymi tej stożkowej. Środek hiperboli, jako biegun siecznej o^∞ jest (ust. 40) punktem „zewnętrznym“. Niechaj prosta o^∞ przecina się z hiperbolą w dwóch rzeczywistych punktach E^∞ i F^∞ . Styczne e i f w owych punktach do hiperboli, t. zn. jej asymptoty (ust. 32), są biegunowemi (ust. 38) punktów styczności E^∞ i F^∞ . Asymptoty e i f są — w myśl naszej definicji — również średnicami hiperboli. A zatem:

Środek koła, elipsy i hiperboli jest punktem właściwym.

Środek koła i elipsy jest punktem wewnętrznym, środek zaś hiperboli jest punktem zewnętrznym tej stożkowej.

Środek paraboli jest punktem niewłaściwym i leży na tej paraboli.

Styczna niewłaściwa paraboli styka się z tą parabolą w jej środku.

Średnice koła, elipsy i paraboli są siecznymi tej stożkowej.

Średnice paraboli są prostymi równoległymi.

Asymptoty hiperboli, jako jej średnice, przecinają się w środku tej hiperboli.

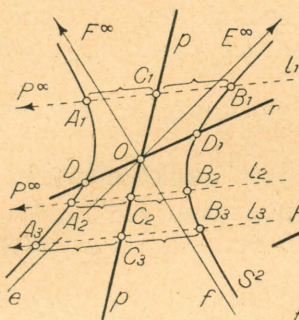
Z ostatniego twierdzenia ust. 46-go wynika bezpośrednio:

Asymptoty hiperboli określają dwa dopełniające się kąty o tej własności, że: średnice wewnętrzne jednego z tych kątów są siecznymi tej hiperboli, a średnice wewnętrzne drugiego z tych kątów są prostymi zewnętrznymi owej hiperboli.

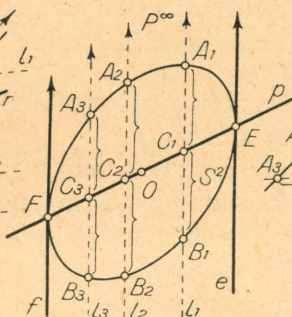
Te średnice hiperboli, które są jej siecznymi, nazywamy *średnicami rzeczywistymi*; średnice zaś, które są prostymi zewnętrznymi hiperboli, nazywamy *średnicami idealnymi* tej stożkowej. Na ryc. 72 dane są asymptoty e , f , środek O , średnica rzeczywista r i średnica idealna p hiperboli.

Zajmiemy się teraz konstrukcyjnym wyznaczeniem średnic i środków stożkowych. W tym celu przez dany punkt niewła-

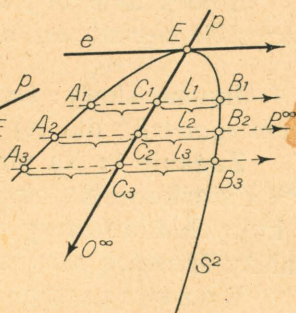
ściwy P^∞ poprowadźmy (ryc. 72—74) dwie dowolne sieczne $l_1 // l_2$, które przecinają daną stożkową S^2 w punktach rzeczywistych A_1, B_1 i A_2, B_2 . Odcinek o długości skończonej, leżący na dowolnej siecznej, a którego punktami końcowymi są punkty przecięcia się owej siecznej ze stożkową S^2 , nazywamy *cięciwą* tej stożkowej. Dla cięciw $\overline{A_1B_1}$ i $\overline{A_2B_2}$ wyznaczmy ich środki C_1 i C_2 , a ponieważ stosunki $(P^\infty C_1 A_1 B_1) = (P^\infty C_2 A_2 B_2) = -1$, więc prosta $p = C_1 C_2$ jest (ust. 38) biegunową punktu P^∞ i przechodzi przez środki $C_3, C_4, \dots$ wszystkich cięciw $\overline{A_3B_3}, \overline{A_4B_4}, \dots$ stożkowej S^2 , które są równoległe do prostej siecznej l_1 .



Ryc. 72.



Ryc. 73.



Ryc. 74.

Proste sieczne $l_1 // l_2 // l_3 // \dots$ przechodzą przez biegun P^∞ średnicy p , więc są (ust. 42) prostymi sprzężonymi ze średnicą p . Odcinki $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \overline{A_3B_3}, \dots$, przynależne odpow. do siecznych $l_1 // l_2 // l_3 // \dots$, nazywać będziemy „*cięciwami sprzężonymi*“ ze średnicą p . Dowolna cięciwa $\overline{A_1B_1}$ stożkowej S^2 i średnica C_1O , łącząca środek C_1 owej cięciwy ze środkiem O tej stożkowej, są elementami sprzężonymi. A zatem:

Każda średnica — nie będąca asymptotą — stożkowej (nieznieskształconej) S^2 posiada tę własność, że przechodzi przez środki cięciw tej stożkowej, które są wzajemnie równoległe i sprzężone z ową średnicą.

Środki równoległych cięciw stożkowej (nieznieskształconej) S^2 leżą na jej średnicy, sprzężonej z temi cięciwami.

Jeżeli średnica p stożkowej S^2 (ryc. 73 i 74) jest sieczną i przecina S^2 w punkcie rzeczywistym E , to prosta $e = P^\infty E$, łącząca biegun P^∞ średnicy p z punktem E , jest (ust. 38 i 39) styczną stożkowej S^2 . A zatem:

Styczna stożkowej (nieznieskształconej) S^2 , przechodząca przez punkt przecięcia się tej stożkowej z jej średnicą, jest prostą sprzężoną z ową średnicą.

Niechaj środek O stożkowej będzie punktem właściwym. Przez O wykreślimy dowolną sieczną, która przecina uważaną stożkową w punktach E, F , a biegunową o^∞ środka O w punkcie niewłaściwym G^∞ . Punkty O i G^∞ są (ust. 38) harmonicznie sprzężone względem punktów E i F , a ponieważ G^∞ jest elementem niewłaściwym, przeto (ust. 12) środek O połowi odcinek $\overline{EF}$. Wnosimy stąd, że:

Środek właściwy stożkowej (nieznieskształconej) S^2 połowi wszystkie cięciwy tej stożkowej, przechodzące przez ów środek.

Innymi słowy: środek właściwy O stożkowej S^2 jest „środkiem symetrii“ dla tej stożkowej.

Zadanie 1: Na płaszczyźnie dany jest punkt niewłaściwy P^∞ i stożkowa S^2 , określona pięcioma punktami 1, 2, 3, 4 i 5, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Skonstruować należy średnicę p tej stożkowej.

Rozwiązanie: Proste równoległe $P^\infty 1 = l_1$ i $P^\infty 2 = l_2$ przetną stożkową S^2 w punktach A_1 i A_2 (p. ust. 35, zad. 1). Niechaj punkty C_1 i C_2 będą środkami cięciw $\overline{1A_1}$ i $\overline{2A_2}$, to prosta $p = C_1 C_2$, jako biegunowa punktu niewłaściwego P^∞ , jest szukaną średnicą.

Zadanie 2: Stożkowa S^2 określona jest pięcioma punktami 1, 2, 3, 4 i 5, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Skonstruować należy środek tej stożkowej.

Rozwiązanie: Punkty niewłaściwe prostych np. 12 i 13 oznaczmy przez P^∞ i R^∞ . Średnice p i r stożkowej S^2 , t. zn. biegunowe punktów P^∞ i R^∞ , przetną się w punkcie $O = pr$, który jest środkiem owej stożkowej.

Zadanie 3: Stożkowa S^2 określona jest pięcioma stycznymi I, II, III, IV i V, z których żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Skonstruować środek tej stożkowej.

Rozwiązanie: Przez punkt niewłaściwy P^∞ stycznej I wykreślimy drugą styczną VI do stożkowej S^2 (p. ust. 35, zad. 2). Wyznamy następnie punkty styczności A i B stożkowej S^2 ze stycznymi I i VI (p. ust. 35, zad. 4). Prosta AB jest średnicą, a punkt O połowiący cięciwę $\overline{AB}$ jest środkiem stożkowej S^2 .

Ćwiczenie 1: Wyznaczyć środek paraboli, określonej czterema stycznymi właściwymi I, II, III i IV. (Zastosować twierdzenie Brianchona.)

Ćwiczenie 2: Zadania 1 i 2 rozwiązać wówczas, jeżeli stożkowa określona jest: a) punktami 1, 2, 3, 4 i styczną w punkcie 1; b) punktami 1, 2, 3 i dwiema stycznymi w dwóch z tych punktów.

Zadanie 4: Dla paraboli, określonej dwiema stycznymi a, b i ich punktami styczności A, B — skonstruować należy jej środek.

Rozwiązanie: Zastosujmy twierdzenie Brianchona (ust. 43) do sześcioboku ($a = c, o^\infty = s^\infty, b = d$) opisanego na paraboli, którego trzy pary boków: a i c, o^∞ i s^∞, b i d zjednoczyły się ze stycznymi a, o^∞ i b . Z wypisanego schematu

$$\left. \begin{array}{l|l} a c o^\infty & s^\infty b d \\ A = a c & s^\infty b \dots\dots I \\ c o^\infty & b d = B \dots II \\ O^\infty = o^\infty s^\infty & d a = E \dots III \end{array} \right\} B_0$$

wynika, że proste I i II — wykreślone z danych punktów A i B równoległe do stycznej b , wzgl. a — przecinają się w punkcie Brianchona $B_0 = III$. Na prostej $III = EB_0$

łączącej punkty $E = ad$ i B_0 , leży środek O^∞ owej paraboli. Prosta III jest zatem średnicą paraboli.

49. Średnice sprzężone, asymptoty, osie i wierzchołki stożkowej. W ust. 42 podaliśmy definicję „prostych sprzężonych” względem stożkowej, oraz dowiedliśmy prawdziwości następującego twierdzenia: Jeżeli dwie proste posiadają tę własność, że biegun — względem stożkowej S^2 — jednej z nich leży na prostej drugiej, to wówczas owe proste są sprzężone względem tej stożkowej.

Obecnie, zamiast dowolnych prostych, weźmiemy pod uwagę średnice stożkowej S^2 i wprowadzimy analogiczną definicję:

*Dwie średnice r i q stożkowej (nieznieskształconej) S^2 , które wraz ze stycznymi e i f — rzeczywistymi lub urojonymi sprzężonymi — wykreślonymi do S^2 ze środka tej stożkowej, tworzą grupę harmoniczną o stosunku $(efrq) = -1$, nazywać będziemy **średnicami sprzężonymi** tej stożkowej.*

Dla paraboli, której środek O^∞ jest punktem styczności prostej niewłaściwej o^∞ z tą parabola, styczne e i f zjednoczyły się z prostą o^∞ . Średnica q , sprzężona ze średnicą r paraboli, zjednoczyć się musi (ust. 12) również z elementem o^∞ . Możemy tedy powiedzieć, że: *Każda średnica paraboli jest sprzężona ze styczną niewłaściwą o^∞ tej paraboli.*

Dla hiperboli jej asymptoty e i f są (ust. 48) stycznymi, wykreślonymi ze środka O do tej hiperboli; jeżeli średnica r

hiperboli zjednoczy się z asymptotą e , to również i średnica q z nią sprzężona zjednoczyć się musi (ust. 12) z asymptotą e . *Każda asymptota hiperboli jest średnicą, która jest sprzężona sama z sobą.*

Z twierdzenia, przytoczonego na początku tego ustępu, wynika bezpośrednio prawdziwość następującego twierdzenia:

Jeżeli dwie średnice stożkowej (nieznieskształconej) posiadają tę własność, że biegun jednej średnicy jest punktem niewłaściwym średnicy drugiej, to wówczas owe proste są średnicami sprzężonemi tej stożkowej.

Skoro dana jest średnica r stożkowej S^2 (ryc. 75 i 76), to — na mocy powyższego twierdzenia — prosta $q = R^\infty O$, łącząca biegun R^∞ owej średnicy ze środkiem O tej stożkowej, jest średnicą sprzężoną z elementem r . Z konstrukcji tej wynikają też własności paraboli i hiperboli, które wyszczególnione były powyżej, a mianowicie: Dla paraboli średnica r jest sprzężona ze średnicą $q^\infty = R^\infty O^\infty$, która zjednoczyła się z niewłaściwą styczną o^∞ . Dla hiperboli jej asymptota e (ryc. 76) i średnica z nią sprzężona $E^\infty O$ zjednoczyły się na wspólnej prostej.

Prawdziwemi są również (p. ust. 48) twierdzenia:

Średnice sprzężone elipsy wzgl. hiperboli posiadają tę własność, że każda z nich połowi takie cięciwy tej stożkowej, które są równoległe do średnicy drugiej.

Styczne elipsy, wzgl. hiperboli, przechodzące przez punkty przecięcia się tej stożkowej z jej średnicą r , są prostami równoległymi do drugiej średnicy, która jest sprzężona z ową średnicą r .

Na ryc. 75 i 76 dane są średnice sprzężone r i q elipsy i hiperboli. Punkty niewłaściwe R^∞ i Q^∞ są biegunami tych średnic sprzężonych. Styczne a_1 i a_2 , wykreślone w punktach A_1 i A_2 średnicy r , są równoległe do średnicy q . Styczne a_1 , a_2 , b_1 i b_2 elipsy, przechodzące przez punkty A_1 i A_2 średnicy r i przez punkty B_1 i B_2 średnicy q , tworzą równoległobok opisany na elipsie.

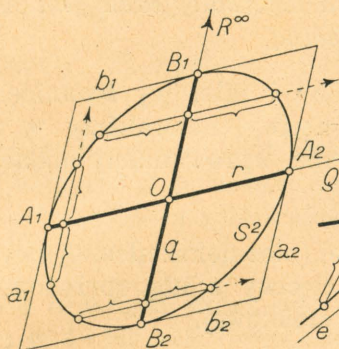
Korzystając z rozważań ust. 42-go (p. ryc. 64 i 65) ustalić możemy następujące zależności:

Punkty sprzężone względem (nieznieskształconej) stożkowej, które leżą na prostej niewłaściwej o^∞ , tworzą sze-

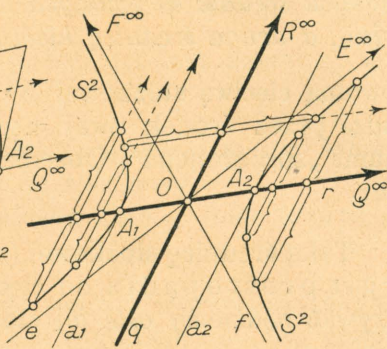
Średnice sprzężone stożkowej (nieznieskształconej) tworzą pęk involucyjny, którego wierzchołkiem jest środek O

reg inwolucyjny. Punkty (rzeczywiste lub urojone sprzężone) przecięcia się prostej o^∞ ze stożkową są punktami podwójnymi owego szeregu inwolucyjnego.

tej stożkowej. Styczne (rzeczywiste lub urojone sprzężone) poprowadzone ze środka O do stożkowej są prostymi podwójnymi owego pęku inwolucyjnego.



Ryc. 75.



Ryc. 76.

Z relacji (4⁰) ust. 40-go wynika perspektywiczność szeregu o podstawie o^∞ i pęku o wierzchołku O . Wnosimy stąd, że: proste podwójne e i f pęku inwolucyjnego (o) stykają się z uważaną stożkową S^2 w punktach niewłaściwych E^∞ i F^∞ , które są punktami podwójnymi szeregu inwolucyjnego (o^∞). Proste e i f są zatem (ust. 32) asymptotami stożkowej S^2 . A zatem:

Proste podwójne (rzeczywiste lub urojone sprzężone), pęku inwolucyjnego średnic sprzężonych stożkowej (niezniekształconej) S^2 , są asymptotami tej stożkowej.

Zależnie od tego, czy omawiany

szereg inwolucyjny o podstawie o^∞ jest szeregiem:

pęk inwolucyjny o wierzchołku O jest pękiem:

a) eliptycznym, b) parabolicznym, c) hiperbolicznym, to (ust. 32) stożkowa S^2 jest wówczas: a) elipsą, b) parabolą, c) hiperbolą.

Wykazaliśmy tedy, że: *elipsa posiada dwie asymptoty urojone sprzężone, hiperbola dwie asymptoty rzeczywiste, parabola zaś dwie asymptoty zjednoczone ze styczną niewłaściwą o^∞ .*

Asymptoty e , f i para średnic sprzężonych p , r hiperboli tworzą (ust. 25) grupę harmoniczną o dwustosunku $(efpr) = -1$.

Pary prostych ef i pr rozdzielają się, gdyż liczba ($efpr$) jest (ust. 10) mniejsza od zera. A ponieważ asymptoty ef określają (ust. 48) dwa dopełniające się kąty o tej własności, że średnice wewnętrzne jednego z tych kątów są siecznymi, a drugiego z tych kątów są prostymi zewnętrznymi (średnicami idealnymi), przeto :

Z dwóch średnic sprzężonych hiperboli jedna jest średnicą rzeczywistą, a druga średnicą idealną.

Dowolną cięciwę stożkowej S^2 i taką jej średnicę, która przechodzi przez środek owej cięciwy, nazwalimy w ust. 48 elementami „sprzężonemi“. Obecnie wprowadzimy następującą definicję :

Taką średnicę stożkowej (nieznieskształconej), która jest prostopadła do cięciwy z nią sprzężonej, nazywać będziemy *osią* tej stożkowej.

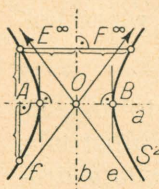
Z powyższej definicji wynika bezpośrednio, że : *oś stożkowej jest osią symetrii prostokątnej* dla tej stożkowej.

Wiadomo nam, że wszystkie średnice paraboli są prostymi równoległymi, gdyż przechodzą przez środek O^∞ tej paraboli. Skoro tedy wykreślimy (ryc. 78) cięciwy paraboli, które są prostopadłe do jej średnic, to środki owych cięciw leżeć będą (ust. 48) na jednej i tylko jednej średnicy a . Skonstruowana w ten sposób średnica a jest oczywiście osią owej paraboli. A zatem :

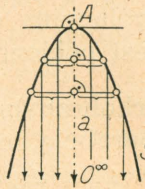
Parabola posiada jedną i tylko jedną oś.

Celem skonstruowania osi elipsy i hiperboli, weźmy pod uwagę pęk inwolucyjny średnic sprzężonych tej stożkowej S^2 .

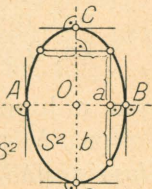
Taki pęk inwolucyjny, który dla elipsy jest pękiem eliptycznym, a dla hiperboli pękiem hiperbolicznym, posiada zawsze (ust. 25 i 47) jedną rzeczywistą parę homologicznych prostych normalnych $a \perp b$. Ponieważ proste $a \perp b$ są śred-



Ryc. 77.



Ryc. 78.



Ryc. 79.

nicami sprzężonemi tej stożkowej S^2 , przeto : średnica a (ryc. 77 i 79) połowi wszystkie cięciwy tej stożkowej, równoległe do

średnicy z nią sprzężonej b , czyli prostopadłe do a . Innymi słowy: średnica a jest osią uważanej stożkowej. Podobnie i druga średnica b jest również osią tej stożkowej, gdyż połowi wszystkie cięciwy stożkowej S^2 , które są równoległe do średnicy a , a tem samem prostopadłe do średnicy b . Wykazaliśmy tedy, że:

Elipsa i hiperbola posiadają dwie wzajemnie prostopadłe osie.

Możemy też wysławić (p. też ust. 47) następujące twierdzenia:

Proste normalne pęku inwolucyjnego średnic sprzężonych elipsy lub hiperboli są osiami tej stożkowej.

Osie hiperboli są symetralnemi kątów, jakie tworzą asymptoty tej hiperboli.

Oś a hiperboli, która jest sieczną i przecina tę stożkową (ryc. 77) w dwóch rzeczywistych punktach A i B , nazywa się *osią główną*. Pozostała oś b hiperboli nazywa się *osią idealną*. Dla elipsy (ryc. 79) mamy dwie osie a i b , które przecinają tę stożkową w punktach A i B , wzgl. C i D . Jeżeli dla odcinków (o długościach skończonych) $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ spełniona jest nierówność: $\overline{AB} < \overline{CD}$, to oś $a = AB$ nazywa się *osią mniejszą*, a oś $b = CD$ *osią większą* lub *główną* tej elipsy.

Wierzchołkami stożkowej nazwiemy punkty przecięcia się stożkowej z jej osiami. Z dotychczasowych rozważań wnosimy, że:

Elipsa posiada cztery wierzchołki rzeczywiste, hiperbola posiada dwa wierzchołki rzeczywiste i dwa urojone sprzężone, natomiast parabola posiada jeden wierzchołek właściwy i jeden niewłaściwy.

Słyszczna do stożkowej (niezniekształconej) w jej wierzchołku właściwym jest prostopadłą do osi tej stożkowej.

Zadanie 1: Stożkowa S^2 określona jest pięcioma punktami 1, 2, 3, 4 i 5, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Skonstruować dwie pary średnic sprzężonych tej stożkowej.

Rozwiązanie: Dla punktu niewłaściwego A^∞ siecznej $l = 12$ wyznaczmy (ust. 48, zad. 1) jego średnicę a względem stożkowej S^2 . Podobnie dla punktu niewłaściwego B^∞ siecznej $m = 13$ jego średnicą niechaj będzie prosta b . Punkt $O = ab$ jest środkiem stożkowej, a prosta a_1 , wykreślona przez O równoległe do prostej l , jest średnicą sprzężoną ze średnicą a . Po-

dobnie prosta $b_1 // m$ i przechodząca przez środek O jest średnicą sprzężoną ze średnicą b .

Zadanie 2: Dla stożkowej nieznieskształconej S^2 , która określona jest pięcioma punktami 1, 2, 3, 4 i 5, skonstruować należy asymptoty, osie i wierzchołki.

