



Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica
w Krakowie

Dziedzina nauk ścisłych i przyrodniczych
Dyscyplina: Matematyka

Rozprawa doktorska

Odwrotny problem Radona dla funkcji holomorficznych

Paulina Pierzchała

Promotor rozprawy: dr hab. Piotr Kot, prof. AGH

Praca wykonana: Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica
Wydział Matematyki Stosowanej
Katedra Matematyki Finansowej

Kraków 2023

Spis treści

Streszczenie	2
Abstract	3
Wstęp	5
1. Oznaczenia i definicje	8
2. Odwrotny problem Radona na dysku jednostkowym	10
2.1. Własności operatora Radona na dysku jednostkowym	10
2.2. Rozwiązanie odwrotnego problemu Radona na dysku jednostkowym	17
2.3. Funkcje o rozbieżnym szeregu współczynników Taylora	20
3. Odwrotny problem Radona na obszarach kołowych ściśle wypukłych	30
3.1. Obszary ściśle wypukłe kołowe	30
3.2. Operator Radona na obszarach ściśle wypukłych kołowych	31
3.3. Lakunarne wielomiany K -sumujące	36
3.4. Własności wielomianów K -sumujących	37
3.5. Własności lakunarnych wielomianów K -sumujących	43
3.6. Rozwiązanie odwrotnego problemu Radona	47
3.7. Funkcje o rozbieżnym szeregu współczynników Taylora	52
3.8. Odwrotny problem Radona zadany przez funkcje półciągłe z dołu	61
3.9. Charakteryzacja zbiorów wyjątkowych	65
4. Uogólniony odwrotny problem Radona na dysku jednostkowym	68
4.1. Ścieżki regularne na dysku jednostkowym	68
4.2. Odwrotny problem Radona na dysku jednostkowym zadany przez ścieżki regularne	70
4.3. Odwrotny Problem Radona na obszarach jednospójnych w $\mathbb{C}$	79
5. Odwrotny problem Radona na polidysku w $\mathbb{C}^d$	81
5.1. Ścieżki regularne i operator Radona na polidysku	81
5.2. Rozwiązanie problemu Radona na polidysku w $\mathbb{C}^d$	90
Zakończenie	93
Bibliografia	95

Streszczenie

Przedmiotem rozprawy jest odwrotny problem Radona dla funkcji holomorficzných na pewnych obszarach z jedno- i wielowymiarowej przestrzeni zespolonej. Jest to problem rekonstrukcji funkcji holomorficznej na podstawie wartości całki z tej funkcji po zadanym podzbiorze jej dziedziny. Główną inspiracją do przeprowadzenia powyższych badań jest praca [20], w której rozważany jest odwrotny problem Radona dla funkcji holomorficzných na ograniczonym obszarze ściśle pseudowypukłym $W \subset \mathbb{C}^d$, $d > 1$, gdzie operator Radona zadany jest za pomocą całki po krzywych wyznaczonych przez punkty brzegowe obszaru W i niestycznie przecinających brzeg W . Przedstawione tam rozwiązanie zostało znalezione w η —prawie wszystkich punktach brzegowych obszaru W , gdzie η jest zadaną miarą probabilistyczną na brzegu obszaru W .

Celem rozprawy jest zbadanie rozwiązywalności odwrotnego problemu Radona w pełnej wersji, tj. we wszystkich punktach brzegowych rozważanych obszarów. W przypadku jednowymiarowym szukamy rozwiązania problemu Radona na dysku jednostkowym zadanego za pomocą całek po jego promieniach oraz krzywych spełniających pewne warunki regularności (np. niestyczność do brzegu). Drugie podejście umożliwia nam przeniesienie problemu Radona na ograniczone obszary jednospójne w $\mathbb{C}$. W przypadku wielowymiarowym rozważamy ograniczone obszary ściśle wypukłe kołowe oraz operator Radona zadany jako całka wzdłuż odcinków $z[0, 1]$, gdzie z jest punktem brzegowym tych obszarów. Na koniec dowodzimy rozwiązywalności odwrotnego problemu Radona na polidysku jednostkowym, gdzie całkujemy po krzywych będących iloczynem kartezjańskim wspomnianych krzywych zdefiniowanych na dysku jednostkowym.

Jak pokazano w [20] rozwiązanie odwrotnego problemu Radona dostarcza nam narzędzi do rozwiązywania problemów związanych z charakteryzacją zbiorów wyjątkowych, ważnych z punktu widzenia teorii funkcji wielu zmienných zespolonych. W rozprawie wykorzystujemy ten fakt dla ograniczonych obszarów ściśle wypukłych kołowych. Podajemy również przykłady konstrukcji funkcji analitycznych o rozbieżnym szeregu współczynników Taylora.

Słowa kluczowe

Odwrotny problem Radona, własności brzegowe funkcji holomorficzných, szeregi potęgowe, funkcje o rozbieżnym szeregu współczynników Taylora, funkcje wewnętrzne.

Abstract

This dissertation describes the Radon integral operator and the so called Radon inversion problem for holomorphic functions on some bounded domains in $\mathbb{C}^d$, where $d \geq 1$. In general, the Radon inversion problem is to reconstruct a holomorphic function on the basis of the values of its integrals over some subset of submanifolds of its domain. The main motivation to study the above problem is [20] which deals with the Radon inversion problem on a bounded, strictly pseudoconvex domain $W \subset \mathbb{C}^d$, $d > 1$. There, the Radon operator is defined as an integral over curves given by boundary points of W that crosses the boundary ∂W non-tangentially. In the same paper a solution to the above problem is found η -almost everywhere on ∂W where η is a given probability measure on ∂W .

The main goal of the presented dissertation is to examine solvability of the Radon inversion problem in its full version, i.e. in all boundary points of considered domains. In one-dimensional case we tend to find a solution to the Radon inversion problem for holomorphic functions on the unit disc. There, the Radon operator is defined as an integral over radii of the disc and curves satisfying some regularity conditions (e.g. non-tangential curves). The second approach allows us to state the Radon inversion problem on bounded simply connected domains in $\mathbb{C}$. In multi-dimensional case we consider bounded strictly convex circular domains and the Radon operator given by a line integral over the intervals $z[0, 1]$ where z belongs to the boundary of the domain. Having solved the problem under consideration on the unit disc, we then show its solvability also on the unit polidisc where the integrals are taken over curves that are the Cartesian product of the curves in the unit disc described above.

As it has been shown in [20], solvability of the Radon inversion problem provides significant tools that can be applied in characterizing exceptional sets which are important from the function theory of several complex variables point of view. In the dissertation we use this fact for bounded strictly convex circular domains in $\mathbb{C}^d$, $d > 1$. In addition, we show some examples of constructions of analytic functions with divergent series of Taylor coefficients.

Keywords

Radon inversion problem, boundary behaviour of holomorphic functions, power series, divergent Taylor series, inner functions.

*Serdecznie dziękuję Panu dr. hab. Piotrowi Kot
mojemu promotorowi i opiekunowi naukowemu
za udzielone wsparcie merytoryczne, cierpliwość, czas i motywację
w czasie przygotowywania prac naukowych i rozprawy doktorskiej.
Dziękuję, że przez te kilka ostatnich lat mogłam się uczyć od Pana.
Jestem szczególnie wdzięczna za wielokrotne umożliwianie aktywnego
udziału w konferencjach międzynarodowych i prezentowania wyników
naszej współpracy naukowej, a tym samym poszerzania horyzontów
i zdobywania cennego doświadczenia. Za wszystko z serca dziękuję!*

*Dziękuję moim rodzicom za ich niezachwianą wiarę we mnie
i nieustanne dmuchanie w moje skrzydła.*

Wstęp

W ogólności odwrotny problem Radona polega na rekonstrukcji funkcji spełniającej pewne warunki regularności na podstawie znanych wartości całki z tej funkcji po zadanym podzbiorze (podrozmaitości) jej dziedziny. Wspomniany operator całkowy zwykle nazywamy operatorem Radona lub transformatą Radona od nazwiska J. Radona, który w 1917 roku rozważał problemy rekonstrukcyjne tego typu w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ [28]. Już w tej samej pracy zostało podkreślone, że możliwe są uogólnienia problemu Radona również na przestrzenie $\mathbb{R}^d$, gdzie $d > 2$. W późniejszym okresie problemy rekonstrukcyjne pojawiły się w wielu dziedzinach nauk medycznych i przyrodniczych, zupełnie niezależnie od wyników Radona, które do tamtej pory nie były szeroko znane. Mianowicie, zaczęto się zastanawiać jak uzyskać informacje na temat wewnętrznej struktury obiektu bez konieczności jego rozcinania, a tym samym uszkodzenia obiektu. Przykładowo, rozważano jak odtworzyć informacje o ciele człowieka na podstawie jego zdjęć radiologicznych otrzymanych za pomocą promieni Rentgena. Radon udowodnił następujące twierdzenie: „Obraz obiektu dwuwymiarowego można zrekonstruować na podstawie nieskończonej ilości jego rzutów jednowymiarowych”, które później zostało uogólnione na przypadek wielowymiarowy. Znalezienie rozwiązania problemu Radona, a także opracowanie metod odwracania operatora Radona znalazły wiele zastosowań, głównie w medycynie, astronomii i optyce [3]. W późniejszych latach problem Radona został uogólniony na obszary w innych przestrzeniach¹. Niniejsza rozprawa jest w pełni poświęcona odwrotnemu problemowi Radona dla funkcji holomorficzych w pewnych ograniczonych obszarach z jedno- i wielowymiarowej przestrzeni zespolonej.

Ustalmy $p > 0$. Niech Ω będzie gwiaździstym i ograniczonym obszarem w $\mathbb{C}^d$, gdzie $d \geq 1$, a $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ będzie funkcją holomorficzną w Ω . Wtedy operator całkowy Radona $\mathcal{R}^p$ działający na funkcji f określamy następująco:

$$\mathcal{R}^p(f)(z) := \int_0^1 |f(zt)|^p dt, \quad z \in \partial\Omega.$$

Dalej mając odpowiednio zdefiniowany operator Radona, możemy postawić następujący problem, który w rozprawie będziemy nazywać odwrotnym problemem Radona: Niech będzie dana funkcja $H: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ ściśle dodatnia i ciągła na $\partial\Omega$. Znajdź funkcję $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ taką, że

$$\mathcal{R}^p(f) = H \quad \text{na } \partial\Omega. \tag{1}$$

1. Zainteresowanemu Czytelnikowi polecamy na przykład [7].

Z racji, że powyższy problem jest zadany na brzegu obszaru Ω przez wartości funkcji H ciągłej i ściśle dodatniej, możemy zauważyć pewne podobieństwo rozważanego zagadnienia do nietrywialnego problemu istnienia niestałej funkcji wewnętrznej w ograniczonych obszarach z wielowymiarowej przestrzeni zespolonej. Takie podobieństwo pozwala na zastosowanie podobnych metod wykorzystanych w konstrukcji funkcji wewnętrznej również do rozwiązania odwrotnego problemu Radona. Zostało to zauważone i wykorzystane w pracy [20], gdzie rozważano problem Radona na obszarach ściśle pseudowypukłych. Jednakże otrzymane tam rozwiązanie podobnie jak w przypadku funkcji wewnętrznej zostało znalezione w prawie wszystkich punktach brzegowych rozważanego obszaru. W przypadku wielowymiarowym niestała funkcja wewnętrzna o wszystkich granicach radialnych równych 1 nie istnieje, natomiast funkcja $\mathcal{R}^p(f)$ dana całką jest dobrze określona we wszystkich punktach $\partial\Omega$, co zostało również podkreślone we wspomnianej wyżej pracy [20]. Stąd celem niniejszej rozprawy jest konstrukcja rozwiązania odwrotnego problemu Radona w pełnej wersji, tj. we wszystkich punktach brzegowych zadanych obszarów.

Podobnie jak w wielu pracach poświęconych konstrukcji funkcji wewnętrznych na różnych obszarach ograniczonych w $\mathbb{C}^d$, $d > 1$ [2, 14, 20, 25] wszystkie rozwiązania problemu (1) zaprezentowane w niniejszej rozprawie w różnych obszarach Ω są otrzymywane indukcyjnie za pomocą tzw. generatorów, tj. funkcji holomorficzych w Ω oraz ciągłych w $\bar{\Omega}$ o pewnych szczególnych własnościach. Indukcja przebiega następująco: na początek znajdujemy funkcję, na której działanie operatora Radona $\mathcal{R}^p$ jest ograniczone z góry przez funkcję H oraz z dołu przez dodatnią stałą. Następnie w każdym kroku indukcyjnym dodając generator do funkcji z poprzedniego kroku będziemy przybliżać się do funkcji H o stałą część tego, czego nam jeszcze brakuje od dołu do rozwiązania nie tracąc przy tym ograniczenia z góry.

Rozprawa jest zredagowana w następujący sposób. Po przedstawieniu w rozdziale 1 podstawowych oznaczeń i definicji wykorzystywanych w rozprawie, nasze rozważania rozpoczyna rozdział 2, w którym rozpatrujemy operator Radona na dysku jednostkowym w $\mathbb{C}$. Rozwiązanie uzyskujemy za pomocą całki Schwarza. Podajemy dwie indukcyjne konstrukcje rozwiązania problemu Radona na dysku jednostkowym. Druga z nich dostarczy nam pewne informacje dotyczące współczynników Taylora otrzymanego rozwiązania. Rozdział ten jest w pełni oparty na pracy P. Kota i autorki [23].

W rozdziale 3 rozważamy odwrotny problem Radona na obszarach ściśle wypukłych kołowych w $\mathbb{C}^d$, gdzie $d > 1$. Jest to zasadnicza część rozprawy, która dostarcza nam pewne wyniki z zakresu własności brzegowych funkcji holomorficzych wielu zmiennych. Głównym narzędziem, z którego korzystamy w indukcyjnej konstrukcji rozwiązania problemu Radona są wielomiany jednorodne z pracy [18]. Historycznie są one uogólnieniem wielomianów jednorodnych skonstruowanych przez J. Rylla i P. Wojtaszczyka w 1983r. na sferze jednostkowej w $\mathbb{C}^d$ [34], dzięki którym uzasadniono, że operator identyczności $\text{id}: \mathcal{H}_\infty(\mathbb{B}_d) \longrightarrow \mathcal{H}_1(\mathbb{B}_d)$ między przestrzeniami Hardy’ego na kuli jednostkowej $\mathbb{B}_d$ w $\mathbb{C}^d$ nie jest operatorem zwartym. W późniejszych latach wielomiany jednorodne Rylla-Wojtaszczyka znalazły wiele innych zastosowań, wśród których znalazła się kolejna konstrukcja niestałej funkcji wewnętrznej w kuli jednostkowej w $\mathbb{C}^d$ otrzymana przez A. B. Aleksandrova [2], znacznie prostsza od jego pierwszej konstrukcji [1]. Co więcej, wspomniane wielomiany pozwoliły uzyskać przykłady funkcji analitycznych w $\mathbb{B}_d$ oraz ciągłych na $\bar{\mathbb{B}}_d$, których prawie wszystkie cię-

cia zespolone mają rozbieżny szereg współczynników Taylora [34]. Powyższy rezultat Rylla i Wojtaszczyka był odpowiedzią na tezę postawioną w [29]. Otóż pokazano tam istnienie funkcji o powyższych własnościach w przypadku $d = 2$ oraz $d = 3$ dodając, że dla $d > 3$ z pewnością takie funkcje również istnieją, ale ich konstrukcje wymagałyby innych narzędzi. Tymi narzędziami okazały się wielomiany Rylla-Wojtaszczyka. Później Wojtaszczyk w pracy [35] skonstruował funkcję analityczną w $\mathbb{B}_d$ oraz ciągłą na $\overline{\mathbb{B}_d}$, której prawie wszystkie cięcia zespolone mają rozbieżny szereg współczynników Taylora z dowolną potęgą $s < 2$, tzn. jeśli $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$, gdzie każde f_n jest

wielomianem jednorodnym stopnia n , to $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(\zeta)|^s = \infty$ dla dowolnego $s \in [0, 2)$

oraz prawie wszystkich $\zeta \in \partial\mathbb{B}_d$. Powyższy wynik został również uzyskany, co więcej w elementarny sposób, na ograniczonych obszarach ściśle wypukłych kołowych w $\mathbb{C}^d$ oraz rozszerzony o wszystkie cięcia zespolone w pracy [14]. Ponadto w tej samej pracy zostało pokazane, że powyższe własności może posiadać również funkcja wewnętrzna, której cięcia zespolone również są funkcjami wewnętrznymi w $\mathbb{D}$. W tym rozdziale skonstruujemy rozwiązanie odwrotnego problemu Radona (1) na obszarze ściśle wypukłym kołowym Ω oraz pokażemy jak z jego pomocą możemy otrzymać również funkcję holomorficzną w Ω oraz ciągłą na $\overline{\Omega}$, której wszystkie cięcia zespolone mają rozbieżny szereg współczynników Taylora z dowolną potęgą $s < \min\{1, p\}$. Na koniec podobnie jak w [20] wykorzystamy rozwiązanie odwrotnego problemu Radona do scharakteryzowania zbiorów wyjątkowych² na obszarach ściśle wypukłych kołowych. Treść tego rozdziału w większości bazuje na wspólnej pracy P. Kota i autorki [26].

Następnie w rozdziale 4 uogólniamy wyniki otrzymane na dysku jednostkowym w $\mathbb{C}$. W miejsce promieni koła rozważamy ścieżki spełniające pewne warunki regularności, przykładowo, ścieżki niestycznie przecinające brzeg dysku jednostkowego. Okazuje się, że dla takich ścieżek również możemy skonstruować rozwiązanie problemu Radona. Dodatkowo takie podejście dzięki twierdzeniu Riemanna o odwzorowaniu konforemnym w prosty sposób umożliwia nam postawienie problemu Radona również na ograniczonych obszarach jednospójnych w $\mathbb{C}$.

Kolejnym naturalnym uogólnieniem wyników otrzymanych na dysku jednostkowym w rozdziałach 2 oraz 4 jest rozważenie problemu Radona na polidysku w $\mathbb{C}^d$, gdzie $d > 1$, a zadane ścieżki, po których całkujemy są odpowiednio iloczynem kartezyjskim ścieżek regularnych w $\mathbb{D}$ opisanych w rozdziale 4. Wtedy działanie operatora Radona na funkcjach holomorficznych jest odpowiednio określone na brzegu Shilova polidysku. Taki problem rozwiązujemy w rozdziale 5.

Na koniec podajemy kilka ciekawych naszym zdaniem problemów otwartych, które w naturalny sposób pojawiają się przy rozważaniu problemu Radona.

2. Inne charakteryzacje zbiorów wyjątkowych na obszarach ściśle wypukłych kołowych znajdują się np. w [18], a na kuli jednostkowej np. w [8, 11, 13]

Oznaczenia i definicje

W całej rozprawie będziemy stosować następującą notację. Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych, tj. całkowitych dodatnich, a $\mathbb{R}_+$ będzie zbiorem liczb rzeczywistych dodatnich. Ciało liczb zespolonych będziemy standardowo oznaczać przez $\mathbb{C}$, a $\mathbb{C}^d$, gdzie $d \geq 2$, będziemy rozumieć jako iloczyn kartezjański d kopii zbioru $\mathbb{C}$. Algebraicznie, $\mathbb{C}^d$ jest d -wymiarową przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$, a topologicznie, jest przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^{2d}$ o wymiarze rzeczywistym $2d$. Na tej przestrzeni $2d$ -wymiarową miarę Lebesgue'a będziemy oznaczać przez $\mathcal{L}^{2d}$. Część rzeczywistą liczby $z \in \mathbb{C}$ będziemy oznaczać przez $\operatorname{Re}(z)$, a część urojoną przez $\operatorname{Im}(z)$, analogicznie w przypadku funkcji zespolonych. Standardowo dla przestrzeni wektorowych jeśli $a \in \mathbb{C}$ oraz $W \subset \mathbb{C}^d$, to możemy zdefiniować następujący zbiór $aW := \{az : z \in W\}$. Podobnie dla $z \in \mathbb{C}^d$ oraz $U \subset \mathbb{C}$ określamy zbiór $zU := \{z\omega : \omega \in U\}$. Zapis $V \subset\subset W$ będzie oznaczać, że zbiór V jest zwartym podzbiorem zbioru W .

Przestrzeń $\mathbb{C}^d$ wyposażona w iloczyn skalarny określony jako $\langle z, w \rangle := \sum_{k=1}^d z_k \overline{w}_k$, gdzie $z = (z_1, z_2, \dots, z_d)$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_d) \in \mathbb{C}^d$, z normą indukowaną przez ten iloczyn skalarny $\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$ jest przestrzenią Hilberta. Średnicę zbioru $W \subset \mathbb{C}^d$ oznaczamy jako $\operatorname{diam}(W) := \sup \{\|z - w\| : z, w \in W\}$, a odległość między zbiorami $A, B \subset \mathbb{C}^d$ jako $\operatorname{dist}(A, B) := \inf \{\|z - w\| : z \in A, w \in B\}$.

Kulę w przestrzeni $\mathbb{C}^d$ o środku $\zeta \in \mathbb{C}^d$ i promieniu $r > 0$ definiujemy jako $\mathbb{B}_d(\zeta, r) := \{z \in \mathbb{C}^d : \|z - \zeta\| < r\}$, a polidysk w $\mathbb{C}^d$ o środku $\zeta \in \mathbb{C}^d$ i promieniu $r > 0$ jako $\Delta_d(\zeta, r) := \{z \in \mathbb{C}^d : |z_i - \zeta_i| < r, i = 1, 2, \dots, d\}$. Dla uproszczenia przyjmiemy, że $\mathbb{B}_d := \mathbb{B}_d(0, 1)$ jest kulą jednostkową w $\mathbb{C}^d$, a $\Delta_d := \Delta_d(0, 1)$ jest polidyskiem jednostkowym w $\mathbb{C}^d$. W przypadku jednowymiarowym dysk o środku $a \in \mathbb{C}$ i promieniu $r > 0$ oznaczmy przez $\mathbb{D}(a, r)$, a dysk jednostkowy będziemy oznaczać przez $\mathbb{D} := \mathbb{D}(0, 1) = \mathbb{B}_1 = \Delta_1$. Zgodnie z powyższą notacją $r\mathbb{D} = \mathbb{D}(0, r)$.

Niech $U \subset \mathbb{C}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Przestrzeń funkcji ciągłych na U będziemy oznaczać przez $\mathcal{C}(U)$. Dla $k \in \mathbb{N}$ przez $\mathcal{C}^k(U)$ będziemy rozumieć przestrzeń funkcji k razy różniczkowalnych na U , których k -ta pochodna jest ciągła na U . Przestrzeń funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych na U oznaczamy przez $\mathcal{C}^\infty(U)$, a przestrzeń funkcji holomorficznych w U przez $\mathcal{O}(U)$. Dla $L > 0$ przez $\mathcal{C}_L(U)$ będziemy oznaczać

przestrzeń funkcji ciągłych na U i ograniczonych przez stałą L na U . Normę supremum z funkcji f na zbiorze U będziemy standardowo oznaczać przez $\|f\|_U := \sup_{z \in U} |f(z)|$.

W przypadku, gdy $d > 1$ będziemy korzystać z notacji wielowskaźnikowej. Niech $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$, gdzie $\alpha_i \in \mathbb{N}$ dla $i = 1, 2, \dots, d$, będzie wielowskaźnikiem. Wtedy możemy wprowadzić następujące oznaczenia:

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d, \quad z^\alpha := z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_d^{\alpha_d}, \quad \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial z_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial z_2^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial z_d^{\alpha_d}}.$$

Stosując powyższą notację wielowskaźnikową powiemy, że wielomian Q jest rzędu $k \in \mathbb{N}$, jeśli $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} Q(0) = 0$ dla dowolnego wielowskaźnika α takiego, że $|\alpha| < k$ oraz zapisujemy $\text{ord}(Q) = k$.

Odwrotny problem Radona na dysku jednostkowym

Rozdział ten jest poświęcony odwrotnemu problemowi Radona dla funkcji holomorficznych na dysku jednostkowym $\mathbb{D}$, gdzie operator Radona jest operatorem całkowym zadanym całką z p -tą potęgą po promieniach dysku jednostkowego. Tak jak we wstępie dla ustalonego $p > 0$ definiujemy działanie operatora Radona $\mathcal{R}^p$ na funkcji $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ następująco:

$$\mathcal{R}^p(f)(z) := \int_0^1 |f(zt)|^p dt, \quad z \in \partial\mathbb{D}$$

oraz stawiamy problem: Dla danej funkcji $H: \partial\mathbb{D} \mapsto \mathbb{R}_+$ ściśle dodatniej i ciągłej na $\partial\mathbb{D}$ znajdź funkcję f holomorficzną w $\mathbb{D}$ taką, że

$$\mathcal{R}^p(f) = H \quad \text{na } \partial\mathbb{D}. \quad (2.1)$$

W tym rozdziale pokażemy rozwiązywalność powyższego problemu (2.1) oraz przedstawimy konstrukcję rozwiązania w postaci szeregu wielomianów o odpowiednio dużych stopniach. Następnie w przypadku $p = 2$ modyfikując odpowiednio otrzymaną konstrukcję rozwiązania uzasadnimy, że nasze rozwiązanie może mieć rozbieżny szereg współczynników Taylora.

Niech λ oznacza miarę probabilistyczną na $\partial\mathbb{D}$ oraz niech $s \geq 1$. W tym rozdziale przyjmujemy następujące oznaczenia norm w przestrzeniach $L^s(\mathbb{D}, \mathfrak{L}^2)$ oraz $L^s(\partial\mathbb{D}, \lambda)$:

$$\|f\|_{s, \partial\mathbb{D}} := \left(\int_{\partial\mathbb{D}} |f|^s d\lambda \right)^{\frac{1}{s}}, \quad \|f\|_{s, \mathbb{D}} := \left(\int_{\mathbb{D}} |f|^s d\mathfrak{L}^2 \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Rozdział ten jest w pełni oparty na pracy [23].

2.1. Własności operatora Radona na dysku jednostkowym

Dla $p > 0$ możemy określić następującą przestrzeń metryczną:

$$\mathcal{HR}^p(\mathbb{D}) := \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) : \sup_{z \in \partial\mathbb{D}} \mathcal{R}^p(f)(z) < \infty \right\}$$

zadaną metryką $\rho(f, g) := \sup_{z \in \partial \mathbb{D}} \left(\mathcal{R}^p(f - g)(z) \right)^{\frac{1}{q}}$, gdzie $q = \min\{p, 1\}$. Poniżej pokażemy, że przestrzeń ta jest zupełna, a w dowodzie skorzystamy z następującej własności funkcji holomorficznych w $\mathbb{D}$.

Propozycja 2.1 (Wniosek 3, [6]). *Jeśli f jest funkcją holomorficzną w $\mathbb{D}$, to funkcja $|f|^s$ jest subharmoniczna w $\mathbb{D}$ dla dowolnego $s > 0$. Zachodzi zatem nierówność*

$$|f(z)|^s \leq \frac{1}{\mathfrak{L}^2(\overline{\mathbb{D}}(z, r))} \int_{\mathbb{D}(z, r)} |f|^s d\mathfrak{L}^2 \quad (2.2)$$

dla dowolnych $z \in \mathbb{D}$ oraz $r > 0$ takich, że $\mathbb{D}(z, r) \subset \mathbb{D}$.

Propozycja 2.2. *Niech $p > 0$. Przestrzeń metryczna $(\mathcal{HR}^p(\mathbb{D}), \rho)$ jest zupełna. Jeśli ciąg funkcji $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do funkcji f w przestrzeni $(\mathcal{HR}^p(\mathbb{D}), \rho)$, to ciąg funkcji $\{\mathcal{R}^p(f_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $\mathcal{R}^p(f)$ na $\partial \mathbb{D}$.*

Dowód. Niech $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $\mathcal{HR}^p(\mathbb{D})$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\left(\mathcal{R}^p(f_m - f_n)(z) \right)^{\frac{1}{q}} < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N \quad \forall z \in \partial \mathbb{D},$$

co na mocy definicji operatora $\mathcal{R}^p$ jest równoważne z poniższym

$$\int_0^1 |(f_m - f_n)(zt)|^p dt < \varepsilon^q \quad \forall m, n \geq N \quad \forall z \in \partial \mathbb{D}. \quad (2.3)$$

Niech λ będzie miarą probabilistyczną na $\partial \mathbb{D}$. Wtedy jeśli powyższą nierówność scałkujemy po $\partial \mathbb{D}$, to otrzymamy następującą zależność

$$\int_{\partial \mathbb{D}} \int_0^1 |(f_m - f_n)(zt)|^p dt d\lambda(z) < \varepsilon^q \quad \forall m, n \geq N.$$

Z założenia funkcja $f_m - f_n$ jest holomorficzna w $\mathbb{D}$, a zatem na mocy Propozycji 2.1, funkcja $|f_m - f_n|^p$ jest subharmoniczna. Niech $K \subset \mathbb{D}$ będzie zbiorem zwartym. Weźmy dowolne $w \in K$ oraz $r = \frac{1}{2} \text{dist}(K, \partial \mathbb{D})$ takie, że $\overline{\mathbb{D}}(w, r) \subset \mathbb{D}$. Nierówności (2.2) oraz (2.3) prowadzą do następującego wniosku dla wszystkich $m, n \geq N$

$$\begin{aligned} |(f_m - f_n)(w)|^p &\stackrel{(2.2)}{\leq} \frac{1}{\mathfrak{L}^2(\overline{\mathbb{D}}(w, r))} \int_{\mathbb{D}(w, r)} |f_m - f_n|^p d\mathfrak{L}^2 \\ &\leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}} |f_m - f_n|^p d\mathfrak{L}^2 \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial \mathbb{D}} \int_0^1 |(f_m - f_n)(zt)|^p dt d\lambda(z) \\ &\leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial \mathbb{D}} \int_0^1 |(f_m - f_n)(zt)|^p dt d\lambda(z) \\ &\stackrel{(2.3)}{<} \frac{\varepsilon^q}{r^2}. \end{aligned}$$

W szczególności oznacza to, że

$$\sup_{w \in K} |(f_m - f_n)(w)|^p < \frac{\varepsilon^q}{r^2} \quad \forall m, n \geq N,$$

a stąd z kolei wnioskujemy, że ciąg $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny lokalnie jednostajnie na zwartych podzbiorach $\mathbb{D}$. Niech f będzie funkcją graniczną dla ciągu $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Z faktu, że wszystkie funkcje f_n są holomorficzne natychmiast wynika, że funkcja graniczna f również. Teraz wystarczy pokazać zbieżność ciągu $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ w metryce ρ do funkcji f , tj. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rho} f$, oraz że $f \in \mathcal{HR}^p(\mathbb{D})$. Z zależności (2.3) otrzymujemy, że

$$\int_0^\delta |(f_m - f_n)(zt)|^p dt < \varepsilon^q \quad \forall \delta \in (0, 1) \quad \forall m, n \geq N \quad \forall z \in \partial\mathbb{D}. \quad (2.4)$$

Ciąg $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny lokalnie jednostajnie do funkcji f na zwartych podzbiorach $\mathbb{D}$, więc przechodząc do granicy z m w (2.4) dostajemy, że

$$\int_0^\delta |(f - f_n)(zt)|^p dt \leq \varepsilon^q \quad \forall \delta \in (0, 1) \quad \forall n \geq N \quad \forall z \in \partial\mathbb{D}.$$

Powyższa nierówność zachodzi dla dowolnej $\delta \in (0, 1)$, a zatem również

$$\int_0^1 |(f - f_n)(zt)|^p dt \leq \varepsilon^q \quad \forall n \geq N \quad \forall z \in \partial\mathbb{D},$$

co oznacza, że $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rho} f$. Z nierówności trójkąta natomiast wnioskujemy, że dla wszystkich $n \geq N$

$$\sup_{z \in \partial\mathbb{D}} \left(\mathcal{R}^p(f)(z) \right)^{\frac{1}{q}} \leq \sup_{z \in \partial\mathbb{D}} \left(\mathcal{R}^p(f - f_n)(z) \right)^{\frac{1}{q}} + \sup_{z \in \partial\mathbb{D}} \left(\mathcal{R}^p(f_n)(z) \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

czyli $f \in \mathcal{HR}^p(\mathbb{D})$.

Przejdźmy teraz do drugiej części propozycji. Jeśli $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rho} f$, to $\rho(f, f_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Ponownie stosując nierówność trójkąta otrzymujemy, że

$$\sup_{z \in \partial\mathbb{D}} \left| \left(\mathcal{R}^p(f)(z) \right)^{\frac{1}{q}} - \left(\mathcal{R}^p(f_n)(z) \right)^{\frac{1}{q}} \right| \leq \sup_{z \in \partial\mathbb{D}} \left(\mathcal{R}^p(f - f_n)(z) \right)^{\frac{1}{q}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Stąd dostajemy zbieżność jednostajną $\left(\mathcal{R}^p(f_n) \right)^{\frac{1}{q}} \rightrightarrows \left(\mathcal{R}^p(f) \right)^{\frac{1}{q}}$ na $\partial\mathbb{D}$, gdy $n \rightarrow \infty$, a to z kolei oznacza, że również $\mathcal{R}^p(f_n) \rightrightarrows \mathcal{R}^p(f)$ na $\partial\mathbb{D}$, gdy $n \rightarrow \infty$. $\square$

Z racji, że operator Radona zadany jest za pomocą całki po promieniach dysku jednostkowego, to w naturalny sposób możemy rozważyć funkcję $\mathcal{R}^p(f)$ na $\overline{\mathbb{D}}$, tzn. określić

$$\mathcal{R}^p(f)(z) := \int_0^1 |f(zt)|^p dt \quad \text{dla } z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Wtedy dla rozwiązania f problemu Radona na $\partial\mathbb{D}$ możemy podjąć próbę przedłużenia $\mathcal{R}^p(f)$ do funkcji ciągłej na $\overline{\mathbb{D}}$.

Twierdzenie 2.3. *Niech $p > 0$ oraz $f \in \mathcal{C}(\mathbb{D})$. Wtedy jeśli $\mathcal{R}^p(f) \in \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$, to $\mathcal{R}^p(f) \in \mathcal{C}(\mathbb{D})$.*

Dowód. Rozważmy ciąg funkcji $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ określony następująco:

$$\phi_n(z) := \int_0^{a_n} |f(zt)|^p dt, \quad z \in \partial\mathbb{D},$$

gdzie $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem liczb rzeczywistych rosnącym do 1. Z ciągłości funkcji f w $\mathbb{D}$ wynika, że $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest niemalejącym ciągiem funkcji ciągłych na $\partial\mathbb{D}$. Co więcej, $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(z) = \mathcal{R}^p(f)(z)$ dla każdego $z \in \partial\mathbb{D}$. Stąd jeśli $\mathcal{R}^p(f)$ jest funkcją ciągłą na $\partial\mathbb{D}$, to na mocy twierdzenia Diniego (Twierdzenie 7.13, [32]) ciąg $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $\mathcal{R}^p(f)$ na $\partial\mathbb{D}$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz $z \in \partial\mathbb{D}$. Z powyższych rozważań wnioskujemy, że istnieje $\delta > 0$ taka, że

- $|\mathcal{R}^p(f)(z) - \mathcal{R}^p(f)(w)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ dla dowolnego $w \in \partial\mathbb{D}$ takiego, że $|z - w| \leq 2\delta$
- $\frac{1}{1-\delta} \int_{1-\delta}^1 |f(wt)|^p dt \leq \frac{\varepsilon}{3}$ dla dowolnego $w \in \partial\mathbb{D}$
- $\left(\frac{1}{1-\delta} - 1\right) \int_0^1 |f(wt)|^p dt \leq \frac{\varepsilon}{3}$ dla dowolnego $w \in \partial\mathbb{D}$.

Niech $w \in \mathbb{D}$ będzie takie, że $|z - w| \leq \delta$. Wtedy istnieje $\hat{w} \in \partial\mathbb{D}$ takie, że $w = s\hat{w}$ dla pewnego $s \in (1 - \delta, 1)$. Dalej możemy oszacować

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}^p(f)(\hat{w}) - \mathcal{R}^p(f)(w)| &= \left| \int_0^1 |f(\hat{w}t)|^p dt - \int_0^1 |f(wt)|^p dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 |f(\hat{w}t)|^p dt - \int_0^1 |f(\hat{w}st)|^p dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 |f(\hat{w}t)|^p dt - \frac{1}{s} \int_0^s |f(\hat{w}t)|^p dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 |f(\hat{w}t)|^p dt - \frac{1}{s} \int_0^1 |f(\hat{w}t)|^p dt \right| + \frac{1}{s} \int_s^1 |f(\hat{w}t)|^p dt \\ &\leq \left(\frac{1}{1-\delta} - 1\right) \int_0^1 |f(\hat{w}t)|^p dt + \frac{1}{1-\delta} \int_{1-\delta}^1 |f(\hat{w}t)|^p dt \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Na mocy nierówności trójkąta $|z - \hat{w}| \leq |z - w| + |w - \hat{w}| \leq 2\delta$, a to z kolei prowadzi do następującej konkluzji:

$$|\mathcal{R}^p(f)(z) - \mathcal{R}^p(f)(w)| \leq |\mathcal{R}^p(f)(z) - \mathcal{R}^p(f)(\hat{w})| + |\mathcal{R}^p(f)(\hat{w}) - \mathcal{R}^p(f)(w)| \leq \varepsilon,$$

co było do udowodnienia. $\square$

W następnym lemacie pokażemy, że można skonstruować wielomian taki, że działanie operatora Radona na tym wielomianie przybliża wartości zadanej funkcji ciągłej i ściśle dodatniej na $\partial\mathbb{D}$ oraz wielomian ten przyjmuje wartości dowolnie małe na zwartych podzbiorach $\mathbb{D}$. Dodatkowo możemy dowolnie zwiększyć stopień tego wielomianu nie tracąc przy tym wspomnianych własności. Takie wielomiany będą później generatorami naszego rozwiązania problemu Radona na dysku jednostkowym.

Lemat 2.4. *Ustalmy $p > 0$. Niech H będzie funkcją ciągłą i ściśle dodatnią na $\partial\mathbb{D}$. Dla dowolnych $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, 1)$ oraz zbioru zwartego $K \subset \mathbb{D}$ istnieją $N \in \mathbb{N}$ oraz wielomian Q takie, że $Q \neq 0$ na $\partial\mathbb{D}$ oraz jeżeli $f_n(z) := (np + 1)^{\frac{1}{p}} Q(z) z^n$, to dla $n \geq N$ następujące warunki są spełnione:*

1. $|f_n(z)| \leq \varepsilon_1$ dla $z \in K$
2. $H(z)(1 - \varepsilon_2) < \mathcal{R}^p(f_n)(z) < H(z)(1 + \varepsilon_2)$ dla $z \in \partial\mathbb{D}$.

Dowód. Na mocy twierdzenia aproksymacyjnego Stone'a - Weierstrassa (Twierdzenie 7.32, [32]) istnieje ściśle dodatnia funkcja $v \in \mathcal{C}^\infty(\partial\mathbb{D})$ taka, że

$$v(z)\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{5}\right) \leq H(z) \leq v(z)\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{5}\right) \quad \text{dla } z \in \partial\mathbb{D}. \quad (2.5)$$

Wybermy funkcję u taką, że $v(z) = e^{pu(z)}$ dla $z \in \partial\mathbb{D}$. Skoro funkcja v jest klasy $\mathcal{C}^\infty$, to funkcja u spełnia warunek Höldera. Niech $\mathcal{S}(u)$ oznacza całkę Schwarza z funkcji u . Opierając się na jej własnościach (przykładowo opisanych w rozdziale 6 pracy [4] albo w [15]) wnioskujemy, że funkcja $\mathcal{S}(u)$ jest holomorficzną w $\mathbb{D}$ oraz ciągłą w $\overline{\mathbb{D}}$, a ponadto $\text{Re}(\mathcal{S}(u)) = u$ na $\partial\mathbb{D}$. Stąd istnieje $r \in (0, 1)$ takie, że

$$e^{pu(z)}\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{5}\right) \leq e^{p\text{Re}(\mathcal{S}(u)(tz))} \leq e^{pu(z)}\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{5}\right) \quad \text{dla } t \in [r, 1] \text{ oraz } z \in \partial\mathbb{D}. \quad (2.6)$$

Funkcja $e^{\mathcal{S}(u)}$ jest holomorficzną w $\mathbb{D}$ oraz ciągłą w $\overline{\mathbb{D}}$, a zatem na mocy twierdzenia Mergelyana (Twierdzenie 20.5, [33]) istnieje wielomian Q taki, że $Q(z) \neq 0$ dla $z \in \partial\mathbb{D}$ aproksymujący funkcję $e^{\mathcal{S}(u)}$ w następujący sposób:

$$\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{5}\right)e^{p\text{Re}(\mathcal{S}(u)(z))} \leq |Q(z)|^p \leq \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{5}\right)e^{p\text{Re}(\mathcal{S}(u)(z))} \quad \text{dla } z \in \overline{\mathbb{D}}. \quad (2.7)$$

Niech $M := \sup_{z \in \partial\mathbb{D}} H(z)$. Zasada maksimum implikuje, że

$$\sup_{z \in \overline{\mathbb{D}}} e^{p\text{Re}(\mathcal{S}(u)(z))} = \sup_{z \in \partial\mathbb{D}} e^{pu(z)} = \sup_{z \in \partial\mathbb{D}} v(z) \stackrel{(4.6)}{\leq} \frac{5}{5 - \varepsilon_2} \sup_{z \in \partial\mathbb{D}} H(z) = \frac{5M}{5 - \varepsilon_2}. \quad (2.8)$$

Dalej skoro funkcja H jest ściśle dodatnia na $\partial\mathbb{D}$, to istnieje stała $C > 0$ taka, że $\frac{5M}{5 - \varepsilon_2} \leq CH(z)$ dla $z \in \partial\mathbb{D}$. Wybierzmy $N_1 \in \mathbb{N}$ takie, że $r^{np+1} \leq \frac{\varepsilon_2}{5C}$ dla wszystkich $n \geq N_1$ oraz rozważmy następujący wielomian:

$$f_n(z) := (np + 1)^{\frac{1}{p}} Q(z) z^n, \quad \text{gdzie } n \geq N_1.$$

Wtedy dla $z \in \partial\mathbb{D}$ oraz $n \geq N_1$ powyższe nierówności implikują poniższe oszacowania:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n(zt)|^p dt &\geq (np + 1) \int_r^1 |Q(zt)|^p t^{np} dt \\ &\stackrel{(2.7)}{\geq} \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{5}\right) (np + 1) \int_r^1 e^{p\text{Re}(\mathcal{S}(u)(zt))} t^{np} dt \\ &\stackrel{(2.6)}{\geq} e^{pu(z)} \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{5}\right)^2 (np + 1) \int_r^1 t^{np} dt \\ &\stackrel{(2.5)}{\geq} H(z) \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{5}\right)^3 (1 - r^{np+1}) \\ &\geq H(z) \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{5}\right)^4 \geq H(z)(1 - \varepsilon_2) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f_n(zt)|^p dt &= (np+1) \int_0^1 |Q(zt)|^p t^{np} dt \\
&\stackrel{(2.7)}{\leq} \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{5}\right) (np+1) \int_0^1 e^{p\operatorname{Re}(\mathcal{S}(u)(zt))} t^{np} dt \\
&\stackrel{(2.6)}{\leq} (np+1) \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{5}\right) \left(\frac{5M}{5-\varepsilon_2} \int_0^r t^{np} dt + \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{5}\right) e^{pu(z)} \int_r^1 t^{np} dt \right) \\
&\stackrel{(2.5)}{\leq} \frac{5M}{5-\varepsilon_2} \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{5}\right) r^{np+1} + H(z) \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{5}\right)^3 (1-r^{np+1}) \\
&\stackrel{(2.8)}{\leq} H(z) \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{5}\right) C r^{np+1} + H(z) \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{5}\right)^3 (1-r^{np+1}) \\
&\leq H(z) \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{5}\right) \left(C r^{np+1} + \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{5}\right)^2 \right) \\
&\leq H(z) (1 + \varepsilon_2).
\end{aligned}$$

Teraz, aby wielomian f_n spełniał warunek 1 tezy twierdzenia, wystarczy wybrać odpowiednio dużą liczbę naturalną $N_2 \geq N_1$ taką, że dla wszystkich $n \geq N_2$

$$|f_n(z)| = (np+1)^{\frac{1}{p}} |Q(z)| |z|^n \leq \varepsilon_1 \quad \text{dla } z \in K.$$

Ostatecznie możemy stwierdzić, że wielomian f_n skonstruowany powyżej dla odpowiednio dużych $n \in \mathbb{N}$ spełnia warunki twierdzenia. $\square$

Uwaga 2.5. Warunek 2 w Lemacie 2.4 można zastąpić jednym z poniższych

- 2'. $H(z)(1 - \varepsilon_2) < \mathcal{R}^p(f)(z) < H(z)$ dla $z \in \partial\mathbb{D}$
2''. $H(z) - \varepsilon_2 < \mathcal{R}^p(f)(z) < H(z)$ dla $z \in \partial\mathbb{D}$.