Rozwiązanie: Wyznamy dwie pary średnic sprzężonych a i a_1 , b i b_1 tej stożkowej, a następnie dla pęku inwolucyjnego $O(aa_1, bb_1, \dots)$ skonstruujemy (ust. 44 i 47) proste podwójne e, f i proste normalne $n \perp n_1$. Proste e i f są asymptotami, elementy $n \perp n_1$ są osiami, a punkty przecięcia się osi ze stożkową S^2 (ust. 36) są wierzchołkami tej stożkowej.

Zadanie 3: Dla paraboli dane są trzy jej punkty 1, 2, 3, oraz kierunek osi. Wyznaczyć wierzchołek tej paraboli.

Rozwiązanie: Przez punkt np. 1 wykreślimy prostą l prostopadłą do danej prostej k , która określa kierunek osi (średnic) paraboli. Prosta l przetnie parabolę w punkcie 4, a przez środek C cięciwy $\overline{14}$ przejdzie oś paraboli $a // k$. Punkt przecięcia się osi a z parabolą jest wierzchołkiem tej stożkowej.

50. Koło. Inwolucja bezwzględna. Punkty kołowe i proste izotropowe. W ust. 32 poznaliśmy sposób syntetycznego tworzenia koła. Obecnie wykazemy prawdziwość następującego twierdzenia:

Każda cięciwa koła i średnica z nią sprzężona są wzajemnie prostopadłe.

Dla dowolnego koła S^2 niechaj punkt właściwy O będzie jego środkiem, a odcinek $\overline{AB}$, łączący dwa dowolne punkty tego koła, niechaj będzie jego cięciwą. Przez środek C cięciwy $\overline{AB}$ i przez środek O przechodzi średnica $p = CO$ koła, która jest (ust. 48) sprzężoną z ową cięciwą $\overline{AB}$. Ponieważ zachodzi równość odcinków („promieni“ koła): $\overline{AO} = \overline{BO}$, oraz $\overline{AC} = \overline{CB}$ i $\overline{CO} = \overline{CO}$, przeto trójkąty: ACO i BCO są przystające. Z przystawania wynika równość kątów przyległych $\sphericalangle ACO = \sphericalangle BCO$, a tem samem prostopadłość cięciwy $\overline{AB}$ i średnicy $p = CO$, c. b. d. w.

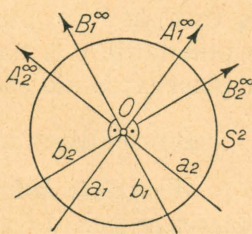
Ponieważ średnica r tego koła, wykreślona przez środek O równolegle do cięciwy $\overline{AB}$, jest sprzężona ze średnicą p , przeto:

Każde dwie średnice sprzężone koła są wzajemnie prostopadłe.

Prawdziwe jest również (ust. 47) następujące twierdzenie:

Pęk inwolucyjny średnic sprzężonych dowolnego koła jest pękiem cyklicznym.

Z rozważań ust. 49 wynikają bezpośrednio następujące własności koła: *Każda średnica koła jest jego osią* (osią symetrii prostokątnej), *każdy punkt*, przynależny do koła, *jest jego wierzchołkiem*, a *dowolna styczna do koła jest prostopadłą do tej średnicy*, która przechodzi przez punkt styczności owej stycznej. Pęk cykliczny średnic sprzężonych koła S^2 , leżącego (ryc. 80) na dowolnej płaszczyźnie ω , przetnijmy prostą niewłaściwą o^∞ tej płaszczyzny. Otrzymamy wówczas szereg inwolucyjny



Ryc. 80.

$$o^\infty (A_1^\infty A_2^\infty, B_1^\infty B_2^\infty, \dots) \overline{\wedge} O (a_1 a_2, b_1 b_2, \dots),$$

którego punkty homologiczne A_1^∞ i A_2^∞ , B_1^∞ i B_2^∞ , ... są (ust. 42 i 49) punktami sprzężonymi względem koła S^2 .

Z łatwością zauważymy, że każde dwie proste prostopadłe $l_1 \perp l_2$, leżące na płaszczyźnie ω (lub na płaszczyznach do niej równoległych!), przecinają podstawę o^∞ w dwóch punktach homologicznych L_1^∞ i L_2^∞ wypisanego powyżej szeregu inwolucyjnego. Uważajmy bowiem poszczególne punkty właściwe O , O' , ... płaszczyzny ω (wzgl. płaszczyzn do niej równoległych) za środki kół S^2 , S'^2 , ... Skoro przez owe punkty O , O' , ... wykreślimy proste względem siebie równoległe: $a_1 \parallel a'_1 \parallel \dots$, $b_1 \parallel b'_1 \parallel \dots$, ... które są odpow. średnicami poszczególnych kół S^2 , S'^2 , ..., to wówczas pęki inwolucyjne średnic sprzężonych tych kół, a mianowicie pęki:

$$O (a_1 a_2, b_1 b_2, \dots), O' (a'_1 a'_2, b'_1 b'_2, \dots), \dots$$

są pękami cyklicznymi i przecinają prostą niewłaściwą o^∞ płaszczyzny ω w jednym szeregu inwolucyjnym

$$o^\infty (A_1^\infty A_2^\infty, B_1^\infty B_2^\infty, \dots).$$

Innymi słowy: Wszystkie pęki cykliczne o wierzchołkach O , O' , ..., które leżą na płaszczyźnie ω (i na płaszczyznach do niej równoległych!) są perspektywiczne do szeregu inwolucyjnego (o^∞), którego podstawą jest prosta niewłaściwa płaszczyzny ω (i płaszczyzn do niej równoległych). Ten wspólny szereg inwolucyjny (o^∞) „punktów sprzężonych“ względem poszczególnych kół S^2 , S'^2 , ..., — które leżą na płaszczyznach równoległych do ω — nazwiemy *inwolucją bezwzględną* płaszczyzny ω (i płaszczyzn do niej równoległych).

Koło S^2 jest (ust. 32) szczególnym przypadkiem elipsy i przecina się z prostą niewłaściwą o^∞ w dwóch *urojonych sprzężonych* punktach niewłaściwych E_i^∞ i F_i^∞ . Owe punkty, które są (ust. 42 i 49) punktami podwójnymi involucji bezwzględnej o podstawie o^∞ , nazywamy *punktami kołowymi* płaszczyzny ω (i płaszczyzn do niej równoległych).

Dowiedliśmy zatem prawdziwości następującego twierdzenia:

Wszystkie koła, leżące na dowolnej płaszczyźnie ω (i na płaszczyznach do niej równoległych!), przechodzą przez te same dwa (urojone sprzężone) punkty kołowe E_i^∞ i F_i^∞ uważanej płaszczyzny ω .

Uwaga: Wnosimy stąd, że koło — podobnie jak każda stożkowa niezniesztalona (ust. 34) — określone jest pięcioma punktami, a mianowicie: dwoma (urojonemi sprzężonemi) *punktami kołowymi* i trzema rzeczywistymi punktami właściwymi, nie leżącymi na jednej prostej.

Pęk cykliczny średnic sprzężonych koła S^2 (ryc. 80) jest (ust. 47) pękiem eliptycznym i posiada dwie proste podwójne urojone sprzężone. Ponieważ wierzchołek O tego pęku jest biegunem prostej niewłaściwej o^∞ , przeto z rozważań ust. 42-go i 49-go wynika, że: styczne, wykreślone ze środka O do koła S^2 , są urojonemi sprzężonemi prostymi podwójnymi uważanego pęku cyklicznego, przyczem owe styczne stykają się z kołem S^2 w punktach kołowych E_i^∞ i F_i^∞ involucji bezwzględnej o podstawie o^∞ . Proste $e_i = OE_i^\infty$ i $f_i = OF_i^\infty$, t. zn. urojone sprzężone proste podwójne pęku cyklicznego o wierzchołku O , nazywamy *prostami izotropowymi*, przechodzącymi przez punkt właściwy O i leżącymi na płaszczyźnie ω . A zatem:

Każde koło posiada dwie urojone sprzężone asymptoty, którymi są proste izotropowe, przechodzące przez środek owego koła.

Weźmy pod uwagę wszystkie koła S^2 , S_1^2 , S_2^2 , ..., leżące na płaszczyźnie ω i posiadające wspólny środek O . Ponieważ pęk cykliczny $O(a_1a_2, b_1b_2, \dots)$ średnic sprzężonych koła S^2 jest zarazem też i pękiem cyklicznym dla „współśrodkowych“ kół S_1^2 , S_2^2 , ..., przeto proste izotropowe e_i i f_i stykają się z temi kołami w punktach kołowych E_i^∞ i F_i^∞ . A zatem:

Koła współśrodkowe, leżące na dowolnej płaszczyźnie, są styczne w punktach kołowych E_i^∞ i F_i^∞ do prostych izotropowych e_i i f_i , które przechodzą przez wspólny środek owych kół.

51. Konstrukcje stożkowych. Dwie proste a i b , przecinające się w punkcie C , niechaj będą podstawami dwóch „szeregów podobnych“ (ust. 14). Proste, łączące homologiczne punkty tych szeregów rzutowych, powłóczą (obwładają) stożkową S^2 . Ponieważ punktowi niewłaściwemu P^∞ podstawy a podporządkowany jest na podstawie b również punkt niewłaściwy R^∞ , przeto prosta niewłaściwa $P^\infty R^\infty$ jest styczną stożkowej S^2 . Wnosimy stąd (ust. 32), że:

Utworem dwóch szeregów podobnych — które nie są perspektywiczne (i leżą na wspólnej płaszczyźnie) — jest parabola.

Zadanie 1: Parabola określona jest dwiema stycznymi a , b i ich punktami styczności A , B . Skonstruować należy dalsze styczne tej paraboli.

Rozwiązanie: Jeżeli punkt przecięcia się (ryc. 81) stycznych a i b oznaczmy przez $C = ab$, a odcinki (o długościach skończonych) $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ podzielimy na tę samą ilość równych części, to uzyskane szeregi punktów

$$a(A, 1, 2, 3, \dots, C, \dots) \quad \text{i} \quad b(C, 1', 2', 3', \dots, B, \dots)$$

są podobne, gdyż (ust. 14) zachodzi następująca relacja:

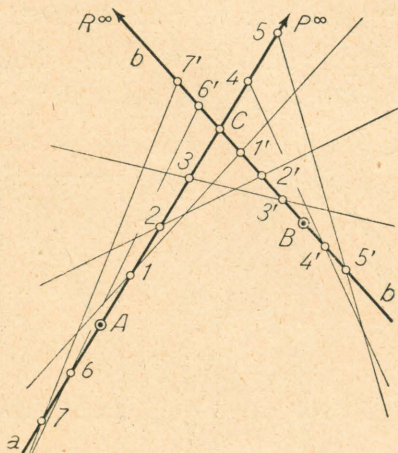
$$\frac{\overline{A1}}{\overline{C1'}} = \frac{\overline{12}}{\overline{1'2'}} = \frac{\overline{23}}{\overline{2'3'}} = \dots$$

Proste $AC = a, 11', 22', 33', \dots, CB = b, \dots, P^\infty R^\infty = s^\infty$ są szukanymi stycznymi paraboli.

Zadanie 2: Parabola określona jest dwoma punktami A i P , styczną a w punkcie A i średnicą p , przechodzącą przez ów punkt A . Wykreślić należy dalsze punkty tej paraboli.

Rozwiązanie: Skoro przez dany punkt P (ryc. 82) wykreślimy średnicę $r \parallel p$ paraboli, a następnie podzielimy odcinki $\overline{AP}$ i $\overline{PR}$ na tę samą ilość równych części, to uzyskamy dwa szeregi podobne

$$a(A, 1, 2, 3, R, \dots, D^\infty, \dots) \quad \overline{\wedge} \quad r(R, 1', 2', 3', P, \dots, B^\infty, \dots).$$

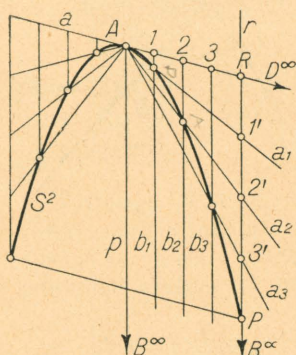


Ryc. 81.

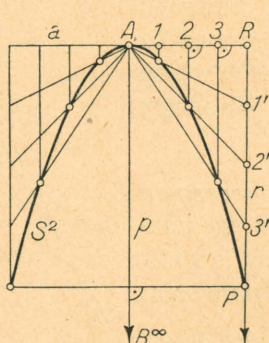
Szereg (a) rzućmy ze środka B^∞ paraboli, a szereg punktów (r) z punktu A , to utworem otrzymanych w ten sposób pęków jednokreślnych

$$B^\infty(p, b_1, b_2, b_3, r, \dots, B^\infty D^\infty, \dots) \overline{\wedge} A(a, a_1, a_2, a_3, AP, \dots, p, \dots)$$

jest parabola. W istocie bowiem elementowi $p = AB^\infty$, uważanemu za prostą pęku (B^∞), podporządkowana jest (ust. 27)



Ryc. 82.



Ryc. 83.

styczna a w punkcie A do tej stożkowej; elementowi zaś $p = AB^\infty$, uważanemu za prostą pęku (A), podporządkowana jest styczna niewłaściwa $B^\infty D^\infty$ w środku B^∞ do tej paraboli.

Ćwiczenie 1: Na ryc. 83 dana jest oś p , wierzchołek A , styczna a w wierzchołku i dowolny

punkt P paraboli. Skonstruować należy dalsze punkty tej paraboli.

Zadanie 3: Dane są cztery punkty A, B i C, D elipsy, leżące na jej średnicach sprzężonych p i r . Skonstruować należy dalsze punkty tej elipsy.

Rozwiązanie: Wiadomo nam, że styczne a, b, c i d elipsy, przechodzące przez dane punkty, utworzą (ust. 49) równoległobok, opisany na tej stożkowej, którego boki a i b (ryc. 84) są równoległe do średnicy r , a dwa pozostałe boki c i d są równoległe do średnicy p . Odcinek $\overline{OC}$ podzielmy np. na cztery równe części, oraz odcinek $\overline{EC}$ też na cztery równe części, to otrzymamy wówczas dwa szeregi podobne i perspektywiczne

$$r(O, 1, 2, 3, C, \dots, G^\infty, \dots) \overline{\wedge} c(E, 1', 2', 3', C, \dots, F^\infty, \dots),$$

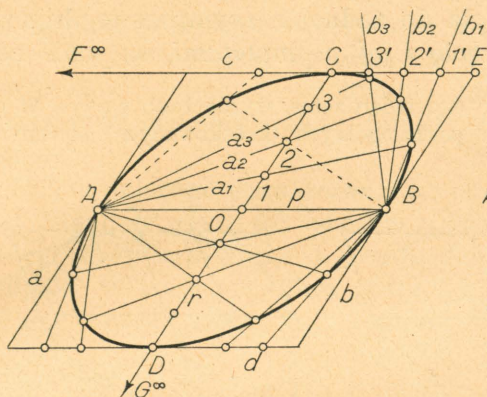
gdyż punkt $C = rc$ jest elementem zjednoczonym. Pęki prostych

$$A(p, a_1, a_2, a_3, AC, \dots, a = AG^\infty, \dots) \overline{\wedge} B(b, b_1, b_2, b_3, BC, \dots, p = BF^\infty, \dots)$$

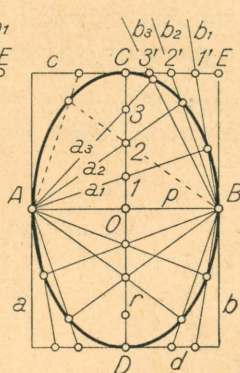
są rzutowe, gdyż spełnione są warunki perspektywności: (A) $\overline{\wedge}$ (r) i (B) $\overline{\wedge}$ (c). Utworem tych pęków jednokreślnych jest stożkowa S^2 , styczna w punktach A i B do prostych a i b . W istocie bowiem prostej $AB = p$, która łączy wierzchołki owych pęków, uważanej za element pęku (A) podporządkowana jest styczna b w wierzchołku pęku (B); a natomiast elementowi

$AB = p$ pęku (B) podporządkowana jest styczna a w wierzchołku pęku (A).

Ponieważ styczne a i b są równoległe, przeto prosta $AB = p$ jest średnicą a punkt właściwy O jest środkiem stożkowej S^2 . Ale prosta $r = OC$, jak to wynika z konstrukcji, jest równoległa do stycznych a i b , więc elementy p i r są średnicami sprzężonymi tej stożkowej. Średnica $r = OC$ jest sieczną, a styczne w punktach C i D do stożkowej S^2 są prostymi $c \parallel d \parallel p$. Wnosimy stąd (ust. 49), że stożkowa S^2 jest elipsą.



Ryc. 84.

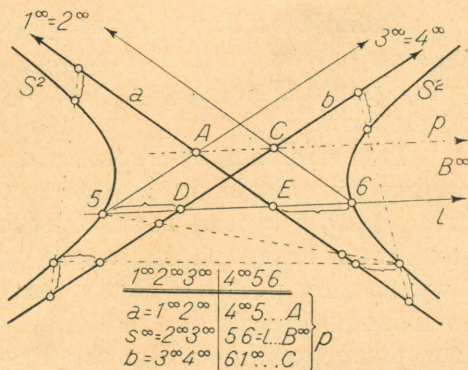


Ryc. 85.

Ćwiczenie 2: Na ryc. 85 dane są wierzchołki A, B i C, D elipsy. Należy skonstruować dalsze punkty tej elipsy.

Zadanie 4: Dane są asymptoty i dowolny punkt hiperboli. Skonstruować dalsze punkty tej hiperboli.

Rozwiązanie: W punkcie styczności asymptoty a z hiperbolą zjednoczyły się (ryc. 86) dwa jej punkty niewłaściwe 1^∞ i 2^∞ . Podobnie w punkcie niewłaściwym asymptoty b zjednoczyły się dwa punkty 3^∞ i 4^∞ tej hiperboli. Przez dany punkt 5 wykreślimy dowolną sieczną l i skonstruujemy punkt 6 przecięcia się prostej l z hiperbolą. Korzystając z sześciokąta:



Ryc. 86.

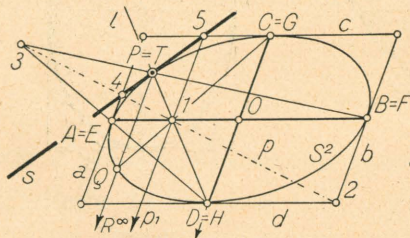
$$(1^\infty = 2^\infty 3^\infty = 4^\infty 5\ 6),$$

wpisanego w hiperbolę, wyznaczmy (ust. 28 i 35) ów punkt 6.

Z wypisanego obok schematu wynika, że prosta Pascala $p = AC$ jest równoległa do prostej $l = 5\ 6$, oraz $A\ 5 // b$ i $C\ 6 // a$. Jeżeli przez D i E oznaczymy punkty przecięcia się siecznej l z asymptotami b i a , to: na dowolnej prostej l otrzymamy równej długości odcinki $\overline{5\ D} = \overline{E\ 6}$. A zatem prawdziwe jest następujące twierdzenie:

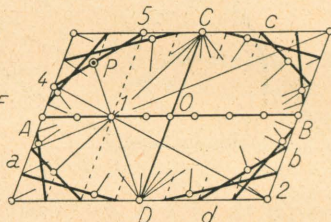
Hiperbola posiada tę własność, że odcinki dowolnej siecznej, (która nie jest równoległa do żadnej z asymptot tej hiperboli), zawarte pomiędzy hiperbolą i jej asymptotami, są sobie równe.

Uwaga: Korzystając z tego twierdzenia, wyznaczono na ryc. 86 dalsze punkty hiperboli, leżące na poszczególnych (kreskowanych) siecznych tej hiperboli.



PDH	ABF
PD	$AB \dots\dots 1$
$d = DH$	$BF = b \dots 2$
HA	$FP \dots\dots 3$

Ryc. 87.



DAE	BPT
DA	$BP \dots\dots 3$
$a = AE$	$PT = s \dots 4$
EB	$TD \dots\dots 1$

Ryc. 88.

Zadanie 5: Dane są cztery punkty A, B, C i D elipsy, leżące na jej średnicach sprzężonych. Należy skonstruować dowolny punkt P tej elipsy, oraz styczną s w owym punkcie do tej stożkowej.

Rozwiązanie: Proste c, d i a, b , wykreślone przez dane punkty równoległe do średnic sprzężonych AB i CD , są stycznymi elipsy i tworzą równoległobok (ryc. 87), opisany na tej stożkowej. Przez punkt np. D wykreślmy dowolną sieczną l i wyznaczmy punkt P elipsy, leżący na owej prostej l . Stosując twierdzenie Pascala do sześciokąta ($PD = HAB = F$), otrzymamy (z wypisanego schematu) prostą Pascala $p = 1\ 2$, punkt $3 = HA \cdot p$, oraz szukany punkt P , w którym przecinają się proste l i $3\ F$.

Celem wyznaczenia stycznej s , która przechodzi przez dwa zjednoczone punkty P i T elipsy, weźmy pod uwagę (ryc. 87) sześciokąt ($DA = EBP = T$). Z drugiego schematu wynika, że na prostej Pascala $p = 13$ przecinają się w punkcie 4 styczna $a = AE$ i wynikowa styczna $s = PT$.

Z powyższych związków wynika następująca

Konstrukcja 1: Przez punkt 1, dowolnie obrany na średnicy AB elipsy, kreślimy proste $l = D1$ i $p = 21$ (ryc. 87). Prosta DA przecina się z elementem p w punkcie 3, a prosta $3B$ wyznacza na prostej l punkt P elipsy. Jeżeli przez 4 oznaczmy punkt przecięcia się stycznej $a = AE$ z prostą p , to prosta $s = 4P$ jest styczną do elipsy w wyznaczonym poprzednio punkcie P . — Zmieniając położenie punktu 1 na średnicy AB , skonstruować możemy dalsze punkty P i styczne s omawianej elipsy.