Dowód. By uzyskać warunek 2' wystarczy wziąć $\widetilde{H} := \frac{H}{1 - \widetilde{\varepsilon}_2}$ oraz $\widetilde{\varepsilon}_2 := \frac{\varepsilon_2}{2 - \varepsilon_2}$ w Lemacie 2.4. Natomiast zależność 2'' dostaniemy z nierówności 2' biorąc $\widehat{\varepsilon}_2 := \frac{\widetilde{\varepsilon}_2}{M}$, gdzie $M := \sup_{z \in \partial\mathbb{D}} H(z)$. $\square$

Dalej pokażemy, że wielomiany skonstruowane w powyższym Lemacie 2.4 o odpowiednio dużych stopniach widziane przez operator Radona posiadają tzw. własność prawie dodawania, tzn. dobierając odpowiednio duży stopień wielomianu z Lematu 2.4 możemy uzyskać, że suma operatorów Radona działających na tym wielomianie oraz na pewnej zadanej funkcji ciągłej i ograniczonej na $\overline{\mathbb{D}}$ jest bliski działaniu operatora Radona na sumie tychże funkcji. Własność ta będzie kluczowym elementem naszych konstrukcji rozwiązań problemu Radona.

Lemat 2.6. Ustalmy $p > 0$. Niech $L > 0$ oraz Q będzie wielomianem takim, że $Q(z) \neq 0$ dla $z \in \partial\mathbb{D}$. Dla dowolnego $\varepsilon_3 \in (0, 1)$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq N$ oraz wszystkich funkcji $g \in \mathcal{C}_L(\overline{\mathbb{D}})$ wielomian $f_n(z) = (np+1)^{\frac{1}{p}} Q(z) z^n$ spełnia następujące zależności na $\partial\mathbb{D}$

$$\mathcal{R}^p(f_n) + \mathcal{R}^p(g) - \varepsilon_3 < \mathcal{R}^p(f_n + g) < \mathcal{R}^p(f_n) + \mathcal{R}^p(g) + \varepsilon_3.$$

Dowód. Wybierzmy $k \in \mathbb{N}$ takie, że $k \geq p$. Z nierówności trójkąta wynika, że dla $z \in \partial\mathbb{D}$ prawdziwa jest zależność

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{\frac{p}{k}}(f_n^k + g^k)(z) &= \int_0^1 |(f_n^k + g^k)(zt)|^{\frac{p}{k}} dt \leq \int_0^1 |f_n(zt)|^p dt + \int_0^1 |g(zt)|^p dt \\ &= \mathcal{R}^p(f_n)(z) + \mathcal{R}^p(g)(z).\end{aligned}$$

Niech $\delta \in (0, 1)$ będzie taka, że $\int_\delta^1 |g(zt)|^p dt < \frac{\varepsilon_3}{8}$ dla $z \in \partial\mathbb{D}$. Wtedy z prostego oszacowania

$$\int_0^\delta |f_n(zt)|^p dt \leq (np + 1) \|Q\|_{\mathbb{D}}^p \int_0^\delta t^{np} dt = \|Q\|_{\mathbb{D}}^p \delta^{np+1}$$

dla $z \in \partial\mathbb{D}$, wnioskujemy, że istnieje $N_1 \in \mathbb{N}$ takie, że $\int_0^\delta |f_n(zt)|^p dt < \frac{\varepsilon_3}{8}$ dla wszystkich $n \geq N_1$ oraz $z \in \partial\mathbb{D}$. Stąd, ponownie opierając się na nierówności trójkąta otrzymujemy następującą zależność dla $z \in \partial\mathbb{D}$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{\frac{p}{k}}(f_n^k + g^k)(z) &= \int_0^1 |(f_n^k + g^k)(zt)|^{\frac{p}{k}} dt \\ &= \int_0^\delta |(f_n^k + g^k)(zt)|^{\frac{p}{k}} dt + \int_\delta^1 |(f_n^k + g^k)(zt)|^{\frac{p}{k}} dt \\ &\geq \int_0^\delta |g(zt)|^p dt - \int_0^\delta |f_n(zt)|^p dt + \int_\delta^1 |f_n(zt)|^p dt - \int_\delta^1 |g(zt)|^p dt \\ &= \mathcal{R}^p(f_n)(z) + \mathcal{R}^p(g)(z) - 2 \int_0^\delta |f_n(zt)|^p dt - 2 \int_\delta^1 |g(zt)|^p dt \\ &> \mathcal{R}^p(f_n)(z) + \mathcal{R}^p(g)(z) - \frac{\varepsilon_3}{2}.\end{aligned}$$

Zatem

$$\mathcal{R}^{\frac{p}{k}}(f_n^k + g^k)(z) > \mathcal{R}^p(f_n)(z) + \mathcal{R}^p(g)(z) - \frac{\varepsilon_3}{2}, \quad \text{dla } z \in \partial\mathbb{D}, \quad k \geq p. \quad (2.9)$$

Jeżeli $0 < p \leq 1$, to wystarczy przyjąć $k = 1$, by uzyskać tęzę lematu. W przeciwnym przypadku, gdy $p > 1$ potrzebujemy dodatkowych informacji. Oznaczmy $\mathcal{I}_k^p(f_n, g)(z) := \int_0^1 \left| \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} (f_n(zt))^m (g(zt))^{k-m} \right|^{\frac{p}{k}} dt$, gdzie $z \in \partial\mathbb{D}$ i zauważmy, że $\mathcal{I}_k^p(f_n, g)(z)$ może być dowolnie małe, ponieważ

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_k^p(f_n, g)(z) &\leq \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m}^{\frac{p}{k}} \int_0^1 |f_n(zt)|^{\frac{mp}{k}} |g(zt)|^{\frac{(k-m)p}{k}} dt \\ &\leq \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m}^{\frac{p}{k}} \|Q\|_{\mathbb{D}}^{\frac{mp}{k}} L^{\frac{p(k-m)}{k}} (np + 1)^{\frac{m}{k}} \int_0^1 t^{\frac{npm}{k}} dt \\ &= \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m}^{\frac{p}{k}} \|Q\|_{\mathbb{D}}^{\frac{mp}{k}} L^{\frac{p(k-m)}{k}} \frac{k(np + 1)^{\frac{m}{k}}}{nmp + k} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

Stąd istnieje $N_2 \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathcal{I}_k^p(f_n, g)(z) < \frac{\varepsilon_3}{2}$ dla $n \geq N_2$ oraz $z \in \partial\mathbb{D}$. Dlatego jeśli $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ dochodzimy do następującej konkluzji dla $z \in \partial\mathbb{D}$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^p(f_n + g)(z) &= \int_0^1 |(f_n + g)(zt)|^p dt \\ &= \int_0^1 \left(|(f_n + g)(zt)|^k \right)^{\frac{p}{k}} dt \\ &= \int_0^1 \left| \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (f_n(zt))^m (g(zt))^{k-m} \right|^{\frac{p}{k}} dt \\ &\leq \int_0^1 |f_n(zt)|^p dt + \int_0^1 |g(zt)|^p dt + \mathcal{I}_k^p(f_n, g)(z) \\ &< \mathcal{R}^p(f_n)(z) + \mathcal{R}^p(g)(z) + \frac{\varepsilon_3}{2} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^p(f_n + g)(z) &= \int_0^1 |(f_n + g)(zt)|^p dt \\ &= \int_0^1 \left| \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (f_n(zt))^m (g(zt))^{k-m} \right|^{\frac{p}{k}} dt \\ &\geq \int_0^1 |(f_n^k + g^k)(zt)|^{\frac{p}{k}} dt - \mathcal{I}_k^p(f_n, g)(z) \\ &\stackrel{(2.9)}{>} \mathcal{R}^p(f_n)(z) + \mathcal{R}^p(g)(z) - \varepsilon_3, \end{aligned}$$

co należało udowodnić. □

2.2. Rozwiązanie odwrotnego problemu Radona na dysku jednostkowym

W poprzedniej sekcji omówiliśmy istnienie pewnych wielomianów o odpowiednio wysokich stopniach, które widziane przez operator Radona przybliżają wartości zadanej funkcji ciągłej i ściśle dodatniej na $\partial\mathbb{D}$ oraz mają własność prawie dodawania. Dzięki wspomnianym własnościom w tej sekcji będziemy mogli skonstruować rozwiązanie odwrotnego problemu Radona za pomocą tychże wielomianów. Będziemy postępować indukcyjnie. Najpierw skonstruujemy wielomian, na którym działanie operatora Radona aproksymuje zadaną funkcję z pewną dokładnością. Dalej będziemy chcieli przybliżyć się do rozwiązania, więc korzystając z tego samego lematu skonstruujemy wielomian, który aproksymuje to, czego nam brakuje do rozwiązania, itd. Dzięki własności prawie dodawania będziemy mogli w każdym kroku dodawać z pewnym błędem wielomiany pod znakiem operatora Radona. Odpowiednio kontrolując błędy z każdego kroku otrzymamy rozwiązanie problemu w postaci szeregu wielomianów. Holomorficzność rozwiązania będzie natomiast zapewniona przez zagwarantowanie odpowiednio małych wartości wielomianów na zwartych podzbiorach $\mathbb{D}$.

Twierdzenie 2.7. *Ustalmy $p > 0$. Niech G będzie ściśle dodatnią funkcją ciągłą na $\partial\mathbb{D}$. Istnieje funkcja $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ taka, że*

$$\mathcal{R}^p(f)(z) = G(z) \quad \text{dla } z \in \partial\mathbb{D}.$$

Co więcej, $\mathcal{R}^p(f) \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$.

Dowód. Z założenia, że G jest ściśle dodatnia na $\partial\mathbb{D}$ wynika, że istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $G > 2^{-m}$ na $\partial\mathbb{D}$. Iteracyjnie będziemy stosować Lemat 2.4 oraz Lemat 2.6 do skonstruowania ciągu wielomianów $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oraz rosnącego ciągu liczbowego $\{r_n\}_{n=0}^\infty \subset (0, 1)$, dla których zachodzą następujące zależności:

- a) $|f_n(z)| \leq 2^{-n}$ dla $z \in r_{n-1}\overline{\mathbb{D}}$, $n \in \mathbb{N}$
- b) $\mathcal{R}^p\left(\sum_{k=1}^n f_k\right)(z) < G(z) - 2^{-(m+n+2)}$ dla $z \in \partial\mathbb{D}$, $n \in \mathbb{N}$
- c) $\int_0^{r_n} \left|\sum_{k=1}^n f_k(zt)\right|^p dt > G(z) - 2^{-(m+n)}$ dla $z \in \partial\mathbb{D}$, $n \in \mathbb{N}$.

Na początek wybieramy $r_0 = \frac{1}{2}$ i z Lematu 2.4 zastosowanego do zbioru danych

$$H := G - 2^{-(m+3)}, \quad K := r_0\overline{\mathbb{D}}, \quad \varepsilon_1 := \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_2 := 2^{-(m+2)}$$

otrzymujemy wielomian f_1 taki, że

- $|f_1(z)| \leq \frac{1}{2}$ dla $z \in r_0\overline{\mathbb{D}}$
- $G(z) - 2^{-(m+1)} < \mathcal{R}^p(f_1)(z) < G(z) - 2^{-(m+3)}$ dla $z \in \partial\mathbb{D}$.

Następnie do wielomianu f_1 dobieramy liczbę $r_1 \in (0, 1)$ taką, że $r_1 \geq \frac{1+r_0}{2}$ oraz $\int_0^{r_1} |f_1(z)|^p dt > G(z) - 2^{-(m+1)}$ dla $z \in \partial\mathbb{D}$.

Postępując indukcyjnie założymy, że liczby $r_0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots r_n < 1$ oraz wielomiany $f_1, f_2, \dots, f_n$ o własnościach a)–c) zostały już znalezione. Stosując Lemat 2.4 oraz Lemat 2.6 do danych:

$$H := G - \mathcal{R}^p\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) - 2^{-(m+n+2)}, \quad g := \sum_{k=1}^n f_k, \quad K := r_n\overline{\mathbb{D}},$$

$$\varepsilon_1 := 2^{-(n+1)}, \quad \varepsilon_2 := 2^{-(m+n+3)}, \quad \varepsilon_3 := 2^{-(m+n+3)}$$

dostajemy kolejny wielomian f_{n+1} taki, że zachodzą następujące warunki:

- $|f_{n+1}(z)| \leq 2^{-(n+1)}$ dla $z \in r_n\overline{\mathbb{D}}$
- $\mathcal{R}^p(f_{n+1}) > G - \mathcal{R}^p\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) - 2^{-(m+n+2)} - 2^{-(m+n+3)}$ na $\partial\mathbb{D}$
- $\mathcal{R}^p(f_{n+1}) < G - \mathcal{R}^p\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) - 2^{-(m+n+2)}$ na $\partial\mathbb{D}$
- $\mathcal{R}^p\left(\sum_{k=1}^{n+1} f_k\right) > \mathcal{R}^p(f_{n+1}) + \mathcal{R}^p\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) - 2^{-(m+n+3)}$ na $\partial\mathbb{D}$
- $\mathcal{R}^p\left(\sum_{k=1}^{n+1} f_k\right) < \mathcal{R}^p(f_{n+1}) + \mathcal{R}^p\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) + 2^{-(m+n+3)}$ na $\partial\mathbb{D}$.

Powyższe implikuje, że na $\partial\mathbb{D}$ dostajemy następujące oszacowania:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^p\left(\sum_{k=1}^{n+1} f_k\right) &< \mathcal{R}^p\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) + \mathcal{R}^p(f_{n+1}) + 2^{-(m+n+3)} \\ &< \mathcal{R}^p\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) + G - \mathcal{R}^p\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) - 2^{-(m+n+2)} + 2^{-(m+n+3)} \\ &= G - 2^{-(m+n+3)}\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^p\left(\sum_{k=1}^{n+1} f_k\right) &> \mathcal{R}^p\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) + \mathcal{R}^p(f_{n+1}) - 2^{-(m+n+3)} \\ &> \mathcal{R}^p\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) + G - \mathcal{R}^p\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) - 2^{-(m+n+1)} \\ &= G - 2^{-(m+n+1)}.\end{aligned}$$

Dalej wybieramy $r_{n+1} \in \left(\frac{1+r_n}{2}, 1\right)$ takie, że $\int_0^{r_{n+1}} \left|\sum_{k=1}^{n+1} f_k(zt)\right|^p dt > G(z) - 2^{-(m+n+1)}$ dla $z \in \partial\mathbb{D}$ i tym sposobem indukcyjnie otrzymaliśmy ciąg wielomianów $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oraz ciąg liczbowy $\{r_n\}_{n=0}^\infty$ o pożądanych własnościach.

Na mocy warunku a), ciąg funkcji $\left\{\sum_{k=1}^n f_k\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f := \sum_{k=1}^\infty f_k$ na zwartych podzbiorach $\mathbb{D}$, a tym samym $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$. Dalej zauważmy, że dla wszystkich $r \in (0, 1)$ oraz $z \in \partial\mathbb{D}$ mamy zależność:

$$\begin{aligned}\int_0^r |f(zt)|^p dt &= \int_0^r \lim_{n \rightarrow \infty} \left|\sum_{k=1}^n f_k(zt)\right|^p dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^r \left|\sum_{k=1}^n f_k(zt)\right|^p dt \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(G(z) - 2^{-(m+n+2)}\right) \\ &= G(z).\end{aligned}$$

Stąd $\mathcal{R}^p(f)(z) \leq G(z)$ dla $z \in \partial\mathbb{D}$.

Niech $q = \max\{p, 1\}$. Dla wszystkich $z \in \partial\mathbb{D}$ na mocy warunków a) oraz c) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{R}^p(f)(z)\right)^{\frac{1}{q}} &\geq \left(\int_0^{r_n} \left|\sum_{k=1}^\infty f_k(zt)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\geq \left(\int_0^{r_n} \left|\sum_{k=1}^n f_k(zt)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{q}} - \left(\int_0^{r_n} \left|\sum_{k=n+1}^\infty f_k(zt)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ &> \left(G(z) - 2^{-(m+n)}\right)^{\frac{1}{q}} - \left(\sum_{k=n+1}^\infty 2^{-k}\right)^{\frac{p}{q}} \\ &= \left(G(z) - 2^{-(m+n)}\right)^{\frac{1}{q}} - 2^{\frac{-np}{q}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(G(z)\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Zatem $\mathcal{R}^p(f)(z) \geq G(z)$ dla wszystkich $z \in \partial\mathbb{D}$.

Powyższe nierówności prowadzą do następującej konkluzji:

$$\mathcal{R}^p(f) = G \text{ na } \partial\mathbb{D}.$$

Dodatkowo na mocy Twierdzenia 2.3 wnioskujemy, że $\mathcal{R}^p(f) \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$, a to kończy dowód. $\square$

2.3. Funkcje o rozbieżnym szeregu współczynników Taylora

Konstruując wielomiany, które wykorzystaliśmy w dowodzie rozwiązywalności odwrotnego problemu Radona dla funkcji holomorficznych w $\mathbb{D}$ wspomnieliśmy, że zawsze możemy odpowiednio zwiększyć stopień wielomianów, które były generatorami rozwiązania, nie tracąc ich własności omówionych w Lemacie 2.4 oraz Lemacie 2.6. Tym sposobem możemy zapewnić sobie, aby wielomiany konstruowane w każdym kroku indukcyjnym mogły być wzajemnie ortogonalne. Co więcej, jeśli założymy, że rozwiązanie problemu Radona z $p = 2$ jest postaci $f := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, to możemy dokonać następującej obserwacji:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{2n+1} = \int_{\partial\mathbb{D}} \int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n t^n \right|^2 dt d\lambda(z) = \|\mathcal{R}^2(f)\|_{1,\partial\mathbb{D}} < \infty,$$

ponieważ $\mathcal{R}^2(f)$ jest funkcją ciągłą na $\partial\mathbb{D}$. Stąd mając zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{2n+1}$

możemy zastanowić się co dzieje się z szeregiem $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|a_n|^2}{2n+1} \right)^s$, gdzie $s \in [0, 1)$. Okazuje się, że można skonstruować rozwiązanie problemu Radona o rozbieżnym szeregu współczynników Taylora, tzn. takie, by szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|a_n|^2}{2n+1} \right)^s$ był rozbieżny dla dowolnego $s \in [0, 1)$. W konstrukcji rozwiązania problemu Radona o rozbieżnym szeregu współczynników Taylora będziemy korzystać z poniższego, dość technicznego lematu.

Lemat 2.8. *Ustalmy $p > 0$. Niech $h \in \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$ będzie ściśle dodatnią funkcją na $\partial\mathbb{D}$, $\phi \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$, $M \in \mathbb{N}$ oraz $a, \theta, \varepsilon \in (0, 1)$. Wtedy istnieją $N \in \mathbb{N}$ oraz ciąg wielomianów ortogonalnych $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ o następujących własnościach na $\partial\mathbb{D}$:*

- (s0) $\text{ord}(P_k) > M$, $k = 0, 1, \dots$
- (s1) $\mathcal{R}^2(P_k) < ah$, $k = 0, 1, \dots$
- (s2) $\mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^k P_j\right) < h$, $k = 0, 1, \dots$
- (s3) $\mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^k P_j\right) > \frac{1}{2}a\left(h - \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^{k-1} P_j\right)\right) + \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^{k-1} P_j\right)$, $k = 1, 2, \dots$
- (s4) $\left|\mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^k P_j\right) - \sum_{j=0}^k \mathcal{R}^2(P_j)\right| < \varepsilon$, $k = 1, 2, \dots$
- (s5) $\left|\mathcal{R}^2\left(\phi + \sum_{j=0}^k P_j\right) - \sum_{j=0}^k \mathcal{R}^2(P_j) - \mathcal{R}^2(\phi)\right| < \varepsilon$, $k = 1, 2, \dots$

$$(s6) \quad \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^N P_j\right) > \theta h.$$

Dowód. Na początek zauważmy, że $P_0 \equiv 0$ spełnia warunki (s1) – (s2). Dalej stosując Lemat 2.4 oraz Lemat 2.6 do danych

$$H := \frac{5}{6}ah, \quad g := \phi, \quad \varepsilon_2 := \frac{1}{5}, \quad \varepsilon_3 := \varepsilon$$

możemy otrzymać wielomian postaci $P_1(z) := (2n_1 + 1)^{\frac{1}{2}} Q_1(z) z^{n_1}$, gdzie $n_1 > M$ oraz Q_1 jest wielomianem takim, że $Q_1 \neq 0$ na $\partial\mathbb{D}$, o następujących własnościach:

- $\frac{1}{2}ah < \frac{4}{5}H < \mathcal{R}^2(P_1) < H < ah$ na $\partial\mathbb{D}$
- $\mathcal{R}^2(P_1) + \mathcal{R}^2(\phi) - \varepsilon < \mathcal{R}^2(\phi + P_1) < \mathcal{R}^2(P_1) + \mathcal{R}^2(\phi) - \varepsilon$ na $\partial\mathbb{D}$.

Natychmiast powyższe nierówności implikują warunki (s0) – (s5).

Następnie postępujemy indukcyjnie: Przypuśćmy, że wielomiany $P_0, P_1, \dots, P_k$ o własnościach (s0) – (s5) zostały już skonstruowane. Na mocy (s4) oraz (s5) istnieją stałe $\rho_1, \rho_2 \in (0, 1)$ takie, że

- $\left| \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^k P_j\right) - \sum_{j=0}^k \mathcal{R}^2(P_j) \right| < \rho_1 < \varepsilon$ na $\partial\mathbb{D}$
- $\left| \mathcal{R}^2\left(\phi + \sum_{j=0}^k P_j\right) - \sum_{j=0}^k \mathcal{R}^2(P_j) - \mathcal{R}^2(\phi) \right| < \rho_2 < \varepsilon$ na $\partial\mathbb{D}$.

Wybermy $N_1 \in \mathbb{N}$ takie, że $N_1 > \deg(P_k)$. Ponowne zastosowanie Lematu 2.4 oraz Lematu 2.6 tym razem do danych

$$H := \frac{5}{6}a\left(h - \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^k P_j\right)\right), \quad g_1 := \sum_{j=0}^k P_j, \quad g_2 := \sum_{j=0}^k P_j + \phi, \quad \varepsilon_2 := \frac{1}{5},$$

$$\varepsilon_3 := \min \left\{ \frac{1}{6} \inf_{z \in \partial\mathbb{D}} a\left(h(z) - \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^k P_j\right)(z)\right), \varepsilon - \rho_1, \varepsilon - \rho_2 \right\}$$

pozwała nam skonstruować wielomian $P_{k+1}(z) := (2n_{k+1} + 1)^{\frac{1}{2}} Q_{k+1}(z) z^{n_{k+1}}$, gdzie $n_{k+1} \geq N_1$ oraz $Q_{k+1} \neq 0$ na $\partial\mathbb{D}$. Stąd wielomian P_{k+1} jest ortogonalny do pozostałych wielomianów $P_0, P_1, \dots, P_k$. Ponadto zachodzą następujące zależności na $\partial\mathbb{D}$:

- a) $(1 - \varepsilon_2)H < \mathcal{R}^2(P_{k+1}) < H$
- b) $\mathcal{R}^2(g_1) + \mathcal{R}^2(P_{k+1}) - \varepsilon_3 < \mathcal{R}^2(g_1 + P_{k+1}) < \mathcal{R}^2(g_1) + \mathcal{R}^2(P_{k+1}) + \varepsilon_3$
- c) $\mathcal{R}^2(g_2) + \mathcal{R}^2(P_{k+1}) - \varepsilon_3 < \mathcal{R}^2(g_2 + P_{k+1}) < \mathcal{R}^2(g_2) + \mathcal{R}^2(P_{k+1}) + \varepsilon_3.$

Zauważmy, że powyższe nierówności na $\partial\mathbb{D}$ dają nam warunki (s2)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^{k+1} P_j\right) &< \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^k P_j\right) + \mathcal{R}^2(P_{k+1}) + \varepsilon_3 \\ &< \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^k P_j\right) + \frac{5}{6}a\left(h - \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^k P_j\right)\right) + \frac{1}{6}a\left(h - \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^k P_j\right)\right) \\ &\leq h \end{aligned}$$

oraz (s3)

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^{k+1} P_j\right) &> \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^k P_j\right) + \mathcal{R}^2(P_{k+1}) - \varepsilon_3 \\
&> \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^k P_j\right) + \frac{2}{3}a\left(h - \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^k P_j\right)\right) - \frac{1}{6}a\left(h - \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^k P_j\right)\right) \\
&\geq \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^k P_j\right) + \frac{1}{2}a\left(h - \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^k P_j\right)\right).
\end{aligned}$$

Co więcej, własności a) – c) połączone z założeniami indukcyjnymi prowadzą do uzyskania warunków (s4) – (s5), ponieważ na $\partial\mathbb{D}$ mamy następujące szacowania:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^{k+1} P_j\right) &< \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^k P_j\right) + \mathcal{R}^2(P_{k+1}) + \varepsilon_3 < \sum_{j=0}^{k+1} \mathcal{R}^2(P_j) + \rho_1 + \varepsilon_3 \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \mathcal{R}^2(P_j) + \varepsilon
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^{k+1} P_j + \phi\right) &< \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^k P_j + \phi\right) + \mathcal{R}^2(P_{k+1}) + \varepsilon_3 \\
&< \mathcal{R}^2(\phi) + \sum_{j=0}^{k+1} \mathcal{R}^2(P_j) + \rho_2 + \varepsilon_3 \\
&< \mathcal{R}^2(\phi) + \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^{k+1} P_j\right) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Podobnie otrzymujemy ograniczenie z drugiej strony: $\mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^{k+1} P_j\right) > \sum_{j=0}^{k+1} \mathcal{R}^2(P_j) - \varepsilon$

oraz $\mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^{k+1} P_j + \phi\right) > \mathcal{R}^2(\phi) + \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^{k+1} P_j\right) - \varepsilon$ na $\partial\mathbb{D}$, a to kończy indukcję.

Zauważmy, że zależności (s2) oraz (s3) implikują, że dla $z \in \partial\mathbb{D}$ mamy zbieżność $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^n P_j\right)(z) = h(z)$ oraz $\left\{\mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^n P_j\right)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest rosnącym ciągiem funkcyj-

nym. Stąd na mocy twierdzenia Diniego (Twierdzenie 7.13, [32]) ciąg $\left\{\mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^n P_j\right)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji h na $\partial\mathbb{D}$. Z tej zbieżności wynika, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^N P_j\right) > \theta h \text{ na } \partial\mathbb{D}.$$

Otrzymaliśmy zatem ciąg wielomianów spełniających wszystkie warunki (s0) – (s6). $\square$

Korzystając z powyższego lematu przedstawimy dwie konstrukcje funkcji holomorficznych w $\mathbb{D}$ o rozbieżnym szeregu Taylora z dowolną potęgą $s \in [0, 1)$. Pierwszą z nich będzie funkcja, dla której działanie na niej operatora $\mathcal{R}^2$ jest funkcją ciągłą w $\overline{\mathbb{D}}$,

a następnie w kolejnym twierdzeniu dodatkowo zapewnimy, by konstruowana funkcja była również rozwiązaniem odwrotnego problemu Radona z $p = 2$ oraz zadaną funkcją ciągłą i ściśle dodatnią na $\partial\mathbb{D}$. Oczywiście Twierdzenie 2.9 jest uproszczoną wersją Twierdzenia 2.10, stąd konstrukcja również jest prostsza, skorzystamy bowiem wyłącznie z warunków (s1), (s2) oraz (s6) Lematu 2.8. Twierdzenie to stanowi więc wprowadzenie do głównego wyniku tego rozdziału.

Twierdzenie 2.9. *Istnieje funkcja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ holomorphyzna w $\mathbb{D}$ taka, że*

1. $\mathcal{R}^2(f) \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|a_n|^2}{2n+1} \right)^s = \infty, \quad s \in [0, 1).$

Dowód. Dla każdego $j \in \mathbb{N}$ zastosujemy Lemat 2.8 do danych $\phi \equiv 0$, $h \equiv 1$, $a := 2^{-j}$, $\theta := \frac{1}{2}$, by otrzymać $N_j \in \mathbb{N}$ oraz ciąg wielomianów ortogonalnych $\{P_{jk}\}_{0 \leq k \leq N_j, j \in \mathbb{N}}$ takich, że na $\partial\mathbb{D}$ zachodzą następujące zależności:

- a) $\mathcal{R}^2(P_{jk}) < 2^{-j}, \quad k = 0, \dots, N_j$
- b) $\frac{1}{2} < \mathcal{R}^2\left(\sum_{k=0}^{N_j} P_{jk}\right) < 1.$

Dalej zauważmy, że jeśli $n > m$, to

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \sum_{k=0}^{N_j} P_{jk} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^2} \sum_{k=0}^{N_j} P_{jk}\right) \right\|_{\partial\mathbb{D}}^{\frac{1}{2}} &= \left\| \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=m+1}^n \frac{1}{j^2} \sum_{k=0}^{N_j} P_{jk}\right) \right\|_{\partial\mathbb{D}}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left\| \sum_{j=m+1}^n \frac{1}{j^2} \left(\mathcal{R}^2\left(\sum_{k=0}^{N_j} P_{jk}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\partial\mathbb{D}} \\ &\leq \sum_{j=m+1}^n \frac{1}{j^2} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że $\left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \sum_{k=0}^{N_j} P_{jk} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $\mathcal{HR}^2(\mathbb{D})$,

a zatem na mocy Propozycji 2.2 ciąg ten jest zbieżny w $\mathcal{HR}^2(\mathbb{D})$. Możemy więc zdefiniować następującą funkcję $f := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \sum_{k=0}^{N_j} P_{jk}$, która jest holomorphyzna w $\mathbb{D}$.

Dla uproszczenia oznaczmy na chwilę sumę częściową $\mathcal{P}_n := \mathcal{R}^2\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \sum_{k=0}^{N_j} P_{jk}\right)$. Jeśli $n > m$, to na $\partial\mathbb{D}$ zachodzi

$$\begin{aligned} \left| (\mathcal{P}_n)^{\frac{1}{2}} - (\mathcal{P}_m)^{\frac{1}{2}} \right| &= \left| \left(\mathcal{R}^2\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \sum_{k=0}^{N_j} P_{jk}\right) \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\mathcal{R}^2\left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{j^2} \sum_{k=0}^{N_j} P_{jk}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \right| \\ &\leq \left(\mathcal{R}^2\left(\sum_{j=m+1}^n \frac{1}{j^2} \sum_{k=0}^{N_j} P_{jk}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{j=m+1}^n \left(\mathcal{R}^2\left(\frac{1}{j^2} \sum_{k=0}^{N_j} P_{jk}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{j=m+1}^n \frac{1}{j^2} \left(\mathcal{R}^2\left(\sum_{k=0}^{N_j} P_{jk}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{j=m+1}^n \frac{1}{j^2} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Stąd istnieje stała $C > 0$ taka, że $\sup_{z \in \partial \mathbb{D}} |\mathcal{P}_n(z)| < C$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, a to prowadzi do następującej zależności:

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \partial \mathbb{D}} |\mathcal{P}_n(z) - \mathcal{P}_m(z)| &= \sup_{z \in \partial \mathbb{D}} \left| \left((\mathcal{P}_n(z))^{\frac{1}{2}} + (\mathcal{P}_m(z))^{\frac{1}{2}} \right) \left((\mathcal{P}_n(z))^{\frac{1}{2}} - (\mathcal{P}_m(z))^{\frac{1}{2}} \right) \right| \\ &\leq 2C \sup_{z \in \partial \mathbb{D}} \left| (\mathcal{P}_n(z))^{\frac{1}{2}} - (\mathcal{P}_m(z))^{\frac{1}{2}} \right| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Z powyższego natomiast wynika, że $\left\{ \mathcal{R}^2 \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \sum_{k=0}^{N_j} P_{jk} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni funkcji ciągłych na $\partial \mathbb{D}$, a zatem $\mathcal{R}^2(f) \in \mathcal{C}(\partial \mathbb{D})$. W konsekwencji na mocy Twierdzenia 2.3 funkcja $\mathcal{R}^2(f)$ jest ciągła w $\mathbb{D}$.

Przejdźmy teraz do drugiej tezy twierdzenia. Niech

$$P_{jk}(z) := \sum_{n \in I_{jk}} p_{jkn}(z) = \sum_{n \in I_{jk}} a_{jkn} z^n$$

będzie rozwinięciem jednorodnym wielomianu P_{jk} , gdzie I_{jk} jest zbiorem stopni jednorodnych będących składnikami P_{jk} . Z definicji $I_{jm} \cap I_{ik} = \emptyset$ dla $(j, m) \neq (i, k)$. Ustalmy $s \in [0, 1)$. Warunek b) implikuje, że

$$\|P_{jk}\|_{2, \mathbb{D}}^2 = \|\mathcal{R}^2(P_{jk})\|_{1, \partial \mathbb{D}} < 2^{-j}, \quad k = 0, \dots, N_j,$$

a to oznacza, że

$$\|P_{jk}\|_{2, \mathbb{D}}^{2s} \geq \|P_{jk}\|_{2, \mathbb{D}}^{2s} \left(\|P_{jk}\|_{2, \mathbb{D}}^2 2^j \right)^{1-s} = \|P_{jk}\|_{2, \mathbb{D}}^2 2^{j(1-s)}, \quad k = 0, \dots, N_j.$$

Dzięki ortogonalności wielomianów p_{jkn} otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \|P_{jk}\|_{2, \mathbb{D}}^2 &= \left\| \sum_{n \in I_{jk}} p_{jkn} \right\|_{2, \mathbb{D}}^2 = \sum_{n \in I_{jk}} \|p_{jkn}\|_{2, \mathbb{D}}^2 = \sum_{n \in I_{jk}} \int_{\partial \mathbb{D}} \int_0^1 |a_{jkn} z^n t^n|^2 dt d\lambda(z) \\ &= \sum_{n \in I_{jk}} \int_0^1 |a_{jkn}|^2 t^{2n} dt = \sum_{n \in I_{jk}} \frac{|a_{jkn}|^2}{2n+1}. \end{aligned}$$

Wykorzystując powyższe zależności dostajemy następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned} \sum_{j,k,n} \left(\frac{1}{j^4} \frac{|a_{jkn}|^2}{2n+1} \right)^s &\geq \sum_{j,k} \left(\frac{1}{j^4} \right)^s \left(\sum_{n \in I_{jk}} \frac{|a_{jkn}|^2}{2n+1} \right)^s = \sum_{j,k} \frac{1}{j^{4s}} \|P_{jk}\|_{2, \mathbb{D}}^{2s} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{4s}} \sum_{k=0}^{N_j} \|P_{jk}\|_{2, \mathbb{D}}^{2s} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{4s}} \sum_{k=0}^{N_j} \|P_{jk}\|_{2, \mathbb{D}}^2 2^{j(1-s)} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{4s}} \left\| \sum_{k=0}^{N_j} P_{jk} \right\|_{2, \mathbb{D}}^2 2^{j(1-s)} > \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j^{4s}} 2^{j(1-s)} \\ &= \infty \end{aligned}$$

dla $s \in [0, 1)$, co kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 2.10. *Niech $\Phi \in \mathcal{C}(\partial\mathbb{D})$ będzie ściśle dodatnią funkcją. Istnieje funkcja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ holomorficzna w $\mathbb{D}$ taka, że*

1. $\mathcal{R}^2(f) = \Phi$ na $\partial\mathbb{D}$
2. $\mathcal{R}^2(f) \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|a_n|^2}{2n+1} \right)^s = \infty, \quad s \in [0, 1).$

Dowód. Bez straty ogólności założmy, że $\sup_{z \in \partial\mathbb{D}} \Phi(z) < 1$. Indukcyjnie pokażemy, że istnieje ciąg wielomianów ortogonalnych $\{Q_k\}_{k=0}^{\infty}$ o następujących własnościach:

- (p1) $Q_k := \sum_{j=0}^{N_k} P_{kj}$ jest sumą wielomianów wzajemnie ortogonalnych P_{kj}
- (p2) $\mathcal{R}^2(P_{kj}) < \left\| \Phi - \mathcal{R}^2\left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m\right) \right\|_{1, \partial\mathbb{D}}^k$ na $\partial\mathbb{D}$, $j = 0, 1, \dots, N_k$
- (p3) $\mathcal{R}^2\left(\sum_{m=0}^k Q_m\right) < \Phi$ na $\partial\mathbb{D}$
- (p4) $\mathcal{R}^2\left(\sum_{m=0}^k Q_m\right) > \frac{1}{4} \left(\Phi - \mathcal{R}^2\left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m\right) \right) + \mathcal{R}^2\left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m\right)$ na $\partial\mathbb{D}$
- (p5) $\|Q_k\|_{2, \mathbb{D}}^2 > \frac{1}{2} \left\| \Phi - \mathcal{R}^2\left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m\right) \right\|_{1, \partial\mathbb{D}}.$

W konstrukcji wyżej wymienionych wielomianów będziemy wykorzystywać iteracyjnie Lemat 2.8 z nowymi danymi $a, h, \phi, \theta, \varepsilon$ w każdej iteracji. Na początek wybierzmy $Q_0 \equiv 0$, a następnie zastosujmy Lemat 2.8 do danych

$$a := \inf_{z \in \partial\mathbb{D}} \Phi(z), \quad h := \Phi, \quad \phi \equiv 0, \quad \theta := \frac{1}{2}.$$

W ten sposób otrzymujemy $N_1 \in \mathbb{N}$ oraz wielomiany ortogonalne $P_{10}, P_{11}, \dots, P_{1N_1}$ takie, że

- $\mathcal{R}^2(P_{1j}) < \|\Phi\|_{1, \partial\mathbb{D}}$ na $\partial\mathbb{D}$, $j = 0, 1, \dots, N_1$
- $\mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^{N_1} P_{1j}\right) < \Phi$ na $\partial\mathbb{D}$
- $\mathcal{R}^2\left(\sum_{j=0}^{N_1} P_{1j}\right) > \frac{1}{2}\Phi$ na $\partial\mathbb{D}$.

Teraz wystarczy zdefiniować wielomian $Q_1 := \sum_{j=0}^{N_1} P_{1j}$, dla którego natychmiast zachodzą warunki (p1) – (p5).

Kontynuując indukcyjnie założmy, że wielomiany ortogonalne $Q_0, Q_1, \dots, Q_k$ o własnościach (p1) – (p5) zostały już skonstruowane. Ponownie zastosujmy Lemat 2.8 tym razem do danych

$$a := \left\| \Phi - \mathcal{R}^2\left(\sum_{m=0}^k Q_m\right) \right\|_{1, \partial\mathbb{D}}^{k+1}, \quad h := \frac{3}{4} \left(\Phi - \mathcal{R}^2\left(\sum_{m=0}^k Q_m\right) \right),$$

$$\phi := \sum_{m=0}^k Q_m, \quad \theta := \frac{2}{3}, \quad \varepsilon := \frac{1}{8} \inf_{z \in \partial \mathbb{D}} \left(\Phi(z) - \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right)(z) \right),$$

by otrzymać liczbę $N_{k+1} \in \mathbb{N}$ oraz wielomiany ortogonalne $P_{k+1,0}, P_{k+1,1}, \dots, P_{k+1,N_{k+1}}$, które są również ortogonalne do wielomianów $Q_0, Q_1, \dots, Q_k$. Dodatkowo dla wielomianów $P_{k+1,0}, P_{k+1,1}, \dots, P_{k+1,N_{k+1}}$ zachodzą następujące warunki na $\partial \mathbb{D}$:

- a) $\mathcal{R}^2(P_{k+1,j}) < \left\| \Phi - \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) \right\|_{1, \partial \mathbb{D}}^{k+1}, \quad j = 0, \dots, N_{k+1}$
- b) $\mathcal{R}^2 \left(\sum_{j=0}^{N_{k+1}} P_{k+1,j} \right) < h = \frac{3}{4} \left(\Phi - \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) \right)$
- c) $\mathcal{R}^2 \left(\sum_{j=0}^{N_{k+1}} P_{k+1,j} \right) > \theta h = \frac{1}{2} \left(\Phi - \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) \right)$
- d) $\left| \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^k Q_m + \sum_{j=0}^{N_{k+1}} P_{k+1,j} \right) - \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) - \mathcal{R}^2 \left(\sum_{j=0}^{N_{k+1}} P_{k+1,j} \right) \right| < 2\varepsilon.$

Dalej określmy wielomian $Q_{k+1} := \sum_{j=0}^{N_{k+1}} P_{k+1,j}$ i zauważmy, że warunki (p1) – (p2) oraz (p5) są natychmiast spełnione dla tak zdefiniowanego wielomianu. Pozostałe warunki (p3) – (p4) wynikają z prostych rachunków na $\partial \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^{k+1} Q_m \right) &< \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) + \mathcal{R}^2(Q_{k+1}) + \frac{1}{4} \inf_{z \in \partial \mathbb{D}} \left(\Phi(z) - \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right)(z) \right) \\ &< \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) + \Phi - \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) \\ &= \Phi \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^{k+1} Q_m \right) &> \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) + \mathcal{R}^2(Q_{k+1}) - \frac{1}{4} \inf_{z \in \partial \mathbb{D}} \left(\Phi(z) - \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right)(z) \right) \\ &\geq \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) + \frac{1}{4} \left(\Phi - \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) \right). \end{aligned}$$

Tym samym skonstruowaliśmy ciąg wielomianów ortogonalnych $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ o własnościach (p1) – (p5).

Zauważmy, że jeśli wielokrotnie skorzystamy z własności (p3) – (p4), to otrzymamy następującą zależność na $\partial \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} \Phi - \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) &< \Phi - \frac{1}{4} \left(\Phi - \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m \right) \right) - \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m \right) \\ &= \frac{3}{4} \left(\Phi - \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m \right) \right) < \left(\frac{3}{4} \right)^k \Phi. \end{aligned}$$

Stąd wnioskujemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}^2\left(\sum_{k=0}^n Q_k\right) = \Phi$ na $\partial\mathbb{D}$. Co więcej, jeżeli $n > m$, to

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \partial\mathbb{D}} \left(\mathcal{R}^2\left(\sum_{k=0}^n Q_k - \sum_{k=0}^m Q_{jk}\right)(z) \right)^{\frac{1}{2}} &= \sup_{z \in \partial\mathbb{D}} \left(\mathcal{R}^2\left(\sum_{k=m+1}^n Q_k\right)(z) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sup_{z \in \partial\mathbb{D}} \left(\sum_{k=m+1}^n \left(\mathcal{R}^2(Q_k)(z) \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq \sup_{z \in \partial\mathbb{D}} \left(\sum_{k=m+1}^n \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\Phi(z) - \mathcal{R}^2\left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m\right)(z) \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &< \sum_{j=m+1}^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k \|\Phi\|_{\partial\mathbb{D}}^{\frac{1}{2}} \\ &\xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Zatem $\left\{ \sum_{k=0}^n Q_k \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $\mathcal{HR}^2(\mathbb{D})$ i na mocy Propozycji 2.2 jest zbieżny w przestrzeni $\mathcal{HR}^2(\mathbb{D})$. Możemy więc zdefiniować funkcję $f := \sum_{k=0}^{\infty} Q_k$ holomorficzną w $\mathbb{D}$. Również z Propozycji 2.2 wnioskujemy, że

$$\mathcal{R}^2(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}^2\left(\sum_{k=0}^n Q_k\right) = \Phi \text{ na } \partial\mathbb{D},$$

a ponadto na mocy Twierdzenia 2.3 funkcja $\mathcal{R}^2(f)$ jest ciągła w $\overline{\mathbb{D}}$.

Pamiętając, że $Q_0 \equiv 0$ możemy pominąć ten wielomian w funkcji f i zapisać $f = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{N_k} P_{kj}$. Rozbieżność szeregu współczynników Taylora funkcji f otrzymamy podobnie jak w poprzednim twierdzeniu. Własność (p2) implikuje, że

$$\|P_{kj}\|_{2, \mathbb{D}}^2 = \|\mathcal{R}^2(P_{kj})\|_{1, \partial\mathbb{D}} < \left\| \Phi - \mathcal{R}^2\left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m\right) \right\|_{1, \partial\mathbb{D}}^k, \quad j = 0, \dots, N_k,$$

co jest równoważne z

$$\left\| \Phi - \mathcal{R}^2\left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m\right) \right\|_{1, \partial\mathbb{D}}^{-k} \|P_{kj}\|_{2, \mathbb{D}}^2 < 1, \quad j = 0, \dots, N_k.$$

Jeśli $s \in [0, 1)$, to z powyższej nierówności otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \|P_{kj}\|_{2, \mathbb{D}}^{2s} &> \|P_{kj}\|_{2, \mathbb{D}}^{2s} \left(\left\| \Phi - \mathcal{R}^2\left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m\right) \right\|_{1, \partial\mathbb{D}}^{-k} \|P_{kj}\|_{2, \mathbb{D}}^2 \right)^{1-s}, \quad j = 0, \dots, N_k. \\ &= \left\| \Phi - \mathcal{R}^2\left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m\right) \right\|_{1, \partial\mathbb{D}}^{k(s-1)} \|P_{kj}\|_{2, \mathbb{D}}^2 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Niech $P_{kj}(z) = \sum_{n \in I_{kj}} p_{kjn}(z) = \sum_{n \in I_{kj}} a_{kjn} z^n$ będzie rozwinięciem jednorodnym wielomianu P_{kj} , gdzie I_{kj} jest zbiorem stopni jednomianów występujących w P_{kj} oraz $I_{mj} \cap I_{ki} = \emptyset$ dla $(m, j) \neq (k, i)$. Ortogonalność wielomianów p_{kjn} daje nam następujący ciąg równości:

$$\|P_{kj}\|_{2, \mathbb{D}}^2 = \sum_{n \in I_{kj}} \|p_{kjn}\|_{2, \mathbb{D}}^2 = \sum_{n \in I_{kj}} \int_{\partial \mathbb{D}} \int_0^1 |a_{kjn} z^n t^n|^2 dt d\lambda(z) = \sum_{n \in I_{kj}} \frac{|a_{kjn}|^2}{2n+1}.$$

Z powyższego natomiast otrzymujemy oszacowanie:

$$\begin{aligned} \sum_{k,j,n} \left(\frac{|a_{kjn}|^2}{2n+1} \right)^s &\geq \sum_{k,j} \left(\sum_{n \in I_{kj}} \frac{|a_{kjn}|^2}{2n+1} \right)^s = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{N_k} \|P_{kj}\|_{2, \mathbb{D}}^{2s} \\ &\stackrel{(2.10)}{>} \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \Phi - \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m \right) \right\|_{1, \partial \mathbb{D}}^{k(s-1)} \sum_{j=0}^{N_k} \|P_{kj}\|_{2, \mathbb{D}}^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \Phi - \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m \right) \right\|_{1, \partial \mathbb{D}}^{k(s-1)} \|Q_k\|_{2, \mathbb{D}}^2 \\ &\stackrel{(p5)}{>} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left\| \Phi - \mathcal{R}^2 \left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m \right) \right\|_{1, \partial \mathbb{D}}^{k(s-1)+1} \\ &\geq \sum_{k > \frac{1}{1-s}} \frac{1}{2} = \infty \end{aligned}$$

dla $s \in [0, 1)$, które kończy dowód twierdzenia. $\square$

Na koniec wróćmy na chwilę do początku naszych rozważań, gdzie wspomnieliśmy, że odwrotny problem Radona jest w pewnym stopniu podobny do uogólnionego zagadnienia istnienia funkcji wewnętrznej, który dla dysku jednostkowego $\mathbb{D}$ określamy następująco: Niech będzie dana funkcja $\Phi \in \mathcal{C}(\partial \mathbb{D})$ ściśle dodatnia na $\partial \mathbb{D}$. Znajdź funkcję $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ taką, że

$$\lim_{t \rightarrow 1} |g(zt)| = \Phi(z) \quad \text{dla } z \in \partial \mathbb{D}. \quad (2.11)$$

Oczywiście przyjmując $\Phi \equiv 1$ otrzymujemy standardową wersję problemu istnienia funkcji wewnętrznej. Rozwiązanie problemu (2.11) może być łatwo znalezione korzystając z całki Schwarza. Mianowicie, istnieje rzeczywista ciągła funkcja ϕ taka, że $\Phi = e^\phi$. Wtedy rozwiązując standardowy problem Dirichleta dla funkcji ϕ otrzymujemy funkcję harmoniczną $u_\phi \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ taką, że $u_\phi = \phi$ na $\partial \mathbb{D}$. Dalej, podobnie jak w dowodzie Lematu 2.4, zastosowanie całki Schwarza do funkcji u_ϕ daje nam funkcję $\mathcal{S}(u_\phi) \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ taką, że $\text{Re}(\mathcal{S}(u_\phi)) \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ oraz $\text{Re}(\mathcal{S}(u_\phi)) = \phi$ na $\partial \mathbb{D}$. Następnie wystarczy tylko zdefiniować funkcję $g := e^{\mathcal{S}(u_\phi)}$, która jest rozwiązaniem problemu (2.11). W tym miejscu możemy zauważyć, że jeśli funkcje $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ są rozwiązaniami problemów odpowiednio (2.1) oraz (2.11), to zarówno $|g|$ jak i $\mathcal{R}^p(f)$ są funkcjami ciągłymi do brzegu $\partial \mathbb{D}$, co zostało pokazane w Twierdzeniu 2.3.

Z drugiej strony rozważając liczbę miejsc zerowych w $\mathbb{D}$ otrzymanych rozwiązań możemy zauważyć pewną różnicę między możliwymi rozwiązaniami problemów (2.1) oraz (2.11). Jeśli g jest rozwiązaniem problemu (2.11), to ciągłość na $\overline{\mathbb{D}}$ funkcji $|g|$

implikuje, że g nie może mieć nieskończenie wielu zer. Natomiast lekko modyfikując rozwiązanie problemu Radona w Twierdzeniu 2.7 łatwo możemy otrzymać rozwiązanie o nieskończeniu wielu zerach. Przypomnijmy, że w Twierdzeniu 2.7 nasze rozwiązanie było postaci $f := \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, gdzie $f_k(z) := (n_k p + 1)^{\frac{1}{p}} Q_k(z) z^{n_k}$, a Q_k są pewnymi wielomianami takimi, że $Q_k(z) \neq 0$ dla $z \in \partial\mathbb{D}$. Wspomnieliśmy również, że stopnie n_k możemy dowolnie zwiększać nie tracąc ważnych własności, dzięki którym skonstruowaliśmy rozwiązanie. Możemy zatem dokonać następującej modyfikacji: Dla $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ wybierzmy $r_m \in (0, 1)$ oraz $n_m \in \mathbb{N}$ odpowiednio duże tak, aby $\left| \sum_{k=1}^{m-1} (n_k p + 1)^{\frac{1}{p}} Q_k(z) z^{n_k} \right| < (n_m p + 1)^{\frac{1}{p}} r_m^{n_m} |Q_m(z)|$ dla $z \in r_m \partial\mathbb{D}$. Wtedy na mocy twierdzenia Rouché wielomian $\sum_{k=1}^m (n_k p + 1)^{\frac{1}{p}} Q_k(z) z^{n_k}$ ma taką samą liczbę miejsc zerowych w dysku $r_m \mathbb{D}$ co wielomian $(n_m p + 1)^{\frac{1}{p}} Q_m(z) z^{n_m}$. Wybierając odpowiednio rosnący ciąg liczb $\{r_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset (0, 1)$ oraz $\{n_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ możemy uzyskać funkcję f , która ma nieskończenie wiele miejsc zerowych w $\mathbb{D}$.

Na zakończenie dodajmy, że rozwiązanie f problemu Radona można tak zmodyfikować, aby jego granice radialne były nieskończone, tzn. $\lim_{t \rightarrow 1} |f(tz)| = \infty$ dla $z \in \partial\mathbb{D}$. Podobnie jak powyżej, możemy zwiększyć jeszcze bardziej stopień $n_m \in \mathbb{N}$ oraz $r_m \in (0, 1)$ tak, aby $(n_m p + 1)^{\frac{1}{p}} r_m^{n_m} |Q_m(z)| > m + \left| \sum_{k=1}^{m-1} (n_k p + 1)^{\frac{1}{p}} Q_k(z) z^{n_k} \right|$ dla $z \in r_m \partial\mathbb{D}$. Wtedy dla $z \in \partial\mathbb{D}$ otrzymujemy szacowanie

$$\left| \sum_{k=1}^m f_k(r_m z) \right| \geq (n_m p + 1)^{\frac{1}{p}} r_m^{n_m} |Q_m(r_m z)| - \left| \sum_{k=1}^{m-1} (n_k p + 1)^{\frac{1}{p}} Q_k(r_m z) r_m^{n_k} z^{n_k} \right| > m.$$

Zatem $\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^m f_k(r_m z) \right| = \infty$ dla każdego $z \in \partial\mathbb{D}$, a to oznacza, że $\lim_{t \rightarrow 1} |f(tz)| = \infty$ dla $z \in \partial\mathbb{D}$.

Odwrotny problem Radona na obszarach kołowych ściśle wypukłych

W tym rozdziale przejdziemy do problemu Radona w przypadku wielowymiarowym. Jest to zasadnicza część rozprawy, która pozwala nam w pewien sposób scharakteryzować możliwe zachowania brzegowe funkcji analitycznych na ograniczonych obszarach kołowych ściśle wypukłych w $\mathbb{C}^d$, $d > 1$.

3.1. Obszary ściśle wypukłe kołowe

Na początek przypomnijmy analityczną definicję obszarów ściśle wypukłych w wielowymiarowej przestrzeni zespolonej:

Definicja 3.1 (Rozdział 3.1, [24]). *Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{C}^d$, a η jego funkcją definiującą klasy $\mathcal{C}^2$. Mówimy, że Ω jest obszarem ściśle wypukłym w punkcie $P \in \partial\Omega$, jeśli Hessian rzeczywisty funkcji definiującej η w punkcie P jest dodatnio określony na przestrzeni stycznej w punkcie P do zbioru Ω , tzn.*

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{j,k=1}^d \frac{\partial^2 \eta}{\partial z_j \partial z_k}(P) w_j w_k \right) + \sum_{j,k=1}^d \frac{\partial^2 \eta}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(P) w_j \bar{w}_k > 0,$$

dla dowolnego $w \in \mathbb{C}^d$ takiego, że $w \neq 0$ oraz $\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial \eta}{\partial z_j}(P) w_j \right) = 0$.

Mówimy, że obszar Ω jest ściśle wypukły, jeżeli jest ściśle wypukły w każdym punkcie $\partial\Omega$.

Oczywiście dodatnia określoność powyższego Hessianu nie zależy od wyboru funkcji definiującej obszar Ω .

Definicja 3.2 (Definicja 2.1.2, [29]). *Mówimy, że zbiór $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ jest kołowy, jeśli dla dowolnych $z \in \Omega$ oraz $\theta \in \mathbb{R}$ zachodzi $e^{i\theta} z \in \Omega$.*

Często własności brzegowe funkcji analitycznych wielu zmiennych warto analizować rozważając tzw. cięcia zespolone funkcji holomorficznych. Są to funkcje zawężone do cięć zespolonych obszaru, tj. zbiorów $z\mathbb{D}$, gdzie $z \in \partial\Omega$.

Definicja 3.3 (Rozdział 1.2.5, [29]). *Niech Ω będzie ograniczonym obszarem ściśle wypukłym kołowym w $\mathbb{C}^d$ oraz niech $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dla ustalonego $z \in \partial\Omega$ określamy funkcję*

$$f_z: \mathbb{D} \ni \omega \mapsto f(z\omega).$$

Funkcje tej postaci nazywamy cięciami zespolonymi funkcji f .

Cięcia zespolone funkcji określonych na obszarach z $\mathbb{C}^d$ umożliwiają nam na zastosowanie faktów z teorii funkcji jednej zmiennej w analizie funkcji wielu zmiennych.

Zauważmy, że jeśli $f = \sum_{n=0}^{\infty} P_n$, gdzie każde P_n jest wielomianem jednorodnym stopnia

n , to $f_z(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\omega^n$, $z \in \partial\Omega$. Zatem powiemy, że $P_n(z)$ są współczynnikami rozwinięcia f_z w szereg potęgowy. Stąd też otrzymujemy, że cięcia zespolone funkcji holomorficznej również są funkcjami holomorficznymi.

3.2. Operator Radona na obszarach ściśle wypukłych kołowych

W poprzednim rozdziale skonstruowaliśmy rozwiązanie problemu Radona na dysku jednostkowym za pomocą całki Schwarza oraz jednomianów z^n odpowiednio dużego stopnia. Jednakże w przypadku wielowymiarowym odpowiednik całki Schwarza nie istnieje. Stąd potrzebne jest inne podejście.

W pracy [34] pokazano, że na kuli jednostkowej $\mathbb{B}_d$ istnieje ciąg wielomianów jednorodnych $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ stopnia n taki, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $|p_n(z)| \leq 1$ dla $z \in \partial\mathbb{B}_d$ oraz $\int_{\partial\mathbb{B}_d} |p_n(z)|^2 d\nu(z) \geq \sqrt{\pi} 2^{-d}$, gdzie ν jest miarą probabilistyczną na $\partial\mathbb{B}_d$. Oznacza to, że powyższe ograniczenia nie zależą od stopni tych wielomianów jednorodnych. Są to wspomniane we wstępie rozprawy wielomiany Rylla-Wojtaszczyka, które wielokrotnie później były wykorzystywane w badaniu własności brzegowych funkcji analitycznych w $\mathbb{B}_d$. Konstrukcje funkcji analitycznych o w pewnym sensie ekstremalnym zachowaniu na prawie wszystkich cięciach zespolonych kuli jednostkowej znajdują się na przykład w [35]. Pokazano tam, że istnieje funkcja analityczna w $\mathbb{B}_d$ i ciągła na $\overline{\mathbb{B}_d}$ taka, że prawie każde cięcie zespolone tej funkcji ma rozbieżny szereg współczynników Taylora z dowolną potęgą $s < 2$. Ograniczenie do prawie wszystkich cięć zespolonych w powyższym rezultacie wynika z faktu, że wykorzystane tam wielomiany Rylla-Wojtaszczyka mają zera na $\partial\mathbb{B}_d$. Stąd aby móc kontrolować miejsca, gdzie wartości wielomianów Rylla-Wojtaszczyka są małe, w pracy [36] zostało pokazane, że istnieje liczba $K \in \mathbb{N}$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$, dla których można skonstruować ciąg wielomianów jednorodnych $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ stopnia n taki, że jeśli $n > n_0$, to $|p_n(z)| \leq 2$

oraz $\sum_{j=K}^{K(n+1)-1} |p_j(z)| \geq \frac{1}{2}$ dla $z \in \partial\mathbb{B}_d$. Takie wielomiany znalazły zastosowanie w uzasadnieniu, że istnieje funkcja holomorficzna w kuli jednostkowej $\mathbb{B}_d$, która nie jest całkowalna z dowolną potęgą na każdym cięciu zespolonym kuli $\mathbb{B}_d$. Inne ciekawe zastosowania wielomianów Rylla-Wojtaszczyka znajdują się przykładowo w [9].

Okazuje się, że wielomiany o powyższych własnościach istnieją również na obszarach kołowych ściśle wypukłych w $\mathbb{C}^d$. Mianowicie w pracy [19] zostało udowodnione poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.4 (Twierdzenie 2.5, [19]). *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ będzie obszarem kołowym ściśle wypukłym. Istnieje liczba $K = K(\partial\Omega) \in \mathbb{N}$, dla której istnieje liczba $N_0 \in \mathbb{N}$ taka, że dla wszystkich liczb naturalnych $N \geq N_0$ oraz $n_1, \dots, n_K \in \mathbb{N}$ takich, że $N \leq n_1 \leq \dots \leq n_K \leq 2N$ istnieją wielomiany jednorodne $u_1, \dots, u_K$ o stopniach odpowiednio $n_1, \dots, n_K$ takie, że $\frac{1}{2} < \max_{1 \leq j \leq K} |u_j(z)| < 1$ dla wszystkich $z \in \partial\Omega$.*

W konstrukcji rozwiązania odwrotnego problemu Radona skorzystamy z uproszczonej wersji twierdzenia z [16]. Twierdzenie to mówi nam, że mając daną funkcję ciągłą i ściśle dodatnią na brzegu obszaru kołowego ściśle wypukłego możemy otrzymać zbiór funkcji holomorficznych w tym obszarze i ciągłych na jego domknięciu, które w pewnym sensie razem ją przybliżają. Warto podkreślić, że liczba elementów w tym zbiorze funkcji nie zależy od funkcji, którą chcemy aproksymować.

Twierdzenie 3.5 (Twierdzenie 3.2, [16]). *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ będzie obszarem kołowym ściśle wypukłym. Istnieje $N = N(\partial\Omega) \in \mathbb{N}$ takie, że jeżeli $\varepsilon \in (0, 1)$, T jest zwartym podzbiorem Ω , h jest ciągłą i ściśle dodatnią funkcją na $\partial\Omega$, to istnieją funkcje $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{O}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ takie, że*

1. $\|f_m\|_T \leq \varepsilon, \quad m = 1, \dots, N$
2. $\frac{h}{2} < \max_{1 \leq m \leq N} |f_m| < h$ na $\partial\Omega$.

Jak to zostało zaobserwowane w [21], funkcje w Twierdzeniu 3.5 mogą być zastąpione wielomianami.

Przyjmujemy, że do końca tego rozdziału Ω będzie oznaczać obszar ściśle wypukły kołowy w $\mathbb{C}^d$. Operator całkowy Radona definiujemy analogicznie jak w przypadku jednowymiarowym. Ustalmy $p > 0$. Jeśli $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, to działanie operatora Radona $\mathcal{R}^p$ na funkcji f określamy jako:

$$\mathcal{R}^p(f)(z) := \int_0^1 |f(zt)|^p dt, \quad z \in \partial\Omega.$$

Podobnie odwrotny problem Radona standardowo stawiamy w następujący sposób: Niech będzie dana funkcja $H: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ ściśle dodatnia i ciągła na $\partial\Omega$. Znajdź funkcję $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ taką, że

$$\mathcal{R}^p(f) = H \quad \text{na } \partial\Omega. \quad (3.1)$$

W tym rozdziale rozważymy również następujący operator:

$$\mathcal{S}^p: \mathcal{O}(\Omega) \ni \sum_{k=1}^{\infty} u_k \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{\sqrt[p]{pn_k + 1}} \in \mathcal{O}(\Omega),$$

gdzie u_k są wielomianami jednorodzonymi stopnia $n_k \in \mathbb{N}$. Okazuje się, że powyższy operator jest ściśle związany z operatorem Radona. Zauważmy, że jeśli u_n jest wielomianem jednorodzonym stopnia $n \in \mathbb{N}$, to mamy następującą zależność między operatorami $\mathcal{R}^p$ oraz $\mathcal{S}^p$:

$$\mathcal{R}^p(u_n)(z) = \int_0^1 |u_n(zt)|^p dt = \int_0^1 |u_n(z)|^p t^{np} dt = \frac{|u_n(z)|^p}{np + 1} = |\mathcal{S}^p(u_n)(z)|^p.$$

Operator $\mathcal{S}^p$ pozwoli nam otrzymać funkcję holomorficzną w Ω i ciągłą w $\bar{\Omega}$, której wszystkie cięcia zespolone mają rozbieżny szereg współczynników Taylora z dowolną potęgą $s \in [0, \min\{1, p\})$. Takie funkcje zostały również skonstruowane na obszarach ściśle wypukłych kołowych w [14], ściśle pseudowypukłych kołowych w [10], a na kuli jednostkowej w [35].

W poniższych rozważaniach, podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, przydatne okażą się własności następującej przestrzeni metrycznej

$$\mathcal{HR}^p(\Omega) := \left\{ f \in \mathcal{O}(\Omega) : \sup_{z \in \partial\Omega} \mathcal{R}^p(f)(z) < \infty \right\}$$

z zadaną metryką $\rho(f, g) := \sup_{z \in \partial\Omega} \left(\mathcal{R}^p(f - g)(z) \right)^{\frac{1}{q}}$, gdzie $q = \min\{p, 1\}$. Przestrzeń ta jest zupełna, co pokażemy poniżej, a w dowodzie skorzystamy z następującej propozycji.

Propozycja 3.6 (Propozycja 1.5.4 oraz podrozdział 1.5.3, [29]). *Niech $f \in \mathcal{O}(U)$, gdzie $U \subset \mathbb{C}^d$ jest zbiorem otwartym. Wtedy funkcja $|f|^c$ dla dowolnej dodatniej stałej $c > 0$ jest subharmoniczna w U . Zatem dla takiej funkcji spełniona jest nierówność*

$$|f(w)|^c \leq \frac{1}{\mathfrak{L}^{2d}(\mathbb{B}_d(w, r))} \int_{\mathbb{B}_d(w, r)} |f|^c d\mathfrak{L}^{2d} \quad (3.2)$$

dla dowolnych $w \in U$ oraz $r > 0$ takich, że $\mathbb{B}_d(w, r) \subset U$.

Propozycja 3.7. *Przestrzeń $(\mathcal{HR}^p(\Omega), \rho)$ jest zupełna dla dowolnego $p > 0$. Ponadto, jeżeli $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rho} f$ w $\mathcal{HR}^p(\Omega)$, to $\mathcal{R}^p(f_n) \rightrightarrows \mathcal{R}^p(f)$ na $\partial\Omega$, gdy $n \rightarrow \infty$.*

Dowód. Ustalmy $p > 0$. Niech $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $\mathcal{HR}^p(\Omega)$ oraz niech $\varepsilon > 0$. Istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\left(\mathcal{R}^p(f_m - f_n)(z) \right)^{\frac{1}{q}} < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N \quad \forall z \in \partial\Omega.$$

Stąd

$$\int_0^1 |(f_m - f_n)(zt)|^p dt < \varepsilon^q \quad \forall m, n \geq N \quad \forall z \in \partial\Omega. \quad (3.3)$$

Niech σ będzie miarą probabilistyczną na $\partial\Omega$. Jeśli przecałujemy stronami nierówność (3.3) względem $\partial\Omega$, to otrzymamy

$$\int_{\partial\Omega} \int_0^1 |(f_m - f_n)(zt)|^p dt d\sigma(z) < \varepsilon^q \quad \forall m, n \geq N.$$

Funkcja $f_m - f_n$ jest holomorficzną w Ω , a zatem opierając się na Propozycji 3.6, funkcja $|f_m - f_n|^p$ jest subharmoniczna. Niech K będzie zwartym podzbiorem Ω , $w \in K$ oraz $r = \frac{1}{2} \text{dist}(K, \partial\Omega)$, a więc $\overline{\mathbb{B}_d(w, r)} \subset \Omega$. Istnieje stała $\pi_d > 0$ taka, że

$\mathfrak{L}^{2d}(\mathbb{B}_d(w, r)) = \pi_d r^{2d}$. Istnieje również stała $C_d > 0$ taka, że jacobian Jac_φ parametryzacji $\varphi: \partial\Omega \times [0, 1] \ni (z, t) \mapsto zt \in \bar{\Omega}$ jest ograniczony z góry przez C_d . Wtedy dostajemy następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned} |(f_m - f_n)(w)|^p &\stackrel{(3.2)}{\leq} \frac{1}{\mathfrak{L}^{2d}(\mathbb{B}_d(w, r))} \int_{\mathbb{B}_d(w, r)} |f_m - f_n|^p d\mathfrak{L}^{2d} \\ &\leq \frac{1}{\pi_d r^{2d}} \int_{\Omega} |f_m - f_n|^p d\mathfrak{L}^{2d} \\ &\leq \frac{C_d}{\pi_d r^{2d}} \int_{\partial\Omega} \int_0^1 |(f_m - f_n)(zt)|^p dt d\sigma(z) \\ &\stackrel{(3.3)}{<} \frac{C_d \varepsilon^q}{\pi_d r^{2d}} \end{aligned}$$

dla dowolnych $m, n \geq N$. W szczególności,

$$\sup_{w \in K} |(f_m - f_n)(w)|^p < \frac{C_d \varepsilon^q}{\pi_d r^{2d}} \quad \forall m, n \geq N.$$

Powyższe implikuje, że ciąg $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny lokalnie jednostajnie na zwartych podzbiorach Ω . Niech f będzie funkcją graniczną ciągu $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Funkcje f_n są holomorficzne, a zatem również funkcja f jest holomorficzna.

Teraz pokażemy, że $f_n \xrightarrow{\rho} f$ oraz $f \in \mathcal{HR}^p(\Omega)$. Z nierówności (3.3) wynika, że

$$\int_0^\delta |(f_m - f_n)(zt)|^p dt < \varepsilon^q \quad \forall \delta \in (0, 1) \quad \forall m, n \geq N \quad \forall z \in \partial\Omega. \quad (3.4)$$

Z racji, że $f_m \rightarrow f$ lokalnie jednostajnie, to możemy przejść z m do granicy w (3.4), by otrzymać, że

$$\int_0^\delta |(f - f_n)(zt)|^p dt \leq \varepsilon^q \quad \forall \delta \in (0, 1) \quad \forall n \geq N \quad \forall z \in \partial\Omega.$$

Powyższe nierówności zachodzą dla dowolnej $\delta \in (0, 1)$, a zatem

$$\int_0^1 |(f - f_n)(zt)|^p dt \leq \varepsilon^q \quad \forall n \geq N \quad \forall z \in \partial\Omega.$$

Co więcej, na mocy nierówności trójkąta

$$\sup_{z \in \partial\Omega} \left(\mathcal{R}^p(f)(z) \right)^{\frac{1}{q}} \leq \sup_{z \in \partial\Omega} \left(\mathcal{R}^p(f - f_n)(z) \right)^{\frac{1}{q}} + \sup_{z \in \partial\Omega} \left(\mathcal{R}^p(f_n)(z) \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \quad \forall n \geq N.$$

Stąd $f_n \xrightarrow{\rho} f$ oraz $f \in \mathcal{HR}^p(\Omega)$.

Jeśli $f_n \xrightarrow{\rho} f$, to $\rho(f, f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Ponownie nierówność trójkąta daje nam

$$\sup_{z \in \partial\Omega} \left| \left(\mathcal{R}^p(f)(z) \right)^{\frac{1}{q}} - \left(\mathcal{R}^p(f_n)(z) \right)^{\frac{1}{q}} \right| \leq \sup_{z \in \partial\Omega} \left(\mathcal{R}^p(f - f_n)(z) \right)^{\frac{1}{q}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Dlatego $\left(\mathcal{R}^p(f_n) \right)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow \left(\mathcal{R}^p(f) \right)^{\frac{1}{q}}$ na $\partial\Omega$, gdy $n \rightarrow \infty$, a w konsekwencji mamy zbieżność jednostajną $\mathcal{R}^p(f_n) \Rightarrow \mathcal{R}^p(f)$ na $\partial\Omega$, gdy $n \rightarrow \infty$. $\square$

Podobnie jak w przypadku dysku jednostkowego, w naturalny sposób możemy rozszerzyć działanie operatora Radona $\mathcal{R}^p$ na funkcji $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ następująco:

$$\mathcal{R}^p(f)(z) := \int_0^1 |f(zt)|^p dt, \quad z \in \overline{\Omega}.$$

Lemat 3.8. *Istnieje stała $c \in (0, 1)$ taka, że dla dowolnych $\delta \in (0, 1)$, $z \in \partial\Omega$ oraz $w \in \Omega$ jeżeli $\|z - w\| < c\delta$, to istnieje $\hat{w} \in \partial\Omega$ takie, że $w = s\hat{w}$, gdzie $s \in (1 - \delta, 1)$.*

Dowód. Niech $\tau := \text{dist}(0, \partial\Omega)$. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że stała $c \in (0, 1)$ taka jak w lemacie nie istnieje, tzn. dla wszystkich $c \in (0, 1)$ implikacja w tezie lematu nie zachodzi. Weźmy zatem dowolny ciąg $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, 1)$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ oraz $c_n < \tau$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wybierzmy również ciągi $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, 1)$, $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ oraz $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \partial\Omega$ takie, że $\|z_n - w_n\| = c_n \delta_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$. Dla każdego w_n istnieją $\hat{w}_n \in \partial\Omega$ oraz $s_n \in (0, 1)$ takie, że $w_n = s_n \hat{w}_n$. Skoro implikacja w tezie lematu ma nie zachodzić, to $s_n \leq 1 - \delta_n$, a zatem $\|\hat{w}_n - w_n\| \geq \delta_n \|\hat{w}_n\| \geq \tau \delta_n$. Jeśli $\hat{w}_n = z_n$, to otrzymujemy sprzeczność, ponieważ $c_n < \tau$ dla $n \in \mathbb{N}$. W przeciwnym wypadku otrzymujemy trójkąt o wierzchołkach z_n , w_n oraz $\hat{w}_n$. Oznaczmy miary kątów w tym trójkącie przez $\alpha_n := |\angle z_n \hat{w}_n w_n|$, $\beta_n := |\angle \hat{w}_n z_n w_n|$, $\gamma_n := |\angle z_n w_n \hat{w}_n|$. W takim trójkącie możemy rozważać funkcję $\alpha_n: \partial\Omega \times \Omega \ni (z_n, w_n) \mapsto \alpha_n(z_n, w_n)$, gdzie $\alpha_n(z_n, w_n) := |\angle z_n \hat{w}_n w_n|$. Zauważmy, że funkcja ta jest ciągła na $\partial\Omega \times \Omega$ oraz $\min \{\alpha_n(z, w) : \|z - w\| < \tau, z \in \partial\Omega, w \in \Omega\} > 0$. A zatem skoro $\|z_n - w_n\| < \tau$, to istnieje stała $m > 0$ taka, że $\alpha_n \geq m > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Z drugiej strony z twierdzenia sinusów dla trójkąta o wierzchołkach z_n , w_n oraz $\hat{w}_n$ możemy oszacować

$$\sin \alpha_n \leq \frac{\sin \alpha_n}{\sin \beta_n} = \frac{\|z_n - w_n\|}{\|\hat{w}_n - w_n\|} \leq \frac{c_n \delta_n}{\delta_n \|\hat{w}_n\|} \leq \frac{c_n}{\tau} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Stąd $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, co również prowadzi do sprzeczności i tym samym kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 3.9. *Niech $p > 0$ oraz $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Wtedy jeśli $\mathcal{R}^p(f) \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, to $\mathcal{R}^p(f) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.*

Dowód. Weźmy rosnący ciąg liczbowy $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Dalej określmy ciąg funkcji $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ następująco:

$$u_n: \partial\Omega \ni z \mapsto \int_0^{a_n} |f(zt)|^p dt \in \mathbb{R}.$$

Biorąc pod uwagę ciągłość funkcji f na Ω , to tak zdefiniowany ciąg funkcji jest nie-malejącym ciągiem funkcji ciągłych na $\partial\Omega$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(z) = \mathcal{R}^p(f)(z)$ dla każdego $z \in \partial\Omega$. Stąd jeśli $\mathcal{R}^p(f)$ jest funkcją ciągłą na $\partial\Omega$, to na mocy twierdzenia Diniego (Twierdzenie 7.13, [32]) ciąg $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $\mathcal{R}^p(f)$ na $\partial\Omega$.

Niech $D := \max\{1, \text{diam}(\Omega)\}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz $z \in \partial\Omega$. Ze zbieżności jednostajnej ciągu $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oraz ciągłości funkcji $\mathcal{R}^p(f)$ na $\partial\Omega$ wnioskujemy, że istnieje $\delta > 0$ taka, że

- $\left| \mathcal{R}^p(f)(z) - \mathcal{R}^p(f)(\zeta) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ dla dowolnego $\zeta \in \partial\Omega$ takiego, że $|z - \zeta| \leq \delta \left(1 + \frac{1}{D}\right)$
- $\frac{D}{D - \delta} \int_{1 - \frac{\delta}{D}}^1 |f(\zeta t)|^p dt \leq \frac{\varepsilon}{3}$ dla dowolnego $\zeta \in \partial\Omega$
- $\left(\frac{D}{D - \delta} - 1 \right) \int_0^1 |f(\zeta t)|^p dt \leq \frac{\varepsilon}{3}$ dla dowolnego $\zeta \in \partial\Omega$.

Weźmy stałą $c \in (0, 1)$ z Lematu 3.8. Niech $w \in \Omega$ będzie takie, że $|z - w| \leq \frac{c\delta}{D}$. Wtedy możemy wybrać $\hat{w} \in \partial\Omega$ takie, że $w = s\hat{w}$ dla pewnego $s \in \left(1 - \frac{\delta}{D}, 1\right)$. Stąd otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}
\left| \mathcal{R}^p(f)(\hat{w}) - \mathcal{R}^p(f)(w) \right| &= \left| \int_0^1 |f(\hat{w}t)|^p dt - \int_0^1 |f(wt)|^p dt \right| \\
&= \left| \int_0^1 |f(\hat{w}t)|^p dt - \int_0^1 |f(\hat{w}st)|^p dt \right| \\
&= \left| \int_0^1 |f(\hat{w}t)|^p dt - \frac{1}{s} \int_0^s |f(\hat{w}t)|^p dt \right| \\
&\leq \left| \int_0^1 |f(\hat{w}t)|^p dt - \frac{1}{s} \int_0^1 |f(\hat{w}t)|^p dt \right| + \frac{1}{s} \int_s^1 |f(\hat{w}t)|^p dt \\
&\leq \left(\frac{D}{D - \delta} - 1 \right) \int_0^1 |f(\hat{w}t)|^p dt + \frac{D}{D - \delta} \int_{1 - \frac{\delta}{D}}^1 |f(\hat{w}t)|^p dt \\
&\leq \frac{2\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Dalej z faktu, że $\|\hat{w}\| \leq D$ oraz nierówności trójkąta wynika, że

$$|z - \hat{w}| \leq |z - w| + |w - \hat{w}| \leq \frac{c\delta}{D} + \frac{\delta\|\hat{w}\|}{D} < \delta \left(\frac{1}{D} + 1 \right),$$

a zatem $\left| \mathcal{R}^p(f)(z) - \mathcal{R}^p(f)(\hat{w}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Na koniec ponowne zastosowanie nierówności trójkąta prowadzi do następującego oszacowania:

$$\left| \mathcal{R}^p(f)(z) - \mathcal{R}^p(f)(w) \right| \leq \left| \mathcal{R}^p(f)(z) - \mathcal{R}^p(f)(\hat{w}) \right| + \left| \mathcal{R}^p(f)(\hat{w}) - \mathcal{R}^p(f)(w) \right| \leq \varepsilon$$

i to kończy dowód. $\square$

Z powyższego twierdzenia wynika, że mając dowolne rozwiązanie $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ problemu Radona na $\partial\Omega$ funkcja $\mathcal{R}^p(f)$ może być przedłużona w sposób ciągły na $\bar{\Omega}$.

3.3. Lakunarne wielomiany K -sumujące

Jak już wcześniej wspomnieliśmy, głównym narzędziem w naszym podejściu do konstruowania rozwiązania odwrotnego problemu Radona będą lakunarne wielomiany K -sumujące. W tej sekcji podamy definicję, pewne przydatne własności oraz zbadamy działanie operatorów $\mathcal{R}^p$ i $\mathcal{S}^p$ na tych wielomianach.

Definicja 3.10. Niech $K \in \mathbb{N}$. Wielomian Q nazywamy wielomianem K -sumującym, jeżeli ma rozwinięcie jednorodne postaci $Q = \sum_{j=1}^K u_j$, gdzie każdy u_j jest wielomianem jednorodnym stopnia $\deg(u_j) = n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \dots, K$, oraz posiada następujące własności:

- i) $\max_{1 \leq j \leq K} |u_j(z)| \leq 1$ dla $z \in \partial\Omega$
 ii) $\frac{1}{2} \deg(Q) \leq \text{ord}(Q) = n_1 < n_2 < \dots < n_K = \deg(Q)$.

Ponadto wielomian Q nazywamy lakunarnym wielomianem K -sumującym, jeżeli dodatkowo zachodzą warunki:

- iii) $\max_{1 \leq j \leq K} |u_j(z)| \geq \frac{1}{2}$ dla $z \in \partial\Omega$
 iv) $\sqrt[K]{2} < \frac{n_{j+1}}{n_j} < 2$, $j = 1, 2, \dots, K-1$.

Istnienie wielomianów K -sumujących wynika wprost z Twierdzenia 3.4. Również istnienie lakunarnych wielomianów K -sumujących otrzymujemy jako wniosek z tego samego twierdzenia zwiększając odpowiednio N tak, by stopnie wielomianów jednorodnych tworzących wielomian K -sumujący dało się odpowiednio rozsunąć, otrzymując tym samym warunek iv) definicji.

Wniosek 3.11. *Istnieje $K = K(\partial\Omega) \in \mathbb{N}$, dla którego istnieje $N_K \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego $N \geq N_K$ istnieje lakunarny wielomian K -sumujący stopnia N .*

Dowód. Weźmy $K = K(\partial\Omega) \in \mathbb{N}$ oraz $N_0 \in \mathbb{N}$ z Twierdzenia 3.4. Wybierzmy odpowiednio duże $N_K \geq 2N_0$ takie, aby dla $N \geq N_K$ istniał K -elementowy zbiór liczb naturalnych $\frac{1}{2}N < n_1 < n_2 < \dots < n_K = N$, dla których zachodzą zależności $\sqrt[K]{2} < \frac{n_{j+1}}{n_j} < 2$, gdzie $j = 1, 2, \dots, K-1$. Dla takich N oraz $n_1, n_2, \dots, n_K$ na mocy Twierdzenia 3.4, istnieją wielomiany jednorodne $u_1, u_2, \dots, u_K$ stopni odpowiednio $n_1, n_2, \dots, n_K$ takie, że $\frac{1}{2} < \max_{1 \leq j \leq K} |u_j| < 1$ na $\partial\Omega$. Wtedy zauważmy, że $\sum_{j=1}^K u_j$ jest lakunarnym wielomianem K -sumującym stopnia N . $\square$

3.4. Własności wielomianów K -sumujących

W tej sekcji przedstawimy kilka kluczowych własności wielomianów K -sumujących, które pozwolą nam skonstruować generatory rozwiązania odwrotnego problemu Radona.

Lemat 3.12. *Niech $T \subset \Omega$ będzie zwartym podzbiorem Ω , $\varepsilon > 0$ oraz $K \in \mathbb{N}$. Istnieje $N_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dowolny wielomian K -sumujący Q stopnia $N \geq N_0$ spełnia warunek $\|NQ\|_T < \varepsilon$.*

Dowód. Zbiór T jest zwartym podzbiorem Ω , więc istnieje $r \in (0, 1)$ takie, że $T \subset r\Omega$. Pokażemy, że wystarczy wybrać $N_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq N_0$ zachodzi nierówność $nKr^{\frac{1}{2}n} < \varepsilon$.

Niech $\sum_{j=1}^K u_j$ będzie rozwinięciem jednorodnym wielomianu Q o stopniach odpowiednio $n_1, \dots, n_K \in \mathbb{N}$ takich, że $\frac{1}{2}N \leq n_1 < \dots < n_K = N$, gdzie $\deg(Q) = N$ oraz $N \geq N_0$. Wtedy możemy oszacować

$$\|NQ\|_T \leq \sup_{z \in \partial\Omega} \left| N \sum_{j=1}^K u_j(rz) \right| \leq \sup_{z \in \partial\Omega} \left(N \sum_{j=1}^K r^{n_j} |u_j(z)| \right) \leq N \sum_{j=1}^K r^{n_j} \leq NKr^{\frac{1}{2}N}.$$

Z powyższego wynika, że jeśli $N \geq N_0$, to $\|NQ\|_T < \varepsilon$, co kończy dowód. $\square$

Dalej podobnie jak w przypadku jednowymiarowym pokażemy wspomnianą już we wstępie własność prawie dodawania dla wielomianów K -sumujących odpowiednio dużego stopnia.