Celem dalszego uproszczenia konstrukcji, narysujmy przez punkt P elipsy (ryc. 87) prostą równoległą do średnicy CD . Owa prosta przetnie się z prostą $C1$ w punkcie Q , leżącym na elipsie. W istocie bowiem punkt niewłaściwy R^∞ prostych $CD \parallel PQ$ jest biegunem średnicy AB elipsy, która przechodzi

(ust. 38) przez punkt przekątny $1 = PD \cdot QC$ czworokąta zupełnego $PQCD$, wpisanego w ową elipsę. — Skoro zastosujemy twierdzenie Pascala do sześciokąta

PTQ	CGD	
$s = PT$	$CG = c \dots 5$	} p_1
TQ	$GD \dots \dots R^\infty$	
QC	$DP \dots \dots 1$	

($P = TQC = GD$), to (p. trzeci schemat) prosta Pascala $p_1 = R^\infty 1$ jest równoległa do średnicy CD , a punkt $5 = sc$ leży na owej prostej p_1 . Prawdziwa jest zatem

Konstrukcja 2: Przez punkt 1, dowolnie obrany na średnicy AB elipsy, kreślimy proste $p = 12$ i $p_1 \parallel CD$ (ryc. 87). Punkty $4 = pa$ i $5 = p_1c$ wyznaczają styczną $s = 45$ elipsy, a proste s i $l = 1D$ przecinają się w punkcie $P = sl$ owej elipsy. — Zmieniając położenie punktu 1 na średnicy AB , skonstruować możemy (ryc. 88) dalsze styczne s i ich punkty styczności P z omawianą elipsą.

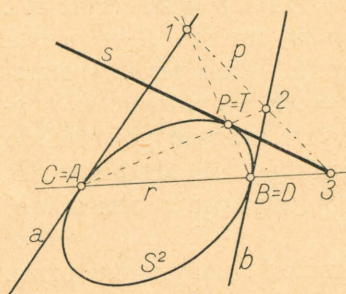
Ćwiczenie 3: Dla elipsy, która określona jest wierzchołkami A, B i C, D , należy skonstruować poszczególne jej styczne i ich punkty styczności.

Zadanie 6: Stożkowa S^2 określona jest trzema punktami A, B i P , oraz dwiema stycznymi a i b , w punktach A i B . Skonstruować należy styczną s w danym punkcie P do tej stożkowej.

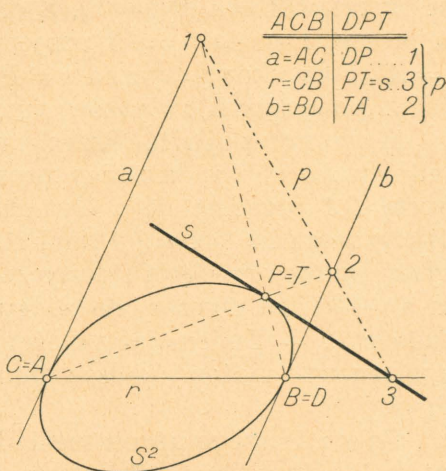
Rozwiązanie: Stosując twierdzenie Pascala do sześciokąta ($A = CB = DP = T$), wpisanego (ryc. 89) w stożkową S^2 ,

wyznamy (zapomocą wypisanego schematu) prostą Pascala $p = 12$. Przez punkty $3 = pr$ i P przechodzi oczywiście żądana styczna $s = 3P$ stożkowej S^2 . A zatem prawdziwa jest następująca

Konstrukcja: Przez dany punkt P (ryc. 89) kre-

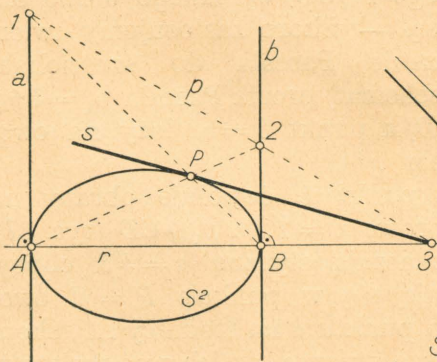


Ryc. 89.

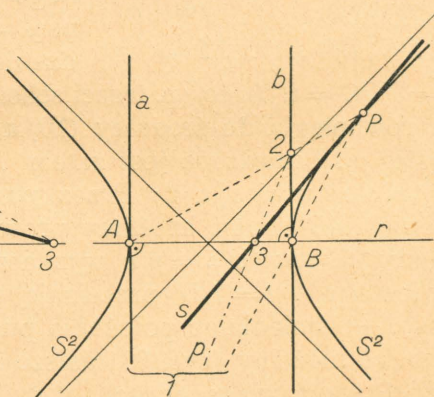


Ryc. 89 a.

śliwy proste PA i PB , które przecinają się z danymi stycznymi b i a w punktach 2 i 1. Proste $p = 12$ i $r = AB$ przecinają się w punkcie $3 = pr$, a wynikową styczną jest prosta $s = 3P$.



Ryc. 90.



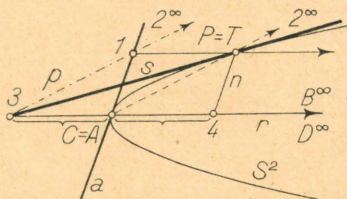
Ryc. 91.

Korzystając z powyższej konstrukcji rozwiązać możemy następujące

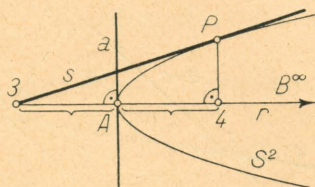
Ćwiczenie 4: Dla stożkowej S^2 dane są (ryc. 89 a) dwa jej punkty A i B , leżące na średnicy r , styczne a i b w owych punktach, oraz dowolny punkt P . Wykreślić należy styczną s w punkcie P do stożkowej S^2 .

Ćwiczenie 5: Dane są na ryc. 90 i 91 wierzchołki A i B , oraz dowolny punkt P elipsy, wzgl. hiperboli. Skonstruować styczną s w punkcie P do tej stożkowej.

Zadanie 7: Dla paraboli dane są środek B^∞ , dwa dowolne punkty A i P , oraz styczna a w punkcie A . Skonstruować należy styczną s w punkcie P do tej paraboli.



Ryc. 92.



Ryc. 93.

Rozwiązanie: Powyższe zadanie jest tylko szczególnym przypadkiem zadania 6, gdyż punkt B^∞ i styczna b^∞ w owym punkcie są elementami niewłaściwymi. Prosta Pascala $p = 12^\infty$ (ryc. 92) jest równoległa do prostej AP (p. schemat, wypisany obok ryc. 89 a), a prosta $PB^\infty // r$. Wnosimy stąd, że: odcinki $1P$ i $3A$ są sobie równe i równoległe.

Wykreślmy z punktu P (ryc. 92) prostą $n // a$ i przez 4 oznaczmy punkt $4 = nr$ przecięcia się owej prostej n ze średnicą $r = AB^\infty$ paraboli. Ponieważ $1P = A4$ i $1P = 3A$, przeto zachodzi też równość odcinków $3A = A4$. Mamy tedy następującą

Konstrukcję: Prosta n , wykreślona z danego punktu P (ryc. 92) równoległe do danej stycznej a , przecina się ze średnicą $r = AB^\infty$ paraboli w punkcie 4 . Skoro na średnicy r odłożymy odcinek $3A = A4$, to prosta $s = 3P$ jest żadaną styczną paraboli.

Ćwiczenie 6: Dla paraboli, która określona jest osią r , wierzchołkiem A i dowolnym punktem P (ryc. 93), skonstruować należy styczną s w danym punkcie P .

Zadanie 8: Dla paraboli dane są dwie styczne a, b i ich punkty styczności A, B . Skonstruować dalsze styczne i ich punkty styczności z tą parabolą.

Rozwiązanie: Weźmy pod uwagę sześciobok ($a = c o^\infty b = ds$), opisany na paraboli (ryc. 94), którego dwa boki a i c zjednoczyły się na stycznej a , dwa dalsze boki b i d zjednoczyły się na stycznej b , bok o^∞ jest styczną niewłaściwą, a bok s jest szukaną styczną tej paraboli. Z twierdzenia *Brianchona*

niemy prostą, nie przynależną do wierzchołków tych pęków a przechodzącą przez biegun (względem S^2) wspólną prostą tych pęków, — to uzyskamy wówczas szereg inwolucyjny punktów sprzężonych względem stożkowej S^2 .

cimy z punktu, nie przynależnego do podstaw tych szeregów a leżącego na biegunowej (względem S^2) wspólnego punktu tych szeregów, — to uzyskamy wówczas pęk inwolucyjny prostych sprzężonych względem stożkowej S^2 .

W istocie bowiem, niechaj dana będzie (ryc. 95) stożkowa S^2 i dowolny trójkąt (ABC) w nią wpisany. Przez biegun W prostej $w = AB$ względem stożkowej S^2 wykreślimy dowolną prostą p (nie przechodzącą przez wierzchołki A i B), która jest oczywiście sprzężoną (ust. 42) z elementem w , to w myśl twierdzenia Staudta (ust. 43) owa prosta p przetnie dwa pozostałe boki AC i BC uważanego trójkąta w dwóch punktach C_1 i C_2 , sprzężonych względem S^2 . Wierzchołki A i B trójkąta uważajmy za punkty stałe, a trzeci wierzchołek C za punkt zmienny, który porusza się po danej stożkowej S^2 . Proste $c_1 = AC$ i $c_2 = BC$, $d_1 = AD$ i $d_2 = BD, \dots$, łączące poszczególne punkty $C, D, \dots$ stożkowej S^2 z dwoma jej stałymi punktami A i B , utworzą wówczas (ust. 27) dwa jednokreślne pęki

$$A(c_1, d_1, \dots) \overline{\wedge} B(c_2, d_2, \dots).$$

Punkty: $C_1 = pc_1$ i $C_2 = pc_2$, $D_1 = pd_1$ i $D_2 = pd_2, \dots$, przecięcia się prostej p z homologicznymi elementami tych pęków prostych, utworzą (ust. 42) szereg inwolucyjny $p(C_1C_2, D_1D_2, \dots)$ punktów sprzężonych względem stożkowej S^2 , c. b. d. w.

Nie korzystając wcale z twierdzenia Staudta, możemy też dowieść prawdziwości powyższego twierdzenia w następujący sposób:

Niechaj dane będą dwa jednokreślne pęki prostych $(A) \overline{\wedge} (B)$, których utworem jest (ryc. 95) stożkowa S^2 . Styczne a i b , wykreślone w wierzchołkach A i B tych pęków do stożkowej S^2 , przecinają się w punkcie $W = ab$, który jest biegunem prostej $w = AB$. Skoro pęki prostych

$$A(w, a, c_1, d_1, \dots) \overline{\wedge} B(b, w, c_2, d_2, \dots)$$

przetniemy prostą p — różną od stycznych a i b — sprzężoną względem S^2 z elementem $w = AB$, to otrzymamy dwa rzutowe szeregi punktów:

$$p(T, W, C_1, D_1, \dots) \overline{\wedge} p(W, T, C_2, D_2, \dots).$$

Ale punkty T i W podporządkowane są sobie w sposób zamienny, więc (ust. 23) na prostej p występuje szereg inwolucyjny $p(TW, C_1C_2, D_1D_2, \dots)$. Punkty homologiczne T i W szeregu inwolucyjnego są „sprzężone“ względem S^2 , gdyż T leży na biegunowej w punktu W . Aby wykazać, że dowolna para punktów homologicznych $C_1 = pc_1$ i $C_2 = pc_2$ owego szeregu posiada tę samą własność, weźmy pod uwagę prostą $c'_2 = BC_1$ (ryc. 95), która przecina stożkową S^2 w punkcie C' . Proste homologiczne $c'_1 = AC'$ i $c'_2 = BC_1 = BC'$ rzutowych pęków (A) i (B) przetną podstawę w dwóch punktach homologicznych szeregu inwolucyjnego (p) . Ponieważ jednym z nich jest punkt $pc'_2 = C_1$, przeto drugim musi być punkt $pc'_1 = C_2$. Elementy C_1 i C_2 są zatem punktami przekątnymi (ryc. 95) czworokąta zupełnego $(ABCC')$, wpisanego w stożkową S^2 . Z ust. 38-go i 42-go wynika, że punkty C_1 i C_2 są sprzężone względem S^2 . Wykazaliśmy tedy, że wszystkie pary homologicznych punktów szeregu inwolucyjnego $p(TW, C_1C_2, D_1D_2, \dots)$ są punktami sprzężonymi względem stożkowej S^2 , c. b. d. w.

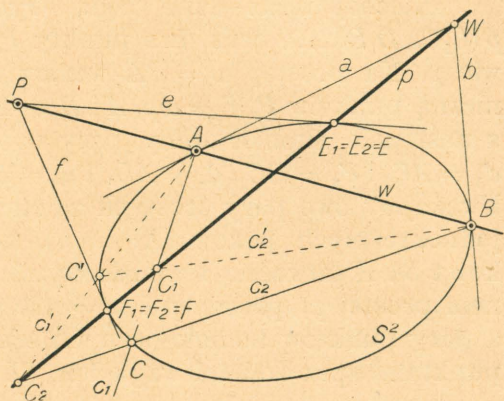
Prawdziwe są również i twierdzenia odwrotne:

Skoro poszczególne punkty szeregu inwolucyjnego — hiperbolicznego lub eliptycznego — punktów sprzężonych względem danej stożkowej (nieznieskształconej) S^2 rzucimy z takich dwóch punktów tej stożkowej, które wyznaczają sieczną, sprzężoną z podstawą owego szeregu, — to każde dwie proste uzyskanych pęków, przechodzące naprzemian przez homologiczne punkty owego szeregu inwolucyjnego, przecinają się w punkcie stożkowej S^2 .

Skoro poszczególne proste pęku inwolucyjnego — hiperbolicznego lub eliptycznego — prostych sprzężonych względem danej stożkowej (nieznieskształconej) S^2 przetniemy takimi dwiema stycznymi tej stożkowej, które przecinają się w punkcie zewnętrznym, sprzężonym z wierzchołkiem owego pęku, — to każde dwa punkty uzyskanych szeregów, leżące naprzemian na homologicznych prostych owego pęku inwolucyjnego, wyznaczają styczną stożkowej S^2 .

Na ryc. 95 niechaj dane będą stożkowa S^2 i dowolna prosta p , która nie jest styczną do S^2 . Na prostej p obierzmy (ust. 31) jakiegokolwiek punkt zewnętrzny W i wykreślmy przezeń dwie rzeczywiste styczne a, b . Prosta $w = AB$, łącząca punkty styczności A i B owych stycznych, jest (ust. 38) biegunową punktu W

względem S^2 . Wnosimy stąd, że proste w i p oraz punkty W i $T = pw$ są (ust. 42) elementami „sprzężonemi“ stożkowej S^2 . Przez dowolny punkt C stożkowej S^2 , nie leżący na prostych p i w , wykreślimy proste $c_1 = CA$ i $c_2 = CB$, a następnie wyznaczmy punkty $C_1 = c_1p$ i $C_2 = c_2p$. Otrzymane w ten sposób punkty C_1 i C_2 są w myśl twierdzenia Staudta (ust. 43) elementami sprzężonemi stożkowej S^2 . — Skonstruowane dwie pary punktów sprzężonych W, T i C_1, C_2 wyznaczają (ust. 42) szereg inwolucyjny, hiperboliczny lub eliptyczny



Ryc. 1) 95.

$$p(WT, C_1C_2, \dots).$$

Wiadomo nam jednak (ust. 23), że ów szereg inwolucyjny jest szczególnym przypadkiem dwóch szeregów jednokreślnych:

$$p(W, T, C_1, \dots) \overline{\wedge} p(T, W, C_2, \dots).$$

Z punktu A stożkowej S^2 rzucmy szereg pierwszy, a z punktu B szereg drugi, to otrzymamy wówczas (ryc. 95) dwa rzutowe pęki prostych:

$$A(a, w, c_1, \dots) \overline{\wedge} B(w, b, c_2, \dots).$$

Utworem tych pęków jest stożkowa, która przechodzi przez punkty $A = aw$, $B = wb$ i $C = c_1c_2$, oraz posiada (ust. 27) dwie styczne a i b w wierzchołkach owych pęków. Ponieważ powyższe warunki określają (ust. 34) jedną i tylko jedną stożkową S^2 , którą na początku naszych rozważań przyjęliśmy na ryc. 95, przeto: skonstruowane powyżej rzutowe pęki prostych $(A) \overline{\wedge} (B)$ utworzą tę właśnie stożkową S^2 .

Z rozważań naszych wynika, że każde dwie homologiczne proste: $a = AW$ i $w = BT$, $w = AT$ i $b = BW$, $c_1 = AC_1$ i $c_2 = BC_2$, $c'_1 = AC_2$ i $c'_2 = BC_1, \dots$ pęków jednokreślnych $(A) \overline{\wedge} (B)$ — łączą „naprzemian“ punkty homologiczne: W i T , T i W , C_1 i C_2 , C_2 i $C_1, \dots$ szeregu inwolucyjnego $p(WT, C_1C_2, \dots)$

¹⁾ Punkt pw oznaczyć należy przez T .

punktów sprzężonych względem stożkowej S^2 . Owe proste przecinają się w punktach $A = aw$, $B = wb$, $C = c_1c_2$, $C' = c'_1c'_2, \dots$ stożkowej S^2 , c. b. d. w.

Niechaj teraz dane będą (ryc. 95) szereg inwolucyjny $p(C_1C_2, D_1D_2, \dots)$, oraz dwa punkty P i A , nie leżące na podstawie p . Na prostej $w = PA$ weźmy pod uwagę grupę harmoniczną punktów $P, T = wp, A$ i B o dwustosunku $(PTAB) = -1$, a następnie skonstruujemy pary prostych: $c_1 = AC_1$ i $c_2 = BC_2$, $c'_1 = AC_2$ i $c'_2 = BC_1$, $d_1 = AD_1$ i $d_2 = BD_2$, $d'_1 = AD_2$ i $d'_2 = BD_1, \dots$ Uważajmy owe pary prostych za elementy homologiczne dwóch jednokreślnych pęków (A) i (B) , których utworem jest stożkowa S^2 . Z łatwością stwierdzimy, że dany punkt P jest biegunem prostej p , proste p i $w = AB$ są sprzężone względem S^2 , a pary punktów homologicznych szeregu inwolucyjnego (p) są punktami sprzężonymi względem S^2 . A zatem:

Skoro na płaszczyźnie dane są szereg inwolucyjny (hiperboliczny lub eliptyczny) na prostej p , oraz dwa dowolne punkty P i A , nie leżące na tej prostej, to wówczas: istnieje jedna i tylko jedna stożkowa (niezniekształcona) S^2 , przechodząca przez punkt A , dla której punkt P jest biegunem podstawy p , a homologiczne elementy owego szeregu inwolucyjnego są punktami sprzężonymi względem tej stożkowej S^2 .

Skoro na płaszczyźnie dane są pęk inwolucyjny (hiperboliczny lub eliptyczny) o wierzchołku P , oraz dwie dowolne proste p i a , nie przechodzące przez ten punkt, to wówczas: istnieje jedna i tylko jedna stożkowa (niezniekształcona) S^2 , styczna do prostej a , dla której prosta p jest biegunową wierzchołka P , a homologiczne proste owego pęku inwolucyjnego są prostymi sprzężonymi względem tej stożkowej S^2 .

W przypadku inwolucji hiperbolicznej (ryc. 95) punkty podwójne E i F szeregu (p) są (ust. 42) punktami rzeczywistymi przecięcia się podstawy p ze stożkową S^2 , a proste podwójne e i f pęku inwolucyjnego (P) są stycznymi rzeczywistymi, wykreślonymi z wierzchołka P do stożkowej S^2 . Z rozważań naszych wynika tedy prawdziwość dwóch ostatnich twierdzeń ust. 34-go.

W przypadku inwolucji eliptycznych (p) i (P) , wymienione powyżej elementy podwójne są urojone sprzężone. A zatem dowiedliśmy prawdziwości następujących twierdzeń:

Stożkowa (nieznieskształcona) S^2 jest wyznaczona, skoro dane są dwa jej punkty urojone sprzężone, dwie jej styczne urojone sprzężone w owych punktach,

oraz dowolny jej punkt rzeczywisty, który nie leży na prostej, łączącej dane punkty urojone, ani też nie zjednoczył się z punktem przecięcia się danych stycznych urojonych.

oraz dowolna jej styczna rzeczywista, która nie przechodzi przez punkt przecięcia się danych stycznych urojonych, ani też nie zjednoczyła się z prostą łączącą dane urojone punkty styczności.

Uwaga: Niechaj dane będą (ust. 50) dwa punkty kołowe E_i i F_i , przynależne do prostej p^∞ , styczne w owych punktach, t. zn. proste izotropowe e_i i f_i , przecinające się w środku P , oraz dowolny punkt właściwy A , wzgl. dowolna styczna właściwa a koła S^2 . Z ostatnich twierdzeń wynika tedy, że:

Koło jest wyznaczone, skoro dane są jego środek i dowolny punkt właściwy (wzgl. dowolna styczna właściwa).

Z dotychczasowych rozważań naszych wynika dla stożkowej S^2 następująca

Konstrukcja 1: Dane punkty A i P przecinają podstawę eliptycznego szeregu inwolucyjnego (p) w punkcie T . Punkt B , harmonicznie sprzężony z A w grupie o stosunku $(PTAB) = -1$, leży na stożkowej S^2 . Proste: $c_1 = AC$ i $c_2 = BC_2$, $c'_1 = AC_2$ i $c'_2 = BC_1, \dots$, łączące naprzemian punkty A i B z homologicznymi punktami szeregu inwolucyjnego eliptycznego $p(C_1C_2, \dots)$, przecinają się w punktach $C = c_1c_2$, $C' = c'_1c'_2, \dots$ stożkowej S^2 .