Lemat 3.13. *Niech $p > 0$, $\varepsilon > 0$, $M > 0$ oraz $K \in \mathbb{N}$. Istnieje $N_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego wielomianu K -sumującego Q stopnia $N \geq N_0$ oraz funkcji $f, g \in \mathcal{C}_M(\overline{\Omega})$ następujące zależności*

$$\mathcal{R}^p(\sqrt[p]{pN}fQ) + \mathcal{R}^p(g) - \varepsilon < \mathcal{R}^p(\sqrt[p]{pN}fQ + g) < \mathcal{R}^p(\sqrt[p]{pN}fQ) + \mathcal{R}^p(g) + \varepsilon$$

zachodzą na $\partial\Omega$.

Dowód. Niech $q := \max\{p, 1\}$. Niech $\delta \in (0, 1)$ będzie taka, że $\int_{\delta}^1 |g(zt)|^p dt \leq \frac{\varepsilon}{8}$ dla $z \in \partial\Omega$. Wybierzmy $k \in \mathbb{N}$ takie, że $k \geq p$. Istnieje $N_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego $N \geq N_0$ zachodzą nierówności

- $K^q M^p \delta^{\frac{pN+1}{2}} < \frac{\varepsilon}{16}$
- $\sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m}^{\frac{p}{k}} M^p K^m k^m \frac{(Np)^{\frac{m}{k}}}{(\frac{1}{2}pN + k)^m} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pokażemy, że takie N_0 spełnia kryteria, by być wybranym dla lematu.

Z racji, że Q jest wielomianem K -sumującym stopnia $N \geq N_0$, niech $Q = \sum_{j=1}^K u_j$ będzie jego rozwinięciem jednorodnym o stopniach odpowiednio $n_1, \dots, n_K \in \mathbb{N}$ takich, że $\frac{1}{2}N \leq n_1 < \dots < n_K = N$. Dla uproszczenia notacji na chwilę oznaczmy $F := \sqrt[p]{pN}fQ$. Wtedy dla $z \in \partial\Omega$ mamy następującą zależność:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{\delta} |F(zt)|^p dt \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(Np \int_0^{\delta} \left| f(zt) \sum_{j=1}^K t^{n_j} u_j(z) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq (Np)^{\frac{1}{q}} M^{\frac{p}{q}} \sum_{j=1}^K \left(|u_j(z)|^p \int_0^{\delta} t^{pn_j} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq M^{\frac{p}{q}} \sum_{j=1}^K \left(\frac{Np \delta^{pn_j+1}}{pn_j + 1} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq K \left(\frac{M^p Np}{\frac{1}{2}pN + 1} \right)^{\frac{1}{q}} \delta^{\frac{pN+1}{2q}} \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{8} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Stąd $\int_0^{\delta} |F(zt)|^p dt < \frac{\varepsilon}{8}$ dla $z \in \partial\Omega$. Skoro $\frac{p}{k} \leq 1$, to na mocy nierówności trójkąta otrzymujemy dla $z \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\frac{p}{k}}(F^k + g^k)(z) &= \int_0^1 |(F^k + g^k)(zt)|^{\frac{p}{k}} dt \\ &\leq \int_0^1 |F(zt)|^p dt + \int_0^1 |g(zt)|^p dt \\ &= \mathcal{R}^p(F)(z) + \mathcal{R}^p(g)(z) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_k^{\frac{p}{k}}(F^k + g^k)(z) &= \int_0^1 \left| (F^k + g^k)(zt) \right|^{\frac{p}{k}} dt \\
&= \int_0^\delta \left| (F^k + g^k)(zt) \right|^{\frac{p}{k}} dt + \int_\delta^1 \left| (F^k + g^k)(zt) \right|^{\frac{p}{k}} dt \\
&\geq \int_\delta^1 |F(zt)|^p dt - \int_0^\delta |F(zt)|^p dt + \int_0^\delta |g(zt)|^p dt - \int_\delta^1 |g(zt)|^p dt \\
&= \mathcal{R}^p(F)(z) + \mathcal{R}^p(g)(z) - 2 \int_0^\delta |F(zt)|^p dt - 2 \int_\delta^1 |g(zt)|^p dt \\
&> \mathcal{R}^p(F)(z) + \mathcal{R}^p(g)(z) - \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Jeśli $0 < p \leq 1$, to dobierając $k = 1$ dostajemy tezę lematu. Jednakże w przeciwnym przypadku, gdy $p > 1$ będziemy potrzebować dodatkowych oszacowań. Dla uproszczenia oznaczmy przez

$$\mathcal{I}_k^p(F, g)(z) := \int_0^1 \left| \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} (F(zt))^m (g(zt))^{k-m} \right|^{\frac{p}{k}} dt.$$

Dalej zauważmy, że gdy $N \geq N_0$, dla $z \in \partial\Omega$ prawdziwe jest następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_k^p(F, g)(z) &\leq \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m}^{\frac{p}{k}} \int_0^1 \left| \sqrt[p]{Np} f(zt) \sum_{j=1}^K u_j(zt) \right|^{\frac{mp}{k}} |g(zt)|^{\frac{(k-m)p}{k}} dt \\
&\leq \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m}^{\frac{p}{k}} (Np)^{\frac{m}{k}} M^{\frac{mp}{k}} M^{\frac{p(k-m)}{k}} \left(\sum_{j=1}^K |u_j(z)|^{\frac{p}{k}} \int_0^1 t^{\frac{pn_j}{k}} dt \right)^m \\
&\leq \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m}^{\frac{p}{k}} (Np)^{\frac{m}{k}} M^p \left(\sum_{j=1}^K \frac{k}{pn_j + k} \right)^m \\
&\leq \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m}^{\frac{p}{k}} M^p K^m k^m \frac{(Np)^{\frac{m}{k}}}{\left(\frac{1}{2}pN + k\right)^m} \\
&< \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Stąd wnioskujemy, że dla $z \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^p(F + g)(z) &= \int_0^1 \left| (F + g)(zt) \right|^k dt \\
&= \int_0^1 \left| \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (F(zt))^m (g(zt))^{k-m} \right|^{\frac{p}{k}} dt \\
&\leq \int_0^1 |F(zt)|^p dt + \int_0^1 |g(zt)|^p dt + \mathcal{I}_k^p(F, g)(z) \\
&< \mathcal{R}^p(F)(z) + \mathcal{R}^p(g)(z) + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^p(F+g)(z) &= \int_0^1 |(F+g)(zt)|^p dt \\
&= \int_0^1 \left| \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (F(zt))^m (g(zt))^{k-m} \right|^{\frac{p}{k}} dt \\
&\geq \int_0^1 |(F^k + g^k)(zt)|^{\frac{p}{k}} dt - \mathcal{I}_k^p(F, g)(z) \\
&> \int_0^1 |F(zt)|^p dt + \int_0^1 |g(zt)|^p dt - \varepsilon \\
&= \mathcal{R}^p(F)(z) + \mathcal{R}^p(g)(z) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Powyższe zależności kończą dowód. $\square$

Oprócz własności prawie dodawania można również pokazać, że przemnożenie wielomianów K -sumujących odpowiednio dużego stopnia przez dowolną funkcję ciągłą i ograniczoną pod znakiem operatora Radona jest bliskie iloczynowi działania operatora $\mathcal{R}^p$ na tym wielomianie K -sumującym oraz modułu tej funkcji w p -tej potędze.

Lemat 3.14. *Ustalmy $p > 0$. Niech $\varepsilon > 0$, $M > 0$ oraz $K \in \mathbb{N}$. Istnieje $N_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego wielomianu K -sumującego Q stopnia $N \geq N_0$ oraz funkcji $f \in \mathcal{C}_M(\bar{\Omega})$ zachodzą następujące zależności na $\partial\Omega$:*

$$|f|^p \mathcal{R}^p(\sqrt[p]{NpQ}) - \varepsilon < \mathcal{R}^p(\sqrt[p]{Np}fQ) < |f|^p \mathcal{R}^p(\sqrt[p]{NpQ}) + \varepsilon.$$

Dowód. Niech $q := \max\{p, 1\}$. Ciągła funkcja f na zbiorze zwartym $\bar{\Omega}$ jest jednostajnie ciągła, a zatem istnieje $\delta \in (0, 1)$ taka, że dla $t \in [\delta, 1]$ oraz $z \in \partial\Omega$ zachodzi

$$|f(z)|^p - \frac{\varepsilon}{4K^q} \leq |f(zt)|^p \leq |f(z)|^p + \frac{\varepsilon}{4K^q}. \quad (3.5)$$

Dla tej wybranej $\delta \in (0, 1)$ istnieje $N_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego $N \geq N_0$ mamy ograniczenie $M^p K^q \delta^{\frac{1}{2}pN+1} < \frac{\varepsilon}{4}$. Pokażemy, że dla tak wybranego N_0 teza lematu jest spełniona.

Niech $\sum_{j=1}^K u_j$ będzie rozwinięciem jednorodnym wielomianu K -sumującego Q stopnia $N \geq N_0$, gdzie $u_1, \dots, u_K$ są wielomianami jednorodnymi stopni odpowiednio $n_1, \dots, n_K \in \mathbb{N}$ spełniającymi warunek $\frac{1}{2}N \leq n_1 < \dots < n_K = N$. Na mocy nierówności trójkąta dostajemy, że dla $z \in \partial\Omega$ prawdziwe są następujące oszacowania:

$$\begin{aligned}
\left(Np \int_{\delta}^1 |Q(zt)|^p dt \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(Np \int_{\delta}^1 \left| \sum_{j=1}^K u_j(zt) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq \sum_{j=1}^K \left(Np \int_{\delta}^1 t^{pn_j} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq K \left(\frac{Np}{\frac{1}{2}Np+1} \right)^{\frac{1}{q}} < K\sqrt[q]{2}.
\end{aligned} \quad (3.6)$$

oraz

$$\begin{aligned}
\left(Np |f(z)|^p \int_0^\delta |Q(zt)|^p dt \right)^{\frac{1}{q}} &\leq M^{\frac{p}{q}} \sum_{j=1}^K \left(Np \int_0^\delta |u_j(z)|^p t^{pn_j} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq M^{\frac{p}{q}} \sum_{j=1}^K \left(\frac{Np}{pn_j + 1} \delta^{pn_j+1} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(M^p K^q \frac{Np}{\frac{1}{2}pN + 1} \delta^{\frac{1}{2}pN+1} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(2M^p K^q \delta^{\frac{1}{2}pN+1} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&< \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Prowadzi to do poniższych wniosków:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^p(\sqrt[p]{Np}fQ)(z) &= Np \int_0^1 |f(z)Q(z)|^p dt \geq Np \int_\delta^1 |f(z)Q(z)|^p dt \\
&\stackrel{(3.5)}{\geq} \left(|f(z)|^p - \frac{\varepsilon}{4K^q} \right) Np \int_\delta^1 |Q(z)|^p dt \\
&\stackrel{(3.6)}{>} Np |f(z)|^p \int_0^1 |Q(z)|^p dt - Np |f(z)|^p \int_0^\delta |Q(z)|^p dt - \frac{\varepsilon}{2} \\
&\stackrel{(3.7)}{>} |f(z)|^p \mathcal{R}^p(\sqrt[p]{Np}Q)(z) - \varepsilon
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^p(\sqrt[p]{Np}fQ)(z) &= Np \int_0^1 |f(z)Q(z)|^p dt \\
&= Np \int_\delta^1 |f(z)Q(z)|^p dt + Np \int_0^\delta |f(z)Q(z)|^p dt \\
&\stackrel{(3.5),(3.7)}{<} \left(|f(z)|^p + \frac{\varepsilon}{4K^q} \right) Np \int_\delta^1 |Q(z)|^p dt + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\stackrel{(3.6)}{<} Np |f(z)|^p \int_0^1 |Q(z)|^p dt + \varepsilon \\
&= |f(z)|^p \mathcal{R}^p(\sqrt[p]{Np}Q)(z) + \varepsilon
\end{aligned}$$

dla $z \in \partial\Omega$, a to kończy dowód lematu. $\square$

Podobną własność chcielibyśmy wykazać dla operatora $\mathcal{S}^p$ działającego na wielomianach K -sumujących. W tym celu skorzystamy z poniższego lematu.

Lemat 3.15. *Ustalmy $p > 0$. Niech $\varepsilon > 0$ oraz $m \in \mathbb{N}$. Istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \in \mathbb{N}$, jeśli $n \geq N$, to*

$$(2pn)^{\frac{1}{p}} \frac{(pn + pm + 1)^{\frac{1}{p}} - (pn + 1)^{\frac{1}{p}}}{(pn + pm + 1)^{\frac{1}{p}} (pn + 1)^{\frac{1}{p}}} < \varepsilon.$$

Dowód. Wybierzmy $k \in \mathbb{N}$ takie, że $k \geq \frac{1}{p}$, a więc $\frac{1}{pk} \leq 1$. Wtedy z nierówności trójkąta otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \left((pm + pn + 1)^{\frac{1}{pk}} \right)^k &\leq \left((pm)^{\frac{1}{pk}} + (pn + 1)^{\frac{1}{pk}} \right)^k \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (pm)^{\frac{j}{pk}} (pn + 1)^{\frac{k-j}{pk}} \\ &= (pn + 1)^{\frac{1}{p}} + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (pm)^{\frac{j}{pk}} (pn + 1)^{\frac{k-j}{pk}}. \end{aligned}$$

Powyższa zależność prowadzi do następującego oszacowania:

$$\begin{aligned} (2pn)^{\frac{1}{p}} \frac{(pn + pm + 1)^{\frac{1}{p}} - (pn + 1)^{\frac{1}{p}}}{(pn + pm + 1)^{\frac{1}{p}} (pn + 1)^{\frac{1}{p}}} &\leq (2pn)^{\frac{1}{p}} \frac{\sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (pm)^{\frac{j}{pk}} (pn + 1)^{\frac{k-j}{pk}}}{(pn + pm + 1)^{\frac{1}{p}} (pn + 1)^{\frac{1}{p}}} \\ &= \frac{(2pn)^{\frac{1}{p}}}{(pn + pm + 1)^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (pm)^{\frac{j}{pk}} (pn + 1)^{\frac{k-j}{pk}} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Stąd istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq N$ dostajemy tezę lematu, tj.

$$(2pn)^{\frac{1}{p}} \frac{(pn + pm + 1)^{\frac{1}{p}} - (pn + 1)^{\frac{1}{p}}}{(pn + pm + 1)^{\frac{1}{p}} (pn + 1)^{\frac{1}{p}}} < \varepsilon.$$

□

Lemat 3.16. *Ustalmy $p > 0$. Niech $K \in \mathbb{N}$ oraz $\varepsilon > 0$. Dla dowolnego wielomianu f istnieje $N_1 \in \mathbb{N}$ takie, że jeżeli Q jest wielomianem K -sumującym stopnia $N \geq N_1$, to*

$$|\mathcal{S}^p(\sqrt[p]{pN}fQ) - f\mathcal{S}^p(\sqrt[p]{pN}Q)| < \varepsilon \quad w \quad \overline{\Omega}.$$

Dowód. Niech $f = \sum_{i=1}^L v_i$ będzie rozwinięciem jednorodnym wielomianu f o stopniach $\deg(v_i) = m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, L$. Z Lematu 3.15 wnioskujemy, że istnieje $N_1 \in \mathbb{N}$ takie, że jeżeli $N \geq N_1$, to dla każdego m_i oraz wszystkich $n \in [\frac{1}{2}N, N]$ mamy oszacowanie

$$\begin{aligned} (pN)^{\frac{1}{p}} \frac{(pn + pm_i + 1)^{\frac{1}{p}} - (pn + 1)^{\frac{1}{p}}}{(pn + pm_i + 1)^{\frac{1}{p}} (pn + 1)^{\frac{1}{p}}} &\leq (2pn)^{\frac{1}{p}} \frac{(pn + pm_i + 1)^{\frac{1}{p}} - (pn + 1)^{\frac{1}{p}}}{(pn + pm_i + 1)^{\frac{1}{p}} (pn + 1)^{\frac{1}{p}}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{KL \max_{1 \leq k \leq L} \|v_k\|_{\Omega}}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Niech $Q = \sum_{j=1}^K u_j$ będzie rozwinięciem jednorodnym wielomianu K -sumującego Q o stopniach $\deg(u_j) = n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \dots, K$. Skoro Q jest wielomianem K -sumującym

stopnia $N \geq N_1$, to $n_j \in [\frac{1}{2}N, N]$, $j = 1, 2, \dots, K$. Oznaczmy na moment dla uproszczenia $W := \sqrt[p]{pN}Q$. Wtedy mocy (3.8) w $\bar{\Omega}$ otrzymujemy następującą zależność:

$$\begin{aligned}
\left| \mathcal{S}^p(Wf) - f\mathcal{S}^p(W) \right| &= \left| \mathcal{S}^p\left(\sqrt[p]{pN} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^K v_i u_j\right) - \sum_{i=1}^L v_i \mathcal{S}^p\left(\sqrt[p]{pN} \sum_{j=1}^K u_j\right) \right| \\
&= \left| \sqrt[p]{pN} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^K v_i u_j \left(\frac{1}{\sqrt[p]{p(m_i + n_j) + 1}} - \frac{1}{\sqrt[p]{pn_j + 1}} \right) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^K |v_i| |u_j| \left| \frac{\sqrt[p]{pN} (\sqrt[p]{pn_j + 1} - \sqrt[p]{p(m_i + n_j) + 1})}{\sqrt[p]{p(m_i + n_j) + 1} \sqrt[p]{pn_j + 1}} \right| \\
&< \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^K |v_i| |u_j| \frac{\varepsilon}{KL \max_{1 \leq k \leq L} \|v_k\|_{\Omega}} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

która kończy dowód lematu. $\square$

Na koniec tej sekcji pokażemy, że wielomiany K -sumujące dowolnego stopnia przemnożone przez ten stopień i widziane przez operator $\mathcal{S}^p$ są ograniczone przez stałą niezależną od stopnia tego wielomianu.

Lemat 3.17. *Ustalmy $p > 0$. Niech $K \in \mathbb{N}$. Jeżeli Q jest wielomianem K -sumującym, to na $\partial\Omega$ zachodzi oszacowanie*

$$\left| \mathcal{S}^p\left(\sqrt[p]{p \deg(Q)} Q\right) \right| < K \sqrt[p]{2}.$$

Dowód. Niech $\sum_{j=1}^K u_j$ będzie rozwinięciem jednorodnym wielomianu Q o stopniach $\deg(u_j) = n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \dots, K$. Skoro Q jest wielomianem K -sumującym, to $\frac{1}{2} \deg(Q) \leq n_j \leq \deg(Q)$, $j = 1, 2, \dots, K$. Dzięki własnościom wielomianów K -sumujących otrzymujemy wymagane oszacowanie na $\partial\Omega$

$$\begin{aligned}
\left| \mathcal{S}^p\left(\sqrt[p]{p \deg(Q)} Q\right) \right| &= \left| \mathcal{S}^p\left(\sqrt[p]{p \deg(Q)} \sum_{j=1}^K u_j\right) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^K \sqrt[p]{\frac{p \deg(Q)}{pn_j + 1}} u_j \right| \\
&\leq \sqrt[p]{\frac{p \deg(Q)}{\frac{1}{2}p \deg(Q) + 1}} \sum_{j=1}^K |u_j| \\
&< K \sqrt[p]{2}
\end{aligned}$$

i to kończy dowód. $\square$

3.5. Własności lakunarnych wielomianów K -sumujących

Tę sekcję rozpoczniemy od dość ogólnego lematu o pewnych wielomianach, który de facto posłuży nam do udowodnienia zasadniczej własności lakunarnych wielomianów K -sumujących. Mianowicie pokażemy, że działanie operatora $\mathcal{R}^p$ na lakunarnych

wielomianach K -sumujących odpowiednio dużego stopnia przemnożonych przez ten stopień jest funkcją ograniczoną z góry i z dołu przez stałe niezależne od stopni tych wielomianów.

Lemat 3.18. *Ustalmy $p > 0$. Niech $m \in \mathbb{N}$, $\eta \in (1, 2)$, $\delta \in (0, 1)$. Istnieją $c_m \in (0, \delta)$ oraz $l_m \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego wielomianu postaci $P_m(t) = \sum_{j=1}^m a_j t^{n_j}$, gdzie $\delta \leq \max_{1 \leq j \leq m} |a_j| \leq 1$, $n_1 \geq l_m$ oraz $\eta < \frac{n_{j+1}}{n_j} < 2$, $j = 1, \dots, m-1$, zachodzi następujące szacowanie z dołu:*

$$\int_0^1 p n_m |P_m(t)|^p dt \geq c_m.$$

Dowód. Niech $q := \max\{p, 1\}$. Przeprowadzimy dowód indukcyjny. W przypadku $m = 1$ teza jest spełniona w sposób oczywisty. Rozważmy wielomian $P_1(t) = a_1 t^{n_1}$, gdzie $|a_1| \geq \delta$. Wybierzmy $l_1 \in \mathbb{N}$ takie, że $p n_1 \geq 1$ dla dowolnego $n_1 \geq l_1$. Wtedy

$$\int_0^1 p n_1 |P_1(t)|^p dt = \frac{p n_1}{p n_1 + 1} |a_1|^p \geq \frac{1}{2} \delta^p =: c_1.$$

W przypadku gdy $m = 2$ wybierzemy najpierw odpowiednią stałą $l_2 \in \mathbb{N}$. Istnieje stała $\alpha > 0$ taka, że $e^{-\frac{p\alpha(\eta-1)}{q}} < \frac{\delta}{10}$. Stąd możemy wybrać stałą $l_2 \in \mathbb{N}$ taką, że dla dowolnych $n_1 \geq l_2$ zachodzi

- $\frac{p n_1}{p n_1 + 1} \geq \frac{9}{10}$
- $\left(1 - \frac{\alpha}{n_1}\right)^{\frac{p n_1 + 1}{q}} \geq \frac{5}{9} e^{-\frac{p\alpha}{q}}.$

Dalej rozważmy wielomian $P_2(t) = a_1 t^{n_1} + a_2 t^{n_2}$, gdzie $\eta < \frac{n_2}{n_1} < 2$, $n_1 > l_2$ oraz $\delta \leq \max\{|a_1|, |a_2|\} \leq 1$. Oznaczmy dla uproszczenia notacji $\mathcal{P}_2(t) := p n_2 |P_2(t)|^p$. Jeśli $|a_1| < \left(\frac{2}{5}\delta\right)^{\frac{q}{p}}$, a więc $|a_2| \geq \delta$, to mamy następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 \mathcal{P}_2(t) dt\right)^{\frac{1}{q}} &\geq \left(\frac{p n_2}{p n_2 + 1}\right)^{\frac{1}{q}} |a_2|^{\frac{p}{q}} - \left(\frac{p n_2}{p n_1 + 1}\right)^{\frac{1}{q}} |a_1|^{\frac{p}{q}} \\ &\geq \frac{9}{10} \delta - 2 \left(\frac{p n_1}{p n_1 + 1}\right)^{\frac{1}{q}} |a_1|^{\frac{p}{q}} \\ &\geq \frac{9}{10} \delta - \frac{4}{5} \delta \\ &= \frac{\delta}{10}. \end{aligned}$$

W przeciwnym przypadku, gdy $|a_1| \geq \left(\frac{2}{5}\delta\right)^{\frac{q}{p}}$, otrzymujemy co następuje:

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \mathcal{P}_2(t) dt\right)^{\frac{1}{q}} &\geq \left(\int_0^{1-\frac{\alpha}{n_1}} pn_2 |P_2(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\geq \left(\int_0^{1-\frac{\alpha}{n_1}} pn_2 |a_1|^p t^{pn_1} dt\right)^{\frac{1}{q}} - \left(\int_0^{1-\frac{\alpha}{n_1}} pn_2 |a_2|^p t^{pn_2} dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\geq \left(\frac{pn_2}{pn_1+1} \left(1 - \frac{\alpha}{n_1}\right)^{pn_1+1} |a_1|^p\right)^{\frac{1}{q}} - \left(\frac{pn_2}{pn_2+1} \left(1 - \frac{\alpha}{n_1}\right)^{pn_2+1} |a_2|^p\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\geq \eta^{\frac{1}{q}} \frac{pn_1}{pn_1+1} \left(1 - \frac{\alpha}{n_1}\right)^{\frac{pn_1+1}{q}} |a_1|^{\frac{p}{q}} - \left(1 - \frac{\alpha}{n_1}\right)^{\frac{pn_2+1}{q}} \\
&\geq \frac{\delta}{5} e^{-\frac{p\alpha}{q}} - e^{-\frac{p\eta\alpha}{q}} = e^{-\frac{p\alpha}{q}} \left(\frac{\delta}{5} - e^{-\frac{p\alpha(\eta-1)}{q}}\right) \geq \frac{\delta}{10} e^{-\frac{p\alpha}{q}}.
\end{aligned}$$

Teraz wystarczy zdefiniować stałą $c_2 := \frac{\delta}{10} e^{-\frac{p\alpha}{q}}$.

Postępując indukcyjnie założymy, że teza lematu zachodzi dla $m = k-1$ ze stałymi $c_{k-1} \in (0, \delta)$ oraz $l_{k-1} \in \mathbb{N}$. Wtedy istnieje $\beta > 0$ taka, że $e^{-\frac{p\beta(\eta-1)}{q}} < \frac{9}{10} \frac{c_{k-1}}{(k-1)2^{2k-1}}$. Zatem możemy wybrać liczbę naturalną $l_k \geq l_{k-1}$ taką, że dla dowolnego $n_1 > l_k$ spełniona jest nierówność $\frac{pn_1}{pn_1+1} \left(1 - \frac{\beta}{n_1}\right)^{\frac{pn_1+1}{q}} \geq \frac{9}{10} e^{-\frac{p\beta}{q}}$. Rozważmy wielomian

$P_k(t) = \sum_{j=1}^k a_j t^{n_j}$, gdzie $\delta \leq \max_{1 \leq j \leq k} |a_j| \leq 1$ oraz $\eta < \frac{n_{j+1}}{n_j} < 2$ dla $j = 1, \dots, k-1$, gdzie $n_1 > l_k$. Skoro lemat zachodzi dla $m = k-1$ ze stałą c_{k-1} , to w szczególności oznacza to, że jeśli $\max_{2 \leq j \leq k} |a_j| \geq \delta$, to

$$\int_0^1 pn_k \left| \sum_{j=2}^k a_j t^{n_j} \right|^p dt \geq c_{k-1}.$$

Ponownie dla uproszczenia notacji oznaczmy na moment $\mathcal{P}_k(t) := pn_k |P_k(t)|^p$. Jeżeli $|a_1| < \left(\frac{c_{k-1}}{2^k}\right)^{\frac{q}{p}} < \delta$, a więc także $\max_{2 \leq j \leq k} |a_j| \geq \delta$, to korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \mathcal{P}_k(t) dt\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\int_0^1 pn_k \left| \sum_{j=1}^k a_j t^{n_j} \right|^p dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\geq \left(\int_0^1 pn_k \left| \sum_{j=2}^k a_j t^{n_j} \right|^p dt\right)^{\frac{1}{q}} - \left(\int_0^1 pn_k |a_1|^p t^{pn_1} dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\geq c_{k-1}^{\frac{1}{q}} - \left(\frac{pn_k}{pn_1+1}\right)^{\frac{1}{q}} |a_1|^{\frac{p}{q}} \\
&\geq c_{k-1} - 2^{k-1} \left(\frac{pn_1}{pn_1+1}\right)^{\frac{1}{q}} |a_1|^{\frac{p}{q}} \\
&\geq \frac{1}{2} c_{k-1}.
\end{aligned}$$

Z drugiej strony, jeśli $|a_1| \geq \left(\frac{c_{k-1}}{2^k}\right)^{\frac{q}{p}}$, to

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \mathcal{P}_k(t) dt\right)^{\frac{1}{q}} &\geq \left(\int_0^{1-\frac{\beta}{n_1}} pn_m \left|\sum_{j=1}^k a_j t^{n_j}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\geq \left(\int_0^{1-\frac{\beta}{n_1}} pn_k |a_1|^p t^{pn_1} dt\right)^{\frac{1}{q}} - \left(\sum_{j=2}^k \int_0^{1-\frac{\beta}{n_1}} pn_k |a_j|^p t^{pn_j} dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\geq \left(\int_0^{1-\frac{\beta}{n_1}} pn_k |a_1|^p t^{pn_1} dt\right)^{\frac{1}{q}} - \sum_{j=2}^k \left(\int_0^{1-\frac{\beta}{n_1}} pn_k |a_j|^p t^{pn_j} dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\geq \left(\frac{pn_k}{pn_1+1}\right)^{\frac{1}{q}} \left(1 - \frac{\beta}{n_1}\right)^{\frac{pn_1+1}{q}} |a_1|^{\frac{p}{q}} \\
&\quad - \sum_{j=2}^k \left(\frac{pn_k}{pn_j+1}\right)^{\frac{1}{q}} \left(1 - \frac{\beta}{n_1}\right)^{\frac{pn_j+1}{q}} |a_j|^{\frac{p}{q}} \\
&\geq \left(\frac{pn_1}{pn_1+1}\right)^{\frac{1}{q}} \left(1 - \frac{\beta}{n_1}\right)^{\frac{pn_1+1}{q}} |a_1|^{\frac{p}{q}} - \sum_{j=2}^k \left(\frac{2^{k-j} pn_j}{pn_j+1}\right)^{\frac{1}{q}} \left(1 - \frac{\beta}{n_1}\right)^{\frac{pn_j+1}{q}} \\
&\geq \frac{pn_1}{pn_1+1} \left(1 - \frac{\beta}{n_1}\right)^{\frac{pn_1+1}{q}} |a_1|^{\frac{p}{q}} - \sum_{j=2}^k 2^{k-j} e^{-\frac{\beta \eta^{j-1}}{q}} \\
&\geq \frac{9}{10} e^{-\frac{p\beta}{q} \frac{c_{k-1}}{2^k}} - (k-1) 2^{k-2} e^{-\frac{p\beta \eta}{q}} \\
&\geq e^{-\frac{p\beta}{q}} \left(\frac{9}{10} \frac{c_{k-1}}{2^k} - (k-1) 2^{k-2} e^{-\frac{p\beta(\eta-1)}{q}}\right) \\
&\geq \frac{9}{10} e^{-\frac{p\beta}{q} \frac{c_{k-1}}{2^{k+1}}}.
\end{aligned}$$

Teraz na mocy powyższych nierówności wystarczy wybrać odpowiednio stałą c_k i to kończy dowód. $\square$

Wniosek 3.19. *Ustalmy $p > 0$. Niech $K \in \mathbb{N}$. Istnieją stałe $c_K \in (0, \frac{1}{2})$, $C_K > 1$ oraz $l_K \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego lakunarnego wielomianu K -sumującego Q stopnia $N \geq l_K$ prawdziwe są następujące ograniczenia:*

$$c_K \leq \int_0^1 pN |Q(zt)|^p dt \leq C_K, \quad z \in \partial\Omega.$$

Dowód. Niech $C_K := 2K^{\max\{p,1\}}$ oraz $c_K \in (0, \frac{1}{2})$, $l_K \in \mathbb{N}$ będą stałymi otrzymanymi z Lematu 3.18 zastosowanego do $m := K$, $\eta := \sqrt[p]{2}$ oraz $\delta := \frac{1}{2}$. Niech $\sum_{j=1}^K u_k$ będzie rozwinięciem jednorodnym wielomianu Q , gdzie każdy wielomian jednorodny u_j jest stopnia $n_j \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że ponieważ Q jest lakunarnym wielomianem K -sumującym stopnia $N \geq l_K$, to dla $z \in \partial\Omega$ wielomian Q spełnia założenia Lematu 3.18 z $a_j := u_j(z)$, a zatem

$$\int_0^1 pN |Q(zt)|^p dt = \int_0^1 pN \left| \sum_{j=1}^K u_j(z) t^{n_j} \right|^p dt \geq c_K.$$

Teraz, by pokazać drugą nierówność niech $q := \max\{p, 1\}$. Wtedy możemy oszacować

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 pN |Q(zt)|^p dt \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\int_0^1 pN \left| \sum_{j=1}^K u_j(z) t^{n_j} \right|^p dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sum_{j=1}^K \left(\int_0^1 pN |u_j(z)|^{pt^{pn_j}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sum_{j=1}^K \left(\frac{pN}{pn_j + 1} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq K \left(\frac{pN}{\frac{1}{2}pN + 1} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq K \sqrt[q]{2}. \end{aligned}$$

A stąd $\int_0^1 pN |Q(zt)|^p dt \leq C_K$ i to kończy dowód. $\square$

3.6. Rozwiązanie odwrotnego problemu Radona

W poprzednich sekcjach pokazaliśmy kilka własności lakunarnych wielomianów K -sumujących widzianych odpowiednio przez operatory $\mathcal{R}^p$ i $\mathcal{S}^p$. W poniższym twierdzeniu pokażemy jak możemy skorzystać z tych własności, by uzyskać generatory, za pomocą których indukcyjnie będziemy mogli skonstruować rozwiązanie odwrotnego problemu Radona.

Twierdzenie 3.20. *Ustalmy $p > 0$. Istnieją stałe $\theta \in (0, 1)$ oraz $\kappa > 0$ takie, że jeżeli Ψ jest ściśle dodatnią funkcją ciągłą na $\partial\Omega$, T jest zwartym podzbiorem Ω oraz $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$, $N_0 \in \mathbb{N}$, $M_0 > 0$, to istnieje wielomian F rzędu większego niż N_0 o następujących własnościach*

- (c0) $\|F\|_T < \delta$
- (c1) $\theta\Psi < \mathcal{R}^p(F) < \Psi$ na $\partial\Omega$
- (c2) $|\mathcal{R}^p(\phi + F) - \mathcal{R}^p(\phi) - \mathcal{R}^p(F)| < \varepsilon$ na $\partial\Omega$ dla dowolnej $\phi \in \mathcal{C}_{M_0}(\overline{\Omega})$
- (c3) $|\mathcal{S}^p(F)| < \kappa(\Psi)^{\frac{1}{p}}$ na $\partial\Omega$.

Dowód. Weźmy $N = N(\partial\Omega) \in \mathbb{N}$, $K = K(\partial\Omega) \in \mathbb{N}$ oraz $N_K \in \mathbb{N}$ odpowiednio z Twierdzenia 3.5 oraz z Wniosku 3.11. Do wybranego K dobierzmy stałe $c_K \in (0, \frac{1}{2})$, $C_K > 1$ oraz $l_K \in \mathbb{N}$ z Wniosku 3.19. Pokażemy, że dla dowodu twierdzenia wystarczy wybrać stałe $\theta := \frac{c_K}{8NC_K}$ oraz $\kappa := \frac{NK \sqrt[p]{2} + 1}{\sqrt[p]{2}C_K}$.

Na początek na mocy Twierdzenia 3.5 istnieją wielomiany $f_1, \dots, f_N$ takie, że

$$\frac{\Psi}{2N} < \max_{1 \leq m \leq N} |f_m|^p < \frac{\Psi}{N} \quad \text{na } \partial\Omega. \quad (3.9)$$

Niech $\hat{\varepsilon} := \min \left\{ \varepsilon, \frac{c_K}{8N} \inf_{z \in \partial\Omega} \Psi(z) \right\}$ oraz $\alpha := \inf_{z \in \partial\Omega} (\Psi(z))^{\frac{1}{p}}$. Na mocy Lematu 3.14 oraz Lematu 3.16 możemy wybrać $\overline{N} \in \mathbb{N}$ taką, że $\overline{N} \geq \max \{2N_0, l_K, N_K\}$ oraz dla

każdego $m = 1, \dots, N$ dowolny lakunarny wielomian K -sumujący Q stopnia większego niż $\bar{N}$ ma następujące własności dla $z \in \partial\Omega$:

$$\left| \mathcal{S}^p \left(\sqrt[p]{p \deg(Q)} f_m Q \right) (z) - f_m(z) \mathcal{S}^p \left(\sqrt[p]{p \deg(Q)} Q \right) (z) \right| < \frac{\alpha}{N}, \quad (3.10)$$

$$\left| \mathcal{R}^p \left(\sqrt[p]{p \deg(Q)} f_m Q \right) (z) - |f_m(z)|^p \mathcal{R}^p \left(\sqrt[p]{p \deg(Q)} Q \right) (z) \right| < \frac{\hat{\varepsilon}}{N}, \quad (3.11)$$

$$c_K \leq \int_0^1 p \deg(Q) |Q(zt)|^p dt \leq C_K \quad (3.12)$$

oraz

$$\left\| \deg(Q) Q \right\|_T < \frac{\delta}{\sqrt[p]{p} \left\| \Psi \right\|_{\partial\Omega}}. \quad (3.13)$$

Indukcyjnie pokażemy, że można wybrać $n_1, n_2, \dots, n_N \in \mathbb{N}$ oraz skonstruować lakunarne wielomiany K -sumujące $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ rzędów odpowiednio co najmniej $n_1, n_2, \dots, n_N$, takie, że dla $m = 1, \dots, N$ i dowolnej $\phi \in \mathcal{C}_{M_0}(\bar{\Omega})$ zachodzi następująca zależność na $\partial\Omega$:

$$\left| \mathcal{R}^p \left(\phi + \sum_{j=1}^m \sqrt[p]{p \deg(Q_j)} f_j Q_j \right) - \mathcal{R}^p(\phi) - \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=1}^m \sqrt[p]{p \deg(Q_j)} f_j Q_j \right) \right| < \frac{m\hat{\varepsilon}}{N} \quad (3.14)$$

oraz

$$\left| \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=1}^m \sqrt[p]{p \deg(Q_j)} f_j Q_j \right) - \sum_{j=1}^m \mathcal{R}^p \left(\sqrt[p]{p \deg(Q_j)} f_j Q_j \right) \right| < \frac{m\hat{\varepsilon}}{N}. \quad (3.15)$$

Dla $m = 1$ wybieramy $n_1 \geq \bar{N}$ z Lematu 3.13 zastosowanego do następujących danych: $\varepsilon := \frac{\hat{\varepsilon}}{N}$, $M := M_0$, $f := f_1$. Wtedy na mocy Wniosku 3.11, istnieje lakunarny wielomian K -sumujący Q_1 rzędu większego niż n_1 taki, że

$$\left| \mathcal{R}^p \left(\phi + \sqrt[p]{p \deg(Q_1)} f_1 Q_1 \right) - \mathcal{R}^p(\phi) - \mathcal{R}^p \left(\sqrt[p]{p \deg(Q_1)} f_1 Q_1 \right) \right| < \frac{\hat{\varepsilon}}{N} \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Postępując indukcyjnie, założmy, że już wybraliśmy $n_0, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ oraz lakunarne wielomiany K -sumujące $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ o żądanych własnościach dla $1 \leq m < N$. Wtedy ponownie możemy zastosować Lemat 3.13 do danych:

$$\varepsilon := \frac{\hat{\varepsilon}}{2N}, \quad M := \sup_{z \in \partial\Omega} \left(|\phi(z)| + \left| \sum_{j=1}^m \sqrt[p]{p \deg(Q_j)} f_j(z) Q_j(z) \right| \right), \quad f := f_{m+1},$$

by otrzymać liczbę naturalną $n_{m+1} \geq \bar{N}$. Wtedy Wniosek 3.11 pozwala nam skonstruować lakunarny wielomian K -sumujący Q_{m+1} rzędu większego niż n_{m+1} . Oznaczmy dla uproszczenia na moment $F_j := \sqrt[p]{p \deg(Q_j)} f_j Q_j$ dla $j = 1, 2, \dots, m+1$. Wtedy możemy zauważyć, że na $\partial\Omega$ prawdziwe są następujące nierówności:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^p \left(\phi + \sum_{j=1}^{m+1} F_j \right) &> \mathcal{R}^p \left(\phi + \sum_{j=1}^m F_j \right) + \mathcal{R}^p(F_{m+1}) - \frac{\hat{\varepsilon}}{2N} \\ &> \mathcal{R}^p(\phi) + \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=1}^m F_j \right) + \mathcal{R}^p(F_{m+1}) - \frac{m\hat{\varepsilon}}{N} - \frac{\hat{\varepsilon}}{2N} \\ &> \mathcal{R}^p(\phi) + \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=1}^{m+1} F_j \right) - \frac{(m+1)\hat{\varepsilon}}{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^p\left(\phi + \sum_{j=1}^{m+1} F_j\right) &< \mathcal{R}^p\left(\phi + \sum_{j=1}^m F_j\right) + \mathcal{R}^p(F_{m+1}) + \frac{\widehat{\varepsilon}}{2N} \\
&< \mathcal{R}^p(\phi) + \mathcal{R}^p\left(\sum_{j=1}^m F_j\right) + \mathcal{R}^p(F_{m+1}) + \frac{m\widehat{\varepsilon}}{N} + \frac{\widehat{\varepsilon}}{2N} \\
&< \mathcal{R}^p(\phi) + \mathcal{R}^p\left(\sum_{j=1}^{m+1} F_j\right) + \frac{(m+1)\widehat{\varepsilon}}{N}
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^p\left(\sum_{j=1}^{m+1} F_j\right) &> \mathcal{R}^p\left(\sum_{j=1}^m F_j\right) + \mathcal{R}^p(F_{m+1}) - \frac{\widehat{\varepsilon}}{2N} > \sum_{j=1}^{m+1} \mathcal{R}^p(F_j) - \frac{(m+1)\widehat{\varepsilon}}{N}, \\
\mathcal{R}^p\left(\sum_{j=1}^{m+1} F_j\right) &< \mathcal{R}^p\left(\sum_{j=1}^m F_j\right) + \mathcal{R}^p(F_{m+1}) + \frac{\widehat{\varepsilon}}{2N} < \sum_{j=1}^{m+1} \mathcal{R}^p(F_j) + \frac{(m+1)\widehat{\varepsilon}}{N}.
\end{aligned}$$

Zdefiniujmy teraz wielomian $F := \sum_{m=1}^N \sqrt[p]{\frac{p \deg(Q_m)}{K C_K}} f_m Q_m$. Zauważmy, że na mocy nierówności (3.13) wielomian F spełnia warunek (c0) oraz dzięki (3.14) zachodzi również (c2). Dla każdego $z \in \partial\Omega$ możemy wybrać indeks $m_z \in \{1, \dots, N\}$, dla którego $|f_{m_z}(z)|^p = \max_{1 \leq m \leq N} |f_m(z)|^p > \frac{\Psi(z)}{2N}$. Wtedy dla $z \in \partial\Omega$ otrzymujemy co następuje:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^p(F)(z) &= \int_0^1 \left| \sum_{m=1}^N \sqrt[p]{\frac{p \deg(Q_m)}{2C_K}} f_m(z) Q_m(z) \right|^p dt \\
&= \frac{1}{2C_K} \int_0^1 \left| \sum_{m=1}^N \sqrt[p]{p \deg(Q_m)} f_m(z) Q_m(z) \right|^p dt \\
&\stackrel{(3.15)}{>} \frac{1}{2C_K} \sum_{m=1}^N \int_0^1 \left| \sqrt[p]{p \deg(Q_m)} f_m(z) Q_m(z) \right|^p dt - \frac{c_K}{16NC_K} \inf_{z \in \partial\Omega} \Psi(z) \\
&\stackrel{(3.11)}{>} \sum_{m=1}^N |f_m(z)|^p \frac{p \deg(Q_m)}{2C_K} \int_0^1 |Q_m(z)|^p dt - \frac{c_K}{8NC_K} \inf_{z \in \partial\Omega} \Psi(z) \\
&\geq |f_{m_z}(z)|^p \frac{p \deg(Q_{m_z})}{2C_K} \int_0^1 |Q_{m_z}(z)|^p dt - \frac{c_K}{8NC_K} \inf_{z \in \partial\Omega} \Psi(z) \\
&\stackrel{(3.12)}{\geq} \frac{c_K}{2C_K} |f_{m_z}(z)|^p - \frac{c_K}{8NC_K} \inf_{z \in \partial\Omega} \Psi(z) \\
&\stackrel{(3.9)}{>} \frac{c_K}{4NC_K} \Psi(z) - \frac{c_K}{8NC_K} \Psi(z) \\
&= \frac{c_K}{8NC_K} \Psi(z) \\
&= \theta \Psi(z)
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^p(F)(z) &= \int_0^1 \left| \sum_{m=1}^N \sqrt[p]{\frac{p \deg(Q_m)}{2C_K}} f_m(z) Q_m(z) \right|^p dt \\
&= \frac{1}{2C_K} \int_0^1 \left| \sum_{m=1}^N \sqrt[p]{p \deg(Q_m)} f_m(z) Q_m(z) \right|^p dt \\
&\stackrel{(3.15)}{<} \frac{1}{2C_K} \sum_{m=1}^N \int_0^1 \left| \sqrt[p]{p \deg(Q_m)} f_m(z) Q_m(z) \right|^p dt + \frac{c_K}{16NC_K} \inf_{z \in \partial\Omega} \Psi(z) \\
&\stackrel{(3.11)}{<} \frac{1}{2C_K} \sum_{m=1}^N |f_m(z)|^p p \deg(Q_m) \int_0^1 |Q_m(z)|^p dt + \frac{c_K}{8NC_K} \inf_{z \in \partial\Omega} \Psi(z) \\
&\stackrel{(3.9)}{<} \frac{\Psi(z)}{2C_K} C_K + \frac{1}{2} \Psi(z) \\
&= \Psi(z).
\end{aligned}$$

Z racji, że dla Q_m zachodzi (3.10), to dla $z \in \partial\Omega$ mamy również oszacowanie

$$\begin{aligned}
|\mathcal{S}^p(F)(z)| &= \left| \mathcal{S}^p \left(\sum_{m=1}^N \sqrt[p]{\frac{p \deg(Q_m)}{2C_K}} f_m Q_m \right) (z) \right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt[p]{2C_K}} \sum_{m=1}^N \left| \mathcal{S}^p \left(\sqrt[p]{p \deg(Q_m)} f_m Q_m \right) (z) \right| \\
&\stackrel{(3.10)}{<} \frac{1}{\sqrt[p]{2C_K}} \sum_{m=1}^N |f_m(z)| \left| \mathcal{S}^p \left(\sqrt[p]{p \deg(Q_m)} Q_m \right) (z) \right| + \frac{1}{\sqrt[p]{2C_K}} \inf_{z \in \partial\Omega} (\Psi(z))^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{NK \sqrt[p]{2}}{\sqrt[p]{2C_K}} |f_{m_z}(z)| + \frac{1}{\sqrt[p]{2C_K}} (\Psi(z))^{\frac{1}{p}} \\
&< \kappa (\Psi(z))^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

a zatem pokazaliśmy, że wielomian F posiada wszystkie własności (c0) – (c3) i to kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 3.21. *Ustalmy $p > 0$. Niech Φ będzie ściśle dodatnią funkcją ciągłą na $\partial\Omega$. Istnieje funkcja $G \in \mathcal{O}(\Omega)$ taka, że*

$$\mathcal{R}^p(G) = \Phi \text{ na } \partial\Omega.$$

Co więcej, $\mathcal{S}^p(G) \in \mathcal{O}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Dowód. Weźmy $\theta \in (0, 1)$ oraz $\kappa > 0$ z Twierdzenia 3.20. Pokażemy, że można skonstruować indukcyjnie ciąg wielomianów $\{F_j\}_{j=0}^\infty$ spełniających następujące zależności na $\partial\Omega$:

$$\left(1 - \frac{\theta}{2}\right) \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^{j-1} F_i\right)\right) > \Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i\right) > 0 \quad (3.16)$$

oraz

$$|\mathcal{S}^p(F_j)| < \kappa \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{j}{p}} \|\Phi\|_{\partial\Omega}^{\frac{1}{p}}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

Wybermy $F_0 \equiv 0$ i zauważmy, że dla takiej funkcji warunek (3.17) zachodzi. Dla $j = 1$ konstruujemy wielomian F_1 stosując Twierdzenie 3.20 z $\Psi := \Phi$. Wprost obserwujemy, że wielomian F_1 spełnia warunki (3.16) oraz (3.17). Następnie założymy indukcyjnie, że udało nam się już skonstruować wielomiany $F_0, F_1, \dots, F_j$, gdzie $j \geq 1$, o wymaganych własnościach. Ponownie korzystając z Twierdzenia 3.20 tym razem zastosowanego do poniższych danych:

$$\Psi := \frac{3}{4} \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \right), \quad \varepsilon := \frac{\theta}{4} \inf_{z \in \partial\Omega} \left(\Phi(z) - \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right)(z) \right), \quad M_0 := \sup_{z \in \partial\Omega} \left| \sum_{i=0}^j F_i(z) \right|,$$

dostajemy wielomian F_{j+1} , dla którego na $\partial\Omega$ zachodzą następujące zależności:

1. $\frac{3}{4} \theta \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \right) < \mathcal{R}^p(F_{j+1}) < \frac{3}{4} \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \right)$
2. $\left| \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^{j+1} F_i \right) - \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) - \mathcal{R}^p(F_{j+1}) \right| < \frac{\theta}{4} \inf_{z \in \partial\Omega} \left(\Phi(z) - \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right)(z) \right)$
3. $|\mathcal{S}^p(F_{j+1})| < \kappa \left(\frac{3}{4} \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \right) \right)^{\frac{1}{p}}.$

Z powyższych warunków wynika, że na $\partial\Omega$ mamy poniższe oszacowania:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^{j+1} F_i \right) &> \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) + \mathcal{R}^p(F_{j+1}) - \frac{\theta}{4} \inf_{z \in \partial\Omega} \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \right)(z) \\ &> \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) + \frac{3}{4} \theta \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \right) - \frac{\theta}{4} \inf_{z \in \partial\Omega} \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \right)(z) \\ &> \frac{3}{4} \theta \Phi + \left(1 - \frac{3}{4} \theta \right) \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) - \frac{\theta}{4} \inf_{z \in \partial\Omega} \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \right)(z) \\ &> \frac{\theta}{2} \Phi + \left(1 - \frac{\theta}{2} \right) \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^{j+1} F_i \right) &< \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) + \mathcal{R}^p(F_{j+1}) + \frac{\theta}{4} \inf_{z \in \partial\Omega} \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \right)(z) \\ &< \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) + \frac{3}{4} \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \right) + \frac{\theta}{4} \inf_{z \in \partial\Omega} \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \right)(z) \\ &\leq \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) + \frac{3}{4} \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \right) + \frac{1}{4} \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \right) \\ &\leq \Phi. \end{aligned}$$

Zatem spełniona jest zależność na $\partial\Omega$

$$\left(1 - \frac{\theta}{2} \right) \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \right) > \Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{i=0}^{j+1} F_i \right) > 0.$$

Dalej biorąc pod uwagę założenie indukcyjne otrzymujemy

$$\left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{j+1} \Phi > \Phi - \mathcal{R}^p\left(\sum_{i=0}^{j+1} F_i\right) > 0 \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Stąd wprost wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}^p\left(\sum_{j=0}^n F_j\right)(z) = \Phi(z), \quad z \in \partial\Omega.$$

Ponadto, $|\mathcal{S}^p(F_{j+1})| < \kappa \left(\Phi - \mathcal{R}^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right)\right)^{\frac{1}{p}} < \kappa \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{j+1}{p}} \|\Phi\|_{\partial\Omega}^{\frac{1}{p}}$ na $\partial\Omega$.

Niech $q := \max\{p, 1\}$. Zauważmy, że jeżeli $n \geq m$, to

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \partial\Omega} \left(\mathcal{R}^p\left(\sum_{j=0}^m F_j - \sum_{j=0}^n F_j\right)(z)\right)^{\frac{1}{q}} &= \sup_{z \in \partial\Omega} \left(\mathcal{R}^p\left(\sum_{j=n+1}^m F_j\right)(z)\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sup_{z \in \partial\Omega} \left(\sum_{j=n+1}^m \mathcal{R}^p(F_j)(z)\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sup_{z \in \partial\Omega} \left(\sum_{j=n+1}^m \left(\Phi(z) - \mathcal{R}^p\left(\sum_{i=0}^{j-1} F_i\right)(z)\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\ &< \sum_{j=n+1}^m \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{j}{q}} \|\Phi\|_{\partial\Omega}^{\frac{1}{q}} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

a więc $\left\{\sum_{j=0}^n F_j\right\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $\mathcal{HR}^p(\Omega)$. Na mocy Propozycji 3.7, ciąg ten jest zbieżny w przestrzeni $\mathcal{HR}^p(\Omega)$. Zatem możemy zdefiniować funkcję $G := \sum_{j=0}^{\infty} F_j$, która jest holomorficzna w Ω . Co więcej, $\mathcal{R}^p\left(\sum_{j=0}^n F_j\right) \rightrightarrows \mathcal{R}^p(G)$ na $\partial\Omega$, gdy $n \rightarrow \infty$, z czego wnioskujemy, że $\mathcal{R}^p(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}^p\left(\sum_{j=0}^n F_j\right) = \Phi$ na $\partial\Omega$.

Na koniec zauważmy, że dla każdego $z \in \bar{\Omega}$ mamy następujące oszacowanie

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\mathcal{S}^p(F_j)(z)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sup_{z \in \partial\Omega} |\mathcal{S}^p(F_j)(z)| < \sum_{j=0}^{\infty} \kappa \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{j}{p}} \|\Phi\|_{\partial\Omega}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Stąd $\mathcal{S}^p(G)$ jest funkcją ciągłą w $\bar{\Omega}$. Z racji, że G jest funkcją holomorficzną w Ω , to również $\mathcal{S}^p(G) \in \mathcal{O}(\Omega)$, a zatem $\mathcal{S}^p(G) \in \mathcal{O}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ i to kończy dowód całego twierdzenia. $\square$

3.7. Funkcje o rozbieżnym szeregu współczynników Taylora

Okazuje się, że konstrukcyjne metody rozwiązywania problemu Radona dają nam swego rodzaju elastyczność. Otóż możemy wyposażać otrzymywane rozwiązania w dodatkowe własności. W tej sekcji pokażemy, że można skonstruować takie rozwiązanie

$f \in \mathcal{O}(\Omega)$, że każde cięcie zespolone funkcji $\mathcal{S}^p(f)$ ma rozbieżny szereg współczynników Taylora z dowolną potęgą $s < \min\{1, p\}$. Co więcej, dla $p \leq 1$, funkcja $\mathcal{S}^p(f)$ może być ciągła na $\bar{\Omega}$, a dla $p \in (1, 2]$ całkowalna z kwadratem na wszystkich okręgach jednostkowych wyznaczonych przez punkty brzegowe obszaru, tzn. na $z\partial\mathbb{D}$, gdzie $z \in \partial\Omega$. Aby móc skonstruować takie rozwiązanie, będziemy potrzebowali następującego dość technicznego lematu.

Lemat 3.22. *Istnieje $\theta \in (0, 1)$ oraz $C > 0$ takie, że jeżeli $h \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ jest ściśle dodatnią funkcją na $\partial\Omega$, g jest ciągłą i ograniczoną funkcją w $\bar{\Omega}$, K zwartym podzbiorem Ω , $M > 0$, $a, c, \gamma, \tau \in (0, 1)$, to istnieje $N \in \mathbb{N}$ oraz ciąg wielomianów ortogonalnych $\{P_k\}_{k=0}^\infty$ o następujących własnościach:*

- (w1) $\text{ord}(P_0) \geq M$
- (w2) $\mathcal{R}^p(P_k) < ah$ na $\partial\Omega$
- (w3) $\text{ord}(P_k) > \deg(P_{k-1})$
- (w4) $\mathcal{R}^p\left(\sum_{j=0}^k P_j\right) < \mathcal{R}^p\left(\sum_{j=0}^{k-1} P_j\right) + a\left(h - \mathcal{R}^p\left(\sum_{j=0}^{k-1} P_j\right)\right) < h$ na $\partial\Omega$
- (w5) $\mathcal{R}^p\left(\sum_{j=0}^k P_j\right) > \mathcal{R}^p\left(\sum_{j=0}^{k-1} P_j\right) + \frac{1}{2}\theta a\left(h - \mathcal{R}^p\left(\sum_{j=0}^{k-1} P_j\right)\right)$ na $\partial\Omega$
- (w6) $\left|\mathcal{R}^p\left(\sum_{j=0}^k P_j\right) - \sum_{j=0}^k \mathcal{R}^p(P_j)\right| < \tau$ na $\partial\Omega$
- (w7) $\left|\mathcal{R}^p\left(g + \sum_{j=0}^k P_j\right) - \sum_{j=0}^k \mathcal{R}^p(P_j) - \mathcal{R}^p(g)\right| < \tau$ na $\partial\Omega$
- (w8) $|\mathcal{S}^p(P_k)| < C\left(\mathcal{R}^p(P_k)\right)^{\frac{1}{p}}$ na $\partial\Omega$
- (w9) $\mathcal{R}^p\left(\sum_{j=0}^N P_j\right) > \gamma h$ na $\partial\Omega$
- (w10) $\left\|\sum_{j=0}^N P_j\right\|_K < c$
- (w11) jeżeli $p \in (0, 1]$, to $\left|\mathcal{S}^p\left(\sum_{j=0}^N P_j\right)\right| < \frac{2C}{\theta} h^{\frac{1}{p}} a^{\frac{1}{p}-1}$ na $\partial\Omega$.

Dowód. Weźmy stałe $\theta \in (0, 1)$ oraz $\kappa > 0$ z Twierdzenia 3.20. Pokażemy, że takie θ i $C := \frac{\kappa}{\sqrt[p]{\theta}}$ spełniają warunki lematu oraz indukcyjnie skonstruujemy ciąg wielomianów ortogonalnych o wymaganych własnościach. Dla $k = 0$ zastosujemy Twierdzenie 3.20 do danych $\Psi := \frac{1}{2}ah$, $M_0 := \|g\|_\Omega$, $N_0 := M$, $\varepsilon := \tau$, $T := K$, $\delta := \frac{1}{2}c$ i tym sposobem otrzymujemy wielomian P_0 taki, że $\text{ord}(P_0) \geq M$ oraz zachodzą następujące zależności:

- a) $\|P_0\|_K < \frac{1}{2}c$
- b) $\frac{1}{2}\theta ah < \mathcal{R}^p(P_0) < \frac{1}{2}ah$ na $\partial\Omega$
- c) $\mathcal{R}^p(P_0) + \mathcal{R}^p(g) - \tau < \mathcal{R}^p(g + P_0) < \mathcal{R}^p(P_0) + \mathcal{R}^p(g) - \tau$ na $\partial\Omega$
- d) $|\mathcal{S}^p(P_0)| < \kappa\left(\frac{1}{2}ah\right)^{\frac{1}{p}} < C\left(\mathcal{R}^p(P_0)\right)^{\frac{1}{p}}$ na $\partial\Omega$.

Stąd jasno widać, że wielomian P_0 spełnia warunki (w1) – (w2) oraz (w6) – (w8). Przy założeniu, że zachodzi zależność c), możemy wybrać takie $\tau_0 \in (0, 1)$, że

$$|\mathcal{R}^p(g + P_0) - \mathcal{R}^p(P_0) - \mathcal{R}^p(g)| < \tau_0 < \tau \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Dla $k = 1$ ponownie korzystając z Twierdzenia 3.20 zastosowanego do danych

$$\Psi := \frac{3}{4}a(h - \mathcal{R}^p(P_0)), \quad M_0 := \|P_0\|_\Omega + \|g\|_\Omega, \quad N_0 := \deg(P_0) + 1,$$

$$\varepsilon := \min \left\{ \frac{\theta}{4} \inf_{z \in \partial\Omega} a(h(z) - \mathcal{R}^p(P_0)(z)), \tau - \tau_0 \right\}, \quad T := K, \quad \delta := \frac{1}{4}c,$$

dostajemy wielomian P_1 taki, że $\text{ord}(P_1) > \deg(P_0)$, $\|P_1\|_K < \frac{1}{4}c$ oraz na $\partial\Omega$ wielomian ten ma następujące własności:

- $\frac{3}{4}\theta a(h - \mathcal{R}^p(P_0)) < \mathcal{R}^p(P_1) < \frac{3}{4}a(h - \mathcal{R}^p(P_0)) < ah$
- $\mathcal{R}^p(P_0) + \mathcal{R}^p(P_1) - \varepsilon < \mathcal{R}^p(P_0 + P_1) < \mathcal{R}^p(P_0) + \mathcal{R}^p(P_1) + \varepsilon$
- $\mathcal{R}^p(g + P_0) + \mathcal{R}^p(P_1) - \varepsilon < \mathcal{R}^p(g + P_0 + P_1) < \mathcal{R}^p(g + P_0) + \mathcal{R}^p(P_1) + \varepsilon$
- $|\mathcal{S}^p(P_1)| < \kappa \left(\frac{3}{4}a(h - \mathcal{R}^p(P_0)) \right)^{\frac{1}{p}} < C(\mathcal{R}^p(P_1))^{\frac{1}{p}}.$

Zauważmy, że z powyższych zależności otrzymujemy poniższe oszacowania na $\partial\Omega$

$$\mathcal{R}^p(P_0 + P_1) < \mathcal{R}^p(P_0) + \mathcal{R}^p(P_1) + \varepsilon < \mathcal{R}^p(P_0) + a(h - \mathcal{R}^p(P_0))$$

oraz

$$\mathcal{R}^p(P_0 + P_1) > \mathcal{R}^p(P_0) + \mathcal{R}^p(P_1) - \varepsilon > \mathcal{R}^p(P_0) + \frac{1}{2}\theta a(h - \mathcal{R}^p(P_0)).$$

Biorąc pod uwagę, że $\varepsilon < \tau$, dostajemy również, że

$$|\mathcal{R}^p(P_0 + P_1) - \mathcal{R}^p(P_0) - \mathcal{R}^p(P_1)| < \tau \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Ponadto możemy oszacować, że

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^p(P_0 + P_1 + g) &< \mathcal{R}^p(P_0 + g) + \mathcal{R}^p(P_1) + \varepsilon \\ &< \mathcal{R}^p(g) + \mathcal{R}^p(P_0) + \mathcal{R}^p(P_1) + \tau_0 + \varepsilon \\ &= \mathcal{R}^p(g) + \mathcal{R}^p(P_0) + \mathcal{R}^p(P_1) + \tau \end{aligned}$$

oraz analogicznie $\mathcal{R}^p(P_0 + P_1 + g) > \mathcal{R}^p(g) + \mathcal{R}^p(P_0) + \mathcal{R}^p(P_1) - \tau$ na $\partial\Omega$. Wszystko to powoduje, że wielomian P_1 jest ortogonalny do wielomianu P_0 oraz posiada własności (w1) – (w8).

Dalej, by dokończyć indukcję, postępujemy następująco: Przypuśćmy, że skonstruowaliśmy już wielomiany wzajemnie ortogonalne $P_0, P_1, \dots, P_k$, dla których spełnione są warunki (w1) – (w8). Zauważmy, że na mocy własności (w6) oraz (w7) istnieją $\tau_1, \tau_2 \in (0, \tau)$ takie, że

- $\left| \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^k P_j \right) - \sum_{j=0}^k \mathcal{R}^p(P_j) \right| < \tau_1 < \tau$ na $\partial\Omega$
- $\left| \mathcal{R}^p \left(g + \sum_{j=0}^k P_j \right) - \sum_{j=0}^k \mathcal{R}^p(P_j) - \mathcal{R}^p(g) \right| < \tau_2 < \tau$ na $\partial\Omega$.

Twierdzenie 3.20 zastosowane do danych

$$\Psi := \frac{3}{4}a \left(h - \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^k P_j \right) \right), \quad M_0 := \left\| \sum_{j=0}^k P_j \right\|_{\Omega} + \|g\|_{\Omega}, \quad N_0 := \deg(P_k) + 1,$$

$$\varepsilon := \min \left\{ \frac{\theta}{4} \inf_{z \in \partial\Omega} a \left(h(z) - \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^k P_j \right)(z) \right), \tau - \tau_1, \tau - \tau_2 \right\}, \quad T := K, \quad \delta := 2^{-(k+2)}c$$

daje nam wielomian P_{k+1} taki, że $\text{ord}(P_{k+1}) > \deg(P_k)$, $\|P_{k+1}\|_K < 2^{-(k+2)}c$ oraz na $\partial\Omega$ zachodzą następujące nierówności:

- $\frac{3}{4}\theta a \left(h - \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^k P_j \right) \right) < \mathcal{R}^p(P_{k+1}) < \frac{3}{4}a \left(h - \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^k P_j \right) \right) < ah$
- $\left| \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^{k+1} P_j \right) - \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^k P_j \right) - \mathcal{R}^p(P_{k+1}) \right| < \varepsilon$
- $\left| \mathcal{R}^p \left(g + \sum_{j=0}^{k+1} P_j \right) - \mathcal{R}^p \left(g + \sum_{j=0}^k P_j \right) - \mathcal{R}^p(P_{k+1}) \right| < \varepsilon$
- $|\mathcal{S}^p(P_{k+1})| < \kappa \left(\frac{3}{4}a \left(h - \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^k P_j \right) \right) \right)^{\frac{1}{p}} < C \left(\mathcal{R}^p(P_{k+1}) \right)^{\frac{1}{p}}.$

Z powyższego natomiast wynika, że na $\partial\Omega$ mamy

$$\mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^{k+1} P_j \right) < \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^k P_j \right) + \mathcal{R}^p(P_{k+1}) + \varepsilon < \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^k P_j \right) + a \left(h - \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^k P_j \right) \right)$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^{k+1} P_j \right) &> \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^k P_j \right) + \mathcal{R}^p(P_{k+1}) - \varepsilon \\ &> \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^k P_j \right) + \frac{3}{4}\theta a \left(h - \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^k P_j \right) \right) - \frac{\theta}{4}a \left(h - \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^k P_j \right) \right) \\ &= \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^k P_j \right) + \frac{1}{2}\theta a \left(h - \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^k P_j \right) \right). \end{aligned}$$

Ponadto na mocy założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^{k+1} P_j \right) < \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^k P_j \right) + \mathcal{R}^p(P_{k+1}) + \varepsilon < \sum_{j=0}^{k+1} \mathcal{R}^p(P_j) + \tau_1 + \varepsilon = \sum_{j=0}^{k+1} \mathcal{R}^p(P_j) + \tau \text{ na } \partial\Omega$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^{k+1} P_j + g \right) &< \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^k P_j + g \right) + \mathcal{R}^p(P_{k+1}) + \varepsilon < \mathcal{R}^p(g) + \sum_{j=0}^{k+1} \mathcal{R}^p(P_j) + \tau_2 + \varepsilon \\ &< \mathcal{R}^p(g) + \mathcal{R}^p \left(\sum_{j=0}^{k+1} P_j \right) + \tau \text{ na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Podobnie dostajemy ograniczenia z dołu na $\partial\Omega$: $\mathcal{R}^p\left(\sum_{j=0}^{k+1} P_j\right) > \sum_{j=0}^{k+1} \mathcal{R}^p(P_j) - \tau$ oraz

$$\mathcal{R}^p\left(\sum_{j=0}^{k+1} P_j + g\right) > \mathcal{R}^p(g) + \mathcal{R}^p\left(\sum_{j=0}^{k+1} P_j\right) - \tau.$$

Z powyższych szacowań wynika, że wielomian P_{k+1} jest ortogonalny do pozostałych wielomianów $P_0, P_1, \dots, P_k$ oraz posiada własności (w1) – (w8).

Łącząc warunki (w4) i (w5) wraz z twierdzeniem Diniego możemy wnioskować, że ciąg $\mathcal{R}^p\left(\sum_{j=0}^n P_j\right)$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji h na $\partial\Omega$. Stąd istnieje $N \in \mathbb{N}$

takie, że $\mathcal{R}^p\left(\sum_{j=0}^N P_j\right) > \gamma h$ na $\partial\Omega$. Ponadto $\left\|\sum_{j=0}^N P_j\right\|_K \leq \sum_{j=0}^N 2^{-(j+1)} c < c$.

Własność (w5) implikuje, że

$$h - \mathcal{R}^p\left(\sum_{j=0}^k P_j\right) < \left(1 - \frac{1}{2}\theta a\right) \left(h - \mathcal{R}^p\left(\sum_{j=0}^{k-1} P_j\right)\right) < \left(1 - \frac{1}{2}\theta a\right)^k h \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Zatem jeśli $p \in (0, 1]$, to mamy następujące oszacowanie na $\partial\Omega$

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{S}^p\left(\sum_{j=0}^N P_j\right)\right| &\leq \sum_{j=0}^N |\mathcal{S}^p(P_j)| \stackrel{(w9)}{<} C \sum_{j=0}^N \left(\mathcal{R}^p(P_j)\right)^{\frac{1}{p}} < C \sum_{j=0}^N \left(\frac{3}{4}a \left(h - \mathcal{R}^p\left(\sum_{j=0}^k P_j\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &< C \sum_{j=0}^N \left(\frac{3}{4}a \left(1 - \frac{1}{2}\theta a\right)^k h\right)^{\frac{1}{p}} < C \left(\frac{3}{4}ah\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{2}\theta a\right)^{\frac{1}{p}}} \\ &< C \left(\frac{3}{4}ah\right)^{\frac{1}{p}} \frac{2}{\theta a} < \frac{2C}{\theta} h^{\frac{1}{p}} a^{\frac{1}{p}-1} \end{aligned}$$

a to kończy dowód. □

Tak, jak wspomnieliśmy na początku tej sekcji, powyższy lemat posłuży nam do udowodnienia głównego twierdzenia tego rozdziału.

Niech λ będzie miarą probabilistyczną na $\partial\mathbb{D}$, $q \geq 1$ oraz $z \in \partial\Omega$. Oznaczmy normę w przestrzeni $L^q(z\partial\mathbb{D}, \lambda)$ następująco:

$$\|f\|_{q, z\partial\mathbb{D}} = \left(\int_{z\partial\mathbb{D}} |f|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Twierdzenie 3.23. *Niech Φ będzie ściśle dodatnią funkcją ciągłą na $\partial\Omega$. Istnieje funkcja holomorficzna $f = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$, gdzie p_n są wielomianami jednorodnymi, taka, że*

1. $\mathcal{R}^p(f) = \Phi$ na $\partial\Omega$
2. każde cięcie zespolone funkcji $\mathcal{S}^p(f)$ ma rozbieżny szereg współczynników Taylora z dowolną potęgą $s < \min\{1, p\}$, tzn. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|p_n(z)|}{\sqrt[p]{pn+1}} \right)^s = \infty$, $s < \min\{1, p\}$, $z \in \partial\Omega$
3. jeśli $p \leq 1$, to $\mathcal{S}^p(f) \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$
4. jeśli $p \in (1, 2]$, to $\mathcal{S}^p(f) \in L^2(z\partial\mathbb{D}, \lambda)$, $z \in \partial\Omega$.

Dowód. Bez straty ogólności założmy, że $\sup_{z \in \partial\Omega} |\Phi(z)| < 1$. Weźmy stałe $\theta \in (0, 1)$ oraz $C > 0$ z Lematu 3.22. Indukcyjnie skonstruujemy ciąg wielomianów ortogonalnych $\{Q_k\}_{k=0}^\infty$ o następujących własnościach:

- (p1) $Q_k = \sum_{j=0}^{N_k} P_{k,j}$, gdzie $P_{k,0}, P_{k,1}, \dots, P_{k,N_k}$ są wielomianami ortogonalnymi
- (p2) $\mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^k Q_m\right) < \Phi$ na $\partial\Omega$
- (p3) $\mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^k Q_m\right) > \frac{1}{4}\left(\Phi - \mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m\right)\right) + \mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m\right)$ na $\partial\Omega$
- (p4) $\mathcal{R}^p(P_{k,j}) < \left(\Phi - \mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m\right)\right)^k$ na $\partial\Omega$, $j = 0, 1, \dots, N_k$
- (p5) $|\mathcal{S}^p(P_{k,j})| < C\left(\mathcal{R}^p(P_{k,j})\right)^{\frac{1}{p}}$ na $\partial\Omega$, $j = 0, 1, \dots, N_k$
- (p6) $\left|\sum_{j=0}^{N_k} \mathcal{R}^p(P_{k,j}) - \mathcal{R}^p(Q_k)\right| < \left\|\Phi - \mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m\right)\right\|_{\partial\Omega}^k$ na $\partial\Omega$
- (p7) $\left\|\mathcal{R}^p(Q_k)\right\|_{1,z\partial\mathbb{D}} > \frac{1}{2}\left\|\Phi - \mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m\right)\right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}$
- (p8) jeżeli $p \leq 1$, to $|\mathcal{S}^p(Q_k)| < \frac{2C}{\theta}\left(\Phi - \mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m\right)\right)^{\frac{k}{p}-k+1}$ na $\partial\Omega$.

Indukcyjną konstrukcję ciągu wielomianów o powyższych własnościach rozpoczynamy od wyboru $Q_0 \equiv 0$, $N_0 := 0$, $P_{0,0} \equiv 0$. Dla $k = 1$ stosujemy Lemat 3.22 do poniższych danych:

$$a := \inf_{z \in \partial\Omega} \Phi(z), \quad h := \Phi, \quad \tau := \inf_{z \in \partial\Omega} \Phi(z), \quad \gamma := \frac{1}{2}.$$

W ten sposób otrzymujemy liczbę $N_1 \in \mathbb{N}$ oraz wielomiany wzajemnie ortogonalne $P_{1,0}, P_{1,1}, \dots, P_{1,N_1}$ takie, że wielomian $Q_1 := \sum_{j=0}^{N_1} P_{1,j}$ posiada następujące własności:

- $\frac{1}{2}\Phi < \mathcal{R}^p(Q_1) < \Phi$ na $\partial\Omega$
- $\mathcal{R}^p(P_{1,j}) < \Phi$ na $\partial\Omega$, $j = 0, 1, \dots, N_1$
- $\mathcal{R}^p(Q_1) - \left\|\Phi\right\|_{\partial\Omega} < \sum_{j=0}^{N_1} \mathcal{R}^p(P_{1,j}) < \mathcal{R}^p(Q_1) + \left\|\Phi\right\|_{\partial\Omega}$, na $\partial\Omega$
- $|\mathcal{S}^p(P_{1,j})| < C\left(\mathcal{R}^p(P_{1,j})\right)^{\frac{1}{p}}$ na $\partial\Omega$, $j = 0, 1, \dots, N_1$
- jeśli $p \leq 1$, to $|\mathcal{S}^p(Q_1)| < \frac{2C}{\theta}\Phi^{\frac{2}{p}-1} \leq \frac{2C}{\theta}\Phi^{\frac{1}{p}}$ na $\partial\Omega$.

Zauważmy, że tak zdefiniowany wielomian Q_1 spełnia warunki (p1)–(p8). Dalej założymy, że już skonstruowaliśmy wielomiany wzajemnie ortogonalne $Q_0, Q_1, \dots, Q_k$, które posiadają własności (p1)–(p8). Lemat 3.22 zastosowany tym razem do danych:

$$M := \deg(Q_k) + 1, \quad a := \inf_{z \in \partial\Omega} \left(\Phi(z) - \mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^k Q_m\right)(z)\right)^k, \quad \gamma := \frac{2}{3},$$

$$h := \frac{3}{4} \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) \right), \quad \tau := \frac{1}{8} \inf_{z \in \partial\Omega} \left(\Phi(z) - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right)(z) \right)^{k+1}$$

pozwała nam uzyskać $N_{k+1} \in \mathbb{N}$ oraz wielomiany $P_{k+1,0}, P_{k+1,1}, \dots, P_{k+1,N_{k+1}}$ wzajemnie ortogonalne, które są również ortogonalne do wielomianów $Q_0, Q_1, \dots, Q_k$. Jeśli teraz zdefiniujemy wielomian $Q_{k+1} := \sum_{j=0}^{N_{k+1}} P_{k+1,j}$, to na $\partial\Omega$ spełnia on następujące warunki:

- a) $\text{ord}(Q_{k+1}) \geq \deg(Q_k) + 1$
- b) $\mathcal{R}^p(P_{k+1,j}) < \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) \right)^{k+1}, \quad j = 0, \dots, N_{k+1}$
- c) $|\mathcal{S}^p(P_{k+1,j})| < C \left(\mathcal{R}^p(P_{k+1,j}) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad j = 0, \dots, N_{k+1}$
- d) $\left| \sum_{j=0}^{N_{k+1}} \mathcal{R}^p(P_{k+1,j}) - \mathcal{R}^p(Q_{k+1}) \right| < \left\| \Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) \right\|_{\partial\Omega}^{k+1}$
- e) $\mathcal{R}^p(Q_{k+1}) < h = \frac{3}{4} \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) \right)$
- f) $\mathcal{R}^p(Q_{k+1}) > \frac{1}{2} \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) \right)$
- g) jeżeli $p \leq 1$, to $|\mathcal{S}^p(Q_{k+1})| < \frac{2C}{\theta} \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) \right)^{\frac{k+1}{p} - k}$
- h)
$$\begin{aligned} \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k+1} Q_m \right) &< \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) + \mathcal{R}^p(Q_{k+1}) + 2\tau \\ &< \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) + \Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) = \Phi \end{aligned}$$
- k)
$$\begin{aligned} \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k+1} Q_m \right) &> \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) + \mathcal{R}^p(Q_{k+1}) - 2\tau \\ &\geq \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) + \frac{1}{4} \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) \right). \end{aligned}$$

Stąd wprost otrzymujemy, że wielomian Q_{k+1} posiada własności (p1) – (p8).

Dalej zauważmy, że z warunków (p2) i (p3) wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}^p \left(\sum_{k=0}^n Q_k \right) = \Phi$ na $\partial\Omega$. Co więcej, własność (p3) na $\partial\Omega$ implikuje następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned} \Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k Q_m \right) &< \Phi - \frac{1}{4} \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m \right) \right) - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m \right) \\ &= \frac{3}{4} \left(\Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m \right) \right) < \left(\frac{3}{4} \right)^k \Phi. \end{aligned}$$

Stąd jasno widać, że

$$\mathcal{R}^p(Q_k) < \left(\frac{3}{4} \right)^{k-1} \left\| \Phi \right\|_{\partial\Omega} \quad \text{na } \partial\Omega. \quad (3.18)$$

Niech $q := \max\{1, p\}$. Z powyższej zależności dostajemy, że jeśli $n \geq k$, to

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \partial\Omega} \left(\mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^n Q_m - \sum_{m=0}^k Q_m \right) (z) \right)^{\frac{1}{q}} &= \sup_{z \in \partial\Omega} \left(\mathcal{R}^p \left(\sum_{m=k+1}^n Q_m \right) (z) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sup_{z \in \partial\Omega} \left(\sum_{m=k+1}^n \left(\mathcal{R}^p(Q_m)(z) \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\ &\stackrel{(3.18)}{<} \sum_{m=k+1}^n \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{m}{q}} \|\Phi\|_{\partial\Omega}^{\frac{1}{q}} \xrightarrow{n, k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

a zatem $\left\{ \sum_{m=0}^n Q_m \right\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $\mathcal{HR}^p(\Omega)$. Na mocy Propozycji 3.7 jest on zbieżny w tej przestrzeni. Stąd możemy określić funkcję

$$f := \sum_{k=0}^{\infty} Q_k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{N_k} P_{k,j} \in \mathcal{O}(\Omega).$$

Co więcej, $\mathcal{R}^p \left(\sum_{k=0}^n Q_k \right) \rightrightarrows \mathcal{R}^p(f)$ na $\partial\Omega$, gdy $n \rightarrow \infty$, a więc f jest rozwiązaniem odwrotnego problemu Radona zadanego przez funkcję Φ , tzn.

$$\mathcal{R}^p(f)(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}^p \left(\sum_{k=0}^n Q_k \right) (z) = \Phi(z), \quad z \in \partial\Omega.$$

Przejdźmy teraz do pozostałych punktów tezy twierdzenia. Z warunku (p4) otrzymujemy, że dla $z \in \partial\Omega$

$$\left\| \Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m \right) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^{-k} \left\| \mathcal{R}^p(P_{k,j}) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}} < 1, \quad j = 0, \dots, N_k.$$

Zatem dla $z \in \partial\Omega$ oraz $s < \min\{1, p\}$ dostajemy, że

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{R}^p(P_{k,j}) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^s &> \left\| \mathcal{R}^p(P_{k,j}) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^s \left(\left\| \Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m \right) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^{-k} \left\| \mathcal{R}^p(P_{k,j}) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}} \right)^{p-s} \\ &= \left\| \Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m \right) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^{-k(p-s)} \left\| \mathcal{R}^p(P_{k,j}) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^p, \quad j = 0, \dots, N_k. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Niech $P_{k,j} = \sum_{n \in I_{k,j}} p_{k,j,n}$ będzie rozwinięciem jednorodnym wielomianu $P_{k,j}$, gdzie $I_{k,j}$ jest zbiorem stopni jednomianów z rozwinięcia $P_{k,j}$. Z założenia $I_{m,j} \cap I_{k,i} = \emptyset$ dla $(m, j) \neq (k, i)$. Wtedy korzystając z nierówności trójkąta szacujemy

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{R}^p(P_{k,j}) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^{\frac{1}{q}} &= \left(\int_{\partial\mathbb{D}} \int_0^1 \left| \sum_{n \in I_{k,j}} p_{k,j,n}(z\omega t) \right|^p dt d\lambda(\omega) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sum_{n \in I_{k,j}} \left(\int_{\partial\mathbb{D}} \int_0^1 |p_{k,j,n}(z)|^p t^{pn} dt d\lambda(\omega) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sum_{n \in I_{k,j}} \frac{|p_{k,j,n}(z)|^{\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{pn+1}} \quad \text{dla } z \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Zauważmy, że jeżeli $s < \min\{1, p\}$, to $\frac{sq}{p} < 1$. Stąd dla $z \in \partial\Omega$ oraz $s < \min\{1, p\}$ mamy następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned}
\sum_{k,j,n} \left(\frac{|p_{k,j,n}(z)|}{\sqrt[p]{pn+1}} \right)^s &= \sum_{k,j,n} \left(\frac{|p_{k,j,n}(z)|^{\frac{p}{q}}}{\sqrt[p]{pn+1}} \right)^{\frac{sq}{p}} \geq \sum_{k,j} \left(\sum_{n \in I_{k,j}} \frac{|p_{k,j,n}(z)|^{\frac{p}{q}}}{\sqrt[p]{pn+1}} \right)^{\frac{sq}{p}} \\
&\geq \sum_{k,j} \left\| \mathcal{R}^p(P_{k,j}) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^{\frac{s}{p}} \\
&\stackrel{(3.19)}{>} \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m \right) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^{-\frac{k(p-s)}{p}} \sum_{j=0}^{N_k} \left\| \mathcal{R}^p(P_{k,j}) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m \right) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^{-\frac{k(p-s)}{p}} \sum_{j=0}^{N_k} \int_{\partial\mathbb{D}} \mathcal{R}^p(P_{k,j})(\omega z) d\lambda(\omega) \\
&\stackrel{(p6)}{>} \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m \right) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^{-\frac{k(p-s)}{p}} \left(\int_{\partial\mathbb{D}} \mathcal{R}^p(Q_k)(\omega z) d\lambda(\omega) \right. \\
&\quad \left. - \left\| \Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m \right) \right\|_{\partial\Omega}^k \right) \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m \right) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^{-\frac{k(p-s)}{p}} \left\| \mathcal{R}^p(Q_k) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{(k-1)ks}{p}} \\
&\stackrel{(p7)}{>} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left\| \Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m \right) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^{-\frac{k(p-s)}{p}+1} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{(k-1)ks}{p}} \\
&\geq \sum_{k > \frac{p}{p-s}} \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{(k-1)ks}{p}} = \infty.
\end{aligned}$$

Powyższy szereg jest rozbieżny, a zatem również $\sum_{k,j,n} \left(\frac{|p_{k,j,n}(z)|}{\sqrt[p]{pn+1}} \right)^s$ jest szeregiem rozbieżnym.

Jeżeli $p \leq 1$, to własność (p8) pozwala nam oszacować w $\bar{\Omega}$ następujący szereg:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{S}^p(Q_k)| \leq \frac{2C}{\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m \right) \right\|_{\partial\Omega}^{\frac{k}{p}-k+1} \leq \frac{2C}{\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^{k-1} \|\Phi\|_{\partial\Omega} < \infty,$$

co oznacza, że $\mathcal{S}^p(f) \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$.

Z faktu, że wielomiany $P_{k,0}, P_{k,1}, \dots, P_{k,N_k}$ są wzajemnie ortogonalne wynika, że wielomiany $\mathcal{S}^p(P_{k,0}), \mathcal{S}^p(P_{k,1}), \dots, \mathcal{S}^p(P_{k,N_k})$ również są wzajemnie ortogonalne. Wte-

dy dla $p \in (1, 2]$ możemy rozważyć całkę

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathbb{D}} |\mathcal{S}^p(f)(\omega z)|^2 d\lambda(\omega) &= \int_{\partial\mathbb{D}} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{N_k} \mathcal{S}^p(P_{k,j})(\omega z) \right|^2 d\lambda(\omega) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{N_k} \int_{\partial\mathbb{D}} |\mathcal{S}^p(P_{k,j})(\omega z)|^2 d\lambda(\omega) \\
&\stackrel{(p5)}{\leq} C^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{N_k} \int_{\partial\mathbb{D}} \left(\mathcal{R}^p(P_{k,j})(\omega z) \right)^{\frac{2}{p}} d\lambda(\omega) \\
&\leq C^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{N_k} \int_{\partial\mathbb{D}} \mathcal{R}^p(P_{k,j})(\omega z) d\lambda(\omega) \\
&\stackrel{(p6)}{\leq} C^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\partial\mathbb{D}} \mathcal{R}^p(Q_k)(\omega z) d\lambda(\omega) + \left\| \Phi - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} Q_m \right) \right\|_{\partial\Omega}^k \right) \\
&\stackrel{(3.18)}{<} C^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{3}{4} \right)^k \|\Phi\|_{\partial\Omega} + \left(\frac{3}{4} \right)^{(k-1)k} \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Stąd $\mathcal{S}^p(f) \in L_2(z\partial\mathbb{D}, \lambda)$ dla $p \in (1, 2]$, $z \in \partial\Omega$, a to kończy dowód twierdzenia. $\square$

Zauważmy, że dla $p = 2$ z uwagi na ortogonalność wielomianów $p_{k,j,n}$ w nierówności (3.20) każde cięcie zespolone funkcji $\mathcal{S}^2(f)$ również ma rozbieżny szereg współczynników Taylora z dowolną potęgą $s < 2$.