Dowodziemy teraz prawdziwości twierdzeń ¹⁾:

Skoro na płaszczyźnie dane są trzy punkty rzeczywiste, nie leżące na jednej prostej, oraz szereg inwolucyjny eliptyczny, którego podstawa nie przechodzi przez żaden z danych punktów, to wówczas: istnieje jedna i tylko jedna stożkowa (nieznieskształcona) S^2 , przechodząca przez owe trzy dane punkty, dla której

Skoro na płaszczyźnie dane są trzy dowolne proste, nie przecinające się w jednym punkcie, oraz pęk inwolucyjny eliptyczny, którego wierzchołek nie leży na żadnej z danych prostych, to wówczas: istnieje jedna i tylko jedna stożkowa (nieznieskształcona) S^2 , dla której owe trzy dane proste są stycznymi, a proste homologicz-

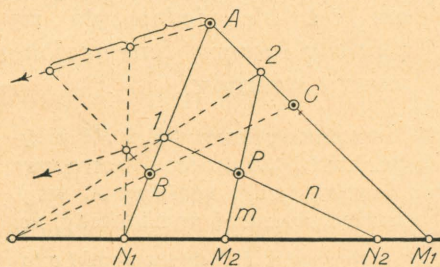
¹⁾ Zbyteczne wypowiadanie twierdzenia dla inwolucji hiperbolicznej, bo wówczas stożkowa S^2 wyznaczona jest przez 5 punktów rzeczywistych (ust. 34), z których dwa są punktami podwójnymi szeregu inwolucyjnego.

punkty homologiczne szeregu inwolucyjnego są punktami sprzężonemi.

ne pęku inwolucyjnego są prostemi sprzężonemi.

Na ryc. 96 dane są trzy rzeczywiste punkty A, B, C i dowolna prosta p , która jest podstawą szeregu inwolucyjnego

$$p(N_1N_2, M_1M_2, \dots)$$



Ryc. 96.

gdzie N_1 i M_1 są punktami przecięcia się prostej p z prostymi AB i AC . Na prostej AB skonstruujemy następnie punkt 1, harmonicznie sprzężony z elementem N_1 względem punktów A i B . Podobnie na prostej AC wyznaczmy punkt 2, sprzężony harmonicznie z M_1 względem punktów A i C .

Przypuśćmy, że istnieje stożkowa S^2 , spełniająca warunki podane w powyższym twierdzeniu. Wówczas pary punktów: N_1 i N_2 , N_1 i 1, oraz M_1 i M_2 , M_1 i 2 są (ust. 42) „punktami sprzężonemi” względem owej stożkowej S^2 . Z rozważań ust. 42-go i 39-go wynika jednak, że: prosta $n = N_21$ jest biegunową punktu N_1 , prosta $m = M_22$ jest biegunową punktu M_1 , a punkt $P = nm$ jest biegunem podstawy p uważanego szeregu inwolucyjnego.

Wiadomo nam, że przez punkt A przechodzi jedna i tylko jedna stożkowa S^2 , dla której punkt P jest biegunem prostej p , a homologiczne punkty szeregu inwolucyjnego $p(N_1N_2, M_1M_2, \dots)$ są punktami sprzężonemi względem S^2 . Ponieważ biegunowa $n = N_21$ punktu N_1 przechodzi przez punkt 1, który spełnia warunek $(AB1N_1) = -1$, przeto: dany punkt B leży na owej stożkowej S^2 . Podobnie biegunowa $m = M_22$ punktu M_1 przechodzi przez punkt 2, sprzężony harmonicznie z punktem M_1 względem punktów A i C , więc również i dany punkt C przynależy do owej stożkowej S^2 . Ta stożkowa spełnia zatem wszystkie warunki, c. b. d. w.

Powyższe twierdzenie wysłowić też możemy w następujący sposób:

Stożkowa (nieznieskształcona) S^2 jest wyznaczona, skoro dane są trzy jej punkty rzeczywiste, nie leżące na jed-

stożkowej (nieznieskształcona) S^2 jest wyznaczona, skoro dane są trzy jej styczne rzeczywiste, nie przechodzące

nej prostej, oraz dwa jej punkty urojone sprzężone, przynależne do prostej, która nie przechodzi przez żaden z trzech danych punktów.

przez jeden punkt, oraz dwie jej styczne urojone sprzężone, przecinające się w punkcie, który nie leży na żadnej z trzech danych stycznych.

Uwaga: Skoro na prostej niewłaściwej p^∞ dana będzie inwolucja bezwzględna i jej punkty kołowe (ust. 50), to z powyższego twierdzenia, wypisanego po lewej stronie, wynika bezpośrednio:

Koło jest określone, skoro dane są jego trzy punkty rzeczywiste (nie leżące na jednej prostej).

Ponieważ w inwolucji (p^∞) punkty M_1^∞ i N_1^∞ są niewłaściwe, przeto (p. ryc. 96) punkty 1 i 2 połowią odcinki $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a proste $n = 1N_2^\infty$ i $m = 2M_2^\infty$, jako biegunowe punktów N_1^∞ i M_1^∞ , są (ust. 50) prostopadłe odpow. do cięciw $\overline{AB}$, wzgl. $\overline{AC}$. Punkt $P = mn$, jako biegun prostej p^∞ , jest oczywiście środkiem omawianego koła.

Z dotychczasowych rozważań wynika dla stożkowej S^2 następująca

Konstrukcja 2: Podstawa p szeregu inwolucyjnego eliptycznego przecina się z prostymi AB i AC w punktach N_1 i M_1 (ryc. 96). Wykreślmy na p takie punkty N_2 i M_2 , któreby tworzyły (ust. 24) dwie pary homologicznych elementów N_1, N_2 i M_1, M_2 owego szeregu inwolucyjnego. Następnie skonstruujemy punkty 1 i 2, któreby spełniały warunki: $(ABN_11) = (ACM_12) = -1$, to punkt przecięcia się prostych $n = N_21$ i $m = M_22$ jest biegunem podstawy p względem szukanej stożkowej S^2 . Stosując wkońcu poprzednio poznaną „konstrukcję 1“ — wyznaczmy poszczególne punkty stożkowej S^2 .

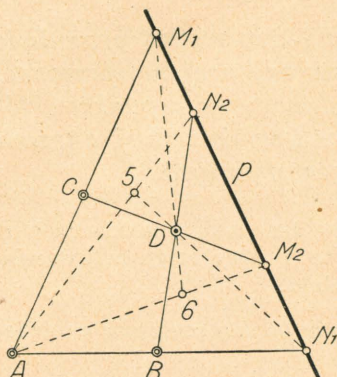
Z łatwością wykazemy¹⁾, że prawdziwa też jest

Konstrukcja 3: Proste AB i AC przecinają (ryc. 97) podstawę p w punktach N_1 i M_1 . Przez punkty N_2 i M_2 szeregu inwolucyjnego eliptycznego $p(N_1N_2, M_1M_2, \dots)$ wykreślmy proste BN_2 i CM_2 . Punkt D przecięcia się tych prostych przynależy do badanej stożkowej S^2 . Również punkty 5 i 6, t. zn. punkty przecięcia się prostych AN_2 i DN_1 , oraz AM_2 i DM_1 , leżą na owej stożkowej.

W istocie bowiem szereg inwolucyjny eliptyczny $p(N_1N_2, M_1M_2, \dots)$ uważać można (ust. 23) za dwa szeregi rzutowe

$$p(N_1, N_2, M_1, M_2, \dots) \bar{\wedge} p(N_2, N_1, M_2, M_1, \dots)$$

¹⁾ Th. Reye, l. c. I. str. 180.



Ryc. 97.

o wspólnej podstawie p . Pierwszy szereg rzućmy z punktu A , a drugi z wyznaczonego na ryc. 97 punktu D . Otrzymamy wówczas dwa rzutowe pęki prostych: $(A) \wedge (D)$, których utworem jest stożkowa S^2 , przechodząca przez punkty: $A, D, C, B, 5$ i 6 , oraz przez (ust. 31) punkty podwójne urojone sprzężone szeregów rzutowych o wspólnej podstawie p .

Prawdziwe są wreszcie następujące twierdzenia:

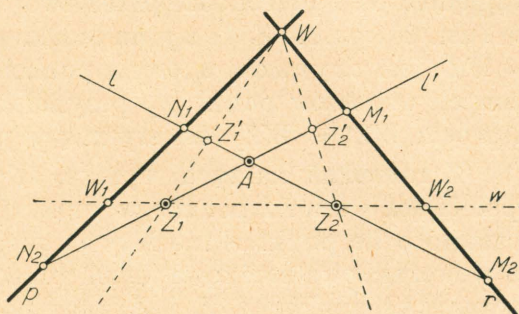
Skoro na płaszczyźnie dane są dwa szeregi inwolucyjne eliptyczne i dowolny punkt rzeczywisty, który nie leży na podstawach tych szeregów, ani nie jest wierzchołkiem pęku perspektywicznego do owych szeregów, to wówczas: istnieje jedna i tylko jedna stożkowa (nieznieskształcona) S^2 , przechodząca przez ów dany punkt, dla której punkty homologiczne każdego z dwóch danych szeregów inwolucyjnych są punktami sprzężonemi.

Skoro na płaszczyźnie dane są dwa pęki inwolucyjne eliptyczne i dowolna prosta rzeczywista, która nie przechodzi przez wierzchołki tych pęków, ani nie jest podstawą szeregu perspektywicznego do owych pęków, to wówczas: istnieje jedna i tylko jedna stożkowa (nieznieskształcona) S^2 , dla której owa dana prosta jest styczną, a proste homologiczne każdego z dwóch danych pęków inwolucyjnych są prostami sprzężonemi.

Aby dowieść prawdziwości twierdzenia, wypisanego po lewej stronie, weźmy pod uwagę (ryc. 98) dowolny punkt rzeczywisty A i dwa szeregi inwolucyjne eliptyczne, których podstawy p i r przecinają się w punkcie $W = pr$. Dla szeregu inwolucyjnego (p) niechaj punkty W i W_1 będą elementami homologicznymi; podobnie W i W_2 niechaj będą punktami homologicznymi szeregu inwolucyjnego (r).

Przypuśćmy, że istnieje stożkowa S^2 , spełniająca warunki podane w wypisanem powyżej twierdzeniu. Wówczas pary punktów W i W_1 , oraz W i W_2 są (ust. 42) punktami sprzężonemi względem S^2 , a prosta $w = W_1W_2$ jest biegunową punktu W względem S^2 .

Załóżmy najpierw, że prosta $w = W_1W_2$ nie przechodzi przez dany punkt A . Dane dwa szeregi inwolucyjne eliptyczne (p) i (r) rzućmy z punktu A , to otrzymane w ten sposób dwa pęki inwolucyjne eliptyczne o wspólnym wierzchołku A posiadają (ust. 45) jedną „wspólną“ i rzeczywistą parę prostych homologicznych l, l' . Owe proste l i l' przecinają (ryc. 98) prostą p w dwóch punktach homologicznych N_1 i N_2 szeregu (p), a prostą r w homologicznych punktach M_2 i M_1 szeregu inwolucyjnego (r), a wreszcie prostą $w = W_1W_2$ w punktach rzeczywistych Z_2 i Z_1 .



Ryc. 98.

Zbadajmy zachowanie się elementów rzeczywistych: l, l', Z_1 i Z_2 względem stożkowej S^2 . Gdyby l była styczną do stożkowej S^2 — która przechodzi przez A — w danym punkcie A , to biegunową punktu N_1 byłaby (ust. 38 i 42) prosta $l' = N_2A$, a biegunową punktu M_2 byłaby również ta sama prosta $l' = M_1A$. Ponieważ sprzeczne to jest z rozważaniami ust. 38-go, przeto prosta l (jak również i prosta l') nie może być styczną do stożkowej S^2 w punkcie A . Oznaczmy przez a styczną w punkcie A , do omawianej stożkowej S^2 . Proste l i l' przechodzą przez biegun A stycznej a , więc bieguny L i L' owych prostych względem S^2 leżeć muszą (ust. 39) na stycznej a i nie mogą się zjednoczyć z punktem styczności A . Wykazaliśmy tedy (ust. 42), że: proste l i l' nie są „prostami sprzężonymi“ względem stożkowej S^2 , a punkt $A = ll'$ jest punktem sprzężonym z samym sobą. Punkty sprzężone względem S^2 a leżące na tych prostych l i l' tworzą zatem (ust. 43) dwa szeregi perspektywiczne

$$l(A, N_1, M_2, \dots) \overline{\wedge} l'(A, N_2, M_1, \dots),$$

które są oczywiście przekrojami pęku prostych $W(WA, p, r, \dots)$. Jeżeli tedy wyznaczmy punkty Z'_1 i Z'_2 przecięcia się prostych WZ_1 i l , oraz WZ_2 i l' , to otrzymamy na ryc. 98 dwie pary punktów sprzężonych względem stożkowej S^2 , a mianowicie: Z_1 i Z'_1 , Z_2 i Z'_2 .

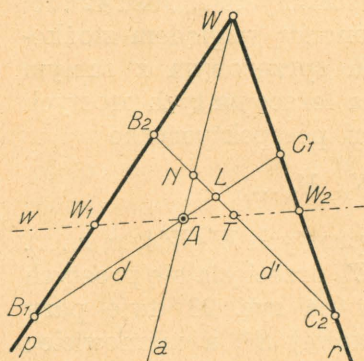
Biegunowa punktu Z_1 względem S^2 musi przejść (ust. 42) przez punkt Z_1 ; ponieważ Z_1 przynależy do prostej $w = W_1W_2$, przeto owa biegunowa przejść musi (ust. 39) też i przez biegun W prostej w . Prosta Z_1W jest zatem biegunową punktu Z_1 względem S^2 i przechodzi przez swój biegun Z_1 . Wnosimy stąd, że (ust. 38) punkt Z_1 leży na stożkowej S^2 , a prosta $WZ_1 = WZ_1$ jest styczną w owym punkcie do tej stożkowej. Z tych samych względów punkt Z_2 przynależy też do stożkowej S^2 , a prosta $WZ_2 = WZ_2$ jest styczną w punkcie Z_2 do S^2 .

Z rozważań naszych wynika, że o ile istnieje stożkowa, spełniająca warunki podane w wypisanem powyżej twierdzeniu, a nadto o ile punkt A nie leży na prostej $w = W_1W_2 = Z_1Z_2$ — to wówczas: owa stożkowa musi przechodzić przez trzy rzeczywiste punkty A , Z_1 i Z_2 , oraz posiadać dwie styczne WZ_1 i WZ_2 w punktach Z_1 i Z_2 . Z ust. 34 wiadomo nam, że powyższe warunki określają jedną i tylko jedną stożkową nieznieształconą S^2 .

Dla tej stożkowej S^2 — jak to z łatwością stwierdzimy — styczne Z_1W i Z_2W przecinają się w punkcie W , który jest (ust. 38) biegunem prostej $w = Z_1Z_2$. Element W jest tedy sprzężony z punktami W_1 i W_2 biegunowej w . Proste r i p , przechodzące przez W , są sprzężone z bokiem $w = Z_1Z_2$ trójkąta (AZ_1Z_2) wpisanego w stożkową S^2 i przecinają (ust. 43) dwa pozostałe boki AZ_1 i AZ_2 tego trójkąta w punktach M_1 i M_2 , oraz N_2 i N_1 sprzężonych względem S^2 . Rozpatrywana stożkowa S^2 czyni więc zadość podanym w twierdzeniu warunkom.

Pozostaje nam jeszcze do rozpatrzenia przypadek, w którym dany punkt rzeczywisty A leży na prostej $w = W_1W_2$. Skoro przypuścimy, że istnieje stożkowa S^2 , spełniająca warunki wymienione w twierdzeniu — to

wówczas W i W_1 , oraz W i W_2 są (ryc. 99) punktami sprzężonymi względem owej stożkowej S^2 , a prosta $w = W_1W_2$ jest biegunową punktu W względem S^2 . Dla punktu A stożkowej S^2 jego biegunowa a jest oczywiście (ust. 38) styczną w punkcie A do S^2 . Ponieważ jednak A leży na prostej w , przeto biegunowa a przejść musi (ust. 39) przez biegun W prostej w . A zatem prosta $a = WA$ jest styczną w punkcie A do stożkowej S^2 .



Ryc. 99.

Przez A wykreślmy dowolną prostą d (różną od w i a), która (ryc. 99) przetnie podstawy danych szeregów inwolucyjnych w punktach $B_1 = dp$ i $C_1 = dr$. Dla szeregu inwolucyjnego (p) niechaj B_1 i B_2 , a dla szeregu inwolucyjnego (r) niechaj C_1 i C_2 będą elementami homologicznymi. Gdyby prosta $d' = B_2C_2$ przechodziła przez punkt A , to z warunków:

$$p(WW_1, B_1B_2, \dots) \overline{\wedge} A(aw, dd', \dots) \overline{\wedge} r(WW_2, C_1C_2, \dots)$$

wynikałoby — wbrew naszemu założeniu — że dany punkt A jest wierzchołkiem pęku perspektywicznego do szeregów inwolucyjnych (p) i (r). Prosta $d' = B_2C_2$ nie przechodzi zatem przez punkt A i przecina się z prostymi $d = B_1C_1$ i $a = AW$ w punktach $L = dd'$ i $N = ad'$, nie przynależnych do prostej w .

Zbadajmy teraz, czy proste d i d' są elementami sprzężeniami względem S^2 ? Gdyby tak było, to wówczas biegun prostej d względem stożkowej S^2 leżałby (ust. 42) na prostej d' . A ponieważ d przechodzi przez A , przeto biegun prostej d musi leżeć (ust. 38 i 39) na stycznej a . Wówczas punkt $N = ad'$ byłby biegunem prostej $d = B_1C_1$, a punkty N i B_1 , oraz N i C_1 byłyby elementami sprzężeniami względem S^2 . Z ust. 42-go wynikałoby, że biegunową punktu B_1 byłaby prosta $B_2N = d'$, a biegunową punktu C_1 byłaby również ta sama prosta $d' = C_2N$. Z tej sprzeczności (z rozważaniami ust. 38-go) wynika, że: proste d i d' nie są prostymi sprzężeniami względem S^2 .

Punkty B_1 i B_2 , C_1 i C_2 , oraz A i N (jako punkt styczności A stycznej a i dowolny punkt N tej stycznej) — są punktami sprzężeniami względem stożkowej S^2 , leżącymi odpow. na prostych d i d' . Owe punkty tworzą zatem (ust. 43) dwa szeregi jednokreślne i perspektywiczne do pęku prostych $W(p, r, a, \dots)$. Wnosimy stąd, że punkt $L = dd'$ jest elementem sprzężonym z samym sobą względem S^2 , czyli innymi słowy: punkt L leży (ust. 42) na stożkowej S^2 .

O ile zatem istnieje stożkowa, spełniająca warunki podane w powyżej wypisanem twierdzeniu, to ona musi przechodzić przez punkt L , nie leżący na prostej $w = W_1W_2$. Z pierwszej części naszego dowodu wynika jednak, że istnieje jedna i tylko jedna taka stożkowa S^2 . A tem samem dowiedliśmy prawdziwości naszego twierdzenia.

Powyższe twierdzenia wypisać też możemy w następującej formie:

Stożkowa (niezniekształcona) S^2 jest wyznaczona, skoro

Stożkowa (niezniekształcona) S^2 jest wyznaczona, skoro

dane są dwie pary jej punktów urojonych sprzężonych, leżące na dwóch różnych prostych rzeczywistych, oraz dowolny jej punkt rzeczywisty, przyczem żadne trzy z pośród danych punktów nie mogą leżeć na jednej prostej.

dane są dwie pary jej stycznych urojonych sprzężonych, przechodzące przez dwa różne punkty rzeczywiste, oraz dowolna jej styczna rzeczywista, przyczem żadne trzy z pośród danych stycznych nie mogą przecinać się w jednym punkcie.

Z rozważań naszych wynika następująca

Konstrukcja 4: Skonstruujmy punkty $W = pr$ i W_1 na prostej p , oraz W i W_2 na prostej r , które są elementami homologicznymi danych szeregów inwolucyjnych (p) i (r) . Jeżeli dany punkt rzeczywisty A nie leży na prostej $w = W_1W_2$, to z owego punktu rzucimy owe szeregi (p) i (r) . Dla otrzymanych w ten sposób dwóch pęków inwolucyjnych o wspólnym wierzchołku A wyznaczmy (ust. 45) wspólną i rzeczywistą parę homologicznych prostych l i l' . Szukana stożkowa S^2 wyznaczona będzie (ryc. 98) punktami A , $Z_1 = wl'$ i $Z_2 = wl$, oraz dwiema stycznymi WZ_1 i WZ_2 .

Jeżeli jednak dany punkt A leży na prostej $w = W_1W_2$, to wykreślimy (ryc. 99) prostą $d = AB_1$, gdzie B_1 i B_2 stanowią daną parę elementów homologicznych szeregu inwolucyjnego (p) . Następnie, skoro dla szeregu (r) wyznaczmy parę homologicznych punktów $C_1 = dr$ i C_2 , to punkt L przecięcia się prostych $d = B_1C_1$ i $d' = B_2C_2$ leży na wynikowej stożkowej S^2 . Ta stożkowa przechodzi przez punkty L i A , oraz posiada styczną $a = WA$ w owym punkcie A . — Z łatwością dowiedzimy, że punkt $T = wd'$ leży na S^2 , a prosta $t = WT$ jest styczną do stożkowej S^2 .

W istocie bowiem, z punktu L rzucimy szeregi inwolucyjne eliptyczne (p) i (r) , to wyznaczone poprzednio proste d i d' stanowią wspólną parę homologicznych prostych dwóch pęków inwolucyjnych o wspólnym wierzchołku L . Proste d i d' na ryc. 99 posiadają zatem tę samą własność, co proste l i l' na ryc. 98. Punkty $A = dw$ i $T = d'w$ leżą więc na stożkowej S^2 , a proste $a = WA$ i $t = WT$ są stycznymi w owych punktach do S^2 .

53. Twierdzenia¹⁾ Desargues'a. Na ryc. 100 dana jest stożkowa (nieznieształcona) S^2 , czworokąt zupełny (1234) w nią

¹⁾ Por. F. Enriques, l. c. str. 228.

wpisany, oraz sieczna p , przecinająca S^2 w punktach rzeczywistych D_1 i D_2 . Prosta p niechaj przecina trzy pary boków przeciwnych 12 i 43, 13 i 24, 14 i 23 tego czworokąta w punktach: A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 .

Skoro punkty D_1 i D_2 , 3 i 4 stożkowej S^2 rzucimy z punktów 1 i 2, to uzyskamy (ust. 27) cztery pary homologicznych elementów dwóch rzutowych pęków prostych

$$1(1D_1, 1D_2, 13, 14, \dots) \overline{\wedge} 2(2D_1, 2D_2, 23, 24, \dots).$$

Przecinając owe pęki prostą p , otrzymamy dwa jednokreślne szeregi punktów

$$p(D_1, D_2, B_1, C_1, \dots) \overline{\wedge} p(D_1, D_2, C_2, B_2, \dots)$$

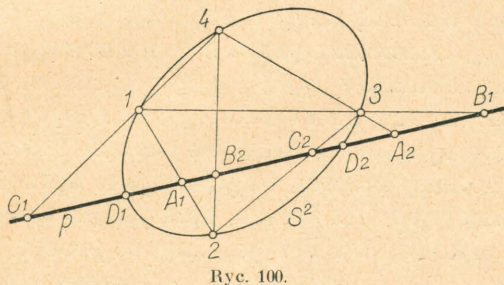
dla których zachodzi oczywiście (ust. 11) równość dwustosunków: $(D_1D_2B_1C_1) = (D_1D_2C_2B_2)$. Ponieważ jednak (ust. 11) dwustosunek $(D_1D_2C_2B_2) = (D_2D_1B_2C_2)$, więc mamy też równość $(D_1D_2B_1C_1) = (D_2D_1B_2C_2)$, z której wynika bezpośrednio (ust. 20) rzutowość następujących szeregów punktów

$$p(D_1, D_2, B_1, C_1, \dots) \overline{\wedge} p(D_2, D_1, B_2, C_2, \dots).$$

Punkty D_1 i D_2 tych szeregów podporządkowane są sobie w sposób zamienny, więc (ust. 23) dochodzimy do szeregu inwolucyjnego

$$p(D_1D_2, B_1B_2, C_1C_2, \dots).$$

Uważajmy teraz punkty 1 i 3 za wierzchołki pęków prostych, których homologiczne elementy przechodzą przez punkty $D_1, D_2, 2$ i 4 stożkowej S^2 . Uzyskane w ten sposób pęki prostych



$$1(1D_1, 1D_2, 12, 14, \dots) \overline{\wedge} 3(3D_1, 3D_2, 32, 34, \dots)$$

przetnijmy prostą p w rzutowych szeregach punktów

$$p(D_1, D_2, A_1, C_1, \dots) \overline{\wedge} p(D_1, D_2, C_2, A_2, \dots).$$

Korzystając z równości dwustosunków: $(D_1D_2A_1C_1) = (D_1D_2C_2A_2) = (D_2D_1A_2C_2)$, dochodzimy do jednokreślnych szeregów punktów

$$p(D_1, D_2, A_1, C_1, \dots) \overline{\wedge} p(D_2, D_1, A_2, C_2, \dots)$$

a tem samem i do szeregu inwolucyjnego

$$p(D_1D_2, A_1A_2, C_1C_2, \dots).$$

Wykazaliśmy w ten sposób prawdziwość *twierdzenia I-go*: punkty D_1 i D_2 , A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 , w których dowolna sieczna p przecina stożkową S^2 i trzy pary boków przeciwległych czworokąta wpisanego w tę stożkową, są *elementami homologicznymi szeregu inwolucyjnego o podstawie p* .

Uwaga: Powyższe twierdzenie jest prawdziwe wówczas, gdy sieczna p stożkowej S^2 nie przechodzi przez żaden z wierzchołków czworokąta (1234). Sieczna p przechodzić może natomiast — jak z łatwością stwierdzimy — przez jeden, wzgl. przez dwa punkty przekątne uważanego czworokąta (1234). Taki punkt przekątny jest wówczas punktem podwójnym omawianego szeregu inwolucyjnego.

Niechaj dany będzie czworokąt zupełny (1234), oraz prosta p , nie przechodząca (ryc. 100) przez żaden z jego wierzchołków i przecinająca jego boki przeciwległe 12 i 34, 13 i 24, 14 i 23 w punktach homologicznych szeregu inwolucyjnego

$$p(A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, \dots).$$

Wykażemy teraz prawdziwość następującego *twierdzenia II-go*: Skoro na prostej p obierzemy dowolne dwa homologiczne punkty D_1 i D_2 wypisanego szeregu inwolucyjnego, różne od każdej z trzech par A_1A_2 , B_1B_2 i C_1C_2 , to wówczas punkty: D_1 , D_2 , 1, 2, 3 i 4 leżą na jednej i tylko jednej stożkowej.

Oznaczmy przez S^2 stożkową, przechodzącą przez (ust. 34) pięć punktów D_1 , D_2 , 1, 2 i 3. Ponieważ przez punkt 4 wykreślić można do stożkowej S^2 co najwyżej dwie (ust. 31) styczne (rzeczywiste i różne od siebie, rzeczywiste i zjednoczone na wspólnej prostej, wzgl. urojone sprzężone) — przeto przynajmniej jedna z trzech prostych: 41, 42, 43 nie jest styczną do stożkowej S^2 . Przypuśćmy, że prosta 41 nie jest styczną i przecina się ze stożkową S^2 w dwóch różnych od siebie punktach 1 i 5. Prosta p — na mocy twierdzenia I-go — przecina stożkową S^2 i boki przeciwległe czworokąta (1235) w nią wpisanego w czterech parach punktów homologicznych:

$$D_1 \text{ i } D_2, A_1 = 12.p \text{ i } A_0 = 35.p, B_1 = 13.p \text{ i } B_0 = 25.p, \\ C_1 = 15.p = 14.p \text{ i } C_2 = 23.p$$

szeregu inwolucyjnego $p(D_1D_2, A_1A_0, B_1B_0, C_1C_2, \dots)$. Ale prosta p jest (w myśl warunków twierdzenia II-go) podstawą szeregu inwolucyjnego $p(D_1D_2, A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, \dots)$. Ponieważ jednak dwie wspólne pary punktów homologicznych D_1 , D_2 i C_1 , C_2 tych szeregów wyznaczają (ust. 23) jedną i tylko jedną rzutowość inwolucyjną, przeto: punkt A_0 zjednoczyć się musi z elementem A_2 , a punkt B_0 z elementem B_2 . Z uwagi na to, że

punkt $35.p = A_0 = A_2 = 34.p$, oraz punkt $25.p = B_0 = B_2 = 24$, więc: punkt $5 = 35.25$, przecięcia się prostych 35 i 25 , zjednoczyć się musi z punktem $4 = 34.24$ przecięcia się prostych 34 i 24 . Dowiedliśmy zatem prawdziwości twierdzenia II-go, gdyż punkt $4 = 5$ wraz z punktami $D_1, D_2, 1, 2$ i 3 leży na stożkowej S^2 .

Wykażemy teraz, że twierdzenie I-e jest prawdziwe również i wówczas, gdy prosta p jest styczną do stożkowej S^2 . Punkt styczności D prostej p , w którym zjednoczą się punkty D_1 i D_2 (ryc. 100), będzie punktem podwójnym omawianego szeregu inwolucyjnego (p).

Niechaj prosta p jest styczną do stożkowej S^2 w punkcie D i nie przechodzi przez żaden wierzchołek czworokąta (1234) , wpisanego w tę stożkową. Przypuśćmy, że dla szeregu inwolucyjnego

$$p(A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, \dots),$$

którego wypisane trzy pary homologicznych punktów są (porównaj twierdzenie I) punktami przecięcia się prostej p z bokami przeciwległymi czworokąta (1234) , punkt styczności D nie jest punktem podwójnym. W takim razie punktowi D podporządkowany będzie w owym szeregu inwolucyjnym jakiś punkt np. D_0 , różny od elementu D . Z twierdzenia II-go wynika jednak, że punkty $D, D_0, 1, 2, 3$ i 4 leżą na jednej stożkowej, która jest różna od danej stożkowej S^2 , gdyż S^2 posiada z prostą p tylko punkt styczności D wspólny. Dochodzimy zatem do sprzeczności (ust. 34), gdyż przez pięć punktów $D, 1, 2, 3$ i 4 nie mogą przechodzić dwie różne od siebie stożkowe! Innymi słowy: punkt D musi być punktem podwójnym szeregu inwolucyjnego (p), c. b. d. o.

Dowiedliśmy zatem prawdziwości twierdzeń, podporządkowanych sobie wedle zasady biegunowej dwoistości, a mianowicie:

Skoro dana jest stożkowa (nieznieskształcona) S^2 i wpisany w nią czworokąt zupełny, to wówczas dowolna prosta — która nie jest prostą zewnętrzną względem S^2 i nie przechodzi przez żaden z wierzchołków danego czworokąta — przecina tę stożkową i trzy pary boków przeciwległych te-

Skoro dana jest stożkowa (nieznieskształcona) S^2 i opisany na niej czworobok zupełny, to wówczas przez dowolny punkt, który nie jest punktem wewnętrznym względem S^2 i nie leży na żadnym z boków danego czworoboku — wykreślone styczne do tej stożkowej i proste, przechodzące

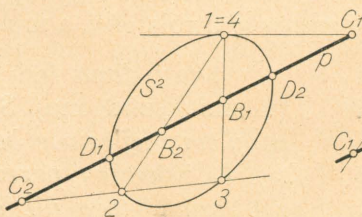
go czworokąta w czterech parach punktów homologicznych szeregu inwolucyjnego.

przez trzy pary wierzchołków przeciwległych tego czworoboku, tworzą cztery pary prostych homologicznych pęku inwolucyjnego.

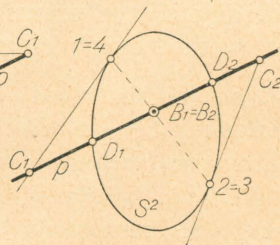
Wykazać wreszcie możemy prawdziwość twierdzenia II-go w wypadku, gdy na prostej p zjednoczą się punkty D_1 i D_2 w punkcie D . Skoro przez S^2 oznaczmy stożkową, przechodzącą (ust. 34) przez cztery punkty $D, 1, 2$ i 3 i posiadającą w punkcie D styczną p , to wykazać możemy, że: owa stożkowa S^2 przejść musi również i przez punkt 4 . Dowieść tego możemy w sposób, omówiony poprzednio przy twierdzeniu II-em. A zatem prawdziwe są również twierdzenia wzajemne do poprzednich:

Skoro boki przeciwległe danego czworokąta zupełnego przetniemy dowolną prostą, nie przechodzącą przez żaden z jego wierzchołków, w trzech parach homologicznych punktów szeregu inwolucyjnego, to wówczas: przez dalsze dwa (różne od siebie, wzgl. zjednoczone) punkty homologiczne tego szeregu, nie leżące na bokach danego czworokąta, i przez wierzchołki tego czworokąta przechodzi jedna i tylko jedna stożkowa.

Skoro wierzchołki przeciwległe danego czworoboku zupełnego rzucimy z dowolnego punktu, nie leżącego na żadnym z jego boków, i użyjemy trzy pary homologicznych prostych pęku inwolucyjnego, to wówczas: dwie dalsze (różne od siebie, wzgl. zjednoczone) proste homologiczne tego pęku, nie przechodzące przez wierzchołki danego czworoboku, i boki tego czworoboku są stycznymi do jednej i tylko jednej stożkowej.



Ryc. 101.



Ryc. 102.

W miejsce czworokąta, weźmy pod uwagę (ryc. 101) trójkąt $(1\ 2\ 3)$ wpisany w stożkową S^2 . Trójkąt ten uważać możemy za przypadek graniczny czworokąta $(1\ 2\ 3 = 4)$, którego dwa wierz-

chołki 3 i 4 zjednoczyły się w jednym punkcie, a bok 34 jest styczną stożkowej S^2 . Skoro punkty $D_1, D_2, 3$ i 4 stożkowej S^2 rzucimy z punktów 1 i 2, a uzyskane pęki prostych (1) $\overline{\wedge}$ (2) przetniemy sieczną p , to wykażemy — w sposób poprzednio omówiony — że prosta p jest podstawą szeregu involucyjnego $p(D_1D_2, B_1B_2, C_1C_2, \dots)$, a tem samem dowiedzimy prawdziwości twierdzenia, które jest analogiczne do twierdzenia I-go. W sposób podobny, jak to uczyniliśmy poprzednio dla twierdzenia II-go, wykazać możemy prawdziwość analogicznego twierdzenia. Teraz udowodnić już możemy, że, o ile prosta p jest styczną w punkcie $D_1 = D_2$ do stożkowej S^2 , ów punkt styczności jest punktem podwójnym szeregu involucyjnego $p(D_1 = D_2, B_1B_2, C_1C_2, \dots)$. A zatem wysłowić możemy następujące twierdzenia:

Skoro dana jest stożkowa (niezniesztalcona) S^2 i wpisany w nią trójkąt, to wówczas dowolna prosta — która nie jest prostą zewnętrzną względem S^2 i nie przechodzi przez żaden wierzchołek danego trójkąta — przecina tę stożkową, dwa boki danego trójkąta, oraz jego trzeci bok i styczną do S^2 w wierzchołku przeciwległym w trzech parach homologicznych punktów szeregu involucyjnego.

Skoro dana jest stożkowa (niezniesztalcona) S^2 i opisany na niej trójbok, to wówczas przez dowolny punkt — który nie jest punktem wewnętrznym względem S^2 i nie leży na żadnym boku danego trójboku — wykreślone styczne do tej stożkowej, oraz proste, przechodzące przez dwa wierzchołki danego trójboku, oraz dwie proste, z których jedna przechodzi przez trzeci wierzchołek trójboku, a druga przez punkt styczności przeciwległego boku ze stożkową S^2 — tworzą trzy pary homologicznych prostych pędu involucyjnego.

Prawdziwość twierdzeń odwrotnych wykazać możemy w sposób, zastosowany poprzednio do twierdzenia II-go. Ograniczymy się na tem miejscu do wypisania tylko jednego twierdzenia odwrotnego, które podporządkowane jest twierdzeniu z lewej strony, a mianowicie:

Skoro dwie pary punktów, w których dowolna prosta — nie przechodząca przez wierzchołki danego trójkąta — przecina dwa jego boki, oraz bok trzeci i daną prostą s , która przechodzi przez przeciwległy wierzchołek tego trójkąta, uważać będziemy za punkty

homologiczne szeregu inwolucyjnego, to wówczas: przez dalsze dwa (różne od siebie wzgl. zjednoczone) punkty homologiczne tego szeregu (nie leżące na bokach trójkąta danego) i przez wierzchołki danego trójkąta przechodzi jedna i tylko jedna stożkowa, która jest styczną do prostej s .

Załóżmy teraz, że wierzchołki 2 i 3 omawianego trójkąta $(1\ 2\ 3)$, wpisanego (ryc. 101) w stożkową S^2 , zjednoczą się w punkcie $2 = 3$. Skoro punkty D_1 , D_2 , 3 i 4 stożkowej S^2 rzucimy (ryc. 102) z punktów $1 = 4$ i $2 = 3$, a otrzymane pęki prostych $(1) \overline{\wedge} (2)$ przetniemy sieczną $p = D_1 D_2$, to uzyskamy szereg inwolucyjny $p(D_1 D_2, C_1 C_2, B_1 = B_2, \dots)$, którego punkt podwójny $B_1 = B_2$ jest punktem przecięcia się prostych $1\ 2$ i p . Przeprowadzając rozumowania analogiczne do tych, które stosowaliśmy poprzednio dla czworokąta $(1\ 2\ 3\ 4)$ i trójkąta $(1\ 2\ 3 = 4)$, wykazać możemy prawdziwość następujących twierdzeń:

Skoro dana jest stożkowa (nieznieskształcona) S^2 i dwie jej styczne, to dowolna prosta — która nie jest prostą zewnętrzną względem S^2 i nie przechodzi przez żaden z punktów styczności danych stycznych — przecina tę stożkową i owe dwie styczne w dwóch parach homologicznych punktów szeregu inwolucyjnego, a prostą, łączącą punkty styczności danych stycznych, w punkcie podwójnym tego szeregu.

Skoro dana jest stożkowa (nieznieskształcona) S^2 i dwa jej punkty, to wówczas przez dowolny punkt — który nie jest punktem wewnętrznym i nie leży na żadnej ze stycznych w danych punktach — wykreślone styczne do tej stożkowej, oraz proste, przechodzące przez dane dwa punkty, tworzą dwie pary homologicznych prostych pęku inwolucyjnego, którego prosta podwójna przechodzi przez punkt przecięcia się stycznych do S^2 w danych jej dwóch punktach.

Prawdziwe są również twierdzenia odwrotne. Dla twierdzenia z lewej strony, mamy następujące twierdzenie odwrotne:

Skoro przez dwa homologiczne punkty szeregu inwolucyjnego hiperbolicznego wykreślimy dwie proste a i b , a następnie przetniemy je prostą, przechodzącą przez punkt podwójny tego szeregu i różną od jego podstawy, to wówczas każda stożkowa, styczna w owych dwóch punktach przecięcia do prostych a i b , przechodzi przez dalsze dwa (różne od siebie, wzgl. zjednoczone) punkty homologiczne uważanego szeregu inwolucyjnego.

Uwaga: Twierdzenie z lewej strony zastosujemy do hiperboli, której asymptotami (ryc. 86) są proste $a = 1^\infty 2^\infty$ i $b = 3^\infty 4^\infty$. Dowolna prosta l , nie przechodząca przez żaden z punktów styczności asymptot, przecina hiperbolę w punktach 5 i 6, obie asymptoty w punktach D i E , a prostą niewłaściwą $s^\infty = 1^\infty 3^\infty$ w punkcie B^∞ . Na prostej l otrzymujemy zatem szereg inwolucyjny $l(56, DE, \dots)$, którego jeden punkt podwójny jest punktem niewłaściwym B^∞ . Ponieważ punkty podwójne B^∞ i P oraz dowolna para punktów homologicznych szeregu inwolucyjnego (l) tworzą (ust. 24) grupę harmoniczną o stosunku $(B^\infty P 56) = (B^\infty P DE) = -1$, przeto drugi punkt podwójny P tego szeregu połowi (ust. 12) odcinki o długościach skończonych 56 i DE . Wnosimy stąd o równości odcinków: $5D = E6$, a tem samem o prawdziwości twierdzenia, dowiedzionego w inny sposób w ust. 51-ym, zad. 4.

Korzystając z powyższych twierdzeń *Desargues'a*, rozwiązać możemy następujące

Zadanie 1: Na płaszczyźnie danych jest pięć punktów $1, 2, 3, 4$ i D_1 , które określają stożkową S^2 , oraz dowolna prosta p , przechodząca przez punkt D_1 . Skonstruować należy drugi punkt przecięcia się prostej p ze stożkową S^2 .

Rozwiązanie: Cztery pierwsze punkty dane (ryc. 100) uważamy za wierzchołki czworokąta zupełnego $(1\ 2\ 3\ 4)$, wpisanego w stożkową S^2 . Prosta p przecina przeciwległe boki tego czworokąta w punktach szeregu inwolucyjnego $p(A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, \dots)$. Na prostej p wyznaczmy (ust. 24, zad. 3 lub ust. 44) taki punkt D_2 , aby D_1 i D_2 były elementami homologicznymi owego szeregu inwolucyjnego, to element D_2 rozwiązuje zadanie.

Inne rozwiązania podane były w ust. 35-ym, zad. 1.

Ćwiczenie 1: Stożkowa S^2 określona jest pięcioma stycznymi I, II, III, IV i d_1 . Z danego punktu P , leżącego na stycznej d_1 , wykreślić należy drugą styczną d_2 do stożkowej S^2 .

Ćwiczenie 2: Rozwiązać zadanie 1 wówczas, gdy stożkowa S^2 określona jest: a) czterema punktami $1, 2, 3$ i D_1 , oraz styczną w punkcie 1 (ryc. 101); b) trzema punktami $1, 2$ i D_1 , oraz dwiema stycznymi w punktach 1 i 2 (ryc. 102).

Ćwiczenie 3: Rozwiązać ćwiczenie 1 wówczas, gdy stożkowa S^2 określona jest: a) czterema stycznymi I, II, III i d_1 , oraz punktem styczności stycznej I ; b) trzema stycznymi I, II i d_1 , oraz dwoma punktami styczności stycznych I i II .

54. Pęki i pasma stożkowych. Na płaszczyźnie ω niechaj dany będzie czworokąt zupełny $(1\ 2\ 3\ 4)$, którego wierzchołkami są punkty rzeczywiste $1, 2, 3$ i 4 . Przez owe punkty i przez dowolny punkt A płaszczyzny ω przechodzi (ust. 34) jedna i tylko jedna stożkowa, którą oznaczmy symbolem A^2 . Skoro punkt A zmieniać będzie swoje położenie w płaszczyźnie ω , to równocześnie przez każdy punkt A i przez wierzchołki danego

czworokąta określona będzie coraz to inna stożkowa. Dla poszczególnych punktów $A, B, C, \dots$ płaszczyzny ω , otrzymamy stożkowe: $A^2, B^2, C^2, \dots$, przechodzące odpowiednio przez punkty $A, B, C, \dots$ oraz przez stałe cztery punkty 1, 2, 3 i 4.

Ogół stożkowych $A^2, B^2, C^2, \dots$, które przechodzą przez cztery stałe punkty 1, 2, 3 i 4 (z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej), nazywamy *pękiem stożkowych*. Punkty zaś 1, 2, 3 i 4 nazywamy *punktami podstawowymi* uważanego pędu stożkowych.

Ogół stożkowych $A^2, B^2, C^2, \dots$, które są styczne do czterech stałych prostych I, II, III i IV (z których żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt), nazywamy *pasmem stożkowych*. Styczne zaś I, II, III i IV nazywamy *prostami podstawowymi* uważanego pasma stożkowych.

Poszczególne stożkowe omawianego

pędu są *opisane* na czworokącie zupełnym (1234), którego wierzchołkami są punkty podstawowe tego pędu.

pasma są *wpisane* w czworobok zupełny ($I II III IV$), którego bokami są proste podstawowe tego pasma.