3.8. Odwrotny problem Radona zadany przez funkcje półciągłe z dołu

Z faktu, że dla każdej funkcji półciągłej z dołu możemy znaleźć ciąg funkcji ciągłych zbieżny punktowo do tej funkcji, możemy uogólnić Twierdzenie 3.23 zastępując funkcję ciągłą ściśle dodatnią na $\partial\Omega$ przez funkcję półciągłą z dołu i ściśle dodatnią na $\partial\Omega$. Okazuje się, że możemy skonstruować rozwiązanie odwrotnego problemu Radona z zadaną funkcją ściśle dodatnią i półciągłą z dołu, dla której dodatkowo każde cięcie zespolone działania na nim operatora $\mathcal{S}^p$ ma rozbieżny szereg współczynników Taylora z dowolną potęgą $s < \min\{1, p\}$, jednakże ze względu na zbieżność punktową wspomnianego ciągu w naszym podejściu nie otrzymamy pozostałych własności z Twierdzenia 3.23.

Twierdzenie 3.24. *Niech Ψ będzie ściśle dodatnią funkcją półciągłą z dołu na $\partial\Omega$. Istnieje funkcja holomorficzna $f = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$, gdzie p_n są wielomianami jednorodnymi, taka, że*

1. $\mathcal{R}^p(f) = \Psi$ na $\partial\Omega$
2. każde cięcie zespolone funkcji $\mathcal{S}^p(f)$ ma rozbieżny szereg współczynników Taylora z dowolną potęgą $s < \min\{1, p\}$, tzn. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|p_n(z)|}{\sqrt[p]{pn+1}} \right)^s = \infty$, $s < \min\{1, p\}$, $z \in \partial\Omega$.

Dowód. Niech $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ będzie wstępującym ciągiem zwartych podzbiorów obszaru Ω , takim, że $T_k \subset \text{int}(T_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$ oraz $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k = \Omega$.

Dla funkcji Ψ półciągłej z dołu istnieje ciąg $\{\Psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ściśle dodatnich funkcji ciągłych na $\partial\Omega$ taki, że dla każdego $z \in \partial\Omega$ zachodzi

$$0 < \Psi_1(z) < \Psi_2(z) < \dots < \lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_k(z) = \Psi(z).$$

Pokażemy, że indukcyjnie można skonstruować ciąg $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ściśle dodatnich funkcji ciągłych na $\partial\Omega$ oraz ciąg wielomianów wzajemnie ortogonalnych $\{W_k\}_{k=0}^\infty$ o następujących własnościach dla $k \geq 1$:

- (s1) $\varphi_k(z) := \min \left\{ \Psi_k(z), \frac{1}{2} + \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} W_m \right)(z) \right\}, \quad z \in \partial\Omega$
- (s2) $\|W_k\|_{T_k} < 2^{-k}$
- (s3) $W_k = \sum_{j=0}^{N_k} P_{k,j}$, gdzie $P_{k,0}, P_{k,1}, \dots, P_{k,N_k}$ są wielomianami ortogonalnymi
- (s4) $\mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k W_m \right) < \varphi_k$ na $\partial\Omega$
- (s5) $\mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k W_m \right) > (1 - 2^{-k}) \left(\varphi_k - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} W_m \right) \right) + \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} W_m \right)$ na $\partial\Omega$
- (s6) $\mathcal{R}^p(P_{k,j}) < \left(\varphi_k - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} W_m \right) \right)^k$ na $\partial\Omega$, $j = 0, 1, \dots, N_k$
- (s7) $\sum_{j=0}^{N_k} \mathcal{R}^p(P_{k,j}) > \mathcal{R}^p(W_k) - 2^{-k} \left\| \varphi_k - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} W_m \right) \right\|_{\partial\Omega}^k$ na $\partial\Omega$
- (s8) $\sum_{j=0}^{N_k} \mathcal{R}^p(P_{k,j}) < \mathcal{R}^p(W_k) + 2^{-k} \left\| \varphi_k - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} W_m \right) \right\|_{\partial\Omega}^k$ na $\partial\Omega$
- (s9) $\left\| \mathcal{R}^p(W_k) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}} > \frac{1}{2} \left\| \varphi_k - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} W_m \right) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}, \quad z \in \partial\Omega.$

Zauważmy, że dla wyżej zdefiniowanej funkcji φ_k prawdą jest, że

$$\varphi_k(z) - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} W_m \right)(z) < 1 \quad \text{dla } z \in \partial\Omega, \quad k = 1, 2, \dots$$

Konstrukcję rozpoczniemy od wyboru $W_0 \equiv 0$, $N_0 := 0$, $P_{0,0} \equiv 0$. Dalej dla $k = 1$ skorzystajmy z Lematu 3.22 zastosowanego do danych:

$$a := \inf_{z \in \partial\Omega} \varphi_1(z), \quad h := \varphi_1, \quad \tau := \frac{1}{2} \inf_{z \in \partial\Omega} \varphi_1(z), \quad \gamma := \frac{1}{2}, \quad K := T_1, \quad c := \frac{1}{2}.$$

Stąd uzyskujemy liczbę $N_1 \in \mathbb{N}$ oraz wielomiany ortogonalne $P_{1,0}, P_{1,1}, \dots, P_{1,N_1}$ takie, że wielomian $W_1 := \sum_{j=0}^{N_1} P_{1,j}$ spełnia następujące warunki:

- $\|W_1\|_{T_1} < \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2}\varphi_1 < \mathcal{R}^p(W_1) < \varphi_1$ na $\partial\Omega$

- $\mathcal{R}^p(P_{1,j}) < \varphi_1$ na $\partial\Omega$, $j = 0, 1, \dots, N_1$
- $\mathcal{R}^p(W_1) - \frac{1}{2}\|\varphi_1\|_{\partial\Omega} < \sum_{j=0}^{N_1} \mathcal{R}^p(P_{1,j}) < \mathcal{R}^p(W_1) + \frac{1}{2}\|\varphi_1\|_{\partial\Omega}$ na $\partial\Omega$.

Zauważmy, że dla tak określonego wielomianu W_1 zachodzą zależności (s2) – (s9). Dalej założmy, że otrzymaliśmy już wielomiany wzajemnie ortogonalne $W_0, W_1, \dots, W_k$ o własnościach (s2) – (s9). Określmy funkcję

$$\varphi_{k+1}(z) := \min \left\{ \Phi_{k+1}(z), \frac{1}{2} + \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k W_m \right)(z) \right\}, \quad z \in \partial\Omega.$$

Ponownie stosujemy Lemat 3.22 tym razem do danych:

$$M := \deg(W_k) + 1, \quad a := \inf_{z \in \partial\Omega} \left(\varphi_{k+1}(z) - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k W_m \right)(z) \right)^k, \quad \gamma := 1 - 2^{-(k+3)},$$

$$K := T_{k+1}, \quad c := 2^{-(k+1)}, \quad h := \left(1 - 2^{-(k+3)} \right) \left(\varphi_{k+1} - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k W_m \right) \right),$$

$$\tau := 2^{-(k+4)} \inf_{z \in \partial\Omega} \left(\varphi_{k+1}(z) - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k W_m \right)(z) \right)^{k+1}$$

i tak dostajemy liczbę $N_{k+1} \in \mathbb{N}$ oraz wielomiany $P_{k+1,0}, P_{k+1,1}, \dots, P_{k+1,N_{k+1}}$ wzajemnie ortogonalne, które są również ortogonalne do skonstruowanych już wcześniej wielomianów $W_0, W_1, \dots, W_k$, takie, że jeśli określimy wielomian $W_{k+1} := \sum_{j=0}^{N_{k+1}} P_{k+1,j}$,

to na $\partial\Omega$ spełnia on następujące warunki:

- $\text{ord}(W_{k+1}) \geq \deg(W_k) + 1$
- $\|W_{k+1}\|_{T_{k+1}} < 2^{-(k+1)}$
- $\mathcal{R}^p(P_{k+1,j}) < \left(\varphi_{k+1} - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k W_m \right) \right)^{k+1}, \quad j = 0, \dots, N_{k+1}$
- $\sum_{j=0}^{N_{k+1}} \mathcal{R}^p(P_{k+1,j}) < \mathcal{R}^p(W_{k+1}) + 2^{-(k+4)} \left\| \varphi_{k+1} - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k W_m \right) \right\|_{\partial\Omega}^{k+1}$
- $\sum_{j=0}^{N_{k+1}} \mathcal{R}^p(P_{k+1,j}) > \mathcal{R}^p(W_{k+1}) - 2^{-(k+4)} \left\| \varphi_{k+1} - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k W_m \right) \right\|_{\partial\Omega}^{k+1}$
- $\mathcal{R}^p(W_{k+1}) < \left(1 - 2^{-(k+3)} \right) \left(\varphi_{k+1} - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k W_m \right) \right)$
- $\mathcal{R}^p(W_{k+1}) > \left(1 - 2^{-(k+3)} \right)^2 \left(\varphi_{k+1} - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k W_m \right) \right)$
- $\mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k+1} W_m \right) < \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k W_m \right) + \mathcal{R}^p(W_{k+1}) + 2\tau$
- $\begin{aligned} &< \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k W_m \right) + \left(1 - 2^{-(k+3)} \right) \left(\varphi_{k+1} - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^k W_m \right) \right) + 2\tau \\ &\leq \varphi_{k+1} \end{aligned}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^{k+1} W_m\right) &> \mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^k W_m\right) + \mathcal{R}^p(W_{k+1}) - 2\tau \\
&> \mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^k W_m\right) + \left(1 - 2^{-(k+3)}\right)^2 \left(\varphi_{k+1} - \mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^k W_m\right)\right) - 2\tau \\
\text{i)} \quad &> \mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^k W_m\right) + \left(1 - 2^{-(k+2)}\right) \left(\varphi_{k+1} - \mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^k W_m\right)\right) - 2\tau \\
&> \mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^k W_m\right) + \left(1 - 2^{-(k+1)}\right) \left(\varphi_{k+1} - \mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^k W_m\right)\right).
\end{aligned}$$

Z powyższych zależności wynika, że wielomian W_{k+1} posiada własności (s2) – (s9).

Z warunku (s2) wynika, że ciąg $\left\{\sum_{m=0}^k W_m\right\}_{k \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie na zwartych podzbiorach Ω , a zatem możemy określić funkcję $f := \sum_{k=0}^{\infty} W_k$, która jest holomorficzna w Ω . Ponadto dla każdego $z \in \partial\Omega$ ciąg $\left\{\mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^k W_m\right)(z)\right\}_{k \in \mathbb{N}}$ jest rosnący oraz dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$(1 - 2^{-k})\varphi_k(z) < \mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^k W_m\right)(z) < \varphi_k(z) < \Psi(z).$$

Stąd wnioskujemy, że $\mathcal{R}^p(f)(z) = \Psi(z)$ dla $z \in \partial\Omega$.

Przejdźmy teraz do drugiej części twierdzenia. Z warunku (s6) wynika, że dla $z \in \partial\Omega$

$$\left\|\varphi_k - \mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^{k-1} W_m\right)\right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^{-k} \left\|\mathcal{R}^p(P_{k,j})\right\|_{1,z\partial\mathbb{D}} < 1, \quad j = 0, \dots, N_k.$$

Stąd dla $z \in \partial\Omega$ oraz $s < \min\{1, p\}$ otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{R}^p(P_{k,j})\right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^s &> \left\|\mathcal{R}^p(P_{k,j})\right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^s \left(\left\|\varphi_k - \mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^{k-1} W_m\right)\right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^{-k} \left\|\mathcal{R}^p(P_{k,j})\right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}\right)^{p-s} \\
&= \left\|\varphi_k - \mathcal{R}^p\left(\sum_{m=0}^{k-1} W_m\right)\right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^{-k(p-s)} \left\|\mathcal{R}^p(P_{k,j})\right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^p, \quad j = 0, \dots, N_k.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Niech teraz $P_{k,j} = \sum_{n \in I_{k,j}} p_{k,j,n}$ będzie rozwinięciem jednorodnym wielomianu $P_{k,j}$, gdzie zbiór $I_{k,j}$ składa się ze stopni wszystkich jednomianów z rozwinięcia wielomianu $P_{k,j}$. Oczywiście $I_{m,j} \cap I_{k,i} = \emptyset$ dla $(m, j) \neq (k, i)$. Wtedy możemy oszacować dla $z \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{R}^p(P_{k,j})\right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^{\frac{1}{q}} &= \left(\int_{\partial\mathbb{D}} \int_0^1 \left|\sum_{n \in I_{k,j}} p_{k,j,n}(z\omega t)\right|^p dt d\lambda(\omega)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sum_{n \in I_{k,j}} \left(\int_{\partial\mathbb{D}} \int_0^1 |p_{k,j,n}(z)|^p t^{pn} dt d\lambda(\omega)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sum_{n \in I_{k,j}} \frac{|p_{k,j,n}(z)|^{\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{pn+1}}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Na koniec podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 3.23 dla $z \in \partial\Omega$ oraz $s < \min\{1, p\}$ dostajemy następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned}
\sum_{k,j,n} \left(\frac{|p_{k,j,n}(z)|}{\sqrt[p]{pn+1}} \right)^s &= \sum_{k,j,n} \left(\frac{|p_{k,j,n}(z)|^{\frac{p}{q}}}{\sqrt[p]{pn+1}} \right)^{\frac{sq}{p}} \geq \sum_{k,j} \left(\sum_{n \in I_{k,j}} \frac{|p_{k,j,n}(z)|^{\frac{p}{q}}}{\sqrt[p]{pn+1}} \right)^{\frac{sq}{p}} \\
&\geq \sum_{k,j} \left\| \mathcal{R}^p(P_{k,j}) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^{\frac{s}{p}} \\
&\stackrel{(3.21)}{>} \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \varphi_k - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} W_m \right) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^{-\frac{k(p-s)}{p}} \sum_{j=0}^{N_k} \left\| \mathcal{R}^p(P_{k,j}) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \varphi_k - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} W_m \right) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^{-\frac{k(p-s)}{p}} \sum_{j=0}^{N_k} \int_{\partial\mathbb{D}} \mathcal{R}^p(P_{k,j})(\omega z) d\lambda(\omega) \\
&\stackrel{(s7)}{>} \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \varphi_k - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} W_m \right) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^{-\frac{k(p-s)}{p}} \left(\int_{\partial\mathbb{D}} \mathcal{R}^p(W_k)(\omega z) d\lambda(\omega) \right. \\
&\quad \left. - 2^{-k} \left\| \varphi_k - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} W_m \right) \right\|_{\partial\Omega}^k \right) \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \varphi_k - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} W_m \right) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^{-\frac{k(p-s)}{p}} \left\| \mathcal{R}^p(W_k) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}} - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \\
&\stackrel{(s9)}{>} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left\| \varphi_k - \mathcal{R}^p \left(\sum_{m=0}^{k-1} W_m \right) \right\|_{1,z\partial\mathbb{D}}^{-\frac{k(p-s)}{p}+1} - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \\
&\geq \sum_{k > \frac{p}{p-s}} \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \infty,
\end{aligned}$$

a zatem szereg $\sum_{k,j,n} \left(\frac{|p_{k,j,n}(z)|}{\sqrt[p]{pn+1}} \right)^s$ jest rozbieżny i to kończy dowód. $\square$

Oczywiście, w przypadku $p = 2$ tak samo jak w Twierdzeniu 3.23 z racji, że wielomiany $p_{k,j,n}$ w nierówności (3.22) są ortogonalne, to każde cięcie zespolone funkcji $\mathcal{S}^2(f)$ również ma rozbieżny szereg współczynników Taylora z dowolną potęgą $s < 2$.

3.9. Charakteryzacja zbiorów wyjątkowych

Jako zastosowanie skonstruowanych rozwiązań odwrotnego problemu Radona, podobnie jak w [20] możemy podać pewną charakteryzację zbiorów wyjątkowych na ograniczonych obszarach ściśle wypukłych kołowych. Przyjmijmy następującą definicję.

Definicja 3.25. Dla $p > 0$ oraz funkcji $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ zdefiniujemy zbiór

$$E_{\Omega}^p(f) := \left\{ z \in \partial\Omega : \mathcal{R}^p(f)(z) = \infty \right\}.$$

Zbiór $E \subset \partial\Omega$ nazywamy zbiorem wyjątkowym, jeżeli istnieje funkcja $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ taka, że $E_{\Omega}^p(f) = E$.

W [20] pokazano, że jeśli $W \subset \mathbb{C}^d$ jest obszarem ściśle pseudowypukłym, to dla dowolnego zbioru $E \subset \partial W$ typu G_{δ} (tzn. zbioru, który jest przekrojem przeliczalnej

rodziny zbiorów otwartych) istnieje funkcja $g \in \mathcal{O}(W)$ taka, że $E_W^p(g) \subset E$ oraz $\eta(E \setminus E_W^p(g)) = 0$, gdzie η jest miarą probabilistyczną na ∂W . My korzystając z rozwiązania problemu Radona we wszystkich punktach brzegowych ograniczonego obszaru ściśle wypukłego kołowego Ω pokażemy, że dowolny zbiór $E \subset \partial\Omega$ typu G_δ jest zbiorem wyjątkowym. Podobnie jak w [20] skorzystamy z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 3.26 (Twierdzenie 2.6, [12]). *Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Jeśli $E \subset X$ jest zbiorem typu G_δ , to istnieją ciągi $\{D_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ oraz $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ domkniętych i ograniczonych podzbiorów X takie, że*

- $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} D_j = X \setminus E, \quad D_j \subset D_{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}$
- $\rho(T_j, D_j) > 0, \quad j \in \mathbb{N}$
- $E = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{k=j}^{\infty} T_k.$

Ponadto, jeśli σ_X jest borelowską miarą probabilistyczną na X oraz $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ jest dowolnym ciągiem liczb dodatnich, to ciągi zbiorów $\{D_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ oraz $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ można wybrać tak, że $\sigma_X(X \setminus (E \cup D_j)) \leq t_j, \quad j \in \mathbb{N}.$

Twierdzenie 3.27. *Niech $E \subset \partial\Omega$ będzie zbiorem typu G_δ . Istnieje funkcja $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ taka, że $E_\Omega^p(f) = E$ oraz $\int_{(\partial\Omega \setminus E) \times [0,1]} |f|^p d\mathfrak{L}^{2d} < \infty.$*

Dowód. Niech σ będzie miarą probabilistyczną na $\partial\Omega$. Na mocy Twierdzenia 3.26 istnieją ciągi $\{D_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ oraz $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ zwartych podzbiorów $\partial\Omega$ o następujących własnościach:

- $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} D_j = \partial\Omega \setminus E, \quad D_j \subset D_{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}$
- $T_j \cap D_j = \emptyset, \quad j \in \mathbb{N}$
- $E = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{k=j}^{\infty} T_k$
- $\sigma(\partial\Omega \setminus (E \cup D_j)) \leq 2^{-j}, \quad j \in \mathbb{N}$

Dla tak wybranych ciągów zbiorów zwartych istnieje ciąg funkcji ciągłych $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ taki, że

- $0 \leq u_j(z) \leq 1, \quad j \in \mathbb{N}$
- $u_j(z) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z \in D_j, \quad j \in \mathbb{N}$
- $u_j(z) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z \in T_j, \quad j \in \mathbb{N}$

Zdefiniujmy następującą funkcję: $h := 1 + \sum_{j=1}^{\infty} u_j$. Tak określona funkcja h jest ściśle dodatnia i półciągła z dołu. Zauważmy również, że

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Omega \setminus E} h d\sigma &= \sigma(\partial\Omega \setminus E) + \int_{\partial\Omega \setminus E} \sum_{j=1}^{\infty} u_j d\sigma = \sigma(\partial\Omega \setminus E) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\partial\Omega \setminus E} u_j d\sigma \\
 &= \sigma(\partial\Omega \setminus E) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\partial\Omega \setminus (E \cup D_j)} u_j d\sigma \leq \sigma(\partial\Omega \setminus E) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\partial\Omega \setminus (E \cup D_j)} 1 d\sigma \\
 &= \sigma(\partial\Omega \setminus E) + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma(\partial\Omega \setminus (E \cup D_j)) \leq \sigma(\partial\Omega \setminus E) + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

Na mocy Twierdzenia 3.24 zastosowanego do funkcji h , istnieje funkcja $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ taka, że $\mathcal{R}^p(f) = h$ na $\partial\Omega$. Możemy więc oszacować

$$\int_{(\partial\Omega \setminus E) \times [0,1]} |f|^p d\mathfrak{L}^{2d} = \int_{\partial\Omega \setminus E} \int_0^1 |f(zt)|^p dt d\sigma(z) = \int_{\partial\Omega \setminus E} h d\sigma < \infty.$$

Jeśli $z \in E$ to $\mathcal{R}^p(f)(z) = h(z) = \infty$. Z drugiej strony, jeśli $z \in \partial\Omega \setminus E$, to istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że $z \in D_n$ dla wszystkich $n \geq N$. Stąd

$$\mathcal{R}^p(f)(z) = h(z) = 1 + \sum_{j=1}^{N-1} u_j(z) < N < \infty.$$

W konsekwencji otrzymujemy, że $E = E_\Omega^p(f)$. □

Uogólniony odwrotny problem Radona na dysku jednostkowym

W tym rozdziale ponownie rozważymy odwrotny problem Radona na dysku jednostkowym, gdzie tym razem operator Radona zadany jest za pomocą całki po krzywych w $\mathbb{D}$ spełniających pewne warunki regularności. Okazuje się, że przy pewnych nie bardzo restrykcyjnych założeniach dla wspomnianych krzywych, możemy poprawnie zdefiniować i rozwiązać odwrotny problem Radona. Dodatkowo takie podejście dzięki twierdzeniu Riemanna o odwzorowaniu konforemnym umożliwi nam rozwiązanie problemu Radona zadanego na ograniczonych obszarach jednospójnych w $\mathbb{C}$.

4.1. Ścieżki regularne na dysku jednostkowym

Na początek zdefiniujemy ścieżki w dysku jednostkowym $\mathbb{D}$ oraz ścieżki regularne, dla których będziemy rozważać odwrotny problem Radona.

Definicja 4.1. Rodzinę krzywych $\gamma: \partial\mathbb{D} \times [0, 1] \mapsto \overline{\mathbb{D}}$ będziemy nazywać rodziną ścieżek lub po prostu ścieżką w $\mathbb{D}$, jeżeli

- $\gamma(\partial\mathbb{D} \times [0, 1)) \subset \mathbb{D}$
- $\gamma(\partial\mathbb{D} \times \{1\}) \subset \partial\mathbb{D}$
- $\gamma \in \mathcal{C}(\partial\mathbb{D} \times [0, 1])$.

Definicja 4.2. Ścieżkę $\gamma: \partial\mathbb{D} \times [0, 1] \ni (z, t) \mapsto \gamma(z, t) \in \overline{\mathbb{D}}$ nazywamy regularną, jeżeli istnieją stałe $c_1 \geq c_2 > 0$ oraz $r \in (0, 1)$ takie, że

$$|\gamma(z, 1) - \gamma(z, t)| \leq c_1(1 - t) \quad \text{dla } t \in [r, 1], \quad z \in \partial\mathbb{D} \quad (4.1)$$

$$|\gamma(z, t)| \leq 1 - c_2(1 - t) \quad \text{dla } t \in [r, 1], \quad z \in \partial\mathbb{D}. \quad (4.2)$$

Zauważmy, że warunki (4.1) i (4.2) nie są bardzo restrykcyjne. Przykładowo, ścieżki niestyczne $\gamma(z, t)$, tzn. ścieżki przecinające brzeg $\partial\mathbb{D}$ niestycznie, dla których pochodna cząstkowa $\frac{\partial\gamma}{\partial t}$ jest ciągła na $\partial\mathbb{D} \times [0, 1]$, spełniają warunki (4.1) i (4.2). Proste uzasadnienie przedstawiamy w Lemacie 4.3. Najprostszym zaś przykładem ścieżki regularnej na dysku jednostkowym są promienie tego dysku, czyli rodzina ścieżek $\gamma: \partial\mathbb{D} \times [0, 1] \ni (z, t) \mapsto zt \in \overline{\mathbb{D}}$, dla których rozważaliśmy odwrotny problem Radona w rozdziale 2.

Lemat 4.3. *Ścieżka $\gamma: \partial\mathbb{D} \times [0, 1] \ni (z, t) \mapsto \gamma(z, t) \in \overline{\mathbb{D}}$ przecinająca brzeg $\partial\mathbb{D}$ niestycznie, której pochodna cząstkowa $\frac{\partial\gamma}{\partial t}$ jest funkcją ciągłą na $\partial\mathbb{D} \times [0, 1]$ jest ścieżką regularną w $\mathbb{D}$.*

Dowód. Pokażemy, że istnieją stałe $c_1 \geq c_2 > 0$ oraz $r \in (0, 1)$ takie, że ścieżka γ spełnia warunki (4.1) oraz (4.2).

Funkcja $\frac{\partial\gamma}{\partial t}$ jest ciągła, a więc również ograniczona na $\partial\mathbb{D} \times [0, 1]$. Istnieje więc $c_1 > 0$ takie, że $\left| \frac{\partial\gamma}{\partial t}(z, t) \right| < c_1$ dla $z \in \partial\mathbb{D}$ oraz $t \in [0, 1]$. Zatem dla każdego $z \in \partial\mathbb{D}$ funkcja $\tilde{\gamma}_z: [0, 1] \ni t \mapsto \gamma(z, t) \in \overline{\mathbb{D}}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą c_1 , tzn.

$$\left| \gamma(z, 1) - \gamma(z, t) \right| = \left| \tilde{\gamma}_z(1) - \tilde{\gamma}_z(t) \right| \leq c_1(1 - t), \quad t \in [0, 1].$$

Z drugiej strony ścieżka γ przecina brzeg $\partial\mathbb{D}$ niestycznie, zatem spełniona jest nierówność $\operatorname{Re} \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial t}(z, 1), \gamma(z, 1) \right\rangle > 0$ dla wszystkich $z \in \partial\mathbb{D}$. Z ciągłości pochodnej $\frac{\partial\gamma}{\partial t}$ wynika, że istnieje $r \in (0, 1)$ takie, że $\operatorname{Re} \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial t}(z, s), \gamma(z, s) \right\rangle > 0$ dla $s \in [r, 1]$ oraz wszystkich $z \in \partial\mathbb{D}$. Stąd z kolei istnieje stała $c_2 > 0$ taka, że $\operatorname{Re} \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial t}(z, s), \gamma(z, s) \right\rangle \geq c_2$ dla $s \in [r, 1]$ oraz wszystkich $z \in \partial\mathbb{D}$.

Ustalmy $w \in \partial\mathbb{D}$ oraz $s \in [r, 1)$. Rozważmy następującą funkcję rzeczywistą $\gamma_w: [s, 1] \ni t \mapsto \left| \gamma(w, t) \right|^2 \in [0, 1]$. Funkcja ta jest różniczkowalna w przedziale $(s, 1)$ oraz ciągła na $[s, 1]$. Stąd na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej istnieje $\tau \in (s, 1)$ takie, że

$$\frac{1 - \left| \gamma(w, s) \right|^2}{1 - s} = \frac{\partial |\gamma|^2}{\partial t}(w, \tau).$$

Prowadzi to do następującego oszacowania

$$\begin{aligned} \frac{1 - \left| \gamma(w, s) \right|}{1 - s} &\geq \frac{1 - \left| \gamma(w, s) \right|^2}{2(1 - s)} = \frac{1}{2} \frac{\partial |\gamma|^2}{\partial t}(w, \tau) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\gamma}{\partial t}(w, \tau) \bar{\gamma}(w, \tau) + \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}(w, \tau) \gamma(w, \tau) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial t}(w, \tau), \gamma(w, \tau) \right\rangle. \end{aligned}$$

Z uwagi, że $\tau \in (s, 1) \subset [r, 1)$ stwierdzamy, że $\frac{1 - \left| \gamma(w, s) \right|}{1 - s} \geq c_2$, co z dowolności ustalonych $s \in [r, 1)$ oraz $w \in \partial\mathbb{D}$ w konsekwencji oznacza, że

$$\left| \gamma(z, t) \right| \leq 1 - c_2(1 - t) \quad \text{dla dowolnych } t \in [r, 1) \text{ oraz } z \in \partial\mathbb{D}.$$

Na koniec z definicji ścieżki mamy $\left| \gamma(z, 1) \right| = 1$ dla wszystkich $z \in \partial\mathbb{D}$, zatem nierówność (4.2) zachodzi również dla $t = 1$ i to kończy dowód. $\square$

Dalej pokażemy ważną własność ścieżek regularnych, która pomoże nam w rozwiązaniu odwrotnego problemu Radona.

Lemat 4.4. *Ustalmy $p > 0$. Niech $\gamma: \partial\mathbb{D} \times [0, 1] \mapsto \overline{\mathbb{D}}$ będzie ścieżką regularną w $\mathbb{D}$. Wtedy istnieją stałe $C > c > 0$ oraz $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq N$ spełnione są następujące nierówności*

$$c \leq (np + 1) \int_0^1 |\gamma(z, t)|^{np} dt \leq C, \quad z \in \partial\mathbb{D}.$$

Dowód. Z definicji ścieżki regularnej γ oraz nierówności trójkąta wynika, że istnieją stałe $c_1 \geq c_2 > 0$ oraz $r \in (0, 1)$ takie, że

$$1 - c_1(1 - t) \leq |\gamma(z, t)| \leq 1 - c_2(1 - t) \quad \text{dla } t \in [r, 1], \quad z \in \partial\mathbb{D}.$$

Ponadto z ciągłości ścieżki γ istnieje $\delta \in (0, 1)$ taka, że $\gamma(\partial\mathbb{D} \times [0, r]) \subset \overline{\mathbb{D}}(0, \delta)$. Teraz możemy wybrać $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnych $n \geq N$ zachodzą oszacowania $(1 - c_1(1 - r))^{np+1} \leq \frac{1}{2}$ oraz $(np + 1)\delta^{np} \leq 1$. Stąd dla takich $n \geq N$ otrzymujemy następujące ograniczenia niezależne od wyboru $z \in \partial\mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} (np + 1) \int_0^1 |\gamma(z, t)|^{np} dt &= (np + 1) \int_0^r |\gamma(z, t)|^{np} dt + (np + 1) \int_r^1 |\gamma(z, t)|^{np} dt \\ &\leq (np + 1)\delta^{np} + (np + 1) \int_r^1 (1 - c_2(1 - t))^{np+1} dt \\ &= (np + 1)\delta^{np} + \frac{np + 1}{c_2} \int_{1-c_2(1-r)}^1 u^{np+1} du \\ &= (np + 1)\delta^{np} + \frac{1}{c_2} \left(1 - (1 - c_2(1 - r))^{np+1}\right) \\ &\leq 1 + \frac{1}{c_2} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} (np + 1) \int_0^1 |\gamma(z, t)|^{np} dt &\geq (np + 1) \int_r^1 |\gamma(z, t)|^{np} dt \\ &\geq (np + 1) \int_r^1 (1 - c_1(1 - t))^{np} dt \\ &= \frac{np + 1}{c_1} \int_{1-c_1(1-r)}^1 u^{np} du \\ &= \frac{1}{c_1} \left(1 - (1 - c_1(1 - r))^{np+1}\right) \\ &\geq \frac{1}{2c_1}. \end{aligned}$$

Teraz dla dokończenia dowodu wystarczy wybrać stałe $c := \frac{1}{2c_1}$ oraz $C := 1 + \frac{1}{c_2}$. $\square$

4.2. Odwrotny problem Radona na dysku jednostkowym zadany przez ścieżki regularne

Ustalmy $p > 0$ oraz niech γ będzie ścieżką regularną w $\mathbb{D}$. Wtedy możemy określić działanie operatora Radona $\mathcal{R}_\gamma^p$ na funkcji $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ w następujący sposób:

$$\mathcal{R}_\gamma^p(f)(z) := \int_0^1 |(f \circ \gamma)(z, t)|^p dt, \quad z \in \partial\mathbb{D}. \quad (4.3)$$

Odwrotny problem Radona dla operatora $\mathcal{R}_\gamma^p$ stawiamy następująco: Niech H będzie ściśle dodatnią funkcją ciągłą na $\gamma(\partial\mathbb{D} \times \{1\})$. Znajdź funkcję f holomorficzną w $\mathbb{D}$ taką, że

$$\mathcal{R}_\gamma^p(f)(z) = (H \circ \gamma)(z, 1), \quad z \in \partial\mathbb{D}.$$

Zauważmy w tym miejscu, że z tak postawionego problemu wynika, że funkcja f powinna spełniać (4.3) na obrazie ścieżki $\gamma(\partial\mathbb{D} \times \{1\})$, który niekoniecznie musi być równy $\partial\mathbb{D}$. Stąd też w naszych rozważaniach będziemy chcieli dodatkowo zapewnić pewną regularność brzegową rozwiązania f również poza zbiorem $\gamma(\partial\mathbb{D} \times \{1\})$.

Rozpocniemy od poniższego lematu aproksymującego funkcje ciągłe i ściśle dodatnie na $\partial\mathbb{D}$ wielomianami.

Lemat 4.5. *Niech H będzie ściśle dodatnią funkcją ciągłą na $\partial\mathbb{D}$. Dla dowolnego $\varepsilon \in (0, 1)$ istnieje wielomian Q taki, że*

$$H(z)(1 - \varepsilon) < |Q(z)| < H(z)(1 + \varepsilon) \quad \text{dla } z \in \partial\mathbb{D}.$$

Dowód. Ustalmy $\varepsilon \in (0, 1)$. Z twierdzenia aproksymacyjnego Stone’a - Weierstrassa (Twierdzenie 7.32, [32]) istnieje ściśle dodatnia funkcja $v \in \mathcal{C}^\infty(\partial\mathbb{D})$ taka, że

$$H(z)\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) \leq v(z) \leq H(z)\left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right) \quad \text{dla } z \in \partial\mathbb{D}.$$

Skoro funkcja v jest ściśle dodatnia, to możemy zdefiniować funkcję $u := \ln(v)$ na $\partial\mathbb{D}$. Jest ona klasy $\mathcal{C}^\infty$, a zatem spełnia również warunek Höldera na $\partial\mathbb{D}$. Niech $\mathcal{S}(u)$ oznacza całkę Schwarza funkcji u . Z jej własności (rozdział 6, [4], [15]) wynika, że funkcja $\mathcal{S}(u)$ jest holomorficzną w $\mathbb{D}$, ciągłą w $\overline{\mathbb{D}}$ oraz $\operatorname{Re}(\mathcal{S}(u)) = u$ na $\partial\mathbb{D}$. Korzystając więc z twierdzenia Mergelyana (Twierdzenie 20.5, [33]) istnieje wielomian Q , który przybliża funkcję $e^{\mathcal{S}(u)}$ w $\overline{\mathbb{D}}$ tak, że

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)e^{\operatorname{Re}(\mathcal{S}(u)(z))} \leq |Q(z)| \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right)e^{\operatorname{Re}(\mathcal{S}(u)(z))} \quad \text{dla } z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Stąd dla $z \in \partial\mathbb{D}$ otrzymujemy następujące nierówności:

$$|Q(z)| \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right)e^{\operatorname{Re}(\mathcal{S}(u)(z))} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right)e^{u(z)} \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right)^2 H(z) < (1 + \varepsilon)H(z)$$

oraz

$$|Q(z)| \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)e^{\operatorname{Re}(\mathcal{S}(u)(z))} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)e^{u(z)} \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)^2 H(z) > (1 - \varepsilon)H(z),$$

które kończą dowód. □

Dalej będziemy potrzebować poniższego lematu z [17], dzięki któremu otrzymujemy funkcję o pewnej regularności, która przyjmuje wartość 1 wyłącznie na zadanym wcześniej zwartym podzbiórze $\partial\mathbb{D}$. Własność ta posłuży nam później do zapewnienia wspomnianej regularności rozwiązania problemu (4.3) poza zbiorem $\gamma(\partial\mathbb{D} \times \{1\})$.

Lemat 4.6 (Lemat 2.2, [17]). *Niech $T \subset \partial\mathbb{D}$ będzie zbiorem domkniętym. Wtedy istnieje funkcja $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ taka, że*

1. $|h(z)| \leq |z|$ dla $z \in \mathbb{D}$
2. $|h(z)| = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z \in T$
3. $|h'(z)| < 2$ dla $z \in \mathbb{D}$.

Lemat 4.7. Niech $m \in \mathbb{N}$ oraz $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$. Istnieje stała $M > 0$ taka, że jeśli $n > m$, to

$$\left| (h^n)^{(k)}(z) \right| \leq M n^m |h^{n-m}(z)| \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, m \text{ oraz } z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Dowód. Istnieje stała $C > 0$ takie, że $\sup_{z \in \partial \mathbb{D}} |h^{(k)}(z)| \leq C$, $k = 0, 1, \dots, m$. Zauważmy, że ponieważ $n > m$, to każda pochodna $(h^n)^{(m)}$ jest sumą $m!$ składników składających się z iloczynu funkcji h^{n-m} oraz m pochodnych funkcji h rzędu k , gdzie $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ i stałych ograniczonych przez n^m . Stąd możemy oszacować

$$\left| (h^n)^{(m)}(z) \right| \leq n^m m! C^m |h^{n-m}(z)|, \quad z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Teraz wystarczy zdefiniować $M := m! C^m$. Dla $k = 0, 1, \dots, m-1$ powtarzając to samo rozumowanie i uwzględniając, że $k < m$ otrzymujemy, że powyższe szacowania są prawdziwe dla $k = 0, 1, \dots, m$ i to kończy dowód. $\square$

Mając już wystarczające informacje na temat ścieżek regularnych, możemy przejść do konstrukcji generatorów, które później wykorzystamy do otrzymania rozwiązania problemu Radona. Podobnie jak w poprzednich rozdziałach zapewnimy generatorom własność prawie dodawania. Z drugiej strony funkcja h z Lematu 4.6 wraz z Lematem 4.7 pozwoli nam ograniczyć odpowiednio wartości pochodnych generatorów na zwartych podzbiorach $\mathbb{D} \setminus \gamma(\partial \mathbb{D} \times \{1\})$.

Lemat 4.8. Ustalmy $p > 0$. Niech $\gamma: \partial \mathbb{D} \times [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ będzie ścieżką regularną w $\mathbb{D}$. Istnieje stała $\theta = \theta(\gamma) \in (0, 1)$ taka, że jeżeli H jest ściśle dodatnią funkcją ciągłą na $\gamma(\partial \mathbb{D} \times \{1\})$, a $K \subset \subset \mathbb{D} \setminus \gamma(\partial \mathbb{D} \times \{1\})$, $m \in \mathbb{N}$, $L > 0$ oraz $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$, to istnieje funkcja $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ taka, że

1. $\|f^{(i)}\|_K < \delta$, $i = 0, 1, \dots, m$
2. $\theta(H \circ \gamma)(\cdot, 1) < \mathcal{R}_\gamma^p(f) < (H \circ \gamma)(\cdot, 1)$ na $\partial \mathbb{D}$
3. $\mathcal{R}_\gamma^p(f) + \mathcal{R}_\gamma^p(g) - \varepsilon < \mathcal{R}_\gamma^p(f+g) < \mathcal{R}_\gamma^p(f) + \mathcal{R}_\gamma^p(g) + \varepsilon$ na $\partial \mathbb{D}$ dla dowolnej $g \in \mathcal{C}_L(\overline{\mathbb{D}})$

Dowód. Ścieżka γ jest regularna, a zatem istnieją stałe $c_1 \geq c_2 > 0$ oraz $r \in (0, 1)$ takie, że

$$|\gamma(z, 1) - \gamma(z, t)| \leq c_1(1-t) \quad \text{dla } t \in [r, 1], \quad z \in \partial \mathbb{D} \quad (4.4)$$

oraz

$$|\gamma(z, t)| \leq 1 - c_2(1-t) \quad \text{dla } t \in [r, 1], \quad z \in \partial \mathbb{D} \quad (4.5)$$

Pokażemy, że dla lematu wystarczy wybrać $\theta := \frac{c_2}{4c_1}$. Na mocy twierdzenia Tietzego (Twierdzenie 20.4, [33]) funkcja H może być przedłużona w sposób ciągły na $\partial \mathbb{D}$ tak, że $\sup \{H(z) : z \in \partial \mathbb{D}\} = \sup \{H(z) : z \in \gamma(\partial \mathbb{D} \times \{1\})\}$ oraz H jest ściśle dodatnia na $\partial \mathbb{D}$. Z Lematu 4.5 wynika, że istnieje wielomian Q taki, że

$$\frac{8}{10} c_2 H(z) < |Q(z)|^p < \frac{81}{100} c_2 H(z) \quad \text{dla } z \in \partial \mathbb{D}. \quad (4.6)$$

Weźmy funkcję $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ z Lematu 4.6 o poniższych własnościach:

- $|h(z)| = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z \in \gamma(\partial\mathbb{D} \times \{1\})$
- $|h(z)| \leq |z|$ dla $z \in \overline{\mathbb{D}}$
- $|h'(z)| < 2$ dla $z \in \overline{\mathbb{D}}$.