Skoro na płaszczyźnie ω oberzemy taki punkt A , który leży na boku np. 12 czworokąta (1234), to wówczas stożkowa pędu rozpada się na prostą 12 i na prostą 34. A zatem:

Trzy pary boków przeciwnych czworokąta zupełnego (1234) uważać można za trzy *stożkowe zniekształcone*, należące do pędu stożkowych o punktach podstawowych 1, 2, 3 i 4.

Trzy pary wierzchołków przeciwnych czworoboku zupełnego ($I II III IV$) uważać można za trzy *stożkowe zniekształcone*, należące do pasma stożkowych o prostych podstawowych I, II, III i IV .

W rozważaniach tego ustępu ograniczamy się do takich pędów (wzgl. pasm) stożkowych, dla których punkty (wzgl. proste) podstawowe są elementami rzeczywiście. Uwzględniamy jednak będziemy również

a) pęk stożkowych z trzema punktami podstawowymi 1, 2 i 3 (nie leżącymi na jednej prostej), przyczem wszystkie stożkowe tego pędu po-

a) pasmo stożkowych z trzema prostami podstawowymi I, II i III (nie przechodzącymi przez jeden punkt), przyczem wszystkie stożkowe

siadają *wspólną styczną* a w punkcie podstawowym np. 1;

b) pęk stożkowych z dwoma punktami podstawowymi 1 i 2, przyczem wszystkie stożkowe tego pęku posiadają *wspólną styczną* a w punkcie podstawowym 1 i *wspólną styczną* b w punkcie podstawowym 2.

tego pasma posiadają *wspólny punkt styczności* A na prostej podstawowej np. I;

b) pasmo stożkowych z dwiema prostymi podstawowymi I i II, przyczem wszystkie stożkowe tego pasma posiadają *wspólny punkt styczności* A na prostej podstawowej I i *wspólny punkt styczności* B na prostej podstawowej II.

Uwaga: W przypadku *b)* omawiany pęk stożkowych jest zarazem też i pasmem stożkowych.

Wymienione powyżej przypadki *a)* i *b)* pęków i pasm stożkowych uważać możemy

za pęki stożkowych z czterema punktami podstawowymi 1, 2, 3 i 4 z których:

a) punkty 1 i 4 zjednoczyły się w jednym punkcie na danej stycznej a ;

b) punkty 1 i 4, oraz 2 i 3 zjednoczyły się odpowiednio na stycznych a , wzgl. b .

za pasma stożkowych z czterema prostymi podstawowymi I, II, III i IV, z których:

a) proste I i IV zjednoczyły się na jednej stycznej, przechodzącej przez dany punkt styczności A ;

b) proste I i IV, oraz II i III zjednoczyły się odpowiednio na dwóch stycznych, przechodzących przez punkty styczności A , wzgl. B .

Na płaszczyźnie ω niechaj dany będzie czworokąt zupełny (1234), oraz dowolna prosta p , która nie przechodzi przez żaden z wierzchołków czworokąta. Przez każdy punkt A_1 prostej p przechodzi jedna i tylko jedna stożkowa A^2 , należąca do pęku stożkowych o punktach podstawowych 1, 2, 3 i 4. Prosta p jest sieczną stożkowej A^2 i przecina ją (ust. 31) jeszcze w jakimś punkcie rzeczywistym A_2 . Jeżeli punkt A_1 przyjmiemy na boku np. 12, to stożkowa A^2 jest zniekształcona i rozpada się na proste 12 i 34, a punkt A_2 przynależć musi do przeciwnego boku 34 uważanego czworokąta.

Przez poszczególne punkty $A_1, B_1, C_1, \dots$ prostej p przechodzą odpowiednio stożkowe $A^2, B^2, C^2, \dots$ pęku stożkowych (o punktach podstawowych 1, 2, 3 i 4), a każda z tych stożkowych przecina podstawę p odpow. jeszcze w jednym punkcie $A_2, B_2, C_2, \dots$. Pary punktów: A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i $C_2, \dots$ prostej p tworzą (ust. 53)

szereg inwolucyjny (p). Trzy stożkowe zniekształcone, uważanego pęku stożkowych, t. zn. trzy pary boków przeciwległych czworokąta zupełnego (1234), przecinają prostą p (ust. 53) w trzech parach punktów homologicznych szeregu inwolucyjnego (p).

Z rozważań poprzedniego ustępu wiadomo nam, że omawiany szereg inwolucyjny (p) wystąpi również wówczas, gdy a) dwa punkty podstawowe 1 i 4 zjednoczą się w jednym punkcie wspólnej stycznej a do wszystkich stożkowych pęku; b) dwa punkty podstawowe 1 i 4 zjednoczą się na wspólnej stycznej a , i równocześnie dwa dalsze punkty podstawowe zjednoczą się na wspólnej stycznej b . A zatem twierdzenia Desargues'a (ust. 53) wysłowić możemy w następującej formie:

Skoro na płaszczyźnie dany jest pęk stożkowych o czterech rzeczywistych punktach podstawowych (z których dwa mogą się zjednoczyć, a dwa pozostałe też mogą się zjednoczyć) i dana jest dowolna prosta, nie przechodząca przez żaden z punktów podstawowych, to wówczas: pary punktów przecięcia się tej prostej z poszczególnymi stożkowymi danego pęku są homologicznymi punktami szeregu inwolucyjnego.

Skoro na płaszczyźnie dane jest pasmo stożkowych o czterech rzeczywistych prostych podstawowych (z których dwie mogą się zjednoczyć, a dwie pozostałe też mogą się zjednoczyć) i dany jest dowolny punkt, nie leżący na żadnej z prostych podstawowych, to wówczas: pary stycznych, wykreślonych z tego punktu do poszczególnych stożkowych danego pasma, są homologicznymi prostymi pęku inwolucyjnego.

Jeżeli istnieje w pęku stożkowych taka stożkowa, która jest styczną do prostej p , to punkt styczności jest oczywiście punktem podwójnym omawianego szeregu inwolucyjnego (p). Może się jednak zdarzyć, że dwa boki przeciwległe czworokąta (1234) — stanowiące stożkową zniekształconą pęku stożkowych — przecinają się w punkcie P , leżącym na prostej p . Ów punkt P jest wówczas też punktem podwójnym szeregu inwolucyjnego (p). Umówimy się¹⁾, że każda prosta, która przechodzi przez punkt przecięcia się dwóch prostych r i s , jest „styczną“ do stożkowej zniekształconej, rozpadającej się na owe proste r i s . Wówczas możemy powiedzieć, że: każdy punkt podwójny

¹⁾ Por. F. Enriques, l. c. str. 234.

szeregu inwolucyjnego (p) jest punktem styczności jakiejś stożkowej, należącej do omawianego pęku stożkowych.

Przypuśćmy, że szereg inwolucyjny $p(A_1A_2, B_1B_2, \dots)$ jest *szeregiem parabolicznym*, to w jego punkcie podwójnym $E_1 = E_2$ schodzą się (ust. 24) punkty $A_2, B_2, \dots$ tego szeregu. Wnosimy stąd, że przez punkt podwójny $E_1 = E_2 = A_2 = B_2 = \dots$ przechodzić muszą wszystkie stożkowe $A^2, B^2, \dots$ uważanego pęku stożkowych. Innemi słowy: punkt podwójny $E_1 = E_2$ jest wówczas punktem podstawowym pęku stożkowych, a prosta p przechodzi — wbrew naszemu założeniu! — przez ten punkt podstawowy.

Szereg inwolucyjny (p) może być zatem szeregiem eliptycznym lub hiperbolicznym.

Gdy stożkowe pęku o dwóch punktach podstawowych 1 i 2 posiadają wspólne styczne w owych punktach 1 i 2, to szereg inwolucyjny (p) jest wówczas szeregiem hiperbolicznym. W istocie bowiem punkt przecięcia się prostych p i 12 — jak to z przedostatniego twierdzenia ust. 53-go wynika — jest punktem podwójnym szeregu (p). W drugim punkcie podwójnym prosta p jest styczną do jednej i tylko jednej stożkowej uważanego pęku. Stożkowa ta określona jest — zgodnie z rozważaniami ust. 34-go — dwoma punktami 1, 2, stycznymi w owych punktach i daną styczną p .

Z rozważań naszych wynikają (p. uwagę w ust. 34-ym) następujące związki:

Skoro na płaszczyźnie dane są cztery punkty rzeczywiste, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, oraz dowolna prosta, nie przechodząca przez żaden z punktów danych, to wówczas:

albo nie istnieje ani jedna stożkowa, przechodząca przez dane cztery punkty i styczna do danej prostej,

albo też istnieją dwie takie stożkowe, a ich punkty styczności z daną prostą są punktami podwójnymi szeregu inwolucyjnego, określonego trzema parami punktów przecięcia się

Skoro na płaszczyźnie dane są cztery proste rzeczywiste, z których żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, oraz dowolny punkt, nie leżący na żadnej z prostych danych, to wówczas:

albo nie istnieje ani jedna stożkowa, styczna do czterech danych prostych i przechodząca przez dany punkt,

albo też istnieją dwie takie stożkowe, a styczne do nich w punkcie danym są prostymi podwójnymi pęku inwolucyjnego, określonego trzema parami prostych, łączących ten punkt

tej prostej z bokami przeciwległymi danego czworokąta zupełnego.

z wierzchołkami przeciwległymi danego czworoboku zupełnego.

Zauważyć wreszcie należy, że powyższe twierdzenia są prawdziwe, gdy zamiast

czterech punktów dane są trzy punkty rzeczywiste (nie leżące na jednej prostej) i styczna w jednym z nich (nie przechodząca przez żaden z pozostałych punktów danych).

czterech stycznych dane są trzy styczne rzeczywiste (nie przechodzące przez jeden punkt) i punkt styczności jednej z nich (nie leżący na żadnej z pozostałych stycznych danych).

55. O stożkowych, określonych trzema punktami i dwiema stycznymi. W ustępie tym wykazemy, że nie istnieje ani jedna stożkowa albo też istnieją cztery takie stożkowe, które: *a/* przechodzą przez trzy dane punkty, nie leżące na jednej prostej, i są styczne do dwóch danych prostych, nie przynależnych do żadnego z danych punktów; *b/* są styczne do trzech danych prostych, nie przecinających się w jednym punkcie, i przechodzą przez dwa dane punkty, nie leżące na żadnej z danych prostych. Celem uzasadnienia tego, weźmy pod uwagę (ryc. 102) trzy dowolne punkty D_1, D_2, D_3 stożkowej S^2 , oraz dwie jej styczne a i b w dwóch dalszych punktach 1 i 2. Punkty D_1 i $D_2, C_1 = ap$ i $C_2 = bp$ prostej $p = D_1D_2$ — jak to wynika z przedostatniego twierdzenia ust. 53-go — tworzą szereg involucyjny

$$p(D_1D_2, C_1C_2, \dots, B_1 = B_2, \dots),$$

którego punktem podwójnym $B_1 = B_2$ jest punkt przecięcia się podstawy p z prostą 12, łączącą punkty styczności 1 i 2 danych stycznych a i b . Podobnie na prostej siecznej $r = D_1D_3$ leżące punkty: D_1 i $D_3, N_1 = ar$ i $N_2 = br$ tworzą szereg involucyjny

$$r(D_1D_3, N_1N_2, \dots, E_1 = E_2, \dots),$$

którego punktem podwójnym $E_1 = E_2$ jest punkt przecięcia się podstawy r z prostą 12. Wreszcie punkt $F_1 = F_2$, przecięcia się prostej $s = D_2D_3$ z prostą 12, jest punktem podwójnym trzeciego szeregu involucyjnego

$$s(D_2D_3, M_1M_2, \dots, F_1 = F_2, \dots)$$

o elementach homologicznych D_2 i $D_3, M_1 = as$ i $M_2 = bs$.

punkty $N_1 = ar$ i $N_2 = br$ szeregu inwolucyjnego (r) — przechodzą (por. początek naszych rozważań!) dane proste: $a = C_1N_1$ i $b = C_2N_2$. Skoro przez punkty podwójne B_0 i E_0 szeregów inwolucyjnych (p) i (r) wykreślimy prostą B_0E_0 , a następnie wyznaczymy jej punkty przecięcia się 3 i 4 z danymi prostymi a i b — to wówczas: stożkowa S_1^2 , przechodząca przez punkt $D_1 = pr$ i styczna w punktach 3 i 4 odpow. do prostych a i b , musi przejść — na mocy ostatniego twierdzenia ust. 53-go — koniecznie przez punkty D_2 i D_3 . Wykazaliśmy tedy, że: prosta B_0E_0 , łącząca dwa dowolne punkty z danych sześciu punktów (ryc. 103) podwójnych i nie należące do jednego i tego samego szeregu inwolucyjnego, przecina proste a i b w takich punktach 3 i 4, które wraz z trzema danymi punktami D_1, D_2 i D_3 określają stożkową S_1^2 , styczną do prostych a i b .

Ponieważ takich prostych na ryc. 103 mamy cztery, przeto istnieją cztery stożkowe, które przechodzą przez trzy dane punkty D_1, D_2 i D_3 , oraz są styczne do danych prostych a i b .

Z przeprowadzonych powyżej rozważań wynika (p. konfigurację na ryc. 103), że skoro dwa szeregi inwolucyjne np. (p) i (r) są hiperboliczne, to i trzeci szereg (s) musi być też hiperboliczny. Jeżeli natomiast jeden szereg inwolucyjny np. (p) jest eliptyczny, to wówczas jeszcze jeden szereg inwolucyjny (r) lub (s) musi być eliptyczny. W tym ostatnim przypadku nie istnieje ani jedna stożkowa, któraby przechodziła przez punkty D_1, D_2, D_3 i była styczną do danych prostych a, b .

Dowiedliśmy zatem prawdziwości dwoście podporządkowanych sobie twierdzeń:

Skoro na płaszczyźnie dane są

trzy dowolne punkty, nie leżące na jednej prostej, oraz dwie dowolne proste, nie przechodzące przez żaden z punktów danych, to wówczas:

albo nie istnieje ani jedna stożkowa, przechodząca przez dane trzy punkty i styczna do danych dwóch prostych,

albo też istnieją cztery takie stożkowe, a punkty stycz-

ności trzech prostych, nie przechodzących przez jeden punkt, oraz dwa dowolne punkty, nie leżące na żadnej z danych prostych, to wówczas:

albo nie istnieje ani jedna stożkowa, styczna do danych trzech prostych i przechodząca przez dane dwa punkty,

albo też istnieją cztery takie stożkowe, a styczne do

ności każdej z nich z dwiema danymi prostymi wyznaczają prostą, na której leżą trzy punkty podwójne trzech szeregow inwolucyjnych, z których każdy określony jest dwiema parami punktów homologicznych, a mianowicie: każdą parą punktów z pośród trzech danych punktów, oraz dwoma punktami przecięcia się prostej, łączącej ową parę punktów, z dwiema danymi prostymi.

każdej z nich w dwóch danych punktach przecinają się w punkcie, przez który przechodzą trzy proste podwójne trzech pęków inwolucyjnych, z których każdy określony jest dwiema parami prostych homologicznych, a mianowicie: każdą parą prostych z pośród trzech danych prostych, oraz dwiema prostymi, łączącemi punkt przecięcia się owej pary prostych z dwoma danymi punktami.

56. Ogniska stożkowej. Skoro na płaszczyźnie ω dana jest stożkowa (nieznieskształcona) S^2 , to proste sprzężone względem S^2 i przechodzące przez dowolny punkt P płaszczyzny ω tworzą (ust. 42) pęk inwolucyjny. Proste podwójne tego pęku są (ust. 31 i 42) stycznymi, wykreślonemi z punktu P do stożkowej S^2 .

Wierzchołek pęku cyklicznego prostych sprzężonych względem stożkowej (nieznieskształconej) S^2 nazywamy *ogniskiem* tej stożkowej.

Ponieważ pęk cykliczny (kołowy) jest (ust. 47) pękiem inwolucyjnym eliptycznym, którego każde dwie proste homologiczne są wzajemnie prostopadłe, a proste podwójne, t. zw. proste izotropowe (ust. 50), są elementami urojonemi sprzężonemi, przeto:

Przez ognisko stożkowej (nieznieskształconej) S^2 przechodzą dwie urojone sprzężone styczne tej stożkowej, które są prostymi izotropowymi.

Wnosimy stąd (ust. 31), że ognisko stożkowej S^2 jest *punktem wewnętrznym* tej stożkowej.

Z podanej powyżej definicji ogniska i rozważań ust. 50-go wynika bezpośrednio, że: *środek koła jest jego ogniskiem*. Prawdziwe też jest i odwrotne twierdzenie:

Jeżeli środek stożkowej (nieznieskształconej) jest jej ogniskiem, to uważana stożkowa jest kołem.

W istocie bowiem, skoro środek (właściwy) O stożkowej S^2 jest jej ogniskiem, to każde dwie średnice sprzężone tej stożkowej są wzajemnie prostopadłe. Na danej stożkowej S^2 obierzmy dwa dowolne punkty A i B , a przez środek O poprowadźmy średnicę a równoległą do cięciwy $\overline{AB}$. Ponieważ prosta b , wykreślona z punktu O prostopadłe do średnicy a , jest średnicą sprzężoną z elementem a , przeto b przejść musi (ust. 49) przez środek C cięciwy $\overline{AB}$. Z warunków:

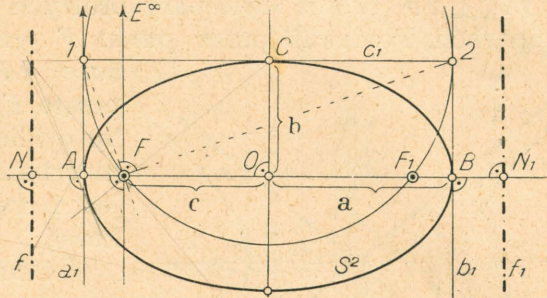
$$\overline{OC} \perp \overline{AB}, \overline{AC} = \overline{CB} \text{ i } \overline{OC} = \overline{OC}$$

wnosimy o przystawaniu trójkątów prostokątnych (OCA) i (OCB) , a tem samem i o równości odcinków: $\overline{OA} = \overline{OB}$. Wykazaliśmy tedy, że środek O stożkowej S^2 jest równo oddalony od dwóch dowolnych punktów A i B stożkowej S^2 , a tem samem i od wszystkich punktów tej stożkowej. Innemi słowy: stożkowa S^2 jest kołem, c. b. d. w.

Weźmy teraz pod uwagę taką stożkową (nieznieskształconą) S^2 , której środek O nie jest ogniskiem tej stożkowej. O ile uważana stożkowa S^2 posiada ognisko F , to przezeń przechodzi jedna i tylko jedna średnica OF tej stożkowej. Ognisko F jest punktem wewnętrznym względem S^2 , więc każda prosta, przechodząca przez F i leżąca na płaszczyźnie tej stożkowej, jest (ust. 46) jej sieczną. Przez F wykreślimy prostą, prostopadłą do średnicy OF , i oznaczmy przez N, N_1 punkty przecięcia się tej prostej (siecznej) ze stożkową S^2 . Z definicji ogniska wynika, że proste NN_1 i OF są sprzężone względem S^2 , a ponieważ średnica OF jest prostopadła do cięciwy z nią sprzężonej NN_1 , przeto (ust. 49) prosta OF jest osią stożkowej S^2 . O ile zatem stożkowa (nieznieskształcona) S^2 posiada ogniska, to: *każde ognisko leżeć musi na osi tej stożkowej*. Prosta OF jest sieczną, więc gdy S^2 jest hiperbolą, to każde jej ognisko leżeć musi (ust. 49) na osi głównej tej hiperboli. — Wreszcie wykazać możemy, że: *prosta FF_1 , łącząca dwa ogniska F i F_1 stożkowej S^2 , jest osią tej stożkowej*. Proste l i l_1 , wykreślone odpow. w punktach F i F_1 prostopadłe do prostej FF_1 , są oczywiście z nią sprzężone, a zatem przejść muszą (ust. 42) przez biegun $P^\infty = l_1$ prostej FF_1 . Prosta ostatnia jest więc średnicą stożkowej S^2 , a jako prosta OF , łącząca środek O z ogniskiem F , musi być osią stożkowej S^2 , c. b. d. w.

Skoro dla danej elipsy S^2 punkty A, B, C i D (ryc. 104) są jej wierzchołkami, prosta AB osią główną (większą), a prosta CD osią mniejszą, to pomiędzy odcinkami (o długościach skończonych)

$\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ zachodzi (ust. 49) następująca nierówność: $\overline{AB} > \overline{CD}$. Styczne a_1 i b_1 do elipsy w wierzchołkach osi głównej przecinają się ze styczną c_1 , przechodzącą przez wierzchołek C , w punktach 1 i 2. Dla trójboku $(a_1b_1c_1)$, opisanego na elipsie S^2 , jego wierzchołek $E^\infty = a_1b_1$ jest biegunem osi głównej AB . Skoro tedy dowolny punkt osi AB rzucimy z dwóch pozostałych wierzchołków 1 i 2 trójboku $(a_1b_1c_1)$, to uży-



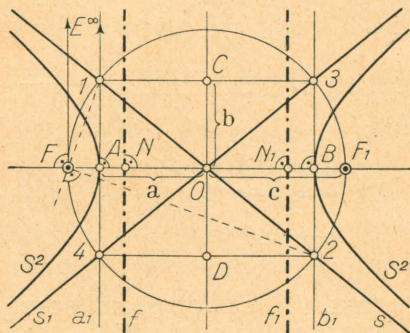
Ryc. 104.

skane w ten sposób proste, w myśl twierdzenia *Staudta* (ust. 43), są „prostemi sprzężonymi“ względem uważanej elipsy. Jeżeli odcinek $\overline{12}$ uważać będziemy za średnicę koła, które przecina się z osią główną AB w dwóch rzeczywistych punktach F i F_1 , to proste prostopadłe $1F \perp 2F$, oraz $1F_1 \perp 2F_1$ tworzą dwie pary prostych sprzężonych względem elipsy S^2 . Ponieważ przez punkt F osi głównej AB przechodzą dwie pary prostych prostopadłych i sprzężonych względem S^2 , a mianowicie: $1F \perp 2F$ i $E^\infty F \perp AB$, przeto F , jako wierzchołek pęku cyklicznego, jest ogniskiem elipsy. To samo odnosi się też i do punktu F_1 . Wykazaliśmy tedy, że na osi głównej elipsy leżą dwa jej ogniska F i F_1 , symetrycznie ułożone względem środka O i odległe od niego o długość $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, jeżeli przez $2a$ i $2b$ oznaczymy długości osi głównej i osi mniejszej owej elipsy.