Zauważmy, że funkcja h spełnia warunek Lipschitza na $\overline{\mathbb{D}}$ ze stałą równą 2, a stąd i z warunku (4.4) otrzymujemy zależność

$$\left| (h \circ \gamma)(z, t) \right| \geq 1 - 2c_1(1 - t) \quad \text{dla } t \in [r, 1], \quad z \in \partial\mathbb{D}. \quad (4.7)$$

Co więcej, funkcja $Q \circ \gamma$ jest jednostajnie ciągła na $\partial\mathbb{D} \times [0, 1]$, a więc istnieje takie $r_1 \in (r, 1)$, że dla $t \in [r, 1]$ oraz $z \in \partial\mathbb{D}$ mamy

$$\frac{9}{10} |Q(\gamma(z, 1))|^p < |Q(\gamma(z, t))|^p < \frac{10}{9} |Q(\gamma(z, 1))|^p. \quad (4.8)$$

Istnieje $N_1 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq N_1$ zachodzi następująca zależność

$$(1 - 2c_1(1 - r_1))^{np+1} < \frac{1}{10}. \quad (4.9)$$

Z definicji ścieżki γ wynika, że możemy wybrać $a \in (0, 1)$ taką, że $\gamma(\partial\mathbb{D} \times [0, r_1]) \subset a\mathbb{D}$, a stąd

$$(np + 1) \int_0^{r_1} |\gamma(z, t)|^{np} dt \leq (np + 1) r_1 a^{np}, \quad z \in \partial\mathbb{D}.$$

Z powyższego natomiast wnioskujemy, że istnieje $N_2 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq N_2$ mamy

$$(np + 1) \int_0^{r_1} |\gamma(z, t)|^{np} dt \leq \frac{1}{10c_2 \|Q\|_{\mathbb{D}}^p} \inf_{\omega \in \partial\mathbb{D}} (H \circ \gamma)(\omega, 1), \quad z \in \partial\mathbb{D}. \quad (4.10)$$

Zdefiniujmy funkcję $f_n := (np + 1)^{\frac{1}{p}} Q h^n \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{D}})$, gdzie $n \geq \max\{N_1, N_2\}$. Jeśli $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, to powyższe nierówności implikują następujące oszacowania dla $z \in \partial\mathbb{D}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n(\gamma(z, t))|^p dt &= (np + 1) \int_0^1 |h(\gamma(z, t))|^{np} |Q(\gamma(z, t))|^p dt \\ &\stackrel{(4.8)}{>} \frac{9}{10} (np + 1) |Q(\gamma(z, 1))|^p \int_{r_1}^1 |h(\gamma(z, t))|^{np} dt \\ &\stackrel{(4.7)}{\geq} \frac{9}{10} (np + 1) |Q(\gamma(z, 1))|^p \int_{r_1}^1 (1 - 2c_1(1 - t))^{np} dt \\ &\stackrel{(4.6)}{>} \frac{72c_2}{200c_1} H(\gamma(z, 1)) \left(1 - (1 - 2c_1(1 - r_1))^{np+1}\right) \\ &\stackrel{(4.9)}{>} \frac{c_2}{4c_1} H(\gamma(z, 1)) \\ &= \theta(H \circ \gamma)(z, 1) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 |f_n(\gamma(z, t))|^p dt &= (np+1) \int_0^1 |h(\gamma(z, t))|^{np} |Q(\gamma(z, t))|^p dt \\
 &\stackrel{(4.8)}{<} \frac{10}{9} (np+1) |Q(\gamma(z, 1))|^p \int_{r_1}^1 |\gamma(z, t)|^{np} dt \\
 &\quad + (np+1) \|Q\|_{\mathbb{D}}^p \int_0^{r_1} |\gamma(z, t)|^{np} dt \\
 &\stackrel{(4.10)}{<} \frac{10}{9} (np+1) |Q(\gamma(z, 1))|^p \int_{r_1}^1 (1 - c_2(1-t))^{np} dt \\
 &\quad + \frac{1}{10} \inf_{\omega \in \partial \mathbb{D}} (H \circ \gamma)(\omega, 1) \\
 &\stackrel{(4.6)}{<} \frac{9}{10} \left(1 - (1 - c_2(1-r_1))^{np+1}\right) (H \circ \gamma)(z, 1) \\
 &\quad + \frac{1}{10} (H \circ \gamma)(z, 1) \\
 &< (H \circ \gamma)(z, 1).
 \end{aligned}$$

Tak otrzymaliśmy, że funkcja f_n spełnia warunek 2 z $\theta = \frac{c_2}{4c_1}$.

Ze wzoru na pochodną iloczynu mamy równość $f_n^{(i)} = (np+1)^{\frac{1}{p}} \sum_{k=0}^i (h^n)^{(k)} Q^{(i-k)}$, $i = 0, 1, \dots, m$. Istnieje stała $C_1 > 0$ taka, że $\|Q^{(i)}\|_{\mathbb{D}} \leq C_1$ dla $i = 0, 1, \dots, m$. Na mocy Lematu 4.7 jeśli $n > m$, to istnieje stała $C_2 > 0$ taka, że

$$|(h^n)^{(i)}(z)| \leq C_2 n^m |h^{n-m}(z)|, \quad z \in \overline{\mathbb{D}}, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Zatem

$$|f_n^{(i)}(z)| \leq (i+1) C_1 C_2 n^m (np+1)^{\frac{1}{p}} |h(z)|^{n-m}, \quad z \in \overline{\mathbb{D}}, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Z powyższej nierówności i faktu, że $|h(z)| < 1$ dla $z \in K$ wynika, że istnieje $N_3 \in \mathbb{N}$ takie, że jeśli $n \geq N_3$, to $\|f_n^{(i)}\|_K < \delta$ dla $i = 0, 1, \dots, m$.

Teraz przejdziemy do warunku 3. Wybierzmy $k \in \mathbb{N}$ takie, że $k \geq p$. Na mocy nierówności trójkąta otrzymujemy dla $z \in \partial \mathbb{D}$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{\gamma}^{\frac{p}{k}}(f_n^k + g^k)(z) &= \int_0^1 |(f_n^k + g^k)(\gamma(z, t))|^{\frac{p}{k}} dt \\
 &\leq \int_0^1 |f_n(\gamma(z, t))|^p dt + \int_0^1 |g(\gamma(z, t))|^p dt \\
 &= \mathcal{R}_{\gamma}^p(f_n)(z) + \mathcal{R}_{\gamma}^p(g)(z).
 \end{aligned}$$

Niech $b \in (0, 1)$ będzie takie, że $\int_b^1 |g(\gamma(z, t))|^p < \frac{\varepsilon}{8}$ dla $z \in \partial \mathbb{D}$ oraz $c \in (0, 1)$ takie, że $\gamma(\partial \mathbb{D} \times [0, b]) \subset c\mathbb{D}$. Wtedy dla $z \in \partial \mathbb{D}$ łatwo możemy oszacować, że

$$\int_0^b |f_n(\gamma(z, t))|^p dt \leq (np+1) \|Q\|_{\mathbb{D}}^p \int_0^b |\gamma(z, t)|^{np} dt \leq (np+1) \|Q\|_{\mathbb{D}}^p b c^{np}.$$

Stąd istnieje $N_4 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq N_4$ zachodzi $\int_0^a |f_n(\gamma(z, t))|^p dt < \frac{\varepsilon}{8}$ dla wszystkich $z \in \partial\mathbb{D}$. Powyższe nierówności prowadzą do następującego oszacowania dla $z \in \partial\mathbb{D}$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_\gamma^{\frac{p}{k}}(f_n^k + g^k)(z) &= \int_0^1 |(f_n^k + g^k)(\gamma(z, t))|^{\frac{p}{k}} dt \\
 &= \int_0^b |(f_n^k + g^k)(\gamma(z, t))|^{\frac{p}{k}} dt + \int_b^1 |(f_n^k + g^k)(\gamma(z, t))|^{\frac{p}{k}} dt \\
 &\geq \int_0^b |g(\gamma(z, t))|^p dt - \int_0^b |f_n(\gamma(z, t))|^p dt + \int_b^1 |f_n(\gamma(z, t))|^p dt \\
 &\quad - \int_b^1 |g(\gamma(z, t))|^p dt \\
 &= \mathcal{R}_\gamma^p(f_n)(z) + \mathcal{R}_\gamma^p(g)(z) - 2 \int_0^b |f_n(\gamma(z, t))|^p dt \\
 &\quad - 2 \int_b^1 |g(\gamma(z, t))|^p dt \\
 &> \mathcal{R}_\gamma^p(f_n)(z) + \mathcal{R}_\gamma^p(g)(z) - \frac{\varepsilon}{2}.
 \end{aligned}$$

W przypadku, gdy $0 < p \leq 1$ wystarczy wybrać $k = 1$ i dostajemy tezę.

W przeciwnym przypadku będziemy potrzebować dodatkowych informacji. Na mocy Lematu 4.4 istnieje stała $C_3 > 0$ oraz $N_5 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq N_5$ zachodzi oszacowanie $\left(\frac{nmp}{k} + 1\right) \int_0^1 |\gamma(z, t)|^{\frac{nmp}{k}} dt \leq C_3$ dla $z \in \partial\mathbb{D}$. Następnie oznaczmy $\mathcal{I}_k^p(\gamma, f_n, g)(z) := \int_0^1 \left| \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} (f_n(\gamma(z, t)))^m (g(\gamma(z, t)))^{k-m} \right|^{\frac{p}{k}} dt$ i zauważmy, że jeśli $n \geq N_5$, to dla $z \in \partial\mathbb{D}$ prawdą jest, że

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_k^p(\gamma, f_n, g)(z) &\leq \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m}^{\frac{p}{k}} \int_0^1 |f_n(\gamma(z, t))|^{\frac{mp}{k}} |g(\gamma(z, t))|^{\frac{(k-m)p}{k}} dt \\
 &\leq \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m}^{\frac{p}{k}} \|Q\|_{\mathbb{D}}^{\frac{mp}{k}} L^{\frac{p(k-m)}{k}} (np+1)^{\frac{m}{k}} \int_0^1 |h(\gamma(z, t))|^{\frac{nmp}{k}} dt \\
 &\leq \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m}^{\frac{p}{k}} \|Q\|_{\mathbb{D}}^{\frac{mp}{k}} L^{\frac{p(k-m)}{k}} (np+1)^{\frac{m}{k}} \int_0^1 |\gamma(z, t)|^{\frac{nmp}{k}} dt \\
 &\leq \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m}^{\frac{p}{k}} \|Q\|_{\mathbb{D}}^{\frac{mp}{k}} L^{\frac{p(k-m)}{k}} \frac{kC_3(np+1)^{\frac{m}{k}}}{nmp+k} \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

Stąd z kolei istnieje $N_6 \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathcal{I}_k^p(\gamma, f_n, g)(z) < \frac{\varepsilon}{2}$ dla $n \geq N_6$ oraz $z \in \partial\mathbb{D}$. Prowadzi to do wniosku, że jeśli $n \geq \max\{N_4, N_5, N_6\}$, to dla $z \in \partial\mathbb{D}$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\gamma^p(f_n + g)(z) &= \int_0^1 |(f_n + g)(\gamma(z, t))|^p dt \\ &= \int_0^1 \left(|(f_n + g)(\gamma(z, t))|^k \right)^{\frac{p}{k}} dt \\ &= \int_0^1 \left| \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (f_n(\gamma(z, t)))^m (g(\gamma(z, t)))^{k-m} \right|^{\frac{p}{k}} dt \\ &\leq \int_0^1 |f_n(\gamma(z, t))|^p dt + \int_0^1 |g(\gamma(z, t))|^p dt + \mathcal{I}_k^p(\gamma, f_n, g)(z) \\ &< \mathcal{R}_\gamma^p(f_n)(z) + \mathcal{R}_\gamma^p(g)(z) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\gamma^p(f_n + g)(z) &= \int_0^1 |(f_n + g)(\gamma(z, t))|^p dt \\ &= \int_0^1 \left| \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (f_n(\gamma(z, t)))^m (g(\gamma(z, t)))^{k-m} \right|^{\frac{p}{k}} dt \\ &\geq \int_0^1 |(f_n^k + g^k)(\gamma(z, t))|^{\frac{p}{k}} dt - \mathcal{I}_k^p(\gamma, f_n, g)(z) \\ &> \int_0^1 |f_n(\gamma(z, t))|^p dt + \int_0^1 |g(\gamma(z, t))|^p dt - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \mathcal{R}_\gamma^p(f_n)(z) + \mathcal{R}_\gamma^p(g)(z) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Teraz wystarczy zdefiniować $f := f_n$, gdzie n jest odpowiednio duże i to kończy dowód. $\square$

Teraz możemy już przedstawić konstrukcję rozwiązania problemu Radona w ogólniejszej wersji na dysku jednostkowym, tzn. dla krzywych regularnych.

Twierdzenie 4.9. *Ustalmy $p > 0$. Niech $\gamma: \partial\mathbb{D} \times [0, 1] \mapsto \overline{\mathbb{D}}$ będzie ścieżką regularną w $\partial\mathbb{D}$ oraz Ψ będzie ściśle dodatnią funkcją ciągłą na $\gamma(\partial\mathbb{D} \times \{1\})$. Istnieje funkcja $G \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ taka, że*

$$\mathcal{R}_\gamma^p(G)(z) = (\Psi \circ \gamma)(z, 1) \quad \text{dla } z \in \partial\mathbb{D}$$

oraz $G \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{D}} \setminus \gamma(\partial\mathbb{D} \times \{1\}))$.

Dowód. Weźmy $\theta \in (0, 1)$ z Lematu 4.8. Niech $\{m_j\}_{j=0}^\infty \subset \mathbb{N}$ będzie rosnącym do nieskończoności ciągiem liczb naturalnych, a $\{T_j\}_{j=0}^\infty \subset \overline{\mathbb{D}} \setminus \gamma(\partial\mathbb{D} \times \{1\})$ będzie wstępującym ciągiem zbiorów zwartych takich, że $T_j \subset \text{int}(T_{j+1})$, $j = 0, 1, \dots$, oraz $\bigcup_{j=0}^\infty T_j = \overline{\mathbb{D}} \setminus \gamma(\partial\mathbb{D} \times \{1\})$. Pokażemy, że indukcyjnie można skonstruować ciąg funkcji $\{F_j\}_{j=0}^\infty \subset \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ o następujących własnościach:

$$1. \quad 0 < \frac{\theta}{2}(\Psi \circ \gamma)(z, 1) + \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^{j-1} F_i\right)(z) < \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right)(z) < (\Psi \circ \gamma)(z, 1)$$

dla $z \in \partial\mathbb{D}$, $j = 1, 2, \dots$

$$2. \quad \|F_j^{(k)}\|_{T_j} < 2^{-j-1}, \quad k = 0, 1, \dots, m_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Niech $F_0 \equiv 0$. Dla $j = 1$ konstruujemy funkcję $F_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ stosując Lemat 4.8 z $H := \Psi$, $K := T_1$, $m := m_1$ oraz $\delta := 2^{-2}$, która spełnia wyżej określone warunki. Dalej założymy indukcyjnie, że już skonstruowaliśmy odpowiednie funkcje $F_0, F_1, \dots, F_j \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ z żądanymi własnościami dla $j \geq 1$. Następnie zastosujemy Lemat 4.8 do następujących danych:

$$(H \circ \gamma)(\cdot, 1) := \frac{3}{4} \left((\Psi \circ \gamma)(\cdot, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right) \right), \quad L := \sup_{z \in \partial\mathbb{D}} \left| \sum_{i=0}^j F_i(z) \right|, \quad K := T_{j+1},$$

$$\varepsilon := \frac{\theta}{4} \inf_{\omega \in \partial\mathbb{D}} \left((\Psi \circ \gamma)(\omega, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right)(\omega) \right), \quad m := m_{j+1}, \quad \delta := 2^{-j-2}$$

Tak otrzymujemy funkcję $F_{j+1} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ taką, że $\|F_j^{(k)}\|_{T_{j+1}} < 2^{-j-2}$ dla $k = 0, 1, \dots, m_{j+1}$, oraz na $\partial\mathbb{D}$ spełniającą warunki:

$$1. \quad \frac{3}{4} \theta \left((\Psi \circ \gamma)(\cdot, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right) \right) < \mathcal{R}_\gamma^p(F_{j+1}) < \frac{3}{4} \left((\Psi \circ \gamma)(\cdot, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right) \right)$$

$$2. \quad \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right) + \mathcal{R}_\gamma^p(F_{j+1}) - \varepsilon < \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^{j+1} F_i\right) < \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right) + \mathcal{R}_\gamma^p(F_{j+1}) + \varepsilon$$

Stąd możemy uzyskać następujące oszacowania dla $z \in \partial\mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^{j+1} F_i\right)(z) &< \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right)(z) + \mathcal{R}_\gamma^p(F_{j+1})(z) + \varepsilon \\ &< \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right)(z) + \frac{3}{4} \left((\Psi \circ \gamma)(z, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right)(z) \right) \\ &\quad + \frac{\theta}{4} \inf_{\omega \in \partial\mathbb{D}} \left((\Psi \circ \gamma)(\omega, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right)(\omega) \right) \\ &\leq \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right)(z) + \frac{3}{4} \left((\Psi \circ \gamma)(z, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right)(z) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left((\Psi \circ \gamma)(z, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right)(z) \right) \\ &\leq (\Psi \circ \gamma)(z, 1) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^{j+1} F_i\right)(z) &> \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right)(z) + \mathcal{R}_\gamma^p(F_{j+1})(z) - \varepsilon \\
 &> \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right)(z) + \frac{3}{4}\theta\left((\Psi \circ \gamma)(z, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right)(z)\right) - \varepsilon \\
 &> \frac{3}{4}\theta(\Psi \circ \gamma)(z, 1) + \left(1 - \frac{3}{4}\theta\right)\mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right)(z) \\
 &\quad - \frac{\theta}{4} \inf_{\omega \in \partial\mathbb{D}} \left((\Psi \circ \gamma)(\omega, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right)(\omega)\right) \\
 &> \frac{\theta}{2}(\Psi \circ \gamma)(z, 1) + \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)\mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right)(z) \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

Dlatego dla wszystkich $z \in \partial\mathbb{D}$ prawdą jest, że

$$\left(1 - \frac{\theta}{2}\right)\left((\Psi \circ \gamma)(z, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right)\right) > (\Psi \circ \gamma)(z, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^{j+1} F_i\right) > 0. \quad (4.11)$$

Powyższe implikuje, że

$$\left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{j+1}(\Psi \circ \gamma)(z, 1) > (\Psi \circ \gamma)(z, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^{j+1} F_i\right) > 0 \quad \text{dla } z \in \partial\mathbb{D}.$$

Stąd z kolei wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{j=0}^n F_j\right)(z) = (\Psi \circ \gamma)(z, 1), \quad z \in \partial\mathbb{D}.$$

Szereg $\sum_{j=0}^n F_j$ jest zbieżny na zwartych podzbiorach $\overline{\mathbb{D}} \setminus \gamma(\partial\mathbb{D} \times \{1\})$, a więc możemy

określić funkcję $G = \sum_{j=0}^{\infty} F_j$, która jest holomorficzną w $\mathbb{D}$. Ciąg $\left\{\mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{j=0}^n F_j\right)\right\}$ jest więc rosnący i zbieżny punktowo do funkcji $\mathcal{R}_\gamma^p(G)$, a zatem na mocy twierdzenia Diniego jest on zbieżny jednostajnie do $\mathcal{R}_\gamma^p(G)$ na $\partial\mathbb{D}$. Stąd otrzymujemy, że

$$\mathcal{R}_\gamma^p(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{j=0}^n F_j\right) = (\Psi \circ \gamma)(\cdot, 1) \quad \text{na } \partial\mathbb{D}.$$

Niech $k_0 \in \mathbb{N}$, $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \gamma(\partial\mathbb{D} \times \{1\})$ oraz $r \in \left(0, \text{dist}(z, \gamma(\partial\mathbb{D} \times \{1\}))\right)$. Wtedy istnieje liczba $N \in \mathbb{N}$ taka, że $m_n \geq k_0$ oraz $\mathbb{D}(z, r) \subset \text{int}(T_n)$ dla $n \geq N$. Stąd

$$|G^{(k_0)}(z)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |F_j^{(k_0)}(z)| + \sum_{j=n-1}^{\infty} 2^{-j-1} < \infty.$$

Z dowolności z i k_0 otrzymujemy, że $G \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{D}} \setminus \gamma(\partial\mathbb{D} \times \{1\}))$ i to kończy dowód. □

4.3. Odwrotny Problem Radona na obszarach jednospójnych w $\mathbb{C}$

Na koniec tego rozdziału pokażemy, że dzięki twierdzeniu Riemanna o odwzorowaniu konforemnym oraz twierdzeniu Carathéodory'ego o przedłużaniu odwzorowań konforemnych możemy rozwiązać odpowiednio zdefiniowany problem Radona na obszarach jednospójnych.

Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem jednospójnym ograniczonym krzywą klasy $\mathcal{C}^\infty$. Na mocy twierdzenia Riemanna o odwzorowaniu konforemnym (str. 4, [27]) istnieje odwzorowanie biholomorficzne $\varphi: \mathbb{D} \mapsto U$. Z twierdzenia Carathéodory'ego (Twierdzenie 2.6, [27]) wynika, że odwzorowanie to może być przedłużone iniektywnie na $\overline{\mathbb{D}}$ do funkcji klasy $\mathcal{C}^\infty$. Tak możemy wprowadzić następującą definicję ścieżki regularnej w U .

Definicja 4.10. *Krzywą $\gamma: \partial U \times [0, 1] \mapsto \overline{U}$ nazywamy ścieżką regularną w U wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie konforemne $\varphi: \overline{\mathbb{D}} \mapsto \overline{U}$ takie, że funkcja $\gamma: \partial \mathbb{D} \times [0, 1] \ni (z, t) \mapsto (\varphi^{-1} \circ \Gamma)(\varphi(z), t) \in \overline{\mathbb{D}}$ jest ścieżką regularną w $\mathbb{D}$.*

Ustalmy $p > 0$ oraz niech Γ będzie ścieżką regularną w U . Wtedy możemy zdefiniować działanie operatora Radona zadanego przez ścieżkę Γ na funkcji $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ w następujący sposób:

$$\mathcal{R}_\Gamma^p(f)(z) := \int_0^1 |(f \circ \Gamma)(z, t)|^p dt, \quad z \in \partial U. \quad (4.12)$$

Odwrotny problem Radona dla operatora $\mathcal{R}_\Gamma^p$ stawiamy standardowo jak w poprzednich rozdziałach: Niech H będzie ściśle dodatnią funkcją ciągłą na $\Gamma(\partial U \times \{1\})$. Znajdź funkcję f holomorficzną w $\mathbb{D}$ taką, że

$$\mathcal{R}_\Gamma^p(f)(z) = (H \circ \Gamma)(z, 1), \quad z \in \partial U.$$

Twierdzenie 4.11. *Ustalmy $p > 0$. Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem jednospójnym ograniczonym krzywą klasy $\mathcal{C}^\infty$, a $\Gamma: \partial U \times [0, 1] \mapsto \overline{U}$ będzie ścieżką regularną w U . Jeśli H jest ściśle dodatnią funkcją ciągłą na $\Gamma(\partial U \times \{1\})$, to istnieje funkcja $\Phi \in \mathcal{O}(U)$ taka, że*

$$\mathcal{R}_\Gamma^p(\Phi)(z) = (H \circ \Gamma)(z, 1) \quad \text{dla } z \in \partial U.$$

Ponadto $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{U} \setminus \Gamma(\partial U \times \{1\}))$.

Dowód. Ścieżka Γ jest regularna w U , a zatem istnieje odwzorowanie konforemne $\varphi: \overline{\mathbb{D}} \mapsto \overline{U}$ takie, że funkcja $\gamma: \partial \mathbb{D} \times [0, 1] \ni (w, t) \mapsto (\varphi^{-1} \circ \Gamma)(\varphi(w), t) \in \overline{\mathbb{D}}$ jest ścieżką regularną w $\mathbb{D}$ oraz $\Gamma(\varphi(w), t) = (\varphi \circ \gamma)(w, t)$, gdzie $w \in \partial \mathbb{D}$, $t \in [0, 1]$. Stąd również $\Gamma(\partial U \times \{1\}) = (\varphi \circ \gamma)(\partial \mathbb{D} \times \{1\})$, a zatem funkcja $H \circ \varphi$ jest ściśle dodatnia i ciągła na $\gamma(\partial \mathbb{D} \times \{1\})$. Opierając się na Twierdzeniu 4.9 istnieje funkcja $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ taka, że

$$\mathcal{R}_\gamma^p(f)(w) = \int_0^1 |f(\gamma(w, t))|^p dt = (H \circ \varphi \circ \gamma)(w, 1), \quad w \in \partial \mathbb{D}$$

oraz $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{D}} \setminus \gamma(\partial\mathbb{D} \times \{1\}))$. Teraz wystarczy zdefiniować funkcję $\Phi := f \circ \varphi^{-1}$, która jest holomorficzną w U , a dla $z \in \partial U$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\Gamma^p(\Phi)(z) &= \int_0^1 \left| (\Phi \circ \Gamma)(z, t) \right|^p dt &= \int_0^1 \left| (f \circ \varphi^{-1} \circ \Gamma)(z, t) \right|^p dt \\ &= \int_0^1 \left| (f \circ \gamma)(\varphi^{-1}(z), t) \right|^p dt &= (H \circ \varphi \circ \gamma)(\varphi^{-1}(z), 1) \\ &= (H \circ \Gamma)(z, 1).\end{aligned}$$

Zauważmy, że z definicji ścieżki Γ wynika, że $(\varphi^{-1} \circ \Gamma)(\partial U \times \{1\}) = \gamma(\partial\mathbb{D} \times \{1\})$, a zatem $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{U} \setminus \Gamma(\partial U \times \{1\}))$. $\square$

Odwrotny problem Radona na polidysku w $\mathbb{C}^d$

W ostatnim rozdziale rozprawy rozważamy odwrotny problem Radona na polidysku w $\mathbb{C}^d$, w którym operator Radona jest zadany całką po krzywych będącymi iloczynem kartezjańskim ścieżek regularnych na dysku jednostkowym opisanych w rozdziale 4. Z uwagi na taką definicję operator Radona będzie określony tylko na brzegu Shilova polidysku $\Delta = \Delta_d \subset \mathbb{C}^d$, który będziemy oznaczać następująco:

$$\partial_s \Delta := \{(z_1, z_2, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d : |z_i| = 1, i = 1, 2, \dots, d\}.$$

Dla uproszczenia notacji w całym rozdziale przyjmiemy, że pisząc $z \in \mathbb{C}^d$ mamy na myśli, że $z = (z_1, z_2, \dots, z_d)$, gdzie $z_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots, d$, i bez powtarzania tych oznaczeń będziemy mogli bezpośrednio odwoływać się do poszczególnych współrzędnych z_j według potrzeb, analogicznie dla $z \in \Delta$ oraz $z \in \partial_s \Delta$.

5.1. Ścieżki regularne i operator Radona na polidysku

Ścieżki regularne w polidysku $\Delta \subset \mathbb{C}^d$, które rozważamy w tym rozdziale, definiujemy jako iloczyn kartezjański d ścieżek regularnych w $\mathbb{D}$.

Definicja 5.1. Funkcję $\gamma: \partial_s \Delta \times [0, 1] \mapsto \overline{\Delta}$ nazywamy *ścieżką regularną w Δ wtedy i tylko wtedy, gdy* $\gamma(z, t) = (\gamma_1(z_1, t), \gamma_2(z_2, t), \dots, \gamma_d(z_d, t))$, *gdzie* $z \in \partial_s \Delta$, $t \in [0, 1]$, *a* γ_j *są ścieżkami regularnymi w $\mathbb{D}$.*

Zauważmy, że z powyższej definicji wynika, że dla wszystkich ścieżek regularnych γ_j , $j = 1, 2, \dots, d$, możemy wybrać wspólne stałe $c_1 \geq c_2 > 0$ oraz $r \in (0, 1)$ takie, że

$$|\gamma_j(w, 1) - \gamma_j(w, t)| \leq c_1(1 - t) \quad \text{dla } t \in [r, 1], \quad w \in \partial \mathbb{D}, \quad j = 1, 2, \dots, d \quad (5.1)$$

oraz

$$|\gamma_j(w, t)| \leq 1 - c_2(1 - t) \quad \text{dla } t \in [r, 1], \quad w \in \partial \mathbb{D}, \quad j = 1, 2, \dots, d. \quad (5.2)$$

Dla tak zdefiniowanych ścieżek regularnych γ oraz $p > 0$ określamy działanie operatora Radona $\mathcal{R}_\gamma^p$ na funkcji $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ jako

$$\mathcal{R}_\gamma^p(f)(z) := \int_0^1 |f \circ \gamma(z, t)|^p dt, \quad z \in \partial_s \Delta.$$

Stawiamy również następujący problem: Niech $H: \gamma(\partial_s \Delta \times \{1\}) \mapsto \mathbb{R}_+$ będzie daną ściśle dodatnią funkcją ciągłą na $\gamma(\partial_s \Delta \times \{1\})$. Znajdź funkcję f holomorficzną w Δ taką, że

$$\mathcal{R}_\gamma^p(f)(z) = (H \circ \gamma)(z, 1) \quad \text{dla } z \in \partial_s \Delta. \quad (5.3)$$

Zauważmy, że postawiony wyżej problem ze względu na definicję ścieżki regularnej w Δ jest określony wyłącznie na brzegu Shilova polidysku Δ . Z drugiej strony podobnie jak w rozdziale 4 nie zakładamy, że $\gamma(\partial_s \Delta \times \{1\}) = \partial_s \Delta$, stąd będziemy chcieli, by konstruowane rozwiązanie spełniało nie tylko (5.3), ale także spełniało pewne warunki regularności na $\overline{\Delta} \setminus \gamma(\partial_s \Delta \times \{1\})$.

Z racji, że każda funkcja ciągła na zbiorze zwartym jest jednostajnie ciągła, to możemy podzielić ten zbiór na skończoną liczbę zwartych podzbiorów, na których funkcja ta jest prawie stała, tzn. jeśli $T \subset \mathbb{C}^d$ jest zbiorem zwartym, a $g: T \mapsto \mathbb{R}_+$ funkcją ciągłą na T , to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ oraz zwarte podzbiory $S_1, S_2, \dots, S_N \subset T$ takie, że

$$|g(w_1) - g(w_2)| < \varepsilon \quad \text{dla } w_1, w_2 \in S_n, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Stąd rozważania nad problemem Radona na polidysku rozpoczniemy lematem aproksymującym funkcje stałe na pewnych zwartych podzbiórach $\partial_s \Delta$.

Lemat 5.2. Niech $p > 0$, a $\gamma: \partial_s \Delta \times [0, 1] \mapsto \overline{\Delta}$ będzie ścieżką regularną w Δ . Istnieje $\eta = \eta(\gamma) \in (0, 1)$ taka, że jeśli $C, L > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $T_1, T_2, \dots, T_d \subset \subset \partial \mathbb{D}$, $V \subset \subset \partial_s \Delta$ takim, że $\gamma(V \times \{1\}) \cap \gamma((T_1 \times T_2 \times \dots \times T_d) \times \{1\}) = \emptyset$, $W \subset \subset \overline{\Delta} \setminus \gamma(\partial_s \Delta \times \{1\})$ oraz $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in (0, 1)$, to istnieje funkcja $f \in \mathcal{O}(\Delta) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Delta})$ o następujących własnościach:

1. $\left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha} \right\|_W < \varepsilon_1$ dla wszystkich wielowskaźników $\alpha \in \mathbb{N}^d$ takich, że $|\alpha| \leq m$
2. $\left\| \mathcal{R}_\gamma^p(f) \right\|_V < \varepsilon_2$
3. $\mathcal{R}_\gamma^p(f) < C$ na $\partial_s \Delta$
4. $\mathcal{R}_\gamma^p(f) > \eta C$ na $T_1 \times T_2 \times \dots \times T_d$
5. $\left| \mathcal{R}_\gamma^p(f) + \mathcal{R}_\gamma^p(g) - \mathcal{R}_\gamma^p(f + g) \right| < \varepsilon_3$ na $\partial_s \Delta$ dla dowolnej $g \in \mathcal{C}_L(\overline{\Delta})$.

Dowód. Ścieżka γ jest regularna, a zatem $\gamma(z, t) = (\gamma_1(z_1, t), \gamma_2(z_2, t), \dots, \gamma_d(z_d, t))$, gdzie $z \in \partial_s \Delta$, $t \in [0, 1]$ oraz γ_j są ścieżkami regularnymi w $\mathbb{D}$, $j = 1, 2, \dots, d$. Istnieją więc wspólne stałe $c_1 \geq c_2 > 0$ oraz $r \in (0, 1)$ takie, że

$$|\gamma_j(w, 1) - \gamma_j(w, t)| \leq c_1(1 - t) \quad \text{dla } t \in [r, 1], \quad w \in \partial \mathbb{D}, \quad j = 1, 2, \dots, d \quad (5.4)$$

oraz

$$|\gamma_j(w, t)| \leq 1 - c_2(1 - t) \quad \text{dla } t \in [r, 1], \quad w \in \partial \mathbb{D}, \quad j = 1, 2, \dots, d. \quad (5.5)$$

Pokażemy, że dla lematu wystarczy wybrać $\eta := \frac{c_2}{8c_1}$.

Do każdego zbioru zwartego T_j , $j = 1, 2, \dots, d$, dobierzmy z Lematu 4.6 funkcję $h_j \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{D}})$ taką, że

$$\bullet \quad |h_j(w)| = 1 \iff w \in \gamma_j(T_j \times \{1\})$$

- $|h_j(w)| \leq |w|$ dla $w \in \overline{\mathbb{D}}$
- $|h'_j(w)| < 2$ dla $w \in \overline{\mathbb{D}}$.

Każda z funkcji h_j spełnia warunek Lipschitza ze stałą równą 2, a stąd dostajemy, że jeśli $w \in T_j$, $t \in [0, 1]$, to

$$\begin{aligned} 1 - |(h_j \circ \gamma_j)(w, t)| &= |(h_j \circ \gamma_j)(w, 1)| - |(h_j \circ \gamma_j)(w, t)| \\ &\leq |(h_j \circ \gamma_j)(w, 1) - (h_j \circ \gamma_j)(w, t)| \\ &\leq 2|\gamma_j(w, 1) - \gamma_j(w, t)|, \quad j = 1, 2, \dots, d. \end{aligned}$$

Następnie biorąc pod uwagę zależność (5.4) otrzymujemy, że

$$|(h_j \circ \gamma_j)(w, t)| \geq 1 - 2c_1(1 - t) \quad \text{dla } t \in [r, 1], \quad w \in T_j, \quad j = 1, 2, \dots, d. \quad (5.6)$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ zdefiniujemy funkcję $f_n: \overline{\Delta} \rightarrow \mathbb{C}$ następująco:

$$f_n(z) := \left(\frac{Cc_2}{2} (dnp + 1) \right)^{\frac{1}{p}} \prod_{j=1}^d h_j^n(z_j).$$

Z racji, że wszystkie funkcje $h_j \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{D}})$, to również $f_n \in \mathcal{O}(\Delta) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Delta})$. Zauważmy ponadto, że jeśli $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ jest wielowskaźnikiem takim, że $|\alpha| \leq m$, to

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f_n}{\partial z^\alpha} = \left(\frac{Cc_2}{2} (dnp + 1) \right)^{\frac{1}{p}} \prod_{j=1}^d \frac{\partial^{\alpha_j} h_j^n}{\partial z_j^{\alpha_j}}.$$

Wtedy na mocy Lematu 4.7 jeśli $n > \alpha_j$, $j = 1, 2, \dots, d$, to istnieją stałe $M_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, d$, takie, że

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} f_n}{\partial z^\alpha}(z) \right| \leq \left(\frac{Cc_2}{2} (dnp + 1) \right)^{\frac{1}{p}} \prod_{j=1}^d M_j n^{\alpha_j} |h_j^{n-\alpha_j}(z_j)|.$$

Stąd jeśli $z \in W$, to istnieje takie $J \in \{1, 2, \dots, d\}$, że $z_J \notin \gamma_J(T_J \times \{1\})$, a zatem $|h_J(z_J)| < 1$. Istnieje więc takie $N_1 \in \mathbb{N}$, że jeśli $n \geq N_1$, to

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} f_n}{\partial z^\alpha}(z) \right| \leq \left(\frac{Cc_2}{2} (dnp + 1) \right)^{\frac{1}{p}} |h_J(z_J)|^{n-\alpha_J} \prod_{j=1}^d M_j n^{\alpha_j} < \varepsilon_1.$$

Podobnie, skoro $V \subset W$, to możemy wybrać $N_2 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq N_2$ prawdą jest, że jeśli $z \in V$, to

$$|f_n(z)|^p = \frac{Cc_2}{2} (dnp + 1) \prod_{j=1}^d |h_j(z_j)|^{np} \leq \frac{Cc_2}{2} (dnp + 1) |h_J(z_J)|^{np} < \varepsilon_2.$$

Stąd dla odpowiednio dużych n funkcja f_n spełnia warunki 1 – 2.

Niech $\delta \in (0, 1)$ będzie taka, że $\gamma_j(\partial\mathbb{D} \times [0, r]) \subset \delta$, $j = 1, 2, \dots, d$. Wtedy istnieje $N_3 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq N_3$ zachodzą nierówności $(1 - 2c_1(1 - r))^{dnp+1} < \frac{1}{2}$ oraz

$(dnp + 1)\delta^{dnp} < \frac{1}{c_2}$. Wtedy dla $z = (z_1, z_2, \dots, z_d) \in T_1 \times T_2 \times \dots \times T_d$ jeśli $n \geq N_3$, to otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_\gamma^p(f_n)(z) &\geq \int_r^1 |(f_n \circ \gamma)(z, t)|^p dt \\
&\geq \frac{Cc_2}{2}(dnp + 1) \int_r^1 \prod_{j=1}^d |(h_j \circ \gamma_j)(z_j, t)|^{np} dt \\
&\stackrel{(5.6)}{\geq} \frac{Cc_2}{2}(dnp + 1) \int_r^1 (1 - 2c_1(1 - t))^{dnp} dt \\
&= \frac{Cc_2}{4c_1} \left(1 - (1 - 2c_1(1 - r))^{dnp+1}\right) \\
&\geq \frac{Cc_2}{8c_1} = \eta C.
\end{aligned}$$

Z drugiej strony dla $z \in \partial_s \Delta$ ponownie jeśli $n \geq N_3$, to mamy:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_\gamma^p(f_n)(z) &= \int_0^1 |(f_n \circ \gamma)(z, t)|^p dt \\
&\leq \frac{Cc_2}{2}(dnp + 1) \int_0^1 \prod_{j=1}^d |(h_j \circ \gamma_j)(z_j, t)|^{np} dt \\
&\leq \frac{Cc_2}{2}(dnp + 1) \left(\int_0^r \prod_{j=1}^d |\gamma_j(z_j, t)|^{np} dt + \int_r^1 \prod_{j=1}^d |\gamma_j(z_j, t)|^{np} dt \right) \\
&\leq \frac{Cc_2}{2} r \delta^{dnp} + \int_r^1 \prod_{j=1}^d |\gamma_j(z_j, t)|^{np} dt \\
&\stackrel{(5.5)}{\leq} \frac{C}{2} + \frac{Cc_2}{2}(dnp + 1) \int_r^1 (1 - c_2(1 - t))^{dnp} dt \\
&\leq \frac{C}{2} + \frac{C}{2} \left(1 - (1 - c_2(1 - r))^{dnp+1}\right) \\
&\leq C.
\end{aligned}$$

Zatem dobierając odpowiednio duże $n \in \mathbb{N}$ możemy zagwarantować, że funkcja f_n spełnia warunki 1 – 4.

Podobnie jak w poprzednich rozdziałach pokażemy, że zwiększając $n \in \mathbb{N}$ funkcja f_n posiada własność prawie dodawania.

Wybierzmy $k \in \mathbb{N}$ takie, że $k \geq p$. Z nierówności trójkąta otrzymujemy, że dla $z \in \partial_s \Delta$ prawdą jest, że

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_\gamma^{\frac{p}{k}}(f_n^k + g^k)(z) &= \int_0^1 |((f_n^k + g^k) \circ \gamma)(z, t)|^{\frac{p}{k}} dt \\
&\leq \int_0^1 |(f_n \circ \gamma)(z, t)|^p dt + \int_0^1 |(g \circ \gamma)(z, t)|^p dt \\
&= \mathcal{R}_\gamma^p(f_n)(z) + \mathcal{R}_\gamma^p(g)(z).
\end{aligned}$$

Niech $a \in (0, 1)$ będzie takie, że $\int_a^1 |g(\gamma(z, t))|^p < \frac{\varepsilon_3}{8}$ dla $z \in \partial_s \Delta$ oraz niech $b \in (0, 1)$ będzie takie, że $\gamma_j(\partial \mathbb{D} \times [0, a]) \subset b \mathbb{D}$, $j = 1, 2, \dots, d$. Łatwo możemy oszacować, że

$$\begin{aligned} \int_0^a |f_n(\gamma(z, t))|^p dt &\leq \frac{Cc_2}{2} (dnp + 1) \int_0^a \prod_{j=1}^d |(h_j \circ \gamma_j)(z_j, t)|^{np} dt \\ &\leq \frac{Cc_2}{2} (dnp + 1) \int_0^a \prod_{j=1}^d |\gamma_j(z_j, t)|^{np} dt \\ &\leq \frac{Cc_2}{2} (dnp + 1) b^{dnp}. \end{aligned}$$

Stąd istnieje $N_4 \in \mathbb{N}$ takie, że jeśli $n \geq N_4$, to $\int_0^a |f_n(\gamma(z, t))|^p dt < \frac{\varepsilon_3}{8}$ dla wszystkich $z \in \partial_s \Delta$. Powyższe nierówności prowadzą do następującego oszacowania dla $z \in \partial_s \Delta$ i odpowiednio dużych $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\gamma^{\frac{p}{k}}(f_n^k + g^k)(z) &= \int_0^1 |(f_n^k + g^k)(\gamma(z, t))|^{\frac{p}{k}} dt \\ &= \int_0^a |(f_n^k + g^k)(\gamma(z, t))|^{\frac{p}{k}} dt + \int_a^1 |(f_n^k + g^k)(\gamma(z, t))|^{\frac{p}{k}} dt \\ &\geq \int_0^a |g(\gamma(z, t))|^p dt - \int_0^a |f_n(\gamma(z, t))|^p dt + \int_a^1 |f_n(\gamma(z, t))|^p dt \\ &\quad - \int_a^1 |g(\gamma(z, t))|^p dt \\ &= \mathcal{R}_\gamma^p(f_n)(z) + \mathcal{R}_\gamma^p(g)(z) - 2 \int_0^a |f_n(\gamma(z, t))|^p dt \\ &\quad - 2 \int_a^1 |g(\gamma(z, t))|^p dt \\ &> \mathcal{R}_\gamma^p(f_n)(z) + \mathcal{R}_\gamma^p(g)(z) - \frac{\varepsilon_3}{2}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeśli $0 < p \leq 1$, to wystarczy wybrać $k = 1$ i teza jest spełniona.

W przeciwnym przypadku będziemy potrzebować dodatkowych oszacowań. Na mocy Lematu 4.4 istnieją stała $C_1 > 0$ oraz $N_5 \in \mathbb{N}$ takie, że jeśli $n \geq N_5$, to $\left(\frac{nmp}{k} + 1\right) \int_0^1 |\gamma_j(w, t)|^{\frac{nmp}{k}} dt \leq C_1$ dla $w \in \partial \mathbb{D}$, $j = 1, 2, \dots, d$.