Gdybyśmy w wierzchołku D (ryc. 104) wyznaczyli styczną d i do trójboku (c_1db_1) zastosowali twierdzenie *Staudta*, a następnie z punktu B jako środka zakreslili koło o promieniu $r = \overline{B2}$, to stwierdzimy, że na osi mniejszej $\overline{CD}$ nie ma ognisk elipsy, gdyż owe koło nie przecina się z tą osią w punktach rzeczywistych.

Na ryc. 105 dane są wierzchołki A, B osi głównej i asymptoty hiperboli. Styczne a_1 i b_1 hiperboli w jej wierzchołkach niechaj przecinają się z asymptotą s w punktach 1 i 2. Wierzchołek $E^\infty = a_1b_1$ trójboku (a_1b_1s) , opisanego na hiperboli, jest biegunem osi AB , skoro więc poszczególne punkty tej osi rzucimy z dwóch pozostałych wierzchołków 1 i 2 owego trójboku, to uzyskane w ten sposób pary prostych są (w myśl twierdzenia

Staudta) prostemi sprzężonymi względem hiperboli. Za pośrednictwem koła o średnicy $\overline{12}$, skonstruujemy na osi AB takie dwa rzeczywiste punkty F i F_1 , że proste prostopadłe $1F \perp 2F$ i $1F_1 \perp 2F_1$ tworzą dwie pary prostych sprzężonych względem hiperboli. Ponieważ przez punkt F przechodzą proste sprzężone $1F \perp 2F$ i $E^\infty F \perp AB$,



Ryc. 105.

przeto F , jako wierzchołek pęku cyklicznego, jest ogniskiem hiperboli. Podobnie i punkt F_1 jest również ogniskiem tej stożkowej.

Odcinek $\overline{AB} = 2a$ nazywamy długością osi głównej hiperboli. Skoro wyznaczymy prostokąt (1324) , którego dwoma bokami są styczne a_1 i b_1 w wierzchołkach osi głównej a przekątnymi są asymptoty, to punkty C i D , przecięcia się osi idealnej hiperboli z dwoma pozostałymi bokami $\overline{13}$ i $\overline{24}$ owego prostokąta, wyznaczają odcinek $\overline{CD} = 2b$, który nazywać będziemy *długością osi idealnej* hiperboli.

Dla hiperboli *równobocznej* (ust. 37) asymptoty są wzajemnie prostopadłe, więc długości obydwóch osi są sobie równe: $\overline{AB} = \overline{CD}$.

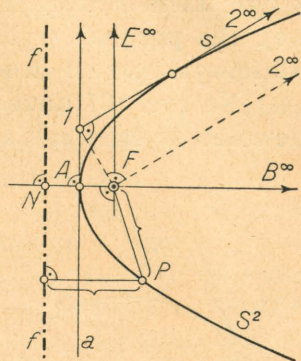
Z rozważań naszych wynika, że ogniska F i F_1 hiperboli są (ryc. 105) symetrycznie ułożone względem środka O i odległe od niego o długość $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Prawdziwe jest zatem następujące twierdzenie:

Elipsa i hiperbola posiadają po dwa ogniska, które leżą na osi głównej tej stożkowej i są odległe od jej środka o długość $\sqrt{a^2 + b^2}$ (znak — odnosi się do elipsy), jeżeli przez $2a$ i $2b$ oznaczymy długości osi tych stożkowych.

Zbadajmy teraz, ile ognisk posiada parabola. Na rycinie 106 dane są dla paraboli oś AB^∞ , styczna a w wierzchołku A , styczna niewłaściwa b^∞ w wierzchołku B^∞ i dowolna styczna s . Wierzchołek $E^\infty = ab^\infty$ trójboku ($ab^\infty s$), opisanego na tej paraboli, jest biegunem osi AB^∞ . Skoro tedy poszczególne punkty tej osi rzucimy z dwóch pozostałych wierzchołków 1 i 2^∞ uważanego trójboku, to — w myśl twierdzenia *Staudta* (ust. 43) — uzyskane pary prostych są prostemi sprzężonymi względem

owej paraboli. W punkcie $1 = as$ wykreślmy prostą prostopadłą do stycznej s , to owa prosta przetnie oś paraboli w punkcie F . Proste prostopadłe $1F \perp 2^\infty F$ są oczywiście sprzężone względem paraboli. Ponieważ jednak przez F przechodzi druga para prostych prostopadłych i sprzężonych względem paraboli, a mianowicie $E^\infty F \perp AB^\infty$, przeto element F , jako wierzchołek pęku cyklicznego, jest ogniskiem paraboli. A zatem:

Parabola posiada jedno i tylko jedno ognisko, które leży na jej osi. Prosta, wykreślona z ogniska paraboli prostopadłe do jakiejkolwiek stycznej tej paraboli, przecina się z tą styczną w punkcie, który leży na stycznej w wierzchołku paraboli.



Ryc. 106.

57. Kierownice stożkowej. Skoro dana jest stożkowa nieznieskształcona S^2 , to wówczas każdemu punktowi P , leżącemu na płaszczyźnie tej stożkowej, podporządkowana jest (ust. 38) jedna i tylko jedna biegunowa p względem S^2 . Wiadomo nam również, że biegunowa p jest „prostą zewnętrzną“ względem stożkowej S^2 , o ile uważany punkt P jest (ust. 40) „punktem wewnętrznym“ dla stożkowej S^2 . Wprowadzimy teraz następującą definicję:

Kierownicą stożkowej (nieznieskształconej) S^2 nazywamy biegunową ogniska tej stożkowej.

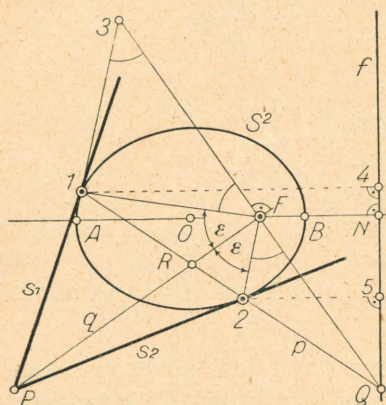
Ognisko F stożkowej S^2 jest (ust. 56) punktem „wewnętrznym“ i leży na osi głównej AB tej stożkowej. Wnosimy stąd, że biegunowa f punktu F musi być „prostą zewnętrzną“ względem S^2 i przechodzić musi (ust. 39) przez biegun E^∞ osi AB , t. zn. przez punkt niewłaściwy E^∞ prostych prostopadłych do osi AB . A zatem:

Kierownica stożkowej (nieznieskształconej) S^2 jest prostą zewnętrzną względem S^2 i prostopadłą do osi głównej tej stożkowej.

Elipsa i hiperbola posiadają po dwie kierownice, parabola zaś tylko jedną kierownicę. Kierownicą koła jest prosta niewłaściwa.

Kierownica $f \perp AB$ przecina się z ową osią w punkcie N (ryc. 104—107), który jest (ust. 38) harmonicznie sprzężony z ogniskiem F względem wierzchołków A i B uważanej stożkowej. Dla paraboli (ryc. 106) wierzchołek B^∞ jest punktem niewłaściwym, przeto drugi wierzchołek A połowi odcinek $\overline{NF}$.

Na ryc. 107 dane są ognisko F , kierownica f , oraz dwie dowolne styczne s_1 i s_2 stożkowej S^2 . Punkty styczności 1 i 2



Ryc. 107.

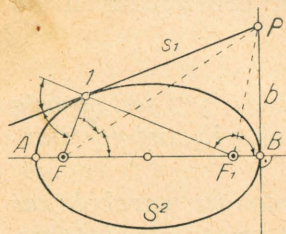
tych stycznych wyznaczają biegunową $p = 12$ punktu $P = s_1 s_2$, punkty zaś F i P biegunową (ust. 39) $q = FP$ punktu $Q = fp$. Skonstruowane proste q i QF są (ust. 42) prostymi sprzężonymi względem S^2 , a ponieważ przechodzą przez ognisko F , przeto są (ust. 56) prostymi prostopadłymi: $q \perp QF$.

Oznaczmy przez R punkt przecięcia się prostych p i q . Biegun Q prostej q i punkt R (leżący na q) są harmonicznie sprzężone względem punktów 1 i 2.

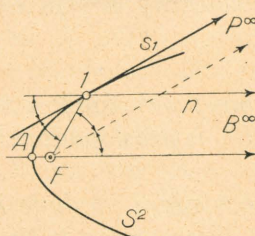
Łącząc owe punkty z ogniskiem F otrzymamy czwórkę harmoniczną prostych o stosunku $(FQ, FR, F1, F2) = -1$, a ponieważ proste FQ i FR są wzajemnie prostopadłe, przeto (ust. 12) są one symetralnemi kątów, określonych prostymi $F1$ i $F2$. Dowiedliśmy zatem prawdziwości następującego twierdzenia:

Proste, łączące ognisko stożkowej z punktami styczności dwóch dowolnych stycznych tej stożkowej, są jednakowo nachylone do prostej, która łączy to ognisko z punktem przecięcia się owych dwóch stycznych.

W wierzchołku B elipsy (lub hiperboli), leżącym na tej osi, która przechodzi przez ogniska F i F_1 , wykreślmy (ryc. 108)



Ryc. 108.



Ryc. 109.

styczną b i obierzmy na niej dowolnie punkt P . Skoro przez P wykreślmy drugą styczną s_1 i oznaczmy przez 1 jej punkt styczności z uważaną stożkową

S^2 , to — na mocy poprzedniego twierdzenia — prosta PF jest symetralną $\sphericalangle 1FB$, a prosta PF_1 jest dwusieczną $\sphericalangle 1F_1B$. Punkt P jest zatem równo oddalony od ramion $1F$ i BF pierwszego kąta, oraz podobnie i od ramion $1F_1$ i $BF_1 (= BF)$ drugiego kąta. Punkt P , jako punkt równo oddalony od prostych $1F$ i $1F_1$, leży tedy na symetralnej jednego z kątów, określonych owymi prostymi. Wykazaliśmy więc, że prosta $P1 = s_1$, łącząca P z wierzchołkiem 1 tego kąta, jest symetralną omawianego $\sphericalangle F1F_1$.

W wierzchołku niewłaściwym B^∞ paraboli (ryc. 109) oznaczmy styczną niewłaściwą przez b^∞ i obierzmy na niej dowolnie punkt P^∞ . Skoro przez P^∞ wykreślimy drugą styczną s_1 i oznaczmy przez 1 punkt styczności z parabolą, to — z poprzedniego twierdzenia wynika równość kątów: $\sphericalangle 1FP^\infty = \sphericalangle B^\infty FP^\infty$, przyczem wierzchołek F tych kątów jest ogniskiem paraboli. Przez punkt styczności 1 wykreślimy średnicę $n // FB^\infty$, to z łatwością stwierdzimy, że styczna s_1 jest symetralną jednego z kątów, określonych średnicą $n = 1B^\infty$ i prostą $1F$. A zatem:

Styczna do elipsy lub hiperboli w dowolnym jej punkcie jest symetralną jednego z kątów, jakie określają proste, łączące ów punkt styczności z ogniskami tej stożkowej. Styczna zaś do paraboli w dowolnym jej punkcie jest dwusieczną jednego z kątów, jakie określają średnica paraboli, przechodząca przez ów punkt styczności, i prosta, łącząca ów punkt z ogniskiem paraboli.

Celem zbadania dalszych własności ogniska F i odpowiedniej kierownicy f dowolnej stożkowej (nieznieskształconej) S^2 , powróćmy do ryc. 107. Poprzednio wykazaliśmy, że proste $1F$ i $2F$ są jednakowo nachylone do prostej PF (gdzie P jest biegunem prostej $p = 12$), oraz że punkty F i $Q = fp$ wyznaczają prostą $FQ \perp PF$. Wnosimy stąd (ryc. 107) o równości kątów następujących: $\sphericalangle 1F3 = \sphericalangle 2FQ$, a ponieważ $13 // 2F$, przeto $\sphericalangle 13F = \sphericalangle 2FQ = \sphericalangle 1F3$, a odcinek $13 = 1\bar{F}$. Z podobieństwa trójkątów $(13Q)$ i $(2FQ)$ wynika

$$\overline{13} : \overline{2F} = \overline{1Q} : \overline{2Q}$$

więc po podstawieniu wartości $\overline{13} = \overline{1\bar{F}}$ mamy

$$\overline{1\bar{F}} : \overline{2F} = \overline{1Q} : \overline{2Q}.$$

Wykreślimy następnie (ryc. 107) odcinki $\overline{14} \perp f$ i $\overline{25} \perp f$, to z podobieństwa trójkątów $(14Q)$ i $(25Q)$ mamy:

$$\overline{1Q} : \overline{2Q} = \overline{14} : \overline{25}$$

a zatem ostatecznie dochodzimy do relacji:

$$\overline{1F} : \overline{2F} = \overline{14} : \overline{25}$$

$$\text{lub } \overline{1F} : \overline{14} = \overline{2F} : \overline{25}.$$

Prawdziwe jest tedy twierdzenie:

Stosunek odległości dowolnego punktu stożkowej (nieznieskształconej) S^2 od jej ogniska i od podporządkowanej mu kierownicy jest liczbą stałą.

Stosunek powyższy nazywać będziemy *mimośrodem* uważanej stożkowej S^2 .

Skoro, zamiast punktów 1 i 2, weźmiemy pod uwagę wierzchołek A paraboli (ryc. 106), to mimośród e tej stożkowej równa się: $e = \overline{AF} : \overline{AN}$, a ponieważ wykazaliśmy poprzednio, że wierzchołek A połowi odcinek (o długości skończonej) $\overline{FN}$, przeto mimośród $e = 1$. Wnosimy stąd, że:

Każdy punkt paraboli jest jednakowo odległy od ogniska i od kierownicy tej paraboli.

Skoro weźmiemy pod uwagę wierzchołki A i B osi głównej elipsy (ryc. 104 i 107) lub hiperboli (ryc. 105), to wówczas mimośród tej stożkowej $e = \overline{AF} : \overline{AN} = \overline{AF_1} : \overline{AN_1} = \overline{BF} : \overline{BN} = \overline{BF_1} : \overline{BN_1}$.

Jeżeli przez $2a$ i $2b$ oznaczymy długości osi głównej (większej) i osi mniejszej elipsy, to jej ogniska F i F_1 odległe są (ust. 56) od środka O o długość $\sqrt{a^2 - b^2}$. Z ryc. 104 (lub 110) czytamy (po uwzględnieniu tylko wartości bezwzględnych):

$$\overline{AO} = \overline{BO} = a, \quad \overline{OC} = b, \quad \overline{FO} = \overline{F_1O} = c,$$

$$\overline{AF} = \overline{AO} - \overline{FO} = a - c, \quad \overline{BF} = \overline{OB} + \overline{FO} = a + c$$

$$\overline{AN} = \overline{ON} - \overline{AO} = \overline{ON} - a, \quad \overline{BN} = \overline{ON} + \overline{OB} = \overline{ON} + a.$$

Dla mimośrodu elipsy mamy tedy

$$e = \frac{\overline{AF}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BN}} \quad \text{lub} \quad \frac{a - c}{\overline{ON} - a} = \frac{a + c}{\overline{ON} + a},$$

a stąd obliczyć możemy długość odcinka

$$\overline{ON} = \frac{a^2}{c},$$

oraz mimośród e elipsy

$$e = \frac{\overline{AF}}{\overline{AN}} = \frac{a - c}{\overline{ON} - a} = \frac{a - c}{\frac{a^2}{c} - a} = \frac{a - c}{\frac{a}{c}(a - c)} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Podobnie obliczyć możemy mimośród hiperboli, której oś główna $\overline{AB} = 2a$, oś idealna (ust. 56) $\overline{CD} = 2b$, a odległość ognisk od środka O wynosi $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Z ryc. 105 (lub 111) czytamy:

$$\overline{AO} = \overline{BO} = a, \overline{OC} = b, \overline{FO} = \overline{F_1O} = c,$$

$$\overline{AF} = \overline{FO} - \overline{AO} = c - a, \overline{BF} = \overline{FO} + \overline{OB} = c + a$$

$$\overline{AN} = \overline{AO} - \overline{ON} = a - \overline{ON}, \overline{BN} = \overline{BO} + \overline{ON} = a + \overline{ON}.$$

Dla mimośrodu $e = \frac{\overline{AF}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BN}}$ hiperboli mamy tedy:

$$\frac{c - a}{a - \overline{ON}} = \frac{c + a}{a + \overline{ON}}, \text{ a stąd } \overline{ON} = \frac{a^2}{c}.$$

Dla mimośrodu e otrzymaliśmy tedy

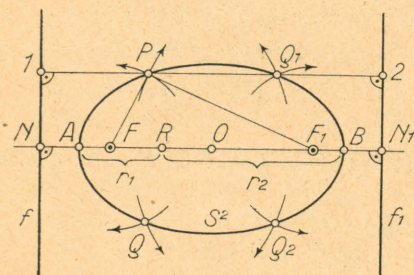
$$e = \frac{\overline{AF}}{\overline{AN}} = \frac{c - a}{a - \overline{ON}} = \frac{c - a}{a - \frac{a^2}{c}} = \frac{c - a}{\frac{a}{c}(c - a)} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Wykazaliśmy więc, że

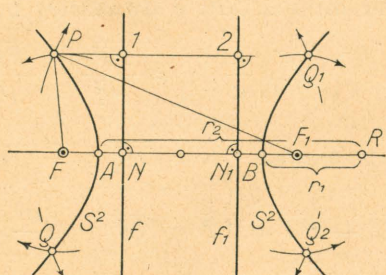
dla elipsy mimośród $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$

„ hiperboli „ $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$

„ paraboli „ $e = 1$.



Ryc. 110.



Ryc. 111.

Niechaj odcinki $\overline{P1}$ i $\overline{P2}$ (ryc. 110) wyrażają odległości dowolnego punktu P elipsy od jej kierownic f i f_1 , odcinki zaś $\overline{PF}$ i $\overline{PF_1}$ odległości owego punktu P od ognisk F i F_1 uważanej elipsy. Wiadomo nam, że odległość $\overline{ON}$ środka O elipsy od kierownicy f wynosi $\frac{a^2}{c}$, a zatem odległość kierownicy f i f_1 eli-

psy równa się $\overline{NN_1} = \overline{ON} + \overline{ON_1} = 2 \cdot \overline{ON} = 2 \frac{a^2}{c}$. Z relacji, odnoszącej się do mimośrodu e , otrzymujemy następujące związki:

$$e = \frac{c}{a}, e = \frac{\overline{PF}}{\overline{P1}} = \frac{\overline{PF_1}}{\overline{P2}}$$

a po uwzględnieniu znanego twierdzenia o proporcjach

$$e = \frac{c}{a}, e = \frac{\overline{PF} + \overline{PF_1}}{\overline{P1} + \overline{P2}} = \frac{\overline{PF} + \overline{PF_1}}{\overline{12}} = \frac{\overline{PF} + \overline{PF_1}}{\overline{NN_1}}$$

$$\text{a zatem: } \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \frac{c}{a} \cdot \overline{NN_1} = \frac{c}{a} \cdot 2 \frac{a^2}{c} = 2a,$$

a ponieważ dla elipsy oś główna $\overline{AB} = 2a$, więc ostatecznie mamy:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{AB}.$$

Skoro odcinek (o długości skończonej) $\overline{PF}$, łączący dowolny punkt P elipsy z jej ogniskiem F , nazwiemy „promieniem ogniskowym“, to dochodzimy do twierdzenia:

Suma promieni ogniskowych dowolnego punktu elipsy jest stała i równa długości osi głównej tej elipsy.

Na ryc. 111 odcinki $\overline{P1}$ i $\overline{P2}$ niechaj wyrażają odległości dowolnego punktu P hiperboli od jej kierownicy f i f_1 , a odcinki $\overline{PF}$ i $\overline{PF_1}$ odległości punktu P od ognisk F i F_1 tej hiperboli. Dla mimośrodu e uważanej hiperboli mamy relacje:

$$e = \frac{c}{a}, e = \frac{\overline{PF}}{\overline{P1}} = \frac{\overline{PF_1}}{\overline{P2}} \quad \text{lub} \quad e = \frac{\overline{PF_1} - \overline{PF}}{\overline{P2} - \overline{P1}},$$

a ponieważ $\overline{ON} = \overline{ON_1} = \frac{a^2}{c}$ i w przypadku $\overline{P2} > \overline{P1}$ różnica

$$\overline{P2} - \overline{P1} = \overline{12} = \overline{NN_1} = 2 \frac{a^2}{c}, \text{ przeto:}$$

$$e = \frac{c}{a}, e = \frac{\overline{PF_1} - \overline{PF}}{\overline{P2} - \overline{P1}} = \frac{\overline{PF_1} - \overline{PF}}{2 \frac{a^2}{c}}.$$

Dochodzimy zatem do równości:

$$\overline{PF_1} - \overline{PF} = 2 \frac{a^2}{c} \cdot e = 2 \frac{a^2}{c} \cdot \frac{c}{a} = 2a,$$

gdzie $2a$ oznacza długość osi głównej $\overline{AB}$ omawianej hiperboli. Jeżeli odcinek (o długości skończonej) $\overline{PF}$, którego punktami

końcowymi są dowolny punkt P i ognisko F hiperboli, nazwiemy „promieniem ogniskowym“, to dowiedliśmy prawdziwości następującego twierdzenia:

Różnica promieni ogniskowych dowolnego punktu hiperboli jest stała i równa długości osi głównej tej hiperboli.

58. Zadania konstrukcyjne. Korzystając z rozważań dwóch ostatnich ustępów, rozwiązać możemy następujące

Zadanie 1: Dane są wierzchołki A i B osi głównej, oraz wierzchołki C i D osi małej elipsy. Wyznaczyć ogniska tej stożkowej.