Następnie zdefiniujemy funkcję

$$\mathcal{I}_k^p(\gamma, f_n, g)(z) := \int_0^1 \left| \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m} (f_n(\gamma(z, t)))^m (g(\gamma(z, t)))^{k-m} \right|^{\frac{p}{k}} dt,$$

dla której jeśli $n \geq N_5$, to mamy następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_k^p(\gamma, f_n, g)(z) &\leq \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m}^{\frac{p}{k}} \int_0^1 |f_n(\gamma(z, t))|^{\frac{mp}{k}} |g(\gamma(z, t))|^{\frac{(k-m)p}{k}} dt \\
&\leq \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m}^{\frac{p}{k}} \left(\frac{Cc_2}{2}\right)^{\frac{m}{k}} L^{\frac{p(k-m)}{k}} (dnp+1)^{\frac{m}{k}} \int_0^1 \prod_{j=1}^d |h_j(\gamma_j(z_j, t))|^{\frac{npm}{k}} dt \\
&\leq \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m}^{\frac{p}{k}} \left(\frac{Cc_2}{2}\right)^{\frac{m}{k}} L^{\frac{p(k-m)}{k}} (dnp+1)^{\frac{m}{k}} \int_0^1 \prod_{j=1}^d |\gamma_j(z_j, t)|^{\frac{npm}{k}} dt \\
&\leq \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m}^{\frac{p}{k}} \left(\frac{Cc_2}{2}\right)^{\frac{m}{k}} L^{\frac{p(k-m)}{k}} (dnp+1)^{\frac{m}{k}} \int_0^1 |\gamma_1(z_1, t)|^{\frac{npm}{k}} dt \\
&\leq \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k}{m}^{\frac{p}{k}} \left(\frac{Cc_2}{2}\right)^{\frac{m}{k}} L^{\frac{p(k-m)}{k}} C_1 \frac{k(dnp+1)^{\frac{m}{k}}}{nmp+k}
\end{aligned}$$

dla $z \in \partial_s \Delta$. Stąd z kolei istnieje $N_6 \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathcal{I}_k^p(\gamma, f_n, g) < \frac{\varepsilon_3}{2}$ na $\partial_s \Delta$ dla $n \geq N_6$. Prowadzi to do następujących wniosków dla $z \in \partial_s \Delta$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_\gamma^p(f_n + g)(z) &= \int_0^1 |(f_n + g)(\gamma(z, t))|^p dt \\
&= \int_0^1 \left| |(f_n + g)(\gamma(z, t))|^k \right|^{\frac{p}{k}} dt \\
&= \int_0^1 \left| \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (f_n(\gamma(z, t)))^m (g(\gamma(z, t)))^{k-m} \right|^{\frac{p}{k}} dt \\
&\leq \int_0^1 |f_n(\gamma(z, t))|^p dt + \int_0^1 |g(\gamma(z, t))|^p dt + \mathcal{I}_k^p(\gamma, f_n, g)(z) \\
&< \mathcal{R}_\gamma^p(f_n)(z) + \mathcal{R}_\gamma^p(g)(z) + \frac{\varepsilon_3}{2}
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_\gamma^p(f_n + g)(z) &= \int_0^1 |(f_n + g)(\gamma(z, t))|^p dt \\
&= \int_0^1 \left| \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (f_n(\gamma(z, t)))^m (g(\gamma(z, t)))^{k-m} \right|^{\frac{p}{k}} dt \\
&\geq \int_0^1 |(f_n^k + g^k)(\gamma(z, t))|^{\frac{p}{k}} dt - \mathcal{I}_k^p(\gamma, f_n, g)(z) \\
&> \int_0^1 |f_n(\gamma(z, t))|^p dt + \int_0^1 |g(\gamma(z, t))|^p dt - \frac{\varepsilon_3}{2} - \frac{\varepsilon_3}{2} \\
&= \mathcal{R}_\gamma^p(f_n)(z) + \mathcal{R}_\gamma^p(g)(z) - \varepsilon_3,
\end{aligned}$$

jeśli $n \geq \max\{N_4, N_5, N_6\}$.

Na koniec zauważmy, że wystarczy wybrać $f := f_n$ z odpowiednio dużym n , a otrzymamy funkcję o pożądanym własnościach 1 – 5 i to kończy dowód.

□

Niech $N \in \mathbb{N}$. Dla takiego N możemy określić następującą rodzinę wielowskaźników $\mathcal{A}_N := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d : \alpha_j \in \{1, 2, \dots, N\}, j = 1, 2, \dots, d\}$. W takiej rodzinie możemy wprowadzić następujący porządek leksykograficzny " $<$ ".

Definicja 5.3. Niech $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathcal{A}_N$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathcal{A}_N$ będą różnymi wielowskaźnikami. Mówimy, że $\alpha < \beta$, jeżeli $\alpha_1 < \beta_1$ lub jeśli istnieje $l \in \{2, \dots, d\}$ takie, że $\alpha_m = \beta_m$ dla $m = 1, 2, \dots, l-1$ oraz $\alpha_l < \beta_l$.

Dla ustalonych $N \in \mathbb{N}$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{N})$ oraz $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathcal{A}_N$ będziemy rozważać następujące otwarte podzbiory zbioru $\partial_s \Delta$:

$$U_{\alpha, N, \theta} := \left\{ z \in \partial_s \Delta : \arg(z_j) \in \left(\frac{2\pi(\alpha_j - 1)}{N} - \theta, \frac{2\pi\alpha_j}{N} + \theta \right), j = 1, 2, \dots, d \right\}.$$

Zauważmy, że dla ustalonych $N \in \mathbb{N}$ oraz $\theta \in (0, \frac{\pi}{N})$ powyższe zbiory pokrywają cały brzeg Shilova polidysku, tj. $\partial_s \Delta = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_N} U_{\alpha, N, \theta}$, a dla $\theta = 0$ mamy pokrycie zbiorami

domkniętymi $\bar{U}_{\alpha, N, 0}$, tj. $\partial_s \Delta = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_N} \bar{U}_{\alpha, N, 0}$.

Dla zbioru $U_{\alpha, N, \theta}$ określamy również jego punkt środkowy, który nie zależy od wartości parametru θ :

$$z_{\alpha, N} := \left(e^{\frac{i\pi(2\alpha_1-1)}{N}}, e^{\frac{i\pi(2\alpha_2-1)}{N}}, \dots, e^{\frac{i\pi(2\alpha_d-1)}{N}} \right).$$

Dalej pokażemy, że brzeg Shilova polidysku jest pokryty zbiorami otwartymi $U_{\alpha, N, \theta}$ tak, że przecięcie maksymalnie 2^d tych zbiorów jest niepuste.

Lemat 5.4. Niech $N \in \mathbb{N}$ oraz $\theta \in (0, \frac{\pi}{N})$. Każdy punkt $z \in \partial_s \Delta$ należy do co najwyżej 2^d elementów zbioru $\{U_{\alpha, N, \theta} : \alpha \in \mathcal{A}_N\}$.

Dowód. Niech $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathcal{A}_N$ będą różnymi wielowskaźnikami. Z definicji, zbiory $U_{\alpha, N, \theta}$ i $U_{\beta, N, \theta}$ mają niepuste przecięcie wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta_i \in \{\alpha_i - 1, \alpha_i, \alpha_i + 1\}$, $i = 1, 2, \dots, d$. Z drugiej strony, zbiory $U_{\beta, N, \theta}$ dla których $\beta_i \in \{\alpha_i - 1, \alpha_i + 1\}$, nie mają części wspólnej. Stąd możemy zawęzić naszą uwagę tylko do zbiorów $U_{\beta, N, \theta}$, gdzie $\beta_i \in \{\alpha_i, \alpha_i + 1\}$ albo $\beta_i \in \{\alpha_i, \alpha_i - 1\}$, $i = 1, 2, \dots, d$. Zauważmy, że liczba elementów zbioru $\{U_{\beta, N, \theta} : \beta_i \in \{\alpha_i, \alpha_i + 1\}, i = 1, 2, \dots, d\}$ wynosi 2^d i to kończy dowód. $\square$

Powyższy lemat razem z Lematem 5.2 umożliwi nam aproksymację funkcji ciągłej na $\partial_s \Delta$ przez działanie operatora Radona na pewnej funkcji holomorficznej.

Lemat 5.5. Niech $p > 0$, $\gamma : \partial_s \Delta \times [0, 1] \rightarrow \bar{\Delta}$ będzie ścieżką regularną w Δ , $L > 0$ oraz $l \in \mathbb{N}$. Istnieje $c = c(\gamma) \in (0, 1)$ takie, że jeżeli Φ jest ściśle dodatnią funkcją ciągłą na $\gamma(\partial_s \Delta \times \{1\})$, $M > 0$, $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1)$ oraz $K \subset \subset \bar{\Delta} \setminus \gamma(\partial_s \Delta \times \{1\})$, to istnieje funkcja $F \in \mathcal{O}(\Delta) \cap \mathcal{C}^\infty(\bar{\Delta})$ o następujących własnościach:

1. $\left\| \frac{\partial^{|\beta|} F}{\partial z^\beta} \right\|_K < \delta_1$ dla dowolnego wielowskaźnika $\beta \in \mathbb{N}^d$ takiego, że $|\beta| \leq l$
2. $c(\Phi \circ \gamma)(z, 1) < \mathcal{R}_\gamma^p(F)(z) < (\Phi \circ \gamma)(z, 1)$ dla $z \in \partial_s \Delta$
3. $\left| \mathcal{R}_\gamma^p(F) + \mathcal{R}_\gamma^p(\varphi) - \mathcal{R}_\gamma^p(F + \varphi) \right| < \delta_2$ na $\partial_s \Delta$ dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{C}_M(\bar{\Delta})$.

Dowód. Weźmy $\eta \in (0, 1)$ z Lematu 5.2. Pokażemy, że dla lematu wystarczy wybrać $c := \frac{\eta}{2^{d+2}}$.

Niech $\varepsilon := \frac{\eta}{2^{d+2}} \inf_{z \in \partial_s \Delta} |(\Phi \circ \gamma)(z, 1)|$. Z ciągłości funkcji $(\Phi \circ \gamma)(\cdot, 1)$ na $\partial_s \Delta$, istnieje $N \in \mathbb{N}$ oraz wielowskaźniki $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{N^d} \in \mathcal{A}_N$ w porządku leksykograficznym takie, że zbiór $\partial_s \Delta$ może być pokryty przez N^d zbiorów otwartych $U_{\alpha_k} := U_{\alpha_k, N, \frac{\pi}{2N}}$, $k = 1, 2, \dots, N^d$, na których funkcja Φ jest ε -prawie stała, tzn. jeżeli z_{α_k} jest punktem środkowym zbioru U_{α_k} , to

$$(\Phi \circ \gamma)(z_{\alpha_k}, 1) - \varepsilon < (\Phi \circ \gamma)(z, 1) < (\Phi \circ \gamma)(z_{\alpha_k}, 1) + \varepsilon \quad \text{dla } z \in U_{\alpha_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N^d$$

$$\text{oraz } \partial_s \Delta = \bigcup_{k=1}^{N^d} U_{\alpha_k}.$$

Niech $T_{\alpha_k} := \bar{U}_{\alpha_k, N, 0}$, $k = 1, 2, \dots, N^d$. Stosując wielokrotnie Lemat 5.2 indukcyjnie skonstruujemy ciąg funkcji $\{f_{\alpha_k}\}_{k=1}^{N^d} \subset \mathcal{O}(\Delta) \cap \mathcal{C}^\infty(\bar{\Delta})$ o następujących własnościach:

- a) $\left\| \frac{\partial^{|\beta|} f_{\alpha_k}}{\partial z^\beta} \right\|_K < \frac{\delta_1}{N^d}$ dla dowolnego $\beta \in \mathbb{N}^d$ takiego, że $|\beta| \leq l$, $k = 1, 2, \dots, N^d$
- b) $\mathcal{R}_\gamma^p(f_{\alpha_k}) < \frac{1}{2^{d+1}} (\Phi \circ \gamma)(z_{\alpha_k}, 1)$ na $\partial_s \Delta$, $k = 1, 2, \dots, N^d$
- c) $\mathcal{R}_\gamma^p(f_{\alpha_k}) > \frac{\eta}{2^{d+1}} (\Phi \circ \gamma)(z_{\alpha_k}, 1)$ na T_{α_k} , $k = 1, 2, \dots, N^d$
- d) $\mathcal{R}_\gamma^p(f_{\alpha_k}) < \frac{\varepsilon}{2N^d}$ na $\partial_s \Delta \setminus U_{\alpha_k}$, $k = 1, 2, \dots, N^d$
- e) $\left| \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{j=1}^k f_{\alpha_j} + \varphi\right) - \mathcal{R}_\gamma^p(f_{\alpha_k}) - \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{j=1}^{k-1} f_{\alpha_j} + \varphi\right) \right| < \frac{\delta_2 \varepsilon}{2N^d}$ na $\partial_s \Delta$ dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{C}_M(\bar{\Delta})$, $k = 2, 3, \dots, N^d$.

Na początek skorzystajmy z Lematu 5.2 zastosowanego do następujących danych:

$$C := \frac{1}{2^{d+1}} (\Phi \circ \gamma)(z_{\alpha_1}, 1), \quad W := K, \quad T_1 \times T_2 \times \dots \times T_d := T_{\alpha_1}, \quad V := \partial_s \Delta \setminus U_{\alpha_1},$$

$$\varepsilon_1 := \frac{\delta_1}{N^d}, \quad \varepsilon_2 := \frac{\varepsilon}{2N^d}, \quad \varepsilon_3 := \frac{\delta_2 \varepsilon}{2N^d}, \quad L := M, \quad m := l, \text{ by otrzymać funkcję } f_{\alpha_1} \in \mathcal{O}(\Delta) \cap \mathcal{C}^\infty(\bar{\Delta}) \text{ taką, że}$$

- $\left\| \frac{\partial^{|\beta|} f_{\alpha_1}}{\partial z^\beta} \right\|_K < \frac{\delta_1}{N^d}$ dla dowolnego wielowskaźnika $\beta \in \mathbb{N}^d$ takiego, że $|\beta| \leq l$
- $\mathcal{R}_\gamma^p(f_{\alpha_1}) < \frac{1}{2^{d+1}} (\Phi \circ \gamma)(z_{\alpha_1}, 1)$ na $\partial_s \Delta$
- $\mathcal{R}_\gamma^p(f_{\alpha_1}) > \frac{\eta}{2^{d+1}} (\Phi \circ \gamma)(z_{\alpha_1}, 1)$ na T_{α_1}
- $\mathcal{R}_\gamma^p(f_{\alpha_1}) < \frac{\varepsilon}{2N^d}$ na $\partial_s \Delta \setminus U_{\alpha_1}$
- $\left| \mathcal{R}_\gamma^p(f_{\alpha_1} + \varphi) - \mathcal{R}_\gamma^p(f_{\alpha_1}) - \mathcal{R}_\gamma^p(\varphi) \right| < \frac{\delta_2 \varepsilon}{2N^d}$ na $\partial_s \Delta$ dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{C}_M(\bar{\Delta})$.

Postępując indukcyjnie, założymy, że funkcje $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \dots, f_{\alpha_k} \in \mathcal{O}(\Delta) \cap \mathcal{C}^\infty(\bar{\Delta})$ o wyżej wymienionych własnościach zostały już skonstruowane. Ponownie zastosujmy Lemat 5.2 do danych: $C := \frac{1}{2^{d+1}} (\Phi \circ \gamma)(z_{\alpha_{k+1}}, 1)$, $T_1 \times T_2 \times \dots \times T_d := T_{\alpha_{k+1}}$,

$V := \partial_s \Delta \setminus U_{\alpha_{k+1}}$, $\varepsilon_1 := \frac{\delta_1}{N^d}$, $\varepsilon_2 := \frac{\varepsilon}{2N^d}$, $\varepsilon_3 := \frac{\delta_2 \varepsilon}{2N^d}$, $L := \sup_{z \in \partial_s \Delta} \left| \sum_{j=1}^k f_{\alpha_j}(z) \right| + M$,

$m := l$. Tak dostajemy funkcję $f_{\alpha_{k+1}} \in \mathcal{O}(\Delta) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Delta})$ taką, że

- $\left\| \frac{\partial^{|\beta|} f_{\alpha_{k+1}}}{\partial z^\beta} \right\|_K < \frac{\delta_1}{N^d}$ dla dowolnego wielowskaźnika $\beta \in \mathbb{N}^d$ takiego, że $|\beta| \leq l$
- $\mathcal{R}_\gamma^p(f_{\alpha_{k+1}}) < \frac{1}{2^{d+1}} (\Phi \circ \gamma)(z_{\alpha_{k+1}}, 1)$ na $\partial_s \Delta$
- $\mathcal{R}_\gamma^p(f_{\alpha_k}) > \frac{\eta}{2^{d+1}} (\Phi \circ \gamma)(z_{\alpha_{k+1}}, 1)$ na $T_{\alpha_{k+1}}$
- $\mathcal{R}_\gamma^p(f_{\alpha_{k+1}}) < \frac{\varepsilon}{2N^d}$ na $\partial_s \Delta \setminus U_{\alpha_{k+1}}$
- $\left| \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{j=1}^{k+1} f_{\alpha_j} + \varphi\right) - \mathcal{R}_\gamma^p(f_{\alpha_{k+1}}) - \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{j=1}^k f_{\alpha_j} + \varphi\right) \right| < \frac{\delta_2 \varepsilon}{2N^d}$ na $\partial_s \Delta$ dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{C}_M(\overline{\Delta})$.

W ten sposób otrzymaliśmy ciąg funkcji $\{f_{\alpha_k}\}_{k=1}^{N^d}$ o pożądanых własnościach a)–e).

Teraz określmy funkcję $F := \sum_{k=1}^{N^d} f_{\alpha_k} \in \mathcal{O}(\Delta) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Delta})$. Funkcja ta spełnia warunek 1, tj. $\left\| \frac{\partial^{|\beta|} F}{\partial z^\beta} \right\|_K = \left\| \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial z^\beta} \sum_{k=1}^{N^d} f_{\alpha_k} \right\|_K \leq \sum_{k=1}^{N^d} \left\| \frac{\partial^{|\beta|} f_{\alpha_k}}{\partial z^\beta} \right\|_K < \delta_1$ dla dowolnego wielowskaźnika $\beta \in \mathbb{N}^d$ takiego, że $|\beta| \leq l$.

Następnie z własności e) zastosowanej do $\varphi \equiv 0$ wynika, że

$$\left| \mathcal{R}_\gamma^p(F) - \sum_{k=1}^{N^d} \mathcal{R}_\gamma^p(f_{\alpha_k}) \right| < \frac{\delta_2 \varepsilon}{2} \quad \text{na } \partial_s \Delta,$$

co łącząc z zależnością

$$\left| \mathcal{R}_\gamma^p(F + \varphi) - \sum_{k=1}^{N^d} \mathcal{R}_\gamma^p(f_{\alpha_k}) - \mathcal{R}_\gamma^p(\varphi) \right| < \frac{\delta_2 \varepsilon}{2} \quad \text{na } \partial_s \Delta \quad \text{dla dowolnej } \varphi \in \mathcal{C}_M(\overline{\Delta})$$

prowadzi do wniosku, że F spełnia warunek 3 tezy twierdzenia, tj.

$$\left| \mathcal{R}_\gamma^p(F + \varphi) - \mathcal{R}_\gamma^p(F) - \mathcal{R}_\gamma^p(\varphi) \right| < \delta_2 \varepsilon < \delta_2 \quad \text{na } \partial_s \Delta \quad \text{dla dowolnej } \varphi \in \mathcal{C}_M(\overline{\Delta}).$$

Z Lematu 5.4 wynika, że dowolny punkt $z \in \partial_s \Delta$ może należeć do co najmniej jednego zbioru z rodziny $\{T_{\alpha_k} : k = 1, 2, \dots, N^d\}$ oraz co najwyżej 2^d sąsiadujących zbiorów z rodziny $\{U_{\alpha_k} : k = 1, 2, \dots, N^d\}$.

Ustalmy dowolny $z \in \partial_s \Delta$. Wtedy istnieje $j \in \{1, 2, \dots, N^d\}$ oraz $m \in \{1, 2, \dots, 2^d\}$ takie, że $z \in T_{\alpha_j} \cap U_{\alpha_{j_1}} \cap U_{\alpha_{j_2}} \cap \dots \cap U_{\alpha_{j_m}}$ dla pewnych $j_1, j_2, \dots, j_m \in \{1, 2, \dots, N^d\}$. Z definicji zbiorów U_{α_k} funkcja Φ jest ε -stała na zbiorach U_{α_k} , czyli zachodzi zależność $(\Phi \circ \gamma)(z_{\alpha_k}, 1) - \varepsilon < (\Phi \circ \gamma)(z, 1) < (\Phi \circ \gamma)(z_{\alpha_k}, 1) + \varepsilon$, gdzie z_{α_k} jest punktem środkowym zbioru U_{α_k} , $k \in \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$. Ponadto $\mathcal{R}_\gamma^p(f_{\alpha_k})(z) < \frac{1}{2^{d+1}} (\Phi \circ \gamma)(z_{\alpha_k}, 1)$ dla $k \in \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$. Z drugiej strony, skoro $z \notin U_{\alpha_k}$, gdy $k \notin \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$, to

$\mathcal{R}_\gamma^p(f_{\alpha_k})(z) < \frac{\varepsilon}{2N^d}$ dla $k \notin \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$. Stąd otrzymujemy następujące szacowanie

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{k=1}^{N^d} f_{\alpha_k}\right)(z) &\stackrel{\text{e)}}{<} \sum_{k=1}^{N^d} \mathcal{R}_\gamma^p(f_{\alpha_k})(z) + \frac{\varepsilon}{2} \stackrel{\text{b),d)}}{<} \frac{1}{2^{d+1}} \sum_{i=1}^m (\Phi \circ \gamma)(z_{\alpha_{j_i}}, 1) + \varepsilon \\ &\leq \frac{1}{2} ((\Phi \circ \gamma)(z, 1) + \varepsilon) + \varepsilon \\ &< \frac{1}{2} (\Phi \circ \gamma)(z, 1) + \frac{\eta}{2^{d+1}} \inf_{z \in \partial_s \Delta} |(\Phi \circ \gamma)(z, 1)| \\ &\leq (\Phi \circ \gamma)(z, 1). \end{aligned}$$

Z drugiej strony, skoro $z \in T_{\alpha_j}$, to prawdą jest również, że

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{k=1}^{N^d} f_{\alpha_k}\right)(z) &\stackrel{\text{e)}}{>} \sum_{k=1}^{N^d} \mathcal{R}_\gamma^p(f_{\alpha_k})(z) - \frac{\varepsilon}{2} > \mathcal{R}_\gamma^p(f_{\alpha_j})(z) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\stackrel{\text{c)}}{>} \frac{\eta}{2^{d+1}} (\Phi \circ \gamma)(z_{\alpha_{j_1}}, 1) - \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\eta}{2^{d+1}} ((\Phi \circ \gamma)(z, 1) - \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \frac{\eta}{2^{d+1}} (\Phi \circ \gamma)(z, 1) - \varepsilon \\ &\geq \frac{\eta}{2^{d+1}} (\Phi \circ \gamma)(z, 1) - \frac{\eta}{2^{d+2}} \inf_{z \in \partial_s \Delta} |(\Phi \circ \gamma)(z, 1)| \\ &\geq \frac{\eta}{2^{d+2}} (\Phi \circ \gamma)(z, 1). \end{aligned}$$

Zatem skonstruowaliśmy funkcję F spełniającą tezę twierdzenia. $\square$

5.2. Rozwiązanie problemu Radona na polidysku w $\mathbb{C}^d$

W poprzedniej sekcji skonstruowaliśmy funkcje o pewnych własnościach, które wykorzystamy jako generatory rozwiązania odwrotnego problemu Radona na polidysku. Zapewnimy również, by rozwiązanie było klasy $\mathcal{C}^\infty$ na zbiorze $\overline{\Delta} \setminus \gamma(\partial_s \Delta \times \{1\})$.

Twierdzenie 5.6. *Ustalmy $p > 0$. Niech $\gamma: \partial_s \Delta \times [0, 1] \mapsto \overline{\Delta}$ będzie ścieżką regularną w Δ oraz H będzie ściśle dodatnią funkcją ciągłą na $\gamma(\partial_s \Delta \times \{1\})$. Istnieje funkcja $G \in \mathcal{O}(\Delta)$ taka, że*

$$\mathcal{R}_\gamma^p(G)(z) = (H \circ \gamma)(z, 1) \quad \text{dla } z \in \partial_s \Delta$$

oraz $G \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Delta} \setminus \gamma(\partial_s \Delta \times \{1\}))$.

Dowód. Niech $\{K_j\}_{j=0}^\infty \subset \overline{\Delta} \setminus \gamma(\partial_s \Delta \times \{1\})$ będzie ciągiem zbiorów zwartych takich, że $K_j \subset \text{int}(K_{j+1})$, $j = 0, 1, \dots$, oraz $\bigcup_{j=0}^\infty K_j = \overline{\Delta} \setminus \gamma(\partial_s \Delta \times \{1\})$. Niech $\{m_j\}_{j=0}^\infty \subset \mathbb{N}$ będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Dla ścieżki γ weźmy stałą $c = c(\gamma) \in (0, 1)$ z Lematu 5.5. Indukcyjnie skonstruujemy ciąg funkcji $\{F_j\}_{j=0}^\infty \subset \mathcal{O}(\Delta) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Delta})$ o następujących własnościach:

1. $\left\| \frac{\partial^{|\alpha|} F_j}{\partial z^\alpha} \right\|_{K_j} < 2^{-j}$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{N}^d$ takiego, że $|\alpha| \leq m_j$ $j = 0, 1, \dots$
2. $0 < \mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) (z) + \frac{c}{2} \left((H \circ \gamma)(z, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) (z) \right) < \mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^{j+1} F_i \right) (z) < (H \circ \gamma)(z, 1)$ dla $z \in \partial_s \Delta$, $j = 0, 1, \dots$

Niech $F_0 \equiv 0$. Następnie dla $j = 1$ stosujemy Lemat 5.5 do danych: $\Phi := H$, $K := K_1$, $\delta_1 := \frac{1}{2}$, $m := m_1$ i tak otrzymujemy funkcję $F_1 \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Delta})$ o powyższych własnościach. Dalej dla indukcji założymy, że funkcje $F_0, F_1, \dots, F_j \in \mathcal{O}(\Delta) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Delta})$ spełniające warunki 1 – 2 zostały już znalezione dla $j \geq 1$. Następnie stosując Lemat 5.5 do następujących danych:

$$(\Phi \circ \gamma)(\cdot, 1) := \frac{3}{4} \left((H \circ \gamma)(\cdot, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \right), \quad \delta_1 := 2^{-(j+1)}, \quad K := K_{j+1},$$

$$\delta_2 := \frac{c}{4} \inf_{z \in \partial_s \Delta} \left((H \circ \gamma)(z, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) (z) \right), \quad M := \sup_{z \in \partial_s \Delta} \left| \sum_{i=0}^j F_i(z) \right|, \quad m := m_{j+1}$$

dostajemy funkcję $F_{j+1} \in \mathcal{O}(\Delta) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Delta})$ taką, że

- $\left\| \frac{\partial^{|\alpha|} F_{j+1}}{\partial z^\alpha} \right\|_{K_{j+1}} < 2^{-(j+1)}$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{N}^d$ takiego, że $|\alpha| \leq m_{j+1}$
- $\frac{3c}{4} \left((H \circ \gamma)(\cdot, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \right) < \mathcal{R}_\gamma^p(F_{j+1}) < \frac{3}{4} \left((H \circ \gamma)(\cdot, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \right)$ na $\partial_s \Delta$
- $\mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^{j+1} F_i \right) > \mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) + \mathcal{R}_\gamma^p(F_{j+1}) - \frac{c}{4} \inf_{z \in \partial_s \Delta} \left((H \circ \gamma)(z, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) (z) \right)$ na $\partial_s \Delta$
- $\mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^{j+1} F_i \right) < \mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) + \mathcal{R}_\gamma^p(F_{j+1}) + \frac{c}{4} \inf_{z \in \partial_s \Delta} \left((H \circ \gamma)(z, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) (z) \right)$ na $\partial_s \Delta$.

Z powyższych nierówności możemy otrzymać następujące oszacowania na $\partial_s \Delta$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^{j+1} F_i \right) &> \mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) + \mathcal{R}_\gamma^p(F_{j+1}) - \frac{c}{4} \inf_{z \in \partial_s \Delta} \left((H \circ \gamma)(z, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) (z) \right) \\ &> \mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) + \frac{3c}{4} \left((H \circ \gamma)(\cdot, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \right) \\ &\quad - \frac{c}{4} \left((H \circ \gamma)(\cdot, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \right) \\ &= \mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) + \frac{c}{2} \left((H \circ \gamma)(\cdot, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p \left(\sum_{i=0}^j F_i \right) \right) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^{j+1} F_i\right) &< \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right) + \mathcal{R}_\gamma^p(F_{j+1}) + \frac{c}{4} \inf_{z \in \partial_s \Delta} \left((H \circ \gamma)(z, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right)(z) \right) \\
&< \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right) + \frac{3}{4} \left((H \circ \gamma)(\cdot, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \left((H \circ \gamma)(\cdot, 1) - \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right) \right) \\
&= (H \circ \gamma)(\cdot, 1).
\end{aligned}$$

Zatem skonstruowaliśmy ciąg funkcji $\{F_j\}_{j=0}^\infty$ o własnościach 1 – 2. Z warunku 1 wnioskujemy, że ciąg funkcji $\left\{\sum_{i=0}^j F_i\right\}_{j=0}^\infty$ jest zbieżny jednostajnie na zwartych podzbiórach $\overline{\Delta} \setminus \gamma(\partial_s \Delta \times \{1\})$, a więc funkcja $\sum_{j=0}^\infty F_j$ jest holomorficzną w Δ . Z drugiej strony z warunku 2 wynika, że $\left\{\mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{i=0}^j F_i\right)\right\}_{j=0}^\infty$ jest rosnącym ciągiem zbieżnym punktowo do funkcji H na $\partial_s \Delta$. Zatem na mocy twierdzenia Diniego (Twierdzenie 7.13, [32]) jest on również zbieżny jednostajnie do funkcji $(H \circ \gamma)(\cdot, 1)$ na $\partial_s \Delta$. Stąd funkcja $G := \sum_{j=0}^\infty F_j \in \mathcal{O}(\Delta)$ jest rozwiązaniem problemu Radona na polidysku Δ , tj.

$$\mathcal{R}_\gamma^p(G) = \mathcal{R}_\gamma^p\left(\sum_{j=0}^\infty F_j\right) = (H \circ \gamma)(\cdot, 1) \text{ na } \partial_s \Delta.$$

Niech $k \in \mathbb{N}$ oraz $\beta \in \mathbb{N}^d$ będzie wielowskaźnikiem takim, że $|\beta| = k$. Ustalmy $\omega \in \overline{\Delta} \setminus \gamma(\partial_s \Delta \times \{1\})$ oraz $r \in (0, \text{dist}(\omega, \gamma(\partial_s \Delta \times \{1\})))$. Wtedy istnieje liczba $N \in \mathbb{N}$ taka, że $\mathbb{B}_d(\omega, r) \subset \text{int}(K_n)$ oraz $m_n \geq k$ dla $n \geq N$. Stąd

$$\left| \frac{\partial^{|\beta|} G}{\partial z^\beta}(\omega) \right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{\partial^{|\beta|} F_j}{\partial z^\beta}(\omega) \right| + \sum_{j=n}^\infty 2^{-j} < \infty.$$

Z dowolności ω i k otrzymujemy, że $G \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Delta} \setminus \gamma(\partial_s \Delta \times \{1\}))$ i to kończy dowód. $\square$

Na koniec tego rozdziału zwróćmy uwagę, że wyniki otrzymane na polidysku Δ w $\mathbb{C}^d$ również można zastosować w przypadku jednowymiarowym na dysku jednostkowym $\mathbb{D}$. Dostajemy tym samym inną metodę konstrukcji rozwiązania odwrotnego problemu Radona na $\mathbb{D}$.

Zakończenie

W niniejszej rozprawie rozważaliśmy całkowy operator Radona działający w przestrzeni funkcji holomorficznym oraz istnienie rozwiązania odwrotnego problemu Radona zadanego przez ten operator. Przedstawiliśmy kilka konstrukcji rozwiązań odwrotnego problemu Radona dla funkcji holomorficznym na pewnych obszarach z jedno- i wielowymiarowej przestrzeni zespolonej. Mimo że przedstawione wyniki dostarczają nam pewnych informacji na temat własności brzegowych funkcji analitycznych, to wciąż nie wyczerpują poruszonego tematu, a wręcz prowadzą do stawiania kolejnych pytań i problemów otwartych.

Na początek przypomnijmy wypowiedź Twierdzenia 3.23:

Twierdzenie 3.21. *Niech Ω będzie obszarem ściśle wypukłym kołowym. Niech $p > 0$ oraz Φ będzie ściśle dodatnią funkcją ciągłą na $\partial\Omega$. Istnieje funkcja holomorficzna $f = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$, gdzie p_n są wielomianami jednorodnymi, taka, że*

1. $\mathcal{R}^p(f) = \Phi$ na $\partial\Omega$
2. każde cięcie zespolone funkcji $\mathcal{S}^p(f)$ ma rozbieżny szereg współczynników Taylora z dowolną potęgą $s < \min\{1, p\}$, tzn. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|p_n(z)|}{\sqrt[p]{pn+1}} \right)^s = \infty$, $s < \min\{1, p\}$, $z \in \partial\Omega$
3. jeśli $p \leq 1$, to $\mathcal{S}^p(f) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$
4. jeśli $p \in (1, 2]$, to $\mathcal{S}^p(f) \in L^2(z\partial\mathbb{D}, \lambda)$, $z \in \partial\Omega$.

Ze względu na ograniczenia narzucone na wartości wykładnika p , twierdzenie to jest źródłem kilku problemów otwartych. Jak wspomnieliśmy w rozdziale 3 dla $p = 2$ dzięki ortogonalności konstruowanych tam wielomianów, możemy zapewnić, by każde cięcie zespolone funkcji $\mathcal{S}^2(f)$ miało rozbieżny szereg współczynników Taylora z dowolną potęgą $s < 2$. Pozostaje zatem pytanie: Czy również dla pozostałych $p > 1$ własność ta może zostać zachowana z dowolną potęgą $s < p$? Podobnie możemy zastanawiać się czy można skonstruować rozwiązanie problemu Radona f spełniające warunki 1 i 2 tak, by funkcja $\mathcal{S}^p(f)$ była ciągła do brzegu również gdy $p > 1$. Oczywiście w tym przypadku warunek 4 również byłby spełniony, gdyż wynika on wprost z własności 3. Jednakże nie mając odpowiedzi na powyższe pytanie, również zapewnienie słabszej własności dla funkcji $\mathcal{S}^p(f)$, tj. całkowalności z kwadratem po okręgach wyznaczonych przez punkty brzegowe obszaru Ω w przypadku, gdy $p > 2$ byłoby wzmocnieniem

twierdzenia. Na koniec w rozdziale 3 pokazaliśmy, że funkcję ciągłą Φ w Twierdzeniu 3.23 można zastąpić funkcją półciągłą z dołu zachowując własności 1 i 2. Jednakże w naszym podejściu do rozwiązania problemu Radona straciliśmy pozostałe warunki 3 oraz 4. Stąd pozostaje pytanie: Czy posługując się być może innymi technikami jesteśmy w stanie skonstruować rozwiązanie problemu Radona zadaną funkcją Φ półciągłą z dołu, takie, aby zachodziły wszystkie warunki 1-4?

Naturalnym zagadnieniem wynikającym z rozważań opisanych w rozdziałach 3 oraz 4 jest pytanie o istnienie rozwiązania odwrotnego problemu Radona na obszarze ściśle wypukłym kołowym Ω , gdzie operator Radona jest określony jako całka po krzywych innych niż proste $\gamma: \partial\Omega \times [0, 1] \ni (z, t) \mapsto zt \in \overline{\Omega}$, przykładowo po ścieżkach niestycznie przecinających brzeg obszaru Ω . Następnie można by się zastanowić na uogólnieniu problemu na obszary ściśle wypukłe, niekoniecznie kołowe. Byłoby to o tyle istotne, że w przypadku pozytywnej odpowiedzi, korzystając z twierdzenia Fornassa o zanurzeniu obszarów ściśle pseudowypukłych w obszarach ściśle wypukłych z przestrzeni wyższego wymiaru (Twierdzenie 3.2.3, [24]) moglibyśmy rozwiązać problem Radona na obszarach ściśle pseudowypukłych podobnie jak w pracy [20], gdzie problem ten został już postawiony, ale rozwiązany jedynie w prawie wszystkich punktach brzegowych tego obszaru. Stąd istnienie rozwiązania problemu w pełnej wersji, tj. we wszystkich punktach brzegowych obszaru ściśle pseudowypukłego wciąż pozostaje problemem otwartym.

We wstępie wspomnieliśmy, że odwrotny problem Radona jest w pewnym sensie podobny do zagadnienia istnienia funkcji wewnętrznej w wielowymiarowej przestrzeni zespolonej. Po tym jak przedstawiono pierwsze konstrukcje funkcji wewnętrznych w kuli jednostkowej w $\mathbb{C}^d$, $d > 1$, zaczęto się zastanawiać jakie dodatkowe własności mogą posiadać wielowymiarowe funkcje wewnętrzne. Okazało się, że można skonstruować funkcje wewnętrzne bez zer wewnątrz rozważanych obszarów. Takie funkcje otrzymano przykładowo w pracach [22, 30, 31]. Podobnie możemy zastanawiać się czy rozwiązania problemu Radona również mogą mieć taką własność. W rozdziale 2 pokazaliśmy coś przeciwnego w przypadku jednowymiarowym, tj. istnienie rozwiązania problemu Radona o nieskończenie wielu zerach wewnątrz dysku jednostkowego. Jednak istnienie rozwiązania problemu Radona bez zer nawet w przypadku jednowymiarowym wydaje się być problemem nietrywialnym.

Tych kilka przykładowych problemów (według naszej aktualnej wiedzy) otwartych mogą stanowić inspirację do dalszych badań nad odwrotnym problemem Radona dla funkcji holomorficznych na ograniczonych obszarach z wielowymiarowej przestrzeni zespolonej.

Bibliografia

- [1] Aleksandrov A. B., *The existence of inner functions in the ball*, Mat. Sb. (N.S.), 118(160):2(6), 147–163(1982); Math. USSR-Sb., 46:2, 143–159 (1983).
- [2] Aleksandrov A. B., *Inner functions on compact spaces*, Functional Anal. Appl. 18(1984), s. 87–98.
- [3] Deans S. R., *The Radon Transform and Some of Its Applications*, John Wiley & Sons Ltd., New York (1983).
- [4] Gakhov F. D., *Boundary value problems*, Pergamon (1966) (Translated from Russian)
- [5] Gronwall T. H., *On the Fourier coefficients of a continuous function*, Bull. Amer. Math. Soc. 27, no. 7, 320–321 (1920)
- [6] Hayman W. K., Kennedy P. B., *Subharmonic functions*, vol. 1. Academic Press, London (1976).
- [7] Helgason S., *The Radon transform*, Springer, New York (1980).
- [8] Jakóbczak P., *Highly nonintegrable functions in the unit ball*, Israel Journal of Mathematics 97(1997), 175–181.
- [9] Jihuai S., *Some Applications of the Ryll-Wojtaszczyk Polynomials*, Acta Mathematica Sinica, English Series 1(4)(1985), s. 359–365.
- [10] Karaś M., Kot P., *Divergent series of Taylor coefficients on almost all slices*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 26(2019), s. 1–9.
- [11] Kot P., *Description of simple exceptional sets in the unit ball*, Czech. Math. J. 54(2004), s. 55–63.
- [12] Kot P., *Maximum sets of semicontinuous functions*, Potential Anal. 23(4) (2005), s. 323–356.
- [13] Kot P., *Exceptional sets with a weight in a unit ball*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 13, no. 1 (2006), s. 43–53.
- [14] Kot P., *On analytic functions with divergent series of Taylor coefficients*, Complex Anal. Oper. Theory (2017)
- [15] Kot P., *Peak set on the unit disc*, Technical Transactions Fundamental Sciences 1-NP (2016), s. 81–84.
- [16] Kot P., *A holomorphic function with given almost all boundary values on a domain with holomorphic support function*, J. Convex Anal. 14(4) (2007), s. 693–704.
- [17] Kot P., *p -Radial Exceptional Sets and Conformal Mappings*, Canad. Math. Bull. 50(4) (2007), s. 579–587.
- [18] Kot P., *Homogeneous polynomials on strictly convex domains*, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), s. 3895–3903.

- [19] Kot P., *Bounded holomorphic functions with given maximal modulus on all circles*, Proc. Am. Math. Soc. 137 (2009), s. 179–187.
- [20] Kot P., *Radon inversion problem for holomorphic functions on strictly pseudoconvex domains*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 17 (2010), s. 623–640.
- [21] Kot P., *About boundary values in $A(\Omega)$* . Trans. Am. Math. Soc. 363(8) (2011), s. 4063–4079.
- [22] Kot P., *Zero free inner function on every single slice*, Journal of Convex Analysis 26 (2017), s. 117–127.
- [23] Kot, P., Pierzchała, P., *The Radon Inversion Problem for Holomorphic Functions in the Unit Disc*, Comput. Methods Funct. Theory 22 (2022), 135–156.
- [24] Krantz, S., *Function Theory of Several Complex Variables*, American Mathematical Society, Providence, RI, (2001).
- [25] Løw E., *A construction of inner functions on the unit ball in $\mathbb{C}^p$* , Inventiones mathematicae 67 (1982), s. 223–229.
- [26] Pierzchała, P., Kot, P., *Radon Inversion Problem for Holomorphic Functions on Circular, Strictly Convex Domains*, Complex Anal. Oper. Theory 15, 80 (2021).
- [27] Pommerenke, C., *Boundary Behavior of Conformal Maps*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 299, Springer-Verlag, Berlin (1992).
- [28] Radon J., *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse 69 (1917), s. 262–277.
- [29] Rudin W., *Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$* , Reprint of the 1980 edition. In: Classics in Mathematics. Springer, Berlin (2008)
- [30] Rudin W., *Inner functions in the unit ball of $\mathbb{C}^n$* , Journal of Functional Analysis 50(1) (1983), s. 100–126.
- [31] Rudin W., *Inner functions in the unit ball of $\mathbb{C}^n$* , CBMS Regional Conf. Ser. in Math. (63), Amer. Math. Soc., (1986).
- [32] Rudin W., *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd Edition, McGraw-Hill, New York (1976).
- [33] Rudin W., *Real and Complex Analysis*, 3rd Edition, McGraw-Hill, New York (1987).
- [34] Ryll J., Wojtaszczyk P., *On homogeneous polynomials on a complex ball*, Trans. Amer. Math. Soc. 276 (1983), s. 107–116.
- [35] Wojtaszczyk P., *On functions in the ball algebra*, Proc. Am. Math. Soc. 85(2) (1982), s. 184–186.
- [36] Wojtaszczyk P., *On highly nonintegrable functions and homogeneous polynomials*, Annales Polonici Mathematici 65 (1997), s. 245–251.