Rozwiązanie: Uważajmy wierzchołek C (ryc. 104) za środek koła, którego średnica równa się długości $\overline{AB}$ osi głównej. Punkty F i F_1 przecięcia się tego koła z osią AB rozwiązują zadanie.

Zadanie 2: Dane są asymptoty i wierzchołki A, B (osi głównej) hiperboli. Skonstruować ogniska tej hiperboli.

Rozwiązanie: W danym wierzchołku A wykreślimy styczną $a_1 \perp AB$ i wyznaczmy (ryc. 105) punkty 1 i 4 przecięcia się stycznej a_1 z danymi asymptotami. Jeżeli przez O oznaczmy środek hiperboli, to wówczas koło, o środku O i promieniu $\overline{O1} = \overline{O4}$, przecina oś główną AB w ogniskach F i F_1 .

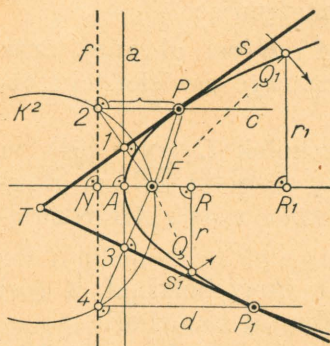
Zadanie 3: Dane są wierzchołki A i B , leżące na osi głównej, oraz ogniska F i F_1 elipsy lub hiperboli. Skonstruować należy poszczególne punkty tej stożkowej.

Rozwiązanie: Na odcinku (o długości skończonej) $\overline{FF_1}$, którego punktami końcowymi są ogniska elipsy (ryc. 110), obierzmy dowolny punkt R . Z ogniska F jako środka zakreślimy koło o promieniu $r_1 = \overline{AR}$, a z ogniska F_1 jako środka zakreślimy drugie koło o promieniu $r_2 = \overline{BR}$. Koła te przetną się w punktach P i Q elipsy, gdyż suma promieni ogniskowych $\overline{PF} + \overline{PF_1} = r_1 + r_2 = \overline{AB}$. Za pośrednictwem owego punktu R wyznaczymy jeszcze dwa dalsze punkty Q_1 i Q_2 omawianej elipsy.

Na ryc. 111 skonstruowaliśmy w analogiczny sposób punkty P, Q, Q_1 i Q_2 hiperboli. Do konstrukcji użyliśmy punktu R , leżącego „zewnątrz“ odcinka (o długości skończonej) $\overline{FF_1}$. Punkty te leżą na hiperboli, gdyż, o ile $\overline{PF_1} > \overline{PF}$, różnica $\overline{PF_1} - \overline{PF} = r_2 - r_1 = \overline{AB}$.

Zadanie 4: Dane są wierzchołek A i ognisko F paraboli. Skonstruować należy kierownicę, poszczególne punkty i poszczególne styczne tej paraboli.

Rozwiązanie: Na osi AF paraboli wyznaczmy (ryc. 112) taki punkt N , aby odcinek (o długości skończonej) $\overline{NA} = \overline{AF}$. Prosta f , wykreślona z punktu N prostopadłe do osi AF , jest oczywiście kierownicą paraboli. Poszczególne punkty $Q, Q_1, \dots$ paraboli otrzymamy, jeśli przez dowolnie na osi AF obrane punkty $R, R_1, \dots$ wykreślimy proste $r, r_1, \dots$ równoległe do kierownicy f , a następnie z ogniska F jako środka zakreślimy koła o promieniach $FQ = \overline{NR}, FQ_1 = \overline{NR_1}, \dots$



Ryc. 112.

Punkt Q , przynależny do prostej r i do pierwszego koła, leży na paraboli, gdyż jego odległość od kierownicy f równa jest odległości punktu Q od ogniska F . Ta sama zależność spełniona jest również i dla dalszych punktów $Q_1, \dots$

W wierzchołku A wykreślimy styczną $a \perp AF$ i obierzmy na niej dowolny punkt 1. Z ostatniego twierdzenia ust. 56-go wynika, że prosta s , przechodząca przez punkt 1 i prostopadła do prostej $1F$, jest styczną

omawianej paraboli. — Przez punkt 2, w którym przecinają się proste $1F$ i f , poprowadźmy prostą $c \perp f$ i wyznaczmy punkt $P = cs$. Otrzymamy wówczas dwa przystające trójkąty prostokątne $(F1P) \cong (21P)$, gdyż $\overline{1P} = \overline{1P}$ i $\overline{1F} = \overline{12}$. Z przystawania wynikają równości: $\overline{PF} = \overline{P2}$ i $\sphericalangle FP1 = \sphericalangle 2P1$. Wnosimy stąd, że element P jest punktem paraboli, a tem samem i punktem styczności stycznej s z parabola.

Zmieniając położenie punktu 1 na stycznej a — skonstruować możemy dalsze styczne omawianej paraboli, a zarazem i ich punkty styczności.

Zadanie 5: Dane są wierzchołek A i ognisko F paraboli, oraz dowolny punkt zewnętrzny T . Przez punkt T wykreślić należy dwie styczne s, s_1 do paraboli i wyznaczyć ich punkty styczności P, P_1 .

Rozwiązanie: Niechaj f będzie kierownicą, a zaś styczną w wierzchołku paraboli. Uważajmy dany punkt T (ryc. 112) za środek koła, o promieniu $\overline{TF}$, i wyznaczmy punkty 2 i 4 przecięcia się tego koła z kierownicą f . Prosta $F2$ i a wyznaczają punkt 1, a prosta $s = T1$ jest styczną paraboli. Podobnie proste $F4$ i a wyznaczają punkt 3, przez który przechodzi druga

styczna $s_1 = T3$ tej paraboli. Punkty styczności P i P_1 otrzymamy w sposób, omówiony w zadaniu poprzednim.

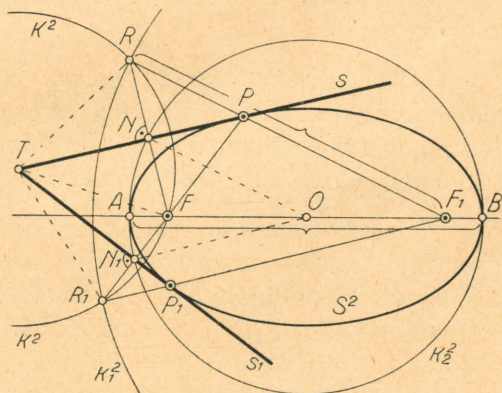
Jeżeli punkt T obierzemy na kierownicy f paraboli i zastosujemy powyższą konstrukcję (por. ryc. 112) — to wówczas proste $F2$ i $F4$ (jako ramiona kąta w półkolu) są wzajemnie prostopadłe. Ponieważ nadto $T1 \perp F2$ i $T3 \perp F4$, przeto owe proste $s = T1$ i $s_1 = T3$ są również prostymi prostopadłymi. A zatem:

Styczne paraboli, przechodzące przez dowolny punkt jej kierownicy, są prostymi wzajemnie prostopadłymi.

Zadanie 6: Dane są ogniska F, F_1 i wierzchołki A, B elipsy lub hiperboli, leżące na jej osi głównej. Przez dowolny punkt zewnętrzny T wykreślić należy styczne s, s_1 i skonstruować ich punkty styczności P, P_1 z daną stożkową.

Rozwiązanie: Dany punkt T (ryc. 113) uważajmy za środek koła K^2 , a odcinek $\overline{TF}$ (przyczem F jest jednym z ognisk elipsy) za promień tego koła. Wykreślmy następnie drugie koło K_1^2 , którego środkiem jest drugie ognisko F_1 danej elipsy a promieniem odcinek $r_1 = \overline{AB}$. Niechaj R i R_1 będą punktami przecięcia się kół K^2 i K_1^2 , a punkty N i N_1 środkami cięciw $\overline{RF}$ i $\overline{R_1F_1}$ koła K^2 . Wówczas proste $s = \overline{TN}$ i $s_1 = \overline{TN_1}$ są stycznymi elipsy, a punkty P i P_1 , przecięcia się tych stycznych z promieniami $\overline{RF_1}$ i $\overline{R_1F_1}$ koła K_1^2 , są szukanymi punktami styczności.

Celem uzasadnienia powyższej konstrukcji, weźmy pod uwagę następujące zależności: Odcinek $\overline{FN} = \overline{NR}$, odcinek zaś $\overline{TF} = \overline{TR}$ (promień koła K^2), więc prosta $s = \overline{TN}$ jest symetralną odcinka $\overline{FR}$. Wnosimy stąd (ryc. 113) o równości odcinków $\overline{PF} = \overline{PR}$. Ponieważ jednak długość osi głównej $\overline{AB} = \overline{F_1R} = \overline{F_1P} + \overline{PR} = \overline{F_1P} + \overline{PF}$,

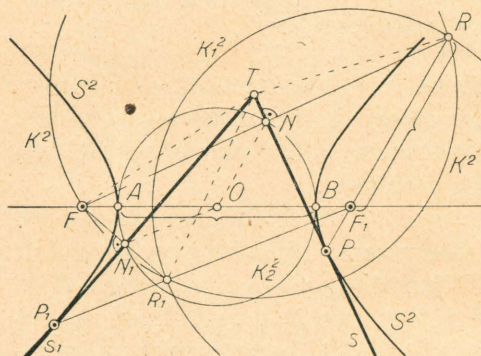


Ryc. 113.

przeto punkt P leży na danej elipsie, a odcinki $\overline{F_1P}$ i $\overline{PF}$ są promieniami ogniskowymi, przechodzącymi przez ów punkt P . Skoro uwzględnimy równości odcinków $\overline{PF} = \overline{PR}$, $\overline{FN} = \overline{NR}$ i $\overline{PN} = \overline{PN}$, to z przystawiania trójkątów $(FPN) \cong (RPN)$ wynika

równość kątów następujących: $\sphericalangle FPN = \sphericalangle RPN$. Prosta s jest zatem symetralną $\sphericalangle FPR$, którego ramionami są proste, łączące punkt P elipsy z jej ogniskami. Innymi słowy prosta s jest (ust. 57) styczną w punkcie P do uważanej elipsy. — Te same zależności stosują się oczywiście do punktu P_1 i do stycznej $s_1 = TN_1$.

Na ryc. 114 podana jest analogiczna konstrukcja stycznych $s = TN$ i $s_1 = TN_1$ do danej hiperboli, oraz konstrukcja punktów styczności P i P_1 owych stycznych. Prosta $s = TN$



Ryc. 114.

jest symetralną odcinka FR , gdyż spełnione są równości $\overline{FN} = \overline{NR}$ i $\overline{TF} = \overline{TR}$. Mamy tedy $\overline{PF} = \overline{RP}$, a ponieważ $\overline{PF_1} < \overline{PR}$, przeto $\overline{AB} = \overline{F_1R} = \overline{PR} - \overline{PF_1} = = \overline{PF} - \overline{PF_1}$. Wnosimy stąd, że punkt P leży na hiperboli. Z równości odcinków $\overline{PF} = \overline{RP}$, $\overline{FN} = \overline{NR}$ i $\overline{PN} = = \overline{PN}$ wynika przystawanie trójkątów $(FPN) \cong$

(RPN) , a zatem i równość $\sphericalangle FPN = \sphericalangle RPN$. Prosta $s = TN$ jest więc styczną hiperboli, c. b. d. w.

Z łatwością dowiedziemy teraz prawdziwości następującego twierdzenia:

Prosta, wykreślona z ogniska elipsy lub hiperboli prostopadłe do jakiejkolwiek stycznej tej stożkowej, przecina się z tą styczną w takim punkcie, którego odległość od środka uważanej stożkowej równa się połowie długości jej osi głównej.

W istocie bowiem środek O elipsy (ryc. 113) lub hiperboli (ryc. 114) połowi odcinek (o długości skończonej) $\overline{FF_1}$, punkt zaś N połowi odcinek $\overline{FR}$. Z podobieństwa trójkątów $(FF_1R) \sim \sim (FON)$ wynika $\overline{F_1R} : \overline{ON} = \overline{FF_1} : \overline{FO}$ lub $\overline{F_1R} : \overline{ON} = 2 \cdot \overline{FO} : \overline{FO} = = 2 : 1$, a ponieważ $\overline{F_1R} = \overline{AB} = 2 \cdot \overline{AO} = 2 \cdot \overline{BO}$, przeto $\overline{ON} = = \overline{AO} = \overline{OB}$. Odcinek $\overline{FN}$ jest prostopadły do stycznej $s = TN$, odcinek zaś $\overline{ON}$ równa się połowie długości osi głównej $\overline{AB}$, c. b. d. o.

Zadanie 7: Dane są ogniska F, F_1 i wierzchołki A, B elipsy lub hiperboli, leżące na jej osi głównej. Skonstruować należy poszczególne styczne tej stożkowej.

Rozwiązanie: Na odcinku $\overline{AB}$ jako na średnicy zakreślmy (ryc. 113 i 114) koło K_2^2 i obierzmy na niem dowolny punkt N . Przez N i ognisko F wykreślmy prostą NF , a następnie przez ów punkt N prostą $s \perp NF$. Uzyskana w ten sposób prosta s jest — na podstawie ostatniego twierdzenia — styczną omawianej stożkowej. Przez punkt N przechodzi jeszcze druga styczna s_2 , która jest prostopadła do prostej NF_1 .

Ważniejsze omyłki.

Str.	16 wiersz	17 od góry	jest: też,	powinno być: też, że
"	24	" 8	" " " lub	" " lub (ryc. 8 i 9)
"	37	" 10	" " " -gości skoń- czonej	" " -gościach skoń- czonych
"	44	" 7	" " " — bc	" " + bc
"	86	" 6	" dołu " e_2	" " e_1
"	131	" 8	" góry " 42	" " 43
"	139	" 12	" dołu " na-	" " nazy-
"	144	" 11	" " " dwa	" " dwa rzeczywiste i
"	152	" 1	" góry " jak	" " oraz
"	155	" 3	" dołu " wy-	" " wyzna-
"	170	" 11	" góry " nie zniekształ- conej	" " nieznieskształco- nej



Skorowidz alfabetyczny.

(Liczby oznaczają stronnice).

Anharmoniczny stosunek 40, 46, 49
Asymptota stożkowej 145, 199

Biegun i biegunowa (stożkowej) 163, 166

Boki przeciwległe czworokąta zupełnego 62, — sześciokąta 125

Brianchona twierdzenie 126, 128

Cecha pęków rzutowych 98, — szeregów rzutowych 67, — szeregu inwolucyjnego 107

Ciągłość szeregu i pęku 17, — układu płaskiego i wiązki 18

Cięciwa stożkowej sprzężona z jej średnicą 195

Cremony definicja rzutowości 28

Czworobok zupełny 20, 62

Czworokąt zupełny 20, 62

Czworokrawędź zupełna 21, 65

Dedekinda pewnik ciągłości 17

Desargues'a twierdzenie 168, 224, 234

Długość osi idealnej (hiperboli) 242

Dwustosunek 36, 40, 42, 46, 49, 54, 55

Element 8

Elementy właściwe i niewłaściwe 4, — zasadnicze 4, — homologiczne 23, 30, — normalne (pęku inwolucyjnego) 113

Elipsa 144

Euklidesa postulat 4

Grupa harmoniczna 57

Harmonicznie sprzężone (elementy) 58

Harmoniczny stosunek 57

Hiperbola 144, — równoboczna 162

Homologiczne elementy 23, 30

Inwolucja 104, — bezwzględna (płaszczyzny) 203

Inwolucyjny szereg punktów 105, — pęk płaszczyzn 106, — pęk prostych 105

Jednoimienne utwory 26

Jednokreślność 29, — inwolucyjna 104

Jednokreślne (utwory) 28

Kąt czworoscienny zupełny 21, 65, — n -ścienny zupełny 21, — nachylenia płaszczyzn 49

Kierownica stożkowej 243

Kierunek 4

Klasa krzywej 139

Kryterjum perspektywiczności 80

Mac Laurina konfiguracja 128

Miara kąta 43, — odcinka 38

Mimośród stożkowej 246

Nie rozdzielające się pary elementów 35

Niewłaściwy (element) 4, 5, 7, — (utwór) 9, 10

N-bok zupełny 20

N-kąt zupełny 20

N-krawędź zupełna 21

Ognisko stożkowej 239

Oś główna (większa) elipsy i hiperboli 201, — idealna hiperboli 201, — mniejsza elipsy 201, — pęku 9, — stożkowej 200, — symetrii prostokątnej (stożkowej) 200

Oznaczenia 4, 8

Pappusa twierdzenie 52

Parabola 144

Para zamienna (elementów) 103

Pary nie rozdzielające się 35, — rozdzielające się 35

Pascala twierdzenie 126, 128

Pasmo stożkowych 232

Pęk cykliczny 193, — kołowy 193, — płaszczyzn 9, — prostych 9, — stożkowych 232

Pęki eliptyczne 77, 114, — hiperboliczne 76, 114, — odwrotnie przystające 93, 94, — odwrotnie równe 93, 94, — paraboliczne 76, 114, — podobne 65, 68, — przystające 91, — równe 91, — wprost przystające (równe) 93, 94

Perspektywiczne (utwory) 14, 22

Perspektywność 13, 14, 22, 23, 26

Pewnik ciągłości 17

Płaszczyzna podstawowa (pęku prostych) 9, — podstawowa (układu płaskiego) 10, — niewłaściwa 7, — rzeczywista 76, — urojona 76, — właściwa 7

Płaszczyzny normalne i — podwójne (pęku inwolucyjnego) 113, — urojone sprzężone 76

Podstawa szeregu 8, — układu płaskiego 10

Podstawowe działania 1, 11

Podział stożkowych 143

Ponceleta zasada dwoistości 19, 21

Potęga pęków rzutowych 95, 98, — szeregów rzutowych 65, 67, — pęku inwolucyjnego 113, — szeregu inwolucyjnego 107

Prawo biegunowej dwoistości 19, 174

Promień ogniskowy (stożkowej) 248, 249

Prosta niewłaściwa 6, — przekątna (czworoboku zupełnego) 62, — rzeczywista 76, 99, — urojona 76, 99, — właściwa 5

Proste izotropowe (płaszczyzny) 204, — normalne i — podwójne (pęku inwolucyjnego) 113, 191, — sieczne (względem stożkowej) 140, 142, — sprzężone (— —) 175, — urojone sprzężone 76, 99, — zewnętrzne (wzgl. stożkowej) 140, 142, — zjednoczone (pęków rzutowych) 26, 76

Przekrój odcinka 17

Przekształcenie dwustosunku 41, 47, 53, — stosunku harmonicznego 59

Przestrzeń 10

Punkt niewłaściwy 5, — przekątny (czworokąta zupełnego) 62, — rzeczywisty 72, — styczności 121, 134, — urojony 72, — właściwy 5

Punkty graniczne (szeregów rzutowych) 66, 70, — kołowe (płaszczyzny) 204, — podwójne (szeregu inwolucyjnego) 107, — sprzężone urojone 72, — sprzężone (względem stożkowej) 175, — wewnętrzne (— —) 140, 142, — wzajemne (szeregów rzutowych) 66, — zbiegu (— —) 66, — zjednoczone (— —) 70, — zewnętrzne (względem stożkowej) 140, 142

Równania rzutowych pęków i szeregów 138

Równość odwrotna 91, — prosta 91

Rozdzielające się pary elementów 35

Różnoimienne utwory 22

Rząd krzywej 139

Rzutowe utwory 28

Rzutowość 27, 29, — inwolucyjna 103, 104, — utworów przystających 89

Spółrzędne Kartezjusza 135, — Plücker'a 135

Średnica stożkowej 193, — idealna (hiperboli) 194, — rzeczywista 194

Średnice sprzężone stożkowej 197

Środek pęku 9, — stożkowej 193, — symetrii (stożkowej) 196, — szeregu inwolucyjnego 107, — wiązki 10

Staudta twierdzenie 179, 180, — twierdzenie podstawowe 78

Steinera konstrukcje 156, — twierdzenie 120, 122, 124

Stopień krzywej 139

Stosunek anharmoniczny 40, 46, 49, — harmoniczny 57, — podwójnego podziału 40, 46, 49, — podziału 36, 38, 42, 45, 49

Stożkowa 119, — niewłaściwa 143, — nieznieskształcona 148, — właściwa 144, — znieskształcona 146, 147

Styczna (stożkowej) 121
Symbole (oznaczenia) 8
Szereg inwolucyjny punktów 105, —
punktów 8
Szeregi eliptyczne, hiperboliczne,
paraboliczne 72, — odwrotnie przy-
stające (równe) 91, — podobne 65,
67, — przystające 68, 90, — rów-
ne 90, — wprost przystające (rów-
ne) 91
Trójbok 20
Trójkąt biegunowy 164, — przekąt-
ny 63
Trójkrawędź 21
Twierdzenia dwoiste 18, — wzajem-
ne 18
Układ płaski 10
Ustawienie 4
Utwory jednoimienne 26, — różno-
imienne 22, — zasadnicze 8, 11
Uzupełnienie szeregu inwolucyjne-
go 109, — utworów rzutowych 83

Wiązka 10
Wierzchołek pęku 9, — stożkowej
201, — wiązki 10
Wierzchołki przeciwległe (czworobo-
ku zupełnego) 62, — sześcioboku
125
Własności geometryczne 1, — mia-
rowe 1, 174, — opisowe 1, 19, 173,
— rzutowe 174
Wyznaczenie rzutowości 79, — rzu-
towości inwolucyjnej 106
Zależność perspektywiczna 13, 26
Zasady biegunowej dwoistości 18,
172
Zbiór 8
Zjednoczone elementy 26
Znak dwustosunku 40, 42, 46, — ką-
ta 43, — odcinka 36, — stosunku
podziału 38, 45, — zwrotu odcin-
ka 36, — zwrotu w pęku 43
Zwrot pęku 42, — prostej 36



BIBLIOTEKA
GŁÓWNA



AKADEMII
GÓRNICZO

15948

Nie
wypożycza się
NZB 4